МАИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Москва • 2006

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(государственный технический университет)

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Методические указания
к выполнению расчетной работы
по математическому анализу

Утверждено
на заседании редсовета
15 мая 2000 г.

Москва
Издательство МАИ
2006

Автор-составитель Р.Н. Молодожникова

Элементы теории функций комплексного переменного и операционное исчисление: Методические указания к выполнению расчетной работы по математическому анализу / Авт.-сост. Р.Н. Молодожникова. — М.: Изд-во МАИ, 2006. — 80 с.: ил.

Рекомендации составлены в соответствии с ныне действующей программой по курсу "Математический анализ" и включают указания к решению вариантов расчетной работы по разделу "Элементы ТФКП и операционное исчисление".

Предназначены для студентов 1 факультета групп 01-201-216. Могут быть полезны преподавателям математики МАИ, а также студентам вечерних факультетов.

Рецензенты: *А.А. Грешилов, А.А. Басистов*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методические рекомендации входят в серию работ по созданию методического обеспечения цикла лекций, практических занятий и видов контроля по математике для студентов младших курсов МАИ. Одной из форм активизации учебного процесса по математике служит система расчетных работ (РР).

Применение системы РР рекомендовано действующей программой по высшей математике для всех инженерно-технических специальностей факультета № 1. Основой системы РР является индивидуализация заданий. Задачи — расчетные задания, входящие в предложенные варианты, различны. Каждый студент учебной группы получает индивидуальное задание. Расчетные задания выполняются частями по мере продвижения в изучении курса. Решение каждой задачи приводится на отдельных листах, неверно решенные примеры возвращаются на доработку с указанием характера ошибки.

Защита РР осуществляется в форме собеседования, срок защиты устанавливается учебным графиком. Повторная защита проводится вне сетки расписания в письменной форме или путем собеседования (в каждом случае по усмотрению преподавателя). Промежуток времени до повторной защиты не должен превышать одной недели.

РР обеспечивает семестровый курс. Если соответствующий раздел излагается в меньшем объеме, РР подлежит сокращению.

Настоящие методические рекомендации обеспечивают учебным пособием самостоятельное выполнение заданий РР студентами второго курса первого факультета под контролем преподавателя. Это первая попытка в создании методического обеспечения специальных разделов курса высшей математики в соответствии с новыми учебными планами.

Пособие содержит варианты РР по теории функций комплексного переменного (ТФКП) и операционному исчислению. Задачи представлены 20 вариантами (см. приложение), отражают не все разделы курса в равной мере. Поэтому важно, чтобы РР и текущие домашние задания дополняли друг друга. Пособие содержит также теоретические вопросы, упражнения и справочный материал в соответствии с содержанием РР. Теоретические вопросы прорабатываются по лекционному материалу и обсуждаются на аудиторных занятиях.

РЕШЕНИЕ ТИПИЧНЫХ ЗАДАЧ ВАРИАНТОВ РР

1. Комплексные числа. Действия над комплексными числами

Множеством $C = \{z\}$ комплексных чисел называется множество упорядоченных пар действительных чисел, на котором определены понятия равенства, операции сложения и умножения следующим образом:

1) $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ и $b = d$;

2) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;

3) $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$,

где $a, b, c, d \in R$.

В частности $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ и $(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$, поэтому комплексное число вида $(a, 0)$ обычно отождествляют с действительным числом a. Действительное число $(a, 0)$ принадлежит множеству C и поэтому $R \subset C$. Нулем множества C служит пара $(0,0)$, а роль действительной единицы играет пара $(1, 0)$. Комплексное число $(0, 1)$ называют мнимой единицей и обозначают $i = (0, 1)$. Мнимая единица удовлетворяет соотношению $i^2 = -1$. Для любого комплексного числа (a, b) справедливо равенство $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$, поэтому комплексное число z обычно записывают как $z = a + bi$ (алгебраическая форма записи).

Число $a \in R$ называется действительной частью комплексного числа $z = a + bi$ и обозначается $a = \operatorname{Re} z$. Число $b \in R$ называется мнимой частью комплексного числа и обозначается $b = \operatorname{Im} z$. Если $a = 0$, $b \neq 0$, то числа $z = bi$ называют мнимыми.

Действия над комплексными числами подчиняются тем же законам, что и действия над действительными числами: коммутативному и ассоциативному — для сложения и умножения, дистрибутивному — для умножения относительно сложения. Комплексные числа можно изображать точками на плоскости, принимая действительную часть за абсциссу, а мнимую — за ординату.

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Если $b = 0$, то $z = a \in R$ и $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$, т. е. для действительного числа понятия модуля и абсолютной величины совпадают. Поэтому в множестве C для модуля числа принято то же обозначение, что и для абсолютной величины числа в множестве R. На множестве C комплексных чисел модуль числа обладает всеми признаками абсолютной величины действительного числа. Для любых чисел $z, w \in C$ справедливы соотношения:

1) $|z| \geq 0$, причем $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

2) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;

3) $|z + w| \leq |z| + |w|$, причем

$$|z + w| = |z| + |w| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ w = kz, \text{ где } k \geq 0. \end{array}\right.$$

Аргументом ненулевого комплексного числа $z = a + bi$ называется определенный с точностью до слагаемого, кратного 2π, угол, обозначаемый $\varphi = \arg z$ и удовлетворяющий соотношениям $\cos\varphi = \frac{a}{r}$; $\sin\varphi = \frac{b}{r}$, где $r = |z|$, $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Значение угла $\varphi \in (-\pi, \pi]$, определенное однозначно, называется главным значением аргумента и обозначается $\arg z$.

Комплексное число $z = a - bi$ называется сопряженным комплексному числу $z = a + bi$. Для любого числа $z \in C$ справедливы равенства:

$$\operatorname{Re}\bar{z} = \operatorname{Re} z,\ \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im}\bar{z},\ \overline{(\bar{z})} = z$$

Число $z \in R \Leftrightarrow \bar{z} = z$ и $z = bi \Leftrightarrow \bar{z} = -z$. Для любых чисел $z \in C$, $w \in C$ справедливы равенства: $|\bar{z}| = |z|$, $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$,

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$. Вычитание и деление комплексных чисел определяются как действия, обратные соответственно сложению и умножению. Если $z \neq 0$, $w \in C$, то уравнение $zx = w$ имеет на множестве C единственное решение $x = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}$, называемое частным чисел w и z. Если $z = a + bi$ и $w = c + di$, то

$$x = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}\, i.$$

Любое ненулевое число $z \in C$ можно представить в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, производится по следующим формулам:

$$(r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1))(r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)) =$$

$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

т. е. при умножении комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются;

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

т. е. при делении двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, модуль делимого делится на модуль делителя, а аргументы вычитаются.

Возведение комплексного числа в n-ю степень ($n \in N$) производится в соответствии с соотношением:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(формула Муавра).

Для любого ненулевого числа $z \in C$ и любого значения $n \in N$ уравнение $x^n = z$ на множестве комплексных чисел имеет ровно n различных решений, называемых корнями n-й степени из числа z.

Корнями n-й степени из единицы являются числа $x_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$. Корнями n-й степени из числа $z \neq 0$ являются числа $x_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$, где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Заметим, что $\left|\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right| = 1$, поэтому все n значений $\sqrt[n]{z}$ имеют один и тот же модуль: $|z_0| = |z_1| = |z_2| = \ldots = |z_{n-1}| = \sqrt[n]{r}$ (корень арифметический). Аргумент z_0 равен $\frac{\varphi}{n}$, аргументы чисел z_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ получают по формуле $\arg z_k = \arg z_0 + \frac{2\pi k}{n}$, где $\arg z_0 = \frac{\varphi}{n}$.

Формула для нахождения значений z_k корня $\sqrt[n]{z}$ имеет простой геометрический смысл: числа $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ изображаются векторами, концы которых находятся в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$.

1. Показать на комплексной плоскости числа: $\frac{2+i}{3-i}$, $\frac{1-i}{1+i}$, i^{131}, i^{4n}, i^{4n+1}, $\overline{i^{4n} \cdot i^{4n+3}}$.

Решение.

$$\frac{2+i}{3-i} = x + iy \Longleftrightarrow 2 + i = (x+iy)(3-i) \Longleftrightarrow$$

$$2 + i = 3x + y + i(3y - x) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2 = 3x + y \\ 1 = -x + 3y \end{cases} \Longleftrightarrow x = y = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+1)} = \frac{1 - 2i + i^2}{2} = -i;$$

$$i^{4n} = (i^2)^{2n} = (-1)^{2n} = 1; \qquad i^{4n+1} = i;$$

$$i^{131} = (i^4)^{32} \cdot i^3 = -i; \quad \overline{i^{4n} \cdot i^{4n+3}} = \overline{1 \cdot (-i)} = i.$$

2. Извлечь корень $\sqrt{3 - 4i}$.

Понятие арифметического корня вводится только на $R \subset C$, поэтому находим значения алгебраического корня по определению:

$$3 - 4i = (x + iy)^2, \text{ где } z = x + iy = \sqrt{3 - 4i}.$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = +1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = -1, \end{cases}$$

т. е. имеем два значения: $z_1 = -2 + i, \quad z_2 = 2 - i$.

Проверкой можно убедиться в справедливости полученного ответа.

Задача извлечения корня $\sqrt[n]{z}$ связана с трудоемкой операцией: возведение в степень n и решение системы, если $n > 2$. Задача упрощается, если использовать тригонометрическую форму записи комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, $\varphi = \arg z + 2\pi k, \ k \leq z$.

Замечание 1. Выбор промежутка для главного значения аргумента $\arg z$ следует согласовать с лектором. Как правило, полагают $-\pi < \arg z \leq \pi$. На занятии надо подчеркнуть, что функция $w = \arg z$: а) не определена для $z = 0$; б) разрывна в точках, в которых $x < 0, \ y = 0$. Можно записать выражение $\arg z$ через $\arg \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$ в разных четвертях:

$$\arg z = \begin{cases} \arg \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}, \ x > 0 \quad \text{(I, IV четверти)} \\ \pi + \arg \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}, \ x < 0, \ y \geq 0 \quad \text{(II четверть)} \\ -\pi + \arg \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}, \ x < 0, \ y < 0 \quad \text{(III четверть)} \end{cases}$$

При $x = 0$ и $y > 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$; при $x = 0$ и $y < 0$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$.

Аргумент числа $z=0$ не определен. Из определения обратных тригонометрических функций следует: $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}$, $0 < \operatorname{arcctg} z < \pi$.

Полезно в некоторых ответах выписывать и $\arg z$, и $\operatorname{Arg} z$. Следует сразу приучить студентов оперировать с комплексными числами в показательной форме записи: $z = r\,e^{i\varphi} = r\,e^{i\arg z}$. В частности, выписать на доске для запоминания:

$$e^{2k\pi i} = 1\ (k \in Z);\quad e^{+\frac{\pi}{2}i} = i;\quad e^{\pi i} = -1;\quad e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i.$$

Можно в некоторых примерах получить ответ дважды, используя алгебраическую и показательную формы записи комплексного числа.

Замечание 2. Комплексные числа геометрически интерпретируются точками декартовой плоскости xoy. Очевидно, что между множеством C и множеством точек этой плоскости существует взаимно-однозначное соответствие, поэтому множество C называют комплексной плоскостью и обозначают $C = \{z\}$.

Замечание 3. Сумма и произведение комплексно-сопряженных чисел — числа действительные: $z + \bar{z} = 2x$; $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$; здесь $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Заметим также:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2\ ;\quad \bar{z}_1 - \bar{z}_2 = \overline{z_1 - z_2}\ ;$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2\ ;\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\ ;$$

$$\overline{(z_n)} = (\bar{z})^n\ ;\quad \overline{P_n\,(z)} = P_n\,(\bar{z}),$$

где $P_n\,(z)$ — многочлен степени n с действительными коэффициентами. Например,

$$\overline{2z^2 - 3z + 1} = 2\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 1.$$

Поэтому, если $D < 0$, то

$$(x - z)(x - \overline{z}) = x^2 + px + q,$$

где $p, q \in R$, т. е. квадратный трехчлен с действительными коэффициентами в случае $\frac{p^2}{4} - q < 0$ имеет пару комплексно-сопряженных корней.

Замечание 4. Надо напомнить, что для квадратных уравнений с комплексными коэффициентами справедлива та же формула для корней, что и в случае действительных коэффициентов. Действительно, $\sqrt{-1} = \pm i$; $\sqrt{a + bi}$ имеет два и только два различных значения.

Замечание 5. Если каждой точке M плоскости z отнести радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$, то появится возможность представлять комплексные числа векторами. Сложение и вычитание комплексных чисел сводится к сложению и вычитанию соответствующих векторов.Отсюда следует, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 имеют место соотношения: $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$; $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$ $(z_1 = (z_1 - z_2) + z_2)$. Модуль разности комплексных чисел равен расстоянию между точками z_1 и z_2.

При умножении комплексных чисел модули перемножаются, аргументы складываются; при делении комплексных чисел модули делятся, аргументы вычитаются.

Из правила умножения комплексных чисел следует

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \text{ (формула Муавра).}$$

Раскрывая левую часть этой формулы по формуле бинома Ньютона и отделяя действительную часть от мнимой, получим формулы для косинуса и синуса кратных углов:

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \ldots,$$

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \ldots .$$

Тригонометрическая форма записи $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ приводит к простому правилу извлечения корней из комплексных чисел:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Отсюда следует: корень n-ой степени из комплексного числа $z \neq 0$ имеет n и только n различных значений. Соответствующие им точки лежат на одной окружности с центром в точке O и делят эту окружность на n равных частей; поэтому эти точки являются вершинами правильного n-угольника с центром 0. В частности, при $z = 1$ $(r = 1, \varphi = 0)$:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Показать на комплексной плоскости z:

$$\frac{1}{i},\ \frac{1}{3-4i},\ \frac{2+2i}{-3+i},\ (i+1)^3,\ i^{240},\ i^{103},\ \overline{(1-i)(2+i)}.$$

2. Решить систему

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i; \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i. \end{cases}$$

3. Найти $f(2-i)$, $f\left(\frac{1}{i}\right)$, если $f(z) = \frac{z^2}{z}$.

Найти $g(-1-i)$, $g(\bar{z}/z)$, если $g(z) = z \cdot \bar{z}^2$.

4. Записать в показательной форме:

$$3 + 4i,\ -3 + 4i,\ -3 - 4i,\ 3 - 4i;$$

найти модули и аргументы: $1 - \sqrt{2}i$, $1 + \sqrt{2}i$, $(1 - \sqrt{2})\, i$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt{\sqrt{3} + i}$, $-i\, e^{-i\pi/7}$, $\frac{1+i}{1-i}$.

5. Вычислить

$$(1-i)^8,\ \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{25}.$$

6. Найти все значения корней

$$\sqrt[3]{-i},\ \sqrt[3]{1},\ \sqrt[3]{-1},\ \sqrt[6]{8},\ \sqrt{3+4i}.$$

7. Решить уравнения:

$$z^5 + 2 = 0;\ \ z^3 - 2i = 0;\ \ z^7 + 1 - i = 0;$$

$$2z^8 + 1 = 0;\ \ z^6 - 4z^3 + 8 = 0;\ \ z^8 - 2\sqrt{3}\,z^4 + 4 = 0;$$

$$(3 + 2i)\,z - (3 - 2i)\,\bar{z} + 10i = 0;\ \ |z| = 5;$$

$$\operatorname{Im} z^2 = 1;\ \ |z + 1| + |z - 1| = 4;\ \ |z| = 1 - \operatorname{Re} z.$$

2. Основные элементарные функции комплексного переменного. Вычисление функции в заданной точке

Основными элементарными функциями являются

$$z^n,\ e^z,\ \sin z,\ \cos z,\ \operatorname{sh} z,\ \operatorname{ch} z,\ \ln z.$$

Полагаем по определению (естественное продолжение в комплексную область соответствующих функций действительного переменного):

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad R = \infty \quad (|z| < \infty);$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad R = \infty \quad (|z| < \infty);$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad R = \infty \quad (|z| < \infty);$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad R = \infty \quad (|z| < \infty);$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad R = \infty \quad (|z| < \infty).$$

С помощью определения, используя свойства абсолютно сходящихся рядов, можно установить:

1) теорему сложения: $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$, откуда

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| = e^x \;;$$

2) $e^z \neq 0$ при любом z;

3) e^z **периодична с периодом** $T = 2\pi i$: $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$;

4) $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (формула Эйлера);

5) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$,

$\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\sin z$ и $\cos z$ периодические с $T = 2\pi$; $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ периодические с $T = 2\pi i$;

6) $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$;

7) формулы связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$\operatorname{sh} z = -i\sin iz$, $\operatorname{th} z = -i\operatorname{tg} iz$, $\operatorname{ch} z = \cos iz$, $\operatorname{cth} z = i\operatorname{ctg} iz$;

8) имеют место основные тригонометрические соотношения, в том числе теоремы сложения для синуса и косинуса:

$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$;

$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$;

$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_2 \operatorname{ch} z_1$;

$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$;

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1;$

9) неограниченность $\sin z$ и $\cos z$ по модулю, т. е. для любого $M > 0$ существует z такое, что $|\sin z| > M$, $|\cos z| > M$:

$$\cos iy = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \underset{y \to \infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Заметим, что $\operatorname{Ln} z$, где $z \neq 0$, определяется как отображение, обратное функции e^z, причем

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i (\arg z + 2\pi k), \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Значение функции, которое получается при $k = 0$, называется главным значением и обозначается $\ln z = \ln |z| + i \arg z$. Обычные правила логарифмирования остаются в силе.

Замечание. Функция $\ln z$ разрывна вдоль отрицательной части действительной оси. Удобно ввести термин “разрез”, можно записать: $\ln |x| + i\pi = \ln (x + i0) \neq \ln (x - i0) = \ln |x| - i\pi$ при $x < 0$. Можно выделить непрерывные ветви $\operatorname{Ln} z$ и z^a, $a \in R$, в плоскости с разрезом по любому лучу, выходящему из точки 0: $(\operatorname{Ln} z)_\alpha = \ln |z| + i\varphi, \ -\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha$, так что $(\operatorname{Ln} z)_0 = \ln z$ — главная веточка.

Замечание. Основные элементарные функции можно определить просто следующими формулами:

1) $e^z = e^x (\cos x + i \sin y)$;

2) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$;

3) $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$;

4) $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$, $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$;

5) $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i (\arg z + 2\pi k)$, $k \in Z$; если $k = 0$, то $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ — главное значение логарифма (главная веточка);

$a^z = e^{z \ln a}$, $\forall\ a \in C$, $a \neq 0$, $a \neq 1$;

$z^a = e^{a \ln z}$, $\forall\ a \in C$.

1. **Вычислить значения функций:**

а) $e^{\frac{2+\pi i}{3}}$; б) $\sin(5-i)$; в) $\operatorname{ch}(-1+i)$; г) $\ln(-2-i)$; $\operatorname{Ln}(-2-i)$; д) i^i; е) 2^{1+i}.

Решение:

а) $e^{\frac{2+\pi i}{3}} = e^{2/3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt[3]{e^2}}{2}(1 + i\sqrt{3})$;

б) $\sin(5-i) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(5-i)} - e^{-i(5-i)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{1+5i} - e^{-1-5i}\right) =$

$= -\frac{i}{2}\left[e(\cos 5 + i\sin 5) - e^{-1}(\cos 5 - i\sin 5)\right] =$

$= -\sin 5\,\frac{e+e^{-1}}{2} - i\cos 5\,\frac{e-e^{-1}}{2} = -\sin 5\operatorname{ch}1 - i\cos 5\operatorname{sh}1 \approx$

$\approx -\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 0{,}29\right)\cdot 1{,}54 - i\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 0{,}29\right)\cdot 1{,}18 \approx 1{,}48 - i\,0{,}34$

(отметим, что, $|\sin(5-i)| > 1$);

г) $\ln(-2-i) = \ln|-2-i| + i\arg(-2-i) =$

$= \ln\sqrt{5} + i\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \pi\right)$, $\ln(-2-i) = \frac{1}{2}\ln 5 + i\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \pi\right)$;

$\operatorname{Ln}(-2-i) = \frac{1}{2}\ln 5 + i\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + (2k-1)\pi\right)$, $k \in Z$.

Заметим, что натуральный логарифм комплексного числа всегда комплексное число в смысле главного значения;

д) $i^i = e^{i[\ln|i| + i(\arg i + 2\pi k)]} = e^{i\left(i\frac{\pi}{2} + 2\pi k i\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}$,

$k = 0, \pm 1, \ldots$.

При $k = 0$: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$. Числа $i^i \in R$;

е) $2^{i-1} = e^{(i-1)\ln 2} = e^{-\ln 2}(\cos \ln 2 + i \sin \ln 2)$ при $k = 0$ (главное значение).

2. Вычислить значение функции $w = f(z)$ в данной точке z_0:

1) $f(z) = e^z$, $z_0 = \dfrac{1+i}{i}$;

$$e^{z_0} = e^{\frac{1+i}{i}} = e^{1-i} = e\,[\cos(-1) + i \sin(-1)] = e\,(\cos 1 - i \sin 1);$$

2) $f(z) = \operatorname{sh}\left(\bar{z} - \dfrac{\pi i}{3}\right)$, $z_0 = 2 + \dfrac{\pi i}{3}$;

$$\operatorname{sh}\left(\bar{z}_0 - \frac{\pi i}{3}\right) = \operatorname{sh}\left(2 - \frac{\pi i}{3} - \frac{\pi i}{3}\right) = \operatorname{sh}\left(2 - \frac{2\pi i}{3}\right) = \operatorname{sh} 2 \cdot \operatorname{ch} \frac{2}{3}\pi i -$$

$$- \operatorname{ch} 2 \cdot \operatorname{sh} \frac{2}{3}\pi i = \operatorname{sh} 2 \cdot \cos \frac{2}{3}\pi - i \operatorname{ch} 2 \cdot \sin \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 -$$

$$- i \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} 2 = -\frac{1}{2} \frac{e^2 - e^{-2}}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{e^2 + e^{-2}}{2} =$$

$$= -\frac{1}{4}(e^2 - e^{-2}) - i \frac{\sqrt{3}}{4}(e^2 + e^{-2});$$

3) $f(z) = \operatorname{Ln}(1 - z^2)$, $z_0 = -1 + 2i$;

$$f(z_0) = \operatorname{Ln}(1 - z_0^2) = \operatorname{Ln}[1 - (-1 + 2i)^2] = \operatorname{Ln}(4 + 4i) =$$

$$= \ln|4 + 4i| + i \operatorname{Arg}(4 + 4i) = \ln 4\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in Z.$$

3. Найти модуль и аргумент числа:

а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + i \ln 2\right)$; б) $z_0 \cdot e^{z_0}$, где $z_0 = \pi i$.

Решение:

а) $w = \cos z$, $w = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, $u = \cos x \operatorname{ch} y$, $v = -\sin x \operatorname{sh} y$

$$|w| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\cos^2 x \cdot \text{ch}^2\, y + \sin^2 x \cdot \text{sh}^2\, y};$$

$$x = \frac{\pi}{2}; \quad y = \ln 2; \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0; \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1;$$

$$\text{ch}\, y = \text{ch} \ln 2 = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4},$$

$$\text{sh}\, y = \text{sh} \ln 2 = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow |w| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{4};$$

$$\text{tg}\, \varphi = -\frac{\sin x \cdot \text{sh}\, y}{\cos x \cdot \text{ch}\, y} = -\,\text{tg}\, x \cdot \text{tg}\, y \,\Big|_{\frac{\pi}{2} + i \ln 2} = -\infty,$$

т.е. $\arg f(z_0) = -\dfrac{\pi}{2}$, где $f(z) = \cos z$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2} + i \ln 2$.

б) $w = z\, e^z$, $|w| = |z| \cdot |e^z| \Rightarrow |w_0| = |\pi i| \cdot |e^{\pi i}| = \pi \cdot 1 = \pi$,

$$\arg w_0 = \arg(\pi i \cdot e^{\pi i}) = \arg \pi i + \arg e^{\pi i} = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} \left(\text{или } -\frac{\pi}{2}\right);$$

$\text{Arg}\, w_0 = \arg w_0 + 2\pi k$, $k \in Z$, где $w_0 = z_0 \cdot e^{z_0} = \pi i e^{\pi i} = -\pi i$.

4. Найти модуль и аргумент $(-1)^{\sqrt{2}}$.

Решение.

$$(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\text{Ln}(-1)} = e^{\sqrt{2}\,(\text{Ln}\, 1 + i(\pi + 2k\pi))} = e^{i[\sqrt{2}(\pi + 2k\pi)]}, \; k \in Z;$$

при $k = 0$: $(-1)^{\sqrt{2}} = e^{i\sqrt{2}\pi}$; $|(-1)^{\sqrt{2}}| = 1$ $\arg(-1)^{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}$.

5. Решить уравнения:

а) $e^z + i = 0$; б) $\sin z = \pi i$; в) $\cos z = 2$; г) $\text{sh}\, z - \text{ch}\, z = 2i$;

д) $e^{2z} + e^z + 1 = 0$.

Решение.

а) $e^z = -i \Rightarrow z = \mathrm{Ln}\,(-i) = \ln 1 + i\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$,

$k \in Z$; при $k = 0$: $z = -\dfrac{\pi}{2}\,i$;

б) $\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \pi i \Leftrightarrow e^{2iz} + 2\pi e^{iz} - 1 = 0$,

$e^{iz} = w \Rightarrow w^2 + 2\pi w - 1 = 0,\ w_{1,2} = -\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 1}$,

$e^{iz} = -\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 1} \Leftrightarrow iz = \mathrm{Ln}\,(-\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 1}) \Leftrightarrow z =$

$= \dfrac{1}{i}\,\mathrm{Ln}\,(-\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 1}) = -i\,\mathrm{Ln}\,(-\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 1})$ (здесь корень $\sqrt{\pi^2 + 1}$ — арифметический).

Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить значение функции $f(z)$ в данной точке z_0:

$$f(z) = e^{z^2};\ z_0 = (1 + i)\sqrt{\pi};\ f(z) = \cos z;\ z_0 = \frac{\pi}{2} + i\ln 2;$$

$$f(z) = \mathrm{sh}\, z,\ z_0 = \ln 3 + i\,\frac{\pi}{4},\ f(z) = \ln\,(1 + z^2),\ z_0 = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}.$$

2. Вычислить $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - i\ln 2\right)$, найти модуль и аргумент

$$\mathrm{Ln}\,\frac{1 + i}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{Ln}\,\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},\quad \mathrm{Ln}\,(-1 + 2i).$$

3. Решить уравнения

$$\sin z = 0,\ \cos z = 0,\ \sin z = 1,\ \cos z = 1,\ \sin z = 2,$$
$$\cos z = 2,\ \sin z = i.$$

4. Решить уравнения

$$e^{-2z} + e^{-z} + 1 = 0,\ \cos^2 z - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos z = 0,\ \sin z = \frac{4i}{3}.$$

5. Доказать, что

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \ \ \sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right),$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \ \ \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

6. Найти все значения

$$(-i)^i, \ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}, \ (-3+4i)^{1+i}, \ 2^{-1+i}, \ \operatorname{Arcsin} 2, \ \operatorname{Arccos} i.$$

7. Доказать, что $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$,

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{z^2 + 1}), \ \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i + z}{i - z}$$

(эти формулы необязательно запоминать).

8. Найти все значения

$\operatorname{Arctg}(1 + i)$, $\operatorname{Arccos} 2$, $\operatorname{Arcth}(1 - i)$, $\operatorname{Arcctg} i$, $\operatorname{Arccth}(1 + i)$.

9. Решить уравнение $\sin z + \cos z = 2$.

3. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши—Римана

Производной от функции $w = f(z)$ в точке z_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента в этой точке при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, а предел существует и конечен:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{w(z_0 + \Delta z) - w(z_0)}{\Delta z}.$$

Производная от функции комплексного переменного может быть найдена:

1) по формуле $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$;

2) по формуле $f'(z) = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Функция называется дифференцируемой в точке z_0, если она имеет в этой точке конечную производную.

Функция $f(z)$ дифференцируется по обычным формулам дифференцирования, известным для функций действительного переменного.

Функция комплексного переменного называется аналитической в области G, если она имеет в каждой ее точке конечную производную (дифференцируемая в каждой точке этой области).

Замечание. Аналитичность функции определяется только для открытого связного множества (области), поэтому, если говорят, что функция аналитическая в точке, то это означает, что она имеет конечную производную в точке и в некоторой окрестности этой точки.

Из определения следует, что сумма, произведение и частное двух функций, аналитических в области G, есть аналитическая в этой области, за исключением тех точек, где знаменатель обращается в нуль (в случае частного). Оказывается, что аналитическая функция имеет производные всех порядков. Следовательно, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют частные производные любого порядка.

Условия Коши—Римана. Чтобы функция $w = f(z)$ была дифференцируемой в точке z_0, необходимо и достаточно:

а) существование и непрерывность частных производных $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ в точке z_0;

б) выполнение условий Коши—Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ в точке z_0.

Отыскание области аналитичности функции. Для определения области аналитичности функции $f(z)$ необходимо:

1) выделить действительную и мнимую части функции

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y);$$

2) проверить выполнение условий Коши—Римана;

3) множество тех точек, в которых частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ существуют и выполняются условия Коши—Римана, и будет являться областью аналитичности данной функции.

Найдем области аналитичности следующих функций:

1. $w = \operatorname{ch} z$.

Выделим действительную и мнимую части функции:

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch}(x + iy) = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y;$$

$$u = \operatorname{ch} x \cos y; \quad v = \operatorname{sh} x \sin y.$$

Проверим выполнение условий Коши—Римана:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{sh} x \cos y; & \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{sh} x \cos y; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\operatorname{ch} x \sin y; & \frac{\partial v}{\partial x} = \operatorname{ch} x \sin y; \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{array}$$

Так как частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ существуют во всех точках z и условия Коши—Римана выполнены во всех точках z, то функция $w = \operatorname{ch} z$ аналитична во всей комплексной плоскости.

2. $f(z) = \bar{z} + z^2$.

$$f(z) = \bar{z} + z^2 = (x - iy) + (x + iy)^2 = x - iy + x^2 - y^2 + 2xyi =$$

$$= x + x^2 - y^2 + i(2xy - y); \quad u = x + x^2 - y^2; \quad v = 2xy - y.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 + 2x; & \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; & \frac{\partial v}{\partial x} = 2y; \end{array}\right| \quad \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$f(z) = \bar{z} + z^2$ не аналитична ни в одной точке.

3. $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

$$f(z) = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right);$$

$$u = x + \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad v = y - \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 + \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; & \dfrac{\partial v}{\partial y} = 1 + \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; & \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{array}$$

Так как лишь только в точке $z = 0$ частные производные не существуют, то данная функция аналитична во всех точках, кроме точки $z = 0$.

Самостоятельно найти область аналитичности для следующих функций:

1. $f(z) = az^3 - bz$;
2. $f(z) = \ln z$;
3. $f(z) = z^2 \cdot |z|$.

Функция двух действительных переменных $u(x, y)$, определенная в области D, имеющая в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно, удовлетворяющие уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, называется гармонической в области D. Между аналитическими и гармоническими функциями имеется простая связь.

Если функция $f(z)$ аналитична в области D, то ее действительная и мнимая части являются гармоническими функциями. Условия гармоничности функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ являются необходимыми условиями аналитичности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, но не достаточными.

В случае односвязной области D справедливо обратное предложение: всякая гармоническая функция является действительной частью некоторой аналитической функции. Действительно, если $u(x, y)$ — гармоническая функция в области D, то можно найти такую функцию $v(x, y)$, которая связана с $u(x, y)$ уравнениями Коши—Римана:

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, если заметить, что выражения $P = -\frac{\partial u}{\partial y}$ и $Q = \frac{\partial u}{\partial x}$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\right).$$

Следовательно, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — аналитическая функция в области D.

Если задана одна гармоническая функция $u(x, y)$ или $v(x, y)$, то можно восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Действительно, пусть дана функция $u(x, y)$, тогда $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$. Зная $f'(z)$, можно найти первообразную $f(z)$ с помощью интегрирования.

1. Убедиться в том, что существует аналитическая функция $f(z)$, для которой функция $v(x, y) = 3x + 2xy$ может быть мнимой частью, и найти эту функцию.

Необходимым условием существования аналитической функции является тот факт, что ее действительная и мнимая части должны быть гармоническими функциями. Проверим, является ли данная функция $v(x, y)$ гармонической:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial x} = 3 + 2y; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0; \\ &\frac{\partial v}{\partial y} = 2x; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0; \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Функция $v(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, следовательно, она гармоническая.

Найдем $f'(z)$ по формуле $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$f'(z) = 2x + i(3 + 2y) = 3i + 2(x + iy) = 3i + 2z.$$

Найдем функцию $f(z)$, интегрируя $f'(z)$:

$$f(z) = \int (3i + 2z)\, dz = 3iz + z^2 + C.$$

2. Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если $u = e^x \cos y$ и $f(2\pi i) = 1$.

Функция $u = e^x \cos y$ является гармонической (необходимое условие аналитичности функции $f(z)$), так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cos y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\, e^x \sin y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\, e^x \cos y$$

$$\text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Найдем производную

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + i\, e^x \sin y \text{ и выделим } z:$$

$$f'(z) = e^x \cdot e^{iy} = e^{x + iy} = e^z.$$

Найдем функцию $f(z)$ по ее производной:

$$f(z) = e^z + C.$$

Вычислим C:

$$f(2\pi i) = e^{2\pi i} + C = 1 \iff 1 + C = 1 \iff C = 0,$$

поэтому $f(z) = e^z$.

Гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, связанные между собой условиями Коши—Римана, называются сопряженными гармоническими функциями.

Сопряженная гармоническая функция определена с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Задача отыскания сопряженной гармонической функции есть задача интегрирования полного дифференциала.

3. Построить аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, если $\operatorname{Re} f(z) = \ln(x^2 + y^2)$ и $f(i) = 0$.

Найдем функцию

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \int_{x_0}^{x} -\frac{2y}{x^2 + y^2}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{2x_0}{x_0^2 + y^2}\,dy + C =$$

$$= -2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\Bigg|_{x_0}^{x} + 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x_0}\Bigg|_{y_0}^{y} + C = -2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C_1.$$

Следовательно,

$$f(z) = \ln(x^2 + y^2) + \left(-2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C_1\right)i.$$

Найдем C_1 согласно условию $f(i) = 0$:

$$0 = \ln(0 + 1) + (-2\operatorname{arctg} 0 + C_1)\, i \Leftrightarrow C_1 i = 0,$$

т.е. $C_1 = 0$ и $f(z) = \ln(x^2 + y^2) - 2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}\, i$.

Для заданной гармонической функции $u(x, y)$ построили аналитическую функцию, действительная часть которой совпадает с функцией $u(x, y)$.

Контрольное задание

1. Убедиться в том, что существует аналитическая функция $f(z)$, для которой:

а) $\operatorname{Im} f(z) = 3x + 2xy$; $\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 - x$;

б) $\operatorname{Re} f(z) = \cos x \cdot \operatorname{ch} y$;

в) $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $x > 0$.

Найти эти функции, если $f(z_0) = 1$ (z_0 выбрать самостоятельно).

2. Найти область аналитичности функций:

$$\text{а) } \cos z; \quad \text{б) } \sin \frac{1}{z}; \quad \text{в) } e^{z^2}; \quad \text{г) } z^n.$$

4. Функция комплексного переменного как отображение. Конформные отображения

I. Рассмотрим две комплексные плоскости z и w. Первая содержит точки $z = x + iy$, вторая — точки $w = u + iv$. Пусть $\{z\}$ — некоторое множество точек z, а $\{w\}$ — некоторое множество точек w. Функцией комплексного переменного f или отображением множества $\{z\}$ на множество $\{w\}$ называется такое соответствие, при котором каждому элементу $z \in \{z\}$ соответствует определенный элемент $w \in \{w\}$, где $w = f(z)$ — образ элемента z, который называется прообразом элемента w.

Всякая функция комплексного переменного может быть записана в виде $w = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — действительные функции действительных переменных x и y. Например,

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi;$$
$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

II. Отыскание образа линии. В плоскости z задана линия $F(x, y) = 0$. Найти образ этой линии на плоскости w при отображении с помощью функции $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Для решения этой задачи нужно из системы уравнений

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

выразить x и y через u и v. Подставив полученные выражения x и y в уравнение линии, получим образ этой линии в плоскости w: $\Phi(u, v) = 0$.

III. Линейная функция $w = az + b$ производит отображение по следующему правилу: прямая переходит в прямую, окружность — в окружность.

Функция $w = \frac{1}{z}$ отображает окружность в окружность в расширенном понимании (см. с. 37).

Функция $w = \frac{1}{z}$ отображает прямые и окружности, проходящие через начало координат в прямые, так как точка $z = 0$ отображается в бесконечноудаленную точку $w = \infty$. Прямые и окружности, не проходящие через начало координат, функция $w = \frac{1}{z}$ отображает в окружности. Аналогично производит отображение функция более общего вида $w = \frac{az + b}{cz + d}$ (см. с. 36).

Задача 1. Дана линейная функция $w = 2z - 3i$. Найти:

а) образ точки $z_0 = 1 - i$;

б) образ прямой $x - y = 2$;

в) образ окружности $|z + 1 - i| = \frac{1}{2}$;

г) образ треугольника ABO, если A(2,0), B(1,1), O(0,0).

Получим:

а) $w_0 = 2z_0 - 3i$; $w_0 = 2\ (1 - i) - 3i = 2 - 5i$.

Тогда точка $z_0 = 1 - i$ отображается в точку $w_0 = 2 - 5i$ (рис. 1);

б) для нахождения образа линии выделим в данной функции действительную и мнимую части

$$w = 2\ (x + iy) - 3i = 2x + i\ (2y - 3).$$

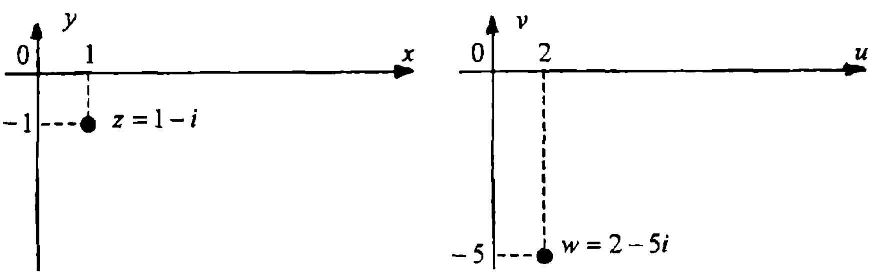


Рис. 1

Получим

$$\begin{cases} u = 2x; \\ v = 2y - 3. \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений относительно x и y. Получим $x = \frac{u}{2}$, $y = \frac{v+3}{2}$. Подставив их в уравнение $x - y = 2$, будем иметь $\frac{u}{2} - \frac{v+3}{2} = 2$, $u - v = 7$ (рис. 2.);

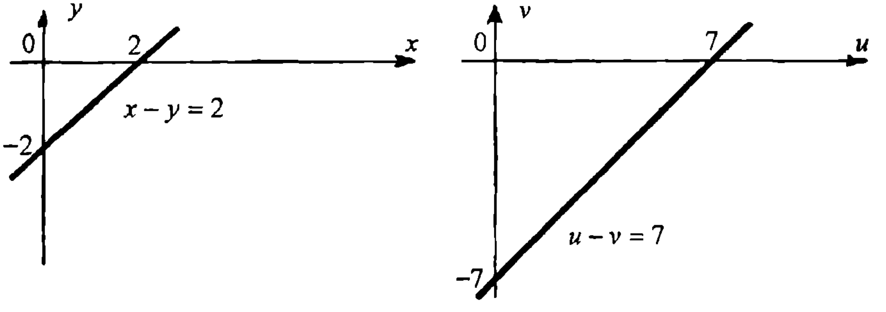


Рис. 2

в) так как в уравнение заданной линии входит z, найдем $z = \frac{w + 3i}{2}$ из данной функции $w = 2z - 3i$ и подставим в уравнение окружности $\left|\frac{w + 3i}{2} + 1 - i\right| = \frac{1}{2}$. Получим $|w + 2 + i| = 1$. Следовательно, окружность $|z + 1 - i| = \frac{1}{2}$ переходит в окружность $|w + 2 + i| = 1$ с помощью функции $w = 2z - 3i$ (рис. 3);

г) при отыскании образа треугольника ABO нужно найти образы всех его сторон. Зная, что прямая переходит в прямую с помощью линейной функции, достаточно найти образы вершин треугольника ABO:

$O(0, 0)$, $z = 0$, $w = -3i$, $O'(0; -3)$;

$A(2, 0)$, $z = 2$, $w(2) = 4 - 3i$, $A'(4; -3)$;

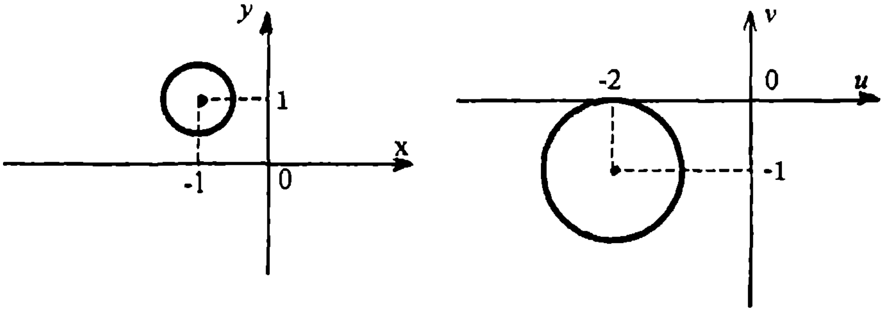


Рис. 3

$B(1,\ 1),\quad z = 1 + i,\quad w(1 + i) = 2\ (1 + i) - 3i = 2 - i,\quad B'(2;\ -1).$

Треугольник ABO переходит в треугольник $A'B'O'$ на плоскости w, треугольник $A'B'O'$ подобен треугольнику ABO (рис. 4).

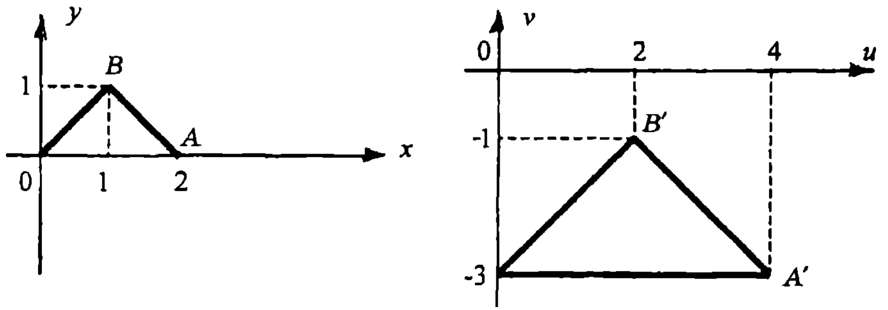


Рис. 4

Задача 2. Дана функция $w = \dfrac{1}{z}$. Найти образы следующих линий:

а) $y = \dfrac{1}{3}\,x$; б) $x - y = \dfrac{1}{2}$;

в) $x^2 + y^2 = -\,4y$; г) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

а) так как функция $w = \frac{1}{z}$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие между точками z и w, то можно разрешить ее относительно z и выделить действительную и мнимую части z:

$$z = \frac{1}{w} = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{u}{u^2 + v^2} - i\,\frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Тогда

$$\begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2 + v^2}; \\ y = -\dfrac{v}{u^2 + v^2}. \end{cases}$$

Подставив полученные выражения для x и y в уравнение прямой $y = \frac{1}{3}x$, образ которой нужно найти, получим

$$-\frac{v}{u^2 + v^2} = \frac{1}{3}\,\frac{u}{u^2 + v^2}; \quad v = -\frac{1}{3}u.$$

Прямая $y = \frac{1}{3}x$, проходящая через начало координат, отображается в прямую $v = -\frac{1}{3}u$, проходящую через начало координат (рис. 5);

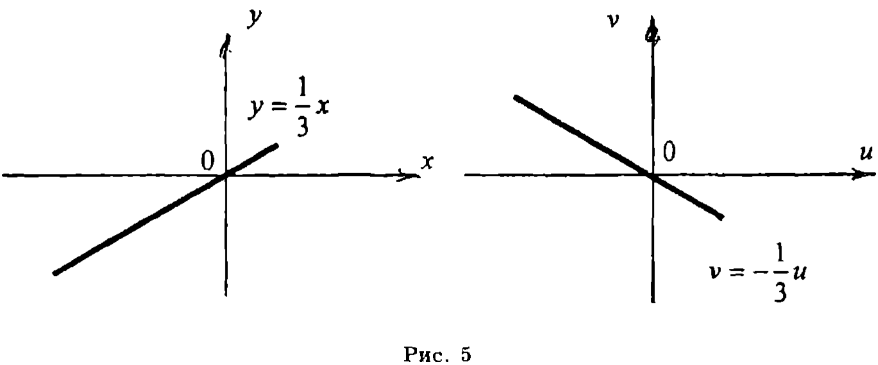


Рис. 5

б) подставим x и y в уравнение прямой $x - y = \frac{1}{2}$, получим

$$\frac{u}{u^2 + v^2} + \frac{v}{u^2 + v^2} = \frac{1}{2}; \quad u^2 + v^2 - 2u - 2v = 0;$$

$$(u - 1)^2 + (v - 1)^2 = 2.$$

Прямая $x - y = \frac{1}{2}$, не проходящая через начало координат, переходит в окружность $(u - 1)^2 + (v - 1)^2 = 2$, проходящую через начало координат (рис. 6);

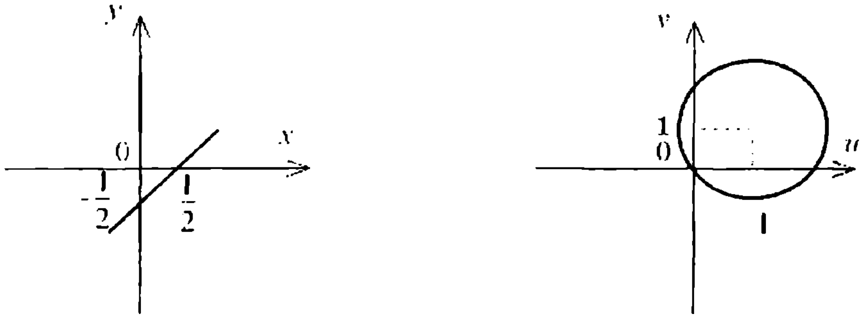


Рис. 6

в) в уравнение окружности $x^2 + y^2 = -4y$ подставим x и y, выраженные через u и v:

$$\frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2} = \frac{4v}{(u^2 + v^2)}; \quad \frac{1}{u^2 + v^2} = \frac{4v}{u^2 + v^2}.$$

Получим $4v = 1$, $v = \frac{1}{4}$.

Окружность $x^2 + y^2 = -4y$, проходящая через начало координат, переходит в прямую $v = \frac{1}{4}$, не проходящую через начало координат (рис. 7).

г) аналогично окружность $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ переходит в

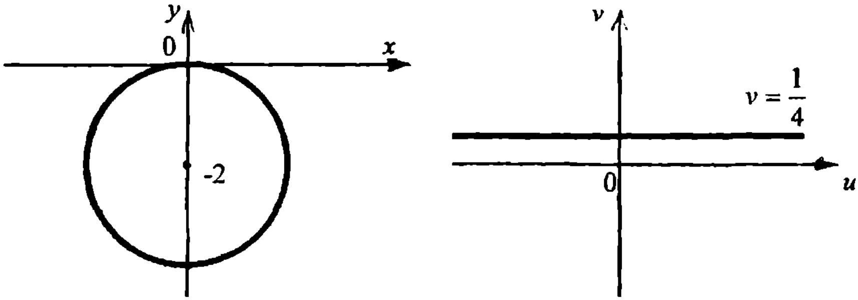


Рис. 7

окружность: $$\left(\frac{u}{u^2+v^2}+1\right)^2+\left(-\frac{v}{u^2+v^2}-1\right)^2=4;$$

$$u^2+v^2-u-v-\frac{1}{2}=0;$$

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v-\frac{1}{2}\right)^2=1.$$

Окружность, не проходящая через начало координат, переходит в окружность $\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v-\frac{1}{2}\right)^2=1$, не проходящую через начало координат (рис. 8).

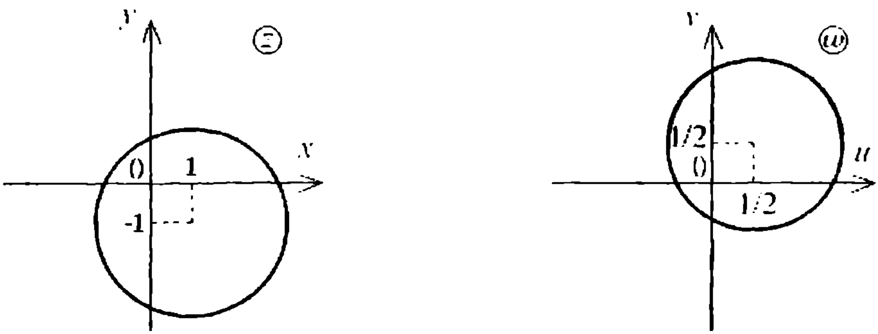


Рис. 8

Контрольное задание

1. Дана функция $w = -2iz + 1$. Найти образ треугольника OAB, если $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(-1,0)$.

2. Дана функция $w = \frac{1}{z}$. Найти образ прямоугольника $OABC$, если $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,2)$, $C(0,2)$.

3.Дана функция $w = z^2$. Найти образ квадрата $ABCD$, если $A(1,0)$, $B(2.0)$, $C(2,1)$, $D(1,1)$.

Построить области, определяемые следующими неравенствами:

4. $\begin{cases} |z-2| - |z+2| \geq 2; \\ \operatorname{Im} z \geq -\dfrac{1}{2}; \\ |z| < 2. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} |z+1-i| \leq \sqrt{2}; \\ \dfrac{\pi}{2} \leq \arg(z-i) < \dfrac{3}{4}\pi. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \operatorname{Re} z \geq 2; \\ |z-3| + |z+3| < 5. \end{cases}$

7. Дана функция $w = 3z + 2i$. Найти образ треугольника OAB, если $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(-1,1)$.

8. Дана функция $w = iz + 3$. Найти образ треугольника OAB, если $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(0,2)$.

9. Дана функция $w = \frac{1}{z}$. Найти образ треугольника ABC, если $A(1,0)$, $B(0,-1)$, $C(1,-1)$.

10. Дана функция $w = \frac{1}{z}$. Найти образ квадрата $OABC$, если $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$.

11. Дана функция $w = z^2$. Найти образ треугольника OAB, если $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$.

12. Дана функция $w = \sqrt{z}$. Найти образ прямоугольника $ABCD$, если $A(1,-2)$, $B(2,-2)$, $C(2,2)$, $D(1,2)$.

IV. Геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции. Пусть $w = f(z)$ — функция, аналитическая на области D комплексной плоскости z и $f(z) \neq 0$. Запишем производную в виде $f'(z) = Ae^{i\alpha}$, где $A = |f'(z)|$, $\alpha = \operatorname{Arg} f'(z)$. Пусть $z = z(t)$, $t \in (\alpha; \beta)$ дифференцируемая функция и $\frac{dz}{dt} = r\, e^{i\varphi} \neq 0$. Она задает некоторую гладкую кривую C. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dt},$$

где

$$\frac{dw}{dz} \neq 0, \quad \frac{dz}{dt} \neq 0,$$

найдем $\frac{dw}{dt} = \rho\, e^{i\psi} \neq 0$, откуда $\rho\, e^{i\psi} = Ar^{i\alpha} \cdot r\, e^{i\varphi}$ и $\alpha = \psi - \varphi$.

Значит, аргумент производной аналитической функции равен углу, на который поворачивается кривая C при ее отображении с помощью $w = f(z)$. Но угол α не зависит от вида кривой C, поэтому все кривые, проходящие через точку z, поворачиваются на один и тот же угол α. В силу этого угол между любыми двумя кривыми, проходящими через точку z, сохраняется. Отображение с помощью аналитической функции обладает свойством сохранения углов по величине и направлению в точках, где производная отлична от нуля.

Из определения производной $f'(z) = \exists \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ имеем

$$A = \lim_{\Delta z \to 0} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| \iff |\Delta w| = A\,|\Delta z| + \gamma\,|\Delta z|,$$

где $\gamma \to 0$ при $\Delta z \to 0$, т. е. все точки $z + \Delta z$, отстоящие от z на одинаковом бесконечно малом расстоянии $|\Delta z|$, перейдут при отображении $w = f(z)$ в точки $w + \Delta w$, отстоящие от w на одном и том же бесконечно малом расстоянии $|\Delta w| = A\,|\Delta z|$. Если из точки z как из центра провести окружность малого радиуса $|\Delta z|$, то ей на плоскости w будет соответствовать окружность малого радиуса $|\Delta w|$ с центром в точке w. Значит, отображение при помощи аналитической функции обладает свойством постоянства растяжения бесконечно малых окрестностей отображаемых точек и $|\Delta w| \approx A\,|\Delta z|$. В частности, все кривые, проходящие через точку z, растянутся вблизи этой точки в одно и то же число раз, равное A. Поэтому модуль производной в некоторой точке можно назвать коэффициентом линейного растяжения-сжатия в точке при отображении $w = f(z)$ (бесконечно малой окрестности этой точки). Таким образом выявляются:

1) геометрический смысл модуля производной:

$|f'(z)|$ есть коэффициент искажения масштаба в данной точке z отображения $w = f(z)$, если $f'(z) \neq 0$ в этой точке;

2) геометрический смысл аргумента производной:

$\operatorname{Arg} f'(z)$ есть угол, на который поворачиваются все "направления" выходящие из данной точки z при отображении $w = f(z)$, если в этой точке $f'(z) \neq 0$.

Отображение с помощью аналитической функции $f(z)$ в точке, в которой $f'(z) \neq 0$, обладает двумя свойствами:

1. Все бесконечно малые дуги, выходящие из этой точки, получают одно и то же растяжение (сжатие), равное модулю производной в этой точке.

2. Каждая из этих дуг поворачивается на один и тот же угол, равный по величине и ориентации аргументу производной.

Рассмотрим отображение $w = f(z)$, которое можно также записать формулами

$$\begin{cases} u = u(x, y); \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

где $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$.

Дифференцируемое в точке (x, y) отображение называется невырождающимся, если в этой точке $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq 0$, где

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad D = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Дифференцируемое и невырождающееся в данной точке отображение называется конформным в данной точке, если обладает в этой точке свойством постоянства коэффициента искажения масштаба и сохраняет углы между "направлениями" по величине и ориентации.

Отображение называется конформным в области D, если оно конформно в каждой его точке.

Замечание. Если рассматривать отображение $w = f(z)$ области полной плоскости комплексного переменного в полную плоскость комплексного переменного, переводящее точку z_0 в точку w_0, то определение конформности отображения в точке z_0 теряет смысл,если хотя бы одна из точек z_0, w_0 есть ∞. Если z_0 конечно, $w_0 = \infty$, то $w = f(z)$ называют конформным в точке z_0, если $z_0 = \infty$, то отображение $w = f(z)$ называют конформным в точке z_0, когда отображение $w = f\left(\frac{1}{z}\right)$ конформно в точке 0.

Конформное преобразование, сохраняющее углы по величине и ориентации, есть преобразование подобия в бесконечно малом. Оно сохраняет форму отображаемой бесконечно малой фигуры. Бесконечно малый круг переходит в бесконечно малый круг, а бесконечно малый треугольник ABC переходит в бесконечно малый (криволинейный) треугольник $A'B'C'$, у которого соответствующие углы равны, а стороны пропорциональны.

При практическом использовании конформных отображений наиболее часто возникает задача отыскания функции, реализующей конформное отображение заданной области D на заданную область Δ. При этом возникают вопросы, связанные с существованием отображения, с его единственностью. Для построения конформных отображений полезно знать, что если $f(z)$ аналитична в области, ограниченной простым замкнутым контуром C, и на нем и если $f(z)$ унивалентна на C (разным точкам этого множества отвечают разные значения функции), то $w = f(z)$ будет конформным отображением области, ограниченной контуром C, на область, ограниченную простым замкнутым контуром Γ, который описывает точка $f(z)$, когда точка z описывает C.

V. Дробно-линейные преобразования L вида

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

являются единственными конформными отображениями полной плоскости на полную плоскость. Преобразование, обратное дробно-линейному, также дробно-линейно, произведение дробно-линейных преобразований также является дробно-линейным преобразованием.

Если преобразование L определяется матрицей комплексных чисел $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с отличным от нуля определителем, то обратное преобразование L^{-1} определяется матрицей $\begin{pmatrix} -c & a \\ d & -b \end{pmatrix}$. Преобразование L называется целым, если $c = 0$; дробным, если $c \neq 0$.

Заметим, что $w = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc - ad}{c^2\,(z + d/c)}$, где $c \neq 0$, $a \neq 0$. Поэтому всякое дробно-линейное преобразование можно разложить в произведение трех линейных преобразований вида:

$$w = z + a; \quad w = az \ (a \neq 0); \quad w = \frac{1}{z}$$

и рассматривать как суперпозицию преобразований, каждое из которых относится к одному из пяти видов:

1) $w = z + a$; 2) $w = e^{i\gamma} z$; 3) $w = Rz$;

4) $w = \dfrac{1}{z}$; 5) $w = \bar{z}$, где $a = \alpha + i\gamma = R\, e^{i\gamma}$,

$\bar{z} = x - iy$ и $z\,\bar{z} = x^2 + y^2$.

Эти преобразования могут быть записаны так:

1) $\begin{cases} u = x + \alpha \\ v = y + \beta \end{cases}$ (параллельный перенос);

2) $\begin{cases} u = x\cos\gamma - y\sin\gamma \\ v = x\sin\gamma + y\cos\gamma \end{cases}$ (поворот);

3) $\begin{cases} u = Rx \\ v = Ry \end{cases}$ (подобие);

4) $\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ v = \dfrac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$ (инверсия);

5) $\begin{cases} u = x \\ v = -y \end{cases}$ (симметрия).

Окружностями (в широком смысле) на полной плоскости называют окружности и прямые. Через каждые три различные точки расширенной плоскости проходит единственная окружность (в широком смысле). Всякое линейное преобразование переводит каждую окружность в некоторую окружность, так как преобразование параллельного переноса, поворота, подобия, инверсии (преобразование, обратное инверсии, тоже инверсия) и симметрия переводят окружности (в широком смысле) в окружности (в широком смысле).

Всякое нетождественное дробно-линейное преобразование имеет либо одну, либо две неподвижные точки (т. е. точки, переходящие в себя).

Существует единственное линейное преобразование, переводящее три различные точки z_1, z_2, z_3 полной плоскости z соответственно в какие-нибудь различные точки w_1, w_2, w_3 полной плоскости w.

Задача 3. Нахождение давления потока жидкости на пластинку (рис. 9) сводится к следующей задаче: найти конформное отображение области изменения ζ (рис. 11) на область изменения w (рис. 10).

При дробно-линейном преобразовании $\tau = \dfrac{1+\zeta}{1-\zeta}$ область изменения ζ отображается в нижний правый квадрант плоскости τ (рис. 12). Областью изменения $\tau_1 = -\tau^2 = -\left(\dfrac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^2$ будет верхняя полуплоскость (рис. 13).

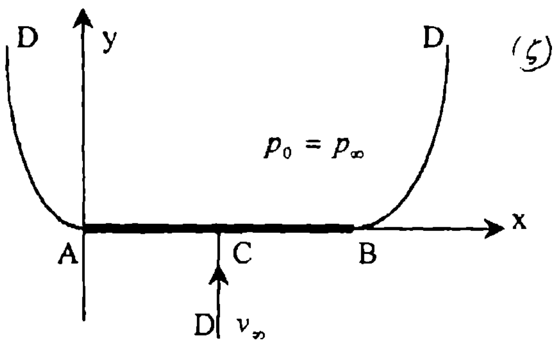


Рис. 9

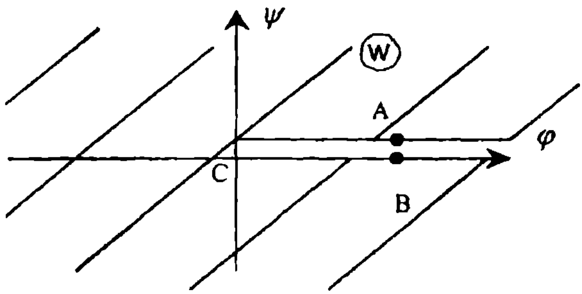


Рис. 10

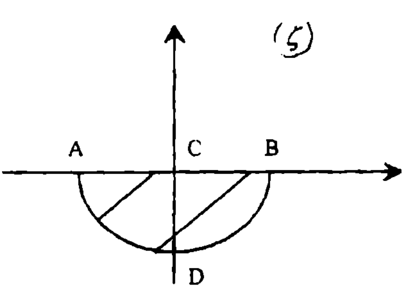


Рис. 11

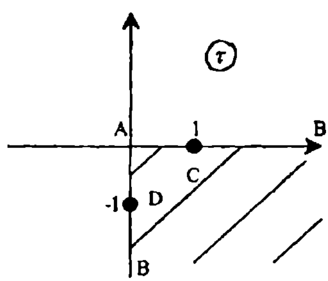


Рис. 12

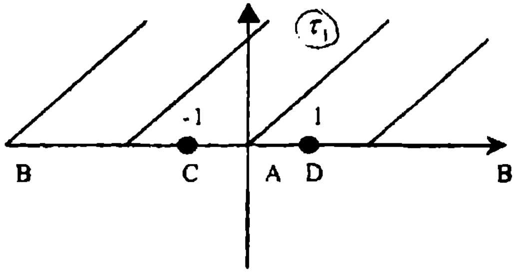


Рис. 13

С другой стороны, при помощи преобразования $t = \sqrt{\dfrac{w}{\varphi_1}}$ плоскость с разрезом w сворачивается в верхнюю полуплоскость (рис. 14) (через φ_1 обозначена координата точек A и B в плос-

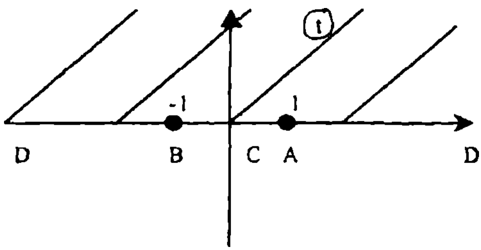


Рис. 14

кости w). Теперь остается отобразить верхнюю полуплоскость t так, чтобы точки D $(t = \infty)$, A $(t = 1)$, C $(t = 0)$, B $(t = -1)$ перешли в точки D $(\tau_1 = 1)$, A $(\tau_1 = 0)$, C $(\tau_1 = -1)$, A $(\tau_1 = -\infty)$ плоскости τ_1, для чего достаточно положить

$$\tau_1 = -\tau^2 = \frac{t-1}{t+1},$$

т.е. $$\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^2 = \frac{1-\sqrt{\dfrac{w}{\varphi_1}}}{1+\sqrt{\dfrac{w}{\varphi_1}}}.$$

Разрешая это уравнение относительно w, находим

$$w = \frac{4\varphi_1\zeta^2}{(1+\zeta^2)^2}.$$

5. Интегрирование функций комплексного переменного (ФКП)

I. Сведение интеграла от ФКП к криволинейным интегралам (II рода):

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i\int_C v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy.$$

Для вычисления криволинейных интегралов следует перейти к параметрическим уравнениям кривой.

1. $\displaystyle\int_C (z + 2\,\bar{z}\,)\,dz$

C: а) отрезок прямой от точки $z_0 = 0$ до точки $z_1 = 1 - i$;

б) дуга окружности

$$|z| = 1, \ -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}.$$

а) уравнение прямой $(0, z_1)$: $y = -x$, $0 \le x \le 1$, x — параметр,

$$z + 2\,\bar{z} = (x + iy) + 2\,(x - iy) = 3x - iy,$$

$$\int_C (z + 2\bar{z})\,dz = \int_C 3x\,dx + y\,dy + i\int_C -y\,dy + 3x\,dy =$$

$$= \int_0^1 3x\,dx + (-x)\,(-dx) + i\int_0^1 x\,dx + 3x\,(-dx) =$$

$$= \int_0^1 4x\,dx + i\int_0^1 (-2x)\,dx = (4 - 2i)\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = 2 - i;$$

б) $\int\limits_C (z + 2\bar{z}) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \cdot 2 \cos\varphi\,(-2\sin\varphi)\,d\varphi + 2\sin\varphi\, 2\cos\varphi\, d\varphi +$

$$C: \begin{cases} x = 2\cos\varphi, \\ y = 2\sin\varphi, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\varphi}{2}$$

$$+\, i \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -2\sin\varphi\,(-2\sin\varphi)\,d\varphi + 3 \cdot 2\cos\varphi \cdot 2\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= -8 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi + i \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4\sin^2\varphi + 12\cos^2\varphi)\, d\varphi = 8\pi i.$$

II. Вычисление интегралов от ФКП по формуле Ньютона—Лейбница.

В односвязных областях интеграл от аналитической функции не зависит от пути C интегрирования, а зависит только от начальной точки z_0 и конечной точки z_1 кривой C; вычисляется по формуле Ньютона—Лейбница:

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z)\,\Big|_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0),$$

где $F(z)$ — одна из первообразных для подынтегральной функции $f(z)$.

2. а) $\int\limits_0^{1+i} z^3\,dz = \dfrac{z^4}{4}\,\Bigg|_0^{1+i} = \dfrac{1}{4}(1+i)^4 = \dfrac{1}{4}(2i)^2 = -1;$

б) $\int\limits_{1+i}^{2-4i} (2z - 6z^3)\, dz = \left(z^2 - \dfrac{3z^4}{2}\right)\Bigg|_{1+i}^{2-4i} = 150 - 594i$;

в) $\int\limits_{0}^{i} z \cos z\, dz = z \sin z \,\Bigg|_{0}^{i} - \int\limits_{0}^{i} \sin z\, dz = i \sin i + \cos i - 1$ (по частям);

г) интеграл по замкнутому контуру от аналитической функции равен нулю.

Формулы интегрирования элементарных ФКП почти не отличаются от известных формул для функций действительного переменного;

III. Вычисление интеграла от ФКП с помощью определенного интеграла от комплексной функции действительного переменного:

$$\int\limits_{AB} f(z)\, dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))\, z'(t)\, dt,$$

AB-кусочно-гладкая кривая, $z = z(t)$ — комплексно-параметрическое уравнение кривой, т. $A \sim t = \alpha$, т. $B \sim t = \beta$, $f(z)$ — непрерывная на дуге AB функция

3. 1) $\int\limits_{C} \operatorname{Re} z\, dz$

C: а) прямолинейный отрезок, соединяющий точку 0 с точкой $1 + 3i$;

б) ломаная,состоящая из прямолинейного отрезка, соединяющего точку 0 с точкой 1, и прямолинейного отрезка, соединяющего точку 1 с точкой $1 + 3i$:

а) $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \end{cases} \Longleftrightarrow z = z(t) = (1 + 3i)\, t, \quad t \in [0; 1],$

$$dz = (1 + 3i)\,dt,\ \int\limits_C \mathrm{Re}\, z\, dz = \int\limits_0^1 (1 + 3i)\, t\, dt = \frac{(1 + 3i)}{2};$$

б) $\int\limits_C \mathrm{Re}\, z\, dz = \int\limits_{C_1} \mathrm{Re}\, z\, dz + \int\limits_{C_2} \mathrm{Re}\, z\, dz,\ C = C_1 \cup C_2$,

$C_1 : z = t,\ dz = dt,\ t \in [0; 1]$,

$C_2 : z = 1 + it,\ dz = idt,\ t \in [0; 3]$;

$$\int\limits_{C_1} \mathrm{Re}\, z\, dz = \int\limits_0^1 t\, dt = \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2};\ \int\limits_{C_2} \mathrm{Re}\, z\, dz = \int\limits_0^3 1 \cdot i\, dt = 3i;$$

$$\int\limits_C \mathrm{Re}\, z\, dz = \frac{1}{2} + 3i.$$

2) $\int\limits_C x\, dz$

C — полуокружность $|z| = 1,\quad 0 \le \arg z \le \pi$:

$$\int\limits_C x\, dz = \int\limits_C \frac{z + \bar{z}}{2}\, dz = \int\limits_0^\pi \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \cdot ie^{i\varphi}\, d\varphi = \frac{i}{2}\int\limits_0^\pi (e^{2i\varphi} + 1)\, d\varphi = \frac{\pi i}{2}$$

$(z = 1 \cdot e^{i\varphi}\quad \varphi \in [0, \pi])$.

Можно проще: $x = \pm\sqrt{1 - y^2},\ \int\limits_C x\, dz = i\int\limits_0^1 x\, dy$;

$$\int\limits_C x\, dz = i\,\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi R^2}{2}\Bigg|_{R=1} = \frac{\pi}{2}\right).$$

3) $\int\limits_C (z + 2\bar{z})\, dz$

$C: \ |z| = 2, \ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, где $z = 2e^{i\varphi}$, поэтому

$$\int_C (z + 2\bar{z})\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2e^{i\varphi} + 4e^{-i\varphi}) \cdot 2ie^{i\varphi}\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4ie^{2i\varphi} + 8i)\,d\varphi = 8i\pi.$$

4) $\int_0^{1+i} e^z\,dz = e^{1+i} - 1$ (по формуле Ньютона—Лейбница).

Получить этот ответ двумя другими методами.

IV. Вычисление интегралов при помощи интегральной формулы Коши:

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0),$$

$f(z)$ — аналитическая на C и внутри C; z_0 лежит внутри C.

Формула дает возможность вычислять значения аналитической функции внутри области, если заданы ее значения на границе (по значениям на границе восстанавливается $f(z)$ внутри области, если $f(z)$ — аналитическая).

Если контур сложный, то

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \ldots + \int_{C_n} f(z)\,dz;$$

$\frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) = \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz$ (получается из формулы Коши дифференцированием по z_0).

4. а) $\int_C \frac{z^3}{z - 3}\,dz$

C — окружность $|z| = 2$, тогда $f(z) = \frac{z^3}{z - 3}$ аналитическая в круге $|z| \le 2$, по теореме Коши интеграл равен нулю.

C — окружность $|z| = 4$, $f(z) = z^3$, $z_0 = 3$, z^3 —аналитическая в замкнутом круге $|z| \le 4$, $z_0 = 3$ лежит внутри круга:

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0), \quad f(z_0) = 3^3 = 27, \quad \int\limits_C \frac{z^3}{z - 3}\, dz = 54\pi i;$$

б) $$\int\limits_{|z| = 2} \frac{\cos z}{z^2 + 2z - 3}\, dz$$

$$z^2 + 2z - 3 = (z + 3)(z - 1), \quad z_0 = 1,$$

$$\int\limits_{|z| = 2} \frac{\cos z}{(z + 3)(z - 1)}\, dz = \int\limits_{|z| = 2} \frac{\cos z/(z + 3)}{z - 1}\, dz = 2\pi i \cos 1/4 = \frac{\pi i}{2} \cos 1;$$

в) $$\int\limits_{|z| = 3} \frac{\sin z}{(z - 2i)^3}\, dz = \pi i\,(-\sin 2i) = -\pi i \sin 2i = \frac{\pi}{2}(e^2 - e^{-2})$$

$$\left((\sin z)''\big|_{z = 2i} = -\sin z\big|_{z = 2i} = -\sin 2i\right).$$

V. Вычисление интегралов с помощью основной теоремы Коши о вычетах: если функция $w = f(z)$ является аналитической на границе Г области G и всюду внутри области, за исключением быть может конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то

$$\int\limits_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{i = 1}^{n} \underset{z_k}{res}\, f(z).$$

VI. Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций. Пусть $R(x)$ — рациональная функция, $R(x) = \dfrac{P_k(x)}{Q_l(x)}$, где $P_k(x)$ и $Q_k(x)$ — многочлены степеней k и l соответственно. Если $R(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $l \ge k + 2$, т. е. степень знаменателя, по крайней мере, на две единицы больше степени числителя, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx = 2\pi i \sum\limits_m \underset{z_m}{res}\, R(z)$. Здесь сумма вычетов функции $R(z) = \dfrac{P_k(z)}{Q_l(z)}$ берется по всем полюсам z_m, расположенным в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Вычислим несобственный интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^{10}} .$$

1. Рассмотрим замкнутый контур $L_R = \mathrm{I} + C_R + \mathrm{II}$ (рис. 15), тогда

$$I_R = \int\limits_{L_R} \frac{dz}{1 + z^n} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z_0} \frac{1}{1 + z^n} = 2\pi i \frac{1}{n e^{i(n-1)\frac{\pi}{n}}}$$

$$\left(z^n = -1 <=> z_k = e^{(\pi + 2\pi k)/n \cdot i}, \ z_0 = e^{\frac{\pi}{n} i} \right).$$

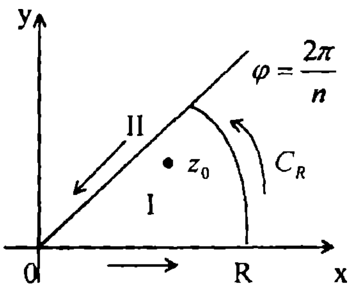


Рис. 15

2. $I_1 = \int\limits_0^R \dfrac{dx}{1 + x^n} \underset{R \to \infty}{\to} I, \quad I_{C_R} = \int\limits_{C_R} \dfrac{dx}{1 + x^n} = \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} \dfrac{Rie^{i\varphi}\, d\varphi}{1 + R^n e^{n\varphi i}} \underset{R \to \infty}{\to} 0.$

3. $I_{\mathrm{II}} = \int\limits_0^R \dfrac{e^{i\frac{2\pi}{n}} dr}{1 + e^{2\pi i} r^n} = -\int\limits_0^R \dfrac{dr}{1 + r^n} e^{i\frac{2\pi}{n}} \underset{R \to \infty}{\to} -e^{i\frac{2\pi}{n}} \cdot I$

$$\left(z = r\,e^{i\varphi} = re^{i\frac{2\pi}{n}},\ dz = e^{i\frac{2\pi}{n}}\,dr,\ \text{так как на луче } \varphi = \frac{2\pi}{n}\right).$$

4. $$2\pi i \cdot \frac{1}{n \cdot e^{i(n-1)\frac{\pi}{n}}} = \left(1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right) \cdot I \iff I =$$

$$= \frac{2\pi i}{n} \frac{1}{e^{i\pi} \cdot e^{-i\frac{\pi}{n}}\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)} = \frac{2\pi i}{n} \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{-i\frac{\pi}{n}}} =$$

$$= \frac{2\pi i}{n} \frac{1}{2i\,\dfrac{e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{-i\frac{\pi}{n}}}{2i}} = \frac{\pi}{n \sin\dfrac{\pi}{n}}.$$

5. В случае $n = 10$ имеем $\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{10}$ и $I = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1 + x^{10}} = \frac{\pi}{10 \sin\frac{\pi}{10}}$.

VII. Вычисление несобственных интегралов специального вида. Пусть $R(x)$ — рациональная функция, $R(x) = \frac{P_k(x)}{Q_l(x)}$, где $P_k(x)$ и $Q_k(x)$ — многочлены степеней k и l соответственно. Если $R(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $l \geq k + 1$ (то есть $R(x)$ — правильная рациональная дробь), то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \lambda x\, dx = \operatorname{Re} \left\{2\pi i \sum_m res_{z_m} R(z)\, e^{i\lambda z}\right\},\ \lambda > 0;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \lambda x\, dx = \operatorname{Im} \left\{2\pi i \sum_m res_{z_m} R(z)\, e^{i\lambda z}\right\},\ \lambda > 0,$$

где сумма вычетов $R(z)\, e^{i\lambda z}$ берется по всем полюсам z_m, расположенным в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Справочный материал

Ряд Лорана. Функция $w = f(z)$, аналитическая в кольце $\rho < |z - z_0| < R$, разлагается в этом кольце в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k, \qquad (1)$$

коэффициенты которого находятся по формулам

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{k+1}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \qquad (2)$$

Здесь Γ — произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри заданного кольца.

Разложение в ряд Лорана единственно. В формуле(1) ряды

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} C_k (z - z_0)^k \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$$

называются соответственно главной частью ряда Лорана и правильной частью ряда Лорана.

На практике для нахождения коэффициентов C_k, если это возможно, используют готовые разложения элементарных функций в ряд Тейлора.

Для примера разложим в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = 0$ функцию $f(z) = z^3 e^{1/z}$. Функция $f(z) = z^3 e^{1/z}$ аналитична в кольце $0 < |z| < \infty$, следовательно, разложима в нем в ряд Лорана. Воспользуемся разложением показательной функции в ряд Тейлора в окрестности точки $\zeta_0 = 0$:

$$e^{\zeta} = 1 + \zeta + \frac{\zeta^2}{2!} + \ldots + \frac{\zeta^k}{k!} + \ldots$$

и положим $\zeta = \frac{1}{z}$, тогда

$$f(z) = z^3\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 \cdot 2!} + \ldots + \frac{1}{z^k \cdot k!} + \ldots\right) =$$

$$= z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{z \cdot 4!} + \ldots + \frac{1}{z^{k-3} \cdot k!} + \ldots .$$

В силу единственности ряда Лорана полученное разложение функции $f(z)$ по степеням z является рядом Лорана для функции $f(z) = z^3 e^{1/z}$ в кольце $0 < |z| < \infty$.

Изолированные особые точки аналитической функции. Классификация (табл. 1). Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $w = f(z)$, если $f(z)$ — аналитическая функция в круговом кольце $0 < |z - z_0| < \delta$, кроме самой точки z_0.

Функцию $w = f(z)$ в окрестности точки z_0 можно разложить в ряд Лорана (1), сходящийся в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$. При этом возможны три различных случая, когда ряд Лорана: 1) не содержит членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$, т.е. $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$. В этом случае z_0 называется устранимой особой точкой функции $w = f(z)$; 2) содержит конечное число членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$, т.е. $f(z) = \sum\limits_{k=-n}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$, причем $C_{-n} \neq 0$. В этом случае z_0 называется полюсом порядка n функции $w = f(z)$; 3) содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$, т.е. $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$. В этом случае z_0 называется существенно особой точкой функции $w = f(z)$.

При определении характера особой точки используются следующие утверждения.

Таблица 1

Классификация изолированных особых точек

Тип точки	Поведение функции в этой точке	Разложение в ряд окрестности данной особой точки	
		$z = a$ — конечная точка	$z = \infty$ — бесконечно удаленная точка
1. $z = a$ — устранимая особая точка	$\lim\limits_{z \to a} f(z) = c_0 \neq \infty$	$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ Разложение в ряд $f(z)$ в окрестности точки a не содержит отрицательных степеней $(z-a)$	$f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + c_0$ Разложение в ряд $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки не содержит положительных степеней z
2. $z = a$ — полюс	$\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$	$f(z) = \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ Конечное число членов с отрицательной степенью $(z-a)$	$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{k} c_n z^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$ Конечное число членов с положительной степенью z
3. $z = a$ — существенно особая точка	$\lim\limits_{z \to a} f(z)$ не существует	$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ Отрицательных степеней $(z-a)$ — бесконечное множество	$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ Положительных степеней z — бесконечное множество

1. Чтобы точка z_0 являлась устранимой особой точкой аналитической функции $w = f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = C_0$, причем $|C_0| < \infty$.

2. Чтобы точка z_0 являлась полюсом аналитической функции $w = f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка n аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z) = \varphi(z)/(z - z_0)^n$, где $\varphi(z)$ — функция аналитическая в точке z_0, причем $\varphi(z_0) \neq 0$.

Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $f(z) = \dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}$, где $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ — функции аналитические в точке z_0.

Если числитель и все производные до $(k - 1)$ порядка включительно в точке z_0 равны нулю, то $\lambda^{(k)}(z_0) \neq 0$, знаменатель $\mu(z)$ и все производные до $(l - 1)$ порядка включительно также равны нулю в точке z_0, $\mu^{(l)}(z_0) \neq 0$, то при $l > k$ точка z_0 является полюсом порядка $n = l - k$ аналитической функции $f(z)$. В частном случае, при $k = 0$, $l = 1$ имеем: если $\lambda(z_0) \neq 0$, $\mu(z_0) = 0$, $\mu'(z_0) \neq 0$, то z_0 — полюс первого порядка функции $f(z)$.

3. Пусть при $z \to z_0$ аналитическая функция $w = f(z)$ не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного). Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы точка z_0 была существенно особой точкой функции $w = f(z)$.

Вычет. Пусть z_0 — изолированная особая точка функции: Вычетом функции $f(z)$ в точке z_0 называется число, обозначаемое символом $\operatorname*{res}\limits_{z_0} f(z)$ и определяемое равенством

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\, dz. \tag{3}$$

Формулы для вычисления вычета в различных точках приведены в табл. 2.

Преобразование Лапласа. Функцией-оригиналом называется функция $f(t)$ действительного аргумента t, удовлетворяющая условиям: 1) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t; 2) для всех отрицательных t: $f(t) = 0$; 3) $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т. е. существуют такие постоянные M и σ_0, что для всех t: $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$.

Изображением функции $f(t)$ по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = \sigma + i\tau$, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt.$$

Обозначение: $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Для любой функции оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определяется в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Свойства

1. Линейность: для любых комплексных постоянных c_1 и c_2

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \risingdotseq c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p).$$

2. Формула подобия для любого постоянного $\omega > 0$

$$f(\omega t) \risingdotseq \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right).$$

3. Дифференцирование оригинала: если функции $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ являются функциями-оригиналами, то

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

Таблица 2

Формулы для вычисления вычета в различных точках

Тип особой точки	Формула для вычисления вычета
1. Устранимая особая точка	$\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z) = 0$
2. Полюс k-го порядка	$\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z) = \dfrac{1}{(k-1)!} \lim\limits_{z \to a} \dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [f(z)(z-a)^k]$
3. Полюс 1-го порядка (простой полюс)	1-й способ $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z) = \lim\limits_{z \to a} [f(z)(z-a)]$ 2-й способ $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z) = \dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$, если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ и $\varphi(a) \neq 0$
4. Существенно особая точка	$\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z) = c_{-1}$ Для отыскания вычета обязательно разложение функции в ряд в окрестности этой точки

. . . .

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Величина $f^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ понимается как $\lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t)$.

4. Дифференцирование изображения: $F'(p) \risingdotseq - tf(t)$.

5. Интегрирование оригинала: $\int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.

6. Интегрирование оригинала: если $\frac{f(t)}{t}$ является функцией-оригиналом, то

$$\int\limits_0^\infty F(p)\, dp \risingdotseq \frac{f(t)}{t}.$$

7. Формула смещения: для любого комплексного λ

$$f(t)\, e^{-\lambda t} \risingdotseq F(p + \lambda).$$

8. Формула запаздывания:

$$f(t - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p), \quad \tau > 0.$$

9. Формула умножения изображений:

$$F_1(p) F_2(p) \risingdotseq \int\limits_0^t f_1(t) f_2(t - \tau)\, d\tau. \qquad (4)$$

Интеграл в (4) называется сверткой функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначается символом $f_1 * f_2$.

Отыскание оригинала по изображению

Для нахождения оригинала $f(t)$ по изображению $F(p)$ наиболее широко применяют следующие приемы:

1) если $F(p)$ есть правильная рациональная дробь, то ее разлагают на сумму простых дробей и находят оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства 1—9 преобразования Лапласа;

2) используют формулу разложения, согласно которой при некоторых достаточно общих условиях оригиналом для $F(p)$ будет функция

$$f(t) = \sum_k \underset{p_k}{res}\,[F(p)e^{pt}],$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$.

Формулы соответствия. Широко применяются следующие табличные соотношения (табл. 3).

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p}\ ;\ \ e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p-a}\ ;\ \ \sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\ ;\ \ \cos \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2}\ ;$$

$$\mathrm{sh}\, \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2-\omega^2}\ ;\ \ \mathrm{ch}\, \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\omega^2}\ ;\ \ t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}\ .$$

Левые части операционных соотношений предполагаются домноженными на функцию $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ которая для сокращения записи, как правило, опускается.

Изображение кусочно-линейной функции. Введем следующие обозначения:

τ_k — точки разрыва функций $f(t)$ или $f'(t)$;

$\alpha_k = a_k - b_k$ — скачки функций в узлах "стыка";

$\beta_k = \mathrm{tg}\, \gamma_k - \mathrm{tg}\, \delta_k$ — скачки производной;

Изображение полигональной функции имеет вид

$$F(p) = \sum_k e^{-p\tau_k}\left(\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{p^2}\right).$$

Задача Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Таблица 3

Изображение некоторых элементарных функций

№ п/п	Оригинал	Изображение	Условие
1	1	$\dfrac{1}{p}$	$\operatorname{Re} p > 0$
2	e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$
3	$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im} \omega\rvert$
4	$\cos \omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im} \omega\rvert$
5	t^{μ} $(\mu > 0)$	$\dfrac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$
5а	t^{n} $(n \in N)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$
6	$\operatorname{sh} at$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Re} a\rvert$
7	$\operatorname{ch} at$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Re} a\rvert$
8	$e^{at} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a + \lvert\operatorname{Im} \omega\rvert$
9	$e^{at} \cos \omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a + \lvert\operatorname{Im} \omega\rvert$
10	$t^{\mu} e^{at}$ $(\mu > 0)$	$\dfrac{\Gamma(\mu+1)}{(p-a)^{\mu+1}}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$
11	$t^{n} e^{at}$ $(n \in N)$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$

Решение линейных дифференциальных уравнений операционным методом предполагает три этапа: 1) переход от исходных функций к их изображению по Лапласу, при этом дифференциальное уравнение преобразуется в алгебраическое относительно изображения искомой функции; 2) решение полученного алгебраического уравнения; 3) получение искомого решения по его изображению.

В качестве примера рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$x' - x = 1 \tag{5}$$

при начальном условии $x(0) = 1$.

Операционный метод решения такой задачи состоит в том,что искомую функцию и правую часть дифференциального уравнения следует рассматривать в качестве оригиналов и переходить от уравнения относительно оригиналов к уравнению, связывающему их изображения.

Воспользуемся формулой дифференцирования оригинала:

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1.$$

На основании свойства линейности перейдем в уравнении (5) от оригиналов к изображениям

$$[pX(p) - 1] - X(p) = \frac{1}{p}.$$

Решим полученное алгебраическое уравнение относительно неизвестного изображения $X(p)$:

$$X(p) = \frac{2}{p-1} - \frac{1}{p}.$$

Остается по известному изображению $X(p)$ найти соответствующий ему оригинал $x(t)$. Используя свойство линейности преобразования Лапласа и табличные операционные отношения, получаем $x(t) = 2e^t - 1$. Это и есть искомое решение задачи Коши.

Формула Дюамеля. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$L[x(t)] = a_0x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \dots + a_nx(t) = f(t) \tag{6}$$

при нулевых начальных условиях

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0. \tag{7}$$

(Заменой искомой функции задачу с ненулевыми начальными условиями всегда можно свести к задаче с нулевыми условиями)

Допустим, что известно решение уравнения $L[x(t)] = 1$ (с той же левой частью и правой частью равной единице) при условиях (7). Обозначим это решение $x_1(t)$. Тогда решение $x(t)$ задачи (6)—(7) можно выразить через $x_1(t)$ и $f(t)$ с помощью одной из формул

$$x(t) = \int_0^t x'_1(\tau)f(t-\tau)\,d\tau, \quad x(t) = \int_0^t x'_1(t-\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau)\,d\tau, \quad x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t f'(t-\tau)x_1(\tau)\,d\tau.$$

Каждое из этих выражений называют формулой (или интегралом) Дюамеля.

Метод решения дифференциальных уравнений, основанный на формуле Дюамеля, применяют, как правило, в тех случаях, когда возникают трудности при нахождении изображения $F(p)$ правой части $f(t)$ уравнения (6), а также при необходимости многократного решения задачи (6)—(7) для различных $f(t)$.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Комплексные числа, действия над ними.
2. Показательная и логарифмическая функции комплексного переменного. Формулы Эйлера.

3. Степенная функция. Тригонометрические и гиперболические функции.

4. Производная функция комплексного переменного. Условия Коши—Римана. Понятие аналитической функции.

5. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции. Понятие о конформном отображении.

6. Интеграл от функции комплексного переменного, его свойства.

7. Теорема Коши для одно- и многосвязных областей. Формула Ньютона—Лейбница.

8. Интегральная формула Коши.

9. Существование производных всех порядков у аналитической функции.

10. Ряд Тейлора.Теорема о разложении аналитической функции в ряд Тейлора.

11. Ряд Лорана. Кольцо сходимости. Теорема Лорана.

12. Классификация изолированных особых точек.

13. Вычеты. Вычисление вычетов.

14. Основная теорема Коши о вычетах. Вычисление контурных интегралов.

15. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.

16. Преобразование Лапласа. Функция-оригинал. Существование и аналитичность преобразования Лапласа. Поведение изображения на бесконечности.

17. Свойства преобразования Лапласа: однородность, линейность, подобие, затухание (смещение), запаздывание.

18.Дифференцирование оригинала и изображения.

19. Интегрирование оригинала и изображения.

20. Свертка функций и оригиналов.

21. Оригиналы с рациональными изображениями.

22. Методы отыскания оригинала по заданному изображению (когда оно рационально).

23. Приложение к решению линейных дифференциальных уравнений и систем.

ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНОЙ РАБОТЫ (РР)

Каждый вариант РР (1—20) содержат семь заданий.

1. Записать комплексное число в алгебраической форме.
2. Решить уравнение на множестве C.
3. Найти образ множества при отображении $w = f(z)$.
4. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u = u(x, y)$ или мнимой части $v = v(x, y)$ и значению $f(z_0)$.
5. Найти все разложения данной функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням разности $(z - z_0)$.
6. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) контурный интеграл;

б) несобственный интеграл.

7. а) операционным методом решить задачу Коши;

б) по данному графику оригинала найти изображение.

Вариант 1

1. 2^{i-1}, $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$.

2. $\operatorname{sh} z = i$.

3. $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$; полярная сетка внутри $|z| < 1$.

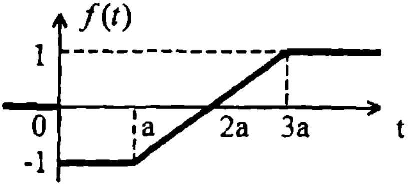
4. $u = x^2 - y^2 + xy$, $f(0) = 0$.

5. $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + z - 2}$, по степеням $(z + 3)$.

6. а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z\,dz}{z^2(z+1)}$; б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.

7. а) $y'' - 2y' - 3y = 2t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

б)



Вариант 2

1. $(1 + i)^i,\quad \mathrm{Ln}\,(\sqrt{3}i - 1).$

2. $z^4 + 1 - i = 0.$

3. $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$; полярная сетка вне $|z| = 1.$

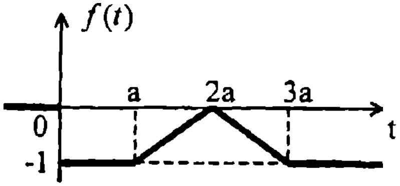
4. $v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $f(2) = 0.$

5. $f(z) = \dfrac{z}{2 + z - z^2}$, по степеням $(z - 3).$

6. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=2} \frac{\sin z\,dz}{(z^2 - 1)(z^2 - 4)}$; б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$.

7. а) $y''' + y' = \cos t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = y''(0) = 1.$

б)



Вариант 3

1. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+2i\right)$, $(-1)^{4i}$.

2. $z^5 = 1 - i$.

3. $w = e^{z^2}$; ортогональная сетка.

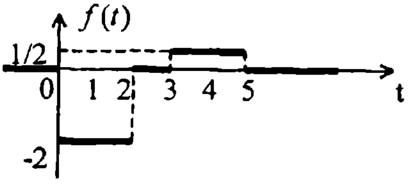
4. $u = x^2 - y^2 + x$, $f(0) = 0$.

5. $f(z) = \dfrac{z-2}{2z^3 + z^2 - z}$, $z_0 = 0$.

6. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{(z^2+1)\,dz}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}$, C: $|z-1| = 2$; б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+25)(9x^2+1)}$.

7. а) $y'' - 2y' - 3y = 2t$, $y(0) = y'(0) = 1$.

б)



Вариант 4

1. $\operatorname{sh}\left(2+\frac{\pi i}{4}\right)$, i^{3i}.

2. $z^n = \sqrt{3} - i$.

3. $w = \cos z$; ортогональная сетка.

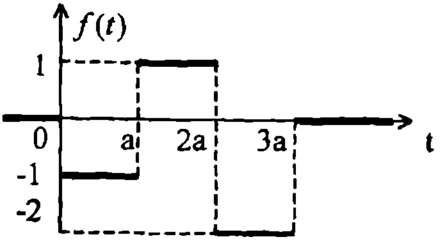
4. $u = x^3 - 3xy + 1$, $f(0) = 1$.

5. $f(z) = \dfrac{z + 1}{z\,(z - 1)}$, $z_0 = 1 + 2i$.

6. а) $\displaystyle\int_C \frac{(z^2 + \sin z + 2)\,dz}{z^2 + \pi z}$, C: $|z| = 2$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

7. а) $2y'' + 3y' + y = 3e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

б)



Вариант 5

1. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + 2i\right)$, 1^{2i}.

2. $z^4 = -8 + i8\sqrt{3}$.

3. $w = \ln z$; полярная сетка: $|z| = R$, $\arg z = \theta$.

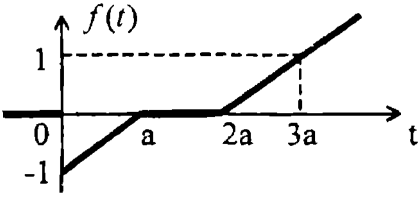
4. $u = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^x} \cos y$, $f(0) = 2$.

5. $f(z) = \dfrac{z - 4}{z^4 + z^3 - 2z^2}$, $z_0 = 0$.

6. а) $\displaystyle\int_C \frac{2dz}{z^2\,(z - 1)}$, C: $|z - 1 - i| = \dfrac{5}{4}$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 - x + 2)\,dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$.

7. а) $y'' - y = \cos 3t$, $y(0) = y'(0) = 1$;

б)



Вариант 6

1. $\cos\left(2 + \dfrac{\pi i}{6}\right)$, $\left(\dfrac{1 - i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$.

2. $z^2 + i = 0$.

3. $w = \sin z$; полуполоса: $-\pi < x < \pi$, $y > 0$.

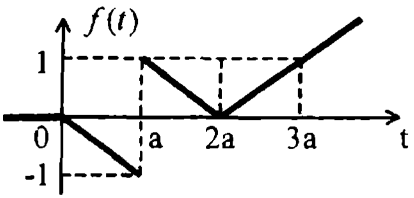
4. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $f(1) = 1 + i$.

5. $f(z) = \dfrac{z + 1}{z\,(z - 1)}$, $z_0 = 2 - 3i$.

6. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{z\,(\sin z + 2)\,dz}{\sin z}$, C: $\left|z - \dfrac{3}{2}\right| = 2$; б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - 1)\,dx}{(x^2 + 4)^2}$.

7. а) $y'' + y' + y = 7e^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$;

б)



Вариант 7

1. $\operatorname{Ln}(\sqrt{3} + i)$, $\operatorname{Arcsin} 4$.

2. $z^4 + 16 = 0$.

3. $w = z^2$; $\operatorname{Im} z > 0$, полярная сетка.

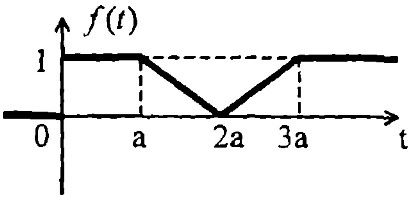
4. $v = e^x (y \cos y + x \sin y)$, $f(0) = 0$.

5. $f(z) = \dfrac{2z - 16}{z^4 + 2z^3 - 8z^2}$, $z_0 = 0$.

6. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{(\sin^2 z - 3)\, dz}{z^3 + 2\pi z}$, C: $|z + 1| = 2$; б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4 + 1)^2}$.

7. а) $y'' - y' = t^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

б)



Вариант 8

1. $\operatorname{Ln}(1 + \sqrt{3}\, i)$, $(-1)^{5i}$.

2. $\sin z = 2$.

3. $w = \cos z$; прямоугольная сетка: $x = c$, $y = c$.

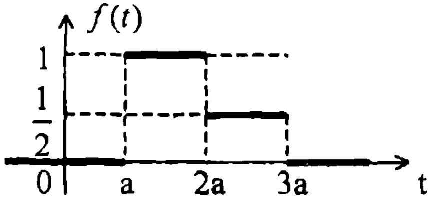
4. $u = x^2 - y^2 - 2y$, $f(0) = 0$.

5. $f(z) = \dfrac{z + 3}{z^2 - 1}$, $z_0 = 2 + i$.

6. а) $\int\limits_C \dfrac{(z^2+z+3)\,dz}{\sin z\,(\pi+z)}$, C: $|z| = \dfrac{\pi}{2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2-10x+29)^2}$.

7. а) $y'' + y' = t^2 + 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$;

б)



Вариант 9

1. $\operatorname{ch}(1 - \pi i)$, $(-1 - i)^{4i}$.

2. $z^4 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i = 0$.

3. $w = 3z + i$; линия $x^2 + y^2 - 2x = 0$ (обход против часовой стрелки[1]).

4. $v = e^{-y}\sin x + y$, $f(0) = 1$.

5. $f(z) = \dfrac{3z - 18}{2z^3 + 3z^2 - 9z}$, $z_0 = 0$.

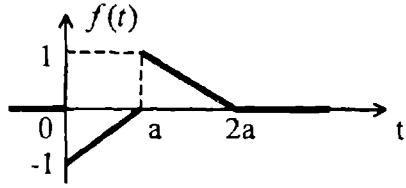
6. а) $\int\limits_C \dfrac{\ln(e+z)\,dz}{z\sin\left(z + \dfrac{\pi}{4}\right)}$, C: $|z| = \dfrac{1}{4}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2\,dx}{(x^2+11)^2}$.

7. а) $y'' + 2y' = 2 + e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

---

[1] Против часовой стрелки (всюду).

б)



Вариант 10

1. $\operatorname{ch}\left(1 + \frac{\pi i}{3}\right)$, $(4 - 3i)^{i}$.

2. $2z^{8} + 1 = 0$.

3. $w = z^{-1}$; линия $x^3 + y^3 - 2x = 3$.

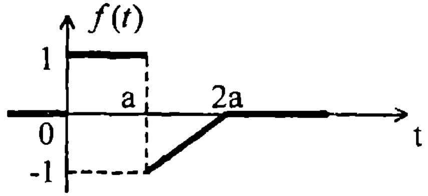
4. $v = e^{x}\cos y$, $f(1) = 1 + i$.

5. $f(z) = \dfrac{z + 4}{z^3 + 3z + 2}$, $z_0 = 1$.

6. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{iz\,(z - i)\,dz}{\sin \pi z}$, C: $\left|z - \frac{1}{2}\right| = 1$; б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 4)\,dx}{(x^2 + 9)^2}$.

7. а) $2y'' - y' = \sin 3t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;

б)



Вариант 11

1. $\operatorname{ch}\left(2 + \frac{\pi i}{2}\right)$, $(-12 + 5i)^{-i}$.

2. $x^6 - 4z^3 + 8 = 0$.

3. $w = e^{\alpha i} z$, $\alpha \in R$; линия $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$.

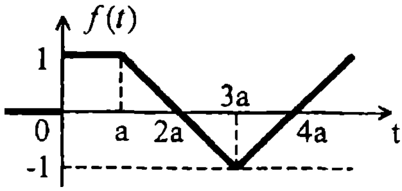
4. $v = y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $f(1) = 2$.

5. $f(z) = \dfrac{3z - 36}{z^4 + 3z^3 - 18z^2}$, $z_0 = 0$.

6. а) $\displaystyle\int_C \frac{(\sin 3z + 2)\,dz}{z^2(z - \pi)}$, C: $|z - 3| = 1$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 5)^2}$.

7. а) $y'' + y' - 2y = -2(t + 1)$, $y(0) = y'(0) = 1$;

б)



Вариант 12

1. $\operatorname{Ln}(-1 - i)$, $\operatorname{sh}\left(1 - \frac{\pi i}{2}\right)$.

2. $z^8 - 2\sqrt{3}z^4 + 4 = 0$.

3. $w = e^z$; прямая $y = kx + b$.

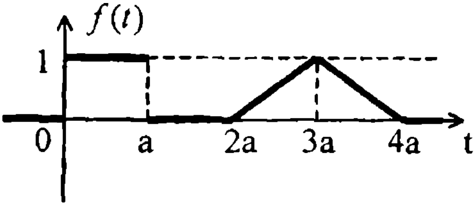
4. $v = x^2 - y^2 + 2x + 1, \quad f(0) = i.$

5. $f(z) = \dfrac{z+1}{z\,(z-1)}, \quad z_0 = -2 + i.$

6. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{(e^{zi} + 2)\,dz}{\sin 3zi}, \quad C\colon |z| = 1$; б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^3}.$

7. а) $y'' - 9y = \sin t - \cos t, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 2;$

б)



Вариант 13

1. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 3i\right), \quad (-1 + i\sqrt{3})^{-3i}.$

2. $\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i.$

3. $w = \dfrac{1-z}{1+z}$; область D: $\{|z| < 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}$.

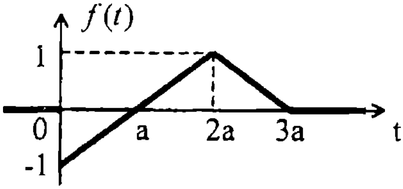
4. $u = e^x\,(x \cos y - y \sin y), \quad f(0) = 0.$

5. $f(z) = \dfrac{z+2}{z + z^2 - 2z^3}, \quad z_0 = 0.$

6. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{(\cos^2 z + 1)\,dz}{z^2 - \pi^2}, \quad C\colon |z - 2| = 3$; б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)\,(x^2 + 3)^2}.$

7. а) $y'' + 4y' + 29y = e^{-2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

б)



Вариант 14

1. $\operatorname{Arccos}(-3i)$, $(-\sqrt{3}+i)^{-6i}$.

2. $2z^4 + 1 = i\sqrt{3}$.

3. $w = \dfrac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}$; линия $y = 0$, когда точка α переводится в начало координат.

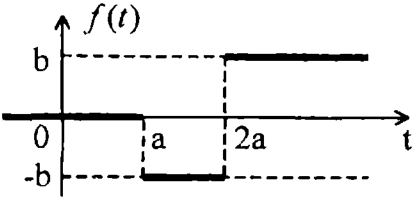
4. $v = 2xy + 2x$, $f(0) = 0$.

5. $f(z) = \dfrac{2z}{z^2+4}$, $z_0 = -1 - 3i$.

6. а) $\displaystyle\int_C \frac{(\sin^2 z - 3)\,dz}{z^2 + 2\pi z}$, C: $|z+1| = 2$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x\,dx}{(x^2+1)^2}$.

7. а) $y'' - 3y' + 2y = e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

б)



Вариант 15

1. $\operatorname{ch}\left(3+\frac{\pi i}{4}\right)$, $(1-i\sqrt{3})^{3i}$.

2. $z^3-8i=0$.

3. $w=\dfrac{z+2}{z+i}$; линия $|z|=1$.

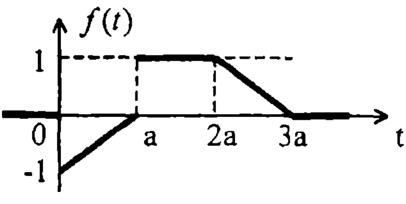
4. $u=e^{-y}\cos x+x$, $f(0)=1$.

5. $f(z)=\dfrac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}$, $z_0=0$.

6. а) $\displaystyle\int_C \frac{(z^2+1)\,dz}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}$, C: $|z-1|=2$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+5)^2}$.

7. а) $y''+4y=\sin 2t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

б)



Вариант 16

1. $\operatorname{Arctg}\left(\frac{3+4i}{5}\right)$, $(\sqrt{2})^{1-i}$.

2. $\sin z=2$.

3. $w=\dfrac{z-3}{z+3}$; линия $y=2x$, $x\in R$.

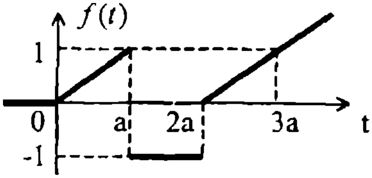
4. $u = \dfrac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}$, $f(0) = 1$.

5. $f(z) = \dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0 = -2 + i$.

6. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{(z^3 + \sin 2z)\, dz}{(z-\pi) \sin \frac{z}{2}}$, C: $\left|z - \dfrac{3}{2}\right| = 2$; б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^5}$.

7. а) $y'' + 4y = 3 \sin t + 10 \cos 3t$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 3$;

б)



Вариант 17

1. $\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{4+3i}{5}\right)$, $(1+i)^{4i}$.

2. $z^2 - (2+i)\, z - (1 - 7i) = 0$.

3. $w = z^2$; полоса: $a \le \operatorname{Im} z \le b$.

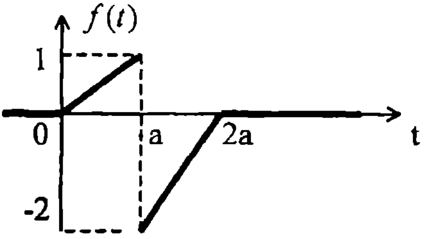
4. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + x$, $f(1) = 2$.

5. $f(z) = \dfrac{6z}{(z^2 - 4)(z^2 - 1)}$, $z_0 = 0$.

6. а) $\displaystyle\int\limits_C z^2 \sin \frac{i}{z^2}\, dz$, C: $|z| = 3$; б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x\, dx}{(x^2+1)^2}$.

7. а) $y'' - y' - 6y = 2,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0;$

б)



Вариант 18

1. $e^{\frac{\pi + 4}{4 + 2\pi i}},\quad \operatorname{sh}\left(1 - \frac{\pi i}{3}\right).$

2. $|z| - z = 1 + 2i.$

3. $w = \frac{1}{z}$; полоса: $1 \le \operatorname{Re} z \le 2.$

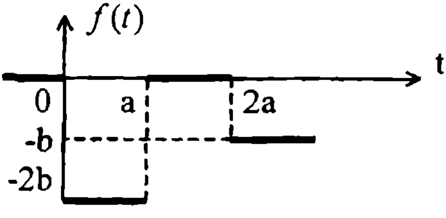
4. $v = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2},\quad f(1) = 1 + i.$

5. $f(z) = \frac{2z}{z^2 - 4},\quad z_0 = -1 + 3i.$

6. а) $\int\limits_C \frac{z\,(z + \pi)\,dz}{\sin 3z\,(z - \pi)},\quad C\colon \left|z - \frac{3}{2}\right| = 1;$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2 + 1)^3}.$

7. а) $y'' + y' + y = t^2 + t,\quad y(0) = 1,\ \ y'(0) = -3;$

б)



Вариант 19

1. $\operatorname{ch}\left[i\left(\frac{\pi}{4}+2i\right)\right]$, $(-i)^{1+i}$.

2. $(z^3+1)(e^z+1)=0$.

3. $w=z^2$; дуга $|z|=a$, $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

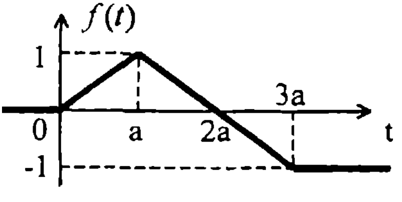
4. $u=x^3-3xy^2-x$, $f(0)=0$.

5. $f(z)=\dfrac{1+z}{(z+3)^2(z-2i)}$, $z_0=0$.

6. а) $\displaystyle\int_C \frac{\left(z\,e^{\frac{1}{z}}-z-1\right)dz}{z^3}$, C: $|z|=1$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\cos x\,dx}{x^4+5x^2+6}$.

7. а) $y''+y'+y=t^2+t$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$;

б)



Вариант 20

1. $\operatorname{Ln}(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$, $\sqrt[5]{1+i}$.

2. $\operatorname{sh} z=i$.

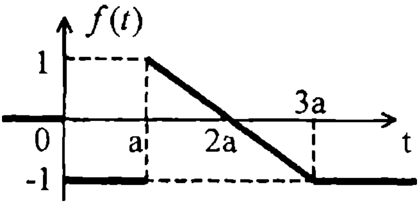
3. $w=z^3$; область E: $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$.

4. $v = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x} \sin y, \quad f(0) = 2.$

5. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3iz - 2}, \quad z_0 = 2i.$

6. а) $\displaystyle\int_C \frac{\left(z^2 e^{\frac{1}{z^2}} - 1\right) dz}{z}, \quad C\colon |z| = 1;$ б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 3x \, dx}{(x^2 + 4)^2}.$

7. а) $y'' + y = \operatorname{sh} t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1;$

б) 

ПРИЛОЖЕНИЕ

Решить задачу Коши для линейной системы дифференциальных уравнений (к заданию 7а).

1. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x - y + 1; \end{cases}$
$x(0) = -1,\ y(0) = 2.$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 1, \\ \dot{y} = x + y; \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

3. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = 2x - y + 9; \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 1, \\ \dot{y} = 4x - y; \end{cases}$
$x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2; \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = 1.$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1, \\ \dot{y} = x + 2y + 1; \end{cases}$
$x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -5x - 3y + 2; \end{cases}$
$x(0) = 2,\ y(0) = 0.$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3y; \end{cases}$
$x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

9. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 2; \end{cases}$
$x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 1, \\ \dot{y} = 4x - 2y; \end{cases}$
$x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

11. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y + 1; \end{cases}$
$x(0) = 0,\ y(0) = 5.$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y, \\ \dot{y} = -4x; \end{cases}$
$x(0) = 3,\ y(0) = 1.$

13. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -\dfrac{3}{2}x + y; \end{cases}$
$x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

14. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y + 2, \\ \dot{y} = 3x + y + 1; \end{cases}$
$x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

15. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = \dfrac{5}{2}x - y + 2; \end{cases}$

$x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

16. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3; \end{cases}$

$x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

17. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + 1, \\ \dot{y} = 3x + 4y; \end{cases}$

$x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

18. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + 2, \\ \dot{y} = 4y + 1; \end{cases}$

$x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

19. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 4x + y + 1; \end{cases}$

$x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

20. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -3x \end{cases}$

$x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Араманович И.Г., Лунц Г.Д., Эльсгольц Л.Э.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. — М.: Наука, 1968.

2. *Фукс Б.А. и Шабад Б.Б.* Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. — М.: Наука, 1964.

3. *Волковский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1970.

4. *Саульев В.К.* Преобразование Лапласа. — М.: МАИ, 1966.

5. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. — М.: Наука, 1971.

6. *Чудесенко В.Ф.* Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. — М.: Высшая школа, 1983.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Методические указания к выполнению расчетной работы
"ЭЛЕМЕНТЫ ТФКП И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ"

Автор-составитель *Молодожникова Раиса Николаевна*

Редактор *Р.Н. Фурсова*
Компьютерная верстка *О.Г. Лавровой*

Подписано в печать 25.10.06.
Бумага офсетная. Формат 60х84 1/16. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 4,65. Уч.-изд.л. 5,0.
Тираж 300. Зак. 3504/2128. С. 521.

Издательство МАИ
"МАИ", Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993
Типография Издательства МАИ
"МАИ", Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993