

СОДЕРЖАНИЕ

<i>С. К. Коровин, А. В. Кудрицкий, А. С. Фурсов.</i> Конструктивный алгоритм поиска регулятора, одновременно стабилизирующего семейство объектов	5
<i>О. И. Гончаров, В. В. Фомичев.</i> Наблюдатель для многосвязных систем с произвольным относительным порядком	17
<i>И. В. Капалин, В. В. Фомичев.</i> О построении минимальных стабилизаторов для скалярных систем	37
<i>Г. И. Лозгачев, Л. А. Тютюнникова.</i> Синтез робастного модального управления	53
<i>Ю. М. Семенов.</i> Об эволюции множеств достижимости и управляемости линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами	61
<i>А. Н. Канатников, Е. А. Шагина.</i> Задача терминального управления движением летательного аппарата	79
<i>Н. А. Магницкий.</i> Неклассический подход к анализу гамильтоновых и консервативных систем	95
<i>В. В. Дикусар, Г. А. Зеленков, Н. В. Зубов, В. И. Косюг.</i> Квадратичные формы и выпуклые множества матриц, устойчивых по Важевскому	127
<i>В. В. Дикусар, Г. А. Зеленков, Н. В. Зубов, В. И. Косюг.</i> Условия существования выпуклых множеств неустойчивых полиномов	133
<i>М. С. Никольский.</i> Некоторые численные аспекты прямых методов Л. С. Понтрягина в линейных дифференциальных играх	137
<i>К. Кесман, В. И. Максимов.</i> О реконструкции неизвестных характеристик в одной системе третьего порядка	149
<i>И. М. Макаров, А. А. Ахрем, В. З. Рахманкулов.</i> Робастность математических моделей задач проектирования сложных динамических систем	167
<i>А. А. Ахрем.</i> Грубые свойства специальных классов моделей сложных технических систем	191
<i>Э. Р. Смольяков.</i> Усложненные равновесия для конфликтных задач	201
<i>А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев, В. С. Малютин.</i> Построение конечномерного регулятора температуры проходной печи	211
<i>И. М. Макаров, В. З. Рахманкулов, А. А. Ахрем.</i> Математические модели процессов переноса и освоения производственных технологий и ноу-хау	219
<i>Л. А. Шоломов.</i> К введению меры недоопределенной информации	257
<i>В. С. Левченков, Л. Г. Левченкова.</i> Два подхода к проблеме поиска в WWW	275
<i>А. В. Кряжимский, С. П. Коновалов, М. С. Никольский.</i> Изучение упрощенной модели сбора налогов с предприятия государством с учетом белого и теневого капиталов	287
<i>Э. Р. Смольяков.</i> Динамика в сопряженных парах вселенных и новые фундаментальные физические постоянные	311

<i>А. В. Краев.</i> Некоторые алгоритмы обращения векторных дискретных систем	327
<i>А. Н. Канатников.</i> Моделирование процессов управления вращением твердого тела	335
<i>А. А. Пискунов, А. В. Лычев, М. А. Пискунова, В. Е. Кривоножко.</i> Инструментарий поддержки принятия решений при формировании транснациональных проектов	349
<i>А. М. Формальский, П. В. Зайцев.</i> Математическое моделирование управляемого продольного движения парашюта	383

КОНСТРУКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА РЕГУЛЯТОРА, ОДНОВРЕМЕННО СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО СЕМЕЙСТВО ОБЪЕКТОВ

С. К. Коровин, А. В. Кудрицкий, А. С. Фурсов

В работе изложен подход к решению задачи одновременной стабилизации конечного семейства линейных динамических объектов. При этом рассматриваются два основных вопроса, связанных с указанной задачей: нахождение условий существования единого регулятора и алгоритм построения такого регулятора в случае его существования. Представленный в статье подход основан на исследовании свойств аффинных преобразований пространства параметров регулятора в пространство коэффициентов характеристических полиномов стабилизируемых объектов. Приведена общая схема исследования одновременной стабилизируемости конечных семейств объектов и подробно проанализирован численный алгоритм поиска стабилизирующего регулятора, построенного на основе методов интервального анализа.

1. Постановка задачи, основные понятия и утверждения

В настоящей работе на основе результатов, изложенных в [2], описывается алгоритм поиска регулятора заданного порядка, одновременно стабилизирующего конечное семейство линейных объектов.

Общая постановка задачи одновременной стабилизации для скалярных объектов формулируется следующим образом [2].

Рассматривается k линейных стационарных объектов различных порядков n_i с передаточными функциями

$$W_1(s) = \frac{\beta_1(s)}{\alpha_1(s)}, \dots, W_k(s) = \frac{\beta_k(s)}{\alpha_k(s)}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_i(s) &= b_{n_i-1,i}s^{n_i-1} + \dots + b_{0,i}, \\ \alpha_i(s) &= s^{n_i} + a_{n_i-1,i}s^{n_i-1} + \dots + a_{0,i}, \end{aligned}$$

причем полиномы $\beta_i(s)$, $\alpha_i(s)$ взаимно просты.

Спрашивается [1], существует ли регулятор l -го порядка

$$R(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p_l s^l + p_{l-1} s^{l-1} + \dots + p_1 s + p_0}{s^l + q_{l-1} s^{l-1} + \dots + q_1 s + q_0}, \quad (2)$$

одновременно стабилизирующий все объекты (1), т.е. такой, что знаменатели передаточных функций всех замкнутых систем, полученных замыканием объектов (1) обратной связью (2), т.е. все полиномы

$$\varphi_i(s) = \alpha_i(s)q(s) + \beta_i(s)p(s)$$

($i = 1, 2, \dots, k$), являются устойчивыми?

При $k = 1, 2$ решение сформулированной задачи известно [1, 6]. В случае $k \geq 3$ каких-либо общих методов решения поставленной задачи нет [7]. При этом в ряде работ различных авторов (см. библиографию в [8]) представлены либо необходимые, либо достаточные условия одновременной стабилизации в случае $k \geq 3$, многие из которых относятся к некоторым узким классам объектов или носят неконструктивный характер. Найденные в настоящее время необходимые и достаточные условия одновременной стабилизации при $k \geq 3$, как правило, сводят одну нерешенную задачу к другой [4].

В работе [2] для $k \geq 3$ линейных скалярных стационарных объектов произвольных порядков получены проверяемые численно необходимые условия одновременной стабилизации, а также достаточное условие одновременной стабилизации регулятором заданного порядка с указанием алгоритмов построения стабилизирующего регулятора, основанных на анализе структуры областей устойчивости в пространствах коэффициентов полиномов, линейно зависящих от параметров.

В настоящей работе, на основе подходов, теоретически обоснованных в [2], приведена общая схема исследования одновременной стабилизируемости семейства объектов (1) и подробно проанализирован численный алгоритм поиска стабилизирующего регулятора с использованием методов прикладного интервального анализа [5]. Приведем основные определения и утверждения, необходимые для дальнейшего изложения.

Для каждого знаменателя передаточной функции объекта $W_i(s)$, замкнутого обратной связью с регулятором l -го порядка (2),

$$\varphi_i(s) = \alpha_i(s)q(s) + \beta_i(s)p(s) = \varphi_{0,i} + \varphi_{1,i}s + \dots + \varphi_{n_i+l-1,i}s^{n_i+l-1} + s^{n_i+l}, \quad (3)$$

определим вектор коэффициентов

$$\varphi_i = (\varphi_{0,i}, \dots, \varphi_{n_i+l-1,i}).$$

Тогда для каждого $i = 1, \dots, k$ найдется матрица

$$A_i(\alpha_i, \beta_i, l) \in \mathbb{R}^{(n_i+l) \times (2l+1)}$$

и столбец

$$B_i(\alpha_i, \beta_i, l) \in \mathbb{R}^{(n_i+l)}$$

(однозначно построенные по коэффициентам передаточной функции $W_i(s)$) такие, что выполняются равенства

$$\begin{pmatrix} \varphi_{0,i} \\ \vdots \\ \varphi_{n_i+l-1,i} \end{pmatrix} = A_i(\alpha_i, \beta_i, l) \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_{l-1} \\ p_0 \\ \vdots \\ p_l \end{pmatrix} + B_i(\alpha_i, \beta_i, l), \quad i = 1, \dots, k. \quad (4)$$

Линейная система неравенств

$$A_i(\alpha_i, \beta_i, l) \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_{l-1} \\ p_0 \\ \vdots \\ p_l \end{pmatrix} + B_i(\alpha_i, \beta_i, l) > 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (5)$$

задает необходимое условие устойчивости полиномов $\varphi(s)$ $i = 1, \dots, k$.

Вектор $v = (q_0, \dots, q_{l-1}, p_0, \dots, p_l)$ назовем *устойчивым решением системы неравенств (5)*, если соответствующий полином

$$\varphi_i(s) = \varphi_{0,i} + \varphi_{1,i}s + \dots + \varphi_{n_i+l-1,i}s^{n_i+l-1} + s^{n_i+l}, \quad i = 1, \dots, k$$

с коэффициентами (4) устойчив. Для удобства устойчивые решения системы (5) назовем также *стабилизирующими параметрами*.

Очевидное необходимое и достаточное условие одновременной стабилизации объектов (1) для удобства можно представить в виде следующего утверждения [2].

Теорема 1. Линейные объекты (1) одновременно стабилизируемы регулятором l -го порядка (2) тогда и только тогда, когда существует хотя бы одно устойчивое решение системы линейных неравенств (5).

Существование устойчивого решения системы (5) означает совместность этой системы и, таким образом, совместность системы (5) является необходимым условием одновременной стабилизации объектов (1). В [2] приведены проверяемые ранговые условия совместности этой системы, допускающие численную проверку. К сожалению, достаточное условие, приведенное в теореме 1, не является конструктивным. В настоящее время нет аналитических методов проверки существования устойчивого решения во множестве решений системы (5), поскольку такая проверка при применении известных критериев устойчивости сводится к решению сложных систем нелинейных неравенств. Поэтому для поиска устойчивых решений предлагается использовать иной подход, основанный на численных методах интервального анализа [5]. Теоретическое обоснование указанного подхода, как было указано выше, изложено в работе [2].

Заметим, что необходимое условие теоремы 1 (совместность системы (5)) дает возможность построить множество в пространстве параметров регулятора $(q_0, \dots, q_{l-1}, p_0, \dots, p_l)$ [4], в котором могут содержаться стабилизирующие параметры (содержатся, если они существуют). При этом возможны три случая.

1. Система линейных неравенств (5) несовместна. Тогда стабилизирующих параметров не существует и объекты (1) одновременно не стабилизируемы.

2. Система линейных неравенств (5) совместна и множество ее решений ограничено. В этом случае можно построить (см. параграфы 2 и 3 настоящей работы) численный алгоритм поиска стабилизирующих параметров в ограниченной области пространства параметров

$$(q_0, \dots, q_{l-1}, p_0, \dots, p_l)$$

регулятора $((2l+1)$ -мерном параллелепипеде) с использованием методов интервального анализа [5]. При этом упомянутая область поиска должна содержать все множество решений системы неравенств (5). Один из способов поиска ограниченной области приведен, например, в [3]. Заметим, что в случае ограниченности множества решений системы неравенств (5) соответствующая система однородных неравенств

$$A_i(\alpha_i, \beta_i, l) \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_{l-1} \\ p_0 \\ \vdots \\ p_l \end{pmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (6)$$

несовместна. Действительно, если система (6) имеет хотя бы одно решение v^* , то в силу однородности системы (6) для любого $\mu > 0$ вектор μv^* также будет являться решением этой системы, при этом найдется такое значение $\mu^* > 0$, что при всех $\mu > \mu^*$ векторы μv^* будут являться решениями неоднородной системы (5). Но тогда множество решений системы (5) не будет ограниченным.

3. Система линейных неравенств (5) совместна и множество ее решений не ограничено. В этом случае построение численной процедуры поиска стабилизирующих параметров осложняется тем, что непонятно, в какой именно ограниченной области во множестве решений системы (5) надо искать эти стабилизирующие параметры, поскольку численные алгоритмы работают только на ограниченных множествах. Заметим, что в случае неограниченности множества решений системы (5) система (6) совместна.

Таким образом, основной проблемой построения численных алгоритмов поиска одновременно стабилизирующего регулятора для объектов (1) в случае 3 является задача локализации ограниченной области в пространстве параметров

$$(q_0, \dots, q_{l-1}, p_0, \dots, p_l),$$

в которой, в случае их существования, содержатся стабилизирующие параметры.

В [2] получены результаты, на основе которых в случае 3 возможно локализовать ограниченную область в пространстве параметров

$$(q_0, \dots, q_{l-1}, p_0, \dots, p_l),$$

содержащую так называемые ω -стабилизирующие параметры (определение см. ниже), в случае их существования. В параграфе 2 (теорема 4) настоящей работы сформулировано утверждение об указанной локализации. В [2] показано также, что по ω -стабилизирующим параметрам всегда можно построить регулятор, одновременно стабилизирующий объекты (1).

Ниже приведены некоторые необходимые для понимания дальнейшего изложения факты.

Вектор параметров $u = (u_0, \dots, u_{n-1})^\top \in \mathbb{R}_+^n$ полинома $p(s) = u_0 + u_1 s + \dots + u_{n-1} s^{n-1} + s^n$ ω -устойчивый [2], если полином степени $(n-1)$

$$u(s) = u_0 + u_1 s + \dots + u_{n-1} s^{n-1}$$

устойчив.

Теорема 2. ([2]) Пусть $a = u\mu$ — прямая в пространстве \mathbb{R}^n , $\mu \in \mathbb{R}$, причем вектор

$$u = (u_0, \dots, u_{n-1})^\top$$

ω -устойчивый. Тогда существует такое значение $\mu^* > 0$, что для всех $\mu > \mu^*$ полиномы

$$u(s) = \mu^* u_0 + \mu^* u_1 s + \dots + \mu^* u_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

устойчивы.

Вектор $v = (q_0, \dots, q_{l-1}, p_0, \dots, p_l)$ назовем ω -устойчивым решением системы неравенств (6), если для него все векторы

$$\begin{pmatrix} \bar{\varphi}_{0,i} \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_{n_i+l-1,i} \end{pmatrix} = A_i(\alpha_i, \beta_i, l) \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_{l-1} \\ p_0 \\ \vdots \\ p_l \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, k \quad (7)$$

ω -устойчивы.

В [2] вектор

$$v = (q_0, \dots, q_{l-1}, p_0, \dots, p_l),$$

являющийся ω -устойчивым решением системы неравенств (6), назван ω -стабилизирующим, а соответствующие параметры — ω -стабилизирующими.

Следующая теорема, являющаяся вариантом теоремы 6 из [2], устанавливает достаточное условие одновременной стабилизации объектов (1) регулятором l -го порядка (2).

Теорема 3. Пусть для системы неравенств (6) (построенной по коэффициентам передаточных функций объектов (1)) существует ω -устойчивое решение. Тогда объекты (1) одновременно стабилизируемы некоторым регулятором порядка l .

Алгоритм расчета параметров одновременно стабилизирующего регулятора по ω -устойчивому решению системы (6) можно построить на основе результатов работы [2] (приведен в параграфе 4 настоящей работы).

Таким образом, задачу поиска одновременно стабилизирующего регулятора для объектов (1) в случае, когда система (5) имеет неограниченное множество решений, можно разбить на три этапа.

1. Поиск ω -устойчивого решения системы (6).
2. Построение устойчивого решения системы (5) по ω -устойчивому решению системы (6).
3. Построение одновременно стабилизирующего регулятора по устойчивому решению системы (5).

Ниже, в параграфе 2 приведено утверждение о локализации области поиска ω -устойчивого решения системы (6), сформулированы основные понятия интервального анализа [5] и приведен алгоритм поиска ω -устойчивого решения системы (6) на основе методов интервального анализа.

2. Применение методов интервального анализа для построения алгоритма поиска ω -стабилизирующих параметров

Методы интервального анализа [5] позволяют строить численные алгоритмы, обеспечивающие гарантированную аппроксимацию множеств, описанных с помощью различных систем равенств и неравенств и, в силу этого, появляется возможность применения этих методов в инженерной практике и компьютерных расчетах. Ниже приведены основные понятия интервального анализа.

Основным объектом интервального анализа является так называемое вещественное число.

Вещественное интервальное число $[x]$ — односвязное подмножество из \mathbb{R} , для простоты называемое *интервалом*. *Нижняя граница* интервала $[x]$ обозначается \underline{x} и определяется как

$$\underline{x} \triangleq \sup\{a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \mid \forall x \in [x] \ a \leq x\},$$

верхняя граница интервала $[x]$ обозначается \bar{x} и определяется как

$$\bar{x} \triangleq \inf\{b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \mid \forall x \in [x] \ b \geq x\},$$

ширина непустого интервала $[x]$ определяется как

$$w([x]) \triangleq \bar{x} - \underline{x}.$$

Обозначим через \mathbb{IR} множество всех замкнутых интервалов. Тогда любой интервал $[x]$ из \mathbb{IR} может быть единственным образом задан своей нижней \underline{x} и верхней \bar{x} границами:

$$[x] = [\underline{x}, \bar{x}].$$

Для интервальных чисел вводятся основные арифметические операции (сложение, вычитание, умножение, деление) и теоретико-множественные операции (объединение, пересечение, декартово произведение и др., см. [5]).

Вещественный интервальный вектор $[x] \in \mathbb{IR}^n$ (*параллелотоп*) — это подмножество \mathbb{R}^n , которое определяется как декартово произведение n замкнутых интервалов

$$[x] = [x_1] \times [x_2] \times \dots \times [x_n],$$

где $[x_i] = [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ для $i = 1, \dots, n$. Операции, введенные для интервалов, переносятся на параллелотопы [5].

Ширина непустого интервального вектора $[x]$ определяется как

$$w([x]) \triangleq \max_{1 \leq i \leq n} w([x_i]).$$

Основное отличие численных алгоритмов, построенных на основе методов интервального анализа от алгоритмов, предполагающих использование сеточных методов, заключается в том, что результаты, получаемые с помощью обычных численных методов носят локальный характер и не гарантируют, что все точки множества, покрытого сеткой, удовлетворяют тем же свойствам, которым удовлетворяют узлы сетки. Методы интервального анализа, в свою очередь, дают возможность аппроксимировать множество, удовлетворяющее необходимым свойствам, выпуклыми множествами — параллелотопами, внутренние точки которых гарантированно обладают нужными свойствами.

Следующая теорема позволяет локализовать область поиска ω -устойчивых решений системы (6).

Теорема 4. Пусть однородная система линейных неравенств (6) имеет хотя бы одно ω -устойчивое решение. Тогда она имеет бесконечно много таких решений, причем любой параллелотоп в пространстве параметров

$$v = (q_0, \dots, q_{l-1}, p_0, \dots, p_l),$$

для которого точка $(0, \dots, 0)$ является внутренней, содержит ω -устойчивые решения.

Доказательство теоремы 4 следует из теоремы 2 и однородности системы (6).

Следующая теорема устанавливает факт существования внутренних точек множества ω -устойчивых решений системы (6).

Теорема 5. Пусть

$$v^* = (q_0^*, \dots, q_{l-1}^*, p_0^*, \dots, p_l^*)$$

— ω -устойчивое решение системы (6). Тогда существует такое $\delta > 0$, что все векторы семейства

$$v_\delta^* = \{(q_0, \dots, q_{l-1}, p_0, \dots, p_l) : q_i - \delta \leq q_i \leq q_i + \delta, p_i - \delta \leq p_i \leq p_i + \delta\}$$

являются ω -устойчивыми.

Доказательство теоремы 5 следует из непрерывной зависимости корней полиномов от коэффициентов.

Перейдем к описанию процедуры поиска ω -устойчивого решения системы (6) с использованием методов интервального анализа.

Выберем начальный параллелотоп — произвольный n -мерный куб такой, что точка $(0, \dots, 0)$ является внутренней. Обозначим его через

$$[v^0] = ([v_1^0], [v_2^0], \dots, [v_{2l+1}^0]) = ([q_0^0], \dots, [q_{l-1}^0], [p_0^0], \dots, [p_l^0]). \quad (8)$$

Введем вектор-функцию

$$H_n(u) = (u_n, h_1(u), \dots, h_n(u)),$$

определенную на множестве полиномов

$$u(s) = u_0 + u_1 s + \dots + u_{n-1} s^{n-1} + u_n s^n, \quad (9)$$

где $h_i(u)$ — угловые миноры матрицы Гурвица: устойчивость полинома (9) эквивалентна условиям $u_n > 0$, $h_i(u) > 0$.

Интервальная функция

$$[f] : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$$

называется *функцией включения* для функции

$$f : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m,$$

если $\forall [x] \in \mathbb{IR}^n$, $f([x]) \subset [f]([x])$ [5].

Интервальным аналогом приведенного условия устойчивости является следующее условие на функцию включения $[H]([u])$:

$$[H_i]([u]) \subset [Y_i], \text{ где } [Y_i] = (]0, +\infty[, \dots,]0, +\infty[) \in \mathbb{IR}^i. \quad (10)$$

В силу теоремы 5 множество ω -устойчивых решений в параллелотопе $[v^0]$ можно аппроксимировать параллелотопами, целиком состоящими из таких решений. Для поиска параллелотопов

$$[v^*] = (q_0^*, \dots, q_{l-1}^*, p_0^*, \dots, p_l^*),$$

состоящих из ω -устойчивых решений системы (6), может быть применен интервальный алгоритм **SIVIA** (Set Invertor Via Interval Analysis), описанный в [5]. Перечислим основные шаги работы этого интервального алгоритма.

1. На вход алгоритма

$$\mathbf{SIVIA}([v], H_1, \dots, H_k, [Y_1], \dots, [Y_k], \varepsilon, \Omega_{\text{good}}, \Omega_{\text{bad}}, \Omega_{\text{unk}})$$

подаются следующие параметры:

- параллелотоп $[v] = ([q_0], \dots, [q_{l-1}], [p_0], \dots, [p_l])$, первоначально $[v] = [v^0]$;
- функции включения $[H_i]([u])$, $i = 1, \dots, k$ (см. выше);
- множества $[Y_i]$, $i = 1, \dots, k$ (см. выше);
- точность алгоритма $\varepsilon > 0$ (задает правило остановки работы алгоритма);
- множества параллелотопов $\Omega_{\text{good}}, \Omega_{\text{bad}}, \Omega_{\text{unk}}$, первоначально пустые; при этом множества параллелотопов $\Omega_{\text{good}}, \Omega_{\text{bad}}, \Omega_{\text{unk}}$ являются и выходными значениями интервального алгоритма **SIVIA**.

2. Для каждого объекта (1) определяется интервальный вектор

$$[\hat{\varphi}_i] = A_i(\alpha_i, \beta_i, l)[v], \quad i = 1, \dots, k.$$

3. К полученным интервальным векторам $[\hat{\varphi}_i]$ применяются соответственно функции включения $[H_i]([\hat{\varphi}_i])$:

- если $[H_i]([\hat{\varphi}_i]) \cap [Y_i] = [H_i]([\hat{\varphi}_i])$ для всех $i = 1, \dots, k$, то параллелотоп $[v]$ включается в множество Ω_{good} ;
- если $[H_i]([\hat{\varphi}_i]) \cap [Y_i] = \emptyset$ хотя бы для одного $i = 1, \dots, k$, то параллелотоп $[v]$ включается в множество Ω_{bad} ;
- если $[H_i]([\hat{\varphi}_i]) \cap [Y_i] \neq \left[\begin{array}{c} \emptyset \\ [H_i]([\hat{\varphi}_i]) \end{array} \right]$ для всех $i = 1, \dots, k$, то необходимо определить ширину параллелотопа $[v]$:
 - если $w([v]) \leq \varepsilon$, то параллелотоп $[v]$ включается в множество Ω_{unk} ;
 - если $w([v]) > \varepsilon$, то параллелотоп $[v]$ подвергается бисекции (деление пополам одного из ребер максимальной длины) на два подпараллелотопа $R[v]$ и $L[v]$.

4. Для параллелотопов $R[v]$ и $L[v]$ запускаются итерации рекурсии

$$\mathbf{SIVIA}(R[v], H, [Y], \varepsilon, \Omega_{\text{good}}, \Omega_{\text{bad}}, \Omega_{\text{unk}})$$

и

$$\mathbf{SIVIA}(L[v], H, [Y], \varepsilon, \Omega_{\text{good}}, \Omega_{\text{bad}}, \Omega_{\text{unk}}).$$

В результате в ходе работы алгоритма **SIVIA** весь начальный параллелотоп $[v^0]$ разбивается на три подмножества параллелотопов

$$[v^0] = \Omega_{\text{good}} \cup \Omega_{\text{bad}} \cup \Omega_{\text{unk}}.$$

При этом

$\Omega_{\text{good}} = \{\cup[v^j] : [H_i]([\hat{\varphi}_i^j]) \cap [Y_i] = [H_i]([\hat{\varphi}_i^j]), [\hat{\varphi}_i^j] = A_i(\alpha_i, \beta_i, l)[v^j], i = 1, \dots, k\}$ — множество ω -устойчивых решений системы (6),

$\Omega_{\text{bad}} = \{\cup[v^j] : [H_i]([\hat{\varphi}_i^j]) \cap [Y_i] = \emptyset, [\hat{\varphi}_i^j] = A_i(\alpha_i, \beta_i, l)[v^j], i = 1, \dots, k\}$ — множество, не содержащее ни одного ω -устойчивого решения системы (6),

$\Omega_{\text{unk}} = \{\cup[v^j] : w([v^j]) \leq \varepsilon\}$ — множество векторов, для которых интервальный алгоритм **SIVIA** не позволяет определить, являются ли какие-либо из них ω -устойчивыми решениями системы (6).

Если множество Ω_{good} не пусто, то в соответствии с теоремой 3 объекты (1) одновременно стабилизируемы.

3. Определение начальных условий алгоритма **SIVIA** для поиска ω -устойчивых решений

Обозначим через K множество решений системы (6), а через

$$V = \{[v^j]\}$$

— множество параллелотопов, проверяемых в процессе работы алгоритма **SIVIA**. Заметим, что

$$\Omega_{\text{good}} \cup \Omega_{\text{bad}} \cup \Omega_{\text{unk}} \subseteq V.$$

При реализации алгоритма интервального анализа **SIVIA**, описанного в предыдущем пункте, возникает следующая проблема: как по начальному параллелотопу $[v^0]$ для поиска ω -устойчивого решения системы выбрать точность алгоритма ε таким образом, чтобы наименьший параллелотоп, соответствующий остановке алгоритма, имел такую ширину, которая обеспечивала бы возможность его вписания в множество, являющееся пересечением множества решений системы (6) с начальным параллелотопом, т. е. как выбрать начальные условия для алгоритма **SIVIA**, чтобы хотя бы один параллелотоп из множества V целиком содержался во множестве $K(v^0) = K \cap [v^0]$? Это условие необходимо, так как, если оно не выполняется, то представленный алгоритм **SIVIA** заведомо не найдет ω -устойчивое решение в начальном параллелотопе.

Введем следующее определение: *минимальной шириной ограниченного множества* в n -мерном пространстве будем называть диаметр n -мерной сферы наибольшего объема, которую можно вписать в это множество (при этом все точки сферы кроме, быть может, граничных будут являться внутренними точками рассматриваемого множества). Минимальную ширину множества G будем обозначать через $w_{\min}(G)$.

Следующая теорема формулирует необходимое условие успешной работы алгоритма **SIVIA**.

Теорема 6. Пусть система (6) совместна и $[v^0]$ — начальный параллелотоп для поиска ω -устойчивого решения. Тогда, если точность ε алгоритма **SIVIA** удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot w_{\min}(K(v^0)) > \varepsilon,$$

то хотя бы один параллелотоп множества V целиком содержится во множестве $K(v^0)$.

Доказательство теоремы 6 следует из определения минимальной ширины множества и последовательности шагов работы алгоритма **SIVIA**.

Для того, чтобы использовать теорему 6 для назначения точности ε алгоритма **SIVIA**, необходимо уметь оценивать минимальную ширину множества $K(v^0)$, образованного пересечением множества решений системы (6) и начального параллелотопа $[v^0]$, т.е. величину $w_{\min}(K(v^0))$.

Прежде чем привести метод получения оценки минимальной ширины множества $K(v^0)$, сформулируем вспомогательные факты.

Известно [4], что множество решений K системы (6) представляет открытый многогранный конус с вершиной в нуле. С помощью известного алгоритма [3, с. 71] это множество можно описать в следующем виде:

$$V = k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_n X_n, \quad (11)$$

где $k_i > 0$, X_i -ребра n -гранного конуса, $i = 1, \dots, n$.

Обозначим через $Gr(X_m, X_j)$ грань между ребрами X_m и X_j . Для того чтобы определить, является ли грань $Gr(X_m, X_j)$ внешней, можно использовать следующее утверждение.

Теорема 7. Грань $Gr(X_m, X_j)$ является внешней гранью n -гранного конуса K , если хотя бы для одного $i = 1, \dots, k$ выполнено равенство

$$A_i(\alpha_i, \beta_i, l)(X_m + X_j) = 0, \quad m \neq j, \quad 1 \leq m, j \leq n.$$

Доказательство теоремы 7 следует из алгоритма построения общего решения системы (6) [3].

Пусть

$$Gr(X_{i_1}, X_{i_2}), \dots, Gr(X_{i_{n-1}}, X_{i_n}), Gr(X_{i_n}, X_{i_1})$$

— внешние грани конуса K , найденные с помощью теоремы 7.

Нормируем вектор-ребра X_i , ($i = 1, \dots, n$) n -гранного конуса (11). Не ограничивая общности считаем, что X_i уже нормированы. Построим вектор

$$z = \sum_i X_i$$

и нормируем его $z^* = \frac{z}{|z|}$ ($|z| = \sqrt{(z, z)}$).

Найдем расстояния (в евклидовой метрике) от z^* до внешних граней конуса K

$$r_j = \rho(z^*, Gr(X_{i_j}, X_{i_{j+1}})).$$

Положим

$$r = \min_j \{r_j\}.$$

Следующая теорема позволяет получить оценку снизу для минимальной ширины множества $K(v^0)$.

*Теорема 8. Пусть множество решений K системы (6) описано в виде n -гранного конуса (11), $[v^0]$ — начальный параллелотоп для алгоритма **SIVIA**. Тогда верно неравенство*

$$w_{\min}(K(v^0)) \geq \frac{r}{1+r} \cdot w_{\min}([v^0]).$$

Доказательство теоремы 8 основано на известных теоремах геометрии о вписанных окружностях и подобии треугольников. Заметим, что $w_{\min}([v^0]) = \min\{w([v_i^0])\}$ — длина наименьшего ребра параллелотопа $[v^0]$.

Из теорем 6 и 8 следует, что если точность ε алгоритма **SIVIA** такова, что

$$\varepsilon < \frac{r}{\sqrt{2}(1+r)} \cdot w_{\min}([v^0]),$$

($[v^0]$ — начальный параллелотоп), то в процессе работы алгоритма хотя бы один параллелотоп из множества V целиком содержится в множестве $K(v^0)$, что является необходимым условием для успешной работы алгоритма поиска ω -устойчивых решений системы (6).

4. Построение одновременно стабилизирующего регулятора

В пунктах 2, 3 настоящей работы изложен подход для реализации первого этапа построения одновременно стабилизирующего регулятора для объектов (1) — поиска ω -устойчивых решений системы (6) (см. параграф 1 настоящей работы). Ниже приведен алгоритм реализации второго и третьего этапов — построение устойчивого решения системы (5) по ω -устойчивому решению системы (6) и построение одновременно стабилизирующего регулятора (2) по полученному устойчивому решению системы (5). Пусть множество Ω_{good} , построенное в результате работы алгоритма **SIVIA**, не пусто.

1. Зафиксируем произвольный вектор ω -стабилизирующих параметров $v = (q_0, \dots, q_{l-1}, p_0, \dots, p_l)^\top \in \Omega_{\text{good}}$.

2. Построим ω -устойчивые векторы

$$u_i = A_i(\alpha_i, \beta_i, l)v, \quad i = 1, \dots, k,$$

и векторы $w_i = A_i(\alpha_i, \beta_i, l)v + B_i(\alpha_i, \beta_i, l)$, $i = 1, \dots, k$.

3. По векторам u_i, w_i , используя годограф Найквиста [1, с. 115–118], найдем параметры $\mu_i^* \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, такие что $\mu_i^* v$ — устойчивые решения системы (5).

4. Пусть $\mu^* = \max\{\mu_1^*, \dots, \mu_n^*\}$.

5. Положим $q_0^* = q_0 \mu^*, \dots, q_{l-1}^* = q_{l-1} \mu^*, p_0^* = p_0 \mu^*, \dots, p_l^* = p_l \mu^*$.

Регулятор $R^*(s) = \frac{p_l^* s^l + p_{l-1}^* s^{l-1} + \dots + p_1^* s + p_0^*}{s^l + q_{l-1}^* s^{l-1} + \dots + q_1^* s + q_0^*}$ одновременно стабили-

зирует объекты (1).

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 09-07-00386-а и № 09-01-00652-а.

Список литературы

1. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление.—М.: Наука, 2002.
2. Коровин С. К., Кудрицкий А. В., Фурсов А. С. О некоторых подходах к одновременной стабилизации линейных объектов регулятором заданной структуры // Дифференц. уравн.—2009.—Т. 45, № 4.—С. 597–608.
3. Солодовников А. С. Системы линейных неравенств.—М.: Наука, 1977.
4. Черников, С. Н. Линейные неравенства.—М.: Наука, 1968.
5. Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007.

6. Youla D., Bongiorno J., Lu C. Single-loop feedback stabilization of linear multi-variable plants //Automatica.—1974.—V. 10, № 2.—P. 159–173.
7. Blondel V., Gevers M. The simultaneous stabilizability question of three linear systems is rationally undecidable //MCSS.—1993.—V. 6, № 2.—P. 135–145.
8. Van Bredemann M. Feedback controller design for simultaneous stabilization//University of New Mexico.—Albuquerque (New Mexico), 1995. Dissertation.—224 p.

НАБЛЮДАТЕЛЬ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ПОРЯДКОМ

О. И. Гончаров, В. В. Фомичев

В данной работе рассматривается задача построения наблюдателя для квадратных МИМО систем, находящихся под воздействием ограниченного возмущения. Предполагается, что система имеет относительный порядок по Исидори (при этом произведение выходной и входной матрицы системы может не быть матрицей полного ранга). Предлагается алгоритм построения наблюдателя на основе использования иерархической обратной связи по ошибке наблюдения. При использовании достаточно больших коэффициентов обратной связи может быть обеспечена любая наперед заданная точность наблюдения.

1. Постановка задачи

Рассматривается классическая задача наблюдения для динамической системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(u + f), \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — неизвестный фазовый вектор, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — известный вход и выход системы, $f(t) \in \mathbb{R}^m$ — неизвестное возмущение, A, C, B — известные постоянные матрицы соответствующих размерностей. Требуется по доступной информации о системе построить оценку неизвестного фазового вектора.

Решению этой задачи посвящено большое количество работ (см. библиографию [3]). При этом относительно системы (1) делаются следующие предположения:

1°) Пара $\{C, A\}$ наблюдаема, пара $\{A, B\}$ управляема. Это стандартное предположение о том, что тройка $\{C, A, B\}$ — общего положения.

2°) Матрицы C и B полного ранга, т. е. $\text{rank } C = l$, $\text{rank } B = m$. Это предположение также является стандартным и не ограничивает общности рассуждений, т. к. его выполнения можно добиться путем сокращения размерностей $u(t)$ и $y(t)$ (и размеров матриц B и C) до выполнения условия 2°.

3°) Размерность выхода $y(t)$ не меньше размерности неизвестного входа $f(t)$, т. е. $l \geq m$. При $l = m$ систему называют *квадратной*, а при $l > m$ — *гипервыходной*.

Это условие сужает класс допустимых систем, однако, по-видимому, является необходимым, т. к., если $l < m$ (т. е. число известных выходов меньше, числа неопределенных входов), то в общем случае не хватает информации для решения задачи.

4°) Нулевая динамика либо отсутствует, либо устойчива, т. е. инвариантные нули, определяемые матрицей Розенброка

$$R(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+l) \times (n+m)}, \quad (2)$$

либо отсутствуют, либо лежат в \mathbb{C}_- .

Это предположение, по видимому, так же необходимо, т. к. в случае неустойчивости нулевой динамики в системе при $y = 0$ и некоторых возмущениях $|x(t)| \rightarrow \infty$ экспоненциально, и задача наблюдения становится неразрешимой.

5°) Матрица CB полного ранга, т. е. $\text{rank } CB = m$.

Последнее условие представляет собой наибольший интерес. В случае скалярной системы, т. е. при $l = m = 1$, это условие означает, что система имеет относительный порядок $r = 1^1$.

В случае векторных систем ситуация с определением векторного относительного порядка сложнее (см. [1]). В частности, для квадратных систем (при $m = l$) можно дать определение относительного порядка по Исидори.

Определение 1. Вектором относительного порядка системы (1) называют вектор $r = (r_1, \dots, r_m)$, $|r| = r_1 + \dots + r_m$ такой, что

а) $c_i A^j B = 0$ при $j = 0, r_i - 2, \dots, c_i A^{r_i - 1} B \neq 0$ для всех $i = \overline{1, m}$,

б) $\det H(r_1, \dots, r_m) = \begin{vmatrix} c_1 A^{(r_1 - 1)} B \\ \dots \\ c_m A^{(r_m - 1)} B \end{vmatrix} \neq 0$, где c_i — строки матрицы C .

Условие а) означает, что производные выхода $y_i = c_i x$, до порядка $(r_i - 1)$ включительно, не зависят явно от входа, а r_i -я производная зависит от u явно. Условие б) означает, что матрица $H(r_1, \dots, r_m)$ не вырождена, эта матрица определяет связь между вектором производных и входом u , т. е.

$$\begin{bmatrix} y_1^{r_1} \\ \dots \\ y_m^{r_m} \end{bmatrix} = \tilde{A}x + H(r_1, \dots, r_m)(u + f),$$

где постоянная матрица \tilde{A} со строками $c_i A^{r_i}$ целиком определяется параметрами системы.

Следует заметить, что вектор относительного порядка, удовлетворяющий определению по Исидори, для системы общего положения (1) существует не всегда.

Условие 5° полноты ранга матрицы CB в случае квадратной системы означает, что

$$\det CB \neq 0,$$

при этом $H(1, \dots, 1) = CB$, и система (1) имеет минимальный (векторный) относительный порядок. Если же система гипервыходовая, (т. е. $l > m$), то условие 5° означает, что система имеет минимальный относительный порядок по какой-либо части выхода $y(t)$.

Целью данной работы является изучение случая, когда условие 5° не выполнено, т. е. относительный порядок системы не минимален.

¹⁾ Напомним, что для скалярных систем *относительным порядком* называют число r такое, что выполнены условия $CB = 0, CAB = 0, \dots, CA^{r-2}B = 0, CA^{r-1}B \neq 0$. Фактически, это означает, что $u(t)$ действует явно на r -ую производную выхода $y(t)$.

2. Структура наблюдателя

Одним из подходов к решению задачи синтеза наблюдателя для скалярной системы с неизвестным ограниченным входом при произвольном относительном порядке является использование наблюдателя с иерархической обратной связью по ошибке наблюдения. Этот подход был предложен в работе [1] для скалярных систем. Целью данной работы является обобщение метода иерархической обратной связи на многосвязные системы. Далее будут рассматриваться квадратные системы (при этом $l = m$).

В скалярном случае для решения задачи исходная система разбивается на две части: подсистему, описывающую нулевую динамику, и подсистему с максимальным относительным порядком, соответствующую производным выхода. Такое разбиение скалярных систем общего положения возможно всегда. При этом для первой подсистемы строится асимптотический наблюдатель (предполагается, что система минимально-фазовая, т.е. инвариантные нули устойчивы), а для второй подсистемы за счет использования иерархической обратной связи возможно восстановление неизвестной части фазового вектора с любой наперед заданной точностью.

Используем аналогичный подход для решения задачи в случае $l = m > 1$. Как показано в [2], если для системы (1) выполнено определение относительного порядка по Исидори, то невырожденным преобразованием координат она приводится к каноническому виду с выделенной нулевой динамикой:

$$\begin{cases} \dot{x}' = \hat{A}_{11}x' + \hat{A}_{12}y, \\ \begin{cases} \dot{y}_1^k = y_2^k, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_k-1}^k = y_{r_k}^k, \\ \dot{y}_{r_k}^k = \alpha_{21}^k x' + \sum_{i=1}^m \alpha_i^k \bar{y}_i + h_k(u + f), \end{cases} & k = \overline{1, m}, \\ y = (y_1^1, \dots, y_1^m), \end{cases} \quad (3)$$

где $x'(t) \in \mathbb{R}^{n-|r|}$, $|r| = r_1 + \dots + r_m$ — длина вектора относительного порядка $r = (r_1, \dots, r_m)$ по Исидори; $y \in \mathbb{R}^m$ — известный выход системы; $\bar{y}_k = (y_1^k, \dots, y_{r_k}^k)^\top$ — часть фазового вектора, которая представляет собой k -й выход y_1^k и его производные до порядка $(r_k - 1)$ включительно; \hat{A}_{11} , \hat{A}_{12} , α_{21}^k , α_i^k — постоянные матрицы соответствующих размеров, определяемые преобразованием системы (см. [2]); $h_k = c_k A^{r_k-1} B$ — k -я строка матрицы $H(r)$ из определения 1.

Пусть для системы выполнено предположение 4°, т.е. нулевая динамика системы асимптотически устойчива. Заметим, что при $m = l$ матрица Розенброка является квадратной, а ее определитель является характеристическим полиномом нулевой динамики [3]:

$$\beta(s) = \det R(s) = \det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

При сделанных выше предположениях относительно системы матрица \hat{A}_{11} в представлении (3) гурвицева, более того, $\det(sI - \hat{A}_{11}) = \beta(s)$. Поэтому для

восстановления части фазового вектора x' , соответствующей нулевой динамике системы, может быть использован наблюдатель

$$\dot{\tilde{x}}' = \hat{A}_{11}\tilde{x}' + \hat{A}_{12}y, \quad (5)$$

при этом ошибка наблюдения $e' = x' - \tilde{x}' \rightarrow 0$ экспоненциально, скорость сходимости определяется матрицей \hat{A}_{11} , т.е. полиномом $\beta(s)$.

Для восстановления оставшейся части фазового вектора, т.е. векторов \bar{y}_k , $k = \overline{1, m}$, используем стандартный наблюдатель с обратной связью по ошибке наблюдения:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1^k = \tilde{y}_2^k + l_1^k(y_k - \tilde{y}_1^k), \\ \vdots \\ \dot{\tilde{y}}_{r_k-1}^k = \tilde{y}_{r_k}^k + l_{r_k-1}^k(y_k - \tilde{y}_1^k), \\ \dot{\tilde{y}}_{r_k}^k = \alpha_{21}^k \tilde{x}' + \sum_{i=1}^m \alpha_i^k \tilde{y}_i + h_k u + l_{r_k}^k(y_k - \tilde{y}_1^k), \end{cases} \quad k = \overline{1, m}, \quad (6)$$

где $\tilde{y}_k = (\tilde{y}_1^k, \dots, \tilde{y}_{r_k}^k)^\top$ — оценка части фазового вектора \bar{y}_k ; $\tilde{x}'(t)$ — асимптотическая оценка x' , формируемая наблюдателем (5); l_i^k — параметры обратной связи, подлежащие определению.

Тогда ошибка наблюдения $\bar{e}_k = (e_1^k, \dots, e_{r_k}^k)^\top = \bar{y}_k - \tilde{y}_k$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{e}_1^k = e_2^k - l_1^k e_1^k, \\ \vdots \\ \dot{e}_{r_k-1}^k = e_{r_k}^k - l_{r_k-1}^k e_1^k, \\ \dot{e}_{r_k}^k = \alpha_{21}^k e' + \sum_{i=1}^m \alpha_i^k \bar{e}_i + h_k f - l_{r_k}^k e_1^k, \end{cases} \quad k = \overline{1, m}, \quad (7)$$

где $e' = x' - \tilde{x}'$ — ошибка наблюдателя (5).

Для удобства изложения запишем систему (7) в матричном виде:

$$\dot{e}(t) = A^L e(t) + D e'(t) + H' f(t). \quad (8)$$

Здесь

$$A^L = \begin{bmatrix} A_{11}^L & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22}^L & \cdots & A_{2m} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm}^L \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{|r| \times |r|},$$

где

$$A_{kk}^L = \begin{bmatrix} -l_1^k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_2^k & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -l_{r_k-1}^k & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1^{kk} - l_{r_k}^k & a_2^{kk} & a_3^{kk} & \cdots & a_{r_k}^{kk} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_k \times r_k}, \quad \text{если } k = l; \quad (9)$$

$$A_{kl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1^{kl} & a_2^{kl} & \cdots & a_{r_l}^{kl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \alpha_l^k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_k \times r_l}, \quad \text{если } k \neq l;$$

$$e(t) = \begin{bmatrix} \bar{e}_1(t) \\ \bar{e}_2(t) \\ \cdots \\ \bar{e}_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{|r|}; \quad (10)$$

$$H' = \begin{bmatrix} H'_1 \\ H'_2 \\ \cdots \\ H'_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{|r| \times m}, \quad \text{где } H'_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ h_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_k \times m}; \quad (11)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \cdots \\ D_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{|r| \times (n-|r|)}, \quad \text{где } D_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ d_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_k \times (n-|r|)}. \quad (12)$$

В работе [1] показано, что при специальном выборе параметров l_i^k в случае скалярной системы с ограниченным известной мажорантой входом $f(t)$ можно добиться того, что ошибка наблюдения становится меньше наперед заданного числа (при этом выстраивается иерархия коэффициентов усиления). Ниже будет показано, что и в случае многосвязных квадратных систем вида (3) при определенной иерархии коэффициентов усиления l_i^k и ограниченном входе $f(t)$ задача наблюдения может быть решена с заданной точностью.

2.1. Выбор коэффициентов усиления

В работе [1], где был рассмотрен скалярный случай, для решения задачи было предложено выбирать параметры обратной связи так, чтобы спектр A^L был вещественным, различным и пропорциональным параметру усиления μ , устремляемому в $+\infty$ (т.е. собственные значения A^L имели вид $\lambda_i = \mu \bar{\lambda}_i$, где $\bar{\lambda}_i < 0$ фиксированы). Тогда для систем с максимальным относительным порядком ошибка $e(t)$ стремится в области диссипативности с радиусом $R \sim \text{const } \mu$, при этом за счет выбора коэффициента усиления μ этот радиус можно сделать меньше наперед заданной величины. При таком выборе спектра коэффициенты обратной связи в скалярном случае образовывали иерархию по степеням μ .

Покажем, что и для векторных квадратных систем имеет место такой же результат. Отметим, что система для ошибки (7) имеет, в некотором смысле, “максимальный относительный порядок” и только для таких систем возможно использование иерархической обратной связи.

Коротко изложим основную идею метода. Для этого рассмотрим подробно структуру матрицы A_{kk}^L :

$$A_{kk}^L = \begin{bmatrix} -l_1^k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_2^k & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -l_{r_k-1}^k & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -l_{r_k}^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1^{kk} & a_2^{kk} & \cdots & a_{r_k}^{kk} \end{bmatrix} = \bar{A}_{kk}^L + \bar{\bar{A}}_{kk}^L. \quad (13)$$

В этом представлении от коэффициентов l_i^k зависят только матрицы $\bar{A}_{kk}^L \in \mathbb{R}^{r_k \times r_k}$, и, более того, l_i^k целиком определяют характеристический полином этой матрицы

$$\det(sI - \bar{A}_{kk}^L) = s^{r_k} + l_1^k s^{r_k-1} + \dots + l_{r_k}^k = \rho^k(s).$$

Матрица \bar{A}_{kk}^L от l_i^k не зависит, но вносит вклад в характеристический полином матрицы A_{kk}^L . Однако, если выбрать спектр \bar{A}_{kk}^L вещественным, различным и пропорциональным некоторому коэффициенту μ , т. е. выбрать l_i^k из условия

$$\text{Sp } \bar{A}_{kk}^L = \{\mu \bar{\lambda}_1^k, \dots, \mu \bar{\lambda}_{r_k}^k\}, \quad \bar{\lambda}_i^k < 0, \quad \bar{\lambda}_i^k \neq \bar{\lambda}_j^k \text{ при } i \neq j, \quad (14)$$

то при $\mu \rightarrow +\infty$ спектр матрицы A_{kk}^L будет стремиться к спектру \bar{A}_{kk}^L . При указанном выборе спектра \bar{A}_{kk}^L полином $\rho^k(s)$ имеет вид:

$$\rho^k(s) = s^{r_k} + l_1^k s^{r_k-1} + \dots + l_{r_k}^k, \quad l_i^k = \mu^i \bar{l}_i^k, \quad (15)$$

где \bar{l}_i^k — коэффициенты полинома

$$\bar{\rho}^k(s) = \prod_{i=1}^{r_k} (s - \bar{\lambda}_i^k) = s^{r_k} + \bar{l}_1^k s^{r_k-1} + \dots + \bar{l}_{r_k}^k.$$

Заметим, что при фиксированном наборе $\{\bar{\lambda}_i^k\}$ коэффициенты \bar{l}_i^k определяются однозначно, а l_i^k образуют иерархию по степеням коэффициента усиления μ .

Из представления (13) следует, что характеристический полином матрицы A_{kk}^L является “возмущением” полинома $\rho^k(s)$, которое определяется матрицей $\bar{\bar{A}}_{kk}^L$. С другой стороны, матрица A^L имеет блочную структуру (9), у которой только диагональные элементы зависят от l_i^k . Поэтому при $\mu \rightarrow \infty$ характеристический полином A^L “стремится” к произведению характеристических полиномов диагональных блоков A_{kk}^L , которые, в свою очередь, стремятся к $\rho^k(s)$ ($k = \overline{1, m}$). Таким образом в некотором смысле

$$\text{Sp } A^L \rightarrow \{\mu \bar{\lambda}_1^1, \dots, \mu \bar{\lambda}_{r_1}^1, \mu \bar{\lambda}_1^2, \dots, \mu \bar{\lambda}_{r_2}^2, \dots, \mu \bar{\lambda}_{r_m}^m\} \text{ при } \mu \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Точнее, имеет место лемма.

Лемма 1. Пусть матрица A^L имеет блочную структуру (9). Фиксируем набор вещественных отрицательных чисел

$$\bar{\Lambda} = \{\bar{\lambda}_1^1, \dots, \bar{\lambda}_{r_1}^1, \bar{\lambda}_1^2, \dots, \bar{\lambda}_{r_2}^2, \dots, \bar{\lambda}_{r_m}^m\}; \quad \bar{\lambda}_i^k = \bar{\lambda}_j^p \Leftrightarrow i = j, k = p. \quad (17)$$

Установим иерархию коэффициентов l_i^k по степеням коэффициента усиления $\mu > 0$

$$l_i^k(\mu) = \mu^i \bar{l}_i^k, \quad k = \overline{1, m}, \quad (18)$$

где

$$s^{r_k} + \bar{l}_1^k s^{r_k-1} + \dots + \bar{l}_{r_k}^k = \prod_{i=1}^{r_k} (s - \bar{\lambda}_i^k).$$

Тогда характеристический полином матрицы A^L имеет вид:

$$\chi_{A^L}(s) = s^{|r|} + \chi_1(\mu) s^{|r|-1} + \dots + \chi_{|r|}(\mu), \quad (19)$$

а его коэффициенты $\chi_i(\mu)$ имеют вид:

$$\chi_i(\mu) = \bar{\chi}_i \mu^i + \bar{o}(\mu^i), \quad (20)$$

где $\bar{\chi}_i$ не зависят от μ и являются коэффициентами фиксированного полинома

$$\bar{\chi}(s) = s^{|r|} + \bar{\chi}_1 s^{|r|-1} + \dots + \bar{\chi}_{|r|} = \prod_{k=1}^m \prod_{i=0}^{r_k} (s - \bar{\lambda}_i^k). \quad (21)$$

З а м е ч а н и е 1. При указанном выборе l_i^k коэффициенты полинома $\chi_{A^L}(s)$ образуют иерархию по степеням коэффициентов усиления μ , точнее $\chi_i(\mu)$ является полиномом от μ степени ровно i с фиксированным коэффициентом при старшей степени.

Доказательству леммы 1 предпошлим вспомогательную лемму.

Л е м м а 2. Любой минор порядка r_k , расположенный в k -й блочной строке матрицы $(sI - A^L)$, представляет собой многочлен от s степени не выше чем r_k , причем коэффициент этого многочлена, стоящий перед p -й степенью s , имеет вид:

- 1) либо $l_{r_k-p}^k(\mu) + \bar{o}(\mu^{r_k-p})$ при $p = \overline{0, r_k-1}$ и 1 при $p = r_k$, если минор соответствует диагональному блоку A_{kk}^L матрицы A^L ;
- 2) либо $\bar{o}(\mu^{r_k-p})$ при $p = \overline{0, r_k-1}$ и 0 при $p = r_k$, в остальных случаях.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, рассмотрим первую блочную строку матрицы $sI - A^L$.

Блочная строка представляет собой матрицу размера $r_1 \times |r|$, имеющую вид:

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccc} l_1(\mu) + s & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_2(\mu) & s & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{r_1-1}(\mu) & 0 & 0 & \dots & s & -1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{r_1}(\mu) - a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{r_1-1} & s - a_{r_1} & a_{r_1+1} & \dots & a_{|r|} \end{array} \right]. \quad (22)$$

Рассмотрим сначала случай, когда минор порядка r_1 расположен в первых r_1 столбцах, т.е. соответствует диагональному блоку A_{11}^L . Проведем разложение по первому столбцу

$$\tilde{\rho}(s) = sM_1(s) + \sum_{p=1}^{r_1} (-1)^{p-1} l_p(\mu) M_p(s) + (-1)^{r_1-1} (-a_1) M_{r_1}(s),$$

где $M_p(s)$ — дополнительные миноры к соответствующим элементам первого столбца матрицы. Выясним их структуру, рассмотрев A_{11}^L в следующем блочном виде:

$$\left[\begin{array}{c|cccc|cccc|c} & \overbrace{\begin{array}{cccc} -1 & 0 & \dots & 0 \\ s & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{array}}^{Q_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & \\ l_1(\mu) + s & & & & & & & & & & \\ l_2(\mu) & & & & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & & & \\ l_{p-1}(\mu) & & & & & & & & & & \\ l_p(\mu) & 0 & 0 & \dots & s & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ l_{p+1}(\mu) & 0 & 0 & \dots & -1 & \underbrace{\begin{array}{cccc} s & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s & -1 \end{array}}_{Q_2} & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & & \\ l_{r_1-1}(\mu) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & s & -1 & \\ l_{r_1}(\mu) - a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_p & -a_{p+1} & -a_{p+2} & \dots & -a_{r_1-1} & s - a_{r_1} & \end{array} \right] \quad (23)$$

Нетрудно заметить, что

$$\det Q_1 = (-1)^{p-1},$$

$$\det Q_2 = s^{r_1-p} - a_{r_1} s^{r_1-p-1} - \dots - a_{p+1} = s^{r_1-p} - \sum_{i=0}^{r_1-p-1} s^i a_{i+p+1}.$$

Отсюда

$$\tilde{\rho}(s) = s \left(s^{r_1-1} - \sum_{i=0}^{r_1-2} s^i a_{i+p+1} \right) + \sum_{p=1}^{r_1} l_p(\mu) \left(s^{r_1-p} - \sum_{i=0}^{r_1-p-1} s^i a_{i+p+1} \right) - a_1.$$

Откуда, учитывая, что $l_p(\mu) = \mu^p \bar{l}_p$, получим

$$\tilde{\rho}(s) = s^{r_1} + \sum_{i=0}^{r_1-1} s^i (\mu^{r_1-i} \bar{l}_{r_1-i} + \bar{o}(\mu^{r_1-i})),$$

где $\bar{o}(\mu^{r_1-i})$ — полином от μ степени не выше $(r_1 - i - 1)$, т.е. для диагонального минора утверждение доказано.

Рассмотрим теперь случай недиагонального минора порядка r_1 матрицы (22). В этом случае минор содержит по крайней мере один столбец с номером большим, чем r_1 . Все эти столбцы имеют вид $(0, 0, \dots, 0, -a_j)^\top$, по-

этому, если минор содержит два или более таких столбца, то его значение равно нулю, и утверждение леммы выполнено. Если этот минор не содержит первого столбца, то он не зависит от $l_i^k(\mu)$, следовательно, утверждение леммы выполнено и в этом случае.

Осталось рассмотреть случай, когда минор отличается от диагонального заменой одного из столбцов (кроме первого) на столбец с номером q большим, чем r_1 , т. е. рассматривается минор (с точностью до перестановки столбцов)

$$\begin{bmatrix} l_1(\mu) + s & -1 & \dots & 0 & \boxed{0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_2(\mu) & s & \dots & 0 & \boxed{0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{j-1}(\mu) & 0 & \dots & s & \boxed{0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_j(\mu) & 0 & \dots & 0 & \boxed{0} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ l_{j+1}(\mu) & 0 & \dots & 0 & \boxed{0} & s & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{r_1-1}(\mu) & 0 & \dots & 0 & \boxed{0} & 0 & \dots & s & -1 \\ l_{r_1}(\mu) - a_1 & -a_2 & \dots & -a_{j-1} & \boxed{-a_q} & -a_{j+1} & \dots & -a_{r_1-1} & s - a_{r_1} \end{bmatrix}$$

Выпишем разложение определителя по первому столбцу. При этом заметим, что при $p \geq j$ алгебраическое дополнение к $l_p(\mu)$ равно нулю (в представлении, аналогичном (23), матрица Q_1 будет содержать нулевой столбец). Если же $p < j$, то алгебраическое дополнение к $l_p(\mu)$ равно $(-1)^{r_1-j} s^{j-p-1} a_q$.

Тогда искомый определитель имеет вид:

$$\tilde{\rho}(s) = \left(\sum_{p=1}^{j-1} l_p(\mu) (-1)^{r_1-j} s^{j-p-1} + s(s^{j-2} (-1)^{r_1-j}) \right) a_q.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\tilde{\rho}(s)$ является полиномом от s степени не выше $(j-1)$ и, т. к. $2 \leq j \leq r_1$, то коэффициенты при степенях p этого полинома либо равны 0, либо представляют собой $\bar{\sigma}(\mu^{r_1-p})$.

Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству леммы 1.

Доказательство. Разложим определитель $(sI - A^L)$ по первой блочной строке, затем все входящие в разложение алгебраические дополнения разложим по второй блочной строке и т. д. В итоге получим, что характеристический полином матрицы $(sI - A^L)$ (т. е. полином $\chi_{A^L}(s)$) представляется в виде суммы произведений миноров порядков r_k из различных блочных строк матрицы $(sI - A^L)$ (взятых с соответствующими знаками). Для доказательства леммы требуется получить оценку для коэффициента при s^p в этом полиноме. Рассмотрим произвольное произведение миноров порядков r_k , взятых из различных блочных строк. Возможны два варианта.

1. Это произведение является произведением диагональных миноров из каждой блочной строки. По лемме 2 каждый из этих миноров имеет вид

$$\tilde{\rho}_k(s) = s^{r_k} + \sum_{p=0}^{r_k-1} (l_{r_k-p}^k(\mu) + \bar{\sigma}(\mu^{r_k-p})) s^p, \quad k = \overline{1, m}.$$

Их произведение даст (для удобства считаем $l_0(\mu) = 1$)

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^m \tilde{\rho}_k(s) &= \prod_{k=1}^m \left(s^{r_k} + \sum_{p=0}^{r_k-1} (l_{r_k-p}^k(\mu) + \bar{o}(\mu^{r_k-p})) s^p \right) = \\
&= \sum_{p=0}^{r_1+\dots+r_m} \sum_{\substack{j_1+\dots+j_m=p, \\ 0 \leq j_h \leq r_h, \\ j_h \in \mathbb{Z}}} [l_{r_1-j_1}^1(\mu) + \bar{o}(\mu^{r_1-j_1})] s^{j_1} \dots [l_{r_m-j_m}^m(\mu) + \bar{o}(\mu^{r_m-j_m})] s^{j_m} = \\
&= \sum_{p=0}^{|r|} s^p \sum_{\substack{j_1+\dots+j_m=p, \\ 0 \leq j_h \leq r_h, \\ j_h \in \mathbb{Z}}} [l_{r_1-j_1}^1(\mu) + \bar{o}(\mu^{r_1-j_1})] \dots [l_{r_m-j_m}^m(\mu) + \bar{o}(\mu^{r_m-j_m})]. \quad (24)
\end{aligned}$$

Т. к. $l_i^k = \mu^i \bar{l}_i^k$, т. е. в каждой скобке вида $[l_{r_k-j_k}^k(\mu) + \bar{o}(\mu^{r_k-j_k})]$ именно первое слагаемое является главным членом по степени μ , то из (24) следует, что коэффициент при s^p представляет собой полином от μ с главным членом вида

$$\sum_{\substack{j_1+\dots+j_m=p, \\ 0 \leq j_h \leq r_h, \\ j_h \in \mathbb{Z}}} [l_{r_1-j_1}^1(\mu)] \dots [l_{r_m-j_m}^m(\mu)] = \mu^{|r|-p} \bar{\chi}_{|r|-p},$$

где $\bar{\chi}_{|r|-p}$ определены в (21).

Таким образом, полином $\tilde{\rho}_k(s)$ “похож” на заданный полином $\rho_k(s) = \prod_{i=1}^{r_k} (s - \mu \bar{\lambda}_i^k)$, а произведение $\prod_{k=1}^m \tilde{\rho}_k(s)$ “похоже” на произведение

$$\prod_{k=1}^m \rho_k(s) = s^{|r|} + \mu \bar{\chi}_1 s^{|r|-1} + \dots + \mu^{|r|} \bar{\chi}_{|r|}.$$

2. Рассмотрим второй случай, когда в произведении есть хотя бы один недиагональный минор. Не ограничивая общности, считаем, что он расположен в первой блочной строке. В силу леммы 2 этот минор имеет вид:

$$\tilde{\rho}_1 = \sum_{p=0}^{r_1-1} \bar{o}(\mu^{r_1-p}) s^p,$$

а для остальных миноров, входящих в исследуемое произведение, справедливы оценки:

$$\tilde{\rho}_k = \sum_{p=0}^{r_k} Q(\mu^{r_k-p}) s^p, \quad k = \overline{2, m}.$$

Тогда

$$\prod_{k=1}^m \tilde{\rho}_k(s) = \sum_{p=0}^{|r|-1} s^p \bar{o}(\mu^{|r|-p}).$$

Таким образом, произведения второго вида не влияют на главную часть коэффициентов при соответствующих степенях s , а, следовательно, характе-

ристический полином матрицы $(sI - A^L)$ имеет вид

$$\chi_{A^L}(s) = \det(I - A^L) = \sum_{p=0}^{|r|} s^p \chi_{|r|-p}(\mu),$$

$$\chi_0 = 1; \quad \chi_i(\mu) = \mu^i \bar{\chi}_i + \bar{\sigma}(\mu^i), \quad i = \overline{1, |r|},$$

где первые главные слагаемые в выражениях для $\chi_i(\mu)$ определяются диагональными блоками матрицы A^L (т. е. коэффициентами l_i^k), а слагаемые вида $\bar{\sigma}(\mu^{i-1})$ — как диагональными, так и недиагональными минорами.

Лемма доказана.

Из леммы 1 непосредственно следует следующая лемма.

Лемма 3. При заданной в лемме 1 иерархии коэффициентов обратной связи спектр A^L имеет вид:

$$\text{Sp } A^L = \{\mu\lambda_1^1(\mu), \dots, \mu\lambda_{r_1}^1(\mu), \mu\lambda_1^2(\mu), \dots, \mu\lambda_{r_m}^m(\mu)\}, \quad (25)$$

где $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \lambda_i^k(\mu) = \bar{\lambda}_i^k$.

Доказательство. Если $(\mu\lambda_1^1(\mu), \dots, \mu\lambda_{r_m}^m(\mu))$ — корни характеристического полинома $\chi_{A^L}(\lambda)$, то

$$\chi_{A^L}(s) = \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{r_k} (s - \mu\lambda_j^k(\mu)) = \mu^{|r|} \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{r_k} \left(\left(\frac{s}{\mu} \right) - \lambda_j^k(\mu) \right).$$

Обозначим $\frac{s}{\mu} = \tilde{s}$, тогда $\lambda_j^k(\mu)$ являются корнями полинома

$$\tilde{\chi}(\tilde{s}) = \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{r_k} (\tilde{s} - \lambda_j^k(\mu)) = \tilde{s}^{|r|} + \frac{\chi_1(\mu)}{\mu} \tilde{s}^{|r|-1} + \dots + \frac{\chi_{|r|-1}(\mu)}{\mu^{|r|-1}} \tilde{s} + \frac{\chi_n(\mu)}{\mu^{|r|}}.$$

Учитывая асимптотику коэффициентов $\chi_i(\mu)$ по степеням μ , установленную в лемме 1, имеем:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\chi_i(\mu)}{\mu^i} = \bar{\chi}_i, \quad i = \overline{1, |r|},$$

т. е. $\tilde{\chi}(s) \rightarrow \bar{\chi}(s)$, а, следовательно, и его корни

$$\lambda_j^k(\mu) \rightarrow \bar{\lambda}_i^k \quad \text{при } \mu \rightarrow \infty.$$

Лемма доказана.

Таким образом, при указанном выше выборе коэффициентов усиления l_i^k обратной связи наблюдателя, спектр матрицы A^L стремится к $-\infty$ пропорционально заданному спектру $\bar{\Lambda}$ с коэффициентом пропорциональности μ .

2.2. Оценка ошибки наблюдения

Вернемся к рассмотрению основной задачи построения оценки неизвестного фазового вектора неопределенной системы.

Как было отмечено выше, при факторизации системы (3) фазовый вектор распался на две части: $x' \in \mathbb{R}^{n-|r|}$ и $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m) \in \mathbb{R}^{|r|}$. Первую часть оценивает наблюдатель (5), поэтому остается построить оценку на \bar{y} . Для решения этой задачи было предложено использовать наблюдатель (6).

Покажем, что при выборе коэффициентов обратной связи l_i^k в наблюдателе (6) в соответствии с описанной в пункте 2.1 иерархией коэффициентов усиления по степеням μ , ошибка наблюдения может быть сделана меньше наперед заданного числа, точнее (с точностью до экспоненциально убывающих слагаемых) погрешность оценивания пропорциональна $\frac{F_0}{\mu}$, где F_0 — априорная оценка неизвестного входного сигнала, т. е.

$$\|f(t)\| \leq F_0. \quad (26)$$

Напомним, что погрешность оценивания $e = \bar{y} - \tilde{y} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m)$ удовлетворяет системе (7) (или в блочном виде (8)).

Из (8) и формулы Коши для решения линейного стационарного дифференциального уравнения следует, что

$$\|e(t)\| \leq \|e^{(A^L)t} e_0\| + \int_0^t \|e^{A^L(t-\tau)} (De'(\tau) + H'f(\tau))\| d\tau.$$

Далее, не ограничивая общности рассуждений, считаем, что спектр A^L гурвицев, вещественен и различен (этого можно добиться указанным в пункте способом при достаточно большом $\mu > 0$), при этом выберем $\bar{\lambda}_i < -1$, тогда при больших положительных μ собственные значения A^L будут удовлетворять оценке

$$\lambda_i^k(\mu) \leq -\mu, \quad i = \overline{1, r_k}, \quad k = \overline{1, m},$$

а матричная экспонента

$$\|e^{(A^L)t}\| \leq Q(\mu)e^{-\mu t}, \quad (27)$$

где $Q(\mu)$ — константа, зависящая от выбора коэффициентов усиления μ . Более того, $Q(\mu) \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \infty$.

Будем считать, что для $e'(t) \xrightarrow{\text{exp}} 0$ имеет место оценка

$$\|e'(t)\| \leq R_1 e^{-\delta t} \|e'_0\|, \quad (28)$$

где $R_1 > 0$, $\delta > 0$ — известные мажоранты, e'_0 — неизвестное начальное состояние. Пусть также неизвестный входной сигнал $f(t)$ удовлетворяет оценке (26). При этих условиях для ошибки оценивания $e(t)$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &\leq \|e^{(A^L)t}\| \|e_0\| + \int_0^t \left\{ \|e^{A^L(t-\tau)} D\| \|e'(\tau)\| + \|e^{A^L(t-\tau)} H'\| \|f(\tau)\| \right\} d\tau \leq \\ &\leq Q(\mu) \|e_0\| e^{-\mu t} + \int_0^t \|e^{A^L(t-\tau)} D\| R_1 \|e'_0\| e^{-\delta \tau} d\tau + \int_0^t \|e^{A^L(t-\tau)} H'\| F_0 d\tau. \quad (29) \end{aligned}$$

Остается оценить два последних интеграла в (29). Заметим, что из (27) можно получить грубую оценку для подынтегральных функций. Однако, учитывая специальную структуру матриц A^L , D , H' можно получить более тонкую оценку, а именно, можно показать, что хотя при $\mu \rightarrow \infty$ константа $Q(\mu) \rightarrow \infty$, произведения $\|e^{A^L(t-\tau)}D\|$ и $\|e^{A^L(t-\tau)}H'\|$ такому “росту” не подвержены.

Заметим, что матрицы D и H' имеют одну и ту же структуру, поэтому рассуждения достаточно провести лишь для одного слагаемого, например, для матрицы H' .

Для проведения оценки требуется оценить произведение $e^{(A^L)t}H'$, где $e^{(A^L)t} \in \mathbb{R}^{|r| \times |r|}$ — матричная экспонента, для которой справедливо представление (см. [4]):

$$e^{(A^L)t} = \sum_{p=0}^{|r|-1} (A^L)^p \varphi_p(t), \quad (30)$$

где $\varphi_p(t)$ — скалярные функции от t . Тогда

$$e^{(A^L)t}H' = \sum_{p=0}^{|r|-1} \varphi_p(t) \{(A^L)^p H'\}. \quad (31)$$

Поэтому рассмотрим подробнее степени $(A^L)^p$ матрицы A^L и произведения $(A^L)^p H'$ при различных $p = 0, \dots, |r| - 1$.

Напомним, что матрица H' имеет блочную структуру:

$$H' = \begin{bmatrix} H'_1 \\ H'_2 \\ \dots \\ H'_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{|r| \times m}, \quad H'_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ h_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_k \times m},$$

где h_k — некоторая ненулевая строка. Таким образом, в матрице H' только строки с номерами r_1, r_2, \dots, r_m отличны от нуля. Поэтому при анализе произведения $(A^L)^p H'$ требуется рассмотреть структуру столбцов матрицы $(A^L)^p$ с номерами r_1, r_2, \dots, r_m .

В качестве простой иллюстрации рассмотрим указанные произведения при $p = 0$ и $p = 1$. При $p = 0$ имеем

$$(A^L)^0 H' = IH' = H',$$

в этом случае произведение не зависит от коэффициента усиления μ и определяется параметрами исходной системы.

При $p = 1$ имеем:

$$(A^L)^1 H' = \begin{bmatrix} A_{11}^L & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22}^L & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H'_1 \\ H'_2 \\ \dots \\ H'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^L H'_1 + \dots + A_{1m} H'_m \\ A_{21} H'_1 + \dots + A_{2m} H'_m \\ \dots \\ A_{m1} H'_1 + \dots + A_{mm}^L H'_m \end{bmatrix}.$$

При описанном выше выборе коэффициентов обратной связи l_i^k от параметра μ зависят только диагональные блоки A_{kk}^L , поэтому рассмотрим произведение $A_{kk}^L H'_k$ подробнее:

$$A_{kk}^L H'_k = \begin{bmatrix} -l_1^1(\mu) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_2^1(\mu) & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -l_{r_k-1}^1(\mu) & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1^{kk} - l_{r_k}^1(\mu) & a_2^{kk} & a_3^{kk} & \cdots & a_{r_k}^{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ h_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ h_k \\ a_{r_k}^{kk} h_k \end{bmatrix}.$$

Таким образом, и $A_{kk} H'_k$ не зависит от l_i^k (и от μ) при $r_k > 1$, а следовательно, и все произведение $(A^L)H'$ не зависит от μ при $r_k > 1$.

Для произведений $(A^L)^p H'$ при $p > 1$ ситуация более сложная. Для ее описания введем следующие обозначения.

Определение 2. Пусть $n \times m$ матрицы $A = A(\mu)$ и $B = B(\mu)$ зависят от параметра μ . Введем обозначение

$$A(\mu) \lesssim B(\mu),$$

если существуют две неотрицательные константы q и M , такие что при всех $\mu \geq M$ для элементов матриц a_{ij} и b_{ij} выполнены неравенства

$$|a_{ij}(\mu)| \leq q b_{ij}(\mu) \text{ при } i = \overline{1, |r|}, j = \overline{1, m}. \quad (32)$$

Фактически условие (32) означает, что матрица $B(\mu)$ при больших μ мажорирует матрицу $A(\mu)$.

Для матриц $A(\mu)$ и $B(\mu)$, связанных условием $A(\mu) \lesssim B(\mu)$, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. *Отношение, введенное определением 2, обладает следующими свойствами:*

- 1) оно транзитивно и рефлексивно;
- 2) если матрицы $A(\mu)$ и $B(\mu)$ заданы в блочном виде, то $A(\mu) \lesssim B(\mu)$ тогда и только тогда, когда таким же соотношением связаны соответствующие блоки матриц;
- 3) если $A \lesssim B$, $C \lesssim D$, то $(A + C) \lesssim (B + D)$;
- 4) если $A \lesssim B$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то $(\alpha A) \lesssim B$;
- 5) если $A \lesssim B$, $C \lesssim D$, то $(AC) \lesssim (BD)$.

Доказательство. Свойства 1 и 2 следуют непосредственно из определения 2. Свойство 4 очевидно: достаточно в определении 2 заменить q на $|\alpha|q$.

Докажем свойство 3. Пусть

$$A \lesssim B, \quad C \lesssim D,$$

тогда

$$\begin{aligned} |a_{ij}(\mu)| &\leq q_1 b_{ij}(\mu) \text{ при } \mu \geq M_1, \\ |c_{ij}(\mu)| &\leq q_2 d_{ij}(\mu) \text{ при } \mu \geq M_2. \end{aligned} \quad (33)$$

Рассмотрим $\mu \geq M = \max(M_1, M_2)$ и $q = \max(q_1, q_2)$. Тогда

$$|a_{ij}(\mu) + c_{ij}(\mu)| \leq |a_{ij}(\mu)| + |c_{ij}(\mu)| \leq q(b_{ij}(\mu) + d_{ij}(\mu)),$$

т. е. $(A + C) \lesssim (B + D)$.

Аналогично доказывается свойство 5. Пусть выполнены условия (33), тогда при $\mu > M$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} |[AC]_{ij}| &= \left| \sum_{k=1}^{|\mathcal{r}|} a_{ik}(\mu) c_{kj}(\mu) \right| \leq \sum_{k=1}^{|\mathcal{r}|} |a_{ik}(\mu) c_{kj}(\mu)| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{|\mathcal{r}|} q_1 b_{ik}(\mu) q_2 d_{kj}(\mu) = q_1 q_2 \sum_{k=1}^{|\mathcal{r}|} b_{ik}(\mu) d_{kj}(\mu) = q_1 q_2 [BD]_{ij}. \end{aligned}$$

Таким образом, для соотношения $(AC) \lesssim (BD)$ выполнено определение 2 при $q = q_1 q_2$.

Утверждение доказано.

Используя введенные выше обозначения можно сформулировать лемму.

Лемма 4. Пусть матрица A^L имеет вид (9), а коэффициенты обратной связи $\{l_i^k\}$ выбираются из условия (18), тогда для столбцов матрицы $(A^L)^p$ с номерами r_1, \dots, r_m выполнены соотношения

$$[(A^L)^p]_{r_k} \lesssim \left[\begin{array}{c} d_{r_1}^p \\ d_{r_2}^p \\ \dots \\ d_{r_m}^p \end{array} \right], \quad (34)$$

где $[(A^L)^p]_{r_k}$ — r_k -й столбец матрицы $(A^L)^p$, а $d_{r_k}^p$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} d_{r_k}^p &= \left. \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{array} \right] \\ \left. \begin{array}{c} r_k - p - 1 \\ \\ p + 1 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad \text{при } r_k - 1 \geq p, \text{ т. е. } (r_k - p) \geq 1; \\ d_{r_k}^p &= \left[\begin{array}{c} \mu^{(p-r_k)+1} \\ \mu^{(p-r_k)+2} \\ \dots \\ \mu^p \end{array} \right], \quad \text{при } r_k - 1 < p, \text{ т. е. } (r_k - p) < 1. \end{aligned} \quad (35)$$

З а м е ч а н и е 2. Утверждение леммы означает, что при $(r_k - 1) \geq p$ столбец матрицы $(A^L)^p$ с номером r_k мажорируется постоянным столбцом, т. е. не зависит от коэффициента μ . При более высоких степенях p , т. е. при $p > (r_k - 1)$, компоненты этого столбца могут зависеть от μ , но порядок их роста по степеням μ удовлетворяет известным оценкам (34)–(35).

Доказательство леммы может быть проведено методом математической индукции по p . При $p = 1$ утверждение леммы выполнено (выше было показано, что r_k -е столбцы $(A^L)^1$ не зависят от μ при $r_k > 1$). Шаг индукции доказывается непосредственной проверкой всех возможных случаев. Подробности опускаем.

Можно сформулировать следующее следствие леммы 4.

Следствие 1. Пусть в матрице $B \in \mathbb{R}^{|r| \times h}$ отличны от нуля только элементы строк с номерами r_1, \dots, r_m (заметим, что матрицы D и H' удовлетворяют этому условию), тогда произведение $(A^L)^p B$ зависит только от столбцов матрицы $(A^L)^p$ с номерами r_1, \dots, r_m , откуда, в силу леммы 4, при иерархии коэффициентов l_i^k из (18) следует, что элементы $(A^L)^p B$ представляют собой полиномы от μ степени не выше p , и имеет место оценка

$$\|(A^L)^p B\| \leq K_p \mu^p, \quad (36)$$

где $K_p = \text{const} > 0$ не зависит от μ (но зависит от p).

Используя полученные оценки, вернемся к рассмотрению погрешности наблюдения $e(t)$ из (29). Для нее имеет место основная теорема.

Теорема 1. Пусть в системе (8)

$$\dot{e}(t) = A^L e(t) + D e'(t) + H' f,$$

матрицы A^L , H' и D имеют вид (9), (11) и (12) соответственно; коэффициенты l_i^k выбраны из условия (18), при этом

$$\text{Sp } A^L = \{\mu \lambda_1^1(\mu), \dots, \mu \lambda_{r_1}^1(\mu), \dots, \mu \lambda_{r_m}^m(\mu)\}, \quad \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \lambda_j^i(\mu) = \bar{\lambda}_j^i, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, r_i}; \quad (37)$$

$\bar{\lambda}_j^i \leq -1$ — вещественные и различные. Пусть также известны мажоранты (26), (28), т. е.

$$\|f(t)\| \leq F_0, \quad \|e'(t)\| \leq R_1 e^{-\delta t} \|e'_0\|.$$

Тогда при достаточно больших $\mu > 0$ (т. е. при всех $\mu > M$) будут выполнены оценки

$$\|e^{(A^L)t} H'\| \leq C e^{-\mu t}, \quad (38)$$

$$\|e(t)\| \leq \frac{C F_0}{\mu} + C_1(\mu) e^{-\min(\delta, \mu)t}, \quad (39)$$

где константа C не зависит от выбора коэффициента усиления μ .

Из асимптотики спектра матрицы A^L при указанном выше выборе коэффициентов l_i^k следует, что найдется такое $M > 0$, что при всех $\mu > M$ спектр матрицы A^L будет вещественный, различный и устойчивый (в частности $\lambda_i^k(\mu) < -1$). Далее считаем, что $\mu > M$.

Для удобства дальнейшего изложения введем сквозную нумерацию собственных значений A^L

$$\text{Sp } A^L = \{\mu \lambda_1(\mu), \dots, \mu \lambda_{|r|}(\mu)\}, \quad \lambda_i(\mu) \rightarrow \bar{\lambda}_i \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow \infty.$$

Тогда матричная экспонента имеет вид (см. [4, с. 108])

$$\begin{aligned} e^{(A^L)t} &= \sum_{k=1}^{|r|} \frac{(A^L - \mu\lambda_1(\mu)) \dots [k] \dots (A^L - \mu\lambda_{|r|}(\mu))}{(\mu\lambda_k(\mu) - \mu\lambda_1(\mu)) \dots [k] \dots (\mu\lambda_k(\mu) - \mu\lambda_{|r|}(\mu))} e^{\mu\lambda_k(\mu)t} = \\ &= \sum_{k=1}^{|r|} \frac{(\frac{A^L}{\mu} - \lambda_1(\mu)) \dots [k] \dots (\frac{A^L}{\mu} - \lambda_{|r|}(\mu))}{(\lambda_k(\mu) - \lambda_1(\mu)) \dots [k] \dots (\lambda_k(\mu) - \lambda_{|r|}(\mu))} e^{\mu\lambda_k(\mu)t} = \\ &= \sum_{k=1}^{|r|} e^{\mu\lambda_k(\mu)t} \sum_{p=0}^{|r|-1} G_{kp}(\mu) \frac{(A^L)^p}{\mu^p}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G_{kp}(\mu) &= G_{kp}(\lambda_1(\mu), \dots, \lambda_n(\mu)) = \\ &= \frac{\sum_{\substack{i_1 + \dots + [k] \dots + i_{|r|} = p-1, \\ i_h \in \{0,1\}}} (-\lambda_1(\mu))^{i_1} \dots [k] \dots (-\lambda_{|r|}(\mu))^{i_n}}{(\lambda_k(\mu) - \lambda_1(\mu)) \dots [k] \dots (\lambda_k(\mu) - \lambda_{|r|}(\mu))}. \end{aligned}$$

Здесь знак $[k]$ означает, что был пропущен k -й элемент произведения или суммы. Очевидно, что при $\mu \rightarrow +\infty$ в силу асимптотики $\lambda_i^k(\mu)$ существует предел

$$G_{kp}(\mu) \rightarrow G_{kp}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_{|r|}) = \text{const},$$

а, следовательно, при $\mu > M$ функция $|G_{kp}(\mu)|$ ограничена константой, не зависящей от μ .

Используя следствие 1 из леммы 4, получим оценку

$$\|(A^L)^p H'\| \leq K_p \mu^p, \quad p = \overline{1, |r|-1}. \quad (40)$$

Учитывая неравенства (40) и то, что $\lambda_i(\mu) \leq -1$, а также ограниченность G_{kp} , получаем оценку на произведение $\|e^{(A^L)t} H'\|$:

$$\begin{aligned} \|e^{(A^L)t} H'\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^{|r|} e^{\mu\lambda_k(\mu)t} \sum_{p=0}^{|r|-1} G_{kp}(\mu) \frac{(A^L)^p H'}{\mu^p} \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{|r|} e^{-\mu t} \sum_{p=0}^{|r|-1} |G_{kp}(\mu)| \frac{K_p \mu^p}{\mu^p} \leq C e^{-\mu t}, \end{aligned}$$

где $C = \text{const} > 0$ не зависит от μ .

Аналогично, при замене H' на D получим оценку

$$\|e^{(A^L)t} D\| \leq \tilde{C} e^{-\mu t}, \quad (41)$$

где $\tilde{C} = \text{const} > 0$ не зависит от μ .

Получим теперь окончательную оценку для $e(t)$. Выше было показано, что для $e(t)$ выполнена оценка (29). Осталось доказать (39). Для этого выпишем решение (8) в явном виде

$$\|e(t)\| \leq Q(\mu) \|e_0\| e^{-\mu t} + \int_0^t \|e^{A^L(t-\tau)} D\| \|R_1\| \|e'_0\| e^{-\delta\tau} d\tau + \int_0^t \|e^{A^L(t-\tau)} H'\| \|F_0\| d\tau.$$

Учитывая оценки (38) и (41), получим

$$\|e(t)\| \leq Q(\mu)\|e_0\|e^{-\mu t} + \int_0^t \left(R_1\|e'_0\|\tilde{C}e^{-\mu(t-\tau)}e^{-\delta\tau} + CF_0e^{-\mu(t-\tau)} \right) d\tau.$$

Поменяв направление интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &\leq Q(\mu)\|e_0\|e^{-\mu t} + \int_0^t \left\{ (R_1\|e'_0\|\tilde{C}e^{-\delta t})e^{-(\mu-\delta)\tau} + (CF_0)e^{-\mu\tau} \right\} d\tau = \\ &= Q(\mu)\|e_0\|e^{-\mu t} + \frac{(R_1\|e'_0\|\tilde{C})}{\mu-\delta}(e^{-\delta t} - e^{-\mu t}) + \frac{CF_0}{\mu}(1 - e^{-\mu t}) \leq \\ &\leq \frac{CF_0}{\mu} + C_1(\mu)e^{-\min(\delta,\mu)t}, \end{aligned}$$

где константа $C_1(\mu)$ зависит от выбора μ , а также от начальных значений погрешностей наблюдения e_0, e'_0 . Т.к. эти погрешности в общем случае неизвестны (и неизвестны оценки этих величин), то константа $C_1(\mu)$ неизвестна. При больших значениях μ имеет место соотношение $\min(\delta, \mu) = \delta$, т.е. скорость сходимости второго слагаемого в окончательной оценке (39) определяется δ , т.е. спектром нулевой динамики исходной системы. Из (39) следует, что погрешность стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, однако она за конечное время попадает в заданную окрестность нуля, и радиус этой окрестности задается выбором μ . Теорема доказана.

3. Вывод

Объединяя результат [2] о возможности приведения исходной системы (1) к каноническому виду (3), лемму 3 и теорему 1, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть МИМО система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(u + f), \\ y = Cx, \end{cases} \quad (42)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — известные постоянные матрицы, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — известный вход, $f(t) \in \mathbb{R}^m$ — неизвестное возмущение, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ — непосредственно наблюдаемый выход, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — неизвестный фазовый вектор, удовлетворяет следующими предположениям:

П.1. Система находится в общем положении, т.е. пара $\{C, A\}$ наблюдаема, а пара $\{A, B\}$ управляема.

П.2. Система квадратная, т.е. размерность входа $u(t)$ и выхода $y(t)$ совпадают.

П.3. Выполнено определение относительного порядка по Исидори: существует вектор $r = (r_1, \dots, r_m)$, $|r| = r_1 + \dots + r_m$ такой, что

а) $c_i A^j B = 0$ при $j = \overline{0, r_i - 2}$, $c_i A^{r_i - 1} B \neq 0$ для всех $i = \overline{1, m}$,

б) $\det H(r_1, \dots, r_m) = \begin{vmatrix} c_1 A^{r_1 - 1} B \\ \dots \\ c_m A^{r_m - 1} B \end{vmatrix} \neq 0$, где c_i — строки матрицы C .

П.4. Возмущение ограничено: $\|f(t)\| \leq F_0$.

П.5. Нулевая динамика устойчива.

Тогда существует наблюдатель размерности n , обеспечивающий равномерную оценку фазового вектора x с любой наперед заданной точностью, начиная с некоторого момента времени.

Ниже приведен алгоритм построения этого наблюдателя.

1. В соответствии с [2] приводим исходную систему (1) к каноническому виду (3):

$$\begin{cases} \dot{x}' = \hat{A}_{11}x' + \hat{A}_{12}y, \\ \dot{y}_1^k = y_2^k, \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_k-1}^k = y_{r_k}^k, \\ \dot{y}_{r_k}^k = \alpha_{21}^k x' + \sum_{i=1}^m \alpha_i^k \bar{y}_i + h_k(u + f), \end{cases} \quad k = \overline{1, m},$$

$$y = (y_1^1, \dots, y_1^m).$$

2. Для нулевой динамики, описываемой уравнением $\dot{x}' = \hat{A}_{11}x' + \hat{A}_{12}y$, используем асимптотический наблюдатель (5)

$$\dot{\tilde{x}}' = \hat{A}_{11}\tilde{x}' + \hat{A}_{12}y.$$

3. В качестве наблюдателя для оставшейся части фазового вектора используем систему (6)

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1^k = \tilde{y}_2^k - l_1^k(\tilde{y}_1^k - y_k), \\ \vdots \\ \dot{\tilde{y}}_{r_k-1}^k = \tilde{y}_{r_k}^k - l_{r_k-1}^k(\tilde{y}_1^k - y_k), \\ \dot{\tilde{y}}_{r_k}^k = \alpha_{21}^k \tilde{x}' + \sum_{i=1}^m \alpha_i^k \tilde{y}_i + h_k u - l_{r_k}^k(\tilde{y}_1^k - y_k), \end{cases} \quad k = \overline{1, m},$$

где коэффициенты $\{l_p^k\}$ будут выбраны на следующем шаге.

4. В соответствии с леммой 3 выбираем $|r|$ различных чисел

$$\bar{\lambda}_1^1, \dots, \bar{\lambda}_{r_1}^1, \bar{\lambda}_1^2, \dots, \bar{\lambda}_{r_2}^2, \dots, \bar{\lambda}_1^m, \dots, \bar{\lambda}_{r_m}^m \quad (\text{всего } r_1 + \dots + r_m = |r|),$$

не превосходящих -1 и являющихся корнями некоторого многочлена. (Можно, например, взять числа $-1, -2, \dots, -|r|$). Каждой из m групп этих чисел можно сопоставить многочлен

$$\bar{\rho}_k(s) = (s - \bar{\lambda}_1^k) \dots (s - \bar{\lambda}_{r_k}^k) = s^{r_k} + \bar{l}_1^k s^{r_k-1} + \dots + \bar{l}_{r_k-1}^k s + \bar{l}_{r_k}^k.$$

Тогда назначим в качестве коэффициентов l_p^k наблюдателя (6) выражения вида:

$$l_p^k = l_p^k(\mu) = \bar{l}_p^k \mu^p, \quad p = \overline{1, r_k}, \quad k = \overline{1, m}.$$

5. В силу леммы 3 и теоремы 1 при достаточно больших μ наблюдатель (6) будет давать оценку неизвестного фазового вектора с ошибкой наблюдения, удовлетворяющей оценке (39)

$$\|e(t)\| \leq \frac{CF_0}{\mu} + C_1(\mu)e^{-\min(\delta, \mu)t},$$

где C не зависят от μ , а δ — степень устойчивости нулевой динамики (матрицы \hat{A}_{11}).

Таким образом, за счет выбора достаточно большого значения μ можно сделать ошибку наблюдения сколько угодно малой.

Список литературы

1. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью.—М.: Физматлит, 2007.
2. Коровин С.К., Ильин А.В., Фомичев В.В. Об одной канонической форме векторных управляемых систем // Доклады РАН. Теория управления.—2007.—Т. 414, № 3.—С. 320–324.
3. Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В., Хлавенка А. Наблюдатели для линейных динамических систем с неопределенностью // Дифференц. уравнения.—2005.—Т. 41, № 11.—С. 1443–1457.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.—М.: Физматлит, 2004.

О ПОСТРОЕНИИ МИНИМАЛЬНЫХ СТАБИЛИЗАТОРОВ ДЛЯ СКАЛЯРНЫХ СИСТЕМ

И. В. Капалин, В. В. Фомичев

Рассматривается задача минимальной стабилизации скалярной системы. Показано, что задача минимальной стабилизации эквивалентна задаче о пересечении пространства устойчивых полиномов с линейным многообразием. При этом доказано, что линейное многообразие может быть описано с помощью линейной системы алгебраических уравнений с ганкелевой структурой. Работа содержит примеры применения алгоритма поиска минимального стабилизатора.

1. Введение

Задача о стабилизации управляемой динамической системы является, пожалуй, основной задачей теории автоматического управления. В простейшей постановке она полностью изучена для линейных систем и для многих классов нелинейных систем. В современной теории управления существует масса вариантов этой задачи: стабилизация по полному фазовому вектору или по измеряемому выходу, для полностью определенной системы, либо при наличии внешних возмущений и при параметрических неопределенностях и т. д. Огромный раздел представляют задачи стабилизации при дополнительных требованиях к системе управления: ограничения на управляющие воздействия, дополнительные требования по оптимизации тех или иных критериев качества системы управления.

Задача синтеза минимального стабилизатора является одной из таких, её постановка проста, но даже для линейного случая до сих пор эта задача не получила исчерпывающего решения.

Существуют различные подходы к решению проблемы, получены различные оценки сверху на размерность стабилизаторов для линейных управляемых систем, однако алгоритма определения минимальной размерности стабилизатора (и уж тем более синтеза такого стабилизатора) до сих пор нет.

2. Постановка задачи

Формальная постановка задачи о минимальном стабилизаторе может быть сформулирована следующим образом. Пусть задана линейная стационарная динамическая система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $y \in \mathbb{R}^l$ — измеряемый выход, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление; A, B и C — постоянные матрицы соответствующих

размерностей. Под стабилизатором системы (1) будем понимать динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{z} = Pz + Qy, \\ u = Mz + Ny, \end{cases} \quad (2)$$

где $z \in \mathbb{R}^k$ — фазовый вектор стабилизатора, y и u — выход и вход системы (1); P, Q, M и N — постоянные матрицы соответствующих размерностей. Требуется, чтобы замкнутая система

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BNC & BM \\ QC & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \quad (3)$$

была асимптотически (экспоненциально) устойчива. При этом на систему (2) накладывается требование минимизации k -порядка системы (2).

Таким образом, задача о построении минимального стабилизатора по сути является задачей о нахождении параметров P, Q, M и N системы (2) при требовании минимизации k . Заметим, однако, что в такой постановке имеется некоторый произвол в решении, связанный с тем, что эквивалентные (с точностью до невырожденной замены переменных) системы (2) считаются разными решениями.

Для минимизации числа искомых параметров перейдем от описания системы и стабилизатора в виде (1) и (2) к их передаточным функциям:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{[\beta_{ij}(s)]}{\alpha(s)} \quad (4)$$

— передаточная функция системы (1),

$$H(s) = M(sI - P)^{-1}Q + N = \frac{[\phi_{ij}(s)]}{\psi(s)} \quad (5)$$

— передаточная функция стабилизатора (2). Здесь

$$\alpha(s) = \det(sI - A)$$

— характеристический полином матрицы A системы (1),

$$\psi(s) = \det(sI - P)$$

— характеристический полином матрицы P стабилизатора.

$[\beta_{ij}(s)]$ и $[\phi_{ij}(s)]$ — матрицы из полиномов от s порядков $(m \times l)$ и $(l \times m)$ соответственно, при этом

$$\deg \beta_{ij}(s) < \deg \alpha(s) = n,$$

$$\deg \phi_{ij}(s) \leq \deg \psi(s) = k.$$

Остановимся на скалярном случае, когда $l = m = 1$. В этом случае числители передаточных функций (4) и (5) представляют собой полиномы от s . При замыкании системы (4) обратной связью (5), т. е. получим передаточную функцию замкнутой системы

$$W_{\text{зам}} = \frac{\beta(s)\psi(s)}{\alpha(s)\psi(s) + \beta(s)\phi(s)}. \quad (6)$$

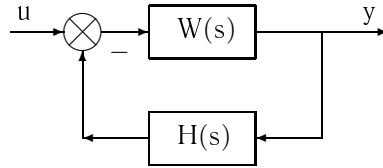


Рис. 1. Отрицательная обратная связь с регулятором

Откуда следует, что замкнутая система (3) (с передаточной функцией (6)) асимптотически устойчива, если устойчив полином

$$\gamma(s) = \alpha(s)\psi(s) + \beta(s)\phi(s). \quad (7)$$

Таким образом, задача о синтезе стабилизатора порядка k сводится к поиску полиномов $\phi(s)$ и $\psi(s)$ таких, что

$$\begin{aligned} \deg \psi(s) &= k \\ \deg \phi(s) &\leq k \\ \gamma(s) &= \alpha(s)\psi(s) + \beta(s)\phi(s) \text{ — гурвицев.} \end{aligned} \quad (8)$$

В работе [1] был предложен подход к решению этой задачи, связанный со сведением задачи о поиске полиномов $\phi(s)$ и $\psi(s)$ (и, как следствие, полинома $\gamma(s)$) к задаче о решении системы линейных алгебраических уравнений. В [1] было показано, что необходимым и достаточным условием существования стабилизатора k -го порядка для линейной стационарной скалярной системы является наличие среди решений некоторой системы алгебраических уравнений гурвицева решения (гурвицевым будем называть столбец коэффициентов гурвицева полинома).

Задача о пересечении множества гурвицевых столбцов с заданным линейным многообразием в общем случае сложна для анализа и до сих пор не решена.

Однако в ряде случаев, когда линейное многообразие имеет специальную структуру (либо система линейных уравнений, которые определяют это многообразие, имеет специальную структуру), анализ рассматриваемой задачи упрощается. Целью данной работы как раз и является указание такой специальной (а именно ганкелевой) структуры, к которой может быть приведена система уравнений, возникающая при анализе задачи о синтезе минимального стабилизатора.

3. Основные обозначения

Рассмотрим подробнее задачу о поиске стабилизатора заданного порядка k в постановке (8). Пусть заданы полиномы

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= s^n + \alpha_n s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s + \alpha_1, \\ \beta(s) &= \beta_{m+1} s^m + \beta_m s^{m-1} + \dots + \beta_2 s + \beta_1, \end{aligned} \quad (9)$$

где $m < n$. Если исходная система (1) находится в общем положении (т.е. она управляема и наблюдаема), то полиномы $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ взаимно простые, что и будем предполагать впредь. Полиномам $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ поставим в соответствие

столбцы их коэффициентов:

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}, \quad \bar{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \\ \beta_{m+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times 1}.$$

Аналогично, обозначим $\bar{\gamma}_{n+k}$ столбец коэффициентов полинома $\gamma(s)$ порядка $(n+k)$:

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= s^{n+k} + \gamma_{n+k}s^{n+k-1} + \dots + \gamma_1, \\ \bar{\gamma}_{n+k} &= (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+k}, 1)^\top. \end{aligned} \quad (10)$$

Наряду с полным столбцом $\bar{\gamma}_{n+k}$ будем рассматривать укороченный столбец

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+k})^\top. \quad (11)$$

При записи полинома в явном виде было учтено, что

$$\begin{aligned} \deg \alpha(s) &= n, \\ \deg \psi(s) &= k, \\ \deg \beta(s) &< n, \\ \deg \phi(s) &\leq k. \end{aligned}$$

Поэтому степень

$$\gamma(s) = \alpha(s)\psi(s) + \beta(s)\phi(s)$$

в точности равна сумме степеней полиномов $\alpha(s)$ и $\psi(s)$. Более того, не ограничивая общности рассуждений, считаем, что старшие коэффициенты полиномов $\alpha(s)$ и $\psi(s)$ (а следовательно и $\gamma(s)$) равны 1.

Для полиномов $\psi(s)$ и $\phi(s)$ используем обозначения

$$\begin{aligned} \psi(s) &= s^k + \psi_k s^{k-1} + \dots + \psi_1, & \bar{\psi} &= (\psi_1, \dots, \psi_k, 1)^\top, \\ \phi(s) &= \phi_{k+1} s^k + \phi_k s^{k-1} + \dots + \phi_1, & \bar{\phi} &= (\phi_1, \dots, \phi_k, \phi_{k+1})^\top, \end{aligned} \quad (12)$$

при этом старшие коэффициенты полинома $\phi(s)$ могут равняться нулю.

Так как полиномы $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ по сделанному предположению взаимно просты, то матрица Сильвестра

$$S = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}}^m & \overbrace{\begin{matrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \beta_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_m & \beta_{m-1} & \dots & \beta_1 \\ \beta_{m+1} & \beta_m & \dots & \beta_2 \\ 0 & \beta_{m+1} & \dots & \beta_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{m+1} \end{matrix}}^n \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$$

невырождена.

Но тогда невырождена и матрица

$$S_{n-1} = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 \end{matrix}}^n & \overbrace{\begin{matrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \beta_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m+1} & \beta_m & \dots & \beta_1 \end{matrix}}^n \\ \hline \begin{matrix} 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \beta_{m+1} & \beta_m & \dots & \beta_1 \\ 0 & \beta_{m+1} & \dots & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{m+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}.$$

Действительно, матрица S_{n-1} получена из S путем добавления $(n - m)$ столбцов “первой группы”, соответствующих полиному $\alpha(s)$.

Наряду с матрицей S_{n-1} будем рассматривать матрицы

$$S_k = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 \end{matrix}}^{k+1} & \overbrace{\begin{matrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \beta_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & \beta_{n-1} & \dots & \beta_1 \end{matrix}}^{k+1} \\ \hline \begin{matrix} 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \beta_n & \dots & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(n+k+1) \times 2(k+1)},$$

где $k = \deg \psi(s)$. Для удобства обозначений при $m < n - 1$ полагаем

$$\beta_{m+2} = \beta_{m+3} = \dots = \beta_n = 0.$$

Если существует стабилизатор порядка k , т. е.

$$\gamma(s) = \alpha(s)\psi(s) + \phi(s)\beta(s),$$

то коэффициенты полиномов $\alpha(s), \beta(s), \psi(s), \phi(s)$ и $\gamma(s)$ связаны соотношением:

$$S_k \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_k \\ 1 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{k+1} \end{pmatrix} = \bar{\gamma}_{n+k}. \quad (13)$$

Таким образом, для того, чтобы существовал стабилизатор порядка k , требуется, чтобы система линейных уравнений (13) (относительно ψ_i и ϕ_i) была разрешима при каком-либо гурвицевом столбце $\bar{\gamma}_{n+k}$.

Так как столбцы матрицы S_{n-1} линейно независимы, то при любом $k \leq n-1$ столбцы матрицы S_k так же линейно независимы, поэтому

$$\text{rank } S_k = 2k + 2 \leq n + k + 1,$$

т. е. $k \leq n-1$.

Заметим, что из невырожденности квадратной матрицы S_{n-1} следует, что система (13) разрешима при любом гурвицевом столбце $\bar{\gamma}_{2n-1}$ (при $k = n-1$), т. е. для линейной системы со скалярными входом и выходом всегда существует стабилизатор порядка $k = n-1$ (причем в этом случае спектр замкнутой системы назначается по произволу). Интерес представляет возможность понижения порядка стабилизатора, т. е. $k < n-1$.

Исследуем на разрешимость систему (13) при фиксированном столбце $\bar{\gamma}_{n+k}$. Система имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\bar{\gamma}_{n+k} \in \text{Im } S_k.$$

Это условие эквивалентно условию

$$\bar{\gamma}_{n+k} \perp (\text{Im } S_k)^\perp,$$

где $(\text{Im } S_k)^\perp$ означает ортогональное дополнение к образу матрицы S_k . Так как

$$\text{rank } S_k = 2k + 2$$

и $S_k \in \mathbb{R}^{(n+k+1) \times (2k+2)}$, то

$$\dim [(\text{Im } S_k)^\perp] = n - k - 1,$$

т. е.

$$(\text{Im } S_k)^\perp = \mathcal{L}(F_1, F_2, \dots, F_{n-k-1}),$$

где векторы F_i (базис подпространства $(\text{Im } S_k)^\perp$) образуют фундаментальную систему решений системы линейных уравнений

$$FS_k = 0. \quad (14)$$

Таким образом, для полинома $\gamma(s)$ порядка $(n+k)$ найдутся полиномы $\phi(s)$ и $\psi(s)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{n-k-1} \end{pmatrix} \bar{\gamma}_{n+k} = 0.$$

Базисные векторы F_i для системы (14) можно находить разными способами. Покажем, что при $k \leq n-3$ эти векторы можно выбирать специальным образом, причем не решая уравнение (14).

Рассмотрим случай $k = n-2$. В этом случае

$$\dim [(\text{Im } S_k)^\perp] = 1,$$

т. е. надо найти ровно один вектор $F \in \mathbb{R}^{1 \times (2n-1)}$, удовлетворяющий уравнению

$$FS_{n-2} = 0. \quad (15)$$

Выберем какое-либо решение этого уравнения

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_{2n-1}) \neq 0. \quad (16)$$

Покажем, что при всех $k \leq n-3$ набор базисных векторов F_i^k можно брать в виде:

$$F_i = (f_i, f_{i+1}, \dots, f_{i+n+k}) \in \mathbb{R}^{1 \times (n+k+1)}, \quad i = \overline{1, n-k-1},$$

т. е. для каждого $k \leq n-3$ набор получается путем “вырезания” из вектора $F \in \mathbb{R}^{1 \times (2n-1)}$ из (16) всевозможных подвекторов длины $(n+k+1)$.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим подробнее структуру матриц S_{n-2} и S_k при $k \leq n-3$:

$$S_{n-2} = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\alpha_1 & 0 & \dots & 0}^{n-1} & \overbrace{\beta_1 & 0 & \dots & 0}^{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 & \beta_2 & \beta_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 & \beta_n & \beta_{n-1} & \dots & \beta_1 \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_2 & 0 & \beta_n & \dots & \beta_2 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_3 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \dots & \beta_n \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(2n-1) \times (2n-2)},$$

$$S_k = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\alpha_1 & 0 & \dots & 0}^{k+1} & \overbrace{\beta_1 & 0 & \dots & 0}^{k+1} \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 & \beta_2 & \beta_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 & \beta_n & \beta_{n-1} & \dots & \beta_1 \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_2 & 0 & \beta_n & \dots & \beta_2 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_3 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \dots & \beta_n \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(n+k+1) \times 2(k+1)}.$$

Заметим, что матрица S_k получается из матрицы S_{n-2} путем удаления нескольких последних столбцов в каждом из блоков, соответствующих $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$, а так же последующего удаления соответствующего числа последних (вообще говоря, нулевых) строк.

Рассмотрим вектор F из уравнения (15). Выполнение этого условия означает, что вектор $F \in \mathbb{R}^{1 \times (2n-1)}$ ортогонален всем столбцам матрицы S_{n-2} . Это означает, что для первых $(n-1)$ столбцов матрицы S_{n-2} выполнены равенства:

$$\begin{cases} f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + \dots + f_n\alpha_n + f_{n+1} = 0, \\ f_2\alpha_1 + f_3\alpha_2 + \dots + f_{n+1}\alpha_n + f_{n+2} = 0, \\ \dots \\ f_{n-k-1}\alpha_1 + f_2\alpha_2 + \dots + f_{2n-2}\alpha_n + f_{2n-1} = 0, \end{cases} \quad (17)$$

т. е. F ортогонален всем векторам

$$\begin{aligned}
(\bar{\alpha}, 0, \dots, 0, 0)^\top &\in \mathbb{R}^{(2n-1) \times 1}, \\
(0, \bar{\alpha}, \dots, 0, 0)^\top &\in \mathbb{R}^{(2n-1) \times 1}, \\
&\dots \\
(0, 0, \dots, 0, \bar{\alpha})^\top &\in \mathbb{R}^{(2n-1) \times 1}.
\end{aligned}$$

Но выполнение этих равенств означает, что все “укороченные” части вектора

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_{2n-1}),$$

а именно вектора

$$\begin{aligned}
F_1 &= (f_1, \dots, f_{n+k+1}), \\
F_2 &= (f_2, \dots, f_{n+k+2}), \\
&\dots \\
F_{n-k-1} &= (f_{n-k-1}, \dots, f_{2n-1})
\end{aligned} \tag{18}$$

ортогональны всем “укороченным” векторам

$$\begin{aligned}
(\bar{\alpha}, 0, \dots, 0, 0)^\top &\in \mathbb{R}^{(n+k+1) \times 1}, \\
(0, \bar{\alpha}, \dots, 0, 0)^\top &\in \mathbb{R}^{(n+k+1) \times 1}, \\
&\dots \\
(0, 0, \dots, 0, \bar{\alpha})^\top &\in \mathbb{R}^{(n+k+1) \times 1}.
\end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для второй группы столбцов, соответствующих $\bar{\beta}$.

Таким образом, каждый вектор из набора (18) ортогонален *всем* столбцам матрицы S_k , т. е.

$$F_i S_k = 0, \quad i = \overline{1, n-k-1}.$$

Покажем, что строки F_i ($i = \overline{1, n-k-1}$) линейно независимы. Это и будет означать, что набор строк (18) образует фундаментальную систему решений для (14).

Рассмотрим исходный вектор

$$F = (f_1, \dots, f_{2n-1}),$$

который является решением уравнения (15) и порождает семейство векторов (18). Его компоненты можно выбрать в виде

$$f_i = S_{n-1}^{i, 2n}, \quad i = \overline{1, 2n-1},$$

где $S_{n-1}^{i, 2n}$ — алгебраическое дополнение к элементу матрицы S_{n-1} в i -ой строке и $2n$ -м столбце. Покажем, что при таком выборе вектора $F \neq 0$ и удовлетворяет уравнению (15). Для этого разложим определитель невырожденной матрицы S_{n-1} по столбцу с номером $2n$, получим

$$\det S_{n-1} = \sum_{i=n}^{m+n+1} S_{n-1}^{i, 2n} \beta_{i-n}, \tag{19}$$

где $m \leq (n-1)$ (здесь учли, что первые $(n-1)$ элементов последнего столбца равны нулю). Если $F = 0$, то из (19) следует, что $\det S_{n-1} = 0$, что противоречит невырожденности матрицы S_{n-1} . Следовательно, $F \neq 0$.

Кроме того, имеет место равенство

$$\det \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}^n & \overbrace{\begin{matrix} \beta_1 & \dots & 0 & z_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n-1} & \dots & \beta_1 & z_{n-1} \\ \beta_n & \dots & \beta_2 & z_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \beta_n & z_{2n-2} \\ 0 & \dots & 0 & z_{2n-1} \\ 0 & \dots & 0 & z_{2n} \end{matrix}}^n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2n} S_{n-1}^{i,2n} z_i \quad (20)$$

при любом векторе

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_{2n})^\top.$$

При этом, если в качестве z взять любой столбец матрицы S_{n-2} с добавлением в качестве $z_{2n} = 0$ (заметим, что столбцы S_{n-2} имеют размерность $(2n-1)$), то каждый такой столбец присутствует среди первых $(2n-1)$ столбца S_{n-1} , следовательно определитель, стоящий в левой части (20), будет равен нулю. Но это означает, что скалярное произведение столбца из S_{n-2} и вектора F (правая часть (20)) также равно нулю для любого столбца из S_{n-2} , т. е.

$$FS_{n-2} = 0.$$

Покажем теперь, что построенный набор векторов F_i ($i = \overline{1, n-k-1}$) из (18) является линейно независимым. Линейная независимость векторов эквивалентна тому, что система линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n-k-1} F_i z_i = 0, \quad (21)$$

где z_i — неизвестные, имеет только тривиальное решение. Запишем систему (21) в матричной форме с учетом явного вида строк F_i :

$$\begin{pmatrix} S_{n-1}^{1,2n} & S_{n-1}^{2,2n} & \dots & S_{n-1}^{n-k-1,2n} \\ S_{n-1}^{2,2n} & S_{n-1}^{3,2n} & \dots & S_{n-1}^{n-k,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1}^{n+k+1,2n} & S_{n-1}^{n+k+2,2n} & \dots & S_{n-1}^{2n-1,2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Покажем, что система (22) имеет только тривиальное решение в случае $k = 0$ (случай “самых коротких” строк F_i). Очевидно, что если утверждение верно для $k = 0$, то оно будет верно и для всех $k \leq n-3$.

Утверждение 1. Если матрица Сильвестра S невырождена, тогда система уравнений (22) при $k = 0$, т. е.

$$\begin{pmatrix} S_{n-1}^{1,2n} & S_{n-1}^{2,2n} & \dots & S_{n-1}^{n-1,2n} \\ S_{n-1}^{2,2n} & S_{n-1}^{3,2n} & \dots & S_{n-1}^{n,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1}^{n+1,2n} & S_{n-1}^{n+2,2n} & \dots & S_{n-1}^{2n-1,2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Предположим, что система (23) имеет нетривиальное решение (z_1, \dots, z_{n-1}) . Рассмотрим полином

$$z(s) = z_1 + z_2 s + \dots + z_{n-1} s^{n-2},$$

при этом $\deg z(s) \leq n - 2$.

Так как расширенная матрица Сильвестра S_{n-1} невырождена, то найдутся полиномы $\phi_j(s)$ и $\psi_j(s)$, удовлетворяющие

$$\begin{aligned} \deg \phi_j(s) &\leq n - 1, \\ \deg \psi_j(s) &\leq n - 1, \end{aligned}$$

и такие, что для их коэффициентов $\bar{\phi}_j$ и $\bar{\psi}_j$ будет выполнена система уравнений

$$S_{n-1} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_j \\ \bar{\phi}_j \end{pmatrix} = \underbrace{(0 \ \dots \ 0)}_j \ z_1 \ \dots \ z_{n-1} \ 0 \ \dots \ 0). \quad (24)$$

В общем случае

$$\begin{aligned} \phi_j(s) &= \phi_j^1 + \phi_j^2 s + \dots + \phi_j^n s^{n-1}, \\ \psi_j(s) &= \psi_j^1 + \psi_j^2 s + \dots + \psi_j^n s^{n-1}, \\ \bar{\phi}_j &= (\phi_j^1, \dots, \phi_j^n)^\top, \bar{\psi}_j = (\psi_j^1, \dots, \psi_j^n)^\top. \end{aligned}$$

Однако, выписав по правилу Крамера значения $2n$ -ой компоненты решения уравнения (24), получим

$$\phi_j^n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{z_i S_{n-1}^{j+i, 2n}}{\det S_{n-1}}, \quad j = \overline{0, n}.$$

Из выбора коэффициентов z_i следует, что

$$\phi_j^n = 0, \quad j = \overline{0, n},$$

т. е. при всех j степени полиномов $\phi_j(s)$ не превосходят $(n - 2)$.

Уравнение (24) может быть записано и в полиномиальной форме

$$\alpha(s)\psi_j(s) + \beta(s)\phi_j(s) \equiv z(s)s^j, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \deg \phi_j(s) &\leq n - 2, \\ \deg \psi_j(s) &\leq n - 1, \\ \deg z(s) &\leq n - 2. \end{aligned}$$

Заметим, что если

$$\deg \psi_j(s) = n - 1,$$

то в левой части степень первого слагаемого строго больше степени второго и равна $2n - 1$, а в правой части стоит полином степени не выше

$$n + j - 2 \leq 2n - 2$$

при всех $j = \overline{0, n}$. Следовательно,

$$\deg \psi_j(s) \leq n - 2.$$

Исследуем связь между полиномами ϕ_{j+1} и ϕ_j (т. е. при последовательных значениях j) при $j < n$. Для этих полиномов выполнено

$$\begin{aligned}\alpha(s)\psi_j(s) + \beta(s)\phi_j(s) &\equiv z(s)s^j, \\ \alpha(s)\psi_{j+1}(s) + \beta(s)\phi_{j+1}(s) &\equiv z(s)s^{j+1}.\end{aligned}$$

Умножив первое тождество на s и вычтя его из второго, получим

$$\alpha(s)(\psi_{j+1}(s) - \psi_j(s)s) + \beta(s)(\phi_{j+1}(s) - \phi_j(s)s) \equiv 0. \quad (26)$$

Так как

$$\begin{aligned}\deg(\psi_{j+1}(s) - \psi_j(s)s) &= \deg(\tilde{\psi}_j(s)) \leq n-1, \\ \deg(\phi_{j+1}(s) - \phi_j(s)s) &= \deg(\tilde{\phi}_j(s)) \leq n-1,\end{aligned}$$

то в силу невырожденности матрицы S_{n-1} (а (26) представляет собой тождество $S_{n-1} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_j \\ \tilde{\phi}_j \end{pmatrix} = 0$ относительно коэффициентов $\tilde{\psi}_j(s)$ и $\tilde{\phi}_j(s)$), следует, что

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_j(s) &= \psi_{j+1}(s) - \psi_j(s)s \equiv 0, \\ \tilde{\phi}_j(s) &= \phi_{j+1}(s) - \phi_j(s)s \equiv 0,\end{aligned}$$

при всех $j = \overline{0, n-1}$.

Отсюда следует, что

$$\psi_n(s) = \psi_0(s)s^n, \quad \phi_n(s) = \phi_0(s)s^n.$$

Если $\phi_0(s) \not\equiv 0$ и $\psi_0(s) \not\equiv 0$, то

$$\begin{aligned}\deg \psi_n(s) &= \deg \psi_0(s) + n \geq n, \\ \deg \phi_n(s) &= \deg \phi_0(s) + n \geq n.\end{aligned}$$

Но $\deg \phi_n(s) \leq n-2$, $\deg \psi_n(s) \leq n-2$. Получили противоречие. Следовательно

$$\phi_0(s) = \psi_0(s) \equiv 0,$$

но тогда и $z(s) \equiv 0$. Следовательно, предположение о том, что у системы (21) (она же система (23)) есть нетривиальное решение, было неверным.

Утверждение доказано.

Таким образом, для решения задачи о поиске минимального стабилизатора можно предложить следующий алгоритм.

1. По заданным взаимно простым полиномам передаточной функции исходной системы

$$\begin{aligned}W(s) &= C(sI - A)^{-1}B = \frac{[\beta(s)]}{\alpha(s)}, \\ \alpha(s) &= s^n + \alpha_n s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s + \alpha_1, \\ \beta(s) &= \beta_{n-1} s^n + \beta_{n-2} s^{n-1} + \dots + \beta_2 s + \beta_1,\end{aligned}$$

где старшие коэффициенты β_i могут равняться нулю, составим матрицу типа Сильвестра

$$S_{n-2} = \begin{pmatrix} \overbrace{\alpha_1 & 0 & \dots & 0}^{n-1} & \overbrace{\beta_1 & 0 & \dots & 0}^{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 & \beta_2 & \beta_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 & \beta_n & \beta_{n-1} & \dots & \beta_1 \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_2 & 0 & \beta_n & \dots & \beta_2 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_3 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \dots & \beta_n \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n-1) \times (2n-2)}.$$

2. Найдем единственное (с точностью до нормировки) нетривиальное решение уравнения

$$FS_{n-2} = 0,$$

где

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_{2n-1}).$$

3. Перебором относительно k ($k = 1, 2, \dots, n-2$) выясним, есть ли среди решений линейного уравнения ганкелевого вида

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n+k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-k} & f_{n-k+1} & \dots & f_{2n-2} \\ f_{n-k-1} & f_{n-k} & \dots & f_{2n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n+k} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (27)$$

гурвицев столбец

$$\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n+k}, 1)^\top = \begin{pmatrix} \bar{\gamma} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma} \in \mathbb{R}^{(n+k) \times 1}.$$

Систему (27) можно записать как неоднородную систему относительно укороченного столбца $\bar{\gamma}$:

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n+k} \\ f_2 & f_3 & \dots & f_{n+k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-k-1} & f_{n-k} & \dots & f_{2n-2} \end{pmatrix} \bar{\gamma} = - \begin{pmatrix} f_{n+k+1} \\ f_{n+k+2} \\ \vdots \\ f_{2n-1} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Таким образом, имеет место основное утверждение.

Теорема 1. Пусть система (1) находится в общем положении, вход и выход системы скалярные. Для системы (1) тогда и только тогда существует стабилизатор порядка k ($k = 1, 2, \dots, n-2$), когда среди решений системы (28), порождаемой единственным решением $F = (f_1, \dots, f_{2n-1})$ уравнения $FS_{n-2}(\alpha, \beta) = 0$ с матрицей типа Сильвестра для системы (1), существует гурвицево решение $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n+k})^\top$ (т. е. отвечающее гурвицеву полиному $\gamma(s) = \gamma_1 + \gamma_2 s + \dots + s^{n+k-1} + s^{n+k}$).

Ганкелева структура системы уравнений (28) облегчает анализ свойств решений этой системы, и в частности, анализ гурвицевости решений этой системы. Установим ряд свойств решений системы (28).

Во-первых, заметим, что эта система при всех k , имеется в виду

$$k = \overline{1, n-2},$$

имеет решение (хотя и не обязательно гурвицево). Это следует из того, что при любом k можно произвольным образом выбирать полиномы стабилизатора $\phi(s)$ и $\psi(s)$ степени не выше k , тогда

$$\gamma(s) = \alpha(s)\psi(s) + \beta(s)\phi(s)$$

будет полином степени ровно $(n+k)$, а вектор его коэффициентов $\bar{\gamma}$ — решение системы (28). Кроме того, выбирая различные $\phi(s)$ и $\psi(s)$, мы можем получить различные $\gamma(s)$, т.е. при любом k система имеет бесконечно много решений. Это следует также из того, что число уравнений в этой системе $(n-k-1)$ не превосходит число неизвестных $(n+k)$ при любом $k \leq n-2$.

Более сложным является вопрос о существовании среди решений системы (28) гурвицева столбца $\bar{\gamma}$. Для иллюстрации этой проблемы рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть

$$\alpha(s) = s^4, \quad \bar{\alpha} = (0, 0, 0, 0, 1)^\top,$$

$$\beta(s) = (s-1)^2 = s^2 - 2s + 1, \quad \bar{\beta} = (1, -2, 1, 0)^\top.$$

Т.к. $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ не имеют общих корней, то можно применить описанный выше алгоритм поиска минимального стабилизатора. Для этого найдем вектор $F = (f_1, \dots, f_7)$ (в данном случае $n=4, 2n-1=7$):

$$(f_1, \dots, f_7) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Одно из решений этой системы

$$F = (4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0).$$

Т.к. все $f_i \geq 0$, то при любом $k \leq n-2$ среди решений системы (28) не будет столбцов $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n+k})^\top$ таких, что все $\gamma_i > 0$, т.е. $\bar{\gamma}$ — не гурвицев. А это означает, что для системы с передаточной функцией $W(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$ не существует стабилизатора порядка меньше $(n-1) = 6$.

Пример 2. Рассмотрим систему третьего порядка с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{[\beta(s)]}{\alpha(s)},$$

$$\alpha(s) = s^3 - 3s^2 + 3s + 1,$$

$$\beta(s) = s^2 + 2s + 1,$$

нетрудно убедиться, что полиномы $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ не имеют общих корней, т. е. система находится в общем положении. В соответствии с предложенным алгоритмом найдем вектор $F = (f_1, \dots, f_5)$ (в данном случае $n = 3, 2n - 1 = 5$):

$$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = 0.$$

Одно из решений этой системы

$$F = (2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 4).$$

Рассмотрим систему вида (28) при $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Эта система имеет бесконечно много решений, в частности, её решением является гурвицев столбец $\bar{\gamma} = (5, 11, 1)^T$, отвечающий гурвицеву полиному

$$\gamma(s) = 5 + 11s + s^2 + s^3.$$

По коэффициентам полинома $\gamma(s)$ из уравнения (13) однозначно находятся коэффициенты стабилизатора. В данном случае задачу решает стабилизатор нулевого порядка, т. е. статическая обратная связь:

$$H(s) = \frac{\phi(s)}{\psi(s)} = 5,$$

то есть

$$\phi(s) = 4, \psi(s) = 1.$$

Действительно,

$$\gamma(s) = \alpha(s) + 4\beta(s).$$

Таким образом, система (1) может стабилизироваться с помощью статической обратной связи, т. е. стабилизатором нулевого порядка. Заметим, что в этом случае для системы существуют стабилизаторы всех порядков $k = 1, \dots, n - 1$.

Но возможны случаи, когда минимальный порядок стабилизатора для системы (1) находится строго между 0 и $n - 1$. Эту ситуацию иллюстрирует следующий пример.

Пример 3. Рассмотрим систему третьего порядка с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{[\beta(s)]}{\alpha(s)},$$

$$\alpha(s) = s^3 - 2s^2 - 3s + 1,$$

$$\beta(s) = s.$$

Полиномы $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ взаимно простые, т.е. система находится в общем положении. Найдем вектор $F \in \mathbb{R}^5$:

$$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Одно из решений этой системы

$$F = (-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2).$$

Рассмотрим систему вида (28) при $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Отсюда следует, что $\gamma_3 = -2, \gamma_1 = 1, \gamma_2$ — любое. Таким образом, при любом γ_2 полином

$$\gamma(s) = s^3 - 2s^2 + \gamma_2 s + 1$$

не является гурвицевым, т.е. у системы (29) нет гурвицевых решений. Рассмотрим систему (28) при $k = 1$:

$$(-1 \ 0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} = -2.$$

Эта система имеет бесконечно много решений вида

$$\begin{aligned} \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 & \text{— любые,} \\ \gamma_1 & = \gamma_4 + 2. \end{aligned} \quad (30)$$

Условия устойчивости полинома $\gamma(s) = s^4 + \gamma_4 s^3 + \gamma_3 s^2 + \gamma_2 s + \gamma_1$ при положительных γ_i дают неравенства:

$$\begin{cases} \gamma_4 \gamma_3 > \gamma_2, \\ \gamma_4 \gamma_3 \gamma_2 > \gamma_1 \gamma_4^2 + \gamma_2^2. \end{cases} \quad (31)$$

У системы (30)–(31) бесконечно много решений, в частности,

$$\gamma_1 = 3, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 5, \gamma_4 = 1,$$

т.е. $\gamma(s) = s^4 + s^3 + 5s^2 + s + 3$.

По коэффициентам $\gamma(s)$ из уравнения (13) однозначно находятся коэффициенты стабилизатора:

$$H(s) = \frac{\phi(s)}{\psi(s)}, \quad \phi(s) = 14s + 9, \quad \psi(s) = s + 3.$$

Таким образом, минимальный порядок стабилизатора в данном примере равен 1, он строго больше нуля, но меньше $(n - 1) = 2$.

Список литературы

1. Коровин С. К., Ильин А. В., Медведев И. С., Фомичев В. В. К теории функциональных наблюдателей и стабилизаторов заданного порядка // ДАН. Теория управления.—2006.—Т. 409, № 5.—С. 601–605.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.—М.: Физматлит, 2004.
3. Ланкастер П. Теория матриц.—М.: Наука, 1982.

СИНТЕЗ РОБАСТНОГО МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Г. И. Лозгачев, Л. А. Тютюнникова

Предлагается метод построения модальных робастных регуляторов в одноконтурной системе управления, обеспечивающих желаемое расположение корней характеристического полинома замкнутой системы с номинальным объектом, а также устойчивость замкнутой системы с любым объектом из заданного класса неопределенности.

1. Введение

В настоящее время в научной литературе по теории автоматического регулирования значительное внимание уделяется проблеме построения робастных регуляторов. Робастным называют регулятор, который обеспечивает устойчивость замкнутой системы не только с расчетным (номинальным) объектом, но и любым объектом из заданного класса неопределенности.

Для решения задачи синтеза робастных регуляторов для систем с параметрической неопределенностью в объекте наиболее распространенным является подход, основанный на H^∞ -теории. Однако предлагаемые методы, основанные на указанном подходе, имеют ряд недостатков. Среди них малый запас устойчивости получаемых систем, большой разброс (на несколько порядков) коэффициентов регулятора, возможная негрубость самих регуляторов, сложность выбора весовых функций, кроме того, это достаточно сложные вычислительные процедуры. Это заставляет искать более простые в вычислительном плане и более эффективные методы синтеза робастных регуляторов.

Подход, основанный на понятии сверхустойчивости, введенном Б. Т. Поляком и П. С. Щербakovым [1], допускает простое решение задачи робастной стабилизации в пространстве состояний, сводящееся к решению задачи линейного программирования. Однако указанный подход применим для узкого класса систем.

В [2] разработан метод синтеза регуляторов низкого порядка, обеспечивающих максимальную робастность замкнутой системы регулирования. Однако не для всех объектов можно подобрать регулятор низкого порядка, стабилизирующий систему.

В настоящей работе предлагается метод синтеза робастных регуляторов, основанный на использовании хорошо отработанной теорией и практикой модального подхода.

Работа является развитием метода, излагаемого в [3, 4]. Предлагаемый метод распространяется на системы любого порядка и позволяет проектировать не только свободное, но и вынужденное движение системы.

2. Постановка задачи

Обозначим через \mathfrak{R}_n множество алгебраических многочленов степени n над полем действительных чисел.

Пусть задана передаточная функция номинального (расчетного) объекта

$$W_{об}(p) = \frac{P_1(p)}{P_2(p)}, \quad (1)$$

где $P_1(p) \in \mathfrak{R}_m$ ($m \leq n$), $P_2(p) \in \mathfrak{R}_n$.

Передаточная функция реального объекта управления

$$W_{об}^*(p) = \frac{P_1^*(p)}{P_2^*(p)}, \quad (2)$$

где $P_1^*(p) \in \mathfrak{R}_m$, $P_2^*(p) \in \mathfrak{R}_n$, содержит параметрическую неопределенность интервального типа

$$\underline{q}_i \leq |q_i - q_i^*| \leq \overline{q}_i, \quad (3)$$

q_i — заданные номинальные (расчетные) значения параметров, q_i^* — реальные значения параметров, \underline{q}_i и \overline{q}_i — пределы возможных погрешностей по i -му параметру ($i = \overline{1, s}$; $s \leq n + m$), подлежащие определению.

Задача 1. Требуется получить передаточную функцию $W_p(p)$ реализуемого регулятора, обеспечивающего устойчивость замкнутой системы с передаточной функцией

$$W_{зс}(p) = \frac{W_{об}^*(p)W_p(p)}{1 + W_{об}^*(p)W_p(p)} \quad (4)$$

при максимальном размахе (степени робастности) $\gamma_1 = \min(\overline{q}_i - \underline{q}_i)$, который также подлежит определению.

Задача 2. Требуется получить передаточную функцию $W_p(p)$ реализуемого регулятора, обеспечивающего длительность переходного процесса t_p в замкнутой системе с передаточной функцией

$$W_{зс}(p) = \frac{W_{об}(p)W_p(p)}{1 + W_{об}(p)W_p(p)} \quad (5)$$

не более заданного значения $t_3 > 0$ и устойчивость замкнутой системы с передаточной функцией

$$W_{зс}(p) = \frac{W_{об}^*(p)W_p(p)}{1 + W_{об}^*(p)W_p(p)}$$

при максимальном размахе (степени робастности) $\gamma_2 = \min(\overline{q}_i - \underline{q}_i)$, который также подлежит определению.

3. Метод решения

3.1. Решение задачи 1

Передаточную функцию замкнутой системы зададим в виде отношения полиномов $Q_1(p)$ и $Q_2(p)$

$$W_{зс}(p) = \frac{Q_1(p)}{Q_2(p)}, \quad (6)$$

где $Q_1(p)$ — полином l -й степени ($l \leq k$); $Q_2(p)$ — полином k -й степени ($k \geq 2n$).

Полином $Q_2(p)$ будем считать желаемым полиномом, т.е. таким полиномом, корни которого расположены желаемым образом на комплексной плоскости.

Введем в рассмотрение полиномы $N_1(p)$, $L_1(p)$ и $N_{ост}(p)$, $L_{ост}(p)$. Полином $N_1(p)$ есть частное от деления полинома $[Q_2(p) - Q_1(p)]$ на полином $P_2(p)$. Полином $L_1(p)$ есть частное от деления полинома $Q_1(p)$ на полином $P_1(p)$. Полиномы $N_{ост}(p)$ и $L_{ост}(p)$ — остатки от деления полинома $[Q_2(p) - Q_1(p)]$ на полином $P_2(p)$ и полинома $Q_1(p)$ на полином $P_1(p)$ соответственно. То есть

$$\begin{aligned} \frac{Q_2(p) - Q_1(p)}{P_2(p)} &= N_1(p) + \frac{N_{ост}(p)}{P_2(p)}, \\ \frac{Q_1(p)}{P_1(p)} &= L_1(p) + \frac{L_{ост}(p)}{P_1(p)}. \end{aligned} \quad (7)$$

В работах [3, 4] показано, что если исходная динамическая система является полностью управляемой и наблюдаемой, т.е. передаточная функция объекта управления (1) является несократимой дробью и выполняется условие $k \geq 2n$, то всегда найдутся коэффициенты полинома $Q_1(p)$, при которых полиномы $[Q_2(p) - Q_1(p)]$ и $Q_1(p)$ делятся соответственно на полиномы $P_2(p)$ и $P_1(p)$ без остатка. В этом случае существует передаточная функция регулятора, обеспечивающая желаемое расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы $Q_2(p) = 0$. При этом передаточная функция регулятора имеет вид:

$$W_p(p) = \frac{L_1(p)}{N_1(p)}. \quad (8)$$

Если характеристический полином замкнутой системы $Q_2(p)$ задан в общем виде

$$Q_2(p) = \sum_{i=0}^k a_i p^{k-i},$$

то выражение (8) определяет передаточную функцию регулятора через коэффициенты a_i ($i = \overline{0, k}$) полинома $Q_2(p)$. Коэффициенты полинома $Q_1(p)$ выражаются через коэффициенты a_i ($i = \overline{0, k}$) из системы уравнений, определяемой равенствами $N_{ост}(p) = 0$ и $L_{ост}(p) = 0$.

Определим теперь коэффициенты желаемого характеристического полинома замкнутой системы из требований максимальной робастности системы. Представим объект управления (2) в виде:

$$W_{об}^*(p) = \frac{P_1(p) + \Delta P_1(p)}{P_2(p) + \Delta P_2(p)}, \quad (9)$$

где $\Delta P_1(p)$ и $\Delta P_2(p)$ — полиномы, содержащие неопределенность.

Тогда характеристический полином замкнутой системы с объектом (9) и регулятором (8) можно записать в виде

$$D^*(p) = Q_2(p) + \Delta P_1(p)L_1(p) + \Delta P_2(p)N_1(p).$$

Выписав условия критерия устойчивости Раусса–Гурвица для характеристических полиномов $D(p) = Q_2(p)$ и $D^*(p)$ и используя численные методы оптимизации, определим a_i ($i = \overline{0, n}$), при которых степень робастности γ_1 будет максимальной. В качестве начального приближения можно взять коэффициенты какого-либо из известных распределений.

Если объект управления является устойчивым, то процедура синтеза упрощается. В этом случае определим полиномы $Q_1(p)$ и $Q_2(p)$ из условия делимости без остатка полиномов $[Q_2(p) - Q_1(p)]$ на $P_2(p)$ и $Q_1(p)$ на $P_1(p)$:

$$\begin{aligned} Q_2(p) &= P_2(p)\tilde{Q}_2(p), \\ Q_1(p) &= P_1(p)P_2(p)\tilde{Q}_1(p), \end{aligned}$$

где $\tilde{Q}_1(p)$, $\tilde{Q}_2(p)$ — полиномы с неопределенными коэффициентами степени $(l - n - m)$ и $(k - n)$ соответственно.

В этом случае передаточная функция регулятора имеет вид

$$W_p(p) = \frac{P_2(p)\tilde{Q}_1(p)}{\tilde{Q}_2(p) - P_1(p)\tilde{Q}_1(p)}. \quad (10)$$

3.2. Решение задачи 2

Зададим желаемую степень устойчивости замкнутой системы (5) следующим образом: $\alpha \leq (3/t_3)$, где $t_3 > 0$ — заданное значение.

Чтобы гарантировать желаемое время переходного процесса в номинальной системе $t_p \leq t_3$, заменим ограничения на коэффициенты a_i ($i = \overline{0, k}$), полученные из критерия устойчивости Раусса–Гурвица, на ограничения, полученные из критерия Раусса–Гурвица для смещенного характеристического полинома:

$$\overline{Q}_2(p) = \sum_{i=0}^k a_i(p - \alpha)^{k-i} = \sum_{i=0}^k b_i p^{k-i}. \quad (11)$$

Дальнейшая методика решения задачи 2 сводится к методике решения задачи 1 относительно неизвестных коэффициентов a_i ($i = \overline{0, k}$).

Продемонстрируем на примере возможности предлагаемого метода.

4. Пример 1

Рассмотрим пример двухмассовой системы (две тележки, соединенные пружиной).

Этот пример использовался в качестве тестовой задачи для многих методов синтеза робастных систем, основанных на H^∞ -подходе [5, 6, 7, 8].

Уравнения объекта имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= -qx_1 + qx_2 + u, \\ \dot{x}_4 &= qx_1 - qx_2, \end{aligned} \quad (12)$$

где q — физический параметр (жесткость пружины) с номинальным значением $q_n = 0,8$, u — управляющее воздействие, а измеряемая переменная y связана с переменными состояниями соотношением $y = x_2$.

Передаточная функция объекта управления имеет вид

$$W_{об}(p) = \frac{q}{p^2(p^2 + 2q)}. \quad (13)$$

В работе [5] методом, основанным на максимизации радиуса запасов устойчивости и сводящимся к процедуре H^∞ -оптимизации, построен регулятор, который гарантирует широкие допуски на параметр $q \in (0, 4; 2593, 8)$. При этом время управления в системе не учитывается. Предлагаемым в статье методом без учета времени регулирования в системе (задача 1) построен регулятор, обеспечивающий робастность $q \in (0, 1; \infty)$. Передаточная функция синтезированного регулятора имеет вид

$$W_p(p) = \frac{0,044p^2 + 0,1p + 0,01}{0,8p^3 + 0,72p^2 + 1,12p + 0,128}.$$

Как видим, полученный регулятор обеспечивает более широкий интервал возможных изменений параметра q .

Построим теперь регулятор, который обеспечивает максимальную робастность по q и время переходного процесса в замкнутой системе с номинальным объектом не более 25 с. В работе [5] построен робастный H^∞ -оптимальный регулятор, обеспечивающий длительность переходного процесса не более 25 с и робастность $q \in (0, 2; 8)$. Для сравнения, в работах [6, 7, 8] синтезированы регуляторы, обеспечивающие устойчивость системы при изменениях параметра в более узком интервале: $q \in (0, 44; 2)$, при этом длительность переходного процесса составляет от 15 до 20 с. Так как в [5] получен лучший результат, то сравнительный анализ проведем с результатами указанной работы.

Согласно принятым обозначениям при $q_n = 0,8$ получаем, что $P_1(p) = 0,8$; $P_2(p) = p^4 + 1,6p^2$; $n = 4$; $m = 1$. Зададим передаточную функцию замкнутой системы

$$W_{зс}(p) = \frac{Q_1(p)}{Q_2(p)} = \frac{d_0p^7 + d_1p^6 + d_2p^5 + d_3p^4 + d_4p^3 + d_5p^2 + d_6p + d_7}{a_0p^7 + a_1p^6 + a_2p^5 + a_3p^4 + a_4p^3 + a_5p^2 + a_6p + a_7}.$$

Тогда передаточная функция модального регулятора выражается через коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы

$$D_0(p) = a_0p^7 + a_1p^6 + a_2p^5 + a_3p^4 + a_4p^3 + a_5p^2 + a_6p + a_7$$

следующим образом:

$$W_p(p) = \frac{(4q^2q_n a_0 + a_4 - 2q_n a_2)p^3 + (4q_n^2 a_1 + a_5 - 2q_n a_3)p^2 + a_6p + a_7}{q_n(a_0p^3 + a_1p^2 + (a_2 - 2q_n a_0)p + a_3 - 2q_n a_1)}.$$

Дадим параметру q приращение Δq . Тогда характеристический полином замкнутой системы с возмущенным объектом

$$W_{об}(p) = \frac{q_n + \Delta q}{p^2(p^2 + 2(q_n + \Delta q))}$$

равен

$$D^*(p) = a_0 p^7 + a_1 p^6 + (a_2 + 2\Delta q a_0) p^5 + (a_3 + 2\Delta q a_1) p^4 + \\ + (1 + \Delta q / q_n) a_4 p^3 + (1 + \Delta q / q_n) a_5 p^2 + (1 + \Delta q / q_n) a_6 p + (1 + \Delta q / q_n) a_7.$$

Выписав главные определители матрицы Гурвица для характеристических полиномов $D_0(p)$ и $D^*(p)$, используем их как ограничения при условной оптимизации.

Если в качестве начального приближения выбрать биномиальное распределение $(p+0, 1)^7$, то методом покоординатного спуска получим оптимальное решение:

$$a_0 = 1; a_1 = 1, 74; a_2 = 3, 95; a_3 = 3, 69; a_4 = 3, 49; a_5 = 1, 31; a_6 = 0, 28; a_7 = 0, 03.$$

Модальный регулятор

$$W_p(p) = \frac{-0, 27p^3 - 0, 1396p^2 + 0, 28p + 0, 03}{0, 8p^3 + 1, 392p^2 + 1, 88p + 0, 7248} \quad (14)$$

обеспечивает замкнутой системе робастность по параметру $q \in (0, 24; \infty)$, при этом длительность переходного процесса в номинальной системе не превышает 25 с.

Сравним полученный результат с результатом синтеза в работе [5]. Передаточная функция регулятора из работы [5], включенного в контур положительной обратной связи, имеет вид

$$W_p(p) = \frac{-1, 25p^3 + 8, 01p^2 - 0, 11p - 0, 0057}{0, 001p^4 + 0, 017p^3 + 0, 195p^2 + 1, 17p + 4, 47}. \quad (15)$$

Как видим, синтезированный в настоящей работе регулятор при той же длительности переходного процесса в номинальной системе обеспечивает значительно более широкий допуск на параметр q . При этом порядок регулятора (14) на единицу ниже порядка регулятора (15), и разброс значений коэффициентов регулятора меньше, что важно при физической реализации. Кроме того, регулятор (14) обеспечивает астатизм 2 порядка в замкнутой системе при номинальном значении параметра.

5. Пример 2

Интервальный объект задан передаточной функцией

$$W_{об}(p) = \frac{p + 1 + 6q_1}{p^3 + (8 + 6q_2)p^2 + (22 + 6q_3)p + 20 + 6q_4}, \quad (16) \\ |q_i| \leq 1, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Требуется найти регулятор, который является робастно стабилизирующим, т. е. стабилизирующим все объекты интервального семейства.

В работе [9] в результате применения весьма сложной техники, основанной на теореме Неванлинны–Пика, получен регулятор

$$W_p(p) = \frac{0, 207(p^3 + 8p^2 + 22p + 20)}{p^3 + 8p^2 + 21, 793p + 19, 793}. \quad (17)$$

Синтезируем регулятор для объекта (16). Так как номинальный объект является устойчивым (полюсы: $-2, -3 \pm i$) и минимально-фазовым (нуль объекта: -1), то зададим

$$\begin{aligned} Q_1(p) &= d_0(p+1)(p^3 + 8p^2 + 22p + 20), \\ Q_2(p) &= (p^3 + 8p^2 + 22p + 20)(a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3). \end{aligned}$$

Тогда передаточная функция регулятора определяется выражением

$$W_p(p) = \frac{d_0(p^3 + 8p^2 + 22p + 20)}{a_0p^3 + a_1p^2 + (a_2 - d_0)p + (a_3 - d_0)}.$$

Если в качестве желаемого характеристического полинома номинальной системы выбрать $Q_2(p) = (p^3 + 8p^2 + 22p + 20)^2$, то получим, что регулятор

$$W_p(p) = \frac{d_0(p^3 + 8p^2 + 22p + 20)}{p^3 + 8p^2 + (22 - d_0)p + (20 - d_0)}$$

решает задачу стабилизации при $0 \leq d_0 \leq 2,7$. При этом, если $d_0 = 0,207$, то получим регулятор (17). Таким образом, процедура синтеза укладывается в несколько элементарных операций в отличие от метода, предложенного в [9].

В работе [2] для того же объекта решается задача о максимальной робастности, т.е. параметры в (16) считаются ограниченными по модулю величиной γ , которую нужно максимизировать. Авторы предлагают стабилизировать систему регулятором низкого порядка, коэффициенты которого определяются путем сканирования области устойчивости по коэффициентам регулятора. В результате построен регулятор, обеспечивающий степень робастности $\gamma = 1,226$,

$$W_p(p) = \frac{p + 1,98}{0,018p + 1}.$$

Предлагаемым в настоящей работе методом построен регулятор

$$W_p(p) = \frac{3(p^3 + 8p^2 + 22p + 20)}{p^3 + 7,5p^2 + 20p + 51},$$

обеспечивающий степень робастности $\gamma = 1,621$.

Нетрудно убедиться, что регулятор, синтезированный в [9], обеспечивает степень робастности $\gamma = 1,205$. Таким образом, если сравнивать результаты синтеза в работах [2] и [9], то видно, что регулятор в [2] обеспечивает увеличение степени робастности менее, чем на 2%, имея однако более простую структуру. Разница же между увеличением робастности в настоящей работе и в [9] составляет более 30%.

6. Заключение

Как следует из вышеизложенного, предлагаемый метод синтеза выгодно отличается от других методов чрезвычайной простотой. В результате синтеза получается параметризованное семейство модальных регуляторов. Свободными параметрами можно распорядиться для наделения системы требуемыми свойствами, например, наибольшей робастностью по каким-либо параметрам объекта.

Список литературы

1. Поляк Г. А., Щербakov П. С. Сверхустойчивые линейные системы управления // Автоматика и телемеханика.—2002.—№ 11.—С. 56–75.
2. Киселев О. Н., Поляк Г. А. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H^∞ и по критерию максимальной робастности // Автоматика и телемеханика.—1999.—№ 3.—С. 119–132.
3. Лозгачев Г. И. Синтез модальных регуляторов по передаточной функции замкнутой системы // Автоматика и телемеханика.—1995.—№ 5.—С. 49–55.
4. Лозгачев Г. И. Построение модальных регуляторов для одноконтурных и многосвязных систем // Автоматика и телемеханика.—2000.—№ 12.—С. 15–21.
5. Честнов В. Н. Синтез робастных регуляторов многомерных систем при параметрической неопределенности на основе круговых частотных неравенств // Автоматика и телемеханика.—1999.—№ 3.—С. 229–238.
6. Chianq R. Y., Safonov M. G. Robust control toolbox. User's guide.—Sherborn, MA: Mathworks, 1988.
7. Collins E. G., King A., Bernstein D. S. Robust control design for a benchmark problem using the maximum entropy approach // Proc. Amer. Cont. Conf., Boston, MA (1991).—Boston, MA, 1991.—P. 1935–1936.
8. Wie B., Bernstein D. S. A Benchmark problem for robust control design // Proc. Amer. Cont. Conf., San Diego, CA (1990).—San Diego, CA, 1990.—P. 961–962.
9. Bhattacharyya S. P., Chapellat H., Keel L. Robust control: the parametric approach.—Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995.

ОБ ЭВОЛЮЦИИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ И УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ю. М. Семенов

В статье мы ограничимся обзором основных фактов из теории управляемости и достижимости (УД) *только* для класса \mathcal{C} линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами. Хотя считается, что в этой теории уже нет никаких задач, достойных внимания, тем не менее можно надеяться на то, что наша статья развеет это досадное заблуждение и даст некоторую перспективу для дальнейших исследований.

1. Основные задачи теории УД

Линейная управляемая система с постоянными коэффициентами обычно задается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

в которой A и B — постоянные матрицы. Не умаляя общности теории, можно предполагать, что множество U (ограничений управлений системы (1)) — непусто, выпукло и замкнуто. Отображение $u : [t_0, t] \rightarrow U$ называется допустимым управлением системы (1), если для него имеет смысл формула Коши

$$x_u(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As} Bu(s) ds, \quad (2)$$

которая определяет траекторию $x_u(t)$ системы (1), с начальным условием $x_u(t_0) = x_0$. В таком случае говорят, что управление $u : [t_0, t] \rightarrow \Omega$ переводит точку x_0 в точку $x_1 = x_u(t)$ за время $t - t_0$, начиная с момента времени t_0 . Выбранный класс допустимых управлений системы (1), определенных на промежутке $[t_0, t]$, обозначается $\mathcal{J}I(t_0, t)$. Множество всех точек пространства \mathbb{R}^n , в которые можно перевести точку x_0 за время $t - t_0$, начиная с момента времени t_0 , обозначается $K(x_0, t_0, t)$. Множества достижимости системы (1) выпуклы и задаются формулой Коши (многозначным интегралом, взятым по всевозможным управлениям $u : [t_0, t] \rightarrow U$)

$$K(x_0, t_0, t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As} BU ds, \quad (3)$$

и не всегда замкнуты [21], даже при условии максимальности класса допустимых управлений. Среди этих множеств выделяется множество

$$K(t) = e^{At} \int_0^t e^{-As} BU ds \quad (4)$$

всех точек пространства \mathbb{R}^n , в которые можно перевести точку 0 за время $t > 0$ по траекториям системы (1). Множество $K(t)$ называется множеством $(0, t)$ -достижимости системы (1). Множество всех точек пространства \mathbb{R}^n , которые можно перевести в точку 0 за время $t > 0$, обозначается $S(t)$ и называется множеством $(0, t)$ -управляемости системы (1). Оно имеет вид

$$S(t) = - \int_0^t e^{-As} BU ds. \quad (5)$$

Основной интерес в теории УД представляет описание эволюции множеств достижимости $K(t)$ и управляемости $S(t)$ по мере изменения $t \in (0, +\infty)$. Оказывается, что наиболее существенные моменты в описании эволюции выпуклых множеств $K(t)$ и $S(t)$ тесно связаны с эволюцией конусов бесконечных направлений выпуклых множеств $K(t)$ и $S(t)$. В такой постановке задачи теории УД не чувствительны к выбору класса управлений, достаточно только, чтобы он содержал класс всех кусочно-постоянных функций. Переход от класса всех кусочно-постоянных управлений к любому более широкому классу влечет за собой только добавление каких-то точек на границах множеств достижимости системы, не изменяя при этом их выпуклых ядер, что несущественно в рамках нашего подхода. Хорошо известна двойственность задач достижимости и управляемости относительно изменения направления времени. При решении задач УД удобно акцентировать внимание на решении задач теории достижимости. Для линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами классическими являются следующие задачи:

Задача мгновенной нуль-достижимости. *При каких условиях множество*

$$K(t) = \mathbb{R}^n \quad \forall t > 0? \quad (\text{IA})$$

Если условие (IA) выполняется, то система (1) называется мгновенно нуль-достижимой. Если система (1) мгновенно нуль-достижима, то из формул (4) и (5) следует, что для всех $t > 0$ множество $S(t) = \mathbb{R}^n$, то есть система (1) будет также и мгновенно нуль-управляема. Верно и обратное утверждение.

Задача полной нуль-достижимости. *При каких условиях существует конечный момент времени $T \geq 0$, для которого множество*

$$K(t) = \mathbb{R}^n \quad \forall t > T? \quad (\text{CA})$$

Если условие (CA) выполняется, то система (1) называется вполне достижимой. Если система (1) вполне достижима, то нижняя грань моментов времени t , для которых $K(t) = \mathbb{R}^n$, обозначается T_{ca} и называется моментом полной достижимости системы (1). Если система (1) вполне управляема, то из формул (4) и (5) следует, что для всех $t > T_{ca}$ множество $S(t) = \mathbb{R}^n$, то есть система (1) будет также и вполне нуль-управляема. Верно и обратное утверждение. Таким образом, момент полной управляемости T_{cc} совпадает с моментом полной достижимости T_{ca} . Задачу мгновенной нуль-достижимости

можно рассматривать как задачу полной достижимости в специальном случае, когда $T_{ca} = 0$.

Задача глобальной нуль-достижимости. При каких условиях множество

$$K_\infty := \bigcup \{K(t) : t > 0\} = \mathbb{R}^n ? \quad (GA)$$

Множество K_∞ называется множеством глобальной нуль-достижимости системы (1). Если условие (GA) выполняется, то система (1) называется глобально нуль-достижимой; если выполняется аналогичное свойство (GC) для множеств $S(t)$, то система называется глобально нуль-управляемой. На простейших примерах можно убедиться в том, что задачи глобальной нуль-достижимости и глобальной нуль-управляемости неэквивалентны.

Пример 1. Рассмотрим управляемое уравнение $\dot{x} = x + u$ первого порядка. Пусть управления принимают значения в отрезке $[-1, 1]$, тогда

$$K_\infty = \mathbb{R},$$

а $S_\infty = (-1, 1)$. Для уравнения $\dot{x} = -x + u$ с такими же ограничениями на управления наоборот, $S_\infty = \mathbb{R}$, а $K_\infty = (-1, 1)$.

Наряду с задачами IA, CA и GA, и их аналогами для множеств управляемости, — задачами IC (мгновенной нуль-управляемости), CC (полной нуль-управляемости) и GC (глобальной нуль-управляемости), также рассматриваются их локальные аналоги, имеющие большое значение в приложениях.

Задачи LIA (локальной мгновенной нуль-достижимости) и LIC (локальной мгновенной нуль-управляемости). При каких условиях множества $K(t)$ ($S(t)$) содержат окрестность точки $0 \quad \forall t > 0$?

Задачи LCA (локальной полной нуль-достижимости) и LCC (локальной полной нуль-управляемости). При каких условиях существует момент времени $t' < +\infty$ такой, что множества $K(t)$ ($S(t)$) содержат окрестность точки $0 \quad \forall t > t'$?

Если система (1) локально нуль-достижима, то через T_{lca} обозначается нижняя грань моментов времени, для которых множества $K(t)$ содержат окрестность точки 0 . Момент T_{lca} называется моментом полной нуль-достижимости системы (1). Аналогично определяется момент T_{lcc} локальной нуль-управляемости системы (1). Из формул (4) и (5) следует, что $T_{lca} = T_{lcc}$. Из конечномерности фазового пространства системы (1) следует, что локальные аналоги задач глобальной нуль-достижимости и глобальной нуль-управляемости сводятся соответственно к задачам локальной полной нуль-достижимости и локальной полной нуль-управляемости.

Решения локальных задач теории УД сводятся к решению их глобальных аналогов, переходом от системы (1) к системе

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \overline{\text{Con}U} \subseteq \mathbb{R}^m, \quad (6)$$

заменой множества U ограничений управлений системы (1) на замыкание его конической оболочки $\overline{\text{Con}U}$. Этот факт был замечен давно (см. статью Л. А. Куна [15] и статью М. Пэхтера и Д. Джекобсона [26]) и следует из очевидных правил коммутации

$$\overline{\text{Con}K_{(1)}(t)} = \overline{K_{(6)}(t)}, \quad (7)$$

выполняющихся для всех $t > 0$. Аналогичные равенства имеют место и для множеств нуль-управляемости. Из равенств (7) следует, что момент локальной достижимости системы (1) совпадает с моментом полной достижимости системы (6).

Если иметь в виду перечисленные выше задачи теории УД, то они получили достаточно полные решения. В этом смысле действительно можно считать теорию УД в классе линейных управляемых систем *почти* законченной. Однако, к теории УД несомненно относятся неклассические задачи вычисления момента T_{ca} полной достижимости и момента T_{lca} локальной нуль-достижимости, решения которых возможны только при глубоком анализе эволюции множеств достижимости $K(t)$ по мере возрастания t в промежутке $(0, +\infty)$. Сформулируем эти неклассические задачи теории УД.

Задача нахождения момента полной стабилизации. *Если система (1) вполне нуль-достижима, то как вычислить момент ее полной нуль-достижимости T_{ca} ?*

Задача нахождения момента полной локальной стабилизации. *Если система (1) локально вполне нуль-достижима, то как вычислить момент ее полной локальной нуль-достижимости T_{lca} ?*

В явной форме, насколько нам известно, задача нахождения момента полной управляемости для вполне управляемых систем была поставлена в статье [28] Р. Бьянчини в 1986 году. Еще раз подчеркнем, что все классические и неклассические задачи теории УД можно рассматривать с единой точки зрения, если поставить общую задачу описания поведения семейства выпуклых множеств $K(t)$, параметризованного моментами времени $t > 0$ (остова системы (1)), при изменении t в промежутке $(0, +\infty)$. В конечном итоге вычисление моментов T_{lca} и T_{ca} для системы (1) сводится к решению некоторых специальных задач линейной алгебры и геометрии.

2. Обзор развития решения классических задач теории управляемости и достижимости

Теория УД выделилась в теории управления в 50-х годах XX века. Отдельные ее результаты появились значительно раньше. Достаточно для этого напомнить работу К. Каратеодори [23] 1909 года об интегрируемости пфаффовых систем. За эти годы в теории УД линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами накопилось много всевозможных результатов. В 1960 году Р. Калман на первом конгрессе ИФАК в Москве прочитал доклад, в котором подвел итоги первоначального периода в развитии теории управления. В его докладе [24], в частности, был сформулирован критерий полной управляемости линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами и линейными ограничивающими множествами. В статье Р. Калмана [24] система (1) считалась вполне управляемой, если для любой пары точек $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ можно было найти управление, определенное на некотором конечном интервале, переводящее точку x_0 в точку x_1 .

Критерий Калмана 1. *Управляемая система (1) с $U = \mathbb{R}^m$ вполне управляема (в смысле Калмана) тогда и только тогда, когда ранг присоединенной матрицы (матрицы Калмана)*

$$\text{rk} [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n. \quad (8)$$

Отметим, что теорема Калмана оформилась не сразу и имеет предшественников. В статье Р. В. Гамкрелидзе [12], опубликованной в 1958 году, она доказана в важном случае, когда $m = 1$. Подчеркнем, что в теореме Калмана предполагается, что множество U ограничений управлений системы (1) совпадает с \mathbb{R}^m . Результат Р. Калмана можно немного расширить,

предполагая множество ограничений управлений $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *линейным!* Для этого достаточно заметить, что условие (8) равносильно тому, что наименьшее A -инвариантное линейное подпространство пространства \mathbb{R}^n , содержащее столбцы матрицы B , совпадает с \mathbb{R}^n .

Критерий Калмана 2. Система (1) с линейным ограничивающим управлением множеством $U \subseteq \mathbb{R}^m$ вполне управляема тогда и только тогда, когда наименьшее A -инвариантное линейное подпространство $[BU]_A$ пространства \mathbb{R}^n , содержащее BU , совпадает с \mathbb{R}^n .

Результат Калмана уточняет следующая теорема.

Теорема об остовах систем класса \mathcal{E} с линейными ограничивающими множествами. Если ограничивающее управление множество $U \subseteq \mathbb{R}^m$ системы (1) линейно, то для всех $t > 0$

$$K(t) = [BU]_A. \quad (9)$$

Таким образом, из теоремы Калмана следует, что множества $K(t)$ достижимости системы (1) с линейным множеством U ограничений управлений, во-первых, линейны, во-вторых, A -инвариантны и, в-третьих, не меняются по мере изменения параметра t в промежутке $(0, +\infty)$. Стоит подчеркнуть, что теорема Калмана является критерием мгновенной 0-достижимости системы (1), при условии, что множество U линейно!

На практике равенство (8) используется как необходимое условие достижимости и управляемости системы (1), при произвольном множестве U ограничений управлений.

В 1972 году Б. Браммер в статье [33] для линейных управляемых систем с коническими ограничениями на управления привел теорему, вызвавшую большой интерес.

Критерий Браммера. Система (1) с коническим ограничивающим управлением множеством U , имеющим непустую внутренность в \mathbb{R}^m , вполне управляема (в смысле Калмана) тогда и только тогда, когда выполняется условие (6) и не существует действительного собственного вектора h транспонированной матрицы A^t , удовлетворяющего условию

$$\langle h, Bu \rangle \leq 0 \quad \forall u \in U.$$

Иначе говоря, Браммер доказал, что в случае, когда множество U ограничений управлений является полномерным конусом в \mathbb{R}^m , условие (8) на ранг присоединенной матрицы и векторы сопряженного к A оператора необходимы и достаточны для того, чтобы конус $K(t)$ совпал с \mathbb{R}^n при некотором $t > 0$. Таким образом, теорема Браммера решает задачи полной управляемости и полной достижимости для линейных управляемых систем с коническими ограничениями на управления. Однако она не дает никакой дополнительной информации о времени T_{ca} полной достижимости.

В 1975 году была опубликована совместная статья В. И. Коробова, А. П. Маринича и Е. И. Подольского [14], в которой, в частности, был доказан более общий критерий глобальной нуль-достижимости линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами, формулировка которого близка к формулировке теоремы Браммера. Коробов с соавторами в своих доказательствах использовали для оценки поведения решений системы (1) обычную в то время технику теории почти периодических функций. Оказалось, что для систем класса \mathcal{E} с коническими ограничениями на управления свойства полной достижимости и глобальной нуль-достижимости оказываются эквивалентными.

В 1978 году была опубликована статья Ю. М. Семенова [31], в которой был доказан критерий глобальной нуль-достижимости, в некотором смысле окончательный, в доказательстве которого использовался метод моделирования систем (факторизации), новый в то время в теории УД. Стоит отметить, что природа этого метода относится к алгебраической теории категорий и является стандартной в математике. Его суть объясняется просто: по информации о других “более просто устроенных” объектах теории, связанных в том или ином смысле с основным объектом исследования, требуется получить необходимую информацию об основном объекте. Очевидно, что этот подход должен быть эффективным в теории УД управляемых систем вида (1), поскольку оператор A не зависит от времени, а структура таких операторов известна во всех деталях и позволяет использовать последовательные факторизации. Более подробно общие сведения об этом методе можно найти в книге М. Месаровича и Я. Такахары [4]. Следует отметить, что эти идеи в применении к управляемым системам были отражены в работах Ю. Н. Павловского, из которых фундаментальная статья [13] была опубликована в 1974 году. Много результатов в этом направлении получены в работах В. И. Елкина см., например, [8]. Однако, по-видимому, никто до работы [29] Ю. М. Семенова, опубликованной в 1978 году, не использовал регулярно категорный подход для *детального и систематического* исследования задач УД в классе линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами.

Вернемся к записи системы (1). Роль матрицы B сводится к отображению множества U в фазовое пространство системы. Рассмотрим управляемую систему уравнений

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega = \overline{BU} \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (10)$$

Множества достижимости $K_{(1)}(t)$ и $K_{(10)}(t)$ систем (1) и (10) отличаются, быть может, только в строении их границ, выпуклые ядра их одинаковы. Это утверждение справедливо и для их множеств управляемости. В итоге, в частности, ввиду этого свойства, в теории УД линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами, при исследовании эволюции множеств достижимости $K(t)$ (точнее их конусов бесконечных направлений $\text{con } K(t)$), удобнее задавать их векторными уравнениями

$$\dot{x} = \alpha x + u, \quad x \in V, \quad u \in \Omega \subseteq V, \quad (11)$$

предполагая, что V — это вещественное линейное пространство, снабженное обычной топологией, $\alpha : V \rightarrow V$ — линейный оператор на V , Ω — замкнутое выпуклое непустое подмножество пространства V . Систему (11) удобно задавать тройкой $C = (V, \alpha, \Omega)$.

Определение 1. Линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ называется *морфизмом системы* $C = (V, \alpha, \Omega)$ в систему $D = (W, \beta, \Pi)$, если $\varphi\alpha = \beta\varphi$, $\varphi V = W$ и $\varphi\Omega = \Pi$. Если существует морфизм $\varphi : C \rightarrow D$, то система D называется *подчиненной* системе C .

Следует отметить, что ядро $\text{Ker } \varphi$ морфизма $\varphi : C \rightarrow D$ является α -инвариантным линейным подпространством пространства V . Нетрудно описать класс $\mathfrak{C}(C)$ всех систем, подчиненных системе C . Пусть V' — α -инвариантное линейное подпространство пространства V , $\pi : x \rightarrow [x] = x + V'$ — каноническое отображение пространства V на фактор-пространство $V'' = V/V'$. По V' строится фактор-система $C''' = (V'', \alpha'', \Omega'') = C/V'$. Ее фазовое пространство V'' уже определено, оператор α'' действует по правилу $\alpha''[x] = [\alpha x]$, ограничивающее множество $\Omega'' = \overline{\pi\Omega}$. Из определений немедленно следует, что оператор π является морфизмом системы C в систему

C'' . Класс $\mathfrak{C}(C)$ всех систем, подчиненных системе C , образует категорию. Система D , подчиненная системе C при помощи морфизма φ , изоморфна факторсистеме $C/\text{Ker } \varphi$.

Пусть $\varphi : C \rightarrow D$ — морфизм системы C в систему D , $u : [0, t) \rightarrow \Omega$ — некоторое управление системы C ,

$$x_u(\tau) = e^{\alpha\tau} \int_0^\tau e^{-\alpha s} u(s) ds \quad (12)$$

— траектория системы C с началом в точке 0 и концом в точке $x_u(t)$. Применяя оператор φ к равенству (12), получим, что управлению $u \in \mathcal{JI}(C, t)$ соответствует управление $\varphi u \in \mathcal{JI}(D, t)$ и траектория $x_{\varphi u}$ системы D , причем для всех $\tau \in [0, t]$ выполняется равенство

$$\varphi x_u(\tau) = x_{\varphi u}(\tau). \quad (13)$$

Так как множество управлений $\{\varphi u : u \in \mathcal{JI}(C, t)\}$ всюду плотно в $\mathcal{JI}(D, t)$, то отсюда следует теорема.

Теорема 1 (свойство функториальности оператора достижимости). *Если*

$$\varphi : C \rightarrow D$$

— морфизм системы C в систему D , то

$$\overline{\varphi K(C, t)} = \overline{K(D, t)} \quad \forall t > 0. \quad (14)$$

Следующая теорема в пояснениях не нуждается.

Теорема 2 (формула сложения для множеств достижимости). *Если моменты времени $t_1, t_2 > 0$, то имеет место формула сложения*

$$K(C, t_1 + t_2) = K(C, t_1) + e^{\alpha t_1} K(C, t_2). \quad (15)$$

В теоремах 1 и 2 устанавливаются наиболее важные свойства множеств достижимости линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами, выделяющие класс \mathfrak{C} линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами среди остальных. Свойство функториальности означает, что класс \mathfrak{C} можно рассматривать как категорию, а соответствие $C \rightarrow K(C, t)$ как однопараметрическое семейство ковариантных функторов на категории \mathfrak{C} со значениями в категории выпуклых множеств. Во втором свойстве констатируется, что однопараметрическое семейство ковариантных функторов $C \rightarrow K(C, t)$ связано между собой формулой сложения (15). Нельзя сказать, что эти свойства были неизвестны до работ Ю. М. Семенова, но пожалуй никто не обратил внимание на то, что их можно рассматривать не только как теоретический факт, но и эффективно использовать для решения задач УД в классе \mathfrak{C} линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами.

В классе \mathfrak{C} всех линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами выделяются системы, все собственные значения операторов которых вещественны и отрицательны, а также системы, все собственные значения которых вещественны и положительны. Первый класс систем обозначается \mathfrak{C}^- , второй \mathfrak{C}^+ . Класс систем, дополнительный в \mathfrak{C} классу \mathfrak{C}^- , обозначается \mathfrak{C}^\oplus , а класс систем, дополнительный в \mathfrak{C} классу \mathfrak{C}^+ , обозначается соответственно \mathfrak{C}^\ominus . Если $C \in \mathfrak{C}$, то через C^\oplus обозначается какая-нибудь наибольшая по порядку система из класса $\mathfrak{C}(C)$ всех систем, подчиненных системе C ,

среди собственных значений которой нет отрицательных вещественных чисел. Через C^- обозначается какая-нибудь наибольшая по порядку система из класса $\mathfrak{C}(C)$, все собственные значения которой являются отрицательными вещественными числами. В поле \mathbb{C} комплексных чисел спектр оператора системы C^- располагается в множестве \mathbb{R}^- отрицательных вещественных чисел, а спектр оператора системы C^\oplus находится в дополнительном множестве $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Системы C^\oplus и C^- определяются системой C однозначно, с точностью до изоморфизма. Если в пространстве V выделен жорданов базис для линейного оператора α , то системы C^\oplus , C^- и соответствующие морфизмы подчинения $\varphi^- : C \rightarrow C^-$ и $\varphi^\oplus : C \rightarrow C^\oplus$ легко описываются. Допустим, что $\mathcal{J}B = (v_1, \dots, v_n)$ — базис, в котором матрица A линейного оператора α имеет жорданов вид. Тогда, за счет подбора порядка векторов базиса $\mathcal{J}B$, можно считать, что матрица $A = [[A^\oplus], [A^-]]$ с жордановыми матрицами $[A^\oplus]$ и $[A^-]$ операторов α^\oplus и α^- , расположенных вдоль ее диагонали. Если матрице $[A^\oplus]$ соответствуют базисные векторы $\mathcal{J}B^\oplus = (v_1, \dots, v_k)$, а матрице $[A^-]$ соответствуют базисные векторы $\mathcal{J}B^- = (v_{k+1}, \dots, v_n)$, то фазовое пространство V^\oplus системы C^\oplus можно отождествить с линейной оболочкой векторов (v_1, \dots, v_k) , а фазовое пространство V^- системы C^- с линейной оболочкой векторов (v_{k+1}, \dots, v_n) . Морфизм $C \rightarrow C^\oplus$ тогда отождествляется с проекцией на V^\oplus фазового пространства V системы C вдоль линейного пространства V^- . Аналогично определяется морфизм $C \rightarrow C^-$.

Система $C \in \mathfrak{C}$ с ненулевым фазовым пространством называется простой, если в фазовом пространстве системы C нет нетривиальных α -инвариантных линейных подпространств. Такие системы делятся на два типа. К простым системам типа \mathbb{R} класса \mathfrak{C} относятся все системы 1-го порядка. К простым системам типа \mathbb{C} класса \mathfrak{C} относятся все системы 2-го порядка с оператором α , оба собственных значения которого невещественны. В координатах простая \mathbb{R} -система записывается уравнением 1-го порядка

$$\dot{x} = \lambda x + u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in \Omega \subseteq \mathbb{R}. \quad (16)$$

В координатах простая \mathbb{C} -система может быть записана системой уравнений 2-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = \mu x^1 - \nu x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = \nu x^1 + \mu x^2 + u^2, \end{cases} \quad \nu > 0. \quad (17)$$

Приведем перечень критериев мгновенной нуль-достижимости, полной нуль-достижимости и глобальной нуль-достижимости для простых систем с множествами, ограничивающими управления, содержащими точку 0. Эти критерии играют важную роль в теории эволюции множеств достижимости систем класса \mathfrak{C} .

Предложение 1. Простая система (16) с вещественным собственным значением λ :

- a) мгновенно нуль-достижима тогда и только тогда, когда $\Omega = \mathbb{R}$;
- b) вполне управляема тогда и только тогда, когда $\Omega = \mathbb{R}$;
- c) глобально нуль-достижима тогда и только тогда, когда $\text{Con } \Omega = \mathbb{R}$, если $\lambda \geq 0$;
- d) глобально нуль-достижима тогда и только тогда, когда $\Omega = \mathbb{R}$, если $\lambda < 0$.

Предложение 2. Простая \mathbb{C} -система (17) с ограничивающим управлением множеством $\Omega \ni 0$:

- а) мгновенно нуль-достижима тогда и только тогда, когда Ω содержит прямую;
- б) вполне достижима тогда и только тогда, когда Ω содержит полу-прямую с вершиной в нуле;
- с) глобально нуль-достижима тогда и только тогда, когда $\Omega \neq \{0\}$, если $\mu \geq 0$;
- д) глобально нуль-достижима тогда и только тогда, когда она вполне достижима, если $\mu < 0$.

Специализации предложений 1 и 2 для систем с коническими ограничениями на управления выглядят проще.

Предложение 1'. Если система (16) имеет коническое множество Ω ограничений управлений, то для нее свойства мгновенной нуль-достижимости, полной достижимости и глобальной нуль-достижимости эквивалентны и выполняются тогда и только тогда, когда $\Omega = \mathbb{R}$.

Предложение 2'. Если система (17) имеет коническое множество Ω ограничений управлений, то для нее свойства полной достижимости и глобальной нуль-достижимости равносильны. Такая система

- а) мгновенно нуль-достижима тогда и только тогда, когда конус Ω содержит прямую;
- б) вполне достижима тогда и только тогда, когда конус Ω содержит полупрямую с вершиной в нуле.

Проверка выделенных четырех предложений не вызывает никаких затруднений.

В доказательстве критерия глобальной нуль-достижимости важную роль играла следующая простая идея. Каждой паре (V, α) , состоящей из конечномерного вещественного линейного пространства V и линейного оператора $\alpha : V \rightarrow V$, сопоставлялся экспоненциальный поток $\mathcal{J}T(V, \alpha)$, действующий на пространстве V по правилу $a \rightarrow e^{\alpha t}a$. Линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ называлось морфизмом потока $\mathcal{J}T(V, \alpha)$ в поток $\mathcal{J}T(W, \beta)$, если $\varphi\alpha = \beta\varphi$ и $\varphi V = W$. Класс \mathfrak{T} всех экспоненциальных потоков таким образом обращался в категорию. Если $\varphi : \mathcal{J}T(V, \alpha) \rightarrow \mathcal{J}T(W, \beta)$ — морфизм потоков, то для всех $a \in V$ и $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $\varphi e^{\alpha t}a = e^{\beta t}\varphi a$. Каждой системе $C = (V, \alpha, \Omega) \in \mathfrak{C}$ сопоставлялся поток $\mathcal{J}T(C) = \mathcal{J}T(V, \alpha)$. Такое соответствие определяет ковариантный функтор на категории линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами \mathfrak{C} со значениями в категории \mathfrak{T} экспоненциальных потоков на конечномерных вещественных пространствах. Множество $P \subseteq V$ называется положительно-инвариантным относительно потока $\mathcal{J}T(V, \alpha)$, если вместе с точкой $a \in P$ в P содержатся все точки вида $e^{\alpha t}a$ при всех $t > 0$. Такие множества называются α^+ -инвариантными. Знак $+$ не позволяет спутать наименьшее выпуклое α^+ -инвариантное множество $[P]_{\alpha^+}$, содержащее P , с наименьшим α -инвариантным линейным подпространством $[P]_{\alpha}$, содержащим P . В связи с задачей глобальной нуль-достижимости естественно возникает задача нахождения условий, при которых множество $[\Omega]_{\alpha^+} = V$. Отметим очевидное утверждение.

Теорема 3. Если множество Ω ограничений управлений системы C содержит точку 0 , то множество глобальной нуль-достижимости $K_{\infty}(C)$ выпукло и α^+ -инвариантно.

Важный критерий совпадения выпуклого α^+ -инвариантного множества $P \subseteq V$ с V был доказан в [31].

Теорема 4. Если $P \subseteq V$ — α^+ -инвариантное выпуклое множество, содержащее точку 0 , то $P = V$ тогда и только тогда, когда при любом

морфизме потока $\mathcal{J}T(V, \alpha)$ в любой простой поток $\mathcal{J}T(W, \beta)$ с собственным значением, не являющимся отрицательным вещественным числом, $\varphi P = W$ и $\varphi^- P = V^-$.

Из теорем 3 и 4 выводится общий критерий глобальной нуль-достижимости систем класса \mathfrak{E} с ограничивающими множествами, содержащими 0 (см. [31]).

Критерий Семенова глобальной нуль-достижимости. Система $C \in \mathfrak{E}$ с $0 \in \Omega$ глобально нуль-достижима тогда и только тогда, когда каждая простая система, подчиненная системе C^\oplus , глобально нуль-достижима и глобально нуль-достижима система C^- .

В отличие от критерия Коробова, Маринича, Подольского в критерии Семенова не требуется, чтобы ограничивающее множество системы C было коническим. Для систем класса \mathfrak{E} , ограничивающие множества которых содержат точку 0 и среди собственных значений которых нет отрицательных вещественных чисел, этот критерий является окончательным. Выделение системы C^- в этой теореме существенно. Существуют примеры управляемых систем класса \mathfrak{E} , все собственные значения которых отрицательны, у которых все подчиненные им простые системы глобально нуль-достижимы, тем не менее сами системы все же не являются глобально нуль-достижимыми. Проблема глобальной нуль-достижимости для систем класса \mathfrak{E}^- , насколько известно автору, остается до сих пор открытой и требует создания новых подходов. Пожалуй это единственное белое пятно, оставшееся в классических задачах теории УД в классе \mathfrak{E} линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами.

В категорных терминах теорема Браммера приобретает совершенно прозрачную формулировку.

Критерий Браммера 2. Система $C \in \mathfrak{E}$ с коническим множеством Ω вполне нуль-управляема тогда и только тогда, когда каждая простая система, подчиненная системе C , вполне нуль-управляема.

На примерах можно показать смысл и существенное отличие критериев Калмана, Браммера и Семенова. Рассмотрим традиционную в примерах простейшую управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u^1, \\ \dot{x}^2 = u^2. \end{cases} \quad (18)$$

Множество, ограничивающее управления системы (18), обозначим Ω . В плоскости $V = \mathbb{R}^2$ выделим прямую $x^1 = 0$, обозначим ее V_2 . Системе C подчинена только одна (с точностью до изоморфизма) простая система $D = (W, \beta, \Pi)$, фазовое пространство которой отождествим с прямой $W = V_2$. Морфизм подчинения $\varphi : C \rightarrow D$ отождествим с проекцией $(x^1, x^2) \mapsto x^2$ плоскости V на прямую W . Тогда $\Pi = \overline{\varphi\Omega}$, оператор $\beta = 0$. Для того чтобы система (18) с линейным ограничивающим множеством Ω была мгновенно нуль-достижима согласно критерию Калмана необходимо и достаточно, чтобы Ω содержало прямую l , для которой $\varphi l = W$. В общем случае, когда предполагается только, что множество Ω выпукло, критерий Калмана дает только достаточное условие мгновенной нуль-достижимости. Можно доказать, что в общем случае система (18) мгновенно нуль-достижима тогда и только тогда, когда множество Ω содержит прямую. На рис. 1 показан “минимальный” по ограничениям на управления случай, когда система (18) мгновенно нуль-достижима.

Для того чтобы система (18) с коническими ограничениями на управления была вполне достижима, согласно критерию Браммера необходимо и достаточно, чтобы $\varphi\Omega = W$. В общем случае теорема Браммера дает только

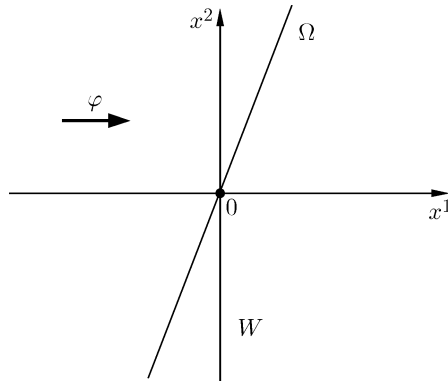


Рис. 1

достаточное условие полной достижимости. Обозначим через $\text{con } \Omega$ конус бесконечных направлений выпуклого множества Ω . Можно доказать, что система (18) вполне достижима тогда и только тогда, когда $\varphi \text{con } \Omega = W$. На рис. 2 показан “минимальный” по ограничениям на управления случай, когда система (18) вполне достижима.

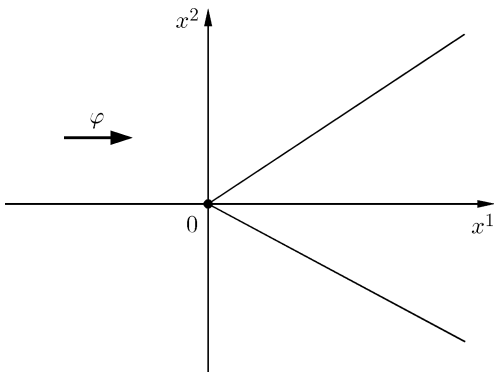


Рис. 2

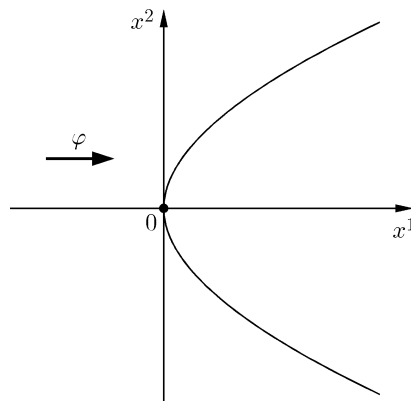


Рис. 3

Для того чтобы система (18) была глобально нуль-достижимой согласно критерию Семенова необходимо и достаточно, чтобы $\varphi \Omega = W$. Предположим, что $\Omega = \{(x^1, x^2) : x^1 \geq (x^2)^2\}$. Отметим, что наибольший конус $\text{con } \Omega$, содержащийся в Ω , совпадает с полуосью $\{(x^1, 0) : x^1 \geq 0\}$. С такими ограничениями (см. рис. 3) на управления система (18) глобально нуль-достижима, но не вполне нуль-достижима.

В 1983 году в статье Р. Бьянчини [С5] был доказан общий

Критерий Бьянчини мгновенной нуль-управляемости. *Линейная управляемая система*

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \tag{19}$$

с постоянной матрицей A и произвольным ограничивающим множеством Γ мгновенно нуль-управляема тогда и только тогда, когда ортогональная проекция выпуклой оболочки Γ множества Γ на любое A^t -инвариантное линейное подпространство $Y, Y \neq \{0\}$ (включая \mathbb{R}^n) содержит прямую линию.

Заметим, что в условии теоремы Бьянчини требуется, чтобы ограничивающее множество любой ненулевой системы, подчиненной системе (19), содержало ненулевое линейное многообразие.

Критерий Бьянчини мгновенной нуль-управляемости 2. *Линейная управляемая система $C = (V, \alpha, \Omega)$ мгновенно нуль-управляема (нуль-достижима) тогда и только тогда, когда множество ограничений управлений любой ненулевой системы, подчиненной системе C (включая саму систему C) содержит прямую линию.*

Результат Р. Бьянчини естественно поднимает вопрос о предельном поведении остовов управляемых систем при $t \rightarrow 0 + 0$. В 1990 году в статье Ю. М. Семенова [31] было определено предельное поведение множеств достижимости $K(C, t)$ при $t \rightarrow 0 + 0$ систем класса \mathfrak{E} , на ограничивающие множества которых не делались никакие предположения.

Определение 2. Точка a называется *точкой почти мгновенной нуль-достижимости системы C* , если для любого $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует управление системы C , определенное в промежутке $[0, \eta)$, $0 < \eta < \delta$, переводящее точку 0 в ε -окрестность точки a за время η .

Множество всех точек почти мгновенной нуль-достижимости обозначается $K_0(C)$ и называется множеством почти мгновенной нуль-достижимости системы C . Множество $K_0(C)$ оказывается инвариантным относительно параллельных переносов ограничивающего множества системы. В частном случае, когда семейство множеств $K(C, t)$ монотонно по включению,

$$K_0(C) = \bigcap_{t>0} \overline{K(C, t)}.$$

В статье Ю. М. Семенова [31] была доказана

Теорема 5 (о строении множества $K_0(C)$). *Пусть $C = (V, \alpha, \Omega)$ — линейная управляемая система с постоянными коэффициентами, $\text{con } \Omega$ — конус бесконечных направлений выпуклого множества Ω , $\text{lin } \Omega$ — наибольшее линейное подпространство, лежащее в конусе $\text{con } \Omega$, тогда*

$$K_0(C) = \text{con } \Omega + [\text{lin } \Omega]_\alpha. \quad (20)$$

Следствие 1 (общий критерий мгновенной нуль-достижимости). Система $C = (V, \alpha, \Omega)$ мгновенно нуль-достижима тогда и только тогда, когда $[\text{lin } \Omega]_\alpha = V$.

Формулировка и проверка этого критерия мгновенной нуль-достижимости намного проще формулировки критерия Бьянчини.

Достаточность в этом критерии прямо следует из критерия Калмана мгновенной нуль-достижимости. Существенно важным здесь является необходимость условия $[\text{lin } \Omega]_\alpha = V$ для мгновенной нуль-достижимости системы $C \in \mathfrak{E}$ с произвольным ограничивающим множеством. Если Ω — линейно, то формула (20) записывается в виде $K_0(C) = [\text{lin } \Omega]_\alpha$. Следовательно, теорема 5 содержит в себе как частный случай и теорему Калмана. Собственно говоря, значение формулы (20) заключается прежде всего в том, что она выделяет множество, с которого “начинают” эволюционировать множества достижимости управляемой системы $C \in \mathfrak{E}$.

В 1986 году опубликована статья Р. Бьянчини [28], в которой был доказан следующий критерий полной управляемости систем класса \mathfrak{E} .

Критерий Бьянчини полной управляемости. *Линейная управляемая система (19) с постоянной матрицей A и произвольным ограничивающим множеством Γ вполне управляема тогда и только тогда, когда для всех $\sigma \in \mathbb{R}$ существует такое $t \in \mathbb{N}$, что*

$$\text{co}\{\Gamma + (A - \sigma I)\Gamma + \dots + (A - \sigma I)^m \Gamma\} = E. \quad (21)$$

Следует отметить, что, хотя критерий Бьянчини решает проблему полной управляемости, однако в статье [28] не показано, как конкретно проверяется условие (21).

З а м е ч а н и е 1. Все классические задачи теории УД в классе \mathcal{C} линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами могут быть решены одним методом, разработанным в статьях [29–31].

После работы Р. Бьянчини [28], опубликованной в 1986 году, многие специалисты решили, что теория УД для линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами завершена. Это можно было объяснить только отсутствием методов, позволяющих решать актуальные задачи теории УД, к которым можно отнести задачу, поставленную в статье [28] Бьянчини, в которой требуется найти метод вычисления времени полной достижимости вполне управляемых систем. Бьянчини считала эту задачу трудной, к которой не видно подходов. Действительно, техникой почти периодических функций, которую использовали в то время как наиболее сильный инструмент для решения задач УД, это было сделать трудно, если вообще возможно. Однако никто не обратил внимания на то, что в статьях Ю. М. Семенова [29–31] были заложены и развиты основы иного метода решения не только классических задач теории УД в классе \mathcal{C} линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами.

3. Общая теория эволюции множеств достижимости линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами

Описание эволюции множеств достижимости линейных систем существенно облегчается тем, что они выпуклы. Полупрямая l_0 с вершиной в нуле называется лучом бесконечного направления выпуклого множества P , если в множестве P существует точка a , такая, что луч $l_a = a + l_0 \subseteq P$. Объединение всех лучей бесконечных направлений неограниченного выпуклого множества P , лежащего в конечномерном пространстве образует конус, который обозначается $\text{con } P$ и называется конусом бесконечных направлений выпуклого множества P . Конус $\text{con } P$ замкнут, если выпуклое множество P лежит в конечномерном пространстве, независимо от того замкнуто или не замкнуто множество P . Если выпуклое множество P ограничено, то, по определению, $\text{con } P = \{0\}$. Наибольшее линейное подпространство, лежащее в $\text{con } P$, обозначается $\text{lin } P$ и называется линейным краем выпуклого множества P (конуса $\text{con } P$). В некоторых источниках конус $\text{con } P$ называется конусом рецессивных направлений выпуклого множества P . Основной задачей теории УД является описание эволюции множеств $K(t)$ и $S(t)$ по мере изменения параметра t в интервале $(0, +\infty)$. Из инвариантности конуса бесконечных направлений $\text{con } P$ относительно параллельных переносов множества P следует монотонность по включению семейств конусов $\text{con } K(t)$ и семейств линейных подпространств $\text{lin } K(t)$. В нашем понимании описание эволюции множеств $K(t)$ сводится к описанию эволюции семейств конусов $\text{con } K(t)$ (конического остова достижимости системы (1) и семейств линейных

пространств $\text{lin } K(t)$ (линейного остова достижимости системы (1)) и, аналогично, для множеств управляемости $S(t)$, так как этих сведений достаточно для решения всех упомянутых выше задач УД.

Большое количество результатов теории УД систем класса \mathfrak{E} и их полнота в конечном итоге объясняется тремя базисными свойствами, относящимися к алгебре.

Во-первых, класс \mathfrak{E} можно снабдить строением категории, в которой “каждый” нетривиальный объект категории \mathfrak{E} имеет “богатый” набор подчиненных систем.

Во-вторых, соответствие $C \rightarrow \overline{K(C, t)}$ определяет однопараметрическое семейство ковариантных функторов $K(\cdot, t)$ на категории \mathfrak{E} со значениями в категории \mathfrak{W} замкнутых выпуклых множеств, позволяющее связать между собой множества достижимости системы $C \in \mathfrak{E}$ с множествами достижимости подчиненных ей систем.

В третьих, функторы $K(\cdot, t)$ связаны между собой формулой сложения (15).

В работах Ю. М. Семенова [32–38] была построена теория эволюции множеств достижимости линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами и обоснована общая процедура вычисления моментов скачков линейных остовов. Для вполне достижимых систем класса \mathfrak{E} был предложен метод вычисления момента полной достижимости. Методы вычисления момента полной достижимости были реализованы для некоторых типов систем класса \mathfrak{E} . В основу теории были положены свойство (14) функториальности оператора достижимости и формула (15) сложения для множеств достижимости (см. теоремы 1 и 2). В этом разделе статьи поясняются основные идеи теории эволюции множеств достижимости систем класса \mathfrak{E} .

Пусть $C = (V, \alpha, \Omega)$ — система класса \mathfrak{E} . Будем предполагать, что множество Ω содержит точку 0, что гарантирует монотонность по включению семейства множеств $K(C, t)$. Из монотонности по включению семейства выпуклых множеств $K(C, t)$ следует монотонность по включению их конусов бесконечных направлений $\text{con } K(C, t)$ и монотонность по включению семейства линейных подпространств $\text{lin } K(C, t)$. Для всех $t > 0$ имеют место включения

$$\text{lin } K(C, t) \subseteq \text{con } K(C, t) \subseteq \overline{K(C, t)}.$$

Функция $d(C, t)$ размерности линейных подпространств $\text{lin } K(C, t)$ не убывает, кусочно-постоянна и принимает целочисленные значения. Обозначим через

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r < t_{r+1} = +\infty$$

семейство всех точек разрыва функции $d(C, t)$. Можно доказать, что в каждом интервале (t_k, t_{k+1}) , $k = 0, \dots, r$ линейные подпространства $\text{lin } K(C, t)$ не меняются, обозначим их $L_k(C)$. Так системе C сопоставляется конечная башня линейных пространств

$$L_0(C) \subset L_1(C) \subset \dots \subset L_r(C) = L(C). \quad (22)$$

Теорема 6. Пусть $C = (V, \alpha, \Omega)$ — линейная управляемая система с постоянными коэффициентами, тогда линейные подпространства $L_k(C)$ α -инвариантны для всех $k = 0, \dots, r$.

Из теоремы 5 следует, что $L_0(C) = [\text{lin } \Omega]_\alpha$. В особом случае, когда функция $d(C, t)$ постоянна, мы будем говорить, что остов системы C линейно стабилен. В этом случае линейное подпространство $\text{lin } K(C, t)$ не зависит от t , так же α -инвариантно и обозначается $L(C)$. Если функция $d(C, t)$ не постоянна, то t_1 называется моментом первого скачка линейного остова системы

C и обозначается $t(C)$, а момент времени t_r называется моментом полной стабилизации линейного остова системы C и обозначается $T(C)$.

Наиболее важным при исследовании эволюции множеств достижимости системы C класса \mathfrak{E} является вычисление момента $t(C)$ первого скачка ее линейного остова и нахождения линейного подпространства $L_1(C)$.

Следующая лемма, несмотря на ее простоту, играет весьма существенную роль в нашей теории, поскольку именно она находится в основании метода редукции задач достижимости.

Лемма 1. Пусть P — непустое выпуклое подмножество конечномерного вещественного пространства V , $\varphi : V \rightarrow W$ — линейное отображение пространства V в пространство W . Если $\text{Ker } \varphi \subseteq \text{lin } P$ и $\varphi V = W$, то $\overline{P} = \varphi^{-1}\overline{\varphi P}$.

Ввиду леммы 1 свойство функториальности оператора достижимости обращается и приводит к понятию τ -совершенного морфизма, важного при редукции управляемых систем.

Определение 3. Морфизм

$$\varphi : C \rightarrow D$$

называется τ -совершенным ($\tau \in [0, +\infty)$), если для любого $t > \tau$

$$\text{Ker } \varphi \subseteq \text{lin } K(C, t). \quad (23)$$

Теорема 7 (основное свойство τ -совершенных морфизмов). Если морфизм $\varphi : C \rightarrow D$ τ -совершенен, то для любого $t > \tau$

$$\overline{K(C, t)} = \varphi^{-1}\overline{K(D, t)}. \quad (24)$$

Таким образом, если система D подчинена системе C при помощи τ -совершенного морфизма φ , то для всех $t > \tau$ множества достижимости $K(C, t)$ системы C определяются, с точностью до операции топологического замыкания, множествами $K(D, t)$ и ядром линейного оператора φ . Существование нетривиального τ -совершенного морфизма $\varphi : C \rightarrow D$ позволяет редуцировать при помощи формулы (24) описание остова системы C для моментов времени $t > \tau$ к описанию остова системы D , порядок которой меньше порядка системы C на размерность ядра линейного оператора φ . Отметим

Следствие 2. Если морфизм φ τ -совершенен, то для любого $t > \tau$

$$d(C, t) = d(D, t) + \dim \text{Ker } \varphi. \quad (25)$$

Из общего представления эволюции множеств достижимости вытекает по-видимому невозможность формулировки общего простого критерия полной достижимости (управляемости) линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами. Тем не менее, можно сформулировать простой

Редукционный критерий полной достижимости. Система $C \in \mathfrak{E}$ вполне достижима тогда и только тогда, когда вполне достижима фактор-система $C/L'(C)$, где $L'(C)$ — первое ненулевое подпространство в последовательности α -инвариантных линейных подпространств (22).

Если $\text{lin } \Omega \neq \{0\}$, то по теореме 5 $L_0(C) = [\text{lin } \Omega]_\alpha \neq \{0\}$ и описание эволюции множеств достижимости системы C по теореме 7 сводится к описанию эволюции множеств достижимости системы $C'' = (V'', \alpha'', \Omega'') = C/[\text{lin } \Omega]_\alpha$, у которой $\text{lin } \Omega'' = \{0\}$. Ввиду этого замечания важно сосредоточить внимание

на том случае, когда $\text{lin } \Omega = \{0\}$. Будем далее это постоянно предполагать. Морфизм факторизации $\varphi_1 : C \rightarrow C_1 = C/L_1(C)$ t_1 -совершенен. Порядок системы C_1 равен разности $\dim V - \dim L_1(C) < \dim V$. Из теоремы 7 следует, что момент первого скачка системы C_1 совпадает с моментом второго скачка системы C . Таким образом, индуктивно строятся последовательно системы C_1, \dots, C_r , первые скачки остовов которых равны соответственно t_2, \dots, t_{r+1} , и линейные подпространства $L_1(C), \dots, L_r(C) \subset V$. В результате этого процесса в конце концов мы придем к вычислению момента $T(C)$ и описанию пространства $L_r(C)$ полной линейной стабилизации системы C . В теории УД важна следующая теорема.

Теорема 8. Пусть $C = (V, \alpha, \Omega) \in \mathfrak{C}$ и $\text{lin } \Omega = \{0\}$, тогда для всех $t \in (0, t_1)$

$$\text{con } K(C, t) = \overline{K(\text{con } C, t)}. \quad (25)$$

Включение $\overline{K(\text{con } C, t)} \subseteq \text{con } K(C, t)$ доказывается просто и известно давно, нетривиально обратное включение. Значение теоремы 8 заключается в том, что она сводит вычисление первого скачка линейного остова системы C к вычислению первого скачка линейного остова системы $\text{con } C = (V, \alpha, \text{con } \Omega)$ с коническими ограничениями управлений. Очень важно заметить, что для систем с коническими ограничениями на управления при описании конусов достижимости можно операцию интегрирования (формулу Коши) заменить операцией суммирования и тем самым сводить задачи УД к исследованию поведения конусов ограничений управлений относительно экспоненциальных потоков.

Теорема 9. Если $C = (V, \alpha, \Omega) \in \mathfrak{C}$ — система с коническими ограничениями на управления, то

$$\overline{K(C, t)} = \overline{\sum_{0 < s < t} e^{\alpha s} \Omega}. \quad (26)$$

Сумма конусов в формуле (26) определяется как теоретико-множественное объединение конусов

$$e^{\alpha s_1} \Omega + \dots + e^{\alpha s_m} \Omega,$$

взятое по всевозможным конечным последовательностям моментов времени $s_1, \dots, s_m \in (0, t)$.

Замечание 2. Из теорем 8 и 9 следует, что момент первого скачка $t(C)$ линейного остова системы C с $\text{lin } \Omega = \{0\}$ совпадает с нижней гранью значений t , для которых конус

$$\overline{\sum_{0 < s < t} e^{\alpha s} \text{con } \Omega}$$

содержит прямую.

Замечание 3. В итоге, теоремы 5–9 выделяют в качестве наиболее важного для описания эволюции множеств достижимости линейной управляемой системы $C = (V, \alpha, \Omega)$ с постоянными коэффициентами случай исследования эволюции конусов достижимости системы $\text{con } C = (V, \alpha, \text{con } \Omega)$ в промежутке $(0, t(C))$.

Наконец, предположим, что множество Ω , ограничивающее управления системы $C = (V, \alpha, \Omega)$, является конусом с $\text{lin } \Omega = \{0\}$. Описание эволюции конусов достижимости системы C в интервале $(0, t(C))$ с такими ограничениями управлений сводится к последовательному описанию эволюции конусов достижимости систем $C^\kappa = C/V^\kappa$, начиная с $\kappa = \rho$ до $\kappa = 0$ (сверху вниз) из башни

$$C = C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots \rightarrow C^{\rho-1} \rightarrow C^\rho = 0,$$

полученной при помощи последовательных факторизаций системы C по α -инвариантным линейным подпространствам пространства V , составляющим неуплотняемую башню

$$\{0\} = V^0 \subset V^1 \subset \dots \subset V^{\rho-1} \subset V^\rho = V.$$

В теоремах 5–9 содержится перечень всех общих сведений о строении и эволюции множеств достижимости линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами. Детали исследования эволюции множеств достижимости некоторых типов систем класса \mathfrak{C} описаны в работах [32–35]. Некоторые приложения теории УД к оценкам снизу времени регулирования систем автоматического управления можно найти в [36–38].

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов.—М.: Физматгиз, 1961.
2. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами.—М.: Наука, 1976.
3. Куржанский А.В. Управление и наблюдение в условиях неопределенности.—М.: Наука, 1977.
4. Месарович М., Такаха Я. Общая теория систем: Математические основы.—М.: Мир, 1978.
5. Елкин В.И. Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход.—М.: Наука, 1997.
6. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление (линейная теория).—М.: Высш. школа, 2001.
7. Васильев Ф.П. Методы оптимизации.—М.: Факториал Пресс, 2002.
8. Елкин В.И. Редукция нелинейных управляемых систем. Декомпозиция и инвариантность по возмущениям.—М.: Фазис, 2003.
9. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления.—М.: Физматлит, 2005.
10. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью.—М.: Физматлит, 2007.
11. Ляпунов А.А. О вполне аддитивных вектор-функциях 1 //Изв. АН СССР. Серия матем.—1940.—Т. 3, вып. 6.—С. 465–478.
12. Гамкрелидзе Р.В. Теория оптимальности по быстродействию процессов в линейных системах //Изв. АН СССР. Серия матем.—1958.—Т. 22, вып. 4.—С. 597–608.
13. Павловский Ю.Н. Групповые свойства управляемых систем и фазовые организационные структуры //Ж. вычисл. матем. и матем. физика.—1974.—Т. 14, № 4.—С. 862–872; Т. 14, № 5.—С. 1093–1103.
14. Коробов В.И., Маринич А.П., Подольский Е.Н. Управляемость линейных автономных систем при наличии ограничений на управление //Дифференц. уравн.—1975.—№ 11.—С. 1967–1979.
15. Кун Л.А. Связь между локальной и глобальной управляемостью линейного объекта //Автоматика и телемеханика.—1977.—№ 10.—С. 12–16.
16. Благодатских В.И. Задача управляемости для линейных систем //Труды МИАН СССР.—1977.—Т. 143.—С. 57–67.

17. Павловский Ю. Н. Теория факторизации и декомпозиции управляемых динамических систем // Изв. АН СССР. Серия техн. кибернетика.—1984.—№ 2.—С. 45–47.
18. Крищенко А. П. Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика.—1984.—№ 6.—С. 30–36.
19. Елкин В. И. О категориях и основах теории нелинейных управляемых динамических систем 1 // Дифференц. уравн.—2002.—Т. 38, № 11.—С. 1467–1482.
20. Арутюнов А. В., Павлова А. П. О топологических свойствах множеств достижимости линейных систем // Дифференц. уравн.—2004.—Т. 40, № 11.—С. 1564–1566.
21. Коровин С. К., Ильин А. В., Медведев И. С., Фомичев В. В. К теории функциональных наблюдателей и стабилизаторов заданного порядка // Докл. РАН.—2006.—Т. 409, № 5.—С. 1–5.
22. Carathéodory C. Untersuchungen über die Grundlagen der Thermo-dynamik // Math. Ann.—1909.—S. 355–386.
23. Kalman R. E. On the general theory of control systems // Труды 1-го междунар. конгресса ИФАК (т. 2), Москва (1961).—М.: Изд-во АН СССР, 1961.—С. 521–547.
24. Grammer B. F. Controllability in linear autonomous systems using positive controllers // SIAM J.C.—1972.—V. 10, № 2.—P. 339–353.
25. Pachter M., Jacobson D. H. Control with conic constraint set // JOTA.—1978.—V. 55.—P. 117–123.
26. Bianchini R. M. Instant controllability of linear autonomous systems // JOTA.—1983.—V. 39, № 2.—P. 237–250.
27. Bianchini R. M. Complete controllability // JOTA.—1986.—V. 50, № 1.—P. 69–82.
28. Семенов Ю. М. Об управляемости линейных систем с постоянными коэффициентами // Матем. сборник.—1978.—Т. 105 (147), № 2.—С. 164–179.
29. Семенов Ю. М. О задаче нуль-достижимости линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравн.—1982.—Т. 18, № 1.—С. 1869–1878.
30. Семенов Ю. М. Остроении множества почти мгновенной нуль-достижимости // Дифференц. уравн.—1990.—Т. 26, № 6.—С. 989–997.
31. Семенов Ю. М. Об остовах линейных управляемых систем // Дифференц. уравн.—2005.—Т. 41, № 8.—С. 1145–1146.
32. Семенов Ю. М. Введение в теорию достижимости линейных систем.—Чебоксары: Изд-во Чувашского гос. ун-та, 2006.
33. Семенов Ю. М. О множествах достижимости линейных систем // Дифференц. уравн.—2006.—Т. 42, № 8.—С. 1146–1148.
34. Семенов Ю. М. К теории достижимости линейных управляемых систем // Дифференц. уравн.—2007.—Т. 43, № 4.—С. 465–474.
35. Семенов Ю. М. О моменте полной стабилизации управляемых систем // Дифференц. уравн.—2008.—Т. 44, № 2.—С. 147–148.
36. Семенов Ю. М. О моменте полной стабилизации линейных систем // Дифференц. уравн.—2008.—Т. 44, № 11.—С. 1556–1565.
37. Семенов Ю. М., Семячкова М. С., Степанова Н. Д. Остроении основов сверхполупростых S -систем // Нелинейная динамика и управление. Вып. 6.—М.: Физматлит, 2008.—С. 183–194.
38. Семенов Ю. М. О геометрии переходных процессов в управляемых системах // Дифференц. уравн.—2009.—Т. 45, № 2.—С. 285–287.

ЗАДАЧА ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

А. Н. Канатников, Е. А. Шмагина

Для задачи терминального управления движением летательного аппарата описан метод построения пространственной траектории движения и расчета соответствующих управлений. Решение задачи базируется на использовании шестимерной математической модели, в которой управлениями являются координаты вектора перегрузки. Предложенный метод продемонстрирован на конкретных примерах.

1. Введение

Задача автоматического управления летательными аппаратами (ЛА) исследуется уже несколько десятков лет, но остается актуальной и по сей день. Существенные трудности в решении этой задачи связаны с большой сложностью математических моделей летательных аппаратов и наличием ограничений, вызванных, в частности, повышенными требованиями к летным характеристикам и безопасности полета.

В задачах автоматического управления движением наибольшее распространение получили алгоритмы, основанные на концепциях обратных задач динамики [1,2]. Большое количество примеров применения концепций обратных задач динамики, а также обширная библиография по этому вопросу приведены в [1] и [2]. Примеры использования этого подхода в задачах управления ЛА представлены в [3] и [4].

Пространственное движение летательного аппарата естественно рассматривать как движение твердого тела, что приводит к математической модели, представляющей собой систему из двенадцати дифференциальных уравнений. Известны примеры использования этой модели для расчета управлений, обеспечивающих движение летательного аппарата по заданной траектории [3,4,6]. Однако при этом задача построения траектории движения, как правило, не обсуждается.

В соответствии с методологией обратных задач динамики [1,2] терминальное управление движением летательного аппарата нужно строить в два этапа. На первом этапе строится пространственная траектория движения центра масс летательного аппарата. На этом этапе летательный аппарат можно трактовать как материальную точку, считая, что в каждый момент времени ориентация летательного аппарата с учетом его аэродинамических особенностей позволяет обеспечить требуемую сумму сил, действующих на летательный аппарат. Математическая модель движения материальной точки представляет собой систему шести дифференциальных уравнений первого порядка, в которой в качестве управлений фигурируют координаты вектора перегрузки, действующей на летательный аппарат. На втором этапе при известной пространственной траектории полета и действующих перегрузках рассчитываются ориентация летательного аппарата и

управления. На этом этапе необходимо учитывать аэродинамические особенности летательного аппарата, характеристики его двигательной установки.

В данной статье обсуждается метод построения траектории движения летательного аппарата на основе полиномов от времени. Исходными данными являются векторы положения, скорости и перегрузок в начальный и конечный моменты времени. Для построенной пространственной траектории в рамках шестимерной модели вычисляются соответствующие управления. Программные управления представляют собой функции времени, их использование предполагает, что летательный аппарат точно следует по выбранной пространственной траектории. Управления в форме обратной связи вычисляются на основе программных с учетом фактического положения летательного аппарата. Это позволяет корректировать возможные отклонения от заданной пространственной траектории.

Работоспособность предложенных алгоритмов построения пространственной траектории и расчета реализующих эту траекторию управлений проверена моделированием некоторых типовых маневров летательного аппарата.

2. Математическая модель движения центра масс летательного аппарата

Для записи уравнений движения летательного аппарата будем использовать следующие системы координат.

Начало O нормальной земной системы координат $Oxyz$ расположено в некоторой точке земной поверхности, ось Oy направлена по местной вертикали против вектора силы тяжести, оси Ox и Oz расположены в горизонтальной плоскости и образуют вместе с осью Oy правую систему координат. В рамках решаемой задачи пространственная ориентация нормальной земной системы координат остается неизменной. Кривизной земной поверхности и вращением Земли пренебрегают. Для небольших интервалов времени нормальную земную систему координат принято считать инерциальной.

Переместив начало нормальной земной системы координат в центр масс летательного аппарата, получим нормальную систему координат O_txyz . Эта система координат играет вспомогательную роль, ее обычно обозначают так же, как и нормальную земную систему координат.

Начало O_t траекторной системы координат $O_tX_tY_tZ_t$ помещают в центре масс летательного аппарата, ее ось O_tX_t направляют по вектору (земной) скорости летательного аппарата. Ось O_tY_t перпендикулярна оси O_tX_t , расположена в местной вертикальной плоскости, содержащей вектор скорости, и направлена вверх (относительно местной вертикали). Ось O_tZ_t дополняет введенные оси до правой системы координат. Положение траекторной системы координат относительно нормальной системы координат задается двумя углами: углом пути ψ и углом наклона траектории θ (рис. 1).

Движение центра масс ЛА описывается следующей системой уравнений [1, с. 130, 158]:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (n_x - \sin \theta)g, & \dot{H} &= V \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{(n_y \cos \gamma - \cos \theta)g}{V}, & \dot{L} &= V \cos \theta \cos \psi, \\ \dot{\psi} &= -\frac{n_y g \sin \gamma}{V \cos \theta}, & \dot{Z} &= -V \cos \theta \sin \psi, \end{aligned} \quad (1)$$

где V — земная скорость ЛА, м/с;

θ — угол наклона траектории, рад;

ψ — угол пути, рад;

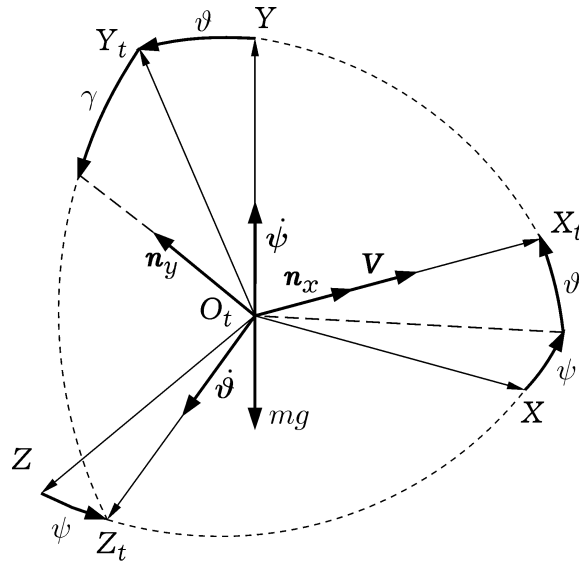


Рис. 1

H — высота полета, м;
 L — дальность полета, м;
 Z — боковая дальность полета, м;
 n_x, n_y — безразмерные перегрузки;
 γ — угол между проекцией вектора перегрузки на плоскость $O_t Y_t Z_t$ и осью $O_t Y_t$, рад.
 Перегрузки n_x, n_y и угол γ в данной статье рассматриваются как управления.

Система (1) не является аффинной, т.е. линейной по управлениям, что затрудняет использование концепции обратных задач динамики. Поэтому перейдем к новым виртуальным управлениям

$$v_1 = n_x, \quad v_2 = n_y \cos \gamma, \quad v_3 = n_y \sin \gamma. \quad (2)$$

При введении этих управлений система (1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -g \sin \theta + g v_1, & \dot{H} &= V \sin \theta, \\
 \dot{\theta} &= -\frac{\cos \theta}{V} g + \frac{g}{V} v_2, & \dot{L} &= V \cos \theta \cos \psi, \\
 \dot{\psi} &= -\frac{g}{V \cos \theta} v_3, & \dot{Z} &= -V \cos \theta \sin \psi.
 \end{aligned} \quad (3)$$

Систему (3) нетрудно записать в виде трех уравнений второго порядка. Выбрав в качестве новых неизвестных функции $y_1 = H, y_2 = L, y_3 = Z$ и положив

$$y_4 = \dot{y}_1, \quad y_5 = \dot{y}_2, \quad y_6 = \dot{y}_3, \quad (4)$$

получим шесть функций, определяющих в области фазового пространства системы (3), заданной ограничениями

$$V > 0, \quad |\theta| < \frac{\pi}{2}, \quad -\pi < \psi < \pi,$$

обратимую замену переменных, поскольку

$$\begin{cases} V = \sqrt{y_4^2 + y_5^2 + y_6^2}, \\ \sin \theta = \frac{y_4}{\sqrt{y_4^2 + y_5^2 + y_6^2}}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{y_5^2 + y_6^2}}{\sqrt{y_4^2 + y_5^2 + y_6^2}}, \\ \sin \psi = -\frac{y_6}{\sqrt{y_5^2 + y_6^2}}, \quad \cos \psi = \frac{y_5}{\sqrt{y_5^2 + y_6^2}}. \end{cases} \quad (5)$$

В переменных y_i , $i = \overline{1, 6}$, система (3) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_4, & \dot{y}_4 = -g + v_1 g \sin \theta + v_2 g \cos \theta, \\ \dot{y}_2 = y_5, & \dot{y}_5 = v_1 g \cos \theta \cos \psi - v_2 g \sin \theta \cos \psi + v_3 g \sin \psi, \\ \dot{y}_3 = y_6, & \dot{y}_6 = -v_1 g \cos \theta \sin \psi + v_2 g \sin \theta \sin \psi + v_3 g \cos \psi, \end{cases} \quad (6)$$

где величины $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\sin \psi$, $\cos \psi$ определяются соотношениями (5). Систему (6) с учетом (5) можно записать как систему трех уравнений второго порядка относительно неизвестных функций y_1 , y_2 , y_3 :

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -g + v_1 g \sin \theta + v_2 g \cos \theta, \\ \ddot{y}_2 = v_1 g \cos \theta \cos \psi - v_2 g \sin \theta \cos \psi + v_3 g \sin \psi, \\ \ddot{y}_3 = -v_1 g \cos \theta \sin \psi + v_2 g \sin \theta \sin \psi + v_3 g \cos \psi. \end{cases} \quad (7)$$

3. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу терминального управления. В начальный момент времени t_0 заданы значения переменных состояния летательного аппарата

$$\begin{cases} V|_{t=t_0} = V_0, & \theta|_{t=t_0} = \theta_0, & \psi|_{t=t_0} = \psi_0, \\ H|_{t=t_0} = H_0, & L|_{t=t_0} = L_0, & Z|_{t=t_0} = Z_0 \end{cases} \quad (8)$$

и значения управлений

$$n_x|_{t=t_0} = n_{x0}, \quad n_y|_{t=t_0} = n_{y0}, \quad \gamma|_{t=t_0} = \gamma_0. \quad (9)$$

Требуется синтезировать алгоритм управления, который к заданному моменту времени t_* обеспечивает перевод летательного аппарата в терминальное состояние

$$\begin{cases} V|_{t=t_*} = V_*, & \theta|_{t=t_*} = \theta_*, & \psi|_{t=t_*} = \psi_*, \\ H|_{t=t_*} = H_*, & L|_{t=t_*} = L_*, & Z|_{t=t_*} = Z_* \end{cases} \quad (10)$$

со следующими значениями управлений:

$$n_x|_{t=t_*} = n_{x*}, \quad n_y|_{t=t_*} = n_{y*}, \quad \gamma|_{t=t_*} = \gamma_*. \quad (11)$$

Решение этой задачи будем искать с помощью математической модели (3), записанной в форме (7).

4. Построение программной траектории и расчет программных управлений

Решение поставленной задачи будем искать в рамках концепции обратных задач динамики. Сначала выбираем траекторию движения, удовлетворяющую заданным условиям в начальный и конечный моменты времени, а затем рассчитываем управления, обеспечивающие движение летательного аппарата по заданной траектории.

При заданной траектории движения известны функции

$$y_1(t) = H(t), \quad y_2(t) = L(t), \quad y_3(t) = Z(t).$$

Значения этих функций при $t = t_0$ определяются условиями (8):

$$y_{10} = H_0, \quad y_{20} = L_0, \quad y_{30} = Z_0. \quad (12)$$

Согласно уравнениям (3), начальные значения (8) переменных состояния определяют и производные функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ при $t = t_0$:

$$\dot{y}_{10} = V_0 \sin \theta_0, \quad \dot{y}_{20} = V_0 \cos \theta_0 \cos \psi_0, \quad \dot{y}_{30} = -V_0 \cos \theta_0 \sin \psi_0. \quad (13)$$

По начальным значениям управлений (9) и переменных состояния (8) находим и вторые производные этих функций при $t = t_0$:

$$\begin{cases} \ddot{y}_{10} = -g + v_{10}g \sin \theta_0 + v_{20}g \cos \theta_0, \\ \ddot{y}_{20} = v_{10}g \cos \theta_0 \cos \psi_0 - v_{20}g \sin \theta_0 \cos \psi_0 + v_{30}g \sin \psi_0, \\ \ddot{y}_{30} = -v_{10}g \cos \theta_0 \sin \psi_0 + v_{20}g \sin \theta_0 \sin \psi_0 + v_{30}g \cos \psi_0. \end{cases} \quad (14)$$

Аналогичным образом, конечные значения переменных состояния (10) и управлений (11) определяют при $t = t_*$ значения функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, их первых и вторых производных:

$$\begin{cases} y_{1*} = H_*, \quad y_{2*} = L_*, \quad y_{3*} = Z_*; \\ \dot{y}_{1*} = V_* \sin \theta_*, \quad \dot{y}_{2*} = V_* \cos \theta_* \cos \psi_*, \quad \dot{y}_{3*} = -V_* \cos \theta_* \sin \psi_*; \\ \ddot{y}_{1*} = -g + v_{1*}g \sin \theta_* + v_{2*}g \cos \theta_*, \\ \ddot{y}_{2*} = v_{1*}g \cos \theta_* \cos \psi_* - v_{2*}g \sin \theta_* \cos \psi_* + v_{3*}g \sin \psi_*, \\ \ddot{y}_{3*} = -v_{1*}g \cos \theta_* \sin \psi_* + v_{2*}g \sin \theta_* \sin \psi_* + v_{3*}g \cos \psi_*. \end{cases} \quad (15)$$

Таким образом, траектория движения летательного аппарата, удовлетворяющая условиям (8)–(11), накладывает на функции $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, определенные на отрезке $[t_0, t_*]$, граничные условия (12)–(15). Эти функции будем искать в виде полиномов. Так как на каждую функцию заданы шесть условий, степень полинома следует положить равной пяти.

Рассмотрим задачу построения многочлена $y_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$, пятой степени, удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned} y_i(t_0) &= y_{i0}, & \dot{y}_i(t_0) &= \dot{y}_{i0}, & \ddot{y}_i(t_0) &= \ddot{y}_{i0}, \\ y_i(t_*) &= y_{i*}, & \dot{y}_i(t_*) &= \dot{y}_{i*}, & \ddot{y}_i(t_*) &= \ddot{y}_{i*}. \end{aligned}$$

Задачу удобно свести к случаю отрезка $[0, 1]$.

Положим $\Delta = t_* - t_0$, $p_i(\tau) = y_i(t_0 + \tau\Delta)$. Тогда многочлен $p_i(\tau)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} p_i(0) = y_{i0}, & p_i'(0) = \dot{y}_{i0}\Delta, & p_i''(0) = \ddot{y}_{i0}\Delta^2, \\ p_i(1) = y_{i*}, & p_i'(1) = \dot{y}_{i*}\Delta, & p_i''(1) = \ddot{y}_{i*}\Delta^2, \end{cases} \quad (16)$$

где штрих обозначает дифференцирование по переменному τ .

Запишем многочлен $p_i(\tau)$ в виде $p_i(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1\tau + \dots + \alpha_5\tau^5$. Согласно соотношениям (16) при $\tau = 0$ имеем

$$\alpha_0 = y_{i0}, \quad \alpha_1 = \dot{y}_i(0)\Delta, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\ddot{y}_i(0)\Delta^2. \quad (17)$$

Записав соотношения (16) при $\tau = 1$, получим для оставшихся трех коэффициентов систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = y_{i*} - y_{i0} - \dot{y}_{i0}\Delta - \frac{1}{2}\ddot{y}_{i0}\Delta^2, \\ 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 = \dot{y}_{i*}\Delta - \dot{y}_{i0}\Delta - \ddot{y}_{i0}\Delta^2, \\ 6\alpha_3 + 12\alpha_4 + 20\alpha_5 = \ddot{y}_{i*}\Delta^2 - \ddot{y}_{i0}\Delta^2. \end{cases} \quad (18)$$

Определитель системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 20 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

так что система имеет решение, и притом единственное. Решая систему (18), получаем

$$\begin{cases} \alpha_3 = 10y_{i*} - 10y_{i0} - 6\dot{y}_{i0}\Delta - \frac{3}{2}\ddot{y}_{i0}\Delta^2 - 4\dot{y}_{i*}\Delta + \frac{1}{2}\ddot{y}_{i*}\Delta^2, \\ \alpha_4 = -15y_{i*} + 15y_{i0} + 8\dot{y}_{i0}\Delta + \frac{3}{2}\ddot{y}_{i0}\Delta^2 + 7\dot{y}_{i*}\Delta - \ddot{y}_{i*}\Delta^2, \\ \alpha_5 = 6y_{i*} - 6y_{i0} - 3\dot{y}_{i0}\Delta - \frac{1}{2}\ddot{y}_{i0}\Delta^2 - 3\dot{y}_{i*}\Delta + \frac{1}{2}\ddot{y}_{i*}\Delta^2. \end{cases} \quad (19)$$

Все коэффициенты найдены. Тем самым построены функции

$$y_i(t) = p_i\left(\frac{t-t_0}{\Delta}\right), \quad i = \overline{1, 3}. \quad (20)$$

После того, как траектория построена, т.е. определены функции (20), программные управления v_1 , v_2 , v_3 вычисляются путем решения системы (7) относительно этих управлений. В результате получаем:

$$\begin{cases} v_1 = \sin \theta + \frac{\ddot{y}_1 \sin \theta + \ddot{y}_2 \cos \theta \cos \psi - \ddot{y}_3 \cos \theta \sin \psi}{g}, \\ v_2 = \cos \theta + \frac{\ddot{y}_1 \cos \theta - \ddot{y}_2 \sin \theta \cos \psi + \ddot{y}_3 \sin \theta \sin \psi}{g}, \\ v_3 = \frac{\ddot{y}_3 \cos \psi + \ddot{y}_2 \sin \psi}{g}, \end{cases} \quad (21)$$

где $\cos \theta$, $\sin \theta$, $\cos \psi$, $\sin \psi$ вычисляются по формулам (5) с учетом (4), а y_i , \dot{y}_i , \ddot{y}_i , $i = \overline{1, 3}$, вычислены для функций (20).

По виртуальным управлениям v_1 , v_2 , v_3 вычисляем согласно формулам (2) управления n_x , n_y , γ .

5. Построение управлений в форме обратных связей

Запишем систему (7) в векторной форме $\ddot{\mathbf{y}} = A + B(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})\mathbf{v}$, где

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ L \\ Z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad A = -g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ B(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = g \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \cos \theta \cos \psi & -\sin \theta \cos \psi & \sin \psi \\ -\cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \end{cases} \quad (22)$$

и величины $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\sin \psi$, $\cos \psi$ определены через \dot{y}_1 , \dot{y}_2 , \dot{y}_3 соотношениями (4), (5).

Обозначим через $\mathbf{y}_p(t)$ и $\mathbf{v}_p(t)$ заданную траекторию движения летательного аппарата и реализующие ее программные управления. Эти вектор-функции удовлетворяют уравнению $\dot{\mathbf{y}}_p(t) = A + B(\mathbf{y}_p(t), \dot{\mathbf{y}}_p(t))\mathbf{v}_p(t)$. Управление $\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ в форме обратной связи будем искать из условия, что координаты z_i отклонения $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_p(t)$ траектории \mathbf{y} , соответствующей управлению $\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$, от программной траектории $\mathbf{y}_p(t)$ подчиняются уравнениям

$$\ddot{z}_i + k_{i1}\dot{z}_i + k_{i2}z_i = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (23)$$

в которых константы k_{i1} и k_{i2} выбраны так, что характеристические корни этих уравнений расположены в левой части комплексной плоскости, т.е. нулевое положение равновесия для каждого уравнения является асимптотически устойчивым при $t \rightarrow +\infty$. Асимптотическая устойчивость нулевого положения равновесия для уравнений (23) означает, что $\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{y}_p(t)$ и $\dot{\mathbf{y}}(t) \rightarrow \dot{\mathbf{y}}_p(t)$ при $t \rightarrow +\infty$.

Запишем дифференциальные уравнения (23) в векторной форме

$$\ddot{\mathbf{z}} + K_1\dot{\mathbf{z}} + K_2\mathbf{z} = 0, \quad (24)$$

где K_1 и K_2 — диагональные матрицы с диагональными элементами соответственно k_{i1} и k_{i2} .

Выполним в системе (24) подстановку $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_p(t)$ и учтем, что

$$\dot{\mathbf{y}}_p(t) = A + B(\mathbf{y}_p(t), \dot{\mathbf{y}}_p(t))\mathbf{v}_p(t), \quad \ddot{\mathbf{y}} = A + B(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}).$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} (A + B(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})) - (A + B(\mathbf{y}_p(t), \dot{\mathbf{y}}_p(t))\mathbf{v}_p(t)) + \\ + K_1(\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_p(t)) + K_2(\mathbf{y} - \mathbf{y}_p(t)) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = B^{-1}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})B(\mathbf{y}_p(t), \dot{\mathbf{y}}_p(t))\mathbf{v}_p(t) - \\ - B^{-1}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})(K_1(\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_p(t)) + K_2(\mathbf{y} - \mathbf{y}_p(t))). \end{aligned}$$

Согласно (22) матрица $\frac{1}{g}B(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ является ортогональной, так что

$$B^{-1}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \frac{1}{g^2}B^T(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}).$$

С учетом этого соотношения получаем искомое управление в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = & \frac{1}{g^2}B^T(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})B(\mathbf{y}_p(t), \dot{\mathbf{y}}_p(t))\mathbf{v}_p(t) - \\ & - \frac{1}{g^2}B^T(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})(K_1(\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_p(t)) + K_2(\mathbf{y} - \mathbf{y}_p(t))). \end{aligned} \quad (25)$$

Для расчета управления (25) необходимо знать вектор $(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})^T$ текущего состояния летательного аппарата, вектор $(\mathbf{y}_p, \dot{\mathbf{y}}_p)^T$ состояния на программной траектории и соответствующий этому состоянию вектор \mathbf{v}_p управлений. Поэтому построение программного управления в форме обратной связи необходимо выполнять в два этапа.

На первом, предварительном этапе по заданным начальному и конечному положению летательного аппарата рассчитываются полиномы $p_i(\tau)$, $i = \overline{1, 3}$ (см. п. 4). Построение этих полиномов, согласно соотношениям (20), равносильно заданию пространственной траектории летательного аппарата.

На втором этапе в текущий момент времени t по полиномам $p_i(\tau)$, $i = \overline{1, 3}$, находятся векторы $\mathbf{y}_p(t)$ и $\dot{\mathbf{y}}_p(t)$, определяющие с учетом (4), (5) состояние летательного аппарата, в котором он должен находиться в текущий момент времени, а также по формулам (21) вектор $\mathbf{v}_p(t)$ программных управлений. Исходя из текущего состояния летательного аппарата, определяемого величинами H, L, Z, V, θ, ψ , с учетом (3) находим векторы

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} H \\ L \\ Z \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \dot{H} \\ \dot{L} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \sin \theta \\ V \cos \theta \cos \psi \\ -V \cos \theta \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Далее по формуле (25) вычисляем управление в форме обратной связи.

6. Результаты компьютерного моделирования

Работоспособность предложенных алгоритмов построения траектории движения летательного аппарата и расчета управлений, реализующих эту траекторию, проверена путем компьютерного моделирования в среде Matlab. Рассмотрено несколько типовых маневров летательного аппарата.

6.1. Моделирование разворота летательного аппарата

Рассмотрим маневр, заключающийся в развороте летательного аппарата на 180° . Исходные данные для этого маневра представлены в табл. 1.1. Для построения траектории движения и расчета реализующих ее управлений выполняем следующие действия.

На первом, предварительном этапе по формулам (2) вычисляем граничные условия для вспомогательных управлений:

$$v_{10} = 0, \quad v_{20} = 1, \quad v_{30} = 0, \quad v_{1*} = 0, \quad v_{2*} = 1, \quad v_{3*} = 0.$$

Т а б л и ц а 1.1. Исходные данные для разворота ЛА

	V , км/ч	θ , град	ψ , град	H , м	L , м	Z , м	n_x	n_y	γ , град
$t_0=0$ с	180	0	0	1000	0	0	0	1	0
$t_*=55$ с	180	0	180	1300	600	-500	0	1	0

Затем по формулам (12)–(14) для функций $y_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$, вычисляем начальные условия (при $t = t_0 = 0$):

$$\begin{aligned} y_{10} &= 1000, & y_{20} &= 0, & y_{30} &= 0; \\ \dot{y}_{10} &= 0, & \dot{y}_{20} &= 50, & \dot{y}_{30} &= 0; \\ \ddot{y}_{10} &= 0, & \ddot{y}_{20} &= 0, & \ddot{y}_{30} &= 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом по формулам (15) вычисляем конечные условия (при $t = t_* = 55$ с):

$$\begin{aligned} y_{1*} &= 1300, & y_{2*} &= 600, & y_{3*} &= -500; \\ \dot{y}_{1*} &= 0, & \dot{y}_{2*} &= -50, & \dot{y}_{3*} &= 0; \\ \ddot{y}_{1*} &= 0, & \ddot{y}_{2*} &= 0, & \ddot{y}_{3*} &= 0. \end{aligned}$$

С учетом $\Delta = 55$ с помощью формул (17), (18) вычисляем коэффициенты трех полиномов. В результате получаем:

$$\begin{aligned} p_1(\tau) &= 1000 + 3000\tau^3 - 4500\tau^4 + 1800\tau^5, \\ p_2(\tau) &= 2750\tau - 21500\tau^3 + 32250\tau^4 - 12900\tau^5, \\ p_3(\tau) &= -5000\tau^3 + 7500\tau^4 - 3000\tau^5. \end{aligned}$$

Траектория движения летательного аппарата построена. По полиномам $p_i(\tau)$, $i = \overline{1, 3}$, в любой момент времени t можно определить положение $\mathbf{y}(t)$ центра масс летательного аппарата по формулам (20), координаты скорости центра масс по формулам

$$\dot{H}(t) = \dot{y}_1(t) = \frac{p'_1(\tau)}{\Delta}, \quad \dot{L}(t) = \dot{y}_2(t) = \frac{p'_2(\tau)}{\Delta}, \quad \dot{Z}(t) = \dot{y}_3(t) = \frac{p'_3(\tau)}{\Delta},$$

и величины V , θ , ψ по формулам (5), (6).

На втором этапе в текущий момент времени по полиномам $p_i(\tau)$, $i = \overline{1, 3}$, вычисленным для $\tau = \frac{t-t_0}{\Delta}$, находим векторы $\mathbf{y}_p(t)$ и $\dot{\mathbf{y}}_p(t)$, определяющие текущее состояние летательного аппарата, а также по формулам (21) вектор $\mathbf{v}_p(t)$ программных управлений. Исходя из текущего состояния летательного аппарата, определяемого величинами H , L , Z , V , θ , ψ , с учетом (3) по формулам (26) находим векторы \mathbf{y} и $\dot{\mathbf{y}}$, а затем по формуле (25) вычисляем управление в форме обратной связи.

Результаты моделирования полета летательного аппарата с расчетом управления в форме обратной связи представлены в табл. 1.2. Траектория движения летательного аппарата показана на рис. 2. На рис. 3 приведены графики изменения во времени переменных состояния, а на рис. 4 — графики изменения во времени управлений в тех же единицах измерения, что и в табл. 1.2. Интегрирование системы дифференциальных уравнений выполнялось методом Эйлера с шагом 0,1 с. При расчете управлений были выбраны коэффициенты стабилизации $k_{i1} = 0,01$, $k_{i2} = 0,01$, $i = \overline{1, 3}$.

Отметим, что использование программных управлений для реализации рассматриваемого маневра без замыкания системы обратными связями согласно (23) приводит к заметному расхождению программной и реализованной траекторий (рис. 5).

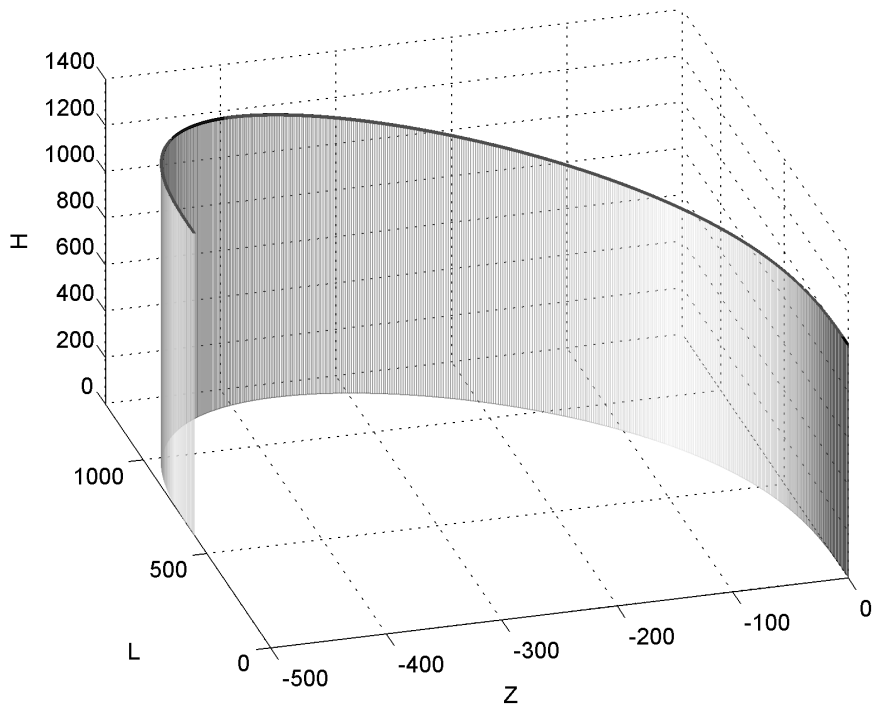


Рис. 2

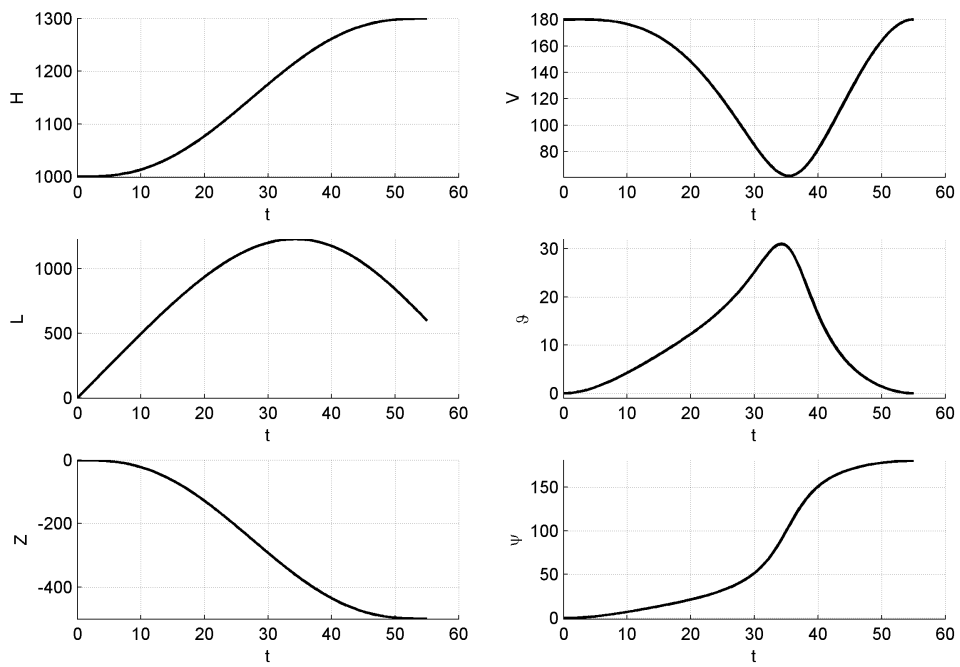


Рис. 3

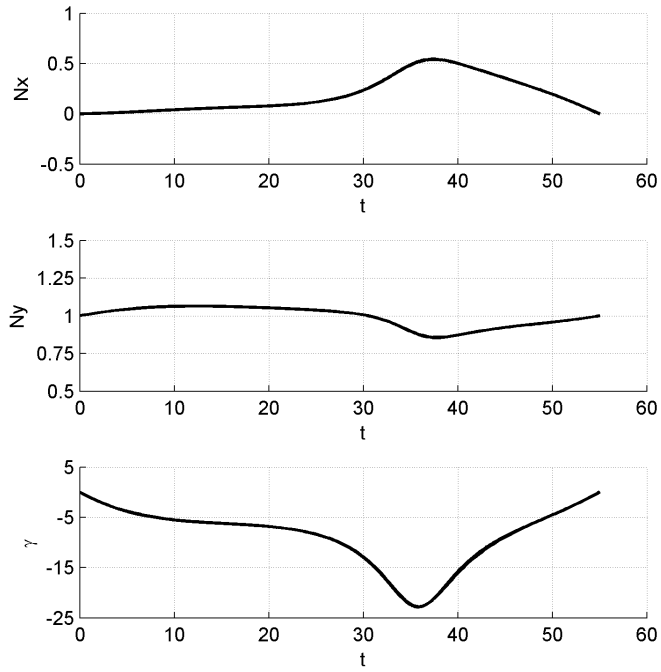


Рис. 4

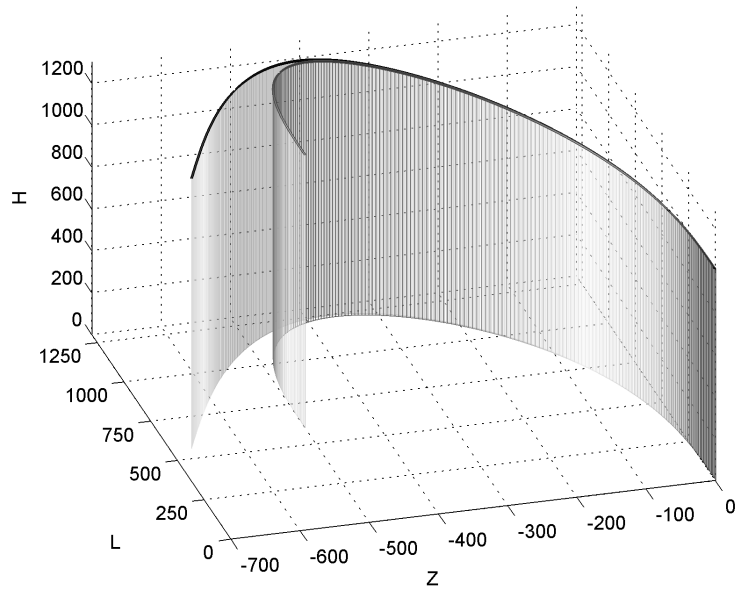


Рис. 5

Таблица 1.2. Результаты моделирования разворота ЛА

t, c	$V, км/ч$	$\theta, град$	$\psi, град$	$H, м$	$L, м$	$Z, м$	n_x	n_y	$\gamma, град$
0,0	180,00	0,0000	0,0000	1000,0	0,000	0,0000	0,0000	1,000	0,0000
0,1	180,00	0,0000	0,0000	1000,0	5,000	0,0000	0,0002	1,001	-0,1047
0,2	180,00	0,0012	0,0021	1000,0	10,000	0,0000	0,0004	1,002	-0,2081
0,3	180,00	0,0037	0,0061	1000,0	15,000	-0,0002	0,0006	1,003	-0,3101
0,4	180,00	0,0073	0,0122	1000,0	20,000	-0,0007	0,0008	1,004	-0,4107
0,5	180,01	0,0122	0,0203	1000,0	25,000	-0,0018	0,0010	1,005	-0,5100
54,8	180,13	0,0085	180,07	1300,0	609,75	-500,00	0,0056	0,998	-0,1691
54,9	180,15	0,0064	180,07	1300,0	604,75	-500,00	0,0013	0,999	-0,0619
55,0	180,16	0,0056	180,07	1300,0	599,74	-500,00	-0,0029	1,000	0,0463

6.2. Моделирование снижения летательного аппарата

Исходные данные для рассматриваемого маневра летательного аппарата представлены в табл. 1.3.

Таблица 1.3. Исходные данные для снижения ЛА

	$V, км/ч$	$\theta, град$	$\psi, град$	$H, м$	$L, м$	$Z, м$	n_x	n_y	$\gamma, град$
$t_0=0c$	90	-15	0	2000	0	0	0	1	0
$t_*=50c$	80	0	0	700	1300	200	0	1	0

На первом, предварительном этапе вычисляем значения переменных $y_1 = H$, $y_2 = L$, $y_3 = Z$, а также их первых и вторых производных в начальный момент времени $t = t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} y_{10} &= 2000, & y_{20} &= 0, & y_{30} &= 0; \\ \dot{y}_{10} &= -6,470, & \dot{y}_{20} &= 24,148, & \dot{y}_{30} &= 0; \\ \ddot{y}_{10} &= -0,334, & \ddot{y}_{20} &= 2,54, & \ddot{y}_{30} &= 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом вычисляем их значения в конечный момент времени $t = t_1 = 50 c$:

$$\begin{aligned} y_{1*} &= 700, & y_{2*} &= 1300, & y_{3*} &= 220; \\ \dot{y}_{1*} &= 0, & \dot{y}_{2*} &= 22,222, & \dot{y}_{3*} &= 0; \\ \ddot{y}_{1*} &= 0, & \ddot{y}_{2*} &= 0, & \ddot{y}_{3*} &= 0. \end{aligned}$$

Строим полиномы, описывающие траекторию полета:

$$\begin{aligned} p_1(\tau) &= 2000 - 323,5\tau - 417,4\tau^2 - 9806,6\tau^3 + 15660\tau^4 - 6412\tau^5; \\ p_2(\tau) &= 1207,4\tau + 3171\tau^2 + 688,4\tau^3 - 8107\tau^4 + 4340\tau^5; \\ p_3(\tau) &= 2000\tau^3 - 3000\tau^4 + 1200\tau^5. \end{aligned}$$

Эти полиномы определяют функции

$$y_i(t) = p_i(\tau), \quad \tau = \frac{t - t_0}{\Delta}, \quad \Delta = t_* - t_0.$$

На втором этапе вычисления выполняются так же, как и в п. 6.1.

Результаты моделирования полета летательного аппарата представлены в табл. 1.4. Траектория движения летательного аппарата показана на рис. 6.

Таблица 1.4. Результаты моделирования снижения ЛА

t, c	$V, км/ч$	$\theta, град$	$\psi, град$	$H, м$	$L, м$	$Z, м$	n_x	n_y	$\gamma, град$
0	90	-15,00	0	2000	0	0	0	1	0
0,1	90,91	-14,92	0	1999	2,42	0	-0,0012	0,994	0,0564
0,2	91,82	-14,86	-0,002	1999	4,86	0	-0,0026	0,989	0,1122
0,3	92,71	-14,81	-0,007	1998	7,32	0,00009	-0,0043	0,983	0,1675
0,4	93,60	-14,78	-0,013	1997	9,81	0,00038	-0,0062	0,978	0,2223
0,5	94,48	-14,75	-0,022	1997	12,33	0,00096	-0,0083	0,972	0,2766
0,6	95,35	-14,74	-0,032	1996	14,86	0,00192	-0,0106	0,967	0,3304
49,7	80,27	0,2001	0,0086	700,5	1293	199,9	0,0052	1,011	-0,1162
49,8	80,27	0,2272	0,0138	700,5	1296	199,9	0,0048	1,005	-0,0625
49,9	80,28	0,2406	0,0166	700,5	1298	199,9	0,0042	1,000	-0,0076
50	80,28	0,2402	0,0169	700,5	1300	199,9	0,0033	0,994	0,0487

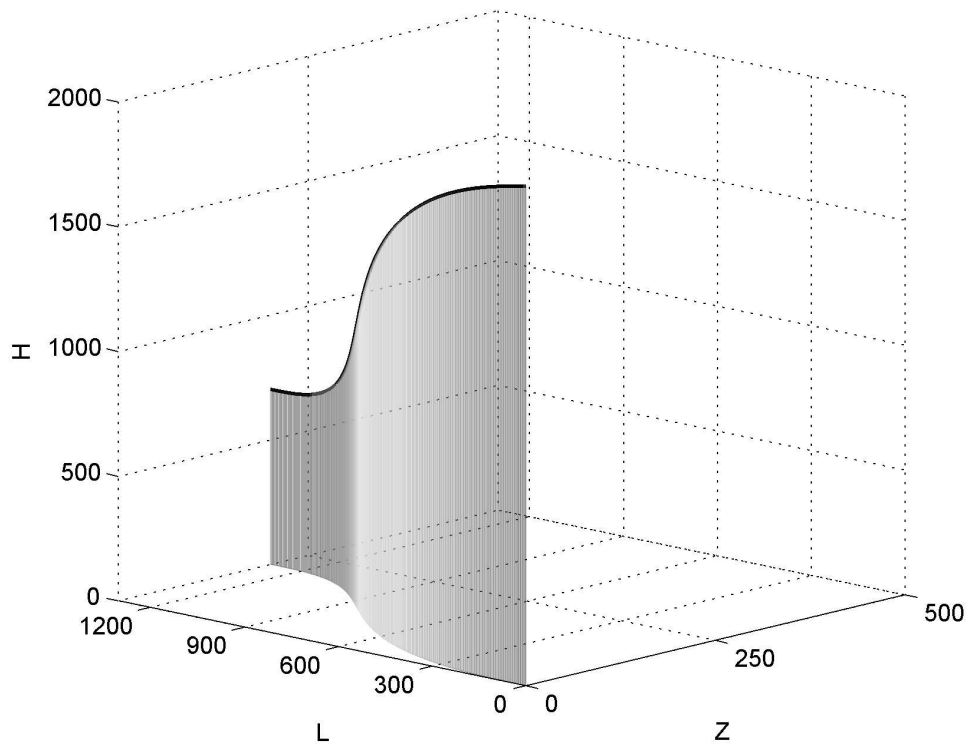


Рис. 6

На рис. 7 приведены графики изменения во времени переменных состояния, а на рис. 8 — графики изменения во времени управлений в тех же единицах измерения, что и в табл. 1.4. Интегрирование системы дифференциальных уравнений выполнялось методом Эйлера с шагом 0,1 с. При расчете управлений были выбраны коэффициенты стабилизации $k_{i1} = 0,01$, $k_{i2} = 0,01$, $i = \overline{1, 3}$.

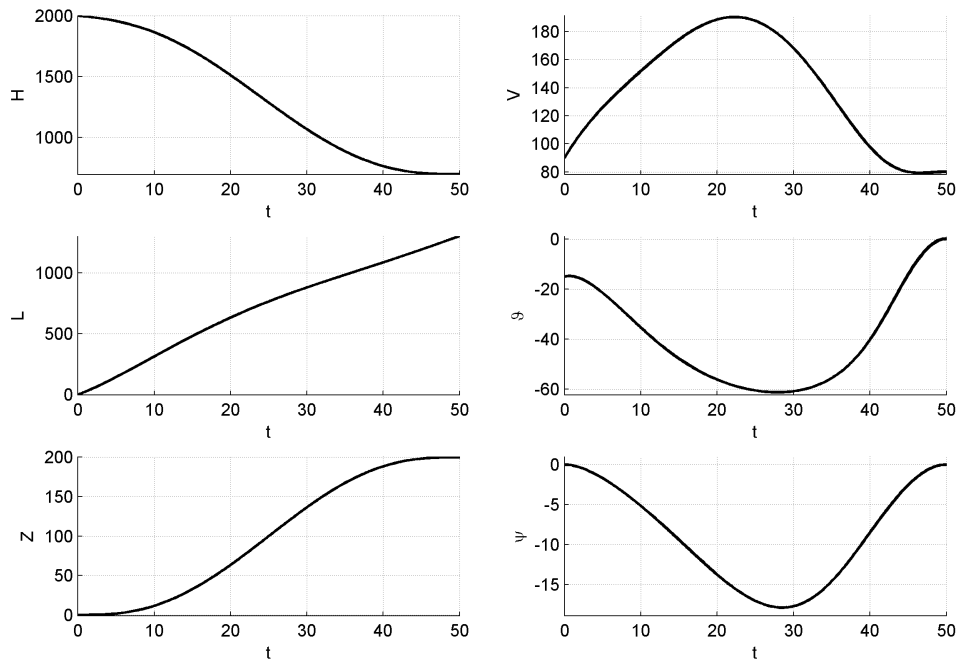


Рис. 7

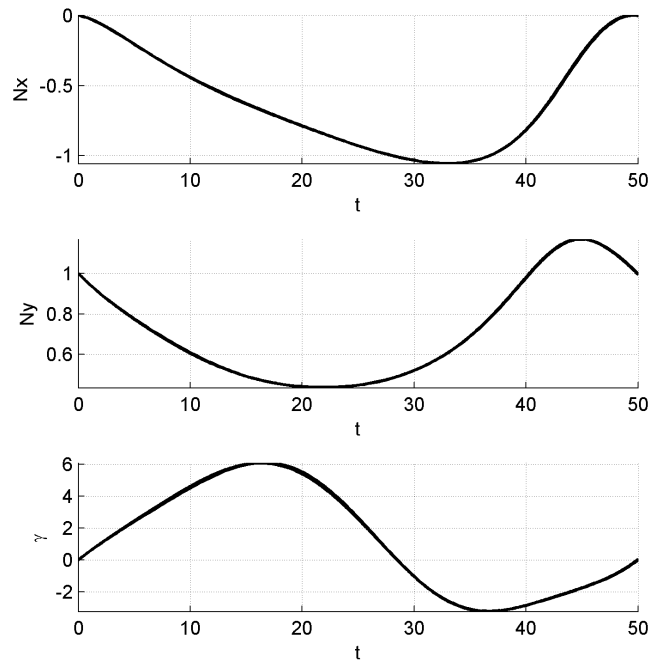


Рис. 8

Отметим, что вид траектории полета сильно зависит от времени полета $T = t_* - t_0$. На рис. 9 показана траектория полета при $T = 80$ с, а на рис. 10 — при $T = 30$ с. Разработка метода расчета интервала времени при терминальном управлении составляет предмет самостоятельной практически важной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 06-07-89265, 09-07-00327).

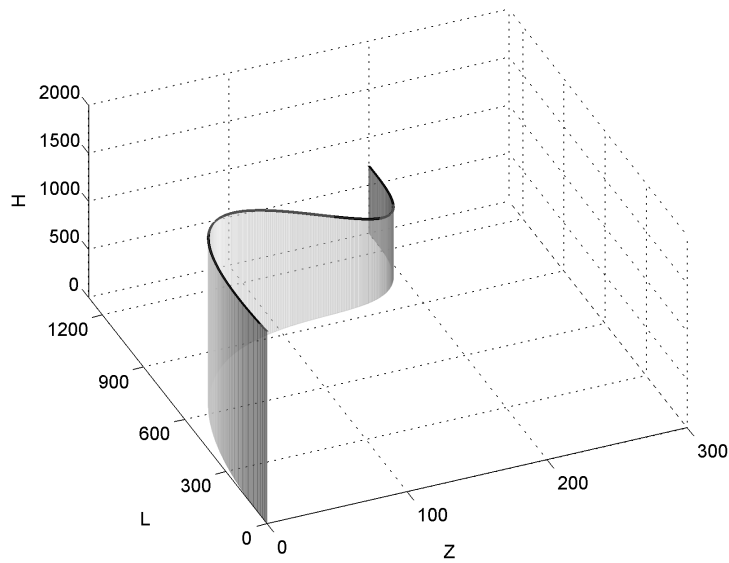


Рис. 9

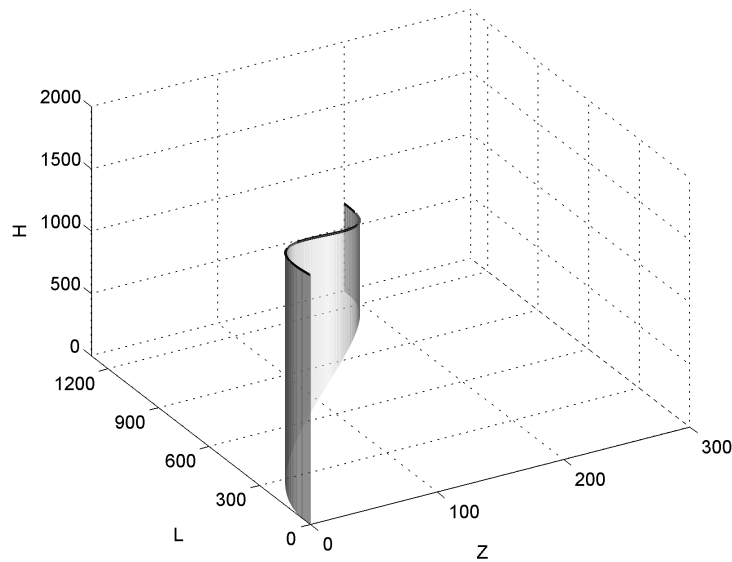


Рис. 10

Список литературы

1. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: Нелинейные модели.—М.: Наука, 1988.
2. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления.—М.: Машиностроение, 2004.
3. Thomson D.G., Bradley R. Mathematical modelling of helicopter manoeuvres //J. of the Amer. Helicopter Soc.—1997.—V. 42, № 4.—P. 307–311.
4. Avanzini G., de Matteis G. Two-timescale inverse simulation of a helicopter model //AIAA J. Guidance Contr. Dyn.—2001.—V. 24, № 2.—P. 330–339.
5. Крищенко А. П. Преобразование многомерных аффинных управляемых систем //Управляемые нелинейные системы, № 2.—М.: ВНИИСИ, 1991.—С. 5–14.
6. Koo T.J., Sastry S. Output tracking control design of a helicopter model based on approximate linearization //Proc. of the 37th IEEE conf. on Decision & Control, Tampa, Florida, USA (Dec. 1998).— Город: изд-во, год.—P. 3635–3640.

НЕКЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ГАМИЛЬТОНОВЫХ И КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Н. А. Магницкий

Предложен новый подход к анализу решений сложных консервативных и, в частности, гамильтоновых систем, заключающийся в построении аппроксимирующей расширенной двухпараметрической диссипативной системы уравнений, устойчивые решения (аттракторы) которой являются сколь угодно точными приближениями к решениям исходной консервативной системы. На основе проведенных численных расчетов для нескольких четырехмерных консервативных систем и гамильтоновых систем с двумя и тремя степенями свободы показано, что во всех этих системах переход к хаосу происходит не через разрушение двумерных или трехмерных торов невозмущенной системы, а, наоборот, через рождение сложных двумерных торов вокруг циклов расширенной диссипативной системы и через бесконечный каскад бифуркаций рождения новых циклов и сингулярных траекторий в соответствии с теорией Фейгенбаума–Шарковского–Магницкого. Тем самым заложен фундамент создания единой универсальной теории динамического хаоса в нелинейных системах всех видов дифференциальных уравнений.

1. Введение

Современная классическая теория гамильтоновых систем сводит проблему анализа динамики таких систем к проблеме их интегрируемости, т. е. к проблеме построения канонического преобразования, сводящего систему к переменным действие-угол, в которых, как принято считать, движение происходит по поверхности n -мерного тора и является периодическим или квазипериодическим. Любая неинтегрируемая нелинейная гамильтонова система рассматривается как возмущение интегрируемой системы, а анализ ее динамики сводится к выяснению вопроса о разрушении или неразрушении торов невозмущенной системы в зависимости от величины приложенного возмущения.

Постановку последней задачи принято называть, следуя А. Пуанкаре [1], основной задачей классической гамильтоновой механики, в решении которой за последние сто лет достигнуты, как принято считать, следующие существенные результаты [2–9]:

— установлено теорией Колмогорова–Арнольда–Мозера (теорией КАМ), что при некоторых условиях большинство нерезонансных торов невозмущенной системы не разрушается при достаточно малых возмущениях и продолжает существовать в возмущенной системе;

— в случае систем с двумя степенями свободы глобальная устойчивость сохраняется, так как стохастические слои вокруг разрушенных двумерных торов остаются зажатыми в узких щелях между неразрушенными инвариантными торами;

— в случае систем с тремя и более степенями свободы даже в случае малых возмущений траектории могут двигаться по всей доступной энергии

ческой поверхности, образуя сложную хаотическую структуру, называемую паутиной Арнольда;

— разрушение резонансных торов невозмущенной системы приводит к появлению так называемых островов в возмущенной системе — последовательности гиперболических особых точек (траекторий), соединенных сепаратрисами (сепаратрисными поверхностями), внутри которых расположены эллиптические особые точки (траектории);

— в соответствии с предыдущими утверждениями хаотическая динамика в возмущенной гамильтоновой системе объясняется эффектом расщепления сепаратрисы, при котором инвариантные многообразия особой гиперболической траектории возмущенной системы начинают пересекаться, образуя сложную запутанную хаотическую сеть, называемую гомоклиническим или гетероклиническим сплетением.

В настоящей работе проведен подробный численный анализ нескольких типичных возмущенных гамильтоновых систем с полутора, двумя и тремя степенями свободы, включая некоторые классические системы. Применяемый автором метод анализа решений любой гамильтоновой (и любой консервативной) системы с заданным интегралом состоит в рассмотрении аппроксимирующей ее расширенной двухпараметрической диссипативной системы уравнений, устойчивые решения (аттракторы) которой являются сколь угодно точными приближениями к решениям исходной гамильтоновой (консервативной) системы. Аттракторы (устойчивые циклы) расширенной диссипативной системы ищутся численными методами с использованием результатов универсальной теории Фейгенбаума—Шарковского—Магницкого (ФШМ-теории) [10–14], развитой изначально для нелинейных диссипативных систем дифференциальных уравнений, с обязательной окончательной проверкой существования близкого решения (цикла) в исходной гамильтоновой или консервативной системе.

Первые результаты в этом направлении получены автором в работах [15–16]. На примерах трех гамильтоновых систем с полутора степенями свободы, т. е. двумерных консервативных неавтономных системах с периодическими коэффициентами (консервативном обобщенном уравнении Матье, консервативном уравнении Дюффинга-Холмса и модифицированном консервативном уравнении Крокетта), двух гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, включая классическую систему Хенона-Хейлеса, и одной просто консервативной, но не гамильтоновой системы показано, что переход к хаосу во всех этих системах происходит не через разрушение некоторых торов невозмущенной системы, а в соответствии с универсальной ФШМ-теорией через каскады бифуркаций рождения циклов и сингулярных траекторий в расширенных нелинейных диссипативных системах при стремлении параметра диссипации к нулю.

Полученные в [15–16] результаты, а также приведенные ниже результаты настоящей статьи позволили автору утверждать, что все перечисленные выше положения классической гамильтоновой механики не выполняются для рассмотренных типичных гамильтоновых систем, что существующие в этих системах торы не являются торами невозмущенных систем при любой величине возмущения, а наблюдаемые численно эффекты имеют совершенно иное объяснение. В связи с этим появилась возможность и необходимость в формулировке положений новой неклассической концепции динамики не только гамильтоновых, но и любых консервативных систем в целом как предельного случая динамики диссипативных систем. В рамках новой концепции:

— нулевое значение величины возмущения в общем случае является бифуркационным значением, вследствие чего поставленная Пуанкаре задача становится не адекватной реальной ситуации, а применение к таким системам методов теории возмущений возможно только в некоторых исключитель-

ных случаях;

— так называемая гамильтонова система с полутора степенями свободы — это на самом деле четырехмерная консервативная (не гамильтонова) возмущенная автономная система, все основные двумерные торы которой являются либо торами вокруг нескольких основных циклов системы, не являющихся циклами невозмущенной системы, либо торами вокруг циклов невозмущенной системы, либо переходными торами;

— все основные двумерные торы возмущенной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы являются в общем случае торами вокруг нескольких основных эллиптических циклов системы, не являющихся циклами невозмущенной системы, либо переходными торами;

— все основные двумерные и трехмерные торы гамильтоновой системы с тремя степенями свободы также являются в общем случае торами вокруг нескольких основных эллиптических циклов системы либо переходными торами;

— все перечисленные выше двумерные и трехмерные торы вокруг основных эллиптических циклов возмущенных гамильтоновых и консервативных систем образованы областями устойчивости близких циклов соответствующих расширенных диссипативных систем при стремлении параметра диссипации к нулю и, следовательно, имеют совершенно иную природу, чем торы невозмущенных систем классической гамильтоновой механики, являющиеся по определению декартовыми произведениями нескольких циклов, а не торами вокруг циклов;

— усложнение динамики при росте величины возмущения начинает происходить в окрестностях касания различных систем торов по сепаратрисным поверхностям гиперболических траекторий (циклов), при этом происходит рождение более сложных торов вокруг более сложных эллиптических циклов системы, близких к устойчивым циклам соответствующих расширенных диссипативных систем при стремлении параметра диссипации к нулю;

— этот же эффект размножения циклов и торов лежит в основе усложнения динамики возмущенной гамильтоновой системы с полутора степенями свободы (консервативной четырехмерной автономной системы) в окрестности сепаратрисы гиперболической особой точки невозмущенной системы, что не имеет ничего общего с механизмом расщепления сепаратрисы в классической гамильтоновой механике;

— этот же механизм усложнения динамики возмущенной гамильтоновой системы с двумя и более степенями свободы имеет место и в окрестности сепаратрисной поверхности ее гиперболической особой траектории, что опять же не имеет ничего общего с механизмом расщепления сепаратрисной поверхности в классической гамильтоновой механике;

— усложнение динамики в возмущенных гамильтоновых системах с двумя степенями свободы приводит к глобальной неустойчивости решений даже при малых значениях параметра возмущения, а в системах с тремя степенями свободы может наблюдаться как глобальная, так и локальная неустойчивость траекторий даже при достаточно больших значениях параметра возмущения;

— области устойчивости сложных циклов диссипативной расширенной системы не обязаны порождать исключительно торы возмущенной гамильтоновой системы вокруг ее сложных циклов, поэтому движение в возмущенной гамильтоновой системе, например, с двумя степенями свободы может происходить не только по обмоткам двумерных торов, но также и по лентам Мёбиуса и другим более сложным двумерным многолистным поверхностям;

— при достаточно больших значениях параметра возмущения переход к хаосу во всех рассмотренных гамильтоновых и консервативных системах происходит не через разрушение некоторых торов невозмущенной системы,

а в соответствии с универсальной ФШМ-теорией через каскады бифуркаций рождения циклов и сингулярных траекторий в расширенных нелинейных диссипативных системах при стремлении параметра диссипации к нулю.

Таким образом, предлагаемая новая неклассическая концепция развития динамического хаоса в гамильтоновых и консервативных системах, опирающаяся на приведенный ниже большой фактический материал, объединяет единым бифуркационным подходом все виды нелинейных систем дифференциальных уравнений, включая автономные и неавтономные, сосредоточенные и распределенные, диссипативные и консервативные системы при любых значениях величины возмущения последних.

2. Неклассический подход к анализу гамильтоновых систем

Рассмотрим в общем случае нелинейную консервативную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкой правой частью

$$\dot{x} = f(x), x \in R^n, \quad \operatorname{div} f(x) = 0, \quad (1)$$

переменные которой связаны некоторым уравнением

$$H(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon. \quad (2)$$

Любая гамильтонова система является частным случаем системы (1)–(2) при четном значении величины размерности n и при заданном интеграле движения (2), порождающем систему уравнений (1).

Движение в системе (1) происходит в $(n-1)$ -мерном подпространстве, задаваемом уравнением (2). Наша задача состоит в построении аппроксимирующей расширенной двухпараметрической диссипативной системы уравнений, устойчивые решения (аттракторы) которой являются сколь угодно точными приближениями к решениям исходной консервативной системы (1)–(2).

Теорема 1. Пусть двухпараметрическая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = g(x, \varepsilon, \mu), \quad x \in R^n, \quad (3)$$

обладает следующими свойствами:

- 1) *решения системы (1)–(2) и только они являются решениями системы (3) с начальными условиями $H(x_{10}, \dots, x_{n0}) = \varepsilon$ при $\mu = 0$;*
- 2) *при всех $\mu > 0$ система (3) является диссипативной на своих решениях, лежащих в окрестностях решений системы (1)–(2). Тогда аттракторы диссипативной системы (3) при малых $\mu > 0$ являются сколь угодно точными аппроксимациями решений консервативной системы (1)–(2).*

Доказательство. Пусть C — цикл консервативной системы (1)–(2) и C_μ — устойчивый цикл (аттрактор) диссипативной системы (3). Возьмем $x_0 \in C$ и решение $x_0(t)$ системы (1)–(2) с начальным условием $x_0(0) = x_0$. Траектория $x_0(t)$ совпадает с циклом C . Рассмотрим теперь решение $x_\mu(t)$ диссипативной системы (3) с начальным условием $x_\mu(0) = x_0$. Так как при малых μ точка x_0 лежит в области диссипативности системы (3), то решение $x_\mu(t)$ системы (3) с начальным условием $x_\mu(0) = x_0$ стремится к аттрактору (устойчивому циклу) C_μ системы (3). При малых $\mu > 0$ решения $x_0(t)$ и $x_\mu(t)$ близки на интервалах времени, превышающих величины периодов циклов C и C_μ по теореме о непрерывной зависимости решений от параметров в правой части. На больших интервалах времени вплоть до бесконечности они остаются близкими, так как решение $x_\mu(t)$ остается в области устойчивости

цикла C_μ диссипативной системы (3). Но так как траекторией решения $x_0(t)$ системы (1) является цикл C , а предельной траекторией к решению $x_\mu(t)$ системы (3) является цикл C_μ , то при достаточно малых $\mu > 0$ устойчивый цикл C_μ диссипативной системы (3) является сколь угодно точной аппроксимацией искомого цикла C консервативной системы (1)–(2). Аналогично доказывается, что устойчивые торы и сингулярные аттракторы диссипативной системы (3) при малых $\mu > 0$ являются сколь угодно точными аппроксимациями соответствующих торов и сингулярных хаотических траекторий консервативной системы (1)–(2). В соответствии с результатами ФШМ-теории других аттракторов диссипативная система не имеет. Теорема доказана.

В соответствии с сформулированной теоремой при малых $\mu > 0$ решения системы (3) с начальными условиями $H(x_{10}, \dots, x_{n0}) = \varepsilon$ являются сколь угодно близкими к решениям консервативной системы (1)–(2). Но так как система (3) является диссипативной на этих решениях, то либо сами эти решения (в случае их устойчивости), либо порождающие их каскады бифуркаций устойчивых решений в соответствии с ФШМ-сценарием могут быть определены сколь угодно точно посредством прямого численного решения системы (3) при фиксированном ε и при малых $\mu > 0$. Если при этом некоторое решение (например, цикл) системы (3) остается устойчивым при всех $\mu > 0$, то его область устойчивости порождает семейство решений (как правило, семейство торов вокруг этого цикла) при $\mu = 0$, что дает возможность найти любой тор в исходной консервативной системе (1)–(2). Каскады бифуркаций устойчивых циклов, порождающие многолистные сепаратрисные поверхности, на которых лежат сингулярные аттракторы диссипативной системы (3), дают возможность представить сложное хаотическое множество консервативной системы (1)–(2), в которое переходит многолистная сепаратрисная поверхность диссипативной системы (3) при $\mu = 0$.

Итак, для применения предлагаемого подхода к анализу консервативных и, в частности, гамильтоновых систем надо сначала построить расширенную систему, удовлетворяющую свойствам 1 и 2. Затем для каждого $\varepsilon > 0$ найти численно все устойчивые решения и каскады их бифуркаций в соответствии с ФШМ-сценарием в диссипативной системе (3) при стремлении μ к нулю, стартуя с различных начальных условий, удовлетворяющих равенству (2). Области устойчивости найденных простых регулярных решений (простых циклов) сформируют при $\mu = 0$ все регулярные решения (торы) исходной консервативной системы (1)–(2), а области устойчивости сложных циклов и сингулярных аттракторов — хаотические решения.

3. Консервативное обобщенное уравнение Матье

Здесь мы продемонстрируем применение изложенного выше подхода к анализу консервативного обобщенного уравнения Матье

$$\ddot{x} = -(\delta + \gamma \cos t)x - x^3, \quad (4)$$

которое эквивалентно не гамильтоновой системе с двумя степенями свободы, как принято считать в современной литературе, а автономной консервативной четырехмерной системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(\delta + z)x - x^3, \quad \dot{z} = r, \quad \dot{r} = -z \quad (5)$$

с интегралом движения

$$H(z, r) = (z^2 + r^2)/2 = \varepsilon, \quad \varepsilon = (\gamma)^2/2 \quad (6)$$

и начальными условиями $z_0 = \gamma = (2\varepsilon)^{1/2}$, $r_0 = 0$. Расширенная диссипативная двухпараметрическая система в данном случае может иметь вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(\delta + z)x - x^3 - \mu y, \quad \dot{z} = r, \quad \dot{r} = -z. \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что система (7) удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы, так как дивергенция ее правой части на решениях системы (5) равна $-\mu$ и, следовательно, отрицательна при всех $\mu > 0$.

Проанализируем численно влияние величин параметров ε и μ на динамику системы (7) при фиксированном значении параметра $\delta = 1$. При этом, естественно, полученные результаты полностью совпадают с результатами

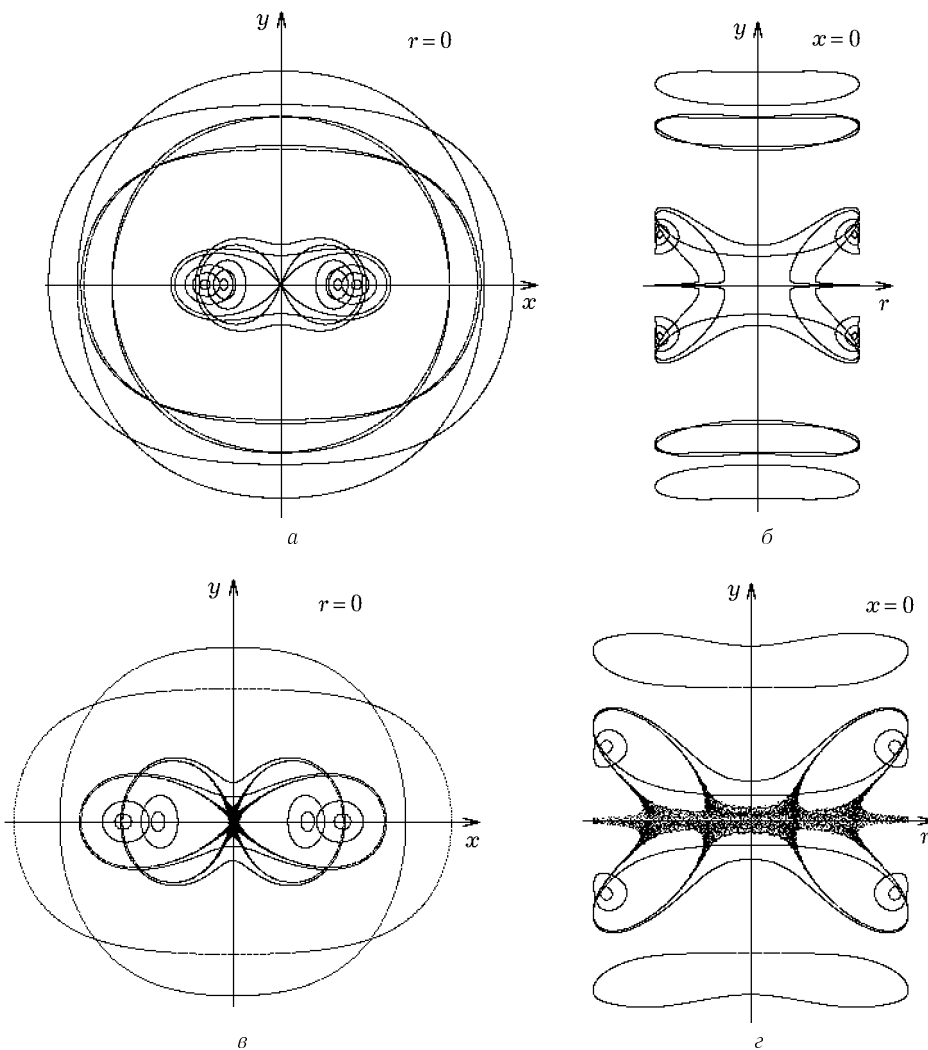


Рис. 1. Проекция сечений Пуанкаре системы (5) при $y_0 = r_0 = 0$ и: $\varepsilon = 0,125$, $x_0 = 1, 0,82945, 0,42, \pm 0,4028, \pm 0,36, \pm 0,33, \pm 0,3$ (а, б); $\varepsilon = 0,3$, $x_0 = 0,85, 0,55, 0,5419, \pm 0,45, \pm 0,4$ (в, г)

работ [14, 15], представленными в проекции сечения $r = 0$ на плоскость (x, y) . При малых $\varepsilon > 0$ хаотическая динамика в консервативной системе (5) отсутствует, а топология системы определяется основными торами вокруг основных циклов системы, в число которых входят циклы невозмущенной системы и циклы C_1 и C_2 , родившиеся изначально в диссипативной системе (7), и переходными торами T , осуществляющими переход от торов вокруг циклов невозмущенной системы к парам торов вокруг циклов C_1 и C_2 (рис. 1 а, б для $\varepsilon = 0, 125$).

Заметим, что из проекции сечения $x = 0$ на плоскость (r, y) (рис. 1 б) наглядно видно, что в возмущенной системе могут сохраняться не торы невозмущенной системы, которые в данном случае вообще отсутствуют, а только некоторые торы вокруг циклов невозмущенной системы достаточно большого радиуса. Остальные торы, существующие в системе (5) при $\varepsilon > 0$, не имеют никакого отношения к решениям невозмущенной системы при $\varepsilon = 0$, какими бы ни были эти решения, так как они изображались бы горизонтальными отрезками $y = \text{const}$.

Ниже мы покажем, что этот общий принцип справедлив и для гамильтоновых систем, и, следовательно, усложнение динамики в этих системах не может объясняться и определяться разрушением торов невозмущенной системы, даже если они и существуют. Здесь уместно говорить только о сохранении при некоторых условиях некоторых торов вокруг некоторых циклов невозмущенной системы. Такая ситуация может возникнуть в рассматриваемой системе при $\delta \neq 1$, но этот вопрос требует дополнительного детального исследования.

При значении $\varepsilon = 0,3$ ситуация заметно усложняется. Теперь топология системы (5) определяется основными торами системы (т.е. торами вокруг циклов невозмущенной системы и парами торов вокруг циклов C_1 и C_2), переходными торами и набором торов вокруг сложных эллиптических циклов, касающихся друг друга по гиперболическим циклам. Эти циклы рождаются парами (устойчивый и неустойчивый) в диссипативной системе (7) в результате седло-узловой бифуркации при уменьшении значений параметра μ до нуля. Хаотическая динамика в системе пока отсутствует, хотя движение по торам вокруг сложных циклов легко может быть принято за хаотическое, если, например, наблюдать его в сечении Пуанкаре (рис. 1 в, г). Псевдохаос, возникший в окрестности сепаратрисы и объясняемый в классической гамильтоновой механике ее расщеплением, не является гомоклиническим хаосом, а всего лишь следствием ошибок вычислений из-за неустойчивости решаемой задачи в окрестности цикла $x = y = 0$.

Эффект расщепления сепаратрисы создают точки, лежащие в сечении Пуанкаре на поверхностях торов, обмотки которых расположены, переплетаясь, вокруг различных сложных циклов, образовавшихся парами в диссипативной системе (7) при $\mu > 0$. Некоторые из таких сложных циклов, обнаруженные предложенным методом, представлены в работах [14, 15] и на рис. 2 а, б, в. На рис. 2 г представлены проекции основных циклов C_1 и C_2 на плоскость (x, y) . Наблюдаемый в системе (5) при $\varepsilon = 0,3$ эффект размножения циклов и торов в окрестности сепаратрисы гиперболической траектории подробно описан автором в работе [17].

При значении $\varepsilon = 0,5$ ситуация становится еще более сложной и не до конца понятной. Как и в предыдущем случае, топология системы (5) определяется торами вокруг циклов невозмущенной системы, парами торов вокруг циклов C_1 и C_2 , переходными торами и набором торов вокруг циклов, родившихся изначально устойчивыми в диссипативной системе (7) при уменьшении значений параметра μ до нуля. Два из этих циклов и некоторые (возможно, не все) из окружающих их торов, обнаруженные предложенным в работе методом, показаны на рис. 3.

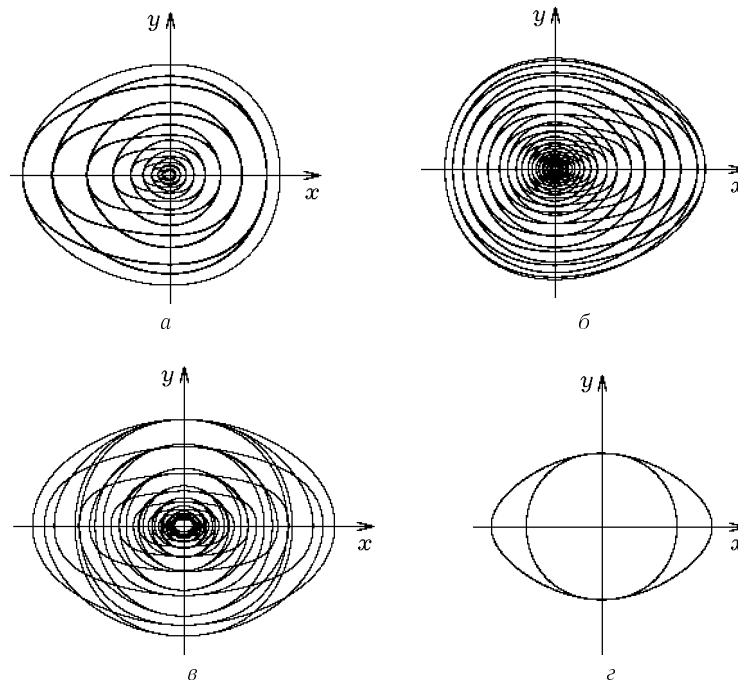


Рис. 2. Проекция на плоскость (x, y) циклов системы (5) при $\varepsilon = 0,3$, $y_0 = r_0 = 0$ и $x_0 = 0,54137$ (а), $x_0 = -0,01374$ (б), $x_0 = \pm 0,368$ (г), а также $x_0 = 0$, $y_0 = 0,0577$ (в)

Вместе с тем фазовое пространство системы (5) содержит на первый взгляд значительную область хаотического поведения. Однако, есть все основания полагать, что хаос, изображенный на рис. 3 а, б, является псевдохаосом, так как он не порожден каскадами бифуркаций устойчивых циклов диссипативной системы, а является скорее всего следствием ошибок вычислений траектории на поверхностях сложных многооборотных переплетающихся торов вокруг сложных эллиптических циклов типа изображенных на рис. 2 а, б, в и рис. 3 в, г и порожденных эффектом размножения циклов и торов. Хаос, изображенный на рис. 3 а, б, может быть также порожден областями устойчивости сложных циклов диссипативной системы (7), не переходящих в торы вокруг этих циклов при $\mu = 0$ (простейший случай — листы Мёбиуса и лежащие на них циклы удвоенного периода из каскада Фейгенбаума). Этот вопрос требует дополнительного исследования и связан с детальным изучением топологии областей устойчивости сингулярных аттракторов диссипативных систем.

Заметим, что под хаосом (истинным хаосом) в соответствии с универсальной ФШМ-теорией мы понимаем состояние системы, при котором она имеет сингулярные аттракторы, т.е. непериодические траектории, предельные к какому-либо бесконечному каскаду бифуркаций удвоения периода устойчивых предельных циклов. Наличие в системе сложных циклов с большими, но конечными периодами, мы характеризуем как ложный хаос или псевдохаос, несмотря на то, что различить эти виды хаоса численно практически невозможно.

Вопрос о том, какие именно сложные эллиптические циклы и двумерные торы вокруг (острова в сечениях Пуанкаре) и в какой последовательности

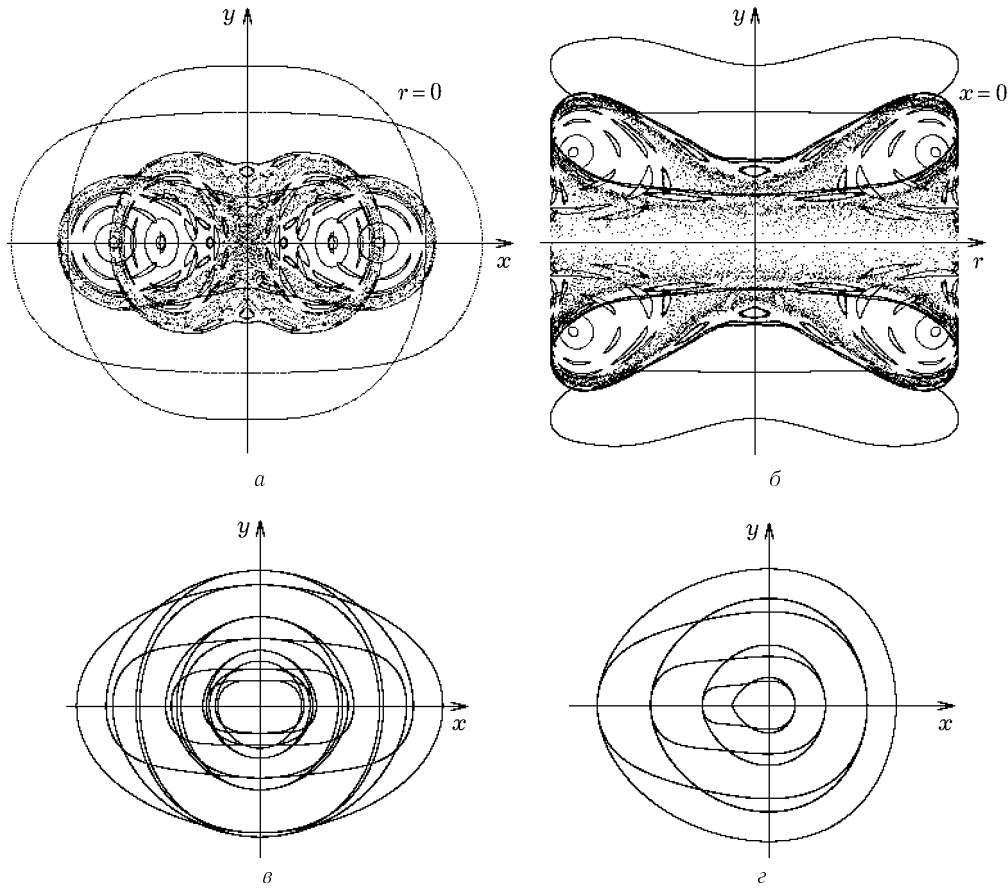


Рис.3. Проекция сечений Пуанкаре системы (5) при $\varepsilon = 0,5$, $y_0 = r_0 = 0$ и: $x_0 = 0,88, 0,67, \pm 0,6274, \pm 0,6145, \pm 0,569, \pm 0,5, \pm 0,445$ (а, б); проекции на плоскость (x, y) циклов системы (5) при $\varepsilon = 0,5$, $r_0 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0,465$ (в) и $y_0 = 0$, $x_0 = 0,6251$ (г)

порождаются эффектом размножения циклов и торов, также остается пока открытым и требует дополнительного исследования.

При значении $\varepsilon = 8$ консервативная система (5) несомненно обладает хаотической динамикой, так как при уменьшении значений параметра μ в диссипативной системе (7) циклы C_1 и C_2 претерпевают субгармонический и гомоклинический каскады бифуркаций в полном соответствии с ФШМ-теорией, рождая бесконечное число регулярных и сингулярных аттракторов в замыкании своих сепаратрисных поверхностей. Затем происходит слияние двух лент (сепаратрисных поверхностей) сингулярных аттракторов, и при $\mu \approx 0,65$ рождается симметричный устойчивый цикл, с которым также происходит весь субгармонический каскад бифуркаций. Затем происходит несколько каскадов самоорганизации устойчивых циклов, когда более сложный цикл сначала удваивается, потом с каждым из рожденных циклов происходит свой субгармонический каскад бифуркаций, затем слияние двух лент образовавшихся сингулярных аттракторов и рождение одного симметричного более простого устойчивого цикла. Все циклы всех каскадов, становясь неустойчивыми, не исчезают, а переходят в решения консервативной сис-

темы (5) при $\mu = 0$.

Этот процесс продолжается до рождения двух симметричных простых устойчивых циклов E_1 и E_2 при $\mu \approx 0,05$. Циклы E_1 и E_2 остаются устойчивыми в системе (7) при всех $\mu > 0$, а их области устойчивости становятся торами консервативной системы (5) при $\mu = 0$ (рис. 4 а, б, в). При $\mu \approx 0,025$ в диссипативной системе рождаются дополнительно устойчивые циклы D_1 и D_2 , которые сосуществуют вместе с устойчивыми циклами E_1 и E_2 , но, в отличие от них, не порождают торов консервативной системы, а претерпевают субгармонические каскады бифуркаций, создавая свое бесконечное множество неустойчивых циклов и сингулярных аттракторов. Интересно отметить, что бифуркация удвоения периода основных циклов C_1 и C_2 с образованием устойчивых циклов E_1 и E_2 (рис. 4 б, в) происходит значительно раньше при $\varepsilon = 1,41$, $\mu \approx 0,001$. Это говорит о том, что острова в консервативных системах могут появляться в результате обычных бифуркаций и, в частности, в результате бифуркации удвоения периода.

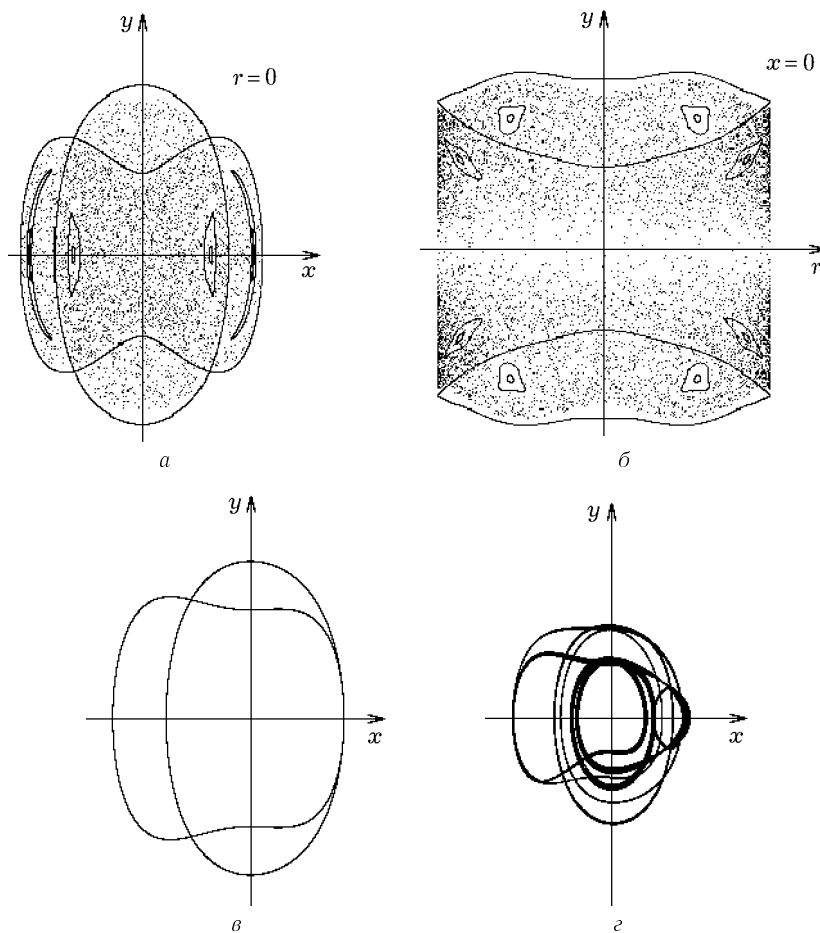


Рис. 4. Проекция сечений Пуанкаре системы (5) при $\varepsilon = 8$, $y_0 = r_0 = 0$, $x_0 = 2,1, \pm 1,77, \pm 1,69, 1,45$ (а, б); проекция цикла E_1 системы (5) при $x_0 = -1,65$ (в); аттрактор Фейгенбаума на одном из циклов, порождающих хаос в системе (5) при $\mu = 0,073$ (г)

Таким образом, топология консервативной системы (5) при $\varepsilon = 8$ определяется торами вокруг циклов невозмущенной системы, торами вокруг циклов, родившихся и оставшихся устойчивыми в диссипативной системе (7) при всех значениях параметра $\mu > 0$, и областью хаотического движения, содержащей все циклы и непериодические траектории, родившиеся изначально устойчивыми в диссипативной системе (7) при $\mu > 0$ и потерявшие устойчивость в результате какого-либо субгармонического или гомоклинического каскада бифуркаций в соответствии с ФШМ-теорией. Устойчивые циклы C_1 и D_2 утроенного периода из субгармонического каскада Шарковского, порождающие хаотическую динамику как в диссипативной системе (7), так и в консервативной системе (5) представлены в работах [14, 15].

4. Консервативное уравнение Дюффинга–Холмса

Запишем консервативное уравнение Дюффинга–Холмса в виде неавтономной двумерной консервативной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \delta x - x^3 + \varepsilon \cos \omega t. \quad (8)$$

Невозмущенная система (8) имеет в плоскости (x, y) две гомоклинические петли сепаратрис седловой особой точки $(0, 0)$. Поэтому, как принято считать, следуя А. Пуанкаре, наличие в системе (8) возмущения $\varepsilon > 0$ должно сопровождаться эффектом расщепления сепаратрисы гиперболического периодического решения возмущенной системы с образованием пересекающихся сепаратрисными поверхностями сложной запутанной гомоклинической структуры [1–2, 4–6, 9]. Покажем, что ничего подобного в системе (8) не происходит ни при малых, ни при больших величинах возмущения $\varepsilon > 0$, а иллюзия хаотического движения создается, как и в системе (5), эффектом размножения циклов и торов.

Нетрудно видеть, что, как и рассмотренная выше консервативная обобщенная система Матье, система (8) эквивалентна четырехмерной консервативной (не гамильтоновой) автономной системе уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \delta x - x^3 + \varepsilon z, \quad \dot{z} = \omega r, \quad \dot{r} = -\omega z \quad (9)$$

с условиями $H = z^2 + r^2 = 1, z_0 = z(0) = 1$.

Если следовать доказательству теоремы о расщеплении сепаратрисы, то при малых $\varepsilon > 0$ в окрестности гиперболического $2\pi/\omega$ -периодического решения $x = y = 0$ невозмущенной системы (9) существует $2\pi/\omega$ -периодическое гиперболическое решение возмущенной системы, сепаратрисные поверхности которого и образуют гомоклиническую структуру. Но чем ближе к началу координат в плоскости (x, y) находится начальная точка периодического решения системы (9), тем медленнее происходит движение вдоль траектории. Поэтому начальная точка $2\pi/\omega$ -периодического решения должна находиться достаточно далеко от сепаратрисного контура невозмущенной системы и близко к точке $2\pi/\omega$ -периодического эллиптического цикла невозмущенной системы. В окрестности же сепаратрисного контура невозмущенной системы в проекции на плоскость (x, y) могут лежать только $2\pi k/\omega$ -периодические решения возмущенной системы при $k > 1$. Поэтому существующее в возмущенной системе $2\pi/\omega$ -периодическое решение не обязано быть гиперболическим, а его сепаратрисные поверхности не должны оказывать какое-либо влияние на динамику возмущенной системы в окрестности сепаратрисного контура невозмущенной системы. Эта динамика должна определяться движением по сложным торах вокруг сложных $2\pi k/\omega$ -периодических эллиптических циклов

возмущенной системы при $k > 1$. Касание этих торов происходит по гиперболическим $2\pi k/\omega$ -циклам. Кроме того, так как в окрестностях гиперболических циклов движение траектории замедляется, то это ведет к образованию в этих окрестностях новых еще более сложных эллиптических и гиперболических циклов и соответствующих им торов возмущенной системы. Следовательно, рост области хаотического движения в возмущенной системе (9) при росте значений параметра ε объясняется не эффектом расщепления сепаратрисы, а нелокальным эффектом размножения гиперболических и эллиптических циклов, а также торов вокруг эллиптических циклов. Более простые циклы рождаются достаточно далеко от сепаратрисных поверхностей гиперболических периодических решений, а более сложные — вблизи этих поверхностей (подробнее см. в [17]).

Чтобы понять, что на самом деле происходит в системе (9) при различных значениях величины приложенного возмущения, рассмотрим наряду с ней расширенную диссипативную систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \delta x - x^3 + \varepsilon z - \mu y, \quad \dot{z} = \omega r, \quad \dot{r} = -\omega z \quad (10)$$

и проанализируем численно переход от решений диссипативной системы (10) к решениям консервативной системы (9) при фиксированных значениях параметров ε , $\delta = \omega = 1$ и при стремлении параметра μ к нулю.

При малых $\varepsilon > 0$ хаотическая динамика в консервативной системе (9) отсутствует, а топология системы определяется основными торами вокруг основных циклов системы, в число которых входят внутренние циклы невозмущенной системы вокруг ее особых точек $O^\pm = (\pm 1, 0)$, внешние циклы вокруг сепаратрисного контура и циклы C^\pm возмущенной системы (9) вокруг ее особых точек O^\pm , а также более сложными торами вокруг более сложных эллиптических циклов в окрестности сепаратрисного контура, родившихся изначально устойчивыми в диссипативной системе (10) (рис. 5 для $\varepsilon = 0,00001$).

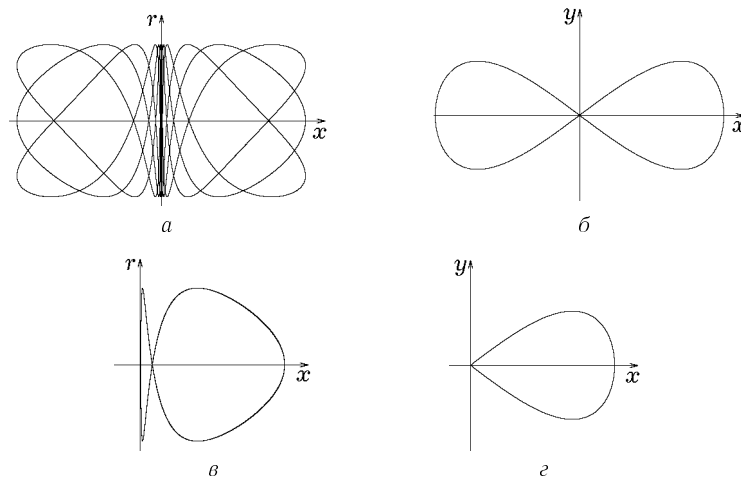


Рис. 5. Проекция сложных эллиптических циклов системы (9) в окрестности сепаратрисного контура невозмущенной системы при $\varepsilon = 0,00001$: одного из внешних циклов при $y_0 = 0$, $z_0 = 1$, $x_0 = 1,41423264$ (а, б) и одного из внутренних циклов при $y_0 = 0$, $z_0 = -1$, $x_0 = 0,01058$ (в, г)

При значении параметра возмущения $\varepsilon = 0,01$ ситуация заметно усложняется. Теперь топология системы (9) определяется основными торами сис-

темы (т.е. торами вокруг циклов невозмущенной системы и парами торов вокруг циклов C^\pm), переходными торами и набором торов вокруг сложных эллиптических циклов, родившихся изначально устойчивыми в диссипативной системе (10) при уменьшении значений параметра μ до нуля. Движение траектории по поверхностям таких сложных многооборотных торов, расположенных в окрестности сепаратрисы невозмущенной системы в проекции на плоскость (x, y) , создает, как и в случае консервативной обобщенной системы уравнений Матье, иллюзию хаотического движения, хорошо наблюдаемого в различных сечениях Пуанкаре (рис. 6а, б). Так как в окрестности сепаратрисы невозмущенной системы расположены, переплетаясь и, по всей видимости, касаясь друг друга, различные системы многооборотных сложных торов (внутренние по отношению к сепаратрисному контуру, внешние и смешанные), то глобальная устойчивость решений системы (9) сохраняться не может. Некоторые сложные эллиптические циклы консервативной системы (9), порождающие сложные торы и обнаруженные предложенным методом, представлены на рис. 6в, г.

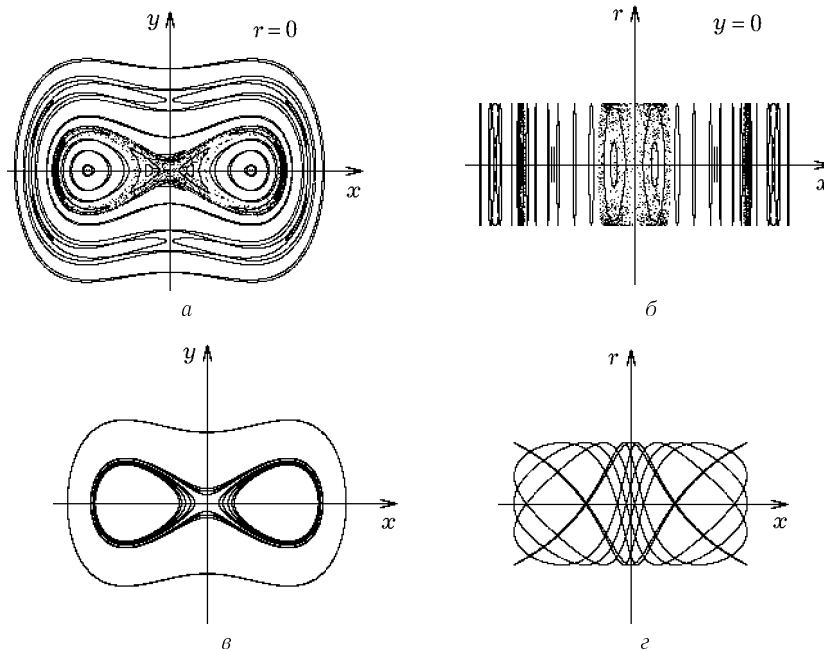


Рис. 6. Проекция сечений Пуанкаре системы (9) при $\varepsilon = 0,01$, $y_0 = r_0 = 0$ и $x_0 = 1,9$, $1,795$, $1,77$, $1,73$, $1,5$, $1,432$, $\pm 1,382$ ($z_0 = \mp 1$), $\pm 1,363$ ($z_0 = \mp 1$), $\pm 1,3$ ($z_0 = \mp 1$), $\pm 1,2$, $\pm 1,05$, $\pm 0,992$ (торы вокруг циклов C^\pm)(а, б); проекции циклов системы (9) на плоскость (x, y) при $\varepsilon = 0,01$, $y_0 = r_0 = 0$ и $x_0 = 1,71$ (внешний цикл), $x_0 = 1,42805$ (сложный внешний цикл), $x_0 = \pm 1,371$ ($z_0 = \mp 1$)(два внутренних цикла)(в); проекция внешнего сложного цикла на плоскость (x, r) (г)

При значении параметра возмущения $\varepsilon = 1$ система (9) уже обладает хаотической динамикой в смысле теории ФШМ. В этом нетрудно убедиться, устремив параметр μ в диссипативной расширенной системе (10) к нулю. При $\mu \approx 1,39$, происходит бифуркация удвоения периода каждого из сингулярных предельных циклов C^\pm , что дает начало каскаду Фейгенбаума бифуркаций удвоения периода. Данный каскад бифуркаций завершается рождением двух сингулярных аттракторов Фейгенбаума, вид которых по-

казан в работе [15]. При дальнейшем уменьшении значений параметра μ начинается каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов с периодами согласно порядку Шарковского. При $\mu \approx 1,23$ происходит объединение двух лент аттракторов и образуются новые устойчивые циклы гомоклинического каскада аналогично тому, как это происходит в знаменитой системе Лоренца [10]. Так при $\mu = 0,98$ наблюдается симметричный цикл C_{11} , который порождает бифуркацией типа вилки два несимметричных цикла C_{11}^{\pm} , каждый из которых начинает свой каскад бифуркацией удвоения периода, заканчивающийся образованием своего сингулярного хаотического аттрактора Фейгенбаума. Затем опять происходит слияние двух лент сингулярных аттракторов, и при $\mu \approx 0,85$ рождаются устойчивые циклы C_1^{\pm} (см. рис. в [15]), начинающие гомоклинический каскад бифуркаций. При значении $\mu \approx 0,6$ образуется устойчивый цикл E (рис. 7 в), который остается устойчивым при всех значениях параметра $\mu > 0$ и не дает возможности численно проследить эволюцию циклов гомоклинического каскада при меньших значениях параметра μ . При $\mu \approx 0,05$ в диссипативной системе (10) рождаются еще два устойчивых цикла D^{\pm} , порождающие при меньших значениях параметра μ свои циклы удвоенного периода (рис. 7 г). При $\mu = 0,001$ в диссипативной системе (10) в окрестности цикла E рождается более сложный цикл E_1 , который также остается устойчивым при всех значениях параметра $\mu > 0$. При $\mu = 0$ система становится консервативной, а области устойчивости цикла E , циклов D^{\pm} удвоенного периода и цикла E_1 заполняются торами консервативной системы вокруг этих циклов. Оставшаяся область хаотического движения заполняется бесконечным множеством неустойчивых циклов и их предельных неперіодических сингулярных траекторий, порожденных циклами C^{\pm} (рис. 7 а, б).

Таким образом, топология консервативной системы (9) при $\varepsilon = 1$ определяется торами вокруг циклов невозмущенной системы при достаточно больших по модулю начальных значениях $|x_0|$, торами вокруг циклов E , циклов D^{\pm} удвоенного периода и цикла E_1 , родившихся изначально и оставшихся устойчивыми в диссипативной системе (10) при всех $\mu > 0$, и областью хаотического движения, состоящей из бесконечного множества неустойчивых циклов и их предельных неперіодических траекторий, порожденных циклами C^{\pm} .

Как и в случае обобщенного консервативного уравнения Матье, механизм образования хаотической динамики в консервативном уравнении Дюффинга–Холмса объясняется не теорией КАМ, а нелокальным эффектом рождения циклов и торов и ФШМ-теорией, причем постулируемая теорией КАМ глобальная устойчивость в системе также отсутствует.

5. Стандартный пример маятника с колеблющейся точкой подвеса

Рассмотрим стандартный модельный пример маятника с вертикально периодически колеблющейся точкой подвеса, то есть систему с гамильтонианом

$$H(x, y, t, \varepsilon) = y^2/2 + (\omega^2 + \varepsilon \cos t) \cos x. \quad (11)$$

Этот пример часто используется в современной литературе по классической гамильтоновой механике для обоснования существования эффекта расщепления сепаратрисы [4–5]. Однако, проведенными выше рассуждениями нетрудно доказать, что никакого расщепления сепаратрисы в системе с гамильтонианом (11) не происходит, а существующая в системе хаотическая динамика является, как и в консервативной обобщенной системе уравнений

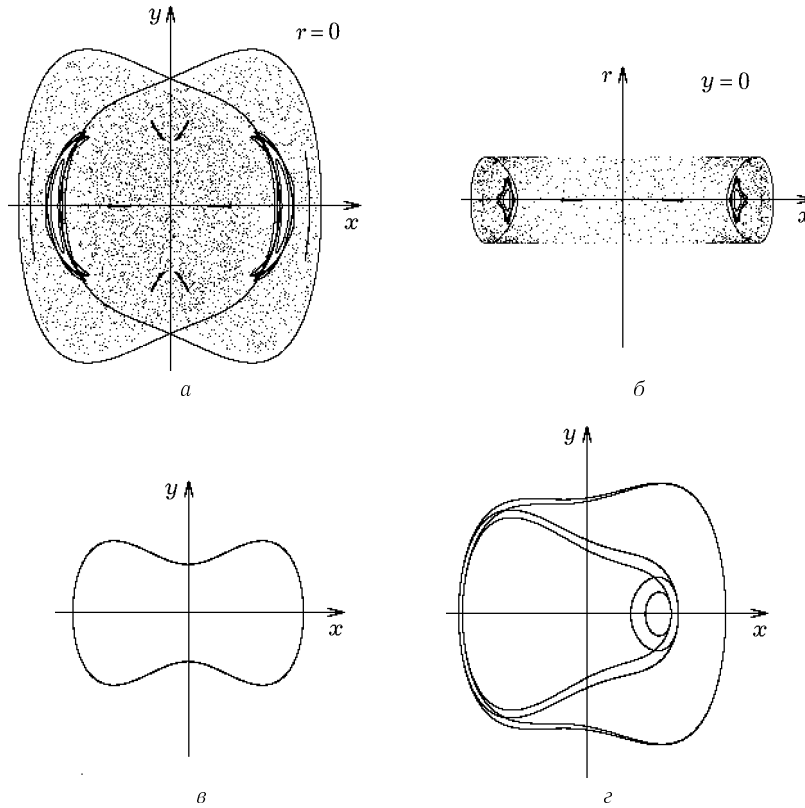


Рис. 7. Проекция сечений Пуанкаре системы (9) при $\varepsilon = 1$, $y_0 = r_0 = 0$ и $x_0 = 2, 6, 2, 13, 2, 05, 1, 85$ (острова вокруг цикла E_1), $\pm 0, 84$ ($z_0 = \pm 1$) (торы вокруг циклов D^\pm удвоенного периода), (а, б); проекция циклов системы (9) на плоскость (x, y) при $\varepsilon = 1$, $y_0 = r_0 = 0$ и $x_0 = 1, 975$ (цикл E^+) (в), $x_0 = 0, 76$ (цикл D^+ удвоенного периода)(г)

Матье и в системе Дюффинга–Холмса, следствием существования в окрестности сепаратрисы невозмущенной системы в проекции на плоскость (x, y) системы сложных многооборотных переплетающихся торов.

Запишем уравнения системы с гамильтонианом (11) в виде четырехмерной консервативной системы уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = (\omega^2 + \varepsilon z) \sin x, \quad \dot{z} = r, \quad \dot{r} = -z \tag{12}$$

с условиями $H = z^2 + r^2 = 1, z_0 = z(0) = 1$. Чтобы понять, что на самом деле происходит в системе (12) при различных значениях величины приложенного возмущения $\varepsilon > 0$, рассмотрим наряду с ней расширенную диссипативную систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = (\omega^2 + \varepsilon z) \sin x - \mu y, \quad \dot{z} = r, \quad \dot{r} = -z \tag{13}$$

и проанализируем численно переход от решений диссипативной системы (13) к решениям консервативной системы (12) при фиксированных значениях параметров $\varepsilon, \omega = 1$ и при стремлении параметра μ к нулю. Решения систем (12) и (13) удобно наблюдать в координатах $(\sin x, y)$. При этом все гетероклинические сепаратрисные контуры, соединяющие особые точки

$2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ невозмущенной системы (12) в координатах (x, y) изображаются двумя гомоклиническими сепаратрисными контурами точки $(0, 0)$ в координатах $(\sin x, y)$, лежащими в верхней и нижней полуплоскостях. Любая периодическая траектория невозмущенной системы, лежащая в плоскости (x, y) над (под) сепаратрисным контуром вблизи него переходит в координатах $(\sin x, y)$ в цикл, лежащий в верхней (нижней) полуплоскости внутри сепаратрисного контура (внутренний цикл). И наоборот, любой цикл невозмущенной системы (12), проходящий через точку $(x_0, 0)$ при $0 < x_0 < \pi/2$, изображается циклом вокруг сепаратрисного контура в координатах $(\sin x, y)$ (внешний цикл). Поэтому все траектории возмущенной системы (12), лежащие в окрестности любой из сепаратрис невозмущенной системы, можно наблюдать и анализировать на одном рисунке в координатах $(\sin x, y)$.

При малых $\varepsilon = 0,0001$ топология консервативной возмущенной системы (12) определяется основными торами вокруг основных циклов системы и более сложными торами вокруг сложных эллиптических циклов в окрестности сепаратрисного контура невозмущенной системы, родившихся изначально устойчивыми в диссипативной системе (13). В число основных циклов входят внутренние и внешние циклы невозмущенной системы, а также циклы C^\pm возмущенной системы (12) вокруг центров $((2k+1)\pi, 0)$ невозмущенной системы. Проекция некоторых сложных эллиптических циклов системы (12), лежащие в окрестности сепаратрисного контура невозмущенной системы, представлены на рис. 8. Циклы C^\pm можно наблюдать в координатах $(\sin x, y)$ в окрестности нулевой особой точки. Псевдохаотическая динамика в системе (12) наблюдается даже при малых $\varepsilon = 0,0001$.

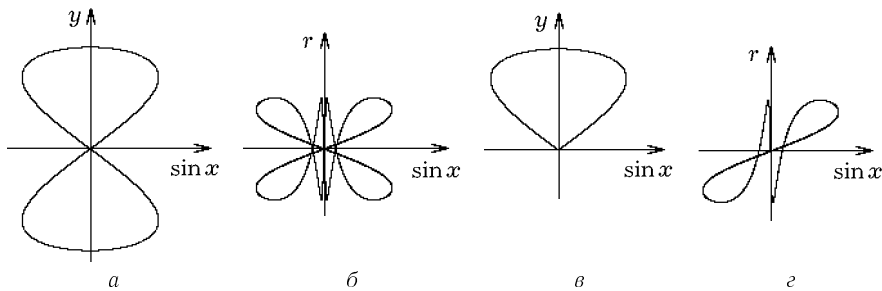


Рис. 8. Проекция сложных циклов системы (12) в окрестности сепаратрисного контура невозмущенной системы при $\varepsilon = 0,0001$: одного из внешних циклов при $y_0 = 0, z_0 = -1, x_0 = 0,01494$ (а, б) и одного из внутренних циклов при $y_0 = 0,015, z_0 = 1, x_0 = 0$ (в, г)

При значении параметра возмущения $\varepsilon = 0,01$ ситуация заметно усложняется. Теперь топология системы (12) определяется основными торами системы (т. е. торами вокруг внешних и внутренних циклов невозмущенной системы и парами торов вокруг циклов C^\pm), переходными торами и набором торов вокруг сложных циклов, родившихся изначально устойчивыми в диссипативной системе (13) при уменьшении значений параметра μ до нуля. Движение траектории по поверхностям таких сложных многооборотных торов, расположенных в окрестности сепаратрисы невозмущенной системы, создает, как и в случаях консервативной обобщенной системы уравнений Матье и уравнения Дюффинга–Холмса, иллюзию хаотического движения, хорошо наблюдаемого в различных сечениях Пуанкаре (рис. 9 а, б).

Так как в окрестности сепаратрисы невозмущенной системы расположены, переплетаясь и, по всей видимости, касаясь друг друга, различные системы многооборотных сложных торов (внутренние по отношению к сепаратрисному контуру, внешние и смешанные), то глобальная устойчивость

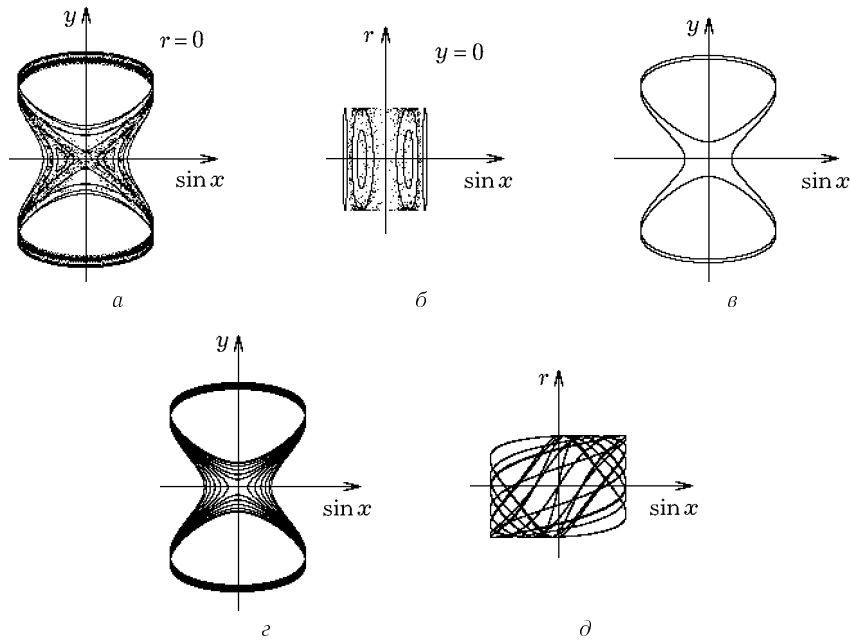


Рис. 9. Проекция сечений Пуанкаре системы (12) при $\varepsilon = 0,01$, $r_0 = 0$ и $y_0 = 0$, $x_0 = 0,67$, $0,575$, $0,505$, $0,425$, а также $x_0 = 0$, $y_0 = \pm 0,6$, $\pm 0,499$ ($z_0 = -1$), $\pm 0,474$ ($z_0 = -1$) (а, б); проекции циклов системы (12) на плоскость $(\sin x, y)$ при $\varepsilon = 0,01$, $r_0 = 0$: $y_0 = 0$, $x_0 = 0,352$ и $x_0 = 0$, $y_0 = \pm 0,34$ ($z_0 = -1$) (в); $y_0 = 0$, $x_0 = 0,144$ и $x_0 = 0$, $y_0 = \pm 0,489$ ($z_0 = -1$) (г); проекция последнего внутреннего сложного цикла на плоскость $(\sin x, r)$ (д)

решений системы (12) сохраняться не может. Некоторые сложные циклы консервативной системы (12), порождающие сложные торы и обнаруженные предложенным методом, представлены на рис. 9 в, г, д.

При значении параметра возмущения $\varepsilon = 2$ система (12) уже обладает хаотической динамикой в смысле теории ФШМ. В этом нетрудно убедиться, устремив параметр μ в диссипативной расширенной системе (13) к нулю. При $\mu \approx 0,38$ происходит бифуркация удвоения периода каждого из сингулярных устойчивых предельных циклов C^\pm , что дает начало каскаду Фейгенбаума бифуркаций удвоения периода. Данный каскад бифуркаций завершается рождением двух сингулярных аттракторов Фейгенбаума при $\mu \approx 0,348$. При дальнейшем уменьшении значений параметра μ начинается каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов с периодами согласно порядку Шарковского. Циклы периода пять, например, можно наблюдать при $\mu = 0,3428$. При $\mu \approx 0,34$ начинаются два гомоклинических каскада бифуркаций, затем, как и в других системах, происходит слияние двух лент сингулярных аттракторов, после чего процесс образования новых устойчивых циклов продолжается на единой многолистной сепаратрисной поверхности. При значении $\mu \approx 0,096$ в диссипативной системе рождаются два устойчивых цикла E^\pm (рис. 10 в), которые остаются устойчивыми при всех значениях параметра $\mu > 0$, порождая вокруг себя торы консервативной системы (12) при $\mu = 0$, а также более сложные циклы (рис. 10 г) и торы вокруг них. При $\mu = 0,04$ в диссипативной системе (13) рождаются еще два устойчивых цикла, которые также остаются устойчивыми при всех значениях параметра $\mu > 0$, порождая вокруг себя торы консервативной системы (12) при $\mu = 0$. Кроме

того, при малых $\mu > 0$ в диссипативной системе (13) рождаются и другие сложные устойчивые циклы, порождающие сложные многооборотные торы консервативной системы (12) при $\mu = 0$. Так, например, циклы консервативной системы (12), представленные на рис. 10 д, рождаются устойчивыми в диссипативной системе (13) при $\mu \approx 0,000008$.

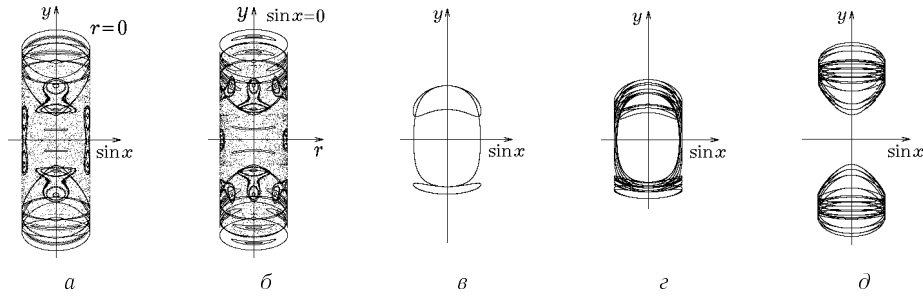


Рис. 10. Проекция сечений Пуанкаре системы (12) при $\varepsilon = 2$, $r_0 = 0$, $z_0 = -1$ и $x_0 = 0$, $y_0 = \pm 3, 8, \pm 3, 55, \pm 3, 5, \pm 3, 11, 2, 425, \pm 2, 35, \pm 2, 21, \pm 0, 45$ (а, б); проекция сложных циклов системы (12) на плоскость $(\sin x, y)$ при $\varepsilon = 2$, $r_0 = 0$, $z_0 = -1$, $x_0 = 0$ и $y_0 = -2, 14$ (в), $y_0 = -1, 825$ (г), $y_0 = \pm 3, 0887$ (д)

Таким образом, топология гамильтоновой системы (12) при $\varepsilon = 2$ определяется торами вокруг циклов невозмущенной системы при достаточно больших по модулю начальных значениях $|y_0|$, торами вокруг циклов E^\pm и некоторых других циклов, родившихся изначально и оставшихся устойчивыми в диссипативной системе (13) при всех $\mu > 0$, и областью хаотического движения, состоящей из бесконечного множества неустойчивых циклов и их предельных непериодических траекторий, порожденных каскадами бифуркаций циклов C^\pm и некоторых других циклов (рис. 10 а, б).

Как и в случае обобщенного консервативного уравнения Матье и уравнения Дюффинга–Холмса, механизм образования хаотической динамики в задаче движения маятника с колеблющейся точкой подвеса объясняется не теорией КАМ, а эффектом размножения циклов и торов и ФШМ-теорией, причем постулируемая теорией КАМ глобальная устойчивость в системе также отсутствует.

6. Гамильтонова система с двумя степенями свободы

Небольшим изменением консервативной системы (5), эквивалентной консервативному обобщенному уравнению Матье, сведем ее к гамильтоновой системе с двумя степенями свободы и покажем, что для этой гамильтоновой системы остаются справедливыми все результаты, полученные выше для консервативной системы (5).

Добавим в четвертое уравнение системы (5) слагаемое $-x^2/2$ и получим гамильтонову систему с двумя степенями свободы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(\delta + z)x - x^3, \quad \dot{z} = r, \quad \dot{r} = -z - x^2/2 \quad (14)$$

и с гамильтонианом

$$H(x, y, z, r) = (\delta x^2 + y^2 + z^2 + r^2)/2 + zx^2/2 + x^4/4 = \varepsilon. \quad (15)$$

Расширенная диссипативная двухпараметрическая система в данном случае может иметь вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(\delta + z)x - x^3 - \mu y, \quad \dot{z} = r, \quad \dot{r} = -z - x^2/2 + (\varepsilon - H(x, y, z, r))r. \quad (16)$$

Дивергенция правой части системы (16) на решениях системы (14) равна $-\mu - r^2$ и, следовательно, отрицательна при всех $\mu > 0$, а расширенная диссипативная двухпараметрическая система уравнений (16) удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы.

Проанализируем численно влияние величин параметров ε и μ на динамику системы (16) при фиксированном значении параметра $\delta = 1$. При малых $\varepsilon > 0$ хаотическая динамика в гамильтоновой системе (14) отсутствует, а топология системы, как и в случае системы (5), определяется основными торами системы, в число которых входят торы вокруг основного цикла A и пары торов вокруг основных циклов C_1 и C_2 , родившихся изначально устойчивыми в диссипативной системе (16) при $\mu > 0$; и переходными торами T , осуществляющими переход от торов вокруг основного цикла системы A к парам торов вокруг основных циклов C_1 и C_2 (рис. 11 а, б для $\varepsilon = 0,125$). Важно отметить, что в случае консервативной системы (5)–(6) ее основными циклами являются циклы C_1 , C_2 и циклы невозмущенной системы ($z = r = 0$), лежащие в плоскости (x, y) при $\varepsilon = 0$. В случае же гамильтоновой системы (14)–(15) ее основными циклами являются циклы C_1 , C_2 и цикл A , лежащий на энергетической поверхности в окрестности плоскости (x, y) и не являющийся одним из циклов невозмущенной системы, за которые в данном случае принято считать циклы системы, отличающейся от системы (14) отсутствием в правой части квадратичных слагаемых. При $\varepsilon = 0,125$ основной цикл A системы (14) может быть найден приближенно ее интегрированием с начальными условиями $x_0 = r_0 = 0, y_0 = 0,4945$, а при $\varepsilon = 0,005$ — с начальными условиями $x_0 = r_0 = 0, y_0 = 0,099945$. Торы системы (14) вокруг основных циклов C_1 и C_2 и переходные торы касаются по сепаратрисным поверхностям гиперболического периодического решения $x = y = 0$. Таким образом, как и в случае консервативной системы (5), торы, существующие в гамильтоновой системе (14) при любом $\varepsilon > 0$, не имеют никакого отношения к классическим торами невозмущенной системы, которые должны изображаться на рис. 11 б горизонтальными отрезками $y = \text{const}$. Следовательно, вопреки утверждениям теории КАМ, торы возмущенной системы (14) не являются торами из числа торов невозмущенной системы ни при каком $\varepsilon > 0$, а усложнение динамики возмущенной системы (14) при увеличении значений параметра ε не является следствием разрушения некоторых торов невозмущенной системы. Заметим, что в некоторых случаях при $\delta \neq 1$ в системе (14) возможно движение по некоторым торами вокруг циклов невозмущенной системы, но этот вопрос требует дополнительного подробного исследования.

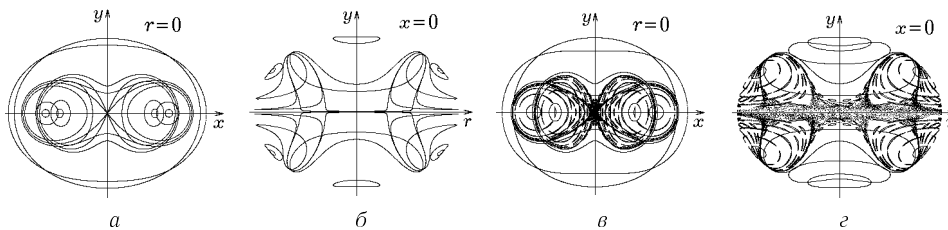


Рис. 11. Проекция сечений Пуанкаре системы (14) при $x_0 = z_0 = 0$ и: $\varepsilon = 0,125, y_0 = 0,49, 0,39, 0,3813, 0,381, \pm 0,37, \pm 0,3, \pm 0,265$ (а, б); $\varepsilon = 0,5, y_0 = 0,97, 0,9, 0,75, 0,7301, \pm 0,7197, \pm 0,714, \pm 0,702, \pm 0,674, \pm 0,59, \pm 0,48$ (в, г)

При больших значениях параметра ε ситуация заметно усложняется. Теперь топология системы (14) определяется основными торами системы (т.е. торами вокруг основных циклов системы), переходными торами и набором торов вокруг более сложных эллиптических циклов, появившихся в окрест-

ности сепаратрисной поверхности гиперболического периодического решения $x = y = 0$ и вне этой окрестности в результате нелокального эффекта размножения циклов и торов. Все сложные эллиптические циклы рождаются изначально устойчивыми в диссипативной системе (16) при уменьшении значений параметра μ до нуля. Хаотическая динамика в системе пока отсутствует, хотя движение по торам вокруг сложных циклов легко может быть принято за хаотическое, если, например, наблюдать его в сечении Пуанкаре (рис. 11 в, г при $\varepsilon = 0,5$). Псевдохаос, возникший в окрестности сепаратрисной поверхности цикла $x = y = 0$, не является гомоклиническим хаосом, а всего лишь следствием ошибок вычислений из-за неустойчивости решаемой задачи. Эффект хаотичности создают точки, лежащие в сечении Пуанкаре на поверхностях торов, обмотки которых расположены, переплетаясь, вокруг различных сложных эллиптических циклов, которые имеют тот же вид, что и сложные циклы системы (5) (рис. 2, 3).

При значении $\varepsilon = 1$ ситуация становится еще более сложной и опять же не до конца понятной. Как и в предыдущем случае, топология системы (14) определяется торами вокруг основных циклов системы, переходными торами и набором торов вокруг более сложных эллиптических циклов, родившихся изначально устойчивыми в диссипативной системе (16) при уменьшении значений параметра μ до нуля вследствие нелокального эффекта размножения циклов и торов (рис. 12 а, б). Вместе с тем фазовое пространство системы (14) содержит на первый взгляд значительную область хаотического движения. Однако, есть все основания полагать, что хаос, изображенный на рис. 12 а, б является псевдохаосом, так как он не порожден каскадами бифуркаций устойчивых циклов диссипативной системы, а является либо следствием ошибок вычислений траектории на поверхностях сложных многооборотных переплетающихся торов, образованных областями устойчивости сложных циклов (рис. 12 в), либо порожден самими областями устойчивости сложных циклов диссипативной системы (16), не переходящими в торы вокруг этих циклов при $\mu = 0$. Как и в случае системы (5), этот вопрос требует дополнительного исследования и связан с детальным изучением топологии областей устойчивости сингулярных аттракторов диссипативных систем.

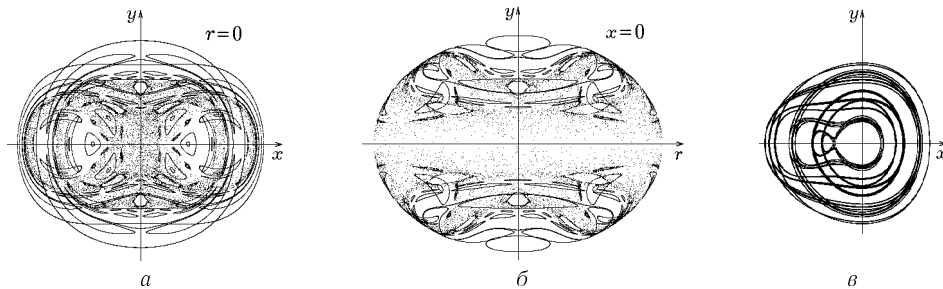


Рис. 12. Проекция сечений Пуанкаре системы (14) при $\varepsilon = 1$, $x_0 = z_0 = 0$ и $y_0 = 1,41, 1,24, 1,21, \pm 1,13, 1,11, 1,088, 1,01, \pm 0,875, \pm 0,7, \pm 0,52$ (а, б); проекция сложного цикла системы (14) при $\varepsilon = 1$, $x_0 = z_0 = 0$, $y_0 = 0,87$ (в)

При значении $\varepsilon = 4$ гамильтонова система (14) несомненно обладает хаотической динамикой, так как при уменьшении значений параметра μ в диссипативной системе (16) циклы C_1 и C_2 претерпевают субгармонический и гомоклинический каскады бифуркаций в полном соответствии с ФШМ-теорией, рождая бесконечное число регулярных и сингулярных аттракторов в замыканиях своих сепаратрисных поверхностей. Затем происходит слияние двух лент (сепаратрисных поверхностей) сингулярных аттракторов, и рожда-

ются новые симметричные устойчивые циклы, с которыми также происходят субгармонические каскады бифуркаций. Все циклы всех каскадов и сингулярные аттракторы, становясь неустойчивыми, не исчезают, а переходят в решения гамильтоновой системы при $\mu = 0$. При $\mu \approx 0,05$ рождается симметричный устойчивый цикл E , порождающий бифуркацией типа вилки при $\mu \approx 0,03$ два симметричных цикла E_1 и E_2 , которые остаются устойчивыми в системе (16) при всех меньших значениях $\mu > 0$ и порождают вокруг себя торы гамильтоновой системы (14) при $\mu = 0$ (рис. 13 а, б, в).

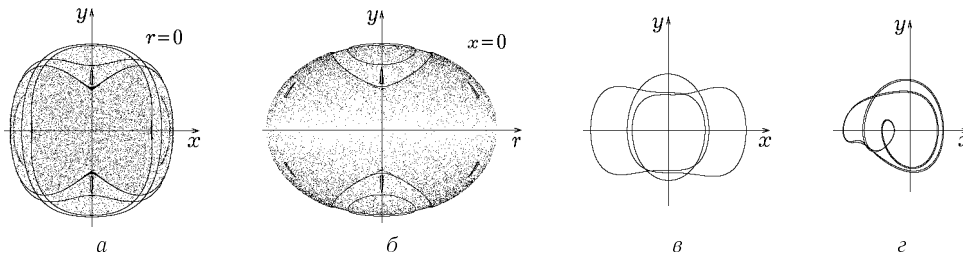


Рис. 13. Проекция сечений Пуанкаре системы (14) при $\varepsilon = 4$, $x_0 = z_0 = 0$ и $y_0 = 2, 8, 2, 545, 2, 54, \pm 1$ ($z_0 = -1$) (а, б); проекция цикла E_1 системы (14) при $\varepsilon = 4$ (в); проекция цикла учетверенного периода из каскада Фейгенбаума при $\mu = 0,192$ (г)

Таким образом, точно так же, как и в консервативной системе (5), топология гамильтоновой системы (14) при $\varepsilon = 4$ определяется торами вокруг основных циклов системы, торами вокруг циклов, родившихся и оставшихся устойчивыми в диссипативной системе (16) при всех значениях параметра $\mu > 0$, и областью хаотического движения, содержащей все циклы и непериодические траектории, родившиеся изначально устойчивыми в диссипативной системе (16) при $\mu > 0$ и потерявшие устойчивость в результате какого-либо субгармонического или гомоклинического каскада бифуркаций в соответствии с ФШМ-теорией.

7. Классическая система уравнений Хенона–Хейлеса

Применим развитый выше подход к анализу решений классической гамильтоновой системы уравнений Хенона–Хейлеса, часто используемой в современной литературе по гамильтоновой механике в качестве примера, подтверждающего справедливость теории КАМ [7].

Система уравнений Хенона–Хейлеса имеет вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - 2xz, \quad \dot{z} = r, \quad \dot{r} = -z - x^2 + z^2 \quad (17)$$

с гамильтонианом

$$H(x, y, z, r) = (x^2 + y^2 + z^2 + r^2)/2 + x^2z - z^3/3 = \varepsilon. \quad (18)$$

Гамильтониан (18) принято представлять в виде суммы невозмущенной части, содержащей квадратичные по переменным слагаемые, и возмущения, состоящего из последних двух членов. При этом переход к хаотической динамике в системе (17) при росте значений параметра ε принято объяснять в соответствии с теорией КАМ разрушением торов невозмущенной системы [7].

Чтобы понять, что на самом деле происходит в системе Хенона–Хейлеса при росте значений параметра ε , построим для нее расширенную двухпараметрическую диссипативную систему уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(1 + 2z)x + (\varepsilon - H(x, y, z, r))y, \quad \dot{z} = r, \quad \dot{r} = -z - x^2 + z^2 - \mu r. \quad (19)$$

Нетрудно видеть, что система (19) удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы, так как дивергенция ее правой части на решениях системы (17) равна $-\mu - y^2$ и, следовательно, отрицательна при всех $\mu > 0$.

Рассмотрим переход от решений диссипативной системы (19) к решениям гамильтоновой системы (17) при фиксированных значениях параметра ε , используя непрерывную зависимость решений диссипативной системы (19) от параметра μ при стремлении μ к нулю. Значения параметра ε , как и в классическом случае, будем брать равными $1/24$, $1/12$, $1/8$ и $1/6$ [7].

При малых значениях $\varepsilon = 1/24$ и при достаточно больших значениях параметра $\mu \approx 0,02$ в системе (19) существуют две пары симметричных друг другу устойчивых циклов B_1, B_2 , и C_1, C_2 , остающихся устойчивыми при всех значениях параметра $\mu > 0$. Эти циклы порождают вокруг себя торы гамильтоновой системы при $\mu = 0$. Это совсем не видно в проекции на плоскость (z, r) сечения $x = 0$ (рис. 14 а), представленной в многочисленной современной литературе по гамильтоновым системам (см. [7], с. 67), но зато отчетливо видно в проекции (x, r) сечения $y = 0$ (рис. 14 б). В проекции последнего сечения замкнутые кривые, принадлежащие обмоткам торов вокруг циклов C_1 и C_2 , лежат по диагоналям, а замкнутые кривые, принадлежащие обмоткам торов вокруг циклов B_1, B_2 , пересекают ось $r = 0$. Кроме того, плоскость $x = y = 0$ является двумерным устойчивым многообразием начала координат в диссипативной системе (19) при всех $\mu > 0$, что порождает в этой плоскости вырожденный цикл гамильтоновой системы (17) при $\mu = 0$. Этим циклом является внешняя замкнутая кривая в координатах (z, r) на рис. 14 а или вертикальный отрезок в координатах (x, r) на рис. 14 б. Двумерное неустойчивое многообразие начала координат в диссипативной системе (19) переходит в набор торов гамильтоновой системы (17) при $\mu = 0$, прилегающих к выро-

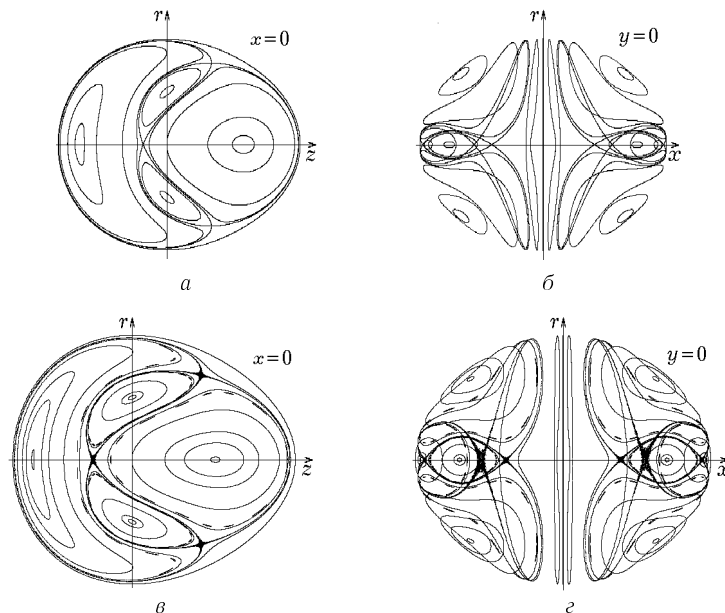


Рис. 14. Проекция сечений Пуанкаре системы (17) при $x_0 = 0$, $\varepsilon = 1/24$ и: $z_0 = 0$, $r_0 = 0, 28867, 0, 288, \pm 0, 283061, \pm 0, 282, \pm 0, 25, \pm 0, 185, \pm 0, 155$; $r_0 = 0$, $z_0 = 0, 1, 0, 16$ (а, б); $x_0 = 0$, $\varepsilon = 1/12$ и: $z_0 = 0$, $r_0 = 0, 408, 0, 4, 0, 3987, 0, 395$ (здесь и далее $\pm y_0$), $0, 36, 0, 273, 0, 25, 0, 22, 0, 21$; $r_0 = 0$, $z_0 = 0, 1, 0, 16, 0, 24$ (в, г)

жденному циклу ($x = y = 0$) системы (рис. 14 б), но не являющихся торами вокруг этого цикла!

Таким образом, хаотическая динамика в гамильтоновой системе (17) при $\varepsilon = 1/24$ отсутствует, а топология системы определяется основными торами, в число которых входят пары торов вокруг основных циклов системы B_1, B_2 и C_1, C_2 , родившихся изначально в диссипативной системе (19), и торами T , прилегающими к вырожденному циклу ($x = y = 0$) системы и осуществляющими переход от этого цикла к парам торов вокруг основных циклов B_1, B_2 и C_1, C_2 . Касание всех торов системы (17) происходит по сепаратрисным поверхностям гиперболического периодического решения. Заметим, что из проекции сечения $y = 0$ на плоскость (x, r) (рис. 14 б) наглядно видно, что все торы, существующие в гамильтоновой системе Хенона-Хейлеса (17) при $\varepsilon > 0$, как и во всех других рассмотренных выше случаях, не имеют никакого отношения к решениям невозмущенной системы, которые в данном случае даже торами не являются.

При значении $\varepsilon = 1/12$ ситуация опять же заметно усложняется. Теперь топология системы (17) определяется основными торами (т.е. парами торов вокруг основных циклов системы B_1, B_2 , и C_1, C_2), торами T , прилегающими к вырожденному циклу ($x = y = 0$) системы и набором торов вокруг более сложных эллиптических циклов, появившихся в окрестности сепаратрисной поверхности гиперболического периодического решения и вне этой окрестности в результате нелокального эффекта размножения циклов и торов. Все сложные эллиптические циклы рождаются изначально устойчивыми в диссипативной системе (19) при уменьшении значений параметра μ до нуля. Хаотическая динамика в системе пока отсутствует, хотя движение по торах вокруг сложных циклов, образовавшихся в окрестностях касания основных торов, опять же легко может быть принято за хаотическое, если, например, наблюдать его в сечениях Пуанкаре, представленных на рис. 14 в, г. За-

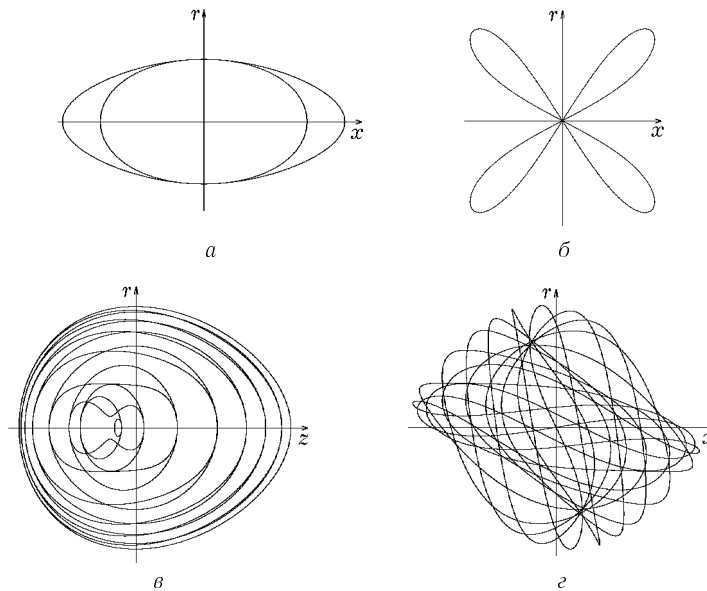


Рис. 15. Проекция основных циклов системы (17) при $\varepsilon = 1/12$: B_1, B_2 при $x_0 = z_0 = 0, r_0 = 0, 204$ (а); C_1, C_2 при $x_0 = r_0 = 0, z_0 = 0, 255$ (б); проекции одного из сложных циклов при $x_0 = r_0 = 0, z_0 = -0, 066$ (в, г)

метим, что рис. 14, в отличие от аналогичного рисунка, приведенного в работе [7], наличием обнаруженных предложенным методом сложных эллиптических циклов и лежащих вокруг них торов не только в окрестностях касания основных торов. Проекция основных циклов B_1, B_2, C_1, C_2 и нескольких сложных циклов, существующих в системе (17) при $\varepsilon = 1/12$, представлены на рис. 15 и рис. 16а.

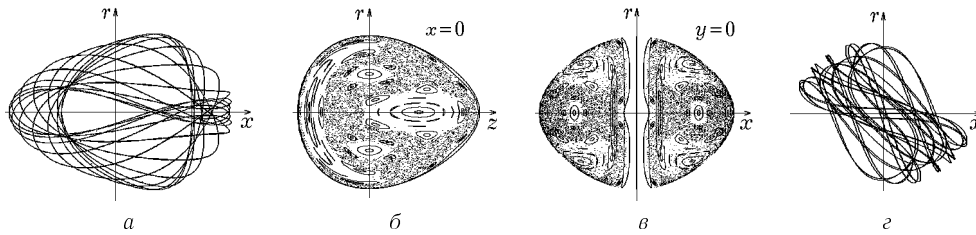


Рис. 16. Проекция сложного цикла системы (17) при $\varepsilon = 1/12$, $x_0 = 0$, $z_0 = -0,0074$, $r_0 = 0,1234$ (а); проекции сечений Пуанкаре системы (17) при $\varepsilon = 1/8$ и: $r_0 = 0$, $z_0 = 0,673648, 0,665, 0,608, 0,591$ (здесь и далее $\pm y_0$), $0,58, 0,463, 0,4, 0,33, 0,04903, -0,4348, -0,4342$; $z_0 = 0$, $r_0 = 0,26, 0,28$ и $r_0 = 0,294$, $z_0 = 0,095, 0,099, 0,12$ (б, в); проекция сложного цикла системы (17) при $\varepsilon = 1/8$, $x_0 = r_0 = 0$, $z_0 = -0,0131$ (г)

При значении $\varepsilon = 1/8$ ситуация становится еще более сложной и опять же не до конца понятной. Как и в предыдущем случае, топология системы (17) определяется парами торов вокруг основных циклов системы B_1, B_2 , и C_1, C_2 , торами T , прилегающими к вырожденному циклу ($x = y = 0$) системы и набором торов вокруг более сложных эллиптических циклов, родившихся изначально устойчивыми в диссипативной системе (19) при уменьшении значений параметра μ до нуля (рис. 16б, в). Некоторые из найденных в гамильтоновой системе сложных циклов представлены на рис. 16г и рис. 17. Вместе с тем фазовое пространство системы (17) содержит на первый взгляд значительную область хаотического движения. Однако, есть все основания полагать, что хаос, изображенный на рис. 16б, в, является псевдохаосом, так как он не порожден каскадами бифуркаций устойчивых циклов диссипативной системы, а является, как и во всех предыдущих рассмотренных системах, либо следствием ошибок вычислений траектории на поверхностях сложных многооборотных переплетающихся торов, образованных областями устойчивости сложных циклов, либо порожден самими областями устойчивости сложных циклов диссипативной системы (19), не переходящими в торы вокруг этих циклов при $\mu = 0$. Как и в случаях с предыдущими рассмотренными системами этот вопрос требует дополнительного исследования и связан с детальным изучением топологии областей устойчивости сингулярных аттракторов

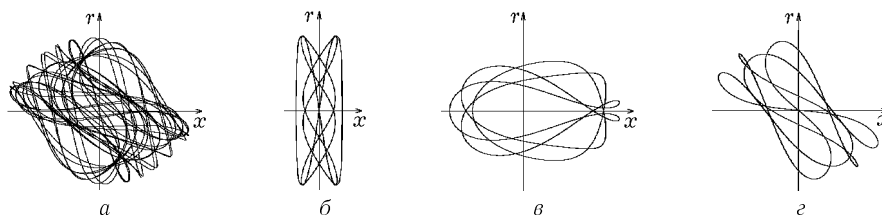


Рис. 17. Проекция сложных циклов системы (17) при $\varepsilon = 1/8$, $x_0 = 0$ и $r_0 = 0$, $z_0 = -0,42305$ ($y_0 < 0$) (а); $r_0 = 0$, $z_0 = -0,4338$ (б); $r_0 = 0,294$, $z_0 = 0,13$ (в); $r_0 = 0$, $z_0 = 0,0515$ (г)

рассматриваемых диссипативных систем.

При максимальном значении параметра $\varepsilon = 1/6$ удалось обнаружить еще несколько бифуркаций, принимающих участие в усложнении динамики гамильтоновой системы (17). Это бифуркации рождения циклов удвоенного периода из основных циклов B_1, B_2 и C_1, C_2 при изменении параметра ε от $1/8$ до $1/6$. При этом циклы удвоенного периода основных циклов C_1 и C_2 остаются устойчивыми в диссипативной системе (19) при $\varepsilon = 1/6$ и $\mu > 0$, порождая вокруг себя торы гамильтоновой системы при $\mu = 0$ (рис. 18 а, б).

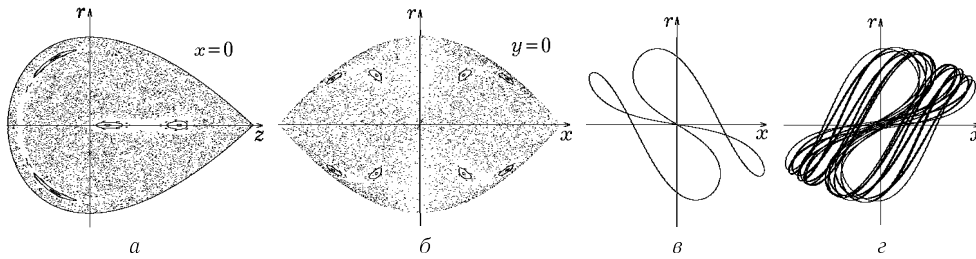


Рис. 18. Проекция сечений Пуанкаре системы (17) при $\varepsilon = 1/6$, $x_0 = r_0 = 0$, $z_0 = 0,02, 0,04, 0,09 (\pm y_0)$ (а, б); проекция сложных циклов системы (17) при $\varepsilon = 1/6$, $x_0 = r_0 = 0$ и $z_0 = 0,11$ (в), $z_0 = 0,021$ ($y_0 < 0$) (г)

Таким образом, при $\varepsilon = 1/6$ топология гамильтоновой системы (17) определяется парами торов вокруг основных циклов C_1 и C_2 системы удвоенного периода, набором торов вокруг более сложных эллиптических циклов, родившихся изначально устойчивыми в диссипативной системе (19) при уменьшении значений параметра μ до нуля и областью нерегулярной динамики (рис. 18 а, б). Вопрос о том, является ли последняя область областью хаотического поведения системы Хенона–Хейлеса, остается открытым, так как пока не удалось обнаружить бесконечных каскадов бифуркаций каких-либо циклов, ведущих к возникновению сингулярных аттракторов.

Численные результаты, представленные на (рис. 18 а, б), являются, скорее всего, следствием ошибок вычислений траектории на поверхностях сложных многооборотных переплетающихся торов, образованных областями устойчивости сложных циклов и родившихся в результате эффекта размножения циклов и торов. Эти результаты могут представлять также сечения областей устойчивости сложных циклов диссипативной системы (19), не переходящих в торы вокруг этих циклов при $\mu = 0$. Остается также открытым вопрос о том, являются ли торы вокруг сложных циклов, изображенные на (рис. 18 а, б) и других рисунках, вторичными резонансами, как принято считать в современной литературе, так как однозначно установлено существование также и другого механизма рождения сложных циклов и торов вокруг них через каскады бифуркаций в соответствии с ФШМ-сценарием.

8. Гамильтонова система с тремя степенями свободы

Небольшим усложнением гамильтоновой системы (14) с двумя степенями свободы преобразуем ее к гамильтоновой системе с тремя степенями свободы и покажем, что для такой гамильтоновой системы остаются справедливыми все основные результаты, полученные ранее для рассмотренных выше гамильтоновых и консервативных систем.

Добавим в четвертое уравнение системы (14) слагаемое $-u^2/2$ и еще одну степень свободы в переменных (u, v) , аналогичную обобщенному консервативному уравнению Матье (5). Получим гамильтонову систему с тремя сте-

пенями свободы, имеющую вид

$$\begin{aligned} \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(\delta + z)x - x^3, \quad \dot{z} = r, \quad \dot{r} = -z - x^2/2 - u^2/2, \\ \dot{u} = v, \quad \dot{v} = -(\gamma + z)u - u^3 \end{aligned} \quad (20)$$

и гамильтониан

$$\begin{aligned} H(x, y, z, r, u, v) = (\delta x^2 + y^2 + z^2 + r^2 + \gamma u^2 + v^2)/2 + \\ + z(x^2 + u^2)/2 + (x^4 + u^4)/4 = \varepsilon. \end{aligned} \quad (21)$$

Расширенная диссипативная двухпараметрическая система в данном случае может иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(\delta + z)x - x^3 - \mu y, \quad \dot{z} = r, \\ \dot{r} = -z - x^2/2 - u^2/2 + (\varepsilon - H)r, \quad \dot{u} = v, \quad \dot{v} = -(\gamma + z)u - u^3 - \mu v. \end{aligned} \quad (22)$$

Дивергенция правой части системы (22) на решениях системы (20) равна $-2\mu - r^2$ и, следовательно, отрицательна при всех $\mu > 0$, а расширенная диссипативная двухпараметрическая система уравнений (22) удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы.

Проанализируем численно влияние величин параметров ε и μ на динамику системы (22) при фиксированных значениях параметров $\delta = \gamma = 1$. Рассмотрим пока только два значения параметра ε : $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 3$. Нетрудно видеть, что решения гамильтоновой системы (20) с начальными условиями $u_0 = x_0$, $v_0 = y_0$ являются решениями четырехмерной консервативной, но не гамильтоновой системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(\delta + z)x - x^3, \quad \dot{z} = r, \quad \dot{r} = -z - x^2. \quad (23)$$

Правая часть последней системы с точностью до множителя при x^2 в последнем уравнении совпадает с правой частью рассмотренной выше системы (14). Поэтому при малых значениях параметра $\varepsilon < 0,5$ хаотическая динамика в гамильтоновой системе (20) на части решений с начальными условиями $u_0 = x_0$, $v_0 = y_0$ отсутствует, а топология системы, как и в случае системы (14), определяется основными торами системы, в число которых входят торы вокруг основного цикла A и пары торов вокруг основных циклов C_1 и C_2 , родившихся изначально устойчивыми в диссипативной системе (22) при $\mu > 0$; и переходными торами T , осуществляющими переход от торов вокруг основного цикла системы A к парам торов вокруг основных циклов C_1 и C_2 . Все основные циклы системы (20), как и основные циклы системы (14), не являются циклами невозмущенной системы, то есть здесь, как и в системе (14), параметр ε является бифуркационным.

При значении параметра $\varepsilon = 1$ ситуация заметно усложняется. Теперь топология решений системы (20) с начальными условиями $u_0 = x_0$, $v_0 = y_0$ определяется основными торами системы (т. е. торами вокруг основных циклов системы), переходными торами и набором торов вокруг более сложных эллиптических циклов, появившихся в окрестности сепаратрисной поверхности гиперболического периодического решения и вне этой окрестности в результате нелокального эффекта размножения циклов и торов. Все сложные эллиптические циклы рождаются изначально устойчивыми в диссипативной системе (22) с теми же начальными условиями при уменьшении значений параметра μ до нуля. Хаотическая динамика в системе пока отсутствует, хотя

движение по торах вокруг сложных циклов легко может быть принято за хаотическое, если, например, наблюдать его в сечении Пуанкаре (рис. 19 а, б при $\varepsilon = 1$). Псевдохаос, возникший в окрестности цикла $x = y = 0$, не является гомоклиническим хаосом, а всего лишь следствием ошибок вычислений из-за неустойчивости решаемой задачи. Эффект хаотичности создают точки, лежащие в сечении Пуанкаре на поверхностях торов, обмотки которых расположены, переплетаясь, вокруг различных сложных эллиптических циклов, образовавшихся вследствие эффекта размножения циклов и торов и имеющих тот же вид, что и сложные циклы систем (5) и (14). Два таких цикла представлены на рис. 19 в, г.

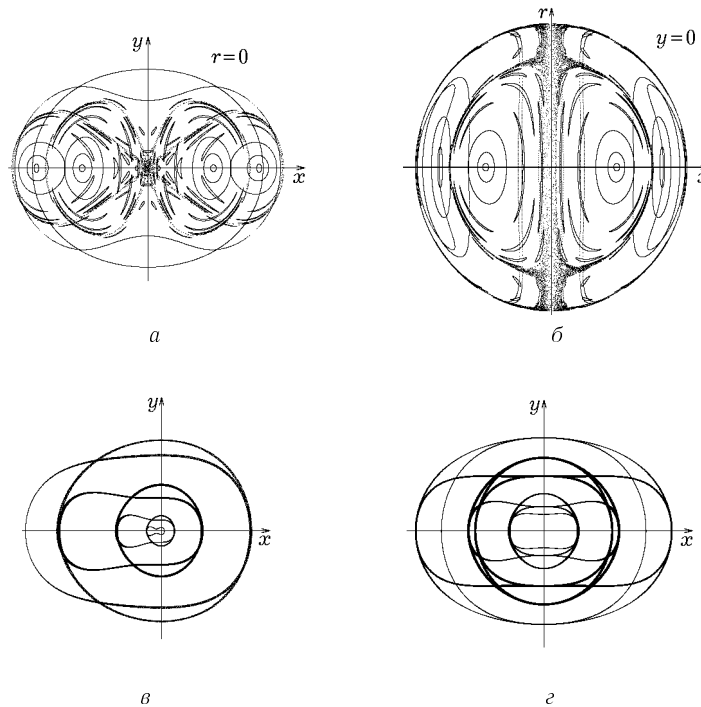


Рис. 19. Проекция сечений Пуанкаре системы (20) при $\varepsilon = 1$, $u_0 = x_0$, $v_0 = y_0$, $z_0 = x_0 = 0$ и $y_0 = 0,001, \pm 0,07, \pm 0,12, \pm 0,2, \pm 0,36, \pm 0,62, 0,93, 0,98$, $y_0 = \pm 0,7$ и $x_0 = \mp 0,15$, $y_0 = \pm 0,64$ и $x_0 = \mp 0,22$ (а, б); проекции сложных циклов системы (20) при $\varepsilon = 1$, $u_0 = x_0$, $v_0 = y_0$ и $y_0 = 0$, $x_0 = 0,094$, $z_0 = 0,996$ (в); $y_0 = 0,91368$, $x_0 = 0$, $z_0 = -0,1261$ (г)

Таким образом, установлен факт наличия четырехмерного подпространства пятимерной энергетической поверхности гамильтоновой системы (20), в котором даже при достаточно больших значениях параметра ε хаотическая динамика вообще отсутствует, а при $\varepsilon = 1$ наблюдается исключительно локальный псевдохаос, в то время как для других решений системы (20), не удовлетворяющих условиям $u_0 = x_0$, $v_0 = y_0$, даже при $\varepsilon = 0,01$ в системе (20) наблюдается сложная нерегулярная (хаотическая) динамика. Это, естественно, происходит в окрестности тех начальных условий $u_0 = x_0$, $v_0 = y_0$, при которых решения лежат на поверхностях касающихся двумерных торов системы (23) или близко к ним (окрестность сепаратрисы на рис. 19 а, б).

Рассмотрим теперь, что происходит вне окрестностей касающихся двумерных торов системы (23) при $\varepsilon = 1$. Численные расчеты показывают, что вне этих окрестностей траектории гамильтоновой системы (20) двигаются по

поверхностям трехмерных торов вокруг двумерных торов системы (20). Некоторые из таких трехмерных торов представлены на рис. 20 а, в и рис. 21. Видно, что трехмерные торы аналогично двумерным торам могут образовывать острова (торы второго порядка), но, как уже отмечалось выше, эти образования, скорее всего, связаны не с резонансами на торе, а с нелокальным эффектом размножения циклов и торов при наличии в системе сепаратрис гиперболических траекторий. Типичный резонанс на трехмерном торе представлен на рис. 21 в. В любом случае этот вопрос требует дополнительного исследования.

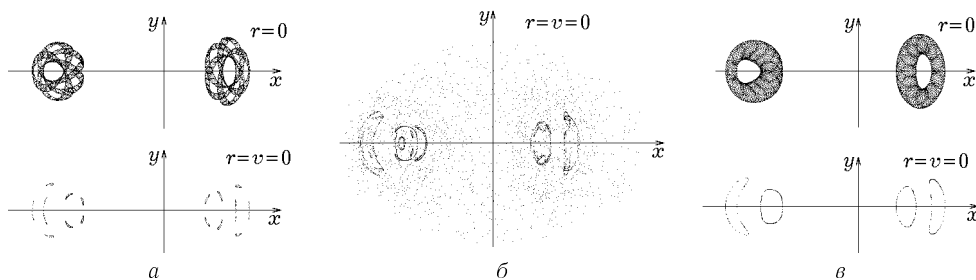


Рис. 20. Проекция сечений Пуанкаре коразмерности 1 и 2 системы (20) при $\varepsilon = 1$, $u_0 = x_0 - 0,15$, $v_0 = y_0 + 0,15$, $z_0 = x_0 = 0$ и $y_0 = 0,64$ (а), $0,67$ (в); проекция сечения Пуанкаре коразмерности 2 системы (20) при $\varepsilon = 1$, $u_0 = x_0 - 0,15$, $v_0 = y_0 + 0,15$, $z_0 = x_0 = 0$ и $y_0 = 0,302, 0,42, 0,5503, 0,64, 0,67$ (б)

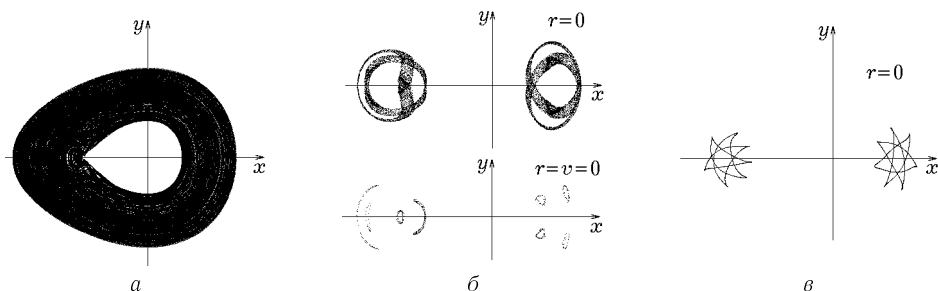


Рис. 21. Проекция трехмерного тора системы (20) (а) и его сечений Пуанкаре коразмерности 1 и 2 при $\varepsilon = 1$, $u_0 = x_0 - 0,15$, $v_0 = y_0 + 0,15$, $z_0 = x_0 = 0$ и $y_0 = 0,42$ (б); проекция сечения Пуанкаре коразмерности 1 трехмерного тора системы (20) при $\varepsilon = 1$, $u_0 = x_0 - 0,15$, $v_0 = y_0 + 0,15$, $z_0 = x_0 = 0$ и $y_0 = 0,5503$ (резонанс)

Из рис. 20 б видно, что при $\varepsilon = 1$ область существования трехмерных торов окружена областью глобального хаотического поведения траекторий системы (20). Таким образом, мы приходим к установлению следующего важного факта одновременного существования в системе (20) при $\varepsilon = 1$ областей регулярного движения по двумерным торам вокруг основных циклов системы, областей регулярного движения по трехмерным торам вокруг упомянутых выше двумерных торов, областей локального хаотического поведения траекторий системы в четырехмерном подпространстве пятимерной энергетической поверхности и областей глобального хаотического поведения траекторий системы в остальной части энергетической поверхности.

При значении $\varepsilon = 3$ гамильтонова система (20) несомненно обладает хаотической динамикой даже на решениях системы (23), так как при уменьшении значений параметра μ в диссипативной системе (22) циклы C_1 и C_2 пре-

терпевают субгармонический и гомоклинический каскады бифуркаций в полном соответствии с ФШМ-теорией, рождая бесконечное число регулярных и сингулярных аттракторов в замыканиях своих сепаратрисных поверхностей. Затем происходит слияние двух лент (сепаратрисных поверхностей) сингулярных аттракторов, и рождаются новые симметричные устойчивые циклы, с которыми также происходят субгармонические каскады бифуркаций. Все циклы всех каскадов и сингулярные аттракторы, становясь неустойчивыми, не исчезают, а переходят в решения гамильтоновой системы при $\mu = 0$. При $\mu \approx 0,04$ рождаются два симметричных устойчивых цикла E_1 и E_2 , которые остаются устойчивыми в системе (22) при всех меньших значениях параметра $\mu > 0$ и порождают вокруг себя торы гамильтоновой системы (20) при $\mu = 0$, лежащие в подпространстве решений системы (23) (рис. 22 а, б, в). При $\mu \approx 0,0005$ рождается устойчивый цикл F , который также остается устойчивым в системе (22) при всех меньших значениях параметра $\mu > 0$ и порождает вокруг себя тор гамильтоновой системы (20) при $\mu = 0$, лежащий в подпространстве решений системы (23) (рис. 22 г). Заметим, что все обнаруженные в системе (20) при $\varepsilon = 3$ двумерные торы лежат в подпространстве решений консервативной системы (23), трехмерных торов в системе (20) при $\varepsilon = 3$ пока обнаружить не удалось. В остальной области энергетической поверхности наблюдается хаотическое поведение траекторий, но тем не менее в данном случае можно говорить о локальном и глобальном хаосе, так как траектории с начальными условиями $u_0 = x_0, v_0 = y_0$ остаются в подпространстве решений консервативной системы (23) и не заполняют всей энергетической

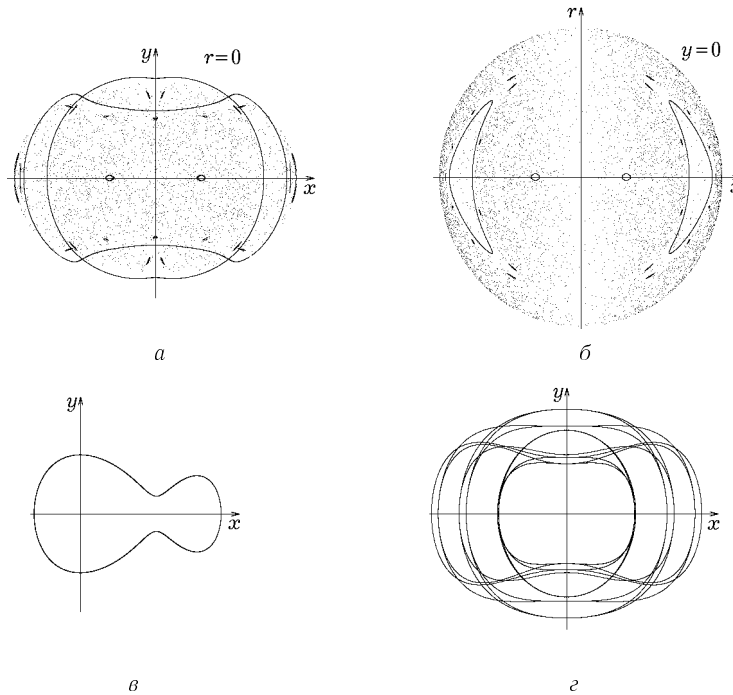


Рис. 22. Проекция сечений Пуанкаре системы (20) при $\varepsilon = 3$, $u_0 = x_0, v_0 = y_0, z_0 = x_0 = 0$ и $y_0 = 0,001, 1,725, \pm 1,715, y_0 = 0$ и $x_0 = \pm 1,729, z_0 = -3,126$ (а, б); проекция циклов системы (20) при $\varepsilon = 3$, $u_0 = x_0, v_0 = y_0$ и $y_0 = 0, x_0 = 1,729, z_0 = -3,13475$ (в); $y_0 = 1,7155, x_0 = 0, z_0 = 0,06$ (г)

поверхности гамильтоновой системы (20).

Таким образом, топология гамильтоновой системы (20) с тремя степенями свободы определяется двумерными торами вокруг основных циклов системы, трехмерными торами вокруг двумерных торов, а также двумерными и трехмерными торами вокруг циклов, родившихся и оставшихся устойчивыми в диссипативной системе (22) при всех значениях параметра $\mu > 0$, и областью хаотического движения, содержащей все циклы и непериодические траектории, родившиеся изначально устойчивыми в диссипативной системе (22) при $\mu > 0$ и потерявшие устойчивость в результате субгармонического, гомоклинического или какого-либо более сложного каскада бифуркаций в соответствии с ФШМ-теорией. Заметим, что переход к хаосу в соответствии с ФШМ-теорией может происходить также каскадами бифуркаций устойчивых двумерных торов, что, в принципе, возможно в гамильтоновых системах с тремя и более степенями свободы, но в рассмотренной системе такие каскады пока обнаружить не удалось.

Как уже неоднократно отмечалось ранее, области устойчивости циклов диссипативной расширенной системы могут порождать при $\mu = 0$ не только торы гамильтоновой системы, но также и более сложные хаотические образования, предельные к многолистным двумерным поверхностям, на которых лежат сложные сингулярные аттракторы диссипативной системы в соответствии с ФШМ-теорией. Несколько сечений таких поверхностей для диссипативной системы (22) при различных значениях параметра μ представлено на рис. 23.

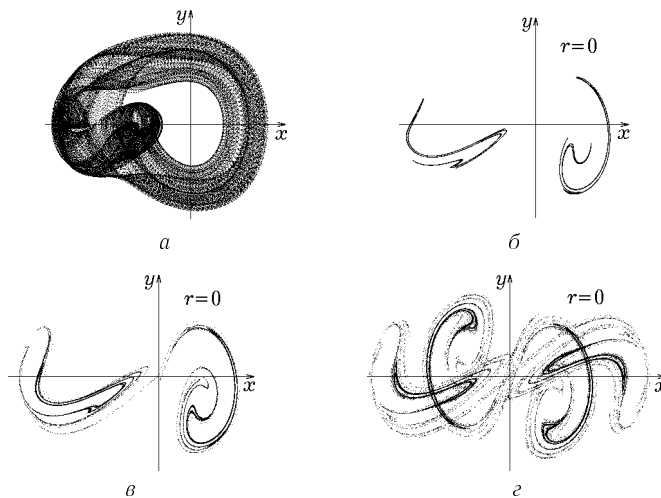


Рис. 23. Проекция сингулярного аттрактора системы (22) и его сечения Пуанкаре при $\varepsilon = 3$, $u_0 = x_0$, $v_0 = y_0$ и $\mu = 0,125$ (а, б); проекции сечений Пуанкаре сингулярных аттракторов системы (22) при $\varepsilon = 3$, $u_0 = x_0$, $v_0 = y_0$ и $\mu = 0,095$ (в), $\mu = 0,06$ (г)

9. Заключение

В работе заложены основы создания единой универсальной теории динамического хаоса во всех нелинейных системах дифференциальных уравнений на основе бифуркационной теории Фейгенбаума–Шарковского–Магницкого, включая диссипативные и консервативные, автономные и неавтономные системы, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с

частными производными и с запаздывающим аргументом. С этой целью предложен новый подход к анализу решений сложных консервативных и, в частности, гамильтоновых систем, заключающийся в построении аппроксимирующей расширенной двухпараметрической диссипативной системы уравнений, устойчивые решения (аттракторы) которой являются сколь угодно точными приближениями к решениям исходной консервативной системы и могут быть достаточно просто найдены численными методами.

На основе проведенных численных расчетов для нескольких четырехмерных консервативных систем и гамильтоновых систем с двумя и тремя степенями свободы показано, что во всех этих системах:

а) при малых значениях параметра энергии хаотическая динамика отсутствует, а движение идет по основным двумерным или трехмерным тороам вокруг основных циклов системы и переходным тороам, причем в случае гамильтоновых систем эти тороа не являются тороами невозмущенной системы;

б) при больших значениях параметра энергии никакого разрушения торов невозмущенной системы и расщепления сепаратрисы не происходит; движение идет по основным тороам вокруг основных циклов системы, переходным тороам и набору сложных многооборотных переплетающихся торов вокруг более сложных эллиптических циклов, родившихся изначально устойчивыми в расширенной диссипативной системе при уменьшении значений параметра диссипации до нуля вследствие нелокального эффекта размножения циклов и торов; видимость хаотичности создают точки, лежащие в сечении Пуанкаре на поверхностях сложных торов или других более сложных поверхностях, образованных областями устойчивости сложных циклов диссипативной системы;

в) при достаточно больших значениях параметра энергии хаотическая динамика в системе присутствует, но переход к хаосу происходит не через разрушение двумерных или многомерных торов невозмущенной системы, а, наоборот, через рождение сложных двумерных торов из областей устойчивости вокруг сложных циклов расширенной диссипативной системы и через бесконечный каскад бифуркаций рождения новых сложных циклов и сингулярных траекторий в соответствии с ФШМ-теорией;

г) острова во всех рассмотренных системах являются, скорее всего, следствием нелокального эффекта размножения циклов и торов при наличии в системах сепаратрис гиперболических траекторий; однако, этот вопрос требует дополнительного исследования.

Остается также пока открытым вопрос об условиях применимости теории возмущений для анализа гамильтоновых и консервативных систем. Стало ясно, что поставленная А.Пуанкаре задача является далеко не основной проблемой гамильтоновой механики и, тем более, механики консервативных систем, а теория возмущений в этих системах, как правило, не работает. И если уж применять к таким системам теорию возмущений, то искать нужно не условия, при которых классические тороа невозмущенной системы сохраняются в возмущенной системе, что, как видно из рассмотренных примеров, является не совсем корректным, а условия существования торов вокруг некоторых циклов одного из невозмущенных нелинейных осцилляторов под воздействием возмущения в виде других взаимодействующих нелинейных осцилляторов. Либо должно быть пересмотрено само понятие невозмущенной системы и, соответственно, понятие тора невозмущенной системы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 08-07-00074а, 06-07-89047а) и программой ОНИТ РАН (проект № 1.12).

Список литературы

1. Пуанкаре А. Избранные труды. Новые методы небесной механики. Т. 1.—М.: Наука, 1971.
2. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Динамические системы 3.—М.: ВИНТИ, 1985.
3. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах.—М.: Наука, 1973.
4. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике.—Ижевск: Удмуртский Государственный Университет, 1995.
5. Трещев Д. В. Гамильтонова механика.—М.: МИАН, 2006.
6. Мельников В. К. Труды Моск. Матем. Общества.—1963.—Т. 12, № 3.—С. 3–52.
7. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика.—М.: Меркурий-ПРЕСС, 2000.
8. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса.—М.: Наука, 1988.
9. Лоскутов А. Ю. Динамический хаос. Системы классической механики //Успехи физических наук.—2007.—Т. 177, № 9.—С. 990–1015.
10. Магницкий Н. А., Сидоров С. В. Новые методы хаотической динамики.—М.: УРСС, 2004.
11. Magnitskii N. A., Sidorov S. V. New Methods for Chaotic Dynamics.—Singapore: World Scientific, 2006.
12. Magnitskii N. A., Universal theory of dynamical chaos in dissipative systems of differential equations //Comm. Nonlin. Sci. and Numer. Simul.—2008.—V. 13.—P. 416–433.
13. Магницкий Н. А. Хаотическая динамика нелинейных диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: МАКС ПРЕСС, 2006.
14. Магницкий Н. А. Универсальная теория динамического и пространственно-временного хаоса в сложных системах //Динамика сложных систем.—2007.—Т. 1, № 1.—С. 18–39.
15. Магницкий Н. А., Сидоров С. В. Применение теории Фейгенбаума–Шарковского–Магницкого к анализу гамильтоновых систем //Дифференц. уравнения.—2007.—Т. 43, № 11.—С. 1474–1479.
16. Магницкий Н. А. Новый подход к анализу гамильтоновых и консервативных систем //Дифференц. уравнения.—2008.—Т. 44, № 12.—С. 1618–1627.
17. Магницкий Н. А. О природе динамического хаоса в окрестности сепаратрисы консервативной системы //Дифференц. уравнения.—2009.—Т. 45, № 5.—С. 647–654.

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА МАТРИЦ, УСТОЙЧИВЫХ ПО ВАЖЕВСКОМУ

В. В. Дикусар, Г. А. Зеленков, Н. В. Зубов, В. И. Косюг

Исследование робастной устойчивости систем первого приближения в терминах матричных коэффициентов этих систем является весьма важной задачей как с теоретической, так и с практической точки зрения. В работе предложен новый подход к оценке спектра вещественных матриц с помощью квадратичных форм. Несмотря на то, что эта оценка получена ранее другими способами [3–6], предлагаемый подход позволяет строить выпуклые множества устойчивых матриц и в некотором плане оценивать вещественный радиус устойчивости.

Пусть P — постоянная, вещественная матрица размера $(n \times n)$. Рассмотрим ее представление в виде суммы симметрической и кососимметрической матрицы

$$P = \frac{P + P^T}{2} + \frac{P - P^T}{2} = H + L, \quad H^T = H, \quad L^T = -L, \quad (1)$$

где $H = \frac{P + P^T}{2}$ — симметрическая, а $L = \frac{P - P^T}{2}$ — кососимметрическая матрица.

Известно [1], что симметрическая матрица H с помощью ортогонального преобразования Q_1 (столбцами матрицы Q_1 являются ортонормированные собственные вектора матрицы H) может быть приведена к диагональному виду:

$$H = Q_1 \Lambda Q_1^T, \quad Q_1^T H Q_1 = \Lambda, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad Q_1^T Q_1 = E, \quad (2)$$

где λ_i — вещественные собственные числа этой матрицы с учетом их кратностей. При этом справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} X^T H X &= Y^T Q_1^T H Q_1 Y = Y^T \Lambda Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2, \\ Y &= Q_1^T X, \quad X \neq 0, \quad \|X\|^2 = \|Y\|^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\|X\|$ — евклидова норма вещественного вектора X .

С другой стороны, для любого вещественного вектора X и любой кососимметрической матрицы L имеем:

$$X^T L X = X^T L^T X = X^T (-L) X \Rightarrow X^T L X = 0.$$

Отсюда вытекает, что для любого вещественного вектора X справедливо равенство

$$X^\top P X = X^\top (H + L) X = X^\top H X. \quad (4)$$

Заметим также, что любая кососимметрическая матрица L может иметь только чисто мнимые $\pm i\mu_j$ и нулевые собственные числа [2].

Очевидно, что матрица L^2 является симметрической, а ее собственные числа имеют вид $-\mu_j^2$. Действительно,

$$(L^2)^\top = (LL)^\top = L^\top L^\top = (-L)(-L) = LL = L^2,$$

$$LX = \pm i\mu_j X \Rightarrow L^2 X = L(\pm i\mu_j X) = -\mu_j^2 X.$$

Это означает, что матрицу L^2 также можно с помощью ортогонального преобразования привести к диагональному виду

$$L^2 = Q_2 M Q_2^\top, \quad M = Q_2^\top L^2 Q_2, \quad M = \text{diag}(-\mu_1^2, \dots, -\mu_n^2).$$

Справедлива теорема [7].

Теорема 1. Пусть величина $a + ib$ является собственным числом матрицы P , тогда справедливы неравенства

$$\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \leq a \leq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i, \quad |b| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i, \quad (5)$$

где λ_i и $-\mu_i^2$ — собственные числа матриц H и L^2 соответственно.

Доказательство. Пусть величина $a + ib$ является собственным числом матрицы P , а $X + iY$ — собственным вектором этой матрицы, соответствующим этому собственному числу. Отделим в уравнении

$$P(X + iY) = (a + ib)(X + iY), \quad X = (x_1, \dots, x_n)^\top, \quad Y = (y_1, \dots, y_n)^\top \quad (6)$$

вещественные и мнимые части. Получим две системы линейных алгебраических уравнений

$$PX = aX - bY, \quad PY = bX + aY. \quad (7)$$

Умножая эти уравнения соответственно слева на X^\top и Y^\top , получим равенства

$$X^\top P X = a\|X\|^2 - b(X, Y), \quad Y^\top P Y = a\|Y\|^2 + b(X, Y).$$

Складывая эти равенства и учитывая первые соотношения (3) и соотношения (4), получим тождество

$$X^\top P X + Y^\top P Y = X^\top H X + Y^\top H Y = Z_1^\top \Lambda Z_1 + Z_2^\top \Lambda Z_2 = a(\|X\|^2 + \|Y\|^2),$$

где $Z_1 = Q_1^\top X$, $Z_2 = Q_1^\top Y$, $\|X\|^2 = \|Z_1\|^2$, $\|Y\|^2 = \|Z_2\|^2$. Его можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (z_{1i}^2 + z_{2i}^2) = a \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) = a \sum_{i=1}^n (z_{1i}^2 + z_{2i}^2), \quad (8)$$

$$Z_1 = (z_{11}, \dots, z_{1n})^\top, \quad Z_2 = (z_{21}, \dots, z_{2n})^\top.$$

Из этого тождества вытекает очевидное неравенство

$$\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \leq a \leq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i. \quad (9)$$

Умножая теперь уравнения (7) на матрицу P слева, получим две системы линейных алгебраических уравнений

$$P^2X = (a^2 - b^2)X - 2abY, \quad P^2Y = (a^2 - b^2)Y + 2abX. \quad (10)$$

Так как матрица P^2 представляет собой сумму двух симметрических и одной кососимметрической матрицы

$$P^2 = (H + L)^2 = H^2 + L^2 + (HL + LH),$$

то, умножая первое из уравнений (7) слева на $2aX^\top$, а первое из уравнений (10) слева на X^\top и учитывая последнее разложение, получим

$$\begin{aligned} 2aX^\top PX &= 2a^2X^2 - 2ab(X, Y) = 2aX^\top HX, \\ X^\top P^2X &= (a^2 - b^2)X^2 - 2ab(X, Y) = X^\top(H^2 + L^2)X. \end{aligned}$$

Вычитая из второго равенства первое, получим:

$$-(a^2 + b^2)X^2 = X^\top(H^2 + L^2)X - 2aX^\top HX.$$

Вводя обозначения $X_1 = Q_1^\top X$, $X_2 = Q_2^\top X$, заметим, что $Q_1^\top H^2 Q_1 = \Lambda^2$, $\|X\|^2 = \|X_1\|^2 = \|X_2\|^2$. Тогда последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\lambda_i^2 x_{1i}^2 - 2a\lambda_i x_{1i}^2) + \sum_{i=1}^n a^2 x_i^2 &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i - a)^2 x_{1i}^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i^2 x_{2i}^2 - \sum_{i=1}^n b^2 x_i^2 = \sum_{i=1}^n (\mu_i^2 - b^2) x_{2i}^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как левая часть этого равенства неотрицательна, то справедливо неравенство

$$b^2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i^2 \Rightarrow |b| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает, что матрица P будет устойчивой, если симметрическая матрица $H = \frac{P + P^\top}{2}$ будет устойчивой, т.е. все ее собственные числа будут отрицательны.

Определение 1. Будем называть матрицу P *устойчивой по Важевскому*, если матрица $H = \frac{P + P^\top}{2}$ является устойчивой.

Введение подобного определения связано с тем, что Важевский, используя свойства дифференциальных уравнений, показал, что нестационарная

система первого приближения $\dot{X} = P(t)X$ будет устойчива, если все собственные числа $\lambda_i(t)$ симметрической матрицы $H(t) = \frac{P(t) + P(t)^\top}{2}$ удовлетворяют условию $\forall t, \lambda_i(t) \leq \lambda < 0$.

Очевидно, что если матрица P устойчива по Важевскому, то она устойчива. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Справедлива теорема.

Теорема 2. Пусть вещественные матрицы P_1, P_2, \dots, P_m размера $(n \times n)$ устойчивы по Важевскому, тогда их любая выпуклая линейная комбинация

$$P = \sum_{i=1}^m \alpha_i P_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

также устойчива по Важевскому.

Доказательство. Пусть матрицы P_1, P_2, \dots, P_m устойчивы по Важевскому, тогда $\forall X, X \neq 0, X^\top P_i X < 0, i = \overline{1, m}$. Суммируя, получим:

$$X^\top P X = X^\top \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i P_i \right) X = \sum_{i=1}^m \alpha_i X^\top P_i X < 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1.$$

Это означает, что матрица P устойчива по Важевскому. Кроме того, условие нормировки $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ является излишним. Можно заменить в этом равенстве единицу на любое положительное число.

Теорема доказана.

Замечание 1. Полученный результат справедлив и для нестационарных матриц $P_j(t), j = \overline{1, m}$, для которых собственные числа $\lambda_{ji}(t)$ симметрических матриц $H_j(t) = \frac{P_j(t) + P_j(t)^\top}{2}$ удовлетворяют условиям $\forall t, \lambda_{ji}(t) \leq \lambda_j < 0, j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}$.

Задача определения вещественного радиуса устойчивости является весьма сложной и совсем недавно решена только для стационарных матриц, причем полученные оценки являются весьма трудно проверяемыми [8]. Вопрос заключается в исследовании устойчивости матрицы $P + \Delta$, где матрица P — устойчива, а вещественная матрица Δ удовлетворяет условию $\|\Delta\| < \gamma$. Наибольшее из чисел γ , при котором матрица $P + \Delta$ устойчива, и называется *вещественным радиусом устойчивости*.

Определение 2. Будем называть *вещественным радиусом устойчивости по Важевскому* матрицы P наибольшее из чисел γ , при котором матрица $P + \Delta$ устойчива по Важевскому, где матрица Δ удовлетворяет условию $\|\Delta\| < \gamma$. Здесь $\|\Delta\|$ — спектральная норма.

Справедлива теорема.

Теорема 3. Если матрица P устойчива по Важевскому, то вещественный радиус устойчивости по Важевскому можно определить по формуле

$$\gamma = \min_{i=\overline{1, n}} |\lambda_i|,$$

где $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ — собственные числа симметрической матрицы $H = \frac{P + P^\top}{2}$.

Доказательство. Пусть матрица P устойчива по Важевскому. Для того, чтобы матрица $P+\Delta$ была также устойчива по Важевскому, необходимо и достаточно выполнение следующего неравенства:

$$\forall X \neq 0, \quad X^T \left(\frac{P^T + P}{2} + \frac{\Delta^T + \Delta}{2} \right) X < 0. \quad (12)$$

Заметим, что имеют место два очевидных неравенства:

$$X^T \left(\frac{\Delta^T + \Delta}{2} \right) X \leq \|\Delta\| \cdot \|X\|^2, \quad \|X\|^2 \min_{i=1,n} \lambda_i \leq X^T H X \leq \max_{i=1,n} \lambda_i \|X\|^2.$$

Из этих неравенств вытекает, что при выполнении неравенства $\max_{i=1,n} \lambda_i + \|\Delta\| < 0$ выполняется и неравенство (12). Так как справедливо равенство

$$-\max_{i=1,n} \lambda_i = \min_{i=1,n} |\lambda_i|,$$

то одна из нижних оценок величины γ получена. Для того, чтобы убедиться в том, что найденное число γ является наибольшим, достаточно подобрать матрицу Δ так, чтобы

$$\|\Delta\| = \min_{i=1,n} |\lambda_i|,$$

но при этом матрица $P + \Delta$ была неустойчива по Важевскому.

Используем для матрицы P обозначения из формулы (2) $H = Q_1 \Lambda Q_1^T$. Для простоты будем считать, что диагональные элементы матрицы Λ расположены в порядке убывания. Возьмем матрицу $\Delta = Q_1 \Lambda_1 Q_1^T$, где Λ_1 — диагональная матрица с диагональными элементами, равными $\min_{i=1,n} |\lambda_i|$. Тогда с одной стороны $\|\Delta\| = \min_{i=1,n} |\lambda_i|$, т. к. $\|\Delta\| = \|\Lambda_1\|$, а с другой, если в качестве вектора X выбрать первый столбец матрицы Q_1 , то получим равенство

$$X^T \left(\frac{P^T + P}{2} + \frac{\Delta^T + \Delta}{2} \right) X = 0.$$

Это показывает, что величина

$$\gamma = \min_{i=1,n} |\lambda_i|$$

является вещественным радиусом устойчивости по Важевскому для матрицы P .

Теорема доказана.

Список литературы

1. Гантмахер Ф.Д. Теория матриц.—М.: Физматлит, 2004.
2. Дикусар В.В., Зеленков Г.А., Зубов Н.В. Определение местоположения собственных чисел матрицы с помощью квадратичных форм //В сб.: Научные труды ИСА РАН. Динамика нелинейных систем.—Т. 17, № 1.—М.: ИСА РАН, 2005.—С. 108–111.

3. Ланкастер П. Теория матриц.—М.: Наука, 1978.
4. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств.—М.: Наука, 1972.
5. Bendixson J. Sur les racines d'une equation fondamentale //Acta Math.—1902.—V. 25.—P. 359—365.
6. Fan Ky On a theorem of Weyl concerning the eigenvalues of linear transformation //Proc. Nat. Acad. Sci.—1949.—V. 35, № 1.—С. 652—655.
7. Дикусар В.В., Зеленков Г.А., Зубов Н.В. Методы анализа робастной устойчивости и неустойчивости.—М.: ВЦ РАН, 2007.
8. Поляк Г.А., Щербakov П.С. Робастная устойчивость и управление.—М.: Наука, 2002.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ НЕУСТОЙЧИВЫХ ПОЛИНОМОВ

В. В. Дикусар, Г. А. Зеленков, Н. В. Зубов, В. И. Косюг

В данной работе предложены критерии существования выпуклых множеств неустойчивых полиномов, принадлежащих одному определенному классу неустойчивости. Эти критерии позволяют путем проверки конечного числа условий, налагаемых на полиномы, образующие это семейство, установить свойства всего этого семейства полиномов.

В теории робастной устойчивости важное место занимает разработка критериев существования и поиск методов построения выпуклых множеств коэффициентов устойчивых полиномов [1, 2]. Не менее важной проблемой является решение этой же задачи и для неустойчивых полиномов.

Определение 1 ([4]). Будем говорить, что полиномы степени n с вещественными коэффициентами

$$f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$$

принадлежат классу (n, k) -эквивалентности, если они не имеют нулевых и чисто мнимых корней, а число корней, лежащих в правой полуплоскости, учитывая их кратности, у всех полиномов одинаково и равно k ($0 \leq k \leq n$).

Очевидно, из определения 1 следует, что $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$.
Справедливы теоремы.

Теорема 1. Семейство полиномов

$$\sum_{m=1}^p \alpha_m f_m(z), \quad \sum_{m=1}^p \alpha_m = 1, \quad \alpha_m \geq 0 \quad (1)$$

принадлежит классу (n, k) -эквивалентности тогда и только тогда, когда этому классу принадлежат все полиномы вида

$$\alpha f_l(z) + (1 - \alpha)f_j(z), \quad \alpha \in [0, 1], \quad l, j = 1, 2, \dots, p. \quad (2)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть все полиномы семейства (1) принадлежат классу (n, k) -эквивалентности. Тогда, полагая в формуле (1) $\alpha_l = \alpha$, $\alpha_j = 1 - \alpha$, $\alpha \in [0, 1]$, получим, что любой полином семейства (2) является полиномом семейства (1), т. е. принадлежит классу (n, k) -эквивалентности.

Достаточность. Будем далее рассматривать радиус-векторы, соответствующие точкам

$$f_m(i\omega) = g_m(\omega) + ih_m(\omega), \quad m = \overline{1, p}$$

комплексной плоскости, образованными полиномами $f_m(z)$ при подстановке в них $z = i\omega$, т. е. концы этих радиус-векторов при изменении ω от 0 до $+\infty$ образуют годографы Михайлова [3] этих полиномов.

Пусть все полиномы семейства (2) принадлежат классу (n, k) -эквивалентности. Это означает, что для любых $l, j = \overline{1, p}$ радиус-векторы $f_l(i\omega)$ и $f_j(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ не могут быть противоположно направлены.

Действительно, если для некоторого числа $\omega_0 \in [0, +\infty)$ этот факт имеет место, то существует число $\alpha \in [0, 1]$ и пара радиус-векторов с номерами l, j таких, что

$$\alpha f_l(i\omega_0) + (1 - \alpha)f_j(i\omega_0) = 0,$$

а это означает, что полином $\alpha f_l(z) + (1 - \alpha)f_j(z)$ имеет мнимый корень $i\omega_0$, что противоречит его принадлежности классу (n, k) -эквивалентности.

Итак, мы показали, что угол между радиус-векторами $f_l(i\omega)$ и $f_j(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ всегда остается меньше π . Заметим также, что эти радиус-векторы не являются нулевыми, т. к. порождены полиномами, не имеющими мнимых корней. Отсюда и из геометрических соображений (правила параллелограмма) вытекает, что радиус-вектор

$$\sum_{m=1}^p \alpha_m f_m(i\omega)$$

при

$$\sum_{m=1}^p \alpha_m = 1, \quad \alpha_m \geq 0$$

не обращается в ноль при $\omega \in [0, +\infty)$. Для этого достаточно заметить, что суммирование ненулевых радиус-векторов $f_m(i\omega)$ с неотрицательными коэффициентами α_m , угол между которыми меньше π , и, по крайней мере, один из этих коэффициентов больше нуля, дает в результате ненулевой вектор.

Так как радиус-векторы $f_m(i\omega)$ образованы полиномами $f_m(z)$, принадлежащими классу (n, k) -эквивалентности, то, согласно принципу аргумента, все они поворачиваются против хода часовой стрелки при изменении ω от 0 до $+\infty$ на угол $\frac{\pi}{2}(n - 2k)$, т. е. выполняются соотношения

$$\text{Arg } f_m(i\omega) \rightarrow \frac{\pi}{2}(n - 2k) \quad \text{при } \omega \rightarrow +\infty, \quad m = \overline{1, p}.$$

Отсюда следует, что все радиус-векторы $\sum_{m=1}^p \alpha_m f_m(i\omega)$ при

$$\sum_{m=1}^p \alpha_m = 1, \quad \alpha_m \geq 0,$$

не обращаясь в ноль, также поворачиваются против хода часовой стрелки, при изменении ω от 0 до $+\infty$ на угол $\frac{\pi}{2}(n - 2k)$. Так как концы этих радиус-векторов при изменении ω от 0 до $+\infty$ образуют годографы Михайлова этих полиномов, то из принципа аргумента вытекает, что семейство полиномов (2) принадлежит классу (n, k) -эквивалентности. Теорема доказана.

Теорема 2. Семейство полиномов (1) (2) принадлежит классу (n, k) -эквивалентности в том и только в том случае, когда полиномы $f_m(z)$, $m = \overline{1, p}$ принадлежат классу (n, k) -эквивалентности и для всех вещественных корней уравнения

$$h_j(w)g_l(w) - h_l(w)g_j(w) = 0, \quad l \neq j, \quad j = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, p} \quad (3)$$

справедливо неравенство

$$g_l(w)g_j(w) + h_l(w)h_j(w) > 0, \quad l \neq j, \quad j = \overline{1, p}, \quad l = \overline{1, p}, \quad (4)$$

где $g_m(w)$ и $h_m(w)$ соответственно вещественная и мнимая часть годографа Михайлова полинома $f_m(z)$, $m = 1, 2, \dots, p$.

Доказательство. Достаточность. Пусть полиномы $f_m(z)$, $m = \overline{1, p}$ принадлежат классу (n, k) -эквивалентности, и для них выполняются условия (3) и (4). Тогда радиус-векторы $f_l(i\omega)$ и $f_j(i\omega)$, отвечающие этим полиномам, не обращаются в нуль при изменении ω от 0 до $+\infty$, и, согласно принципу аргумента, поворачиваются против хода часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}(n - 2k)$.

Очевидно, что выполнение условий (3) означает коллинеарность этих радиус-векторов, а выполнение условий (4) означает, что угол между этими векторами находится в промежутке

$$\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right),$$

т. к. их скалярное произведение положительно. Отсюда вытекает, что при одновременном выполнении условий (3) и (4) эти радиус-векторы не могут быть противоположно направлены при любом $\omega \in [0, +\infty)$. Это означает, что радиус-векторы

$$\alpha f_l(i\omega) + (1 - \alpha)f_j(i\omega)$$

при $\alpha \in [0, 1]$ не принимают нулевых значений при изменении ω от 0 до $+\infty$ и, согласно принципу аргумента, как радиус-векторы, лежащие между радиус-векторами $f_l(i\omega)$ и $f_j(i\omega)$, поворачиваются вместе с ними против хода часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}(n - 2k)$. Таким образом, полиномы $f_m(z)$, $m = \overline{1, p}$ принадлежат семейству (2), а по теореме 1 и семейству (1).

Необходимость. Пусть полиномы $f_m(z)$, $m = \overline{1, p}$ принадлежат семейству (2). Тогда, как было показано при доказательстве достаточности в теореме 1, угол между радиус-векторами $f_l(i\omega)$ и $f_j(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ всегда остается меньше π , т. е. они не могут быть противоположно направлены, а это и означает, что при их коллинеарности (выполнении условий (3)) их скалярное произведение может быть только положительно (выполнение условий (4)). Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 2 дает необходимые и достаточные условия того, что семейство полиномов (1) представляет собой выпуклое множество однородных неустойчивых полиномов, принадлежащих классу (n, k) -эквивалентности, причем полиномы $f_m(z)$, являются угловыми точками этого множества.

Замечание 2. Требование нормировки $\sum_{m=1}^p \alpha_m = 1$ в теоремах 1, 2 является излишним и его можно исключить, т. к. при умножении полинома на любое число его корни не меняются.

Список литературы

1. Поляк Г. А., Щербakov П. С. Робастная устойчивость и управление.—М.: Наука, 2002.
2. Дикусар В. В., Зеленков Г. А., Zubov Н. В. Методы анализа робастной устойчивости и неустойчивости.—М.: ВЦ РАН, 2007.
3. Михайлов А. В. Методы гармонического анализа в теории регулирования //Автоматика и телемеханика.—1938.—Т. 3.—С. 27—81.
4. Зеленков Г. А., Zubov Н. В., Неронов В. Ф. Критерии существования выпуклых множеств неустойчивых многочленов //В сб.: Научные труды ИСА РАН. Динамика нелинейных систем.—Т. 17, № 1.—М.: ИСА РАН, 2005.—С. 145—148.

**НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ АСПЕКТЫ
ПРЯМЫХ МЕТОДОВ Л. С. ПОНТЯГИНА
В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ**

М. С. Никольский

В статье обсуждаются численные аспекты обоих прямых методов Л. С. Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования. Для первого метода построена регуляризация, для второго метода излагается новый подход к аппроксимации альтернированного интеграла альтернированными суммами.

В своих известных работах по теории дифференциальных игр Л. С. Понтрягин развил два прямых метода решения линейных дифференциальных игр преследования-убегания. При практическом использовании этих методов возникает ряд проблем. Некоторым из них посвящена настоящая статья.

План статьи: в первом параграфе излагается первый прямой метод Л. С. Понтрягина [1, 3] в форме, использованной в [4]; во втором параграфе излагается регуляризация первого прямого метода Л. С. Понтрягина; в третьем параграфе излагается новый подход к аппроксимации альтернированного интеграла альтернированными суммами во втором прямом методе Л. С. Понтрягина [3].

1. О первом прямом методе Л. С. Понтрягина

Первый прямой метод Л. С. Понтрягина оригинально изложен в [1, 3]. В [4] было построено некоторое обобщение результатов [1], [3] с учетом достижений теории многозначных отображений (см., например, [5], [6]). Изложим основные конструкции работы [4].

Условимся символом \mathbb{R}^k ($k \geq 1$) обозначать действительное k -мерное евклидово пространство. Элементами \mathbb{R}^k являются упорядоченные наборы из k чисел, записываемых в виде столбцов, а скалярное произведение $\langle x, y \rangle$ и длина $|x|$ вектора $x \in \mathbb{R}^k$ определяются стандартным образом. В дальнейшем важную роль будут иметь некоторые операции над множествами X, Y из \mathbb{R}^k .

Произведение действительного числа α на множество X из \mathbb{R}^k определим формулой

$$\alpha X = \bigcup_{x \in X} \alpha x.$$

Если фиксированы действительная матрица A размерности $(\alpha \times k)$ и множе-

ство X из \mathbb{R}^k , то множество AX определяется по формуле

$$AX = \bigcup_{x \in X} Ax.$$

Алгебраическая сумма $X + Y$ множеств X, Y определяется по формуле

$$X + Y = \bigcup_{x \in X, y \in Y} (x + y).$$

Геометрическая разность $X -^* Y$ множеств X, Y определяется формулой

$$X -^* Y = \bigcap_{y \in Y} (X - y).$$

Свойства приведенных операций, помимо Л. С. Понтрягина, рассматривались различными авторами (см., например, [7, 8]).

Если при $t \in E$, где E — непустое множество на \mathbb{R}^1 , определен непустой компакт $\Omega(t)$ из \mathbb{R}^k , то будем называть $\Omega(t)$ *многозначным отображением* (коротко, м. о.), определенным на E . Используя метрику Хаусдорфа $h(\cdot, \cdot)$, вводят [6] понятия непрерывности м. о. $\Omega(t)$ в точке из E и на всем E .

Будем говорить, что м. о. $\Omega(t)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условию Липшица, если для некоторой константы $l > 0$ при произвольных t', t'' из $[a, b]$ выполняется неравенство

$$(h(\Omega(t'), \Omega(t''))) \leq l|t' - t''|.$$

Константу l называют *константой Липшица*.

Рассмотрим линейный конфликтно-управляемый объект

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az - Bu + Cv, \\ z(0) &= z_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $u \in P \subset \mathbb{R}^p$, $v \in Q \subset \mathbb{R}^q$, причем P — выпуклый компакт, Q — компакт, постоянные матрицы A, B, C имеют соответствующую размерность, z_0 — начальное состояние управляемого объекта. Выбором вектора $u \in P$ распоряжается догоняющий игрок (pursuer), а выбором вектора $v \in Q$ — убегающий игрок (evader).

Замечание 1. Если фиксировать в (1) при $t \geq 0$ измеримые функции $u(t) \in P$, $v(t) \in Q$, то задача Коши (1) имеет при $t \geq 0$ локально-липшицево решение $z(t)$, которое описывается формулой Коши

$$z(t) = e^{tA} z_0 - \int_0^t e^{(t-s)A} (Bu(s) - Cv(s)) ds, \quad (2)$$

где e^{tA} означает экспоненциал матрицы tA . Формула (2) существенно используется в понтрягинских прямых методах.

В фазовом пространстве \mathbb{R}^n выделено непустое замкнутое множество M , называемое *терминальным*. Предполагается, что $M \neq \mathbb{R}^n$ и допускает представление вида

$$M = \mathfrak{M} + L, \tag{3}$$

где \mathfrak{M} — компакт в \mathbb{R}^n , L — линейное подпространство из \mathbb{R}^n , определяемое линейным уравнением $Nz = 0$, где N — матрица размерности $(\gamma \times n)$, причем $\gamma \geq 1$ и равно рангу матрицы N , “+” означает алгебраическое сложение множеств. Вообще говоря, множество M может допускать много реализаций вида (3). В дальнейшем считается фиксированной одна из таких реализаций. Отметим, что вектор z принадлежит множеству M тогда и только тогда, когда $Nz \in N\mathfrak{M}$.

Важным и непростым является вопрос об информированности игроков и классах допустимых стратегий для них (см., например, [1–3], [9–11]). Мы будем рассматривать конфликтно управляемый процесс (1) с $z(0) = z_0$ и терминальным множеством M с точки зрения догоняющего. Предполагается, что он знает матрицы A, B, C (см. (1)), z_0, M , а также измеримое управление $v = v(t) \in Q$ в каждый момент $t \geq 0$. Целью догоняющего является по возможности скорейшее приведение точки $z(t)$ на M , что эквивалентно приведению точки $Nz(t)$ на $N\mathfrak{M}$. Относительно информированности убегающего и его целей мы не будем делать каких-либо предположений, а в качестве его стратегий фиксируем класс V измеримых по Лебегу функций $v(t) \in Q, t \geq 0$, т.е. класс программных стратегий. В силу своей информированности догоняющий игрок, зная $v(t) \in Q$ в каждый момент $t \geq 0$, ничего не знает о $v(s) \in Q$ при $s > t$. Таким образом, догоняющий игрок не может рассматривать убегающего, как союзника, скорее, ему его следует рассматривать как равнодушную Природу, цели которой не ясны и непредсказуемы в будущем.

В качестве множества стратегий догоняющего мы фиксируем класс U функций $\tilde{u}(t, v)$, определенных при $t \geq 0, v \in Q$ и обладающих свойствами: при произвольной функции $v(\cdot) \in V$ функция $\tilde{u}(t, v(t))$ измерима по Лебегу при $t \geq 0$ и $\tilde{u}(t, v(t)) \in P$ при $t \geq 0$. Функции $\tilde{u}(\cdot) \in U$ мы будем называть *суперпозиционно измеримыми*. Их по предложению О. Најек называют также *стробоскопическими стратегиями*. Динамика конфликтно управляемого процесса (1), терминальное множество (3), классы допустимых стратегий U, V и фиксация целей игроков в совокупности дают описание дифференциальной игры преследования–убегания. Если фиксировать пару стратегий $\tilde{u}(\cdot) \in U, v(\cdot) \in V$, то при $t \geq 0$ уравнение (см. (1))

$$\dot{z} = Az - B\tilde{u}(t, v(t)) + Cv(t)$$

с начальным условием $z(0) = z_0$ имеет единственное решение $z(t)$ в классе локально-липшицевых функций, и оно описывается формулой Коши (2). Возможны два исхода:

- 1) $z(t) \notin M$ при всех $t \geq 0$;
- 2) существует такое $t_1 \geq 0$, что $z(t_1) \in M$.

В первом случае полагаем $\theta(z_0, \tilde{u}(\cdot), v(\cdot)) = +\infty$, а во втором случае полагаем $\theta(z_0, \tilde{u}(\cdot), v(\cdot))$ равным наименьшему $t_1 \geq 0$, для которого $z(t_1) \in M$. Первый прямой метод Л. С. Понтрягина дает эффективные достаточные условия, при которых для данной начальной точки z_0 выполняется неравенство

$$\inf_{\tilde{u}(\cdot) \in U} \sup_{v(\cdot) \in V} \theta(z_0, \tilde{u}(\cdot), v(\cdot)) < +\infty,$$

т.е. для точки z_0 существует стратегия $\tilde{u}_0(\cdot) \in U$ такая, что

$$\sup_{v(\cdot) \in V} \theta(z_0, \tilde{u}_0(\cdot), v(\cdot)) < +\infty.$$

Переходим к описанию конструкций первого метода Л. С. Понтрягина.

При $r \geq 0$ рассмотрим следующие м.о.:

$$Ne^{rA}BP, \quad Ne^{rA}CQ, \quad \hat{w}(r) = Ne^{rA}BP \overset{*}{-} Ne^{rA}CQ.$$

Отметим, что из определения операции $\overset{*}{-}$ и выпуклости компакта P вытекает, что $\hat{w}(r)$ — выпуклый компакт. Может случиться, что $\hat{w}(r) = \emptyset$ при некоторых или даже всех $r \geq 0$. Сделаем следующее важное предположение, фиксирующее некоторую форму превосходства догоняющего над убегающим.

Предположение 1. Существует такое $T > 0$, что при $r \in [0, T]$

$$\hat{w}(r) \neq \emptyset.$$

Отметим, что м.о. $Ne^{rA}BP, Ne^{rA}CQ$ непрерывны на $[0, T]$. Примеры показывают [12], что м.о. $\hat{w}(r)$ может быть разрывным на $[0, T]$ и быть неинтегрируемым в смысле Римана (определение римановского интеграла от м.о. см., например, в [3]). Однако можно обосновать полунепрерывность сверху $\hat{w}(r)$ на $[0, T]$, т.е., если $\{r_i\}_1^\infty, \{\omega_i\}_1^\infty$ — произвольные последовательности чисел $r_i \in [0, T]$ и векторов $\omega_i \in \hat{w}(r_i)$ таких, что при $i \rightarrow \infty$ $r_i \rightarrow r_* \in [0, T]$ и $\omega_i \rightarrow \omega_*$, то $\omega_* \in \hat{w}(r_*)$. Это свойство важно для обоснования “хороших” свойств аумановского интеграла $\int_0^\tau \hat{w}(r) dr$ при $\tau \in (0, T]$ (см. ниже).

Замечание 2. Отметим, что при некоторых дополнительных условиях (см., например, [3]) все же можно гарантировать непрерывность м.о. $\hat{w}(r)$ на $[0, T]$.

Далее рассмотрим для фиксированного $\tau \in [0, T]$ интеграл (в смысле Аумана) $\int_0^\tau \hat{w}(r) dr$, который определяется как множество

$$\Pi_1(\tau) = \left\{ \int_0^\tau \omega(r) dr \right\},$$

где $\omega(r)$ — произвольная измеримая функция, удовлетворяющая условию $\omega(r) \in \hat{w}(r)$, $r \in [0, T]$, а интеграл берется в смысле Лебега. Отметим, что $\Pi_1(0) = \{0\}$. Обосновывается, что $\Pi_1(\tau)$ — непустой выпуклый компакт в \mathbb{R}^γ и его опорная функция $W(\Pi_1(\tau), \psi)$ при каждом $\psi \in \mathbb{R}^\gamma$ описывается формулой

$$W(\Pi_1(\tau), \psi) = \int_0^\tau W(\hat{w}(r), \psi) dr.$$

Замечание 3. Если X — непустой компакт в \mathbb{R}^k , то его опорная функция $W(X, \psi)$ при произвольном векторе $\psi \in \mathbb{R}^k$ определяется формулой

$$W(X, \psi) = \max_{\xi \in X} \langle \xi, \psi \rangle.$$

Теорема 1. Пусть для данной начальной точки z_0 и некоторого $t_1 \in [0, T]$ выполнено включение

$$Ne^{t_1 A} z_0 \in N\mathfrak{M} + \Pi_1(t_1). \quad (4)$$

Тогда существует такая стратегия $\tilde{u}_0(\cdot) \in U$, что

$$\sup_{v(\cdot) \in V} \theta(z_0, \tilde{u}_0(\cdot), v(\cdot)) \leq t_1.$$

Теорема 2. В условиях теоремы 1 существует наименьшее $t_1 \in [0, T]$, для которого выполняется включение (4).

2. Регуляризация первого прямого метода Л. С. Понтрягина

В связи с изложенным в первом параграфе, в частности, актуальной задачей является приближенное вычисление интеграла $\int_0^\tau \hat{w}(r) dr$ при данном $\tau \in (0, T]$. Основное соображение, которое мы здесь будем использовать, состоит в замене м. о. $\hat{w}(r)$ на подходящее м. о. $\Omega_\varepsilon(r)$, удовлетворяющее условию Липшица на $[0, \tau]$. Для построения м. о. $\Omega_\varepsilon(r)$ рассмотрим новый конфликтно управляемый объект (ср. с (1))

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}} &= A\bar{z} - Bu - \varepsilon\omega + Cv, \\ \bar{z}(0) &= z_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$, $v \in Q$, $\varepsilon > 0$, $\omega \in S_1(0)$ — шару единичного радиуса из \mathbb{R}^n с центром в O . Уравнение (5) можно рассматривать как возмущение уравнения (1).

Обозначим

$$B_\varepsilon = (B, \varepsilon E), \quad (6)$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u \\ \omega \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$P_1 = \{\bar{u} : u \in P, \omega \in S_1(0)\}, \quad (8)$$

где E — единичная матрица порядка n . Тогда уравнение (5) можно переписать в виде

$$\dot{\bar{z}} = A\bar{z} - B_\varepsilon \bar{u} + Cv, \quad (9)$$

где $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $\bar{u} \in P_1$, $v \in Q$. Рассмотрим при $r \in [0, T]$ м. о.

$$\Omega_\varepsilon(r) = Ne^{rA} B_\varepsilon P_1 \overset{*}{-} Ne^{rA} CQ. \quad (10)$$

В силу (6)–(8) при $r \in [0, T]$

$$Ne^{rA} B_\varepsilon P_1 = Ne^{rA} BP + \varepsilon Ne^{rA} S_1(0). \quad (11)$$

Из свойств операции $\overset{*}{-}$ и формул (10), (11) при $r \in [0, T]$ получаем включение

$$\hat{w}(r) + \varepsilon Ne^{rA} S_1(0) \subset \Omega_\varepsilon(r). \quad (12)$$

Так как P_1 — выпуклый компакт, то из (10), (12) и свойств операции $*$ вытекает, что $\Omega_\varepsilon(r)$ — непустой выпуклый компакт при $r \in [0, T]$. Можно показать далее, что при достаточно малой константе $\beta > 0$ при $r \in [0, T]$ выполняется включение

$$\tilde{S}_\beta(0) \subset Ne^{rA}S_1(0), \quad (13)$$

где $\tilde{S}_\beta(0)$ обозначает шар из \mathbb{R}^γ с центром в нуле и радиуса β . Из (12), (13) вытекает при $r \in [0, T]$ включение

$$\hat{w}(r) + \varepsilon\tilde{S}_\beta(0) \subset \Omega_\varepsilon(r).$$

Отсюда вытекает лемма.

Лемма 1. При $r \in [0, T]$ выпуклый компакт $\Omega_\varepsilon(r)$ содержит шар радиуса $\varepsilon\beta$ с центром в произвольной точке множества $\hat{w}(r)$.

Следующее утверждение будет полезно для дальнейшего.

Лемма 2. Существует столь большая константа $l > 0$, что при $\varepsilon \in (0, 1]$ и при произвольных $r', r'' \in [0, T]$ выполняется неравенство

$$h(\Omega_\varepsilon(r'), \Omega_\varepsilon(r'')) \leq \frac{l}{\varepsilon} |r' - r''|, \quad (14)$$

т. е. м. о. $\Omega_\varepsilon(r)$ удовлетворяет условию Липшица на $[0, T]$ с константой l/ε .

Доказательство. Отметим, что при $\varepsilon \in (0, 1]$ м. о. $Ne^{rA}B_\varepsilon P_1$, $Ne^{rA}CQ$ удовлетворяют на $[0, T]$ условию Липшица с некоторыми константами l_1, l_2 , не зависящими от ε . Справедливо также при $\varepsilon \in (0, 1]$, $r \in [0, T]$ неравенство

$$|Ne^{rA}B_\varepsilon P_1| \leq c_1,$$

где символ $|X|$ для непустого компакта $X \subset \mathbb{R}^\gamma$ обозначает величину $\max_{x \in X} |x|$, $c_1 \geq 0$ — достаточно большая константа.

Отсюда и из леммы 1 с помощью результатов параграфа 3 [3] можно получить искомое неравенство (14) при $r', r'' \in [0, T]$ и $|r' - r''| \leq \mu$, где $\mu > 0$ — достаточно малое число, не зависящее от $\varepsilon \in (0, 1]$. Далее, используя неравенство треугольника для метрики Хаусдорфа, можно перейти к общему случаю расположения r', r'' на $[0, T]$ с той же константой Липшица l/ε . Отметим, что константа l благодаря эффективности вычислений параграфа 3 [3] может быть вычислена конструктивно. Фиксируем $\tau \in (0, T]$. Для приближенного вычисления $\int_0^\tau \Omega_\varepsilon(r) dr$ при $h \in (0, \tau]$ рассмотрим множество

$$D(\varepsilon, h) = \sum_{i=0}^{\nu(h)} \Delta r_i \Omega_\varepsilon(r_i), \quad (15)$$

где $\nu(h)$ обозначает целую часть числа τ/h , $\Delta r_i = h$ при $i = 0, \dots, \nu(h) - 1$ и $\Delta r_i = \tau - \nu(h) \cdot h$ при $i = \nu(h)$, суммирование множеств $\Delta r_i \Omega_\varepsilon(r_i)$ понимается в алгебраическом смысле, $r_i = ih$, где $i = 0, \dots, \nu(h)$. Множество $D(\varepsilon, h)$ является выпуклым компактом. Его можно рассматривать как интегральную сумму для интеграла Римана (см., например, [3]) от м. о. $\Omega_\varepsilon(r)$ на $[0, \tau]$.

Этот риманов интеграл мы обозначим $R(\varepsilon)$. Существование интеграла $R(\varepsilon)$ следует из непрерывности м.о. $\Omega_\varepsilon(r)$ на $[0, \tau]$ при $\varepsilon \in (0, 1]$ [3]. Более того, $R(\varepsilon)$ — непустой выпуклый компакт и [3]

$$R(\varepsilon) = \int_0^\tau \Omega_\varepsilon(r) dr, \quad (16)$$

здесь интеграл справа понимается в смысле Аумана. Из (15), (16) и леммы 2 при $\varepsilon \in (0, 1]$, $h \in (0, \tau]$ вытекает следующее включение:

$$D(\varepsilon, h) \subset R(\varepsilon) + \frac{h}{\varepsilon} l\tau \tilde{S}_1(0). \quad (17)$$

В силу равенства (16) мы можем рассматривать множество $D(\varepsilon, h)$ (см. (15)) как некоторую аппроксимацию множества $\int_0^\tau \Omega_\varepsilon(r) dr$.

Изучим вопрос о последствиях замены множества $\Pi_1(\tau)$ множеством $D(\varepsilon, h)$. Допустим, что при данных $\tau \in (0, T]$, $\varepsilon \in (0, 1]$, $h \in (0, \tau]$ выполняется включение

$$Ne^{\tau A} z_0 \in N\mathfrak{M} + D(\varepsilon, h).$$

Отсюда с помощью (16), (17) получаем включение

$$Ne^{\tau A} z_0 \in \left(N\mathfrak{M} + \frac{h}{\varepsilon} l\tau \tilde{S}_1(0) \right) + \int_0^\tau \Omega_\varepsilon(r) dr. \quad (18)$$

Напомним, что по исходному предположению ранг $(\gamma \times n)$ -матрицы матрицы N равен $\gamma \geq 1$. Обозначим через L^\perp ортогональное дополнение линейного подпространства L в \mathbb{R}^n и через N^+ псевдообратную матрицу для матрицы N [13]. Отметим, что она осуществляет взаимнооднозначное отображение пространства \mathbb{R}^γ на L^\perp . Обозначим далее (см. (3), (18))

$$M(\varepsilon, h) = \mathfrak{M}(\varepsilon, h) + L, \quad (19)$$

$$\mathfrak{M}(\varepsilon, h) = \mathfrak{M} + \frac{h}{\varepsilon} l\tau N^+ \tilde{S}_1(0). \quad (20)$$

Тогда включение (18) переписывается в виде

$$Ne^{\tau A} z_0 \in N\mathfrak{M}(\varepsilon, h) + \int_0^\tau \Omega_\varepsilon(r) dr.$$

Теперь к конфликтно управляемому объекту (5) (см. также (9)) с начальным состоянием $\bar{z}(0) = z_0$, терминальным множеством $M(\varepsilon, h)$ и м.о. $\Omega_\varepsilon(r)$, определяемым формулой (10), можно применить аналог теоремы 1 и обосновать существование такой суперпозиционно измеримой функции

$$\bar{u}_{\varepsilon, h}(t, v) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_{\varepsilon, h}(t, v) \\ \omega_{\varepsilon, h}(t, v) \end{pmatrix} \quad (21)$$

при $t \geq 0$, $v \in Q$, что там выполняются включения

$$\tilde{u}_{\varepsilon,h}(t,v) \in P, \quad \omega_{\varepsilon,h}(t,v) \in S_1(0) \quad (22)$$

и

$$\sup_{v(\cdot) \in V} \bar{\theta}(z_0, \bar{u}_{\varepsilon,h}(\cdot), v(\cdot)) \leq \tau.$$

Здесь символ $\bar{\theta}(z_0, \bar{u}_{\varepsilon,h}(\cdot), v(\cdot))$ обозначает момент первого попадания решения $\bar{z}_{\varepsilon,h}(t)$ уравнения (9) (см. также (5)–(8)) при $\bar{z}(0) = z_0$, $\bar{u} = \bar{u}_{\varepsilon,h}(t, v(t))$, $v = v(t)$, где $v(t) \in Q$, $t \geq 0$ — произвольная измеримая функция, на терминальное множество $M(\varepsilon, h)$ (см. (19), (20)). Подставим также $u = \tilde{u}_{\varepsilon,h}(t, v(t))$ (см. (21)), $v = v(t)$, где $v(t) \in Q$, $t \geq 0$ — произвольная измеримая функция, в уравнение (1) и решим его с начальным условием $z(0) = z_0$. Получим решение $z_{\varepsilon,h}(t)$. Используя формулу Коши (см. (1)), при $t \geq 0$ получаем (см. (1), (5), (21)) соотношение

$$\bar{z}_{\varepsilon,h}(t) = z_{\varepsilon,h}(t) - \varepsilon \int_0^t e^{(t-s)A} \omega_{\varepsilon,h}(s, v(s)) ds. \quad (23)$$

Отметим, что в силу (22) при $s \geq 0$

$$|\omega_{\varepsilon,h}(s, v(s))| \leq 1. \quad (24)$$

Из (23), (24) вытекает, что при достаточно большой эффективно вычислимой константе $c_2 > 0$ при $t \in [0, \tau]$ имеет место неравенство

$$|z_{\varepsilon,h}(t) - \bar{z}_{\varepsilon,h}(t)| \leq c_2 \varepsilon.$$

Итак, используя стратегию $\tilde{u}_{\varepsilon,h}(t, v)$, догоняющий для конфликтно управляемого процесса (1) гарантирует окончание преследования на терминальном множестве (см. (19))

$$M_1(\varepsilon, h) = M(\varepsilon, h) + c_2 \varepsilon S_1(0) \quad (25)$$

не позже момента τ при произвольной измеримой функции $v(t) \in Q$, $t \geq 0$. Обозначим

$$c_3 = l\tau \|N^+\|, \quad (26)$$

где норма $\|F\|$ для $(\gamma \times n)$ -матрицы F определяется по формуле

$$\|F\| = \max_{|y| \leq 1} |Fy|.$$

Из (3), (19), (20), (25), (26) получаем включение

$$M_1(\varepsilon, h) \in M + \left(\frac{h}{\varepsilon} c_3 + c_2 \varepsilon \right) S_1(0).$$

Функция

$$f(h, \varepsilon) = c_3 \frac{h}{\varepsilon} + c_2 \varepsilon$$

характеризует точность приведения $z_{\varepsilon,h}(t)$ на исходное терминальное множество M за время, не превосходящее τ . Для приложений обычно достаточно

гарантировать приведение точки $z(t)$ (см. (1)) на замкнутую δ -окрестность терминального множества M (см. (3)), где $\delta > 0$ — малое число. Полагая $h = \varepsilon^2$, приходим к неравенству

$$f(\varepsilon^2, \varepsilon) = (c_3 + c_2)\varepsilon \leq \delta.$$

Итак, при выполнении соотношений $\varepsilon \in (0, 1]$, $(c_3 + c_2)\varepsilon \leq \delta$, $\varepsilon^2 \leq \tau$ стратегия $\tilde{u}_{\varepsilon, \varepsilon^2}(\cdot)$ гарантирует окончание преследования для конфликтно управляемого процесса с $z(0) = z_0$ при произвольной $v(\cdot) \in V$ на терминальном множестве $M + \delta S_1(0)$ на отрезке времени $[0, \tau]$.

3. О втором прямом методе Л. С. Понтрягина

В этом параграфе снова рассматривается конфликтно управляемый процесс (1) с теми же предположениями относительно компактов $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$, что и в параграфе 1. Задано также начальное условие $z(0) = z_0$. В качестве терминального множества M фиксируется некоторое непустое замкнутое выпуклое множество из \mathbb{R}^n , причем $M \neq \mathbb{R}^n$. (Мы не будем предполагать в этом параграфе, что M имеет специальную структуру (3).)

Выбором вектора $u \in P$ распоряжается догоняющий игрок (pursuer), а выбором вектора $v \in Q$ — убегающий игрок (evader). Целью догоняющего является по возможности скорейшее приведение точки $z(t)$ на M . Мы будем рассматривать конфликтно управляемый процесс (1) с терминальным множеством M с точки зрения догоняющего игрока. В качестве множества W стратегий убегающего мы рассмотрим всевозможные пары вида $w = (\varepsilon, v(\cdot))$, где число $\varepsilon > 0$, а измеримое управление $v(t) \in Q$ при $t \geq 0$. Предполагается, что догоняющий игрок знает матрицы A, B, C (см. (1)), терминальное множество M , начальное состояние z_0 , а также величину $\varepsilon > 0$ до начала игрового процесса, а при $t \geq 0$ предполагается также знание “части” управления убегающего $v(s)$ вида

$$v_{t+\varepsilon}(\cdot) = \{v(s), s \in [0, t + \varepsilon]\}.$$

Таким образом, в этом параграфе информированность догоняющего об управлении $v(s)$ существенно больше, чем в параграфе 1. Однако отметим, что величина $\varepsilon > 0$ выбирается убегающим игроком, и это обстоятельство существенно. В качестве стратегий догоняющего \mathfrak{U} фиксируется множество функций $\tilde{u}(t, \varepsilon, v_{t+\varepsilon}(\cdot))$, которые при фиксированном $\varepsilon > 0$ и произвольной функции $v(\cdot) \in V$ обладают свойствами: функция $u(t) = \tilde{u}(t, \varepsilon, v_{t+\varepsilon}(\cdot)) \in P$ при $t \geq 0$ и является измеримой при $t \geq 0$. По аналогии с параграфом 1 четверке $\tilde{u}(\cdot) \in \mathfrak{U}$, $w \in W$, z_0, M сопоставляется величина $\theta(z_0, \tilde{u}(\cdot), w)$. Второй прямой метод Л. С. Понтрягина дает эффективные достаточные условия, при которых для данной начальной точки z_0 выполняется неравенство

$$\inf_{\tilde{u}(\cdot) \in \mathfrak{U}} \sup_{w \in W} \theta(z_0, \tilde{u}(\cdot), w) < +\infty,$$

т. е. для точки z_0 существует стратегия $\tilde{u}_0(\cdot) \in \mathfrak{U}$ такая, что

$$\sup_{w \in W} \theta(z_0, \tilde{u}_0(\cdot), w) < +\infty.$$

Второй прямой метод использует понятие *альтернированного интеграла*. Напомним его. Фиксируем отрезок $[0, \tau]$, где $\tau > 0$, и рассмотрим на нем м. о.

$$U(r) = e^{rA}BP, \quad V(r) = e^{rA}CQ.$$

Рассмотрим далее произвольное разбиение $\omega = \{r_i\}_0^k$ отрезка $[0, \tau]$, где $k \geq 1$ и

$$r_0 = 0 < r_1 < \dots < r_k = \tau, \quad (27)$$

а также римановские интегралы

$$U_i = \int_{r_{i-1}}^{r_i} U(r) dr, \quad V_i = \int_{r_{i-1}}^{r_i} V(r) dr.$$

Обозначим

$$\Pi_0 = M, \quad \Pi_i = (\Pi_{i-1} + U_i) * V_i,$$

где $i = 1, \dots, k$. Для дальнейшего представляет особый интерес множество Π_k , которое обозначим Π_ω и назовем *альтернированной суммой*. Вообще говоря, множество Π_ω может оказаться пустым. Альтернированный интеграл Понтрягина $\Pi_2(\tau)$ определим формулой

$$\Pi_2(\tau) = \bigcap_{\omega} \Pi_\omega, \quad (28)$$

где пересечение берется по всевозможным допустимым разбиениям ω вида (27).

Не исключено, что множество $\Pi_2(\tau)$ может оказаться пустым. Непустота множества $\Pi_2(\tau)$ означает некоторую форму превосходства догоняющего над убегающим. Отметим, что естественно положить $\Pi_2(0) = M$.

Аналогом теоремы 1 из параграфа 1 является следующая теорема.

Т е о р е м а 3. Пусть при данном $\tau > 0$ множество $\Pi_2(\tau) \neq \emptyset$ и для данного начального состояния z_0 выполняется включение

$$e^{\tau A} z_0 \in \Pi_2(\tau).$$

Тогда для z_0 существует такая стратегия $\tilde{u}_0(\cdot) \in \mathfrak{U}$, что для нее имеет место неравенство

$$\sup_{w \in W} \theta(z_0, \tilde{u}_0(\cdot), w) \leq \tau.$$

Аналог теоремы 2 здесь также имеет место.

Вычисление $\Pi_2(\tau)$ по формуле (28) представляет большие сложности.

Вместо произвольных разбиений ω можно брать более специальные разбиения (см., например, [3]), но этим трудности вычисления не снимаются.

Мы займемся вопросом о возможности замены альтернированного интеграла $\Pi_2(\tau)$ альтернированной суммой Π_ω . Фиксируем $\tau > 0$, $h \in (0, \tau]$ и рассмотрим разбиение $\omega(h)$ отрезка $[0, \tau]$ специального вида. Для него числа k , r_i определяются следующим образом:

- если $\frac{\tau}{h}$ — целое число, то полагаем $k = \frac{\tau}{h}$ и $r_i = ih$ при $i = 0, \dots, k$;
- если $\frac{\tau}{h}$ — дробное число, то полагаем $k = \frac{\tau}{h} + 1$ и $r_i = ih$ при $i = 0, \dots, \frac{\tau}{h}$, а $r_k = \tau$.

Предположим, что альтернированная сумма $\Pi_{\omega(h)} \neq \emptyset$ и выполнено включение

$$e^{\tau A} z_0 \in \Pi_{\omega(h)}.$$

Используя рассуждения работы [3] и формулу Коши (2), можно показать, что существует такая функция $\tilde{u}_0(t, h, v_{t+h}(\cdot))$, что при произвольной измеримой функции $v(t) \in Q, t \geq 0$ функция

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}_0(t, h, v_{t+h}(\cdot)) \tag{29}$$

измерима при $t \geq 0$ и $\tilde{u}(t) \in P$ там, причем соответствующее решение $\tilde{z}(t, \tilde{u}(\cdot), v(\cdot))$ уравнения (1) с начальным условием $z(0) = z_0$ удовлетворяет соотношению

$$\tilde{z}(\tau, \tilde{u}(\cdot), v(\cdot)) \in M. \tag{30}$$

Произвольной измеримой функцией $v(t) \in Q, t \geq 0$ сопоставим другую измеримую функцию

$$\hat{v}(t) = \begin{cases} v_0 & \text{при } t \in [0, h), \\ v(t-h) & \text{при } t \geq h, \end{cases} \tag{31}$$

где v_0 — фиксированный вектор из Q . Подставляя в (29), (30) вместо функции $v(\cdot)$ функцию $\hat{v}(\cdot)$, получим, что

$$z(\tau, \hat{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot)) \in M, \tag{32}$$

где (см. (29))

$$\hat{u}(t) = \tilde{u}_0(t, h, \hat{v}_{t+h}(\cdot)), \quad t \geq 0. \tag{33}$$

Знание функции $\hat{v}(s)$ при $s \in [0, t+h]$ при каждом $t \geq 0$ представляется более реалистичным, нежели знание функции $v(s)$ при $s \in [0, t+h]$ при каждом $t \geq 0$ (вектор v_0 выбирается догоняющим). Теперь подставим в уравнение (1) произвольную измеримую функцию $v(t) \in Q, t \geq 0$ и $\hat{u}(t)$ (см. (31), (33)) и решим его с начальным условием $z(0) = z_0$. Соответствующее решение обозначим $\hat{z}(t)$. Тогда с помощью формулы Коши (2) и соотношений (31), (32) получим соотношение

$$\hat{z}(\tau) \in M + \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} C(v(s) - \hat{v}(s)) ds. \tag{34}$$

Нетрудно с помощью формулы (31) обосновать неравенство

$$\left| \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} C(\hat{v}(s) - v(s)) ds \right| \leq c_3 h, \tag{35}$$

где $c_3 > 0$ достаточно большая эффективно вычислимая константа, не зависящая от измеримой функции $v(t) \in Q, t \geq 0$ и величины $h \in (0, \tau]$. Из (34), (35) получаем включение

$$\hat{z}(\tau) \in M + c_3 h S_1(0). \tag{36}$$

Величину $c_3 h$ можно рассматривать как косвенную характеристику отклонения множества $\Pi_{\omega(h)}$ от $\Pi_2(\tau)$ в случае непустоты обоих множеств. Отметим, что в прежних работах, посвященных второму методу Понтрягина (см., например, [14]), непосредственно оценивается скорость сходимости альтернированных сумм к альтернированному интегралу. Но это удается сделать лишь при специальных предположениях относительно этого множества. Наша же косвенная оценка (36) была получена в общем случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00359-а). Благодарю Н. Л. Григоренко и других участников семинара кафедры оптимального управления факультета ВМК МГУ за полезные для меня замечания.

Список литературы

1. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 1 // Докл. АН СССР.— 1967.—Т. 174, № 6.—С. 1278–1280.
2. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 2 // Докл. АН СССР.— 1967.—Т. 175, № 4.—С. 764–766.
3. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования // Матем. сб. Нов. сер.—1980.—Т. 112, вып. 3.—С. 307–330.
4. Никольский М. С. Первый прямой метод Л. С. Понтрягина в дифференциальных играх.— М.: Изд-во МГУ, 1984.
5. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач.— М.: Наука, 1974.
6. Благодатских В. И. Введение в оптимальное управление.— М.: Высшая школа, 2001.
7. Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.— М.: Наука, 1966.
8. Половинкин Е. С., Иванов Г. Е., Балашов М. В., Константинов Р. В., Хорев А. В. Об одном алгоритме численного решения линейных дифференциальных игр // Матем. сб. Нов. сер.—2001.—Т. 192, № 10.—С. 95–122.
9. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры.— М.: Наука, 1974.
10. Пшеничный Б. Н., Остапенко В. В. Дифференциальные игры.— Киев: Наукова думка, 1992.
11. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. Теория игр.— М.: Высшая школа, 1998.
12. Силин Д. Б. Регулярность экстремалей в задачах оптимального управления: Автореф. ... дис. докт. физ.-мат. наук.— М., 1991.—183 с.
13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Физматлит, 2004.
14. Пономарев А. П. Оценка погрешности численного метода построения альтернированного интеграла Понтрягина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, Вычисл. матем. и киберн.—1978.—№ 4.—С. 37–43.

О РЕКОНСТРУКЦИИ НЕИЗВЕСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ОДНОЙ СИСТЕМЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

К. Кесман, В. И. Максимов

Рассматриваются задачи динамической идентификации неизвестных характеристик в системе третьего порядка. Указывается ориентированный на работу в реальном времени алгоритм решения этой задачи. Алгоритм опирается на конструкции теории устойчивого динамического обращения. Последняя основана на соединении методов теории некорректных задач и теории позиционного управления. Суть методики состоит в том, что алгоритм восстановления представляется в виде алгоритма управления некоторой искусственной динамической системой — моделью. Управление в модели адаптируется к результатам текущих наблюдений таким образом, что его реализация во времени “аппроксимирует” неизвестный вход.

1. Введение

В работе рассматривается задача восстановления неизвестных характеристик в системе нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка, описывающих процессы в биореакторе с подпиткой. Указывается ориентированный на компьютерную реализацию алгоритм решения этой задачи.

Обсуждаемая задача относится к классу обратных задач динамики управляемых систем и в более общем контексте вкладывается в проблематику теории некорректных задач [1, 2]. В апостериорной постановке — в отсутствие требования динамичности алгоритма восстановления — теория подобного типа задач развита достаточно глубоко [3]. Требование динамичности — особенность рассматриваемой постановки — проявляется в ситуациях, когда текущие значения входа используются для принятия решений по ходу процесса.

Представляемая в данной работе методика идейно следует теории устойчивого динамического обращения, развитой в [4–7]. Последняя основана на соединении методов теории некорректных задач [1, 2] и теории позиционного управления [8]. Суть этой теории состоит в том, что алгоритм восстановления представляется в виде алгоритма управления некоторой вспомогательной динамической системой — моделью; такой алгоритм, выходом которого служит в частности реализация управления в модели, по своему определению, является динамическим. Управление в модели адаптируется к результатам текущих наблюдений таким образом, что его реализация во времени подпадает под условия какого-либо принципа регуляризации; тем самым обеспечивается устойчивость алгоритма. Предлагаемый ниже алгоритм управления моделью основан на модифицированном принципе сглаживающего функционала, трактуемого как подходящий функционал типа Ляпунова. Управление в модели строится таким образом, чтобы обеспечить малую скорость возрастания этого функционала.

2. Динамическая модель биореактора с подпиткой

Содержательный пример, который исследуется в данной работе, связан с работами [9, 10], которые фокусируются на задаче оптимального планирования эксперимента при моделировании биореактора. Настоящая статья может рассматриваться как продолжение указанных работ.

Не теряя общности, будем полагать, что концентрация растворенного кислорода в подпитке соответствует уровню насыщения, т. е. она не подвергается воздействию бактерий, которые, по предположению, отсутствуют в подпитке. Потребление субстрата бактериями в реакторе является аэробным и непосредственно влияет на концентрацию растворенного кислорода в реакторе. Следующая нелинейная динамическая модель описывает биохимические процессы в реакторе [9–11]:

$$\begin{aligned}\frac{dC_{DO}(t)}{dt} &= k_{La}(C_{\text{sat}}^{\text{en}} - C_{DO}(t)) - OUR(t) + \frac{F_{\text{in}}(t)}{V(t)}(C_{\text{sat}} - C_{DO}(t)), \\ \frac{dC_X(t)}{dt} &= \mu(C_S(t))C_X(t) - \frac{F_{\text{in}}(t)}{V(t)}C_X(t), \\ \frac{dC_S(t)}{dt} &= -\frac{\mu(C_S(t))}{Y}C_X(t) + \frac{F_{\text{in}}(t)}{V(t)}(C_{S,\text{in}}(t) - C_S(t)),\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}V(t) &= \int_0^t F_{\text{in}}(\tau) d\tau + V(t_0), \\ OUR(t) &= \frac{(1-Y)}{Y}\mu(C_S(t))C_X(t), \\ \mu(C_S(t)) &= \mu_{\text{max}}(t)\frac{C_S(t)}{K_S + C_S(t)}, \quad t \in T = [t_0, \vartheta].\end{aligned}$$

Здесь и ниже k_{La} — коэффициент аэрирования, $V(t)$ — объем реактора, $C_{\text{sat}}^{\text{en}}$ — концентрация растворенного кислорода на уровне насыщения, включая малую (постоянную) коррекцию для эндогенного дыхания биомассы, C_{sat} — (нормальная) концентрация растворенного кислорода на уровне насыщения в подпитке, $\mu_{\text{max}}(t)$ — коэффициент максимальной скорости роста, K_S — постоянная полунасыщения, Y — коэффициент текучести биомассы на субстрате, $OUR(t)$ — скорость поглощения кислорода биомассой в реакторе, $C_{DO}(t)$ — концентрация растворенного кислорода в реакторе, $C_X(t)$ — концентрация биомассы, $C_S(t)$ — скорость роста биомассы. Заметим, что в (1) величина $\mu_{\text{max}}(t)$ является меняющимся во времени параметром. Чаще всего этот параметр меняется вследствие адаптации организмов, дополнительных ограничений на субстрат или, в общем, вследствие погрешностей кинетического моделирования.

Заметим, что первое уравнение в (1) описывает концентрацию растворенного кислорода в реакторе, причем первое слагаемое в правой части представляет естественное аэрирование, второе — поглощение кислорода аэробной биомассой и последнее — подпитку и разбавление растворенного кислорода. Второе уравнение в (1) описывает динамику биомассы; здесь первое слагаемое в правой части описывает рост биомассы, а последнее — разбавление. Это, первое слагаемое, отвечающее за рост, с некоторым коэффициентом текучести (Y) также присутствует в третьем уравнении в (1),

но в качестве слагаемого, характеризующего элемент поглощения в балансе субстрата.

Далее полагаем, что имеются *данные только по растворенному кислороду* и нет никакой информации ни по биомассе, ни по субстрату. Эти ограниченные информативные возможности являются причиной некорректности задачи реконструкции $\mu_{\max}(t)$ и состояний $C_X(t)$, $C_S(t)$. В дальнейшем основное внимание будет уделено одновременному оцениванию параметра $\mu_{\max}(t)$, концентрации биомассы $C_X(t)$ и скорости роста биомассы $C_S(t)$ на основе неточных измерений концентрации растворенного кислорода $C_{DO}(t)$. Поэтому будем считать, что параметры $V(t_0)$, Y , K_S , $C_X(t_0)$, $C_S(t_0)$, $C_{\text{sat}}^{\text{en}}$, C_{sat} , k_{La} и функции $F_{\text{in}}(t)$, $C_{S,\text{in}}(t)$ либо уже оценены априори, либо взяты из литературы, имеющейся в достаточном количестве.

3. Постановка задачи и описание алгоритма решения

Рассматриваемая в данной работе задача состоит в следующем. Известная функция (коэффициент) $\mu_{\max}(t)$ действует на систему (1), порождая этим некоторое (неизвестное) решение

$$C(t) = C(t; C_0, \mu_{\max}) = (C_{DO}(t), C_X(t), C_S(t)),$$

где

$$C_0 = (C_{DO}(t_0), C_X(t_0), C_S(t_0))$$

— начальное состояние системы, которое мы считаем известным. Промежуток времени T разбит на подинтервалы $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\delta > 0$, $i \in [0 : m]$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$. В дискретные (достаточно частые) моменты времени τ_i координата $C_{DO}(\tau_i)$ измеряется с ошибкой, т. е., находятся числа $\xi_i^h = \xi(\tau_i) \in \mathbb{R}$ такие, что справедливы неравенства

$$|C_{DO}(\tau_i) - \xi_i^h| \leq h \quad (2)$$

для всех $i = 1, \dots, m$. Здесь и всюду ниже символ $|x|$ означает абсолютную величину числа a . Требуется сконструировать алгоритм вычисления функций $v(t) = v^h(t)$ и $w^h(t) = \{w_1^h(t), w_2^h(t)\}$, аппроксимирующих $\mu_{\max}(t)$ и $C_X(t), C_S(t)$ соответственно.

В дальнейшем полагаем известным число $K \in (0, +\infty)$ такое, что неизвестные функции $\mu_{\max}(t)$ и $OUR(t)$ стеснены следующими ограничениями:

$$OUR(t), \quad \mu_{\max}(t) \in L_\infty(T; \mathbb{R}), \quad |OUR(t)| \leq K \text{ при п. в. } t \in T. \quad (3)$$

Будем считать в дальнейшем выполненным следующее условие.

Условие 1. $b_0 \leq F_{\text{in}}(t) \leq b_1$ при почти всех $t \in T$, $0 \leq b_0 \leq b_1$,

$$\begin{aligned} Y &\in (0, 1), & V(t) &\geq V_0 > 0, \\ C_{S,\text{in}}(t) &\in C^1(T; \mathbb{R}), & F_{\text{in}}(t) &\in L_\infty(T; \mathbb{R}), \\ C_X(t) &\geq C_X > 0, & C_S(t) &\geq C_S > 0. \end{aligned}$$

Здесь \mathbb{R} означает множество всех действительных чисел; $C^1(T; \mathbb{R})$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x(t) : T \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|x(t)\|_{C^1} = \max\{\max_{t \in T} |x(t)|, \max_{t \in T} |\dot{x}(t)|\};$$

$L_\infty(T; \mathbb{R})$ — пространство измеримых по Лебегу функций $x(t) : T \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|x(t)\|_{L_\infty} = \text{vraisup}_{t \in T} |x(t)|$. В дальнейшем полагаем функцию $V(t)$ известной.

Для решения рассматриваемой задачи применим метод вспомогательных позиционно-управляемых моделей, развитый в работах [4–7]. Следуя этому методу, сначала выберем и зафиксируем семейство

$$\begin{aligned} \Delta_h &= \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = t_0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \\ \tau_{h,i+1} &= \tau_{h,i} + \delta(h), \quad m_h = (\vartheta - t_0)\delta^{-1}(h) \end{aligned} \quad (4)$$

разбиений промежутка времени T с диаметрами

$$\delta(h) = \delta(\Delta_h), \quad \delta(h) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Здесь h означает величину погрешности измерения. Затем введем вспомогательную систему M , функционирующую синхронно с реальной системой (1). Заметим, что

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{F_{\text{in}}(t)}{V(t)} &= \frac{\dot{V}(t)}{V(t)} \approx \frac{\ln\left(\frac{V(\tau_{i+1})}{V(\tau_i)}\right)}{\delta}, \\ \text{(ii)} \quad F_{\text{in}}(\tau_i) &\approx \frac{V_i - V_{i-1}}{\delta}. \end{aligned}$$

Поэтому в качестве M возьмем дискретную *линейную* систему вида

$$\begin{aligned} w_0^h(\tau_{i+1}) &= w_0^h(\tau_i) + \delta\{k_{La}(C_{\text{sat}}^{\text{en}} - \xi_i^h) - \varphi_i^h\} + \ln(V(\tau_{i+1})V^{-1}(\tau_i))(C_{\text{sat}} - \xi_i^h), \\ w_1^h(\tau_{i+1}) &= W(\tau_{i+1})C_X(t_0) + V^{-1}(\tau_{i+1})\delta \sum_{j=0}^i V(\tau_j)\psi_j^h, \\ w_2^h(\tau_{i+1}) &= W(\tau_{i+1})C_S(t_0) + C_{S,\text{in}}(\tau_{i+1}) - W(\tau_{i+1})C_{S,\text{in}}(t_0) - \\ &\quad - V^{-1}(\tau_{i+1}) \left[\sum_{j=0}^i (C_{S,\text{in}}(\tau_{j+1}) - C_{S,\text{in}}(\tau_j))V(\tau_j) + \delta Y^{-1} \sum_{j=0}^i V(\tau_j)\psi_j^h \right], \end{aligned} \quad (5)$$

с начальным условием

$$w_0^h(t_0) = \xi_0^h, \quad w_1^h(t_0) = C_X(t_0), \quad w_2^h(t_0) = C_S(t_0).$$

Здесь

$$\psi_i^h = \frac{Y\varphi_i^h}{(1-Y)}, \quad \varphi_i^h = \varphi^h(\tau_i), \quad W(\tau_j) = V^{-1}(\tau_j)V(t_0).$$

Таким образом, модель M имеет в качестве входа управление $\varphi^h(\cdot)$, а в качестве выхода — траекторию $w^h(\cdot)$

$$\varphi^h(t) = \varphi_i^h, \quad w^h(t) = \{w_0^h(t), w_1^h(t), w_2^h(t)\} = w^h(\tau_i), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

где вектора $w^h(\tau_i)$ находятся по формулам (5), а закон определения φ_i^h указан ниже.

Перейдем к описанию алгоритма. До момента t_0 фиксируются величина $h \in (0, 1)$, функция

$$\alpha = \alpha(h) : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\},$$

разбиение $\Delta = \Delta_h$ (4) с диаметром $\delta = \delta(\Delta_h)$ и модель (5). Затем организуется процесс управления по принципу обратной связи моделью M синхронно с развитием процесса функционирования системы (1). Работа алгоритма начинается в момент t_0 и разбивается на $m_h - 1$ идентичных шагов. Во время i -го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, осуществляются следующие операции. Сначала находится управление в модели

$$\varphi^h(t) = \varphi_i^h, \quad t \in \delta_i, \quad (6)$$

согласно принципу обратной связи ($\alpha(h)$ и K — вспомогательные параметры)

$$\varphi_i^h = \varphi_i^h(\xi_i^h, w_0^h(\tau_i)) = \begin{cases} -s_i \alpha^{-1}(h), & \text{если } |s_i| \leq \alpha(h)K \\ -K \operatorname{sign} s_i & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$s_i = \xi_i^h - w_0^h(\tau_i)$. Затем находится фазовое состояние $w^h(\tau_{i+1})$ модели в момент τ_{i+1} согласно (5). После этого функция $v^h(\cdot)$ — приближение функции $\mu_{\max}(\cdot)$ — находится по правилу

$$v^h(t) = v_i^h, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

где

$$v_i^h = v_i^h(\xi_i^h, \varphi_i^h, w^h(\tau_i)) = \frac{Y(K_S + w_2^h(\tau_i))\varphi_i^h}{(1 - Y)w_1^h(\tau_i)w_2^h(\tau_i)}.$$

Алгоритм заканчивает работу в момент ϑ .

Сходимость алгоритма устанавливается в теореме 1 (см. ниже). Введем следующее условие.

Условие 2. *Найдутся числа $w_1 > 0$ и $w_2 > 0$ такие, что для всех $h \in (0, 1)$ и $t \in T$ выполнены неравенства:*

$$w_1^h(t) \geq w_1, \quad w_2^h(t) \geq w_2.$$

Итак, имеет место теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1, 2, а также следующие условия согласования параметров алгоритма:*

$$\alpha(h) \rightarrow 0, \quad (h + \delta(h))\alpha^{-1}(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (7)$$

Тогда имеют место сходимости

$$\sup_{t \in T} |w_1^h(t) - C_X(t)| \rightarrow 0, \quad \sup_{t \in T} |w_2^h(t) - C_S(t)| \rightarrow 0,$$

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |v^h(\tau) - \mu_{\max}(\tau)|^2 d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Как видно из этой теоремы, функция

$$v^h(t) = v^h(\xi(t), \varphi^h(t), w^h(t))$$

может рассматриваться в качестве “приближения” неизвестного переменного коэффициента $\mu_{\max}(t)$ при соответствующем значении h , а функции $w_1^h(t)$, $w_2^h(t)$ — приближениями $C_X(t)$ и $C_S(t)$ соответственно.

4. Доказательство сходимости алгоритма

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы 1, приведем вспомогательные оценки.

Пусть

$$c^{(0)} = 2F_{\max}(C_{S,\text{in}}(t_0) + C_{\max}(\vartheta - t_0))$$

и

$$i(t) = \kappa((t - t_0)/\delta),$$

где $\kappa(a)$ означает целую часть числа a . Введем величину

$$a(t) = \frac{d(\ln V(t))}{dt}.$$

Лемма 1. Пусть

$$|\dot{C}_{S,\text{in}}(t)| \leq C_{\max} \quad \text{и} \quad 0 < F_{\text{in}}(t) \leq F_{\max}$$

при почти всех $t \in T$. Тогда справедливо неравенство

$$\left| \int_{t_0}^t V(\tau) a(\tau) C_{S,\text{in}}(\tau) d\tau - \left[C_{S,\text{in}}(\tau_{i(t)}) V(\tau_{i(t)}) - C_{S,\text{in}}(t_0) V(t_0) - \sum_{i=0}^{i(t)-1} (C_{S,\text{in}}(\tau_{i+1}) - C_{S,\text{in}}(\tau_i)) V(\tau_i) \right] \right| \leq c^{(0)} \delta \quad \text{при всех } t \in T.$$

Доказательство. Из неравенства

$$|V(t) - V(t + \delta)| \leq \int_t^{t+\delta} |F_{\text{in}}(\tau)| d\tau \leq F_{\max} \delta, \quad t, t + \delta \in T,$$

следует оценка

$$\left| \int_{t_0}^t \dot{C}_{S,\text{in}}(\tau) (V(\tau) - V_\delta(\tau)) d\tau \right| \leq F_{\max} (t - t_0) C_{\max} \delta, \quad (8)$$

где $V_\delta(t) = V(\tau_i)$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Заметим, что

$$\int_t^{t+\delta} |V(\tau) a(\tau) C_{S,\text{in}}(\tau)| d\tau \leq F_{\max} (C_{S,\text{in}}(t_0) + C_{\max}(\vartheta - t_0)) \delta.$$

Поэтому при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ имеем

$$\left| \int_{t_0}^{\tau_i} V(\tau) a(\tau) C_{S,\text{in}}(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t V(\tau) a(\tau) C_{S,\text{in}}(\tau) d\tau \right| \leq \quad (9)$$

$$\leq F_{\max}(C_{S,\text{in}}(t_0) + C_{\max}(\vartheta - t_0))\delta.$$

В таком случае после интегрирования по частям получаем

$$\int_{t_0}^{\tau_i} V(\tau)a(\tau)C_{S,\text{in}}(\tau) d\tau = V(\tau_i)C_{S,\text{in}}(\tau_i) - V(t_0)C_{S,\text{in}}(t_0) - \int_{t_0}^{\tau_i} V(\tau)\dot{C}_{S,\text{in}}(\tau) d\tau.$$

Нужное неравенство вытекает из (8), (9) и предыдущего равенства. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1, $V(t) \geq V_0 > 0$ и

$$\tilde{b}(\tau) = \tilde{b}_j \quad \text{при } \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad |\tilde{b}_j| \leq d \quad \text{при } j \in [0 : m_h - 1].$$

Тогда имеет место неравенство

$$\left| V^{-1}(t) \int_{t_0}^t V(\tau)\tilde{b}(\tau) d\tau - V^{-1}(\tau_{i(t)})\delta \sum_{j=0}^{i(t)} V(\tau_j)\tilde{b}_j \right| \leq c_1\delta \quad \text{при } t \in T.$$

Лемма 2 доказывается простыми алгебраическими преобразованиями.

Введем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{C}_{x\psi}(t) &= \psi(t) - a(t)C_{x\psi}(t), \quad t \in T, \\ \dot{C}_{S\psi}(t) &= -\frac{\psi(t)}{Y} + a(t)C_{S,\text{in}}(t) - a(t)C_{S\psi}(t) \end{aligned} \quad (10)$$

с начальными условиями

$$C_{x\psi}(t_0) = C_X(t_0), \quad C_{S\psi}(t_0) = C_S(t_0)$$

и функцией $\psi(\cdot)$ вида

$$\psi(t) = \psi_j^h = Y\varphi_j^h/(1-Y) \quad \text{при } t \in [\tau_j, \tau_{j+1}).$$

Определим кусочно-постоянные функции

$$w_1^h(t) = w_1^h(\tau_i), \quad w_2^h(t) = w_2^h(\tau_i) \quad \text{при } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \cap T.$$

Лемма 3. Пусть выполнены условия лемм 1 и 2. Тогда верны неравенства

$$|C_{x\psi}(t) - w_1^h(t)| \leq c_2\delta, \quad |C_{S\psi}(t) - w_2^h(t)| \leq c_3\delta \quad \text{при } t \in T.$$

Доказательство. Заметим, что уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t) - a(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad f(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}),$$

имеет решение, которое может быть найдено по формуле Коши

$$x(t) = V^{-1}(t)V(t_0)x_0 + V^{-1}(t) \int_{t_0}^t V(\tau)f(\tau) d\tau.$$

Поэтому решение системы (10) находится по формулам

$$C_{x\psi}(t) = V^{-1}(t)V(t_0)C_X(t_0) + \int_{t_0}^t V^{-1}(t)V(\tau)\psi(\tau) d\tau,$$

$$C_{S\psi}(t) = V^{-1}(t)V(t_0)C_S(t_0) + \int_{t_0}^t V^{-1}(t)V(\tau)(a(\tau)C_{S,\text{in}}(\tau) - \psi(\tau)Y^{-1}) d\tau.$$

Справедливость леммы вытекает из этих равенств и лемм 1 и 2.

Лемма 4. Пусть $Y \in (0, 1)$ и выполнены условия леммы 3. Тогда справедливы неравенства

$$|C_X(t) - w_1^h(t)| \leq c_4 \left(\delta + \int_{t_0}^t |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)| d\tau \right),$$

$$|C_S(t) - w_2^h(t)| \leq c_5 \left(\delta + \int_{t_0}^t |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)| d\tau \right) \text{ при } t \in T. \quad (11)$$

Доказательство. Пусть

$$\mu_1(t) = C_{x\psi}(t) - C_X(t), \quad \mu_2(t) = C_{S\psi}(t) - C_S(t).$$

Второе и третье уравнения системы (1) могут быть переписаны в виде

$$\frac{dC_X(t)}{dt} = \frac{Y}{1-Y} OUR(t) - a(t)C_X(t),$$

$$\frac{dC_S(t)}{dt} = -\frac{1}{1-Y} OUR(t) + a(t)(C_{S,\text{in}}(t) - C_S(t)).$$

В таком случае, функции $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ являются решениями уравнений

$$\dot{\mu}_1(t) = \frac{Y}{1-Y} (\varphi^h(t) - OUR(t)) - a(t)\mu_1(t),$$

$$\dot{\mu}_2(t) = -\frac{1}{1-Y} (\varphi^h(t) - OUR(t)) - a(t)\mu_2(t),$$

с начальными условиями

$$\mu_1(t_0) = \mu_2(t_0) = 0.$$

Следовательно,

$$\mu_1(t) = \frac{Y}{1-Y} \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) (\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)) d\tau,$$

$$\mu_2(t) = -\frac{1}{1-Y} \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) (\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)) d\tau,$$

где

$$\Phi(t, \tau) = V^{-1}(t)V(\tau).$$

В таком случае имеют место неравенства

$$|\mu_1(t)| \leq c_1 \int_{t_0}^t |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)| d\tau, \quad (12)$$

$$|\mu_2(t)| \leq c_2 \int_{t_0}^t |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)| d\tau, \quad t \in T. \quad (13)$$

Справедливость леммы вытекает из (12), (13) и леммы 3.

Лемма 5. Пусть выполнены условия леммы 4 и

$$C_X(t) \geq C_X > 0, \quad C_S(t) \geq C_S > 0.$$

Тогда при выполнении условия 2, можно указать такое $h_* > 0$, что при всех $h \in (0, h_*)$ и всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in [0 : m_h - 1]$ справедливо неравенство

$$|v_i^h - \mu_{\max}(t)| \leq c_6(\delta + |\varphi_i^h - OUR(t)|) + \int_{t_0}^t |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)| d\tau. \quad (14)$$

Доказательство. Воспользовавшись леммой 3 и условием 2, можно указать такие h_1 и δ_1 , что для всех $h \in (0, h_1)$ и $\delta = \delta(h) \in (0, \delta_1)$ выполнены неравенства

$$C_{x\psi(t)} \geq c_\psi^{(1)} > 0, \quad C_{S\psi(t)} \geq c_\psi^{(2)} > 0 \quad \text{при } t \in T. \quad (15)$$

Введем величину

$$\Delta_{i,t}^h \equiv \left| \frac{Y(K_S + w_2^h(\tau_i))\varphi_i^h}{(1-Y)w_1^h(\tau_i)w_2^h(\tau_i)} - \frac{Y(K_S + C_{S\psi}(t))OUR(t)}{(1-Y)C_{x\psi}(t)C_{S\psi}(t)} \right|. \quad (16)$$

В силу условия 2, неравенств (15) и леммы 3 имеем оценки

$$\Delta_{i,t}^h \leq c_3(\delta + |\varphi_i^h - OUR(t)|), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad (17)$$

равномерные по всем $i \in [0 : m_h - 1]$ и $h \in (0, h_1)$. Кроме того, в силу (12), (13) верны неравенства

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{C_X(t)C_S(t)} - \frac{1}{C_{x\psi}(t)C_{S\psi}(t)} \right| &\leq c_4(|\mu_1(t)| + |\mu_2(t)|) \leq \\ &\leq c_5 \int_{t_0}^t |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)| d\tau, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\left| \frac{1}{C_X(t)} - \frac{1}{C_{x\psi}(t)} \right| \leq c_6 \int_{t_0}^t |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)| d\tau, \quad (19)$$

Из (18), (19) следует

$$\Delta_t \equiv \left| \frac{K_S + C_{S\psi}(t)}{C_{x\psi}(t)C_{S\psi}(t)} - \frac{K_S + C_S(t)}{C_X(t)C_S(t)} \right| \leq c_7 \int_{t_0}^t |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)| d\tau. \quad (20)$$

Кроме того,

$$\mu_{\max}(t) = \frac{\mu(C_S(t))(K_S + C_S(t))}{C_S(t)},$$

$$\mu(C_S(t)) = \frac{Y \cdot OUR(t)}{(1 - Y)C_X(t)}.$$

В таком случае

$$\mu_{\max}(t) = \frac{Y(K_S + C_S(t))OUR(t)}{(1 - Y)C_X(t)C_S(t)},$$

и

$$|v_i^h - \mu_{\max}(t)| = \left| \frac{Y(K_S + w_2^h(\tau_i))\varphi_i^h}{(1 - Y)w_1^h(\tau_i)w_2^h(\tau_i)} - \frac{Y(K_S + C_S(t))OUR(t)}{(1 - Y)C_X(t)C_S(t)} \right|.$$

Комбинируя (17), (20) и воспользовавшись неравенством

$$|v_i^h - \mu_{\max}(t)| \leq \Delta_{i,t}^h + \frac{Y}{1 - Y} |OUR(t)| \Delta_t, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m_h - 1],$$

получим (14). Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть выполнены условия 1 и 2 и пусть в системе (5) величины φ_j^h находятся по формулам (6). Тогда справедливы неравенства

$$|w_0^h(\tau_i) - C_{DO}(\tau_i)|^2 \leq C^{(0)}(h + \delta + \alpha), \quad (21)$$

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |\varphi^h(\tau)|^2 d\tau \leq \int_{t_0}^{\vartheta} |OUR(\tau)|^2 d\tau + C^{(1)}(h + \delta)\alpha^{-1}. \quad (22)$$

Доказательство. Для доказательства леммы оценим изменение величины

$$\varepsilon(t) = |\tilde{w}_0^h(t) - C_{DO}(t)|^2 + \alpha(h) \int_{t_0}^t \{|\varphi^h(\tau)|^2 - |OUR(\tau)|^2\} d\tau, \quad t \in T.$$

Здесь функция $\tilde{w}_0^h(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in [0 : m_h - 1]$, определяется по правилу

$$\dot{\tilde{w}}_0^h(t) = k_{La}(C_{\text{sat}}^{\text{en}} - \xi_i^h) - \varphi_i^h + a(t)(C_{\text{sat}} - \xi_i^h), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

$$\tilde{w}_0^h(\tau_i) = w_0^h(\tau_i).$$

Заметим, что

$$\lim_{t \rightarrow \tau_{i+1}-0} \tilde{w}_0^h(t) = w_0^h(\tau_{i+1}).$$

Пусть

$$\mu_i = 2(\tilde{w}_0^h(\tau_i) - C_{DO}(\tau_i)) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\dot{\tilde{w}}_0^h(t) - \dot{C}_{DO}(t)) dt.$$

Легко видеть, что верно неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon(\tau_i) + \delta(h) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{\tilde{w}}_0^h(\tau) - \dot{C}_{DO}(\tau)|^2 d\tau + \mu_i + \\ + \alpha(h) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|\varphi_i^h|^2 - |OUR(\tau)|^2\} d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим величину μ_i в правой части (23). Имеем

$$\begin{aligned} \mu_i = -2s_i^* \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{k_{La}(C_{DO}(\tau) - \xi_i^h) + a(\tau)(C_{DO}(\tau) - \xi_i^h) + \\ + OUR(\tau) - \varphi_i^h\} d\tau = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ji}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{1i} = 2k_{La}s_i^* \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\xi_i^h - C_{DO}(\tau)) d\tau, \quad \lambda_{2i} = 2s_i^* \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} a(\tau)(\xi_i^h - C_{DO}(\tau)) d\tau, \\ \lambda_{3i} = 2s_i^* \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\varphi_i^h - OUR(\tau)) d\tau, \quad s_i^* = C_{DO}(\tau_i) - w_0^h(\tau_i). \end{aligned}$$

Поэтому, из (23), (24) получаем

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon(\tau_i) + \sum_{j=1}^3 \lambda_{ji} + \alpha(h) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|\varphi_i^h|^2 - |OUR(\tau)|^2\} d\tau + \delta L_i^h, \quad (25)$$

где

$$L_i^h = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |k_{La}(\xi_i^h - C_{DO}(\tau)) + a(\tau)(\xi_i^h - C_{DO}(\tau)) + \varphi_i^h - OUR(\tau)|^2 d\tau.$$

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства (25). Из (3) и условия 1 следует, что

$$\max \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq \vartheta} |C_{DO}(t)|, \sup_{t_0 \leq t \leq \vartheta} |C_X(t)|, \sup_{t_0 \leq t \leq \vartheta} |C_S(t)| \right\} \leq d_0 < +\infty.$$

В таком случае из этого неравенства и неравенства $|\xi_i^h - C_{DO}(\tau_i)| \leq h$ выводим

$$\lambda_{1i} \leq d_1(h + \delta)\delta, \quad (26)$$

$$\lambda_{2i} \leq d_2(h + \delta)\delta, \quad (27)$$

$$\lambda_{3i} \leq 2s_i \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\varphi_i^h - OUR(\tau)) d\tau + d_3 h \delta, \quad s_i = \xi_i^h - w_0^h(\tau_i), \quad (28)$$

$$\sum_{i=0}^{m_h-1} L_i^h \leq d_4. \quad (29)$$

Здесь d_j , $j \in [0 : 4]$ — постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде. Заметим, что

$$\varphi_i^h = \arg \min \{ 2s_i u + \alpha(h)u^2 : -K \leq u \leq K \}.$$

Тогда в силу (3), (6) и (28) получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \lambda_{3i} + \alpha(h) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{ |\varphi_i^h|^2 - |OUR(\tau)|^2 \} d\tau &\leq \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\{ \left[2s_i \varphi_i^h + \alpha(h) |\varphi_i^h|^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[2s_i OUR(\tau) + \alpha(h) |OUR(\tau)|^2 \right] \right\} d\tau + d_3 h \delta \leq d_3 h \delta. \end{aligned} \quad (30)$$

Воспользовавшись (25)–(28), получим (для всех $i \in [1 : m_h]$) следующую оценку:

$$\varepsilon(\tau_i) \leq d_5(h + \delta). \quad (31)$$

Неравенства (21), (22) следуют из (31). Лемма доказана.

Монография [5] содержит теорему 1.2.1, которая применительно к нашему случаю может быть сформулирована следующим образом.

Т е о р е м а 2. Пусть выполнены условия 1, 2, а также неравенства

$$\begin{aligned} \sup_{i \in [0 : m_h]} |w_0^h(\tau_i) - C_{DO}(\tau_i)| &\leq \nu(h), \\ \int_{t_0}^{\vartheta} |\varphi^h(\tau)|^2 d\tau &\leq \int_{t_0}^{\vartheta} |OUR(\tau)|^2 d\tau + \nu_1(h), \end{aligned}$$

где $\nu(h) \rightarrow 0$, $\nu_1(h) \rightarrow 0+$ при $h \rightarrow 0+$. Тогда имеет место сходимость

$$\varphi^h(t) \rightarrow OUR(t) \quad \text{в } L_2(T; \mathbb{R}) \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

то есть

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)|^2 d\tau \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Из лемм 4–6, а также теоремы 2 вытекает теорема 1. Таким образом, сходимость алгоритма установлена.

4. Оценка скорости сходимости алгоритма

Приведем оценки скорости сходимости алгоритма.

Теорема 3. Пусть функция $\mu_{\max}(t)$ является функцией ограниченной вариации.

Тогда верны следующие оценки скорости сходимости алгоритма:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\vartheta} |v^h(\tau) - \mu_{\max}(\tau)|^2 d\tau &\leq C_1 \lambda(h, \delta, \alpha), \\ \sup_{t \in T} |w_1^h(t) - C_X(t)| &\leq C_2 \lambda^{1/2}(h, \delta, \alpha), \\ \sup_{t \in T} |w_2^h(t) - C_S(t)| &\leq C_3 \lambda^{1/2}(h, \delta, \alpha). \end{aligned}$$

Здесь

$$\lambda(h, \delta, \alpha) = h + \delta + \alpha + (h + \delta)\alpha^{-1}, \quad C_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

— некоторые постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде.

Доказательство. Легко видеть, что для всех $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ верны оценки

$$|\xi_i^h - C_{DO}(t)| \leq c_1(h + \delta), \quad (32)$$

$$|C_{DO}(t_0) - w_0^h(t_0)| \leq h, \quad (33)$$

$$|b(t) - b(\tau_i)| \leq c_2 \delta, \quad |C_{DO}(t) - C_{DO}(\tau_i)| \leq c_3 \delta, \quad (34)$$

где $b(t) = \ln V(t)$. Кроме того

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\tau_i}^t a(\tau) C_{DO}(\tau) d\tau - (b(\tau_{i+1}) - b(\tau_i)) \xi_i^h \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\tau_i}^t a(\tau) C_{DO}(\tau_i) d\tau - (b(\tau_{i+1}) - b(\tau_i)) \xi_i^h \right| + \left| \int_{\tau_i}^t a(\tau) (C_{DO}(\tau) - C_{DO}(\tau_i)) d\tau \right| \leq \\ &\leq c_4 \delta^2 + \left| (b(t) - b(\tau_i)) C_{DO}(\tau_i) - (b(\tau_{i+1}) - b(\tau_i)) \xi_i^h \right| \leq \\ &\leq c_4 \delta^2 + c_5 h + |b(t)(C_{DO}(\tau_i) - \xi_i^h)| + |b(\tau_{i+1}) - b(t)| |\xi_i^h| \leq c_6(h + \delta). \quad (35) \end{aligned}$$

Из неравенства (21) выводим

$$|\tilde{w}_0^h(t) - C_{DO}(t)| \leq c_7(h + \delta + \alpha), \quad t \in T. \quad (36)$$

В свою очередь, из (32)–(36) следует неравенство

$$\sup_{t \in T} \left| \int_{t_0}^t (\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)) d\tau \right| \leq c_8(h + \delta + \alpha). \quad (37)$$

Воспользовавшись (22), получим

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\vartheta} |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)|^2 d\tau &= \\ &= \int_{t_0}^{\vartheta} |\varphi^h(\tau)|^2 d\tau - 2 \int_{t_0}^{\vartheta} \varphi^h(\tau) OUR(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{\vartheta} |OUR(\tau)|^2 d\tau \leq \\ &\leq 2 \int_{t_0}^{\vartheta} (OUR(\tau) - \varphi^h(\tau)) OUR(\tau) d\tau + c_9(h + \delta) \alpha^{-1}. \end{aligned} \quad (38)$$

По условию теоремы $\mu_{\max}(\cdot)$ является функцией ограниченной вариации. Следовательно, таковой является и функция $OUR(t)$.

В таком случае из (37), (38) и леммы 1.3.3 [13] получаем

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)|^2 d\tau \leq c_{10} \lambda(h, \delta, \alpha). \quad (39)$$

Утверждение теоремы следует из (39) и лемм 4, 5.

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. Пусть $\delta(h) = h$, $\alpha(h) = h^{1/2}$ и функция $\mu_{\max}(t)$ является функцией ограниченной вариации. Тогда имеют место следующие оценки скорости сходимости алгоритма

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |v^h(\tau) - \mu_{\max}(\tau)|^2 d\tau \leq c_1 h^{1/4},$$

$$\sup_{t \in T} |w_1^h(t) - C_X(t)| \leq c_2 h^{1/8},$$

$$\sup_{t \in T} |w_2^h(t) - C_S(t)| \leq c_3 h^{1/8}.$$

Еще одно следствие верно для случая $F_{\text{in}}^h(t) \equiv 0$. Пусть вместо условия 1 выполнено следующее условие.

Условие 3.

$$F(t) = 0, \quad Y \in (0, 1),$$

$$C_X(t) \geq C_X > 0, \quad C_S(t) \geq C_S > 0.$$

Тогда второе и третье уравнения системы (1) принимают вид

$$\frac{dC_X(t)}{dt} = \frac{Y}{1-Y} OUR(t),$$

$$\frac{dC_S(t)}{dt} = -\frac{1}{1-Y} OUR(t).$$

Поэтому система M может быть взята в следующей форме:

$$w_0^h(\tau_{i+1}) = w_0^h(\tau_i) + \delta \{k_{La}(C_{\text{sat}}^{\text{en}} - \xi_i^h) - \varphi_i^h\},$$

$$w_1^h(\tau_{i+1}) = w_1^h(\tau_i) + \delta \frac{Y}{1-Y} \varphi_i^h, \quad (40)$$

$$w_2^h(\tau_{i+1}) = w_2^h(\tau_i) - \delta \frac{1}{1-Y} \varphi_i^h.$$

Следующее утверждение вытекает из результатов, приведенных выше.

Следствие 2. Пусть выполнены условия 2, 3, система M имеет вид (40), а функция $\varphi^h(t)$ — вид (6). Тогда справедливы утверждения теорем 1–3, а также следствия 1.

5. Результаты компьютерного моделирования

Описанный выше алгоритм был протестирован на модельном примере. Система (1) рассматривалась на промежутке времени $[0, 3]$. Коэффициент $\mu_{\text{max}}(t)$ равнялся $\sin(t)$. Предполагалось, что мы не знаем $\mu_{\text{max}}(t)$ и хотим его восстановить. Мы также рассчитываем восстановить состояния $C_X(t)$ и $C_S(t)$ по конечному числу измерений эволюции концентрации растворенного кислорода в реакторе $C_{DO}(t)$.

На рис. 1–3 приведены результаты вычислительного эксперимента. Предполагалось (см. (1)):

$$K_S = 0.1, \quad Y = 0.5,$$

$$C_{S,\text{in}} = 0.2, \quad V(t_0) = 1.5,$$

$$F_{\text{in}}(t) = \sin(t), \quad C_{\text{sat}}^{\text{en}} = C_{\text{sat}} = 0.5.$$

Параметры алгоритма были взяты следующие: $\alpha = 0.001$, $K = 2$. Начальное состояние системы полагалось равным единице, т. е.

$$C_{D0}(t_0) = C_X(t_0) = C_S(t_0) = 1.$$

Система (1) решалась методом Эйлера с шагом δ . Результаты вычислительного эксперимента показывают сходимость в среднем квадратичном $v^h(t)$ к $\mu_{\text{max}}(t)$ и равномерную сходимость $w_1^h(t)$ к $C_X(t)$ и $w_2^h(t)$ к $C_S(t)$ при соответствующих значениях параметров α , h и δ .

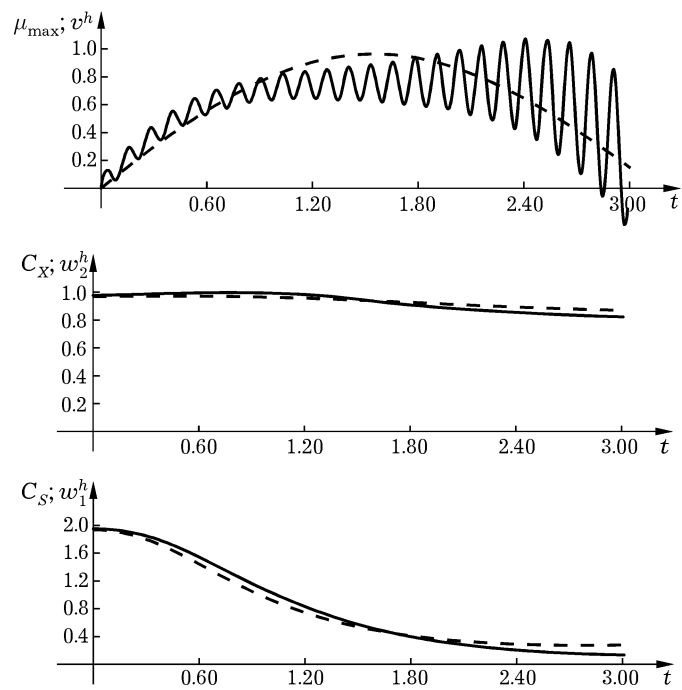


Рис. 1

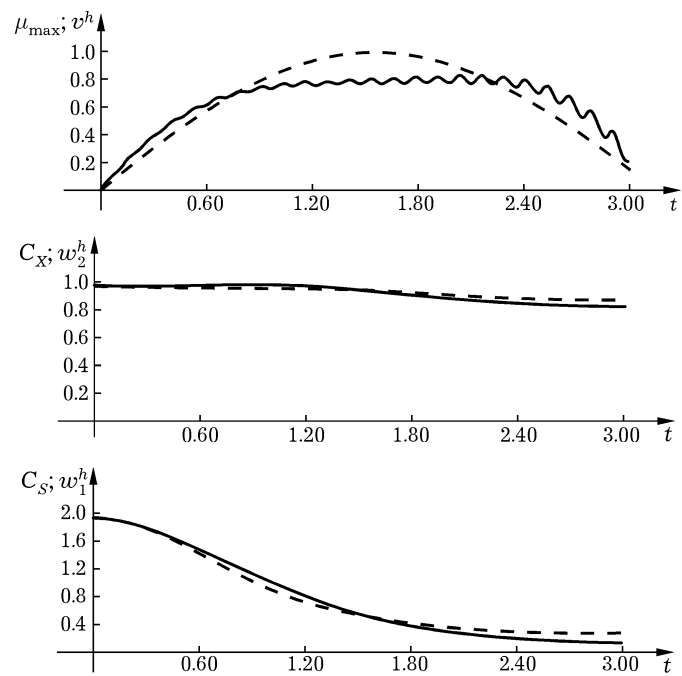


Рис. 2

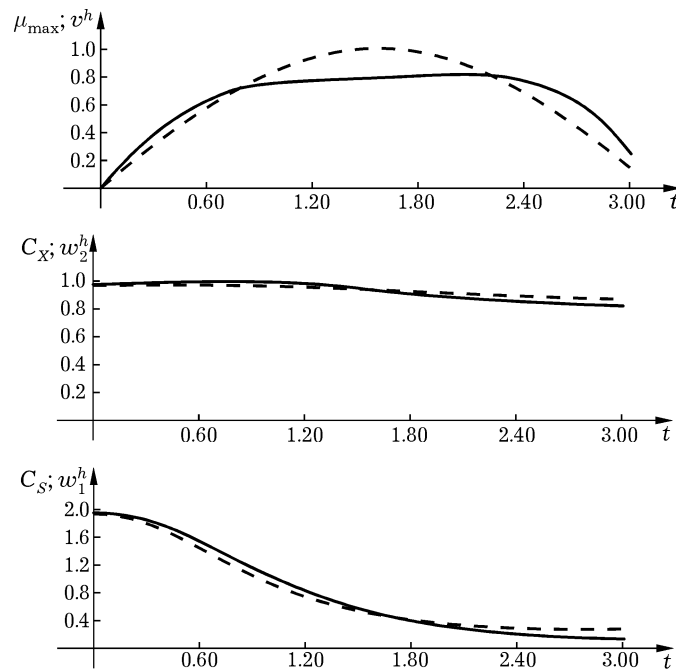


Рис. 3

Рис. 1 отвечает случаю, когда $h = 10^{-3} \cos(50t)$, $\delta = 10^{-3}$, рис. 2 — случаю $h = 10^{-4} \cos(50t)$, $\delta = 10^{-3}$, рис. 3 — случаю $h = 0$, $\delta = 10^{-4}$. На рисунках 1–3 сплошная линия изображает коэффициент $\mu_{\max}(t)$ и состояния $C_X(t)$, $C_S(t)$, пунктирная линия соответствует управлению в модели $v^h(t)$ и координатам вспомогательной системы $w_1^h(t)$ и $w_2^h(t)$.

Работа выполнена при поддержке Международного института прикладного системного анализа (IIASA). Для второго автора также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00359), Программы поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН “Процессы управления”, Программы поддержки ведущих научных школ России (проект № НШ-7581.2006.1).

Список литературы

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1978.
2. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis //Transl. Math. Monographs. Vol. 93.—Providence: Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1986.
3. Banks H.T., Kunisch K. Estimation Techniques for Distributed Parameter Systems.—Boston: Birkhauser, 1989.
4. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions.—London: Gordon and Breach, 1995.
5. Maksimov V.I. Dynamical Inverse Problems for Distributed Systems.—Utrecht: VSP, 2002.
6. Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I., Osipov Yu.S. Reconstruction of boundary sources through sensor observation //IIASA Working Paper (WP-96-97).—Laxenburg (1996).—P. 1–27.

7. Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. On identification of nonobservable contamination inputs //Environmental Modeling and Software.—2005.—V. 20.—P. 1057–1061.
8. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры.—М.: Наука, 1974.
9. Vanrolleghem P.A., Van Daele M. Optimal experimental design for structure characterization of biodegradation models: On-line implementation in a respirographic biosensor //Water Science and Technology.—1994.—V. 30, № 4.—P. 243–253.
10. Stigter J.D., Vries D., Keesman K.J. On adaptive optimal input design //Proc. of the European Control Conference (Paper 066), Cambridge (2003).—Cambridge, Cambridge University, 2003.
11. Keesman K.J. State and parameter estimation in biotechnical batch reactors //Cont. Eng. Pract.—2002.—V. 10, № 2.—P. 219–225.

РОБАСТНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. М. Макаров, А. А. Ахрем, В. З. Рахманкулов

В статье изучаются вопросы устойчивости (робастности) различных классов математических моделей проектирования сложных технических систем. Для линейных динамических моделей проектирования приводятся алгебраические и геометрические критерии грубой устойчивости спектра показателей Ляпунова таких систем, а также их грубой асимптотической устойчивости по Ляпунову, грубой неустойчивости, сверхустойчивости.

1. Введение

Проектирование динамических систем, как и любых сложных технических систем, осуществляется, как правило, в несколько этапов. На этапе системного проектирования определяется структура системы и выбираются алгоритмы управления, обеспечивающие заданные динамические свойства. На этапе функционального проектирования определяется способ реализации алгоритмов и функций узлов, составляющих систему. Наконец, на этапе технического проектирования решаются вопросы схемного и конструктивного исполнения узлов и связей между ними. Предполагается также, что проектирование ведется с помощью ЭВМ, а это означает привнесение в процесс проектирования качественно новых свойств. В первую очередь, применение ЭВМ, выполняющей основные трудоемкие работы, позволяет анализировать большое число вариантов решения задачи. В связи с этим приобретает важное значение генерация вариантов решения задачи проектирования. В практике проектирования наибольшее распространение получил метод генерации базовых решений по прототипу (по математической модели сравнения). Суть этого метода состоит в том, что для проектируемой динамической системы на основании задания на проектирование подбирается наиболее близкий в некотором смысле прототип, для которого известно решение задачи проектирования. Результаты, полученные для прототипа, переносятся на проектируемую систему и затем корректируются в процессе моделирования. Таким образом, прототипы служат источником вариантов построения проектируемой системы. В нетривиальном случае система сравнения представляет решение более простой задачи проектирования по сравнению с исходной задачей. Как правило, в системе сравнения используется более простая математическая модель проектируемой системы, для которой удастся получить приемлемое конструктивное решение. Отметим также, что в условиях автоматизированного проектирования метод прототипов приобретает особое значение, т. к. он служит основным источником базовых вариантов построения проектируемой системы. Для широкого класса динамических систем исследования по разработке прототипов ведутся на основе принципа усреднения Крылова–

Боголюбова для обыкновенных дифференциальных уравнений [1–7] и теорем об усреднении в стохастических дифференциальных уравнениях [8–10]. Построение упрощенной математической модели динамической системы в этих методах основывается на разделении быстрых и медленных движений в системе и усреднении быстрой составляющей. Заметим, что при построении динамических моделей сравнения часто используются не обычные методы приближения, а другие условия, зависящие от характера решаемой задачи. Так, например, при исследовании различных видов устойчивости требуют, чтобы из устойчивости модели сравнения вытекала и устойчивость проектируемой системы [11–19]. Используются и другие дополнительные условия, например, [20–23]: процесс $\bar{x} = \bar{x}(t, t_0, x_0)$ в системе сравнения

$$\dot{\bar{x}} = g(\bar{x}, t) \quad (\bar{x} \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \bar{x}(t_0) = x_0),$$

для которой имеется эффективный автоматизированный алгоритм решения, должен мажорировать процесс $x = x(t, t_0, x_0)$ в проектируемой динамической системе

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, x(t_0) = x_0),$$

то есть

$$\|\bar{x}(t, t_0, x_0)\| \geq \|x(t, t_0, x_0)\|, \quad (*)$$

где $\|\cdot\|$ — некоторая фиксированная норма евклидова пространства \mathbb{R}^n . Если это евклидова норма \mathbb{R}^n , то условие (*) гарантирует, что процесс в проектируемой системе будет не хуже процесса в системе сравнения в том смысле, что свободное движение системы к состоянию равновесия $x = 0$ будет протекать не медленнее, чем затухание процесса в системе сравнения. Отметим также, что еще одним важным преимуществом виртуального компьютерного способа решения задач проектирования и управления сложными динамическими объектами является значительно более низкая стоимость в целом компьютерных вычислений по сравнению с затратами на реализацию реальных физических процессов разработки сложных технических объектов. Однако воспользоваться преимуществами электронной формы имитации физических процессов можно лишь при условии адекватного отображения физической реальности в математических и компьютерных моделях. Под адекватностью таких моделей мы, следуя [24–30], понимаем прежде всего:

а) правильное качественное описание рассматриваемых свойств объекта в модели; например, возможность на основании исследования модели сделать правильный вывод о направлении изменения каких-либо количественных характеристик этих свойств, об их взаимосвязи, о характере колебаний объекта, об устойчивости его состояния или эволюции и т. п.;

б) правильное количественное описание этих свойств с некоторой разумной точностью.

Заметим, что в областях, еще не подготовленных для применения развитых количественных математических методов, либо в тех областях, где количественные закономерности проявляются не вполне четко (например, в некоторых социальных или биологических науках), математические модели являются, как правило, по необходимости лишь качественными. Даже в технических науках, где существует достаточно много хорошо зарекомендовавших себя математических методов исследования задач проектирования, модель может оказаться лишь качественной из-за сложности изучаемого объекта. Однако и тогда выявление на качественной модели существенных характеристических свойств этого объекта помогает правильно ориентироваться проектировщикам. Отметим, что одной из важных составляющих адекватности математической модели сложной динамической системы является требование ее робастности, т.е. устойчивости относительно погрешностей в исходных данных. Всегда надо иметь в виду, что эти данные, как

правило, известны проектировщикам лишь с большей или меньшей точностью и такая неопределенность не должна существенно влиять на результат проектирования. Заметим также, что для решения неустойчивых задач целесообразно применять численные методы, поскольку возникающие в расчетах погрешности округления будут сильно возрастать в ходе вычислений, что приведет к значительному искажению результатов. В настоящей работе мы изучим вопросы робастности математических систем сравнения из класса LS линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Данные системы широко используются в теории управления при исследовании различных асимптотических свойств квазилинейных дифференциальных моделей систем управления сложными техническими объектами, а также линеаризации нелинейных динамических систем [13–17, 19–23]. Под робастностью моделей сравнения из класса LS мы будем понимать сохранение свойств асимптотической устойчивости или сверхустойчивости решений этих моделей при малых линейных и нелинейных возмущениях коэффициентов (параметров) моделей.

2. Критерии робастности линейных дифференциальных моделей сравнения из класса LS

Укажем ряд необходимых для дальнейшего изложения понятий и фактов общей теории характеристических показателей Ляпунова решений линейных динамических систем [11–14, 31, 32].

Определение 1. Число (или символ $-\infty$ или $+\infty$), определяемое формулой

$$\lambda(f) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)|,$$

называется *характеристическим показателем Ляпунова* вещественной функции $f(t)$, определенной и непрерывной на полуоси времени $(0, +\infty)$.

Отметим, что характеристический показатель λ равен взятому с обратным знаком характеристическому числу функции $f(t)$, введенному А. М. Ляпуновым [33].

Приведем примеры вычисления характеристического показателя Ляпунова для ряда специальных функций.

Пример 1. Для любой вещественной функции $f(t)$, определенной и непрерывной на полуоси $(0, +\infty)$

$$\lambda(f(t)) = \lambda(|f(t)|).$$

Пример 2. Для любой вещественной константы $c \neq 0$

$$\lambda(cf(t)) = \lambda(f(t)).$$

Пример 3. Для любого числа $\alpha \in (-\infty; +\infty)$

$$\lambda(e^{at}) = \alpha.$$

Пример 4. Для любого натурального числа m

$$\lambda(t^m) = 0.$$

Пример 5. Для любого полинома $P(t) \equiv a_n t^n + \dots + a_0$

$$\lambda(P(t)) = 0.$$

Пример 6. $\lambda(e^{t^2}) = +\infty$.

Пример 7. $\lambda(e^{t \sin t}) = 1$.

Укажем теперь одно важное свойство характеристического показателя Ляпунова $\lambda(f(t))$ функции $f(t)$.

Утверждение 1 ([11–14]). Если $\lambda(f(t)) = \alpha \neq \pm\infty$, то
а) для любого $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |f(t)| e^{-(\alpha+\varepsilon)t} = 0; \quad (1)$$

б) существует последовательность $t_k \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |f(t_k)| e^{-(\alpha-\varepsilon)t_k} = +\infty. \quad (2)$$

Обратно, если для некоторого α при любом $\varepsilon > 0$ выполнены соотношения (1) и (2), то

$$\lambda(f(t)) = \alpha.$$

Утверждение 1 показывает, что если $\lambda(f(t)) = \alpha$, то при $t_k \rightarrow +\infty$ модуль функции $y = |f(t)|$ растет медленнее, чем любая показательная функция

$$y_1 = e^{(\alpha+\varepsilon)t},$$

где $\varepsilon > 0$, и по некоторой последовательности $t_k \rightarrow +\infty$ быстрее, чем функция $y_2 = e^{(\alpha-\varepsilon)t}$ (см. соотношения (1), (2)).

Рассмотрим теперь следующую линейную однородную дифференциальную модель сравнения из множества LS :

$$\dot{x} = A(t)x \quad (x \in \mathbb{R}^n; t \geq 0), \quad (3)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная ограниченная операторная функция; $\|A(t)\| \equiv \sup_{|x|=1} |Ax| < a$, где a — некоторая положительная константа;

$|Ax| \equiv \sqrt{(Ax, Ax)}$ — длина вектора Ax вещественного n -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^n .

Наделим множество LS дифференциальных систем сравнения вида (3) структурой метрического пространства заданием расстояния d по формуле

$$d(A_1(t), A_2(t)) \equiv \sup_{t \geq 0} \|A_1(t) - A_2(t)\|$$

(вместо $\dot{x} = A_i(t)x$ пишем коротко $A_i(t)$, $i = 1, 2$).

Определение 2. Характеристическим показателем Ляпунова решения $x(t) \neq 0$ линейной дифференциальной системы из пространства LS называется число $\lambda \equiv \lambda(x(t))$, вычисляемое по формуле

$$\lambda \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |x(t)|}{t}.$$

Характеристический показатель λ оценивает экспоненциальный рост (убывание) решения $x(t)$ линейной однородной дифференциальной системы типа (3). Отметим, что:

а) характеристические показатели Ляпунова решений линейной стационарной системы вида (3) равны вещественным частям собственных значений оператор-функции $A(t) \equiv A$ этой системы;

б) характеристические показатели Ляпунова решений ω -периодической линейной системы вида (3)

$$A(t + \omega) \equiv A(t) \quad (\omega > 0; t \geq 0)$$

вычисляются по следующим формулам (см., например, [11–14]):

$$\lambda_i \equiv \frac{1}{\omega} \ln |m_i|, \quad i = 1, \dots, n,$$

где m_1, \dots, m_n — собственные числа оператора монодромии M ω -периодической системы (3) (напомним, что оператором монодромии M ω -периодической системы (3) называется линейный оператор $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, переводящий начальное условие при $t = 0$ в значение $y(t)$ системы (3) с этим начальным условием при $t = \omega$).

Пусть $X = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ — некоторый базис в пространстве решений $S(A)$ системы (3). Допустим, кроме того, что характеристические показатели Ляпунова решений из базиса $S(A)$ удовлетворяют неравенствам

$$\lambda(x_1(t)) \geq \dots \geq \lambda(x_n(t)). \quad (4)$$

Положим

$$\sum(X) \equiv \sum_{i=1}^n \lambda(x_i(t)).$$

Определение 3. Базис X_0 называется *нормальным базисом* системы вида (3), если для него справедливо соотношение

$$\sum(X_0) \equiv \inf_{X \in S(A)} \sum(X).$$

Показатели (4) из нормального базиса решений будем называть *показателями Ляпунова* системы (3) и обозначать

$$\lambda_1(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A).$$

Показатель $\lambda_i(A)$ ($i = 2, \dots, n$) назовем *i -м показателем Ляпунова* системы (3), а показатель $\lambda_1 \equiv \lambda_1(A)$ — *старшим показателем Ляпунова* дифференциальной системы (3).

Корректность определения 3 вытекает из следующих утверждений, установленных А. М. Ляпуновым [33]: для линейной системы вида (3) нормальные базисы существуют и показатели (4) решений из нормального базиса не зависят от выбора последнего.

В дальнейшем показатели Ляпунова $\lambda_1(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$ мы будем рассматривать как функционалы, определенные на метрическом пространстве LS :

$$\lambda_i(\cdot) : LS \rightarrow \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Немецкий математик О. Перрон доказал в 1930 г. [34], что функционалы $\lambda_i(A)$ ($i = 1, \dots, n$) не являются всюду непрерывными на метрическом пространстве LS . Заметим, что вопрос о том, какие системы являются точками непрерывности показателей Ляпунова интересен, потому, что ответ на него дает возможность узнать, для каких линейных систем вида (3) асимптотическая устойчивость нулевого решения сохраняется при малых (равномерно на полупрямой $t \geq 0$) возмущениях операторной функции дифференциальной системы и, тем самым, установить робастность моделей сравнения метрического пространства LS . Отметим, что линейные модели сравнения с постоянными и периодическими коэффициентами являются точками непрерывности показателей — функционалов Ляпунова $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Имеют место также следующие алгебраические критерии устойчивости спектра $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ показателей Ляпунова линейной модели сравнения вида (3).

Теорема 1 ([31, 35–38]). 1. *Преобразование Ляпунова не меняет свойств устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости (другими словами, если система (11) устойчива (асимптотически устойчива, неустойчива), то при любом ляпуновском преобразовании $M(t)$ таким же свойством обладает и преобразованная система (12)).*

2. *Если система (3) имеет различные показатели, то для их устойчивости необходимо и достаточно, чтобы существовала фундаментальная система решений (базис) $x_1(t), \dots, x_n(t)$, для которой выполнено условие интегральной разделенности*

$$\frac{|x_i(t)|}{|x_i(\tau)|} : \frac{|x_{i+1}(t)|}{|x_{i+1}(\tau)|} \geq de^{b(t-\tau)} \quad (5)$$

для некоторых $d > 0$, $b > 0$ и всех чисел $t \geq \tau \geq 0$; $i = 1, \dots, n-1$.

3. Пусть фиксирован некоторый ортонормированный базис e_1, \dots, e_n евклидова пространства \mathbb{R}^n и пусть

$$\dot{x} = A_M(t)x \quad (t \geq 0) \quad (6)$$

— векторно-матричная форма записи системы (3) в базисе e_1, \dots, e_n : $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$ — n -мерный вектор-столбец; $A_M(t)$ — $(n \times n)$ -матрица оператора $A(t)$ в базисе e_1, \dots, e_n . Тогда, если система (3), (6) имеет различные характеристические показатели Ляпунова, то для их устойчивости необходимо и достаточно, чтобы существовало ляпуновское преобразование

$$y = L(t)x$$

($L(t)$, $\dot{L}(t)$ ограничены на полуоси $t \geq 0$; $|\det L(t)| \geq m$, где m — некоторая положительная постоянная, $\det L(t)$ — определитель $(n \times n)$ -матрицы $L(t)$), приводящее эту систему к диагональному виду с интегрально разделенными коэффициентами

$$\dot{y}_i = b_i(t)y_i \quad (i = 1, \dots, n);$$

$$\int_{\tau}^t (b_i(s) - b_{i-1}(s)) ds \geq c(t - \tau) - \tau, \quad c > 0; r \geq 0; (i = 1, \dots, n-1).$$

4. Для устойчивости характеристических показателей Ляпунова системы (6) необходимо и достаточно, чтобы существовало ляпуновское преобразование

$$z = F(t)x,$$

приводящее эту систему к блочно-треугольному виду

$$\dot{z} = \text{diag}(P_1(t), \dots, P_s(t))z, \quad (7)$$

где $P_1(t), \dots, P_s(t)$ — верхне-треугольные квадратные матрицы размеров

$$n_1, \dots, n_s, \quad \sum_{i=1}^s n_i = n;$$

для систем-блоков (7) которой выполнены следующие условия:

а) диагональные коэффициенты $p_i(t)$, $i \in n_k$, k -го блока и $p_j(t)$, $j \in n_{k+1}$, $(k+1)$ -го блока интегрально разделены;

б) для каждого блока верхний Ω_k и нижний ω_k центральные показатели совпадают (напомним, что для линейной дифференциальной системы

$$\dot{x} = D(t)x \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0) \quad (8)$$

центральные показатели Ω и ω задаются формулами

$$\Omega \equiv \inf_{T>0} \overline{\lim}_{g \rightarrow \infty} \frac{1}{qT} \sum_{s=1}^q \ln \|X(sT, (s-1)T)\|;$$

$$\omega \equiv \sup_{T>0} \overline{\lim}_{g \rightarrow \infty} \frac{1}{qT} \sum_{s=1}^q \ln \|X((s-1)T, sT)\|^{-1},$$

где $X(t, \tau)$ — оператор Коши системы (8), т.е. линейный оператор, который действует из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n и для каждого решения x уравнения (8) удовлетворяет следующему условию:

$$X(t, \tau)x(\tau) \equiv x(t).$$

5. Показатели Ляпунова двумерной линейной системы типа (3), (6) с отделенными характеристическими векторами матрицы коэффициентов, соответствующими ее отделенным характеристическим числам, устойчивы (напомним, что векторы $v(t)$ и $w(t)$ называются отделенными, если существует два замкнутых пересекающихся лишь в начале координат двухсторонних сектора, содержащих соответственно лишь множества значений этих векторов при всех $t \geq 0$).

Прямым следствием теоремы 1 является следующее утверждение.

Теорема 2. Предположим, что старший характеристический показатель Ляпунова $\lambda_1(A)$ системы (3) является отрицательным:

$$\lambda_1(A) < 0.$$

Допустим также, что система (3) удовлетворяет одному из условий утверждений 1–4 теоремы 1. Тогда система сравнения (3) метрического пространства LS является грубо асимптотически устойчивой, т.е. сохраняет свойство асимптотической устойчивости при малых возмущениях операторной функции этой системы.

Отметим, что теорема 2 устанавливает алгебраические необходимые и достаточные условия робастности моделей сравнения из метрического пространства LS .

Обозначим через ILS множество линейных дифференциальных систем метрического пространства LS , обладающих свойством (5) интегральной разделенности решений. Ввиду утверждений 1, 2 теоремы 1 линейные дифференциальные системы с интегральной разделенностью являются точками непрерывности функционалов — показателей Ляпунова $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Дифференциальные системы из множества $ILS \subset LS$ обладают также следующими важными характеристическими свойствами.

Теорема 3 ([36, 37]). *Множество ILS совпадает с открытым ядром множества линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида (3), (6) с устойчивым спектром $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристических показателей Ляпунова.*

Следствие 1 (к теореме 3). *Линейная система (3), (6) с интегральной разделенностью обладает грубо устойчивыми характеристическими показателями Ляпунова.*

Теорема 4 ([36, 37]). *Множество ILS совпадает с открытым ядром множества линейных дифференциальных систем, приводящихся ляпуновскими преобразованиями к диагональному виду.*

Следствие 1 (к теореме 4). *Линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с интегральной разделенностью является грубо диагонализируемой.*

Теорема 5 ([37]). *Множество линейных дифференциальных систем ILS замкнуто в метрическом пространстве LS .*

Теорема 6 ([39]). *Замыкание множества ILS линейных дифференциальных систем, обладающих свойством (5) интегральной разделенности решений, совпадает со всем метрическим пространством LS :*

$$\overline{ILS} = LS. \quad (9)$$

Таким образом, соотношение (9) теоремы 6 показывает, что линейные системы с интегральной разделенностью являются типичными представителями линейных дифференциальных систем (моделей) сравнения из метрического пространства LS . В работах [40, 41] установлено следующее важное геометрическое свойство решений линейных систем из множества ILS .

Теорема 7. *Условие интегральной разделенности решений (5) эквивалентно следующему условию геометрической регулярности линейной дифференциальной системы вида (3), (6): для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\sigma > 0$, что если*

$$d(A(t), B(t)) < \sigma,$$

то для всякого ненулевого решения $z(t)$ дифференциальной системы

$$\dot{z} = B(t)z \quad (z \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)$$

найдется ненулевое решение $x(t)$ системы (3), для которого

$$\sup_{t \geq 0} \angle(x(t), z(t)) < \varepsilon,$$

где $\angle(x, z)$ — угол между ненулевыми векторами x, z вещественного n -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^n .

Отметим, что в частном случае $n = 2$ в работах авторов [42, 43] геометрические достаточные условия интегральной разделенности были существенно ослаблены, а именно, было установлено следующее утверждение.

Теорема 8. *Двумерная линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\dot{u} = C(t)u \quad (u \in \mathbb{R}^2, t \geq 0)$$

является системой с интегральной разделенностью тогда и только тогда, когда она имеет нормальный базис решений $u_1(t)$, $u_2(t)$, обладающий следующим свойством слабой геометрической регулярности: для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $V \subset LS$ такая, что для всякого $M(t) \in V$ линейная однородная дифференциальная система

$$\dot{r} = M(t)r \quad (r \in \mathbb{R}^2, t \geq 0)$$

имеет ненулевые решения $r_1(t)$, $r_2(t)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\sup_{t \geq 0} \angle(u_i(t), r_i(t)) < \varepsilon, \quad (i = 1, 2).$$

Прямым следствием теорем 7, 8 настоящей работы является следующее утверждение, устанавливающее геометрические достаточные условия грубой асимптотической устойчивости линейных дифференциальных систем метрического пространства LS .

Теорема 9. 1. *Пусть для линейной дифференциальной системы*

$$\dot{q} = V(t)q \quad (q \in \mathbb{R}^n; n > 2; t \geq 0), \quad (10)$$

принадлежащей метрическому пространству LS , выполнены следующие условия:

а1) старший показатель Ляпунова $\lambda_1(V(t))$ системы (10) меньше нуля

$$\lambda_1(V(t)) < 0;$$

б1) система (10) обладает свойством геометрической регулярности из теоремы 7.

Тогда система (10) является грубо асимптотически устойчивой.

2. *Пусть для двумерной дифференциальной системы*

$$\dot{p} = W(t)p \quad (p \in \mathbb{R}^2; t \geq 0) \quad (11)$$

справедливы следующие условия:

а2) старший характеристический показатель Ляпунова $\lambda_1(W(t))$ двумерной системы (11) меньше нуля

$$\lambda_1(W(t)) < 0;$$

б2) система (11) обладает свойством слабой геометрической регулярности из теоремы 8.

Тогда линейная двумерная дифференциальная система (11) является грубо асимптотически устойчивой.

Отметим, что утверждения 1, 2 теоремы 9 устанавливают геометрические достаточные условия робастности свойства асимптотической устойчивости соответственно общих нестационарных дифференциальных линейных моделей сравнения и двумерных нестационарных дифференциальных моделей сравнения вида (3) из метрического пространства LS . Из теорем 7, 8 вытекают также следующие достаточные условия грубой неустойчивости систем типов (10), (11).

Теорема 10. 1. Пусть для линейной дифференциальной системы вида (10) выполнены следующие условия:

a1) старший показатель Ляпунова $\lambda_1(V(t))$ системы (10) больше нуля

$$\lambda_1(V(t)) > 0;$$

b1) система (10) обладает свойством геометрической регулярности из теоремы 7.

Тогда система (10) является грубо неустойчивой.

2. Пусть двумерная дифференциальная система вида (11) удовлетворяет следующим условиям:

a2) старший характеристический показатель Ляпунова системы (11) больше нуля

$$\lambda_1(W(t)) > 0;$$

b2) система (11) обладает свойством слабой геометрической регулярности из теоремы 8.

Тогда линейная двумерная дифференциальная система (11) является грубо неустойчивой.

Приведем теперь оценки границ изменения характеристических показателей Ляпунова линейной дифференциальной системы типа (3) при малых возмущениях коэффициентов этой системы.

Теорема 11. 1. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\sigma > 0$, что характеристические показатели Ляпунова любой возмущенной системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad \|f(t, y)\| \leq \sigma \|y\|,$$

принадлежат отрезку $[\omega - \varepsilon, \Omega + \varepsilon]$, где Ω, ω — соответственно, верхний и нижний центральный показатель системы вида (3) [44].

2. Центральные показатели линейной системы типа (3) достижимы, т. е. для всякого числа $\varepsilon > 0$ существуют непрерывные матричные функции $B_\varepsilon(t), C_\varepsilon(t), \|B_\varepsilon(t)\| \leq \varepsilon, \|C_\varepsilon(t)\| \leq \varepsilon$, такие, что старший показатель Ляпунова системы

$$\dot{z} = (A(t) + B_\varepsilon(t))z$$

не менее $\Omega - \varepsilon$, а младший показатель Ляпунова системы

$$\dot{w} = (A(t) + C_\varepsilon(t))w$$

не более $\omega + \varepsilon$ [45].

3. Центральные показатели линейной дифференциальной системы (3) одновременно достижимы, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует система

$$\dot{u} = (A(t) + P_\varepsilon(t))u, \quad \|P_\varepsilon(t)\| \leq \varepsilon,$$

имеющая решение $u_1(t)$ с характеристическим показателем Ляпунова большим $\Omega - \varepsilon$, решение $u_2(t)$ с показателем меньшим $\omega + \varepsilon$ [32, 46, 47].

4. Центральный показатель Ω полуустойчив вверх, а центральный показатель ω полуустойчив вниз [32].

Заметим, что утверждения 1–3 теоремы 11 устанавливают точные границы изменения спектра характеристических показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем типа (3) при малых возмущениях коэффициентов таких систем.

В заключение приведем следующие результаты, касающиеся свойств интегральной разделенности решений для множеств линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений со стационарными, периодическими, приводимыми и почти-периодическими коэффициентами.

Теорема 12 ([41–43]). 1. Системы с интегральной разделенностью не образуют плотного множества в пространстве линейных дифференциальных систем со стационарными коэффициентами.

2. Множество линейных дифференциальных систем с интегральной разделенностью не является плотным в пространстве систем с периодическими коэффициентами.

3. Линейные системы с интегральной разделенностью не образуют всюду плотного подмножества в пространстве систем обыкновенных дифференциальных уравнений с приводимыми по Ляпунову коэффициентами.

Теорема 13 ([48, 49]). Свойство интегральной разделенности решений не типично в классе почти-периодических линейных дифференциальных систем, т. е. существует такое уравнение

$$\dot{p} = A_{qp}(t)p \quad (p \in \mathbb{R}^n; t \geq 0)$$

с почти-периодической правой частью, что любое уравнение

$$\dot{r} = B_{qp}(t)p \quad (t \in \mathbb{R}^n; t \geq 0)$$

с почти-периодической функцией $B_{qp}(t)$, достаточно близкой к $A_{qp}(t)$ в смысле метрики

$$d(A_{qp}, B_{qp}) \equiv \sup_{t \geq 0} \|A_{qp}(t) - B_{qp}(t)\|,$$

не удовлетворяет условию интегральной разделенности решений.

Отметим, что результаты теорем 12, 13 контрастируют с результатом В. М. Миллионщикова о том, что свойство интегральной разделенности типично в классе всех линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида (3) с ограниченными непрерывными коэффициентами (см. [39], а также теорему 6 настоящей работы).

3. О некоторых робастных свойствах правильных и почти-периодических линейных однородных дифференциальных моделей из класса LS

В настоящем разделе мы будем рассматривать линейную однородную дифференциальную модель сравнения вида

$$\dot{z} = A(t)z \quad (z \in \mathbb{R}^n; t \geq 0), \tag{12}$$

где $A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная ограниченная матричная функция;

$$\|A(t)\| \equiv \sup_{|z|=1} |A(t)z| < a \quad (t \geq 0),$$

где a — некоторая положительная константа; $|Az| \equiv \sqrt{(Az, Az)}$ — длина вектора Az вещественного n -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^n .

Определение 4 ([11–14]). Линейная система вида (12) называется *правильной по Ляпунову*, если сумма характеристических показателей ее совпадает с нижним пределом среднего значения следа матрицы коэффициентов правой части системы (12), т. е. имеет место следующее равенство:

$$\sum(A) \equiv \sum_{i=1}^n \lambda_i(A) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1. \quad (13)$$

Правильные линейные дифференциальные системы вида (12), (13) обладают следующими важными характеристическими свойствами (см., например, [11–14, 31, 32]).

1. Линейная система (12) является правильной тогда и только тогда, когда

а) существует предел среднего значения следа матрицы коэффициентов $A(t)$ системы (12)

$$E = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(t_1) dt_1;$$

б) выполнено следующее равенство:

$$E = \sum(A).$$

2. Линейные дифференциальные системы с постоянными и периодическими коэффициентами являются правильными.

3. Треугольная однородная линейная система типа (12) является правильной тогда и только тогда, когда ее диагональные коэффициенты $a_{kk}(t)$ ($k = 1, \dots, n$) имеют конечные средние значения

$$\lambda_k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t a_{kk}(t_1) dt_1. \quad (14)$$

4. Для правильной треугольной системы типа (12) средние значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ее диагональных коэффициентов $a_{kk}(t)$, задаваемые формулами (14), дают полный спектр $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ее характеристических показателей Ляпунова.

Рассмотрим теперь наряду с системой (12) возмущенную систему

$$\dot{u} = [A(t) + M(t)]u, \quad (u \in \mathbb{R}^n, t \geq 0), \quad (15)$$

где $M(t)$ — непрерывная ограниченная матричная функция; $\|M(t)\| \leq \sigma$ (где σ — достаточно малое положительное число).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 14 ([50]). Пусть $n = 2$. Предположим, что существуют решения $z(t)$, $u(t)$ соответственно двумерных систем (12), (15) такие, что выполнено одно из двух условий:

а) $\sin^2 \angle(z(t), u(t)) \leq C^2 \sigma^2 \quad (t \in [0, +\infty))$;

б) $\sin^2 \angle(z(t), u(t)) \geq 1 - C^2 \sigma^2$ ($t \in [0, +\infty)$); где C — некоторая положительная постоянная.

Тогда характеристические показатели систем (12), (15) отличаются не более чем на величину $3K\sigma$, где

$$K \equiv 1 + 4aC + 2C\sigma + 8aC^2\sigma^2 + 2C^2\sigma^2. \quad (16)$$

Отметим, что теорема 14 дает геометрические достаточные условия устойчивости характеристических показателей двумерных правильных дифференциальных систем типа (12). Величина $3K\sigma$ из условия теоремы 12 (где K вычисляется по формуле (16)) является точной верхней границей изменения характеристических показателей Ляпунова правильной двумерной системы (12) при малых возмущениях матрицы коэффициентов этой системы.

Прямым следствием теоремы 14 является следующее утверждение.

Т е о р е м а 15. Пусть двумерная правильная линейная система дифференциальных уравнений вида (12) удовлетворяет одному из условий а), б) теоремы 14. Предположим дополнительно, что старший характеристический показатель Ляпунова $\lambda_1(A)$ системы меньше нуля:

$$\lambda_1(A) < 0.$$

Тогда правильная система (12) является грубо (робастно) асимптотически устойчивой.

Теорема 15 дает геометрические достаточные условия сохранения свойства асимптотической устойчивости двумерных правильных систем дифференциальных уравнений типа (12) при малых возмущениях матриц коэффициентов правых частей этих систем.

Предположим теперь, что матрица $A(t)$ линейной однородной дифференциальной системы (12) является почти-периодической (т.е. такой матрицей $A(t)$, что из любой последовательности $\{A(t + \tau_i)\}$, $\tau_i \in (-\infty; +\infty)$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на всей числовой прямой [51, 52]). Напомним также (см., например, [31, 32]), что линейная система дифференциальных уравнений (12) называется почти приводимой к системе

$$\dot{u} = R(t)u, \quad (u \in \mathbb{R}^n), \quad (17)$$

если для любого $\sigma > 0$ существует ляпуновское преобразование

$$u = S_\sigma(t)x,$$

переводящее ее в систему

$$\dot{\nu} = (R(t) + P_\sigma(t))\nu, \quad (\nu \in \mathbb{R}^n) \quad (18)$$

с выполненным неравенством

$$\|P_\sigma(t)\| \leq \sigma,$$

и просто почти приводимой, если при этом матрица $R(t)$ оказывается постоянной

$$R(t) = R_0 \quad (t \in (-\infty; +\infty)). \quad (19)$$

Для линейных систем с почти-периодическими коэффициентами имеют место следующие утверждения.

Теорема 16 ([53, 54]). *Для устойчивости показателей почти-периодической системы типа (12) необходимо и достаточно, чтобы эта система была почти приводимой.*

Теорема 17 ([55]). *Для устойчивости верхнего (нижнего) центрального показателя почти-периодической линейной системы дифференциальных уравнений типа (12) необходимо и достаточно, чтобы был устойчив наибольший (соответственно наименьший) характеристический показатель Ляпунова этой системы.*

Теорема 18 ([56–59]). *В пространстве S_{pq} почти-периодических линейных дифференциальных систем всюду плотно множество почти-приводимых систем.*

Из теорем 16, 18 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1 (к теоремам 16, 18). *В пространстве S_{pq} всюду плотно множество линейных дифференциальных систем с устойчивыми характеристическими показателями Ляпунова.*

Отметим, что теорема 16 дает критерий устойчивости спектра характеристических показателей Ляпунова почти-периодической линейной дифференциальной системы типа (12). Теорема 17 устанавливает критерий устойчивости центральных показателей почти-периодической системы вида (12). Теорема 18 и следствие 1 теорем 16, 18 дают описание типичного множества элементов пространства почти-периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений типа (12).

4. Робастность сверхустойчивых линейных дифференциальных систем

Устойчивость решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений является асимптотическим свойством. В связи с этим в ряде случаев на начальном участке траекторий решений может наблюдаться эффект резкого роста траекторий. В качестве примера такого нерегулярного поведения траекторий решений рассмотрим следующую стационарную дифференциальную систему:

$$\dot{x} = Ax, \quad (x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0), \quad (20)$$

где

$$x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv \text{col}(x_1, x_2, x_3)$$

— трехмерный вектор-столбец евклидова пространства \mathbb{R}^3 ;

$$A \equiv \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

— вещественная жорданова клетка размера (3×3) с собственным числом (значением) $-\frac{1}{6}$.

Пусть $x(t)$ — решение системы (20) с начальным значением $x(0)$, равным

$$x(0) = \text{col}(1, 1, 1). \quad (21)$$

Используя (20), находим, что

$$x(t) = e^{-\frac{1}{6}t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{col}(1, 1, 1) \quad (t \geq 0). \quad (22)$$

Принимая во внимание (21), получаем, что

$$x(1) = e^{-\frac{1}{6}} \text{col}\left(\frac{5}{2}, 2, 1\right); \quad x(2) = e^{-\frac{1}{3}} \text{col}(5, 3, 1). \quad (23)$$

Для любого $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, положим

$$\|x\| \equiv \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (24)$$

(в частности, при $n = 3$ мы имеем $\|x\| \equiv \max_{1 \leq i \leq 3} |x_i|$ ($x \in \mathbb{R}^n$)).

Учитывая (22), (23), получаем

$$\|x(1)\| = \frac{5}{2}e^{-\frac{1}{6}}; \quad \|x(2)\| = 5e^{-\frac{1}{3}}. \quad (25)$$

Используя (20), (24), окончательно находим

$$\frac{\|x(1)\|}{\|x(0)\|} = \frac{5}{2}e^{-\frac{1}{6}} > 2, \quad (26)$$

$$\frac{\|x(2)\|}{\|x(0)\|} = 5e^{-\frac{1}{3}} > \frac{5}{2}. \quad (27)$$

(В самом деле, так как

$$5^6 > 3 \cdot 4^6 > e4^6 \quad e^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{1}{3}} < 2,$$

то

$$\left(\frac{5}{2}\right)^6 > e2^6; \quad e^{-\frac{1}{3}} < 2^{-1},$$

откуда

$$\frac{5}{2}e^{-\frac{1}{6}} > 2; \quad 5e^{-\frac{1}{3}} > \frac{5}{2},$$

что и требовалось показать).

Неравенства (25), (26) показывают, что $\|x(1)\|$ возрастает более чем вдвое по сравнению с $\|x(0)\| = 1$, а норма $\|x(2)\|$ — более чем в два с половиной раза.

Для того чтобы избежать нежелательного эффекта всплеска на начальном участке траекторий решений, в работах [60–62] выделен специальный класс сверхустойчивых систем, для которых норма решений монотонно убывает с ростом параметра времени t .

Напомним, что постоянная матрица $A \equiv ((a_{ij}))$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ называется *сверхустойчивой*, если у нее на диагонали стоят отрицательные числа и они по абсолютной величине превосходят сумму модулей недиагональных членов по строке

$$\min_i \left(-a_{ij} - \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \right) = \sigma(A) = \sigma > 0.$$

Как показано в [60–62], сверхустойчивые матрицы являются асимптотически устойчивыми, но не наоборот.

Для сверхустойчивых систем обыкновенных дифференциальных уравнений справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 19 ([60]). *Пусть система*

$$\dot{y} = Ay \quad (t \geq 0, y \in \mathbb{R}^n, A \equiv \text{const}) \quad (28)$$

является сверхустойчивой. Тогда для любого ненулевого решения $y(t)$ системы (28) имеет место оценка

$$\|y(t)\| \leq \|y(0)\|e^{-\sigma t}. \quad (29)$$

Неравенство (29) показывает, что решение $y(t)$ сверхустойчивой стационарной системы (28) монотонно стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Отметим также, что в отличие от устойчивости (асимптотической устойчивости) сверхустойчивость сохраняется и в нестационарном случае, а также при наличии нестационарных и нелинейных возмущений.

Т е о р е м а 20 ([60]). *Пусть для всех чисел $t \geq 0$ нестационарная линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\dot{z} = A(t)z \quad (z \in \mathbb{R}^n) \quad (30)$$

удовлетворяет следующему условию сверхустойчивости:

$$\sigma(A(t)) \geq \sigma > 0. \quad (31)$$

Пусть, кроме того, возмущения $f(t, u)$ удовлетворяют соотношению

$$\|f(t, u)\| \leq \beta \|u\|; \quad 0 \leq \beta < \sigma; \quad u \in \mathbb{R}^n; \quad t \geq 0. \quad (32)$$

Тогда для любого решения $u(t)$ возмущенной системы

$$\dot{u} = A(t)u + f(t, u) \quad (t \geq 0, u \in \mathbb{R}^n) \quad (33)$$

имеет место следующая оценка:

$$\|u(t)\| \leq e^{-(\sigma-\beta)t} \|u\|. \quad (34)$$

Условия (31)–(34) показывают, что свойство сверхустойчивости линейных нестационарных систем типа (30) действительно является грубым (робастным) по отношению к малым возмущениям матрицы коэффициентов системы из класса LS . Отметим, что ввиду (30)–(33) величина σ является верхней границей величины нормы допустимых возмущений системы (30), сохраняющих свойство сверхустойчивости. Заметим также, что, если в нестационарной системе (30) матрица $A(t)$ сверхустойчива при любом фиксированном значении параметра времени t , то система (29) является сверхустойчивой (см. оценку (34) при $\beta \equiv 0$). Этот вывод становится неверным применительно к асимптотической устойчивости систем.

В самом деле, следуя [32, с. 123–126], рассмотрим двумерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = A'(t)u \quad (z \in \mathbb{R}^2, t \geq 0) \quad (35)$$

с матрицей коэффициентов

$$A'(t) \equiv \begin{pmatrix} -1 - 2 \cos 4t & -2 + 2 \sin 4t \\ 2 + 2 \sin 4t & -1 + 2 \cos 4t \end{pmatrix}. \quad (36)$$

При любом $t > 0$ собственные значения матрицы (35) $\lambda'_1(t)$, $\lambda'_2(t)$ равны

$$\lambda'_1(t) = \lambda'_2(t) \equiv -1.$$

В то же время система (35)–(36) допускает решение $u(t)$

$$u(t) \equiv (e^t \sin 2t; e^t \cos 2t)$$

с характеристическим показателем Ляпунова $\lambda(u(t))$, равным

$$\lambda(u(t)) = 1.$$

5. Робастность некоторых методов вычисления характеристических показателей Ляпунова линейных нестационарных дифференциальных систем

В этом параграфе изучаются вопросы грубости (робастности) некоторых методов вычисления и оценки показателей Ляпунова специальных классов линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Напомним, что для системы со стационарными коэффициентами

$$\dot{x} = A'x \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0) \quad (37)$$

показателями Ляпунова являются действительные части собственных значений (чисел) μ_k ($k = 1, \dots, n$) матрицы коэффициентов A' системы (37).

Заметим, что для линейной нестационарной дифференциальной системы

$$\dot{y} = A'(t)y \quad (y \in \mathbb{R}^n, t \geq 0), \quad (38)$$

вообще говоря, не существует столь прямой связи между собственными значениями $\mu_k(t)$ матрицы $A'(t)$ и характеристическими показателями Ляпунова системы (37). В самом деле, как было показано в предыдущем параграфе для линейной двумерной периодической системы (35)

$$\dot{z} = A_0(t)z \quad (z \in \mathbb{R}^2, t \geq 0),$$

$$A_0(t) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix},$$

$$a_{11}(t) \equiv -1 - 2 \cos 4t; \quad a_{12}(t) \equiv -2 + 2 \sin 4t;$$

$$a_{21}(t) \equiv 2 + 2 \sin 4t; \quad a_{22}(t) \equiv -1 + 2 \cos 4t.$$

Собственные числа матрицы $A_0(t)\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ отрицательны

$$\mu_1(t) = \mu_2(t) = -1,$$

а система (35) имеет решение $z(t)$ с характеристическим показателем Ляпунова $\lambda(z(t))$, равным 1

$$\lambda(z(t)) = 1.$$

Приведем теперь некоторый общий способ построения примеров, подобных (35). Рассмотрим, следуя [32], следующую двумерную линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{u} = A(t)u \quad (u \in \mathbb{R}^2, t \geq 0), \quad (38)$$

$$A(t) \equiv U^{-1}BU(t) - U^{-1}(t)\dot{U}(t),$$

$$U(t) \equiv \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}; \quad c \equiv \cos \omega(t), \quad s \equiv \sin \omega(t), \quad \omega > 0;$$

$U(t)$ — унитарная, двумерная квадратная матричная функция с ограниченной производной

$$\dot{U}(t) = \begin{pmatrix} -\omega s & -\omega c \\ \omega c & -\omega s \end{pmatrix};$$

$B \equiv \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ — двумерная квадратная постоянная матрица, у которой

$$\Delta \equiv \det B < 0; \quad S \equiv \text{Sp} B \equiv b_{11} + b_{22} < 0. \quad (39)$$

Заметим, что система (38) получается из стационарной двумерной системы

$$\dot{\nu} \equiv B\nu \quad (\nu \in \mathbb{R}^2, t \geq 0) \quad (40)$$

с помощью двумерного ляпуновского преобразования (морфизма)

$$u = U^{-1}(t)\nu. \quad (41)$$

В силу (39) собственные числа λ_1, λ_2 матрицы B , являющиеся одновременно характеристическими показателями Ляпунова стационарной линейной системы (40), имеют разные знаки

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0. \quad (42)$$

Ввиду того, что ляпуновский морфизм (41) сохраняет спектр показателей Ляпунова, характеристические показатели $\lambda_1(A), \lambda_2(A)$ двумерной периодической дифференциальной системы (38) удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_1(A) = \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2(A) = \lambda_2 < 0. \quad (43)$$

Следуя [32], покажем, что собственные числа $\mu_1(t), \mu_2(t)$ периодической матрицы $A(t)$ всегда постоянны и надлежащим выбором параметра ω могут быть сделаны либо отрицательными, либо комплексными с отрицательными вещественными частями.

Положим

$$A(U) \equiv U^{-1}BU. \quad (44)$$

Для матрицы $A(U)$ выполнено

$$S_p A(U) = S_p B = S; \quad \det(A(U)) = \det B = \Delta. \quad (45)$$

Так как $\text{Sp} U^{-1}\dot{U} = 0$

$$\left(U^{-1}\dot{U} = U^T \dot{U} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega s & -\omega c \\ \omega c & \omega s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \right),$$

то, используя (39), (45), получаем, что

$$\begin{aligned} \text{Sp } A(t) &= \text{Sp } (A(U) - U^{-1}\dot{U}) = \text{Sp } A(U) = S < 0; \\ \det A(t) &= \det (A(U) - U^{-1}\dot{U}) = \det A(U) + \\ &+ (a_{12}(U) - a_{21}(U))\omega + \omega^2 = \Delta + (a_{12}(U) - a_{21}(U))\omega + \omega^2. \end{aligned} \quad (46)$$

Используя (38), (44), нетрудно показать, что

$$a_{12}(U) - a_{21}(U) = b_{12} - b_{21} = \text{const} \quad (47)$$

Из (47), (48) следует, что $\det A(t)$ не зависит от времени t .

Рассмотрим теперь характеристический полином $P(A(t))$ матрицы $A(t)$

$$P(A(t)) = \mu^2 - S\mu + \Delta + (b_{12} - b_{21})\omega + \omega^2 = 0. \quad (48)$$

Его корни (собственные числа матрицы $A(t)$) $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ задаются формулами

$$\mu_1(t) = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - \Delta(\omega)}; \quad \mu_2(t) = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - \Delta(\omega)}, \quad (49)$$

где $\Delta(\omega) \equiv \Delta + (b_{12} - b_{21})\omega + \omega^2$.

Так как $S < 0$, то за счет надлежащего выбора величины $\omega > 0$ собственные числа $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ могут быть сделаны как отрицательными, так и комплексными (комплексно-сопряженными) с отрицательными вещественными частями.

Приведенный ранее пример двумерной периодической дифференциальной системы (35) получается этим методом в случае, когда $B \equiv \text{diag}(-3; 1)$ — диагональная (2×2)-матрица; $\omega = 2$.

Предположим теперь, что коэффициенты b_{11} , b_{12} , b_{21} , b_{22} двумерной квадратной матрицы B связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \det B = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} > 0; \\ S &\equiv \text{Sp } B = b_{11} + b_{22} < 0; \\ \frac{S^2}{4} - \Delta &> 0. \end{aligned}$$

В этом случае собственные числа λ_1 , λ_2 постоянной матрицы B являются вещественными и отрицательными

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0. \quad (50)$$

Для характеристических показателей $\lambda_1(A)$, $\lambda_2(A)$ периодической дифференциальной динамической системы (38) справедливы неравенства

$$\lambda_1(A) = \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2(A) = \lambda_2 < 0. \quad (51)$$

Выберем теперь положительное число ω так, чтобы выполнялись неравенства

$$S^2 - 4\Delta(\omega) \equiv S^2 - 4\Delta - 4(b_{12} - b_{21})\omega - 4\omega^2 > 0, \quad (52)$$

$$\Delta(\omega) \equiv \Delta + (b_{12} - b_{21})\omega + \omega^2 > 0. \quad (53)$$

Используя (50)–(53), получаем, что собственные значения $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ матрицы $A(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\mu_1(t) &= \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - \Delta(\omega)} < 0; \\ \mu_2(t) &= \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - \Delta(\omega)} < 0.\end{aligned}\quad (54)$$

Таким образом, мы показали, что в этом случае как собственные значения $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, так и характеристические показатели Ляпунова $\lambda_1(A)$, $\lambda_2(A)$ линейной периодической системы (38) являются отрицательными:

$$\begin{aligned}\mu_1(t) &< 0, & \mu_2(t) &< 0; \\ \lambda_1(A) &< 0, & \lambda_2(A) &< 0.\end{aligned}$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда для постоянной квадратной матрицы выполнены соотношения

$$\begin{aligned}\Delta &\equiv \det B > 0; \\ S &\equiv \text{Sp } B > 0; \\ S^2 - 4\Delta &> 0.\end{aligned}\quad (55)$$

В этом случае ввиду (55) собственные значения λ_1 , λ_2 постоянной двумерной матрицы вещественны и положительны

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0. \quad (56)$$

Показатели Ляпунова $\lambda_1(A)$, $\lambda_2(A)$ периодической системы (38) удовлетворяют в силу (55), (56) неравенствам

$$\lambda_1(A) = \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2(A) = \lambda_2 > 0. \quad (57)$$

Выберем теперь положительное число ω так, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\begin{aligned}S^2 - 4\Delta(\omega) &> 0, \\ \Delta(\omega) &\equiv \Delta + (b_{12} - b_{21})\omega + \omega^2 > 0.\end{aligned}\quad (58)$$

Принимая во внимание (57), (58), находим, что собственные числа $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ матрицы $A(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned}\mu_1(t) &= \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - \Delta(\omega)} > 0; \\ \mu_2(t) &= \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - \Delta(\omega)} > 0.\end{aligned}\quad (59)$$

Из (59) вытекает, что в рассматриваемом нами случае собственные числа $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ и показатели Ляпунова $\lambda_1(A)$, $\lambda_2(A)$ периодической системы (38) являются положительными

$$\begin{aligned}\mu_1(t) &> 0, & \mu_2(t) &> 0; \\ \lambda_1(A) &> 0, & \lambda_2(A) &> 0.\end{aligned}$$

Отметим, что при дополнительных ограничениях на матрицу коэффициентов $A'(t)$ нестационарной линейной дифференциальной системы (38) можно установить некоторую связь между собственными числами (значениями) матрицы коэффициентов системы $A'(t)$ и характеристическими показателями Ляпунова этой системы, а именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 21 (метод замороженных коэффициентов [32, 63]). *Предположим, что для системы (38) выполнены условия:*

а) матрица $A'(t)$ является ограниченной

$$\|A'(t)\| \leq K;$$

б) имеет место неравенство

$$M(t) \leq \rho,$$

где

$$M(t) \equiv \max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{Re} \mu_i(t),$$

$\rho = \operatorname{const} > 0$, $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)$ — собственные значения $(n \times n)$ -матрицы $A'(t)$ ($n \geq 2$);

в) $\|A'(t) - A'(\tau)\| \leq \sigma|t - \tau|$, $\|\dot{A}'(t)\| \leq \sigma$, $\dot{A}'(t) \equiv \frac{dA'(t)}{dt}$ — производная матрицы $A'(t)$ по параметру времени t . Тогда старший характеристический показатель Ляпунова системы типа (38) допускает следующую оценку:

$$\lambda_{\max}(A') \leq \rho + \psi^{-1},$$

где ψ — положительный корень алгебраического уравнения

$$\sum_{k=1}^n \sigma k (2K)^{k-1} \psi^{k+1} = 1.$$

В частности, всегда

$$\lambda_{\max}(A') \leq \rho + 2K \sqrt[n+1]{\sigma(n^2 + n)(8K^2)^{-1}}. \quad (60)$$

Таким образом, неравенство (62) утверждения теоремы 21 показывает, что отклонение величины $\lambda_{\max}(A')$ от верхней грани значений величины

$$M(t) \equiv \max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{Re} \mu_i(t),$$

где $\mu_i(t)$ — i -е собственное значение матрицы $A'(t)$, вызванное нестационарностью $A'(t)$, имеет порядок не выше $\sqrt[n+1]{\sigma}$ при малых значениях σ .

Другими словами, мы можем утверждать, что метод нахождения характеристических показателей Ляпунова стационарных дифференциальных систем может быть распространен на множество нестационарных систем, удовлетворяющих условию в) теоремы 21, с погрешностью не выше $\sqrt[n+1]{\sigma}$, т.е. этот метод является адекватным для линейных нестационарных динамических систем, удовлетворяющих одному из соотношений

$$\|A'(t) - A'(\tau)\| \leq \sigma|t - \tau|;$$

$$\|\dot{A}'(t)\| \leq \sigma$$

при достаточно малых значениях параметра $\sigma > 0$.

6. Заключение

Таким образом, в работе изучаются вопросы устойчивости (робастности) различных классов динамических дифференциальных моделей проектирования сложных технических объектов и систем. Для линейных динамических моделей проектирования даются алгебраические и геометрические критерии грубой устойчивости спектра характеристических показателей Ляпунова решений этих моделей, а также их грубой асимптотической устойчивости по Ляпунову, грубой неустойчивости и сверхустойчивости по отношению к малым линейным и нелинейным возмущениям их матриц коэффициентов. Исследуются также вопросы устойчивости показателей Ляпунова правильных и почти-периодических (квазипериодических) линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН № 14 “Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий” (проект № 2.44) и РФФИ (проект № 07-01-00572).

Список литературы

1. Боголюбов Н.Н. О некоторых статистических методах в математической физике.— Киев: Изд-во АН УССР, 1965.
2. Боголюбов Н.Н. Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.
3. Митропольский Ю.А. Методы усреднения в нелинейной механике.— Киев: Наук. думка, 1971.
4. Волосов В.М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук.— 1962.— № 6.— С. 3—126.
5. Арнольд В.И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
6. Гребенщиков Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах.— М.: Наука, 1986.
7. Гребенщиков Е.А. Введение в теорию резонансных систем.— М.: МГУ, 1987.
8. Хасьминский Р.З. О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром // Теория вероятностей и ее применения.— 1966.— № 2.— С. 240—259.
9. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений.— М.: Наука, 1979.
10. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения.— Киев: Наук. думка, 1968.
11. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения.— М.: Наука, 1966.
12. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1967.
13. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем.— М.: Наука, 1977.
14. Розенвассер Е.Н. Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления.— М.: Наука, 1977.
15. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фужаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1987.
16. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.— М.: Эдиториал УРСС, 2003.
17. Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н. Метод сравнения в математической теории систем.— Новосибирск: Наука, 1980.
18. Ванг К., Мишель А.Н., Пассино К.М. Об отображениях, сохраняющих устойчивость динамических систем // Автоматика и телемеханика.— 1994.— № 10.— С. 3—10.
19. Хапаев М.М. Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний.— М.: Высшая школа, 1988.
20. Воронов А.А. Устойчивость. Управляемость. Наблюдаемость.— М.: Наука, 1979.
21. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А.А. Воронова, В.М. Матросова.— М.: Наука, 1977.

22. Зубов В.И. Лекции по теории управления.—М.: Наука, 1975.
23. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория систем управления.—М.: Высшая школа, 1988.
24. Воронов А.А. О некоторых новых направлениях в моделировании.—В кн.: Диалектика и системный анализ.—М.: Наука, 1986.—С. 81–92.
25. Шрейдер Ю.А., Шаров А.А. Системы и модели.—М.: Радио и связь, 1982.
26. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент.—М.: Наука, 1979.
27. Морозов К.Е. Математическое моделирование в научном познании.—М.: Мысль, 1969.
28. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей.—М.: МГУ, 1983.
29. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование.—М.: Наука, 1997.
30. Технология системного моделирования / Под ред. С.В. Емельянова, В.В. Калашникова.—М.: Машиностроение, 1988.
31. Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений //Итоги науки и техники. Математический анализ.—М.: ВИНТИ, 1974.—Т. 12.—С. 71–147.
32. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова.—М.: Наука, 1966.
33. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения.—М.: Гостехиздат, 1950.
34. Poincaré O. Die Ordnungszahlen der Differentialgleichungen //Math. Z.—1930.—В. 32.—С. 703–728.
35. Былов Б.Ф., Изобов Н.А. Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей системы //Дифференц. уравнения.—1969.—Т. 5, № 10.—С. 1785–1793.
36. Былов Б.Ф., Изобов Н.А. Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей системы //Дифференц. уравнения.—1969.—Т. 5, № 10.—С. 1794–1803.
37. Миллионщиков В.М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений //Дифференц. уравнения.—1969.—Т. 5, № 10.—С. 1775–1784.
38. Изобов Н.А. Коэффициентный признак устойчивости показателей Ляпунова двумерной линейной системы //Украинский математический журнал.—1972.—Т. 24, № 3.—С. 306–315.
39. Миллионщиков В.М. Системы с интегральной разделенностью всюду плотные в множестве всех линейных систем дифференциальных уравнений //Дифференц. уравнения.—1969.—Т. 5, № 7.—С. 1167–1170.
40. Миллионщиков В.М. Критерий малого изменения направлений решений линейной системы дифференциальных уравнений при малых возмущениях коэффициентов системы //Матем. заметки.—1968.—Т. 4, № 2.—С. 173–180.
41. Ахрем А.А. Некоторые свойства специального класса линейных систем дифференциальных уравнений.—Деп. в ВИНТИ 04.02.83, № 5294-83.—105 с.
42. Ахрем А.А. Геометрический критерий интегральной разделенности для линейных систем дифференциальных уравнений //Успехи матем. наук.—1985.—Т. 40, № 5.—С. 228–229.
43. Макаров И.М., Ахрем А.А., Рахманкулов В.З. О некоторых математических задачах общей теории проектирования сложных технических систем.—В сб.: Управление информационными потоками.—М.: Эдиториал УРСС, ИСА РАН, 2002.—С. 235–245.
44. Виноград Р.Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений //Матем. сб.—1957.—Т. 42, № 2.—С. 207–222.
45. Миллионщиков В.М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем //Сибирский математический журнал.—1969.—Т. 10, № 1.—С. 99–104.
46. Нуждова Т.Е. Одновременная достижимость центральных показателей двумерных линейных систем //Дифференц. уравнения.—1972.—Т. 8, № 8.—С. 1416–1422.
47. Диб К.А. Одновременная достижимость центральных показателей //Дифференц. уравнения.—1974.—Т. 10, № 12.—С. 2125–2136.
48. Бронштейн И.У. Черный В.Ф. Линейные расширения, удовлетворяющие условию Перрона //Дифференц. уравнения.—1980.—Т. 16, № 2.—С. 201–207.

49. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Лин В.Я., Локуциевский О.В. О топологических препятствиях к блочной диагонализации некоторых экспоненциально расщепленных почти-периодических систем.—Препринт № 69.—М.: Изд-во ИПМ АН СССР, 1977.—25 с.
50. Адрианова Л.Я. О некоторых свойствах правильных систем // Вестник ЛГУ.—1977.—№ 19.—С. 5–8.
51. Левитан Б.М. Почти-периодические функции.—М.: Гостехиздат, 1953.
52. Левитан Б.М., Жиков В.В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения.—М.: Изд-во МГУ, 1978.
53. Миллионщиков В.М. О связи между устойчивостью характеристических показателей и почти-приводимостью систем с почти-периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения.—1967.—Т. 3, № 12.—С. 2127–2134.
54. Миллионщиков В.М. Критерий устойчивости вероятного спектра линейных систем дифференциальных уравнений с рекуррентными коэффициентами и критерий почти-приводимости систем с почти-периодическими коэффициентами // Матем. сб.—1969.—Т. 78, № 2.—С. 179–201.
55. Новиков В.Л. Критерий устойчивости центральных показателей системы линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами // Труды семинара им. И.Г. Петровского (вып. 2), Москва (1976).—М.: Изд-во МГУ, 1976.—С. 151–188.
56. Новиков В.Л. О почти-приводимых системах с почти-периодическими коэффициентами // Матем. заметки.—1974.—Т. 16, № 5.—С. 789–799.
57. Фалько Н.С. О почти-приводимых системах с квазипериодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения.—1978.—Т. 14, № 3.—С. 467–473.
58. Фалько Н.С. Двумерные почти-приводимые системы с почти-периодическими коэффициентами // Труды семинара им. И.Г. Петровского (вып. 7), Москва (1981).—М.: Изд-во МГУ, 1981.—С. 199–227.
59. Миллионщиков В.М. О типичности почти-приводимых систем с почти-периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения.—1978.—Т. 14, № 4.—С. 634–636.
60. Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т. Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Техническая кибернетика.—М.: ВИНТИ, 1991.—Т. 32.—С. 3–31.
61. Поляк Б.Т., Щербakov П.С. Сверхустойчивые линейные системы управления // Автоматика и телемеханика.—2002.—№ 8.—С. 37–53.
62. Поляк Б.Т., Щербakov П.С. Робастная устойчивость и управление.—М.: Наука, 2002.
63. Алексеев В.М. Об асимптотическом поведении решений слабо-нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР.—1960.—Т. 134, № 2.—С. 247–250.

ГРУБЫЕ СВОЙСТВА СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. А. Ахрем

В статье рассматривается ряд алгебраических и геометрических свойств моделей сложных систем из класса линейных алгебраических уравнений в нормированных пространствах. Даны критерии грубой (робастной) ограниченности и обратимости линейных операторов таких моделей. Получены также достаточные условия робастности операторов монодромии линейных периодических динамических систем.

1. Введение

Во многих задачах оптимизации, математической физики, математической экономики и др. важную роль играет решение следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$Ax = y. \quad (1)$$

Если оператор A является непрерывно обратимым (напомним (см. например, [1–5]), что линейный оператор $A: X \rightarrow Y$, где X, Y — линейные нормированные пространства, называется непрерывно обратимым, если область его значений $R(A) = Y$, оператор A является обратимым и обратный оператор A^{-1} принадлежит нормированному пространству $L(Y, X)$ линейных непрерывных операторов, действующих из всего Y в X), то уравнение (1) имеет единственное решение $x = A^{-1}y$ для любой правой части y . Если при этом x' — решение системы (1) с правой частью y' , то

$$\|x - x'\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|y - y'\|. \quad (2)$$

Неравенство (2) означает, что малое изменение правой части y влечет малое изменение решения, т. е. линейная задача (2) является корректно разрешимой [4, 5].

В настоящей работе мы приведем необходимые и достаточные условия непрерывной обратимости линейных операторов нормированных пространств. Будет установлена грубость свойства непрерывной обратимости таких операторов. Будут также получены достаточные условия грубости (робастности) операторов монодромии линейных периодических динамических моделей сложных систем.

2. Робастность свойства непрерывной обратимости линейных операторов нормированных пространств

А. Пусть задан линейный оператор $A: X \rightarrow Y$, где X, Y — линейные пространства, причем его область определения $D(A) \subseteq X$, а область значений

$R(A) \subseteq Y$. Положим

$$N(A) = \{x \in D(A): Ax = 0\},$$

$N(A)$ является множеством нулей оператора A . Отметим, что $N(A)$ не является пустым множеством, так как $0 \in N(A)$.

Справедливо следующее утверждение [1–3].

Утверждение 1. *Оператор A переводит взаимно однозначно $D(A)$ в $R(A)$ тогда и только тогда, когда $N(A) = \{0\}$.*

Пусть теперь линейный оператор A отображает $D(A)$ на $R(A)$ взаимно однозначно. Тогда существует обратный оператор A^{-1} , отображающий $R(A)$ взаимно однозначно на $D(A)$. Для этого оператора имеет место следующее утверждение [1–3].

Утверждение 2. 1. *Оператор A^{-1} является линейным оператором.*

2. *Пусть X, Y — нормированные пространства. Тогда оператор A^{-1} существует и ограничен на $R(A)$ тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной $m > 0$ и любого $x \in D(A)$ выполняется соотношение*

$$\|Ax\| \geq m\|x\|. \quad (3)$$

Как уже говорилось во введении данной статьи, линейный оператор $A: X \rightarrow Y$ непрерывно обратим, если $R(A) = Y$, оператор A обратим и $A^{-1} \in L(Y, X)$, где $L(Y, X)$ — нормированное пространство линейных непрерывных операторов, действующих из всего Y в X .

Прямым следствием утверждения 2 является следующее

Утверждение 3 ([1–3]). *Оператор A непрерывно обратим тогда и только тогда, когда $R(A) = Y$ и для некоторой постоянной $m > 0$ для всех $x \in D(A)$ выполняется неравенство (3).*

Отметим, что в случае всюду определенного и ограниченного оператора $A \in (X, Y)$ справедлива следующая теорема Банаха об обратном операторе [1–3].

Теорема 1. *Пусть A — ограниченный линейный оператор, отображающий взаимно однозначно банахово пространство X на банахово пространство Y . Тогда оператор A^{-1} ограничен.*

Другими словами, если $A \in L(X, Y)$, где X, Y — банаховы пространства, $R(A) = Y$ и A обратим, то A — непрерывно обратим.

В. Пусть X является банаховым пространством. Обозначим через $L(X)$ пространство линейных, ограниченных, всюду заданных операторов. Пусть E — единичный оператор из $L(X)$:

$$Ex = x \quad (x \in X).$$

Пусть $S_1(E)$ — единичный шар в $L(X)$:

$$S_1(E) \equiv \{A \in L(X): \|A - E\| < 1\}.$$

Для операторов A из множества $S_1(E)$ имеет место следующее утверждение [1–3].

Теорема 2. Пусть $A \in S_1(E)$, $B \equiv E - A$. Тогда оператор A непрерывно обратим. При этом для операторов A, B справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\| &\leq \frac{1}{1 - \|B\|} = \frac{1}{1 - \|E - A\|}, \\ \|E - A^{-1}\| &\leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} = \frac{\|E - A\|}{1 - \|E - A\|}. \end{aligned} \quad (4)$$

Из теоремы 2 вытекает следующее следствие.

Следствие (теоремы 2). Свойство непрерывной обратимости является грубым (робастным) для операторов из множества $S_1(E)$.

Пусть теперь линейный оператор A принадлежит пространству $L(X, Y)$ и является обратимым. Рассмотрим такой оператор $C \in L(X, Y)$, что

$$\|(C - A)A^{-1}\| < 1. \quad (5)$$

Для операторов A, C имеет место следующее утверждение [1–3].

Теорема 3. 1. Пусть $A, C \in L(X, Y)$ и удовлетворяют соотношению (5). Тогда оператор C является непрерывно обратимым и справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|C^{-1}\| &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|(C - A)A^{-1}\|}, \\ \|C^{-1} - A^{-1}\| &\leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|(C - A)A^{-1}\|}{1 - \|(C - A)A^{-1}\|}. \end{aligned} \quad (6)$$

2. Пусть оператор A непрерывно обратим и справедливо неравенство

$$\|C - A\| < \|A^{-1}\|^{-1}.$$

Тогда оператор C также является непрерывно обратимым и для него выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|C^{-1}\| &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|(C - A)\| \cdot \|A^{-1}\|}, \\ \|C^{-1} - A^{-1}\| &\leq \frac{\|A^{-1}\|^2 \cdot \|(C - A)\|}{1 - \|(C - A)\| \cdot \|A^{-1}\|}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из теоремы 3 вытекает следующее следствие.

Следствие (теоремы 3). Свойство непрерывной обратимости является робастным для линейных операторов из пространства $L(X, Y)$.

Соотношения (4), (6), (7) дают верхнюю оценку величины разброса норм единичного и общего обратимого линейного оператора нормированного пространства при их линейных возмущениях (флуктуациях).

Отметим, что оценки норм операторов (4), (6), (7) используются, в частности, при исследовании фундаментальных свойств семейств преобразований векторных расслоений [6, 7], линейных расширений динамических систем [8–10].

3. Робастность операторов монодромии периодических динамических моделей сложных технических систем

В настоящем разделе мы будем предполагать, что заданы:

- а) ω — произвольное положительное число;
 б) $A(\cdot): [0, \omega] \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ — произвольная ограниченная оператор-функция, непрерывно зависящая от t , $0 \leq t \leq \omega$.

Положим:

$$а1) a \equiv \max_{0 \leq t \leq \omega} \|A(t)\| + 1;$$

$$б1) b \equiv \max(\omega, \omega^{-1});$$

- с1) $E \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ — тождественное отображение вещественного евклидова пространства \mathbb{R}^n ($n \geq 2$):

$$Ex = x \quad \text{для любого } x \in \mathbb{R}^n.$$

Имеет место следующая

Теорема 4. Для любого числа $\sigma \in [0; 1/2]$ и любого оператора $U \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ такого, что

$$\|U - E\| \leq \sigma(80a^2b)^{-1},$$

можно указать такую непрерывно-дифференцируемую при $0 \leq t \leq \omega$ операторную функцию $\dot{V}(t)$ ($V(\cdot): [0, \omega] \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$), что:

- 1) $V(0) = E$; $\dot{V}(0) = 0$ (где 0 — нулевое отображение пространства \mathbb{R}^n : $0x = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$); $V(\omega) = U$;

$$2) \|\dot{V}(t)V^{-1}(t) + V(t)A(t)V^{-1}(t) - A(t)\| \leq \sigma \quad (t \in [0, \omega]);$$

$$3) \dot{V}(\omega)V^{-1}(\omega) + V(\omega)A(\omega)V^{-1}(\omega) = A(\omega).$$

Доказательство. Обозначим

$$A_1 \equiv U - E, \quad A_2 \equiv A(\omega)U - UA(\omega), \quad \sigma_1 \equiv \sigma(80a^2b)^{-1}.$$

Покажем, что непрерывно-дифференцируемая при $0 \leq t \leq \omega$ операторная функция

$$V(t) \equiv E + P_1(t)A_1 + P_2(t)A_2, \\ P_1(t) \equiv 3\omega^{-1}t^2 - 2\omega^{-3}t^3, \quad P_2(t) \equiv \omega^{-2}t^3 - \omega^{-1}t^2,$$

обладает свойствами 1)–3), указанными в условии теоремы 4.

Действительно, так как $P_1(0) = P_2(0) = \dot{P}_1(0) = \dot{P}_2(0)$, то

$$a1) V(0) = E + P_1(0)A_1 + P_2(0)A_2 = E; \quad (8)$$

$$b1) \dot{V}(0) = \dot{P}_1(0)A_1 + \dot{P}_2(0)A_2 = 0. \quad (9)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \|A_1\| &\leq \sigma_1, \\ \|A_2\| &= \|A(\omega)U - UA(\omega)\| = \|A(\omega)A_1 - A_1A(\omega)\| \leq 2\|A(\omega)\|, \\ \|A_1\| &\leq 2a\sigma_1, \end{aligned}$$

имеем при $0 \leq t \leq \omega$

$$\begin{aligned} \|V(t) - E\| &= \|P_1(t)A_1 + P_2(t)A_2\| \leq \|P_1(t)A_1\| + \|P_2(t)A_2\| \leq \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq \omega} |P_1(t)| \|A_1\| + \max_{0 \leq t \leq \omega} |P_2(t)| \|A_2\| \leq 5\sigma_1 + 4ab\sigma_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что так как $a \geq 1$, $0 \leq \sigma \leq 1/2$, $b \geq 1$, то

$$5\sigma_1 + 4ab\sigma_1 \leq 9a^2b\sigma_1 = \frac{9}{80}\sigma < \frac{1}{16}. \quad (11)$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} \|\dot{V}(t)\| &= \|\dot{P}_1(t)A_1 + \dot{P}_2(t)A_2\| \leq \max_{0 \leq t \leq \omega} |\dot{P}_1(t)| \|A_1\| + \max_{0 \leq t \leq \omega} |\dot{P}_2(t)| \|A_2\| \leq \\ &\leq 12b\sigma_1 + 10a\sigma_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Принимая во внимание (10), (11), получаем, что при $0 \leq t \leq \omega$ оператор $V(t)$ имеет непрерывный обратный $V^{-1}(t)$, который представим в следующем виде [1–3]:

$$V^{-1}(t) = [E + (E - V(t))]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (E - V(t))^k. \quad (13)$$

Из (13) (с учетом (10), (11)) находим, что

$$\begin{aligned} \|V^{-1}(t) - E\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|E - V(t)\|^k \leq \\ &\leq 2(5\sigma_1 + 4ab\sigma_1) = 10\sigma_1 + 8ab\sigma_1 < 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8} < 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Принимая во внимание, что при $t \in [0, \omega]$

$$\begin{aligned} \|\dot{V}(t)\| &\leq 12b\sigma_1 + 10a\sigma_1, \\ \|V(t) - E\| &\leq 5\sigma_1 + 4ab\sigma_1, \\ \|V^{-1}(t) - E\| &\leq 10\sigma_1 + 8ab\sigma_1, \end{aligned}$$

получаем, что

$$\max_{0 \leq t \leq \omega} \|\dot{V}(t)V^{-1}(t) + V(t)A(t)V^{-1}(t) - A(t)\| \leq \sigma \quad (15)$$

(действительно, при $0 \leq t \leq \omega$ имеем

$$\begin{aligned} \|\dot{V}V^{-1} + VAV^{-1} - A\| &\leq \|\dot{V}V^{-1}\| + \|VAV^{-1} - A\| \leq \\ &\leq \|\dot{V}\| \cdot \|E + (V^{-1}(t) - E)\| + \|(E + (V - E))A(E + (V^{-1} - E)) - A\| \leq \\ &\leq \|\dot{V}\| + \|\dot{V}\| \cdot \|V^{-1} - E\| + \|A\|(\|V - E\| + \|V^{-1} - E\|) + \|A\| \cdot \|V - E\| \cdot \|V^{-1} - E\| \leq \\ &\leq 12b\sigma_1 + 10a\sigma_1 + (12b\sigma_1 + 10a\sigma_1)(10\sigma_1 + 8ab\sigma_1) + (4ab + 5)a\sigma_1 + \\ &\quad + (8ab + 10)a\sigma_1 + a(8ab + 10)a(4ab + 5)\sigma_1^2 \leq 80a^2b\sigma_1 = \sigma, \end{aligned}$$

что и требовалось установить.)

Так как $P_1(\omega) = \dot{P}_2(\omega) = 1$, $\dot{P}_1(\omega) = P_2(\omega) = 0$, то

$$a2) \quad V(\omega) = E + P_1(\omega)A_1 + P_2(\omega)A_2 = E + A_1 = U; \quad (16)$$

$$b2) \quad \dot{V}(\omega) = \dot{P}_1(\omega)A_1 + \dot{P}_2(\omega)A_2 = A_2 = A(\omega)U - UA(\omega). \quad (17)$$

Учитывая (16), (17), получаем, что

$$\begin{aligned} \dot{V}(\omega)V^{-1}(\omega) + V(\omega)A(\omega)V^{-1}(\omega) &= \\ &= (A(\omega)U - UA(\omega))U^{-1} + UA(\omega)U^{-1} = A(\omega). \quad (18) \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали (см. (8), (9), (15), (16), (18)), что операторная функция $V(t) = E + P_1(t)(U - E) + P_2(t)(A(\omega)U - UA(\omega))$ обладает свойствами 1)–3), указанными в утверждении теоремы 4.

Теорема 4 полностью доказана.

Следствие (теоремы 4). Пусть $T \geq 1$ — произвольное число, $A(\cdot): \mathbb{R}^+ \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ — ограниченное, непрерывное на отрицательной полуоси $\mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty)$ отображение; $a \equiv \sup_{t \geq 0} \|A(t)\| + 1$, σ — произвольное число из отрезка $[0; 1/2]$, $U \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ — фиксированное отображение, удовлетворяющее неравенству

$$\|U - E\| \leq \sigma(80a^2)^{-1}.$$

Тогда непрерывно-дифференцируемая при $T - 1 \leq t \leq T$ операторная функция

$$V(t) = E + P_1'(t)(U - E) + P_2'(t)(A(T)U - UA(T)),$$

где $P_1'(t) = 3(t - T + 1)^2 - 2(t - T + 1)^3$, $P_2'(t) = (t - T + 1)^3 - (t - T + 1)^2$, обладает следующими свойствами:

- $V(T - 1) = E$, $\dot{V}(T - 1) = 0$, $V(T) = U$;
- $\max_{T - 1 \leq t \leq T} \|\dot{V}(t)V^{-1}(t) + V(t)A(t)V^{-1}(t) - A(t)\| \leq \sigma$;
- $\dot{V}(T)V^{-1}(T) + V(T)A(T)V^{-1}(T) = A(T)$.

Отметим, что оператор-функции типа $V(t)$ из утверждений теоремы 4 и ее следствия широко используются в качественной теории многомерных обыкновенных дифференциальных уравнений при исследовании различных характеристических свойств их решений (см., например, [11–21]).

Рассмотрим теперь следующую линейную периодическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{z} = A_0(t)z \quad (z \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0), \quad (19)$$

$A_0(t)$ — непрерывное ω -периодическое отображение:

$$A_0(t + \omega) = A_0(t) \quad (t \in \mathbb{R}^+).$$

Напомним (см., например, [22–24]), что оператором монодромии $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется линейный оператор, переводящий начальное условие при $t = 0$ в значение решения системы (19) с этим начальным условием при $t = \omega$.

Зафиксируем в евклидовом вещественном пространстве \mathbb{R}^n некоторый ортонормированный базис e_1, \dots, e_n и пусть

$$\dot{u} = A'_0(t) \cdot u \quad (20)$$

— векторно-матричная форма записи системы (20) в базисе e_1, \dots, e_n :

$$u \equiv \text{col.}(u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ \dots \\ u^{(n)} \end{pmatrix};$$

$$A'_0(t) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

— матрица оператора $A'_0(t)$ в базисе e_1, \dots, e_n .

Для линейной периодической системы (20) имеет место следующее утверждение.

Теорема 5 ([22–24]). 1. Для линейной ω -периодической системы (20) нормированная при $t = 0$ фундаментальная матрица решений имеет вид

$$X(t) = K(t) \cdot e^{Lt},$$

где $K(t)$ — класса C^1 ω -периодическая неособенная матрица, $K(0) = E$ (E — единичная ($n \times n$)-матрица), L — постоянная матрица.

2. Всякое линейное уравнение (20) с ω -периодическими коэффициентами приводится к уравнению с постоянными коэффициентами ω -периодической линейной заменой переменных.

3. Всякое вещественное линейное ω -периодическое уравнение типа (20) приводится к уравнению с постоянными вещественными коэффициентами 2ω -периодической вещественной линейной заменой переменных.

Следствие (теоремы 5). Линейная ω -периодическая дифференциальная система вида (20) принадлежит классу приводимых по Лпунову линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Напомним (см., например, [17, 22–24]), что собственные значения m_j оператора монодромии M (матрицы $X(\omega)$, $X(0) = E$) называются мультипликаторами периодической системы (19), (20).

Отметим, что оператор M (матрица $X(\omega)$) и мультипликаторы m_1, \dots, m_n играют важную роль при исследовании фундаментальных свойств решений линейных периодических систем типа (19), (20).

В частности, для матрицы $X(\omega)$ и мультипликаторов m_1, \dots, m_n справедливы следующие утверждения [22–24]:

$$1) \sum_{i=1}^n m_i = \text{Sp } X(\omega), \text{ где } \text{Sp } X(\omega) \text{ — след матрицы } X(\omega);$$

$$2) \prod_{i=1}^n m_i = \det X(\omega) = \exp \int_0^{\omega} \operatorname{Sp} A(t) dt \quad (\prod \text{ — знак произведения});$$

3) для того чтобы уравнение (19), (20) имело ненулевое решение $x(t)$, удовлетворяющее условию

$$x(t + \omega) = mx(t) \quad (t \in \mathbb{R}^+),$$

необходимо и достаточно, чтобы число m было мультипликатором уравнения (19), (20);

4) линейная ω -периодическая система (19), (20) имеет нетривиальное решение периода ω тогда и только тогда, когда по меньшей мере один из ее мультипликаторов m равен единице;

5) линейная ω -периодическая система вида (19), (20) устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы m_1, \dots, m_n расположены внутри замкнутого единичного круга $|m| \leq 1$, причем мультипликаторы, лежащие на окружности $|m| = 1$, имеют простые элементарные делители, если их рассматривать как собственные значения соответствующей матрицы монодромии;

6) для асимптотической устойчивости ω -периодической дифференциальной системы (19), (20) необходимо и достаточно, чтобы все ее мультипликаторы m_1, \dots, m_n находились внутри единичного круга $|m| < 1$.

Положим:

$$a) a \equiv 1 + \max_{0 \leq t \leq \omega} \|A_0(t)\|;$$

$$b) b \equiv \max \{\omega, \omega^{-1}\};$$

$$c) d \equiv \max \{1, \|M^{-1}\|\}, \text{ где } M \text{ — оператор монодромии системы (19);}$$

$$d) \sigma \text{ — произвольное число из отрезка } [0; 1/2].$$

В этих обозначениях имеет место следующая

Теорема 6. Для любого оператора $U \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ такого, что

$$\|M - U\| \leq \sigma(80a^2bd)^{-1},$$

можно указать такую ω -периодическую непрерывную операторную функцию $B_\sigma(t)$ ($B_\sigma(\cdot): \mathbb{R}^+ \rightarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$), что:

$$a1) \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|A_0(t) - B_\sigma(t)\| \leq \sigma;$$

b1) оператор U является оператором монодромии ω -периодической системы

$$\dot{w} = B_\sigma(t)w. \quad (21)$$

Доказательство. Положим $V \equiv E + (U - M)M^{-1}$. Так как $\|V - E\| = \|(U - M)M^{-1}\| \leq \sigma(80a^2b)^{-1}$, то ввиду теоремы 4 существует непрерывно-дифференцируемая при $0 \leq t \leq \omega$ оператор-функция $V(t)$ ($V(\cdot): [0, \omega] \rightarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$) такая, что:

$$1) V(0) = E, \dot{V}(0) = 0, V(\omega) = V = E + (U - M)M^{-1}; \quad (22)$$

$$2) \|\dot{V}(t)V^{-1}(t) + V(t)A_0(t)V^{-1}(t) - A_0(t)\| \leq \sigma \quad (t \in [0, \omega]);$$

$$3) \dot{V}(\omega)V^{-1}(\omega) + V(\omega)A_0(\omega)V^{-1}(\omega) = A_0(\omega).$$

Положим

$$B_\sigma \equiv \dot{V}(t)V^{-1}(t) + V(t)A_0(t)V^{-1}(t) \quad (t \in [0, \omega]).$$

За пределы промежутка $0 \leq t \leq \omega$ продолжим $B_\sigma(t)$ по периодичности. Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{v} = B_\sigma(t)v \quad (v \in \mathbb{R}^n). \quad (23)$$

Учитывая свойства 1)–3) оператор-функции $V(t)$ получаем, что:

1') оператор-функция $B_\sigma(t)$ непрерывна и ω -периодична по t ;

2') $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|B_\sigma(t) - A_0(t)\| \equiv \max_{0 \leq t \leq \omega} \|B_\sigma(t) - A_0(t)\| \leq \sigma$;

3') оператор U является оператором монодромии системы (23):

$$U = M_\sigma,$$

где M_σ — оператор монодромии системы (21)–(23).

(В самом деле, $M_\sigma = V(\omega)M = (E + (U - M)M^{-1})M = M + U - M = U$, что и требовалось установить.)

Теорема 6 полностью доказана.

Прямым следствием теоремы 6 является следующее

Утверждение 4. Свойство линейного оператора из пространства

$$\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

быть оператором монодромии для линейной дифференциальной системы из метрического пространства ω -периодических систем $S_{\text{пер}}$ с метрикой [21, 25]:

$$d(A_0, B_0) \equiv \max_{0 \leq t \leq \omega} \|A_0(t) - B_0(t)\|$$

(где системы $\dot{z} = A_0 z$, $\dot{y} = B_0 y$ принадлежат $S_{\text{пер}}$) является робастным (грубым).

4. Заключение

Таким образом, в работе даны необходимые и достаточные условия грубой ограниченности и обратимости специальных классов линейных операторов в нормированных пространствах. Получены также достаточные условия грубости операторов (матриц) монодромии периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН № 14П “Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий” (проект № 2.44).

Список литературы

1. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа.—М.: Наука, 1965.
2. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.—М.: Мир, 1971.
3. Треногин В. А. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1980.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1979.
5. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач.—М.: Наука, 1987.

6. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. 4 // Дифференц. уравнения.—1982.—Т. 18, № 5.—С. 804–821.
7. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. 9 // Дифференц. уравнения.—1982.—Т. 18, № 9.—С. 1507–1548.
8. Бронштейн И. У. Расширения линейных минимальных групп преобразований.— Кишинев: Штиинца, 1975.
9. Бронштейн И. У., Черный В. Ф. Линейные расширения, удовлетворяющие условию Перрона. 1 // Дифференц. уравнения.—1978.—Т. 14, № 10.—С. 1739–1751.
10. Бронштейн И. У., Черный В. Ф. Линейные расширения, удовлетворяющие условию Перрона. 2 // Дифференц. уравнения.—1980.—Т. 16, № 2.—С. 201–207.
11. Миллионщиков В. М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сибирский матем. журнал.—1969.—Т. 10, № 1.—С. 99–104.
12. Миллионщиков В. М. Системы с интегральной разделенностью всюду плотны в множестве всех линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.—1969.—Т. 18, № 7.—С. 1167–1170.
13. Миллионщиков В. М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.—1969.—Т. 5, № 10.—С. 1775–1784.
14. Изобов Н. А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // В кн.: Итоги науки и техники: Математический анализ. Т. 12.—М.: Изд-во ВИНТИ, 1974.—С. 71–147.
15. Сергеев И. Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды семинара им. И. Г. Петровского.—1983.—Вып. 9.—С. 111–166.
16. Миллионщиков В. М. О неустойчивости особых показателей и о несимметричности отношения почти приводимости линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.—1969.—Т. 5, № 4.—С. 749–750.
17. Плисс В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1977.
18. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. 5 // Дифференц. уравнения.—1981.—Т. 17, № 8.—С. 1394–1410.
19. Ахрем А. А. Некоторые свойства специального класса линейных систем дифференциальных уравнений.—Деп. в ВИНТИ.—№ 5294-83. Деп.—105 с.
20. Макаров И. М., Ахрем А. А., Рахманкулов В. З. О некоторых математических задачах общей теории проектирования сложных технических систем // В сб. трудов ИСА РАН: Управление информационными потоками.—М.: УРСС, 2002.—С. 235–245.
21. Макаров И. М., Ахрем А. А., Рахманкулов В. З. Геометрические свойства специальных классов линейных динамических систем // В сб. научных трудов ИСА РАН: Системные исследования. Методологические проблемы. Вып. 32.—М.: УРСС, 2006.—С. 216–231.
22. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.—М.: Наука, 1984.
23. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений.—М.: УРСС, 2004.
24. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.—М.: Наука, 1967.
25. Ахрем А. А. Геометрический критерий интегральной разделенности для линейных систем дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук.—1985.—Т. 40, № 5.—С. 228–229.

УСЛОЖНЕННЫЕ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ КОНФЛИКТНЫХ ЗАДАЧ

Э. Р. Смольяков

Предлагается новое понятие относительно сложного конфликтного равновесия, дополняющее уже известную базовую систему конфликтных равновесий и существенно повышающее возможность нахождения в любой игровой задаче единственного наисильнейшего равновесия (решения). На примерах игровых задач с двумя и тремя участниками демонстрируется эффективность этого равновесия.

1. Введение

К настоящему времени уже известна достаточно богатая система конфликтных равновесий [1–5], позволяющая находить решения в любых игровых задачах. Однако, поскольку эта система не гарантирует единственности решения любых игровых задач, то можно ожидать, что расширение ее за счет каких-либо новых, еще не открытых понятий конфликтного равновесия, позволит решить проблему единственности в гораздо более удовлетворительном виде, чем она решается сегодня. Конечно, достичь единственности решения любых игровых задач невозможно, поскольку любые элементы симметрии в задаче естественным образом порождают неединственность решения. Но вполне естественно ожидать, что явно асимметричные задачи все же должны иметь единственное решение, если используемая система конфликтных равновесий в достаточной мере полна.

Как показала история развития теории игр, нахождение любых новых понятий конфликтного равновесия всегда оказывалось наиболее сложной проблемой. Достаточно сослаться на то, что за период с 1928 по 1980 гг. было найдено все три типа конфликтных равновесий, не содержащих в своем определении каких-либо искусственных норм поведения, а именно: понятие простого максимина [6], равновесие по Роусу–Нэшу [7, 8] и равновесие по Вайсборду [9]. К сожалению, эти классические равновесия позволяют находить некоторые интуитивно приемлемые решения только в некоторых классах игровых задач. Крайняя ограниченность этих классических понятий равновесия не позволила также создать хоть сколько-нибудь удовлетворительной теории кооперативных игр, для создания которой, как показано в [1–5], необходимо располагать богатой системой конфликтных равновесий.

Только теория [1–5] обеспечила существование решения в любых игровых задачах и единственность решения в подавляющем большинстве задач. Однако полностью решить проблему единственности пока ещё не удалось.

В данной работе показывается, что существуют совершенно естественные усложненные понятия равновесия, которые дают надежду на то, что поставленная проблема единственности будет в удовлетворительной степени всё же решена. На примерах игровых задач с двумя и тремя участниками

демонстрируется, что с помощью предлагаемого нового усложненного равновесия удается находить единственное наисильнейшее равновесие в играх, в которых с помощью известных понятий равновесия этого сделать не представлялось возможным.

2. Расширенная базовая система симметричных равновесий

Чтобы не загромождать изложение излишними “техническими деталями”, все равновесия (как некоторые из базовых, уже известных [1–5], так и предлагаемое новое равновесие) приводятся при нижеследующих достаточно жестких допущениях, хотя в действительности все результаты легко распространяются на задачи, допускающие любые функции, определенные на произвольных пространствах.

Допущение 1. Пусть $Q_i, i = \overline{1, N}$ — метрические пространства, а G — компактное множество в их произведении $Q_1 \times \dots \times Q_N$, и пусть на множестве G определены непрерывные функции (функционалы) $J_i(q), i = \overline{1, N}, q = q_1 \dots q_N \in G$.

Предполагается, что i -й игрок, выбирая стратегию (состояние) q_i из проекции $Pr_{Q_i} G$ множества G на пространство Q_i или из доступного ему сечения $G(q^i)$, где $q^i = q_1 \dots q_{i-1} q_{i+1} \dots q_N$, стремится обеспечить максимум своей платежной функции $J_i(q), i = \overline{1, N}$. Положим $J^i = \sum_{k \neq i} J_k$.

Заметим, что самое “слабое” равновесие, названное A -равновесием [1], существует в ε -аппроксимации в любых конфликтных задачах. Это равновесие является “главным” базовым равновесием, содержащим в себе любые более “сильные” равновесия. По этой причине, вообще говоря, нет смысла искать более слабое равновесие. Правда, в [1] вводится ещё и более слабое A^n -равновесие, формирующее последовательность несимметричных равновесий. Однако для любых приложений наибольший интерес представляют всё же симметричные равновесия, основные из которых приведены ниже.

Определение 1. Точку (ситуацию) $q^* \in G$ назовем A_i -экстремальной, если при заданной стратегии q^{i*} допустимой оказывается только одна стратегия $q_i^* = G(q^{i*})$ или если любой стратегии $q_i \in G(q^{i*}) \setminus q_i^*$ i -го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию

$$\hat{q}^i \triangleq \hat{q}^i < q_i > \in G(q_i)$$

остальных игроков так, чтобы имело место отношение

$$J_i(\hat{q}^i < q_i >, q_i) \leq J_i(q^*). \quad (1)$$

Ситуацию q^* назовем ситуацией A -равновесия, если неравенства вида (1) удовлетворяются в точке $q^* \in G$ для всех $i = \overline{1, N}$, т. е. если $q^* \in \bigcap_{i=1}^N A_i \triangleq A$.

Множество A -равновесий замечательно тем, что выделяет на игровом множестве G подмножество ситуаций, ни одну ситуацию из которого ни один из участников не может гарантированно улучшить для себя. А оставшееся множество $G \setminus A$ характеризуется тем, что, какова бы ни была ситуация из него, всегда найдется хотя бы один игрок, который имеет возможность перейти из этой ситуации в другую, увеличив значение своей платежной функции, и остальные не в состоянии помешать ему это сделать.

A -равновесие существует с любой заданной точностью ε в любых игровых задачах с произвольными ограниченными функционалами J_i на произвольном множестве G , в связи с чем оно может служить основой для построения более сильных понятий равновесия. А вот следующее определение “полного” равновесия A' является всего лишь одним из возможных усилений A -равновесия для задач с числом участников больше двух и совпадает с A -равновесием в задачах с двумя участниками, причем существует оно в весьма узком классе игровых задач. Каков этот класс, однако, не имеет никакого значения, поскольку на роль решения задачи может претендовать только наисильнейшее из существующих. Если же учесть непустоту A -равновесия в любых задачах, то можно сказать, что любая задача имеет решение (равновесие). Основная проблема в том, чтобы найти всего единственное наисильнейшее равновесие. Эта проблема решается, если исходная “базовая система” равновесий достаточно богата. Приведем известную на сегодня базовую систему равновесий (начав с A' -равновесия), дополнив ее новым понятием равновесия.

Определение 1а. Ситуацию $q^* = (q_{P_k}^*, q_{P_{N-k}}^*) \in G$ назовем *коалиционно экстремальной* для коалиции P_k , состоящей из k игроков, если $G(q_{P_{N-k}}^*) = q_{P_k}^*$, или каждому состоянию $q_{P_k} \in G(q_{P_{N-k}}^*) \setminus q_{P_k}^*$ коалиции P_k можно поставить в соответствие по крайней мере одно состояние $\hat{q}_{P_{N-k}} \in G(q_{P_k})$ остальных $N - k$ участников, так, чтобы

$$J_{P_k}(q_{P_k}, \hat{q}_{P_{N-k}} < q_{P_k} >) \leq J_{P_k}(q^*), \quad (1a)$$

где $J_{P_k} = \sum_{i \in P_k} J_i$. Множество всех коалиционно экстремальных для коалиции P_k ситуаций q^* обозначим A'_{P_k} . Ситуацию $q^* \in G$ назовем *полным равновесием*, если она коалиционно экстремальна для любой коалиции P_k , $1 \leq k < N$. Множество всех полных равновесий обозначим $A' = \bigcap_{P_k} A'_{P_k}$, $1 \leq k \leq N - 1$.

Вообще говоря, опираясь лишь на A -равновесие, можно с помощью нижеприведенной теоремы 2 построить монотонно усиливающуюся последовательность новых понятий равновесия. Однако, к сожалению, не только одного A -равновесия, рассматриваемого в качестве базы для построения новых равновесий с помощью этой теоремы, но и ряда более сильных равновесий, усиливающих A -равновесие в различных отношениях, не всегда удастся найти в задаче единственное наисильнейшее равновесие. По этой причине необходимо располагать как можно более богатой “базой” из естественных понятий равновесия, усиливающих A -равновесие. Различные усиления A -равновесия даются нижеследующими определениями.

Определение 2. Ситуацию $q^* \in G$ назовем *сильнозависимым равновесием* (или, короче, \bar{C}^0 -равновесием), если

$$J_i(q^*) = \max_{q_i \in A(q^{i*})} J_i(q^{i*}, q_i), \quad i = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Классическое равновесие по Нэшу [7] (которое назовем ради краткости \bar{C} -равновесием), представляющее собой по существу одно из возможных усилений \bar{C}^0 -равновесия, задается определением 2, в котором роль множества A играет множество G .

Определение 3. Ситуацию $q^* \in A$ назовем *B'_i -экстремальной*, если она удовлетворяет условию

$$\text{Arg} \max_{q^i \in A(q_i^*)} J^i(q_i^*, q^i) = \text{Arg} J^i(q^*) = B'_i. \quad (3)$$

Назовем ситуацию $q^* \in G$ B' -равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^N B'_i \triangleq B'$, где B'_i — множество всех B'_i -экстремальных ситуаций. Следующее определение дает некоторое усиление B' -равновесия.

Определение 4. Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем B_i -экстремальной, если она удовлетворяет условию

$$\text{Arg} \max_{q^i \in A_i(q_i^*)} J^i(q_i^*, q^i) = \text{Arg} J^i(q^*) = B_i. \quad (4)$$

Назовем ситуацию $q^* \in G$ B -равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^N B_i \triangleq B$, где B_i — множество всех B_i -экстремальных ситуаций.

B -равновесие означает, что если i -го игрока стратегия q_i^* устраивает, то остальных игроков тем более устраивает ситуация q^* , поскольку в ней они получают максимум своего коллективного дохода на множестве $A_i(q_i^*)$, на котором они сохраняют угрозы в адрес i -го игрока. Одно из возможных естественных усилений B -равновесия дается следующим определением.

Определение 5. Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем C_i -экстремальной, если она удовлетворяет условию

$$\text{Arg} \max_{q^i \in G(q_i^*)} J^i(q_i^*, q^i) = \text{Arg} J^i(q^*) = C_i. \quad (5)$$

Ситуацию $q^* \in G$ назовем C -равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^N C_i \triangleq C$, где C_i — множество всех C_i -экстремальных ситуаций.

Заметим, что в случае двух участников C -равновесие эквивалентно равновесию по Нэшу.

Определение 6. Ситуацию $q^* \in A$ назовем D'_i -экстремальной, если она содержится во множестве

$$\text{Arg} \max_{q_i \in \text{Pr}_{Q_i} A} J_i \left(\text{Arg} \max_{q^i \in A(q_i)} J^i(q) \right) = \text{Arg} J_i(q^*) = D'_i, \quad (6)$$

и назовем ее D' -равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^N D'_i \triangleq D'$.

Определение 7. Ситуацию $q^* \in B_i$ назовем \bar{D}_i -экстремальной, если она удовлетворяет условию:

$$\max_{q \in B_i} J_i(q) = J_i(q^*), \quad (7a)$$

или, что то же самое, — условию

$$\bar{D}_i = \text{Arg} \max_{q_i \in \text{Pr}_{Q_i} A_i} J_i \left(\text{Arg} \max_{q^i \in A_i(q_i)} J^i(q_i, q^i) \right) = J_i(q^*), \quad (7)$$

и назовем ее \bar{D} -равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^N \bar{D}_i \triangleq \bar{D}$.

Определение 8. Ситуацию $q^* \in C_i$ назовем D_i -экстремальной, если

$$\max_{q \in C_i} J_i(q) = J_i(q^*), \quad (8)$$

и назовем ее D -равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^N D_i \triangleq D$.

Следующее новое понятие равновесия дополняет базовую систему равновесий (1)–(8). Существенное его отличие от всех предыдущих в том, что методика практического его определения сложнее, чем всех предыдущих.

Определение 9. Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем \bar{D}'_i -экстремальной, если

$$\bar{D}'_i = \text{Arg} \max_{q_i \in A_i(q^{i*})} J_i(\text{Arg} \max_{q_i \in A_i(q_i)} J^i(q)), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Назовем ситуацию q^* \bar{D}' -равновесием, если $q^* \in \bigcap_{k=1}^N \bar{D}'_k$.

И заметим ещё, что по аналогии с приведенной базовой системой симметричных равновесий, заданной определениями 1–9, можно построить множество коалиционных равновесий, которое оказывается связанным с этой базовой системой аналогично тому, как связаны между собой определения 1 и 1а. Кроме того, в [1] построена также система, состоящая из так называемых несимметричных равновесий. При практическом решении задач целесообразно сначала находить все симметричные базовые равновесия, затем, если необходимо, то и коалиционные равновесия, а если и этого окажется недостаточно, то следует воспользоваться еще и несимметричными системами равновесий.

3. Отношения между конфликтными равновесиями

Теорема 1. *Базовое \bar{D}' -равновесие содержит в себе базовое \bar{D} -равновесие.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что из самих определений \bar{D} - и \bar{D}' -равновесий следует, что они, когда существуют, содержатся во множестве A , так как они определяются на пересечении множеств A_i , т. е. на A . Легко видеть, что аргумент функционала J_i в (7) и (9) одинаков, причем множество значений аргумента функционала J_i в (7) включает в себя множество значений аргумента J_i в (9). Отсюда следует, что $\bar{D}' \supset \bar{D}$. В самом деле, пусть q^* — \bar{D} -равновесная ситуация. Это означает, что в точке q_i^* функционал J_i , согласно (7), достигает максимума на множестве $Pr_{Q_i} A_i$. Если же учесть, во-первых, что сечение $A_i(q^{i*})$ множества A_i в точке $q^* = (q_i^*, q^{i*})$ представляет собой подмножество множества $Pr_{Q_i} A_i$, во-вторых, что $\max J_i$ на этом последнем множестве достигается, согласно (7), в точке q_i^* и, в-третьих, что если теперь рассматривать точку (q_i^*, q^{i*}) не на множестве $Pr_{Q_i} A_i$, а на его подмножестве $A_i(q^{i*})$, то на этом подмножестве она также обеспечивает максимум функционалу J_i , что означает, согласно (9), что ситуация (q_i^*, q^{i*}) оказывается также и \bar{D}' -равновесием.

Учитывая, что A -равновесие (по крайней мере, в ε -аппроксимации) существует в любой задаче [1] и что любая ситуация из множества $G \setminus A$ всегда может быть улучшена для себя по крайней мере одним из участников, вполне естественно пренебречь этим несущественным множеством и заново

исследовать игру, определяя в ней равновесия типа (1)–(9) и любые другие, принимая за исходное игровое множество теперь уже не множество G , а множество A , и называя найденные на нем равновесия равновесиями первой итерации. Затем на множестве $A^1 \subseteq A$, как на исходном игровом множестве, можно поставить вторую вспомогательную задачу, и т. д. Вследствие того, что любое множество A^k никогда не бывает пустым (в ε -аппроксимации), эта итерационная схема позволяет в любой конфликтной задаче найти наисильнейшие равновесия, причем благодаря новому понятию \bar{D}' -равновесия класс задач, в которых удаётся найти единственное решение, сужается. Смысл подобного итерационного подхода к решению задач в том, что на каждой следующей итерации равновесия (3)–(9), которые были пустыми на предыдущей итерации, могут (к примеру, в любых задачах с двумя участниками) оказаться уже не пустыми, поскольку на каждой следующей итерации они, в отличие от последовательности A^k , становятся более ослабленными и более многочисленными.

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы 3.1.4 из [1].

Теорема 2. *В любой конфликтной задаче на основе базовой системы конфликтных равновесий имеется возможность итерационно строить новые равновесия. После того, как найдены все базовые равновесия (решение “нулевой итерации”), задача решается заново, но не на множестве G , а на множестве A , что позволяет найти еще одну систему равновесий (“первой итерации”), и так далее. В результате находятся последовательности из равновесий $A^k, \bar{C}^k, B'^k, B^k, D^k, D'^k, \bar{D}^k, \bar{D}'^k, k = 0, 1, 2, \dots$, причем итерации A^k и \bar{C}^k из базовых равновесий A и \bar{C}^0 образуют замкнутые кольца из попарно вложенных друг в друга равновесий; и всегда $A^{k-1} \supseteq A^k$, т. е. с увеличением индекса k множества A^k сужаются (усиливаются), а последовательные итерации равновесия по Нэшу на множествах A^k расширяются (ослабляются), т. е. $\bar{C}^{k-1} \subseteq \bar{C}^k, k = 1, 2, 3, \dots$. Итерации равновесий (3)–(8) почти всегда ослабляются (только в задачах с двумя участниками всегда ослабляются все типы равновесий, усиливающие A -равновесия). В любых задачах всегда выполняются следующие связи между равновесиями:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & G & \supseteq & \bar{C} \\
 & & & & \cup & & \cap \\
 D \subseteq C \subseteq & \left| & \subseteq B \subseteq & \left| & \subseteq B' \subseteq & A & \supseteq & \bar{C}^0 \\
 \bar{D} \subseteq \bar{D}' \subseteq & \left| & ; D' \subseteq & \left| & & & & \\
 & & & & \cup & & \cap \\
 D^1 \subseteq C^1 \subseteq & \left| & \subseteq B^1 \subseteq & \left| & \subseteq B'^1 \subseteq & A^1 & \supseteq & \bar{C}^1 \\
 \bar{D}^1 \subseteq \bar{D}'^1 \subseteq & \left| & ; D'^1 \subseteq & \left| & & & & \\
 \dots & & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Замечание 1. В задачах с двумя участниками кольцевая структура равновесий оказывается существенно более богатой за счет того, что на каждой следующей итерации всегда расширяется не только \bar{C}^0 -равновесие, совпадающее с B' -равновесием, но и другие типы равновесий, вследствие чего обнаруживается удивительная особенность, состоящая в том, что все равновесия типов $B^k, C^k, D^k, D'^k, \bar{D}^k, \bar{D}'^k, k = 1, 2, \dots$, содержатся во множестве

A^∞ . В связи с этим поиск наисильнейшего равновесия можно начинать и с того, что сначала найти предельное множество A^k , а затем уже на нем искать наисильнейшее равновесие, что, вообще говоря, проще, чем проводить этот поиск на исходном множестве A . В общем случае поиск наисильнейшего равновесия в задачах с любым числом участников существенно упрощается именно из-за того, что на каждой следующей итерации слабейшие из равновесий (типа A^k) усиливаются (т. е. множества A^k сужаются), а остальные более сильные типы равновесий почти всегда ослабляются (т. е. множества $B', B, C, D, D', \bar{D}, \bar{D}'$ почти всегда расширяются). Так что если какие-либо из типов равновесия оказываются пустыми на предыдущей итерации, то имеются основания ожидать, что на следующей они уже могут оказаться непустыми.

Пример 1. Рассмотрим конфликтную (игровую) задачу с двумя участниками, в которой найти наисильнейшее равновесие помогает новое равновесие (9). Пусть каждый из игроков максимизирует свою (матричную) платежную функцию

$$J_1(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 11 & 5 & 9 & 2 \\ 6 & \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & 10 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & \cdot & 12 \end{bmatrix}, \quad J_2(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 1 & 9 \\ 5 & \cdot & 11 & \cdot \\ \cdot & 3 & 8 & 4 \\ 10 & 12 & \cdot & 2 \end{bmatrix}.$$

Оба игрока располагают четырьмя стратегиями: первый игрок выбирает одну из четырех строк, а второй — один из четырех столбцов. Игровое множество G в этой задаче состоит из тех 12 ситуаций a_{ij} в вышеприведенных матрицах, в элементах которых вписаны значения платежных функций. Найдем наиболее сильное (из существующих в этой игровой задаче) равновесие, причем сначала найдем матрицы A_1, A_2 и A :

$$A_1 = \begin{bmatrix} + & + & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & + & + \\ \cdot & + & \cdot & + \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} + & + & \cdot & + \\ + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & + & + \\ + & + & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} + & + & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & + & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Находим, далее, базовые равновесия:

$$\begin{aligned} B'_1 &= B_1 = (a_{12}, a_{21}, a_{33}, a_{42}), & B'_2 &= B_2 = (a_{11}, a_{32}, a_{33}, a_{32}), \\ B' &= B = a_{33}, \\ C_1 &= (a_{33}, a_{42}), & C_2 &= (a_{11}, a_{32}), & C &= \emptyset, \\ D'_1 &= \bar{D}_1 = a_{42}, & D'_2 &= \bar{D}_2 = a_{11}, & D' &= \bar{D} = D = \emptyset. \end{aligned}$$

Таким образом, на нулевой итерации на роль наисильнейшего равновесия предварительно претендует B -равновесная ситуация a_{33} . Есть надежда, что следующая итерация позволит прояснить реальную силу равновесной ситуации a_{33} или даже найти более сильное равновесие. Найдем все равновесия первой итерации, используя теорему 2, т. е. рассматривая вспомогательную игру на множестве A с платежными функциями

$$J_1^1(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 11 & 5 & \cdot & \cdot \\ 6 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 10 & 4 & 7 \\ \cdot & 8 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad J_2^1(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 6 & 7 & \cdot & \cdot \\ 5 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & 8 & 4 \\ \cdot & 12 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Наислабейшее A^1 -равновесие в этой вспомогательной игре задается матрицами

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & + & + \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad A_2^1 = \begin{bmatrix} + & + & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad A^1 = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

а базовые равновесия первой итерации имеют вид

$$\begin{aligned} B_1^1 &= B_1^1 = (a_{11}, a_{21}, a_{33}, a_{42}), \\ B_2^1 &= B_2^1 = (a_{11}, a_{33}, a_{42}), \quad B'^1 = B^1 = (a_{11}, a_{33}, a_{42}), \\ C_1^1 &= (a_{21}, a_{33}, a_{42}), \quad C_2^1 = (a_{11}, a_{33}), \quad C^1 = a_{33}, \\ D_1^1 &= \bar{D}_1^1 = a_{11}, \quad D_2^1 = \bar{D}_2^1 = a_{42}, \quad D'^1 = \bar{D}^1 = \emptyset, \\ D_1^1 &= a_{42}, \quad D_2^1 = a_{33}, \quad D^1 = \emptyset, \\ \bar{D}^1 &= (a_{33}, a_{42}). \end{aligned}$$

Итак, на первой итерации проявилось две \bar{D}'^1 -равновесных ситуации (a_{33} , a_{42}), из которых ситуация a_{33} является чуть более сильным равновесием, чем ситуация a_{42} , поскольку ситуация a_{33} также B - и C^1 -равновесна. Заметим, что тот факт, что ситуация a_{42} предпочтительнее для участников с точки зрения их выигрышей, чем ситуация a_{33} , не делает ее, однако, с точки зрения взаимных угроз более устойчивой. Так что эти ситуации следует рассматривать как почти эквивалентные. Выделить же из них явно наисильнейшее равновесие в данном случае не помогло даже новое \bar{D}' -равновесие. Так что имеются основания искать новые понятия равновесия.

Заметим, что если игра рассматривается как кооперативная, то справедливый дележ кооперативного дохода в размере 20, достигаемый в ситуации a_{42} , следует проводить с учетом того, что обе найденные ситуации практически равносильны, а следовательно, оптимальный дележ задается формулами (5) из [5]: $x_1 = 20(4 + 8)/32 = 7,5$ и $x_2 = 20(8 + 12)/32 = 12,5$.

Рассмотрим ещё одну игру с двумя участниками, в которой найти наисильнейшее равновесие (решение) помогает предложенное \bar{D}' -равновесие.

Пример 2. Пусть каждый из игроков максимизирует свою (матричную) платежную функцию

$$J_1(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \cdot & 2 & \cdot & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 11 \\ 1 & 3 & 9 & \cdot \\ 7 & \cdot & 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad J_2(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \cdot & 11 & \cdot & 6 \\ 9 & 2 & 8 & 3 \\ 10 & 12 & 7 & \cdot \\ 4 & \cdot & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем наиболее сильное (из существующих в этой конфликтной задаче) равновесие, причем сначала найдем матрицы A_1 , A_2 и A :

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + \\ + & + & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & + & + \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \cdot & + & \cdot & + \\ + & \cdot & + & \cdot \\ + & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & + \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \end{bmatrix}$$

Находим, далее, базовые равновесия (2)–(9):

$$\begin{aligned} B_1^1 &= (a_{14}, a_{21}, a_{33}, a_{43}), \quad B_2^1 = (a_{14}, a_{21}, a_{33}), \\ B_1^1 &= (a_{14}, a_{21}, a_{33}, a_{43}), \quad B_2^1 = (a_{14}, a_{21}, a_{32}, a_{33}), \quad B^1 = B = (a_{14}, a_{21}, a_{33}), \\ D_1^1 &= a_{33}, \quad D_2^1 = a_{21}, \quad D^1 = \emptyset, \quad \bar{D}_1^1 = a_{33}, \quad \bar{D}_2^1 = a_{32}, \quad \bar{D}^1 = \emptyset, \quad \bar{D}'^1 = a_{21}. \end{aligned}$$

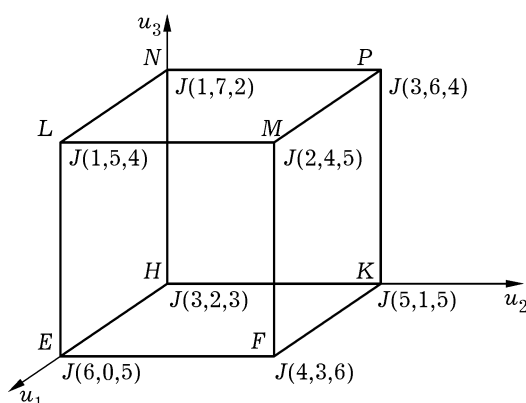


Рис. 1

Отсюда следует, что единственным наисильнейшим равновесием является \bar{D}' -равновесная ситуация a_{21} , которую удалось найти только с помощью предложенного нового понятия равновесия.

Пример 3. Рассмотрим ещё игру с тремя участниками как игру некооперативную и кооперативную, в которой каждый из игроков располагает стратегиями, принимающими всего два значения, и стремится обеспечить максимум своей платежной функции J_i , $i = 1, 2, 3$. Пусть $J = (J_1, J_2, J_3)$ — платежная вектор-функция в этой игре, в которой, очевидно, реализуется всего восемь ситуаций E, F, H, K, L, M, N, P , изображенных на рис. 1, в каждой из которых значения платежных функций игроков пусть будут следующими: $J(E) = (6, 0, 5)$, $J(F) = (4, 3, 6)$, $J(H) = (3, 2, 3)$, $J(K) = (5, 1, 5)$, $J(L) = (4, 5, 4)$, $J(M) = (2, 4, 5)$, $J(N) = (1, 7, 2)$, $J(P) = (3, 6, 4)$.

Стратегия i -го игрока принимает всего два значения, причем числовое значение каждой из этих стратегий в данной игре несущественно. Найдем сначала наисильнейшее равновесие в этой игре, рассматриваемой как некооперативная игра.

Базовая система симметричных равновесий (1)–(9) дает следующие результаты:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= (E, F, H, K, L, M, P), & A_2 &= (F, H, K, L, M, N, P), \\
 A_3 &= (E, F, H, K, L, M, P), & A &= (F, H, K, L, M, P), \\
 B_1 &= (F, L, M, P), & B_2 &= (F, L, K), & B_3 &= (F, L, P), & B &= (F, L), \\
 D'_1 &= \bar{D}_1 = (F, L), & D'_2 &= \bar{D}_2 = L, & D'_3 &= \bar{D}_3 = F, & D' &= \bar{D} = \emptyset, \\
 C_1 &= (F, L, M, P), & C_2 &= (F, K), & C_3 &= (F, L, P), & C &= F, \\
 D_1 &= (F, L), & D_2 &= F, & D_3 &= F, & D &= F = \bar{D}', \\
 \bar{C}^0 &= (H, L), & \bar{C} &= \emptyset,
 \end{aligned}$$

Проанализируем эти результаты. B -равновесие включает две ситуации — F и L , которые и с интуитивной точки зрения кажутся наиболее выгодными для игроков и почти эквивалентными. А на роль единственного наисильнейшего равновесия в игре претендует ситуация F , являющаяся одновременно C -, D - и \bar{D}' -равновесной. Что касается \bar{C}^0 -равновесия, то оно, помимо равновесной ситуации L , указало на равновесность еще и совершенно невыгодной для всех игроков ситуации H . Это связано с тем, что это равновесие строится по типу равновесия по Нэшу, а следовательно, и страдает всеми его

недостатками, хотя и в меньшей степени, поскольку ищется не на всем исходном игровом множестве G , а всего лишь на его наиболее “лучшей” для всех игроков части A .

Посмотрим, не предоставит ли нам какую-нибудь дополнительную информацию о возможном наисильнейшем равновесии в этой игре итерационная процедура генерирования новых равновесий, предлагаемая теоремой 2. Найдем первую итерацию базовых равновесий (1)–(9):

$$\begin{aligned} A_1^1 &= (F, H, K, L, P), \quad A_2^1 = (F, H, L, M, P), \\ A_3^1 &= (F, H, K, L, M, P), \quad A^1 = (F, H, L, P), \\ B_1^1 &= (F, L, P), \quad B_2^1 = (F, L), \quad B_3^1 = (F, L, P), \quad B^1 = (F, L), \\ D_1^1 &= D_1'^1 = \bar{D}_1^1 = (F, L), \quad D_2^1 = D_2'^1 = \bar{D}_2^1 = L, \\ D_3^1 &= D_3'^1 = \bar{D}_3^1 = F, \quad D^1 = D'^1 = \bar{D}^1 = \emptyset, \\ C_1^1 &= (F, L, P), \quad C_2^1 = (F, L), \quad C_3^1 = (F, L, P), \quad C^1 = (F, L) = \bar{D}'^1. \end{aligned}$$

Итак, на первой итерации множества C и \bar{D}' расширились с одного элемента F до двух $C^1 = \bar{D}'^1 = (F, L)$, так что итерационная схема генерирования новых равновесий лишь подтвердила, что ситуации F и L являются наиболее сильными равновесиями, причем эквивалентными \bar{D}'^1 -равновесными ситуациями лишь в рамках первой итерации. Однако ситуация F немного сильнее ситуации L , поскольку она \bar{D}' -равновесна уже на нулевой итерации, дающей более сильные равновесия, чем последующие итерации.

Поскольку обе ситуации слабо различаются по силе равновесия, то при рассмотрении справедливого дележа в кооперативной игре их вполне можно считать эквивалентными равновесиями. А следовательно, в этом случае следует применять формулу (5) из [5], согласно которой дележ кооперативного

дохода, равного 13, дается следующими выражениями: $x_1 = \frac{(4+4)}{26}13 = 4$,
 $x_2 = \frac{(3+5)}{26}13 = 4$, $x_3 = \frac{(6+4)}{26}13 = 5$.

Работа выполнена по программе Фундаментальные основы информационных технологий и систем РАН (проект № 1-3) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00821.

Список литературы

1. Смольяков Э. Р. Теория конфликтных равновесий.—М.: Едиториал УРСС, 2005.
2. Смольяков Э. Р. Понятия коалиционных конфликтных равновесий // Дифференц. уравнения.—2006.—Т. 42, № 11.—С. 1539–1548.
3. Смольяков Э. Р. Расширенная базовая система конфликтных равновесий // ДАН.—2006.—Т. 409, № 2.—С. 163–166.
4. Смольяков Э. Р. Усиленные равновесия для конфликтных задач // ДАН.—2007.—Т. 415, № 3.—С. 318–321.
5. Смольяков Э. Р. Единственный справедливый дележ в статических и динамических кооперативных играх // Дифференц. уравнения.—2007.—Т. 43, № 12.—С. 1637–1648.
6. Neumann J. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele // Math. Annalen.—1928.—Bd. 100.—S. 295–320.
7. Roos C. F. Generalized Lagrange Problems in the Calculus of Variations // Trans. Amer. Math. Soc.—1928.—Vol. 30.—P. 360–384.
8. Nash J. Non-Cooperative Games // Annals of Mathematics.—1951.—Vol. 54, № 2.—P. 286–295.
9. Вайсборд Э. М., Жуковский В. И. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения.—М.: Советское радио, 1980.

ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНОМЕРНОГО РЕГУЛЯТОРА ТЕМПЕРАТУРЫ ПРОХОДНОЙ ПЕЧИ

А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев, В. С. Малютина

Рассматривается задача конечномерного управления объектами с запаздыванием. Для синтеза конечномерного модального регулятора трансцендентная передаточная функция объекта аппроксимируется дробно-рациональной функцией конечного порядка. Синтезированный модальный регулятор обеспечивает не только устойчивость замкнутой системы управления, но и заданные показатели качества переходного процесса.

1. Введение

Проходная (методическая) печь — промышленная печь непрерывного действия, в которой нагреваемые заготовки или изделия движутся вдоль печи, перемещаемые толкателем, шагающими балками, печным рольгангом, конвейером или другими механизмами [1]. Проходные печи применяют для нагрева металлических заготовок перед горячей обработкой давлением и при термообработке изделий и деталей, для обжига керамических и эмалированных металлических изделий и т. д. Рабочее пространство большинства проходных печей сравнительно невелико в поперечном сечении (ширина 1–6 м, иногда до 25 м, а высота 1–2 м), но большой длины (до 250 м). Удельная продолжительность нагрева в проходной печи при температуре нагрева 700–1150°С составляет 10–15 мин на 1 см толщины нагреваемого изделия. Проходные печи обогревают многочисленными сравнительно небольшими источниками тепла, расположенными главным образом на продольных стенах, а в ряде случаев на своде и поде. При отоплении газом и нагреве изделий выше 700°С или мазутом при нагреве выше 1000°С топливо сжигают непосредственно в рабочем пространстве проходной печи. Повышение требований к качеству прокатываемого металла приводит к необходимости точно выдерживать при прокатке температурный режим, который является одним из решающих факторов, определяющих качество проката [2]. Точный нагрев заготовок перед горячей прокаткой является необходимым условием точного соблюдения температурного режима и обеспечения высокого качества проката. Поэтому применение в проходных печах автоматизированных систем отопления позволит достичь снижения расхода природного газа, более экономично расходовать металл за счет уменьшения образования окалины, проводить качественный рекристаллизационный отжиг со светлой поверхностью калиброванной стали, существенно увеличить объемы производства.

1. Математическая модель проходной печи

Проходные печи, основной нагревательный агрегат в металлургии, представляет собой сложный объект управления, процессы в котором описываются уравнениями в частных производных.

Рассмотрим задачу регулирования температуры в проходных печах [3]. На рис. 1 изображена проходная нагревательная печь длины l . Через печь непрерывной полосой проходит материал со скоростью v . По мере продвижения вдоль печи от ее входа к выходу полоса нагревается под действием температурного поля печи. Будем предполагать, что температурное поле печи равномерно, т. е. в каждый момент времени t распределение температуры $u(t)$ в печи не зависит от координаты x . Кроме того, предполагаем, что нагреваемый материал в каждом сечении, перпендикулярном оси x , есть тонкое тело в теплотехническом смысле (критерий Био $Bi < 0,25$), а теплообмен между печью и металлом происходит по линейному закону (закон Ньютона). Тогда, как показано в [3], распределение температуры нагреваемой полосы $y(x, t)$ описывается следующим линейным дифференциальным уравнением в частных производных:

$$b \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + bv \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + y(x, t) = u(t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

где $b = \frac{Sc\rho}{\alpha}$ — постоянная времени нагрева каждого сечения материала, перпендикулярного оси x ; S — толщина тела; c — теплоемкость материала; ρ — плотность материала; α — коэффициент теплообмена между греющей средой и нагреваемым материалом.

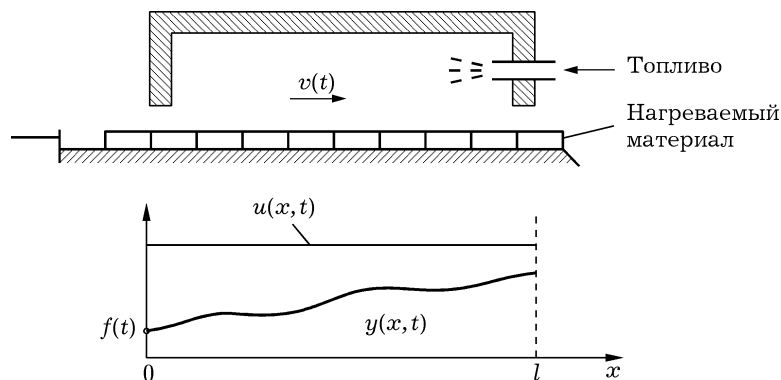


Рис. 1

Граничное условие для уравнения (1) имеет вид

$$y(x, t)|_{x=0} = f(t), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Здесь $f(t)$ — возмущающее воздействие.

Начальное условие определяется равенством

$$y(x, t)|_{t=0} = y_0(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

Рассмотрим систему регулирования процесса нагрева. Пусть выходящий из печи металл идет на дальнейшую механическую обработку (прокатку, ковку, штамповку и т. д.). Тогда целью регулирования является поддержание заданного значения $g(t)$ температуры выходящего из печи металла, т. е. регулируемой величиной будет величина $y(l, t)$.

2. Передаточная функция проходной печи

Найдем передаточную функцию проходной печи. Полагая в начальном условии (3) и применяя к уравнению (1) и граничному условию (2) преобразование Лапласа по переменной t , после элементарных преобразований получаем

$$bv \frac{dY(x,p)}{dx} + (bp+1)Y(x,p) = U(p), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

$$Y(x,p)|_{x=0} = F(p). \quad (5)$$

Здесь $Y(x,p) = \mathcal{L}_t\{y(x,t)\}$, $U(p) = \mathcal{L}_t\{u(t)\}$, $F(p) = \mathcal{L}_t\{f(t)\}$.

Нетрудно проверить, что общее решение неоднородного линейного обыкновенного дифференциального уравнения (1) определяется формулой

$$Y(x,p) = (1 - e^{-\frac{bp+1}{bv}x}) \frac{U(p)}{bp+1} + C(p)e^{-\frac{bp+1}{bv}x},$$

где неизвестная $C(p)$ может быть найдена из граничного условия (5). Имеем

$$Y(x,p)|_{x=0} = C(p) = F(p).$$

Окончательно находим решение задачи (4), (5)

$$Y(x,p) = (1 - e^{-\frac{bp+1}{bv}x}) \frac{U(p)}{bp+1} + e^{-\frac{bp+1}{bv}x} F(p). \quad (6)$$

Подставляя в (6) значение $x = l$, получаем изображение по Лапласу для регулируемой величины

$$Y(l,p) = (1 - e^{-\frac{bp+1}{bv}l}) \frac{U(p)}{bp+1} + e^{-\frac{bp+1}{bv}l} F(p),$$

или, опуская элементарные преобразования,

$$Y(l,p) = (1 - ke^{-\tau p}) \frac{U(p)}{Tp+1} + ke^{-\tau p} F(p), \quad (7)$$

где

$$k = e^{-\frac{l}{bv}}, \quad T = b, \quad \tau = \frac{l}{v}. \quad (8)$$

Из (7) находим передаточную функцию проходной печи как объекта регулирования

$$W(p) = \frac{1 - ke^{-\tau p}}{Tp+1}. \quad (9)$$

Нетрудно проверить, что полученная передаточная функция имеет левый полюс $p = -1/T$ и поэтому является аналитической функцией в правой полуплоскости и на мнимой оси комплексной плоскости.

3. Синтез конечномерного регулятора

Рассмотрим теперь задачу построения конечномерного регулятора температуры в проходной (методической) печи. С этой целью воспользуемся результатами [4, 5]. Для этого, в свою очередь, рассмотрим конечномерную дробно-рациональную аппроксимацию трансцендентной передаточной функции объекта (9). Так как передаточная функция (9) является аналитической в правой полуплоскости и на мнимой оси, то для конечномерной аппроксимации воспользуемся дробями Паде (см. [6]). Нетрудно проверить, что аппроксимация Паде $W_{[1,2]}(p)$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} W_{[1,2]}(p) &= \frac{B(p)}{A(p)}, \\ B(p) &= \frac{1}{3}((k^2 + 4k + 1)\tau^2 + 3T\tau(k^2 - 1))p + \\ &+ (1 - k^2)\tau - 2T(1 - k)^2, \\ A(p) &= \frac{\tau}{6}(k\tau^2 + 2(2k + 1)T\tau + 6T^2(k - 1))p^2 + \\ &+ \frac{1}{3}((2k + 1)\tau^2 + 6T[k\tau + T(k - 1)])p + 2T(k - 1) + \tau. \end{aligned} \quad (10)$$

На рис. 2 изображены амплитудно-фазовые характеристики $W(j\omega)$ (кривая 1) и $W_{[1,2]}(j\omega)$ (кривая 2) для

$$k = 0,1992, T = 15,4972 \text{ с}, \tau = 25 \text{ с}. \quad (11)$$

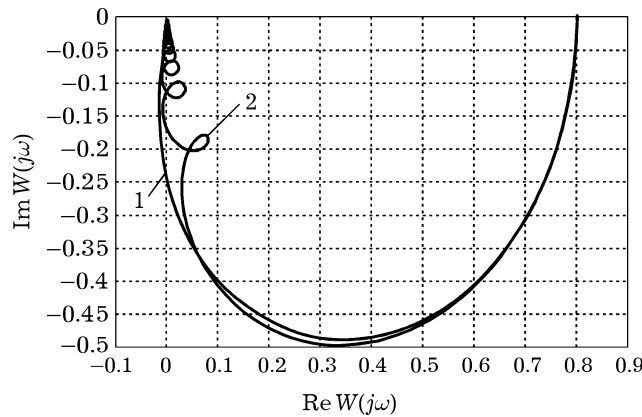


Рис. 2

Эти параметры соответствуют слябу марки Ст. 20, который имеет следующие теплофизические характеристики:

$$\begin{aligned} \lambda &= 32 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{С}}, \quad \rho = 7617 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad C = 636 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{С}}, \\ \alpha &= 1563 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С}}, \quad S = 0,005 \text{ м}, \quad \text{Bi} = \frac{\alpha S}{\lambda} = 0,2442 < 0,25. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности материала. Кроме того, для проходной печи полагаем

$$l = 100 \text{ м}, \quad v = 4 \text{ м/с}. \quad (13)$$

Сталь марки Ст. 20 — конструкционная углеродистая качественная. Из стали марки Ст. 20 изготавливают трубы перегревателей, коллекторов и трубопроводов котлов высокого давления, листы для штампованных деталей, цементуемые детали для длительной и весьма длительной службы при температурах до 350°С.

Учитывая значения параметров (11), (13) и принимая во внимание формулу (10), получаем выражение для аппроксимации Паде $W_{[1,2]}(p)$

$$W_{[1,2]}(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{10,5973p + 4,1339}{226,2884p^2 + 61,1240p + 5,1625}. \quad (14)$$

Из рис. 2 видно, что точность аппроксимации в области низких частот достаточно высокая и абсолютная погрешность аппроксимации удовлетворяет оценке (см. рис. 3)

$$\Delta(\omega) = |W_{[1,2]}(j\omega) - W(j\omega)| < 0,1 \quad \forall \omega \geq 0.$$

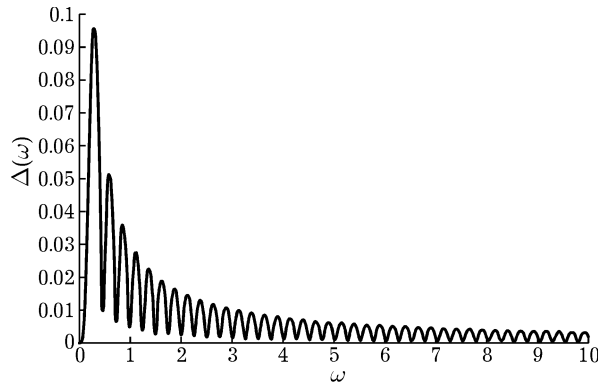


Рис. 3

Далее отметим, что полюсы передаточной функции конечномерного объекта $W_{[1,2]}(p)$ являются левыми. Поэтому для синтеза конечномерного регулятора можно воспользоваться методом, изложенным в [4, 5]. Зададимся желаемым характеристическим многочленом замкнутой системы

$$D(p) = D_0(p)A(p) = (p + 0,12)(p + 0,125)(p + 0,13)A(p).$$

Для обеспечения астатизма 1-го порядка положим

$$L(p) = p \quad (15)$$

и рассмотрим фиктивный объект

$$W^*(p) = \frac{B(p)}{A(p)L(p)} = \frac{B(p)}{A^*(p)}.$$

Тогда полиномиальное уравнение для неизвестных $S_0(p)$ и $R_0(p)$ принимает вид

$$S_0(p)B(p) + R_0(p)A(p)L(p) = D(p).$$

Учитывая, что $A(p)$ — многочлен Гурвица, получаем

$$\tilde{S}_0(p)B(p) + R_0(p)L(p) = D_0(p), \quad (16)$$

где $S_0(p) = \tilde{S}_0(p)A(p)$. Решая полиномиальное уравнение (16) и принимая во внимание условие (15), находим искомую передаточную функцию конечномерного регулятора

$$V(p) = \frac{S_0(p)}{R_0(p)L(p)} = \frac{0,1067p^2 + 0,0288p + 0,0024}{(p^2 + 0,3750p + 0,0419)p}. \quad (17)$$

На рис. 4 представлены амплитудно-фазовые характеристики разомкнутых систем $V(j\omega)W(j\omega)$ (кривая 1) и $V(j\omega)W_{[1,2]}(j\omega)$ (кривая 2). Согласно [5], замкнутая система регулирования с передаточной функцией

$$\Phi(p) = \frac{V(p)W(p)}{1 + V(p)W(p)}$$

является устойчивой.

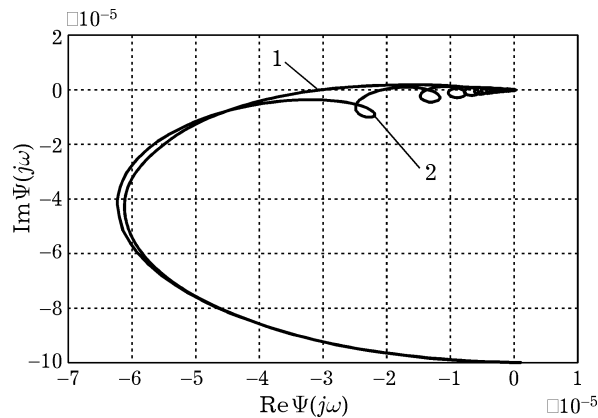


Рис. 4

На рис. 5 и 6 представлены соответственно графики переходных процессов и управляющих воздействий для системы управления с исходным объектом (9) и конечномерным регулятором (17) (кривая 1), а также для системы управления с исходным объектом (9) и оптимальным ПИ регулятором (кривая 2)

$$V_{\text{ПИ}}(p) = 0,77 + \frac{1}{11,1p}. \quad (18)$$

Графики переходных процессов для системы управления с регулятором (17) и объектами (9) и (14) практически неразличимы (кривая 1 на рис. 5).

Для сравнения качества регулирования воспользуемся квадратичным интегральным критерием

$$J = \int_0^{\infty} [\mu_1 \varepsilon^2(t) + \mu_2 u^2(t)] dt,$$

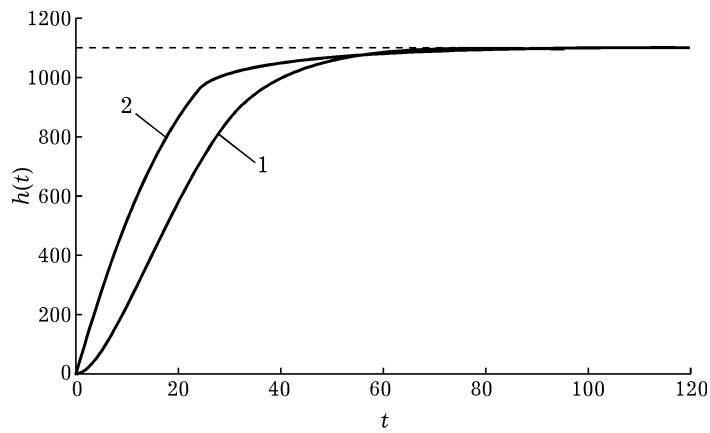


Рис. 5

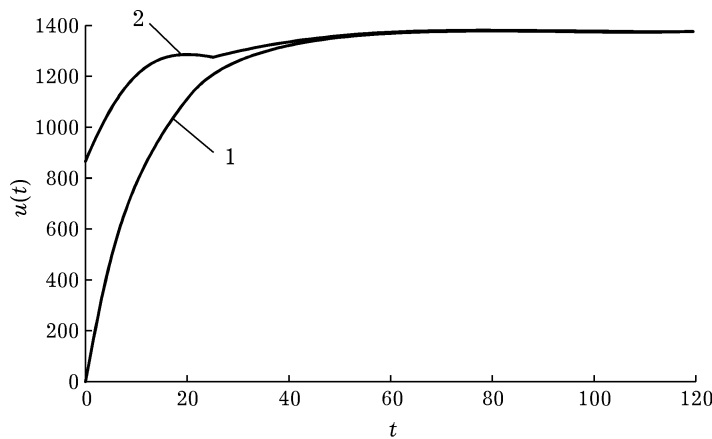


Рис. 6

который характеризует потери производства из-за брака (в случае несоответствия фактической температуры и требуемой) и расходы на топливо. Соответствующие весовые коэффициенты имеют значения $\mu_1 = 1 \text{ руб}/^\circ \text{C}^2$, $\mu_2 = 0,2 \text{ руб}/^\circ \text{C}^2$.

Для систем управления с конечномерным регулятором и ПИ регулятором соответственно имеем

$$J_1 = 377416,52 \text{ руб}; \quad J_2 = 17563126,55 \text{ руб}. \quad (19)$$

Очевидно, что затраты на производство при использовании системы управления с конечномерным регулятором на два порядка меньше, чем при использовании системы управления с ПИ регулятором. Это свидетельствует о высоком качестве разработанной системы управления.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 07-07-00007-а).

Список литературы

1. Справочник конструктора печей прокатного производства. Т. 1, 2 / Под ред. Тымчака В. М.—М.: Металлургия, 1970.
2. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами.—М.: Наука, 1975.
3. Бутковский А. Г. Структурная теория распределенных систем.—М.: Наука, 1977.
4. Дылевский А. В., Лозгачев Г. И. Синтез модальных систем управления //Вестн. Воронежского ун-та. Физ., матем.—2004.—№ 1.— С. 103–109.
5. Дылевский А. В., Лозгачев Г. И. Конечномерный модальный регулятор для объектов с запаздыванием //Вестн. Воронежского ун-та. Физ., матем.—2005.—№ 1.— С. 158–162.
6. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде.—М.: Мир, 1986.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА И ОСВОЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И НОУ-ХАУ

И. М. Макаров, В. З. Рахманкулов, А. А. Ахрем

В работе исследуется ряд математических моделей оценки влияния различных возмущающих факторов рыночной среды на процессы переноса (трансфера) и освоения передовых промышленных (в том числе информационных) технологий. Получены достаточные условия успешного применения рассматриваемых моделей. Проведен также анализ воздействия инвестиционной деятельности иностранных фирм и совместных предприятий на темпы внедрения переносимых технологических новшеств. Изучено влияние величин налоговых отчислений предприятий на скорость распространения новых производственных технологий и ноу-хау.

1. Введение

Странам с переходной экономикой, включая Россию, при выборе путей модернизации и развития промышленного производства приходится рассматривать, по крайней мере, две альтернативные стратегии: либо преодолевать технологическое отставание, базируясь преимущественно на внутренних ресурсах и собственных технологических достижениях, либо использовать для этих целей мировой опыт и передовую технологию зарубежных стран, не повторяя уже пройденные этапы развития и сопутствующие им ошибки и издержки. Практика последнего десятилетия свидетельствует о том, что многочисленные попытки реализовать в России первую стратегию не увенчались успехами из-за глубины и масштаба кризисных явлений в экономике, и в настоящее время происходит не только постепенное осознание того, что более рациональной и легче реализуемой может быть вторая стратегия, основанная на технологическом переносе (трансфере), но и имеются достаточно успешные примеры реализации такой стратегии в ряде промышленных отраслей, включая автомобильную, бытовую электронику, пищевую промышленность, связь и коммуникации. Так, например, в автомобильной промышленности были организованы сборочные производства с ведущими автопроизводителями мира — Ford, Renault, General Motors, Toyota, Hyundai, Kia, Volkswagen и др. Новый «иностранно-отечественный» автопром всего за три года опередил по финансовым показателям классический отечественный автопром, и в ближайшие годы станет лидером также и по количественным показателям.

В работах [1–8] отмечается, что одной из основных проблем для успешной реализации проектов трансфера новых производственных технологий и ноу-хау в кризисных экономических условиях является проблема преодоления начального инвестиционного барьера, решение которой открывает доступ на

конкурентный рынок производителю или, в общем случае, группе производителей.

Традиционные подходы к решению этой проблемы сводятся преимущественно к поиску схем долгосрочного кредитования, однако при высоком уровне инфляции и нестабильной финансовой системе кредитные схемы становятся сверхрискованными и отторгаются участниками трансфера.

В настоящей работе исследуются методы решения задачи преодоления инвестиционного барьера в процессе трансфера, не требующие обязательного использования долгосрочного кредитования. Предложенные решения основаны на управляемом изменении пороговых значений инвестиционного барьера либо в результате использования свойств разложимых, т. е. многокомпонентных технологий, либо путем взаимного дополнения инвестиционных ресурсов нескольких производителей, объединяемых для этой цели в пулы. Изменение порогов инвестиционного барьера влияет на число производителей, вовлекаемых в процесс трансфера. Этот процесс достаточно адекватно описывается дифференциальными моделями логистического типа. Впервые логистические дифференциальные уравнения были применены при исследовании экономических проблем американским экономистом С. Кузнецом [9] в 20-е годы прошлого столетия. В дальнейшем различные логистические модели экономических процессов рассматривались в работах Д. Сахала [1], С. Девиса [10, 11], Е. Мэнсфилда [12], П. Стонемана [13], А. А. Самарского и А. П. Михайлова [14] и др. Основное внимание в работах этих авторов уделяется изучению асимптотического поведения частных решений логистических дифференциальных моделей вблизи равновесных положений. В настоящей работе методы теории логистических моделей развиваются в направлении исследования динамики моделей на конечных интервалах времени в условиях ограниченных ресурсов, что можно применить для изучения динамики роста или затухания процессов трансфера при наличии инвестиционных барьеров для свободного доступа производителей на конкурентный рынок. Рассмотрен ряд дифференциальных моделей технологического трансфера, учитывающих влияние конкурентной борьбы между фирмами на процесс внедрения переносимой технологии. Такие модели более адекватно отражают воздействие негативных возмущающих факторов на динамику предельных характеристик взаимодействия процессов распространения и отторжения технологии. Изучено также влияние инвестиционной деятельности иностранных и совместных предприятий на темпы экономического роста страны-реципиента переносимых передовых производственных технологий и ноу-хау. В последнем параграфе данной статьи исследован вопрос о том, как влияют величины налоговых отчислений предприятий на процесс распространения переносимой технологии. Результаты настоящей работы частично опубликованы в статьях [15–22].

2. Общие свойства решений дифференциальных моделей процесса технологического переноса логистического типа

Проведем исследование динамики процесса технологического трансфера на следующей логистической дифференциальной модели

$$\dot{x} = (p - \alpha x)x, \quad (1)$$

где $x = x(t)$ — число производителей, участвующих в трансфере; p ($p > 0$) — коэффициент роста числа производителей x ; α ($\alpha > 0$) — коэффициент замедления роста числа производителей.

Вначале выделим ряд необходимых нам известных свойств решений дифференциального уравнения (1):

1) решение $x(t) \equiv x(t, t_0, x_0)$, $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$, $t \geq 0$, $x \geq 0$, задается при $t \geq t_0$ формулой

$$x(t) = x_0 e^{p(t-t_0)} (1 + x_0 \alpha p^{-1} (e^{p(t-t_0)} - 1))^{-1};$$

2) $x(t) \equiv p\alpha^{-1}$ является положением равновесия модели (1);

3) при $0 < x_0 < p\alpha^{-1}$ решение $x(t, t_0, x_0)$ монотонно возрастает на полуоси $[t_0, +\infty)$;

4) при $x_0 > p\alpha^{-1}$ решение $x(t, t_0, x_0)$ является монотонно убывающей на $[t_0, +\infty)$ функцией;

5) если $x_1 > x_2 > 0$, то $x(t, t_0, x_1) > x(t, t_0, x_2)$ при любом $t \geq t_0$;

6) для любого решения $x(t, t_0, x_0)$ уравнения (1) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, t_0, x_0) = p\alpha^{-1}. \quad (2)$$

Установим дополнительно ряд важных свойств решений логистических уравнений типа (1).

Утверждение 1. 1. Пусть заданы два уравнения вида (1)

$$\dot{z} = (p_1 - \alpha_1 z)z, \quad (3)$$

$$\dot{u} = (p_2 - \alpha_2 u)u. \quad (4)$$

Предположим, что коэффициенты $p_1, \alpha_1, p_2, \alpha_2$ уравнений (3), (4) удовлетворяют неравенствам

$$p_1 \geq p_2 > 0, \quad (5)$$

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad (6)$$

$$p_1 \alpha_1^{-1} > p_2 \alpha_2^{-1}. \quad (7)$$

Тогда для любых решений $z(t, z_0) = z(t, 0, z_0)$, $u(t, u_0) \equiv u(t, 0, u_0)$ соответственно уравнений (3), (4) таких, что

$$0 < u_0 \leq z_0 < p_2 \alpha_2^{-1}$$

при любом $t > 0$ справедливо неравенство

$$u(t, u_0) < z(t, z_0).$$

2. Допустим, что для коэффициентов $p_1, \alpha_1, p_2, \alpha_2$ дифференциальных моделей (3), (4) выполнено

$$p_1 > p_2 > 0, \quad (8)$$

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad (9)$$

$$p_1 \alpha_1^{-1} = p_2 \alpha_2^{-1} = N. \quad (10)$$

Тогда для любых решений $z(t, z_0)$, $z(0, z_0) = z_0$, $z_0 > 0$, $u(t, u_0)$, $u(0, u_0) = u_0$, $u_0 > 0$, соответственно, уравнений (3), (4) таких, что

$$0 < u_0 \leq z_0 < N$$

при любом $t > 0$ справедливо соотношение

$$u(t, u_0) < z(t, z_0).$$

Доказательство.
1. Положим

$$\begin{aligned} f_1(\nu) &\equiv p_1\nu - \alpha_1\nu^2, \\ f_2(\nu) &\equiv p_2\nu - \alpha_2\nu^2, \\ f(\nu) &\equiv f_1(\nu) - f_2(\nu) \quad (\nu \in (0, +\infty)). \end{aligned}$$

Покажем, что при $0 < \nu < p_2\alpha_2^{-1}$ функции $f_1(\nu)$ и $f_2(\nu)$ связаны соотношением

$$f_1(\nu) > f_2(\nu). \quad (11)$$

Возможны следующие два случая:

а) коэффициенты α_1, α_2 удовлетворяют неравенству

$$\alpha_2 \geq \alpha_1; \quad (12)$$

б) коэффициент α_1 строго больше α_2 :

$$\alpha_1 > \alpha_2. \quad (13)$$

Рассмотрим вначале случай а). Для коэффициентов p_1, p_2 имеются две возможности:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2, \\ p_1 &> p_2. \end{aligned}$$

Если $p_1 = p_2$, то, учитывая (12), (7), для любого $\nu \in (0, p_2\alpha_2^{-1})$ будем иметь

$$f(\nu) = (\alpha_2 - \alpha_1)\nu^2 > 0,$$

что и требовалось доказать.

Если $p_1 > p_2$, то, принимая во внимание (12), находим, что для всякого $\nu \in (0, p_2\alpha_2^{-1})$

$$f(\nu) = (p_1 - p_2)\nu + (\alpha_2 - \alpha_1)\nu^2 \geq (p_1 - p_2)\nu > 0,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь случай б). Нетрудно показать, что в этом случае решением квадратного неравенства

$$f(\nu) > 0$$

являются все ν из интервала $(0, (p_1 - p_2)(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1})$:

$$f(\nu) > 0 \Leftrightarrow \nu \in (0, (p_1 - p_2)(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}). \quad (14)$$

Поскольку, в силу (5)–(7), (13), числа $p_2\alpha_2^{-1}$ и $(p_1 - p_2)(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}$ связаны неравенством

$$p_2\alpha_2^{-1} < (p_1 - p_2)(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1},$$

то из (14) вытекает, что неравенство

$$f(\nu) > 0$$

справедливо для любого ν из интервала

$$(0, p_2\alpha_2^{-1}) \subset (0, (p_1 - p_2)(\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}).$$

Неравенство (11) в случае, когда $\alpha_1 < \alpha_2$, удовлетворяют (13), доказано.

Обозначим через t_1 момент времени, при котором решение $z(t, z_0)$ уравнения (3) достигает значения

$$z(t_1, z_0) = p_2\alpha_2^{-1} \quad (0 < t_1 < +\infty).$$

Пусть ε — такое положительное число, что при всех $t \in (-\varepsilon, 0]$

$$0 < z(t, z_0) < p_2\alpha_2^{-1}, \quad 0 < u(t, u_0) < p_2\alpha_2^{-1}.$$

Положим

$$M(\varepsilon) \equiv \{(t, \nu), -\varepsilon < t < t_1, 0 < \nu < p_2\alpha_2^{-1}\}.$$

Покажем, что решения $z(t, z_0)$ и $u(t, u_0)$ уравнений (3), (4) удовлетворяют на открытом множестве $M(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$ всем требованиям теоремы сравнения Чаплыгина (см. [23–25]). В самом деле, решения $z(t, z_0)$, $u(t, u_0)$ определены при всех $t \in (-\varepsilon, t_1)$ и удовлетворяют

1) при $t = 0$ неравенству

$$u(t, u_0) \leq z(t, z_0),$$

2) при $t \in (-\varepsilon, t_1)$ включениям

$$(t, u(t, u_0)) \in M(\varepsilon),$$

$$(t, z(t, z_0)) \in M(\varepsilon).$$

Кроме того, в силу (11) решение $u(t, u_0)$ уравнения (4) удовлетворяет при $t \in (-\varepsilon, t_1)$ дифференциальному неравенству

$$\dot{u}(t, u_0) (\equiv f_2(u(t, u_0))) < f_1(u(t, u_0)).$$

Таким образом, все условия теоремы сравнения Чаплыгина для решений $z(t, z_0)$, $u(t, u_0)$ уравнений (3), (4) действительно выполняются. Применяя эту теорему к функциям $z(t, z_0)$, $u(t, u_0)$, удовлетворяющим соотношениям

$$0 < u_0 \leq z_0 < p_2\alpha_2^{-1},$$

получаем, что при любом $t \in (0, t_1)$

$$u(t, u_0) < z(t, z_0). \quad (15)$$

Пользуясь свойствами 3), 6) решений логистических дифференциальных уравнений, находим, что при любом $t \geq t_1$

$$u(t, u_0) < p_2\alpha_2^{-1}, \quad (16)$$

$$z(t, z_0) \geq p_2\alpha_2^{-1}. \quad (17)$$

Принимая во внимание (16), (17), получаем, что

$$u(t, u_0) < z(t, z_0) \quad (18)$$

при всяком $t \geq t_1$.

Из (15), (18) окончательно имеем:

$$u(t, u_0) < z(t, z_0)$$

при любом $t > 0$.

Предложение 1 утверждения 1 полностью доказано.

2. Используя (8)–(10), будем иметь

$$\begin{aligned} z(t, z_0) &= z_0 e^{p_1 t} (1 + z_0 N^{-1} (e^{p_1 t} - 1))^{-1} = ((z_0^{-1} - N^{-1}) e^{-p_1 t} + N^{-1})^{-1} > \\ &> ((z_0^{-1} - N^{-1}) e^{-p_2 t} + N^{-1})^{-1} \geq ((u_0^{-1} - N^{-1}) e^{-p_2 t} + N^{-1})^{-1} = \\ &= u_0 e^{p_2 t} (1 + u_0 N^{-1} (e^{p_2 t} - 1))^{-1} = u(t, u_0). \end{aligned}$$

Предложение 2 утверждения 1 полностью доказано.

Отметим, что в утверждении 1 получены достаточные условия, показывающие, когда функция прироста числа производителей остается знакоопределенной на всем интервале времени $t \in (0, +\infty)$.

3. Логистические дифференциальные модели для исследования влияния изменений инвестиционного барьера

При отсутствии серьезных внешних инвестиций (например, долгосрочных кредитов) фирмы, участвующие в трансфере, могут использовать лишь свои внутренние механизмы для преодоления начального инвестиционного барьера. Совершенно очевидно, что их усилия должны быть направлены на снижение инвестиционного барьера. Однако снижение инвестиционного барьера может приводить как к росту числа участников трансфера, так и к обратному эффекту при наличии факторов, замедляющих трансфер. Определим условия, при которых рост числа участников гарантирован.

Предположим, что N — это общее число потенциальных реципиентов технологии T . В это число входят $N_T < N$ фирм, у которых начальный инвестиционный капитал не меньше инвестиционного барьера C_T , остальные $N - N_T$ фирм обладают меньшими, чем C_T инвестициями. При этом допустим, что вероятность успешной реализации технологии T достаточно высока, и распространение ее не вызывает отторжения со стороны участников трансфера. Опишем рассмотренную ситуацию с помощью следующей одномерной логистической дифференциальной модели, которая является частным случаем общей модели (1):

$$\dot{x} = P_T N_T^{-1} x (N_T - x) \equiv (P_T - \alpha_T x) x, \quad (19)$$

где x — число участников трансфера технологии T , P_T — коэффициент роста числа участников, $\alpha_T = P_T N_T^{-1}$ — коэффициент замедления роста числа участников.

В отличие от модели (1) данная модель учитывает возможность распространения технологии T только среди N_T участников процесса трансфера, преодолевших инвестиционный барьер, т.е. на основании свойства б) решений логистических дифференциальных уравнений

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = N_T \quad (20)$$

для любого решения уравнения (19) с начальным значением $x(0)$, удовлетворяющим неравенствам

$$1 \leq x(0) < N_T.$$

Эта модель показывает, что процесс трансфера при рассматриваемых условиях охватывает всех участников, преодолевших инвестиционный барьер. Однако в кризисных условиях число таких фирм незначительно, поэтому необходимо исследовать подходы, позволяющие вовлечь в процесс трансфера основную массу участников, не преодолевших начального инвестиционного барьера.

4. Модель переноса разложимой технологии

Дадим следующее определение.

Определение 1. Технология T является *разложимой*, если ее компоненты могут быть реализованы отдельно с соответствующим уменьшением затрат по сравнению с затратами на полную технологию.

Рассмотрим случай разложимой технологии с технологической независимостью компонент. На основании определения 1 естественным образом возникают следующие допущения:

$$C'_T < C_T, \quad (21)$$

$$N'_T < N_T, \quad (22)$$

$$P'_T < P_T, \quad (23)$$

где C'_T — начальный инвестиционный барьер для компонент разложимой технологии, N'_T — потенциальное число реципиентов компонент разложимой технологии, P'_T — коэффициент роста числа участников трансфера разложимой технологии.

Теперь процесс переноса разложимой технологии можно описать следующей моделью:

$$\dot{x}' = P'_T(N'_T)^{-1}x'(N'_T - x') \equiv (P'_T - \alpha'_T x')x', \quad (24)$$

где $x' \equiv x'(t)$ ($x'(0) = x(0)$) — число охваченных трансфером участников в момент $t \geq 0$, $\alpha'_T \equiv P'_T(N'_T)^{-1}$.

Применяя предложение 1 утверждения 1, получаем следующее неравенство:

$$x(t) < x'(t)$$

при любом $t > 0$.

Таким образом, условия (21)–(23) являются достаточными условиями превышения на любых конечных интервалах времени числа участников трансфера разложимой технологии по сравнению с числом участников для модели (19).

5. Модель корпоративного объединения участников трансфера

Рассмотрим случай разложимой технологии T с технологической связностью компонент. В этом случае участнику трансфера приходится выбирать взаимозависимые компоненты технологии, часть которых не может быть изготовлена на имеющейся у данного участника производственной базе. Тогда

привлечение дополнительных участников в общий пул может также способствовать преодолению начального инвестиционного барьера. Для этого случая воспользуемся следующими допущениями:

$$P_T'' > P_T, \quad N_T'' > N_T, \quad (25)$$

где P_T'' — коэффициент роста совместного числа некорпоративных и корпоративных участников трансфера, N_T'' — потенциальное число некорпоративных и корпоративных реципиентов компонент разложимой технологии.

Отсюда процесс переноса разложимой технологии при корпоративном объединении участников можно описать следующей логистической моделью:

$$\dot{x}'' = P_T''(N_T'' - x'')^{-1}x''(N_T'' - x'') \equiv (P_T'' - \alpha_T''x'')x'', \quad (26)$$

где $x''(t)$ ($x''(0) = x(0)$) — число охваченных трансфером участников в момент $t \geq 0$, $\alpha_T'' \equiv P_T''(N_T'')^{-1}$.

Покажем, что решения $x''(t)$, $x(t)$, соответственно, уравнений (19), (26) удовлетворяют при любом $t > 0$ неравенству

$$x(t) < x''(t). \quad (27)$$

Возможны следующие два случая:

- а) $P_T'' > P_T$, $N_T'' > N_T$;
- б) $P_T'' > P_T$, $N_T'' = N_T$.

Справедливость неравенства (27) в случае а) непосредственно вытекает из предложения 1 утверждения 1. В случае б) неравенство (27) является прямым следствием предложения 2 утверждения 1.

Таким образом, условия (25) являются достаточными условиями превышения на любых конечных интервалах времени совместного числа корпоративных и некорпоративных участников трансфера разложимой технологии T по сравнению с числом участников для модели (19).

Отметим, что при рассмотрении процесса трансфера передовой разложимой технологии T мы считаем, что он удовлетворяет условиям (23) или (25)

$$P_T' \geq P_T, \quad P_T'' \geq P_T.$$

Предположим теперь, что процесс трансфера T описывается следующей логистической дифференциальной моделью:

$$\dot{x}''' = P_T'''(N_T''' - x''')^{-1}x'''(N_T''' - x'''), \quad (28)$$

где $N_T''' > N_T$ — общее число потенциальных реципиентов трансфера T , описываемых уравнением (28), $x''' = x'''(t)$ — число участников трансфера в момент времени $t \geq 0$, P_T''' — коэффициент роста числа участников переноса T , удовлетворяющий неравенству

$$0 < P_T''' < P_T.$$

Принимая во внимание свойства 1–6 решений логистических дифференциальных уравнений из параграфа 2 настоящей работы, получаем, что существуют такие моменты времени $t_2''' \geq t_1''' > 0$, что

- а1) при $0 < t < t_1'''$ выполняется соотношение

$$x(t) > x'''(t);$$

где $x(t)$, $x'''(t)$ — решения соответственно уравнений (19), (28) с одинаковыми начальными значениями

$$x(0) = x'''(0), \quad 0 < x(0) < N_T;$$

б1) при $t_1''' < t < t_2'''$ справедливо неравенство

$$x(t) \leq x'''(t) \leq N_T;$$

в1) при $t > t_2'''$ имеет место соотношение

$$N_T \leq x'''(t) \leq N_T''';$$

г1) при $t \rightarrow +\infty$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x'''(t) = N_T'''.$$

Заметим, что в силу свойства 6 решений логистических дифференциальных уравнений для любых решений $x'(t)$, $x''(t)$, $x'''(t)$ соответственно моделей (24), (26), (28) выполнены следующие предельные соотношения:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) &= N_T', \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} x''(t) &= N_T'', \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} x'''(t) &= N_T'''. \end{aligned} \quad (29)$$

Из (29) следует, что процесс трансфера передовой промышленной технологии T , описываемый уравнениями (24), (26), (28), охватывает всё множество потенциальных реципиентов T . Таким образом, логистические модели (24), (26), (28) не учитывают возможности отторжения переносимой технологии T некоторыми участниками трансфера, что снижает ценность полученных с помощью таких моделей результатов, поскольку в реальных задачах процесс распространения T , как правило, порождает также и процесс отторжения по разным причинам, например, вследствие влияния конкуренции или других возмущающих факторов.

В следующих параграфах будет рассмотрен ряд дифференциальных моделей трансфера, учитывающих влияние конкуренции между фирмами на процесс внедрения переносимой передовой технологии. Такие модели более адекватно отражают воздействие негативных факторов конкурентной борьбы на динамику инновационных процессов.

6. Одномерные дифференциальные модели процесса технологического трансфера с учетом конкуренции между фирмами

Далее будем предполагать, что в процессе трансфера между фирмами-участниками возникает конкурентная борьба, которая при определенных условиях может оказать негативное воздействие на процесс распространения технологии T . Например, производители старой технологии, защищая свои интересы и рыночные позиции, могут организовывать конкурентное давление на производителей, внедряющих более передовую технологию. Для описания данной ситуации воспользуемся следующей нестационарной логистической дифференциальной моделью:

$$\dot{y} = pyN^{-1}(N - y) - \alpha(t)y, \quad (30)$$

где $y = y(t)$ — число фирм, участвующих в трансфере T в момент времени $t \geq 0$; N — общее число реципиентов технологии T ; p — коэффициент роста числа фирм, вовлеченных в трансфер технологии T ; $\alpha(t)$ — зависящий от времени коэффициент отторжения технологии T по причине конкурентной борьбы между фирмами-участницами переноса T :

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ \alpha \ (0 < \alpha < 0) & \text{при } t > t_0, \end{cases}$$

где $t_0 \geq 0$ — момент возникновения конкурентной борьбы между фирмами.

Принимая во внимание полученные в работах [15, 18] результаты, можно показать, что для решений $y(t)$ и $x(t)$ соответственно уравнений (30) и (19) с одинаковыми начальными значениями $y(0) = x(0) = x_0$, $x_0 \geq 1$ справедливы следующие утверждения:

1) для всякого $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$y(t) < x(t);$$

2) если $1 \leq x(t_0) < N(\alpha)$, где $N(\alpha) = N(1 - \alpha p^{-1})$, то решение $y(t)$,

$$y(t_0) = x(t_0),$$

монотонно возрастает при $t > t_0$ и для него справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = N(\alpha);$$

3) если $N(\alpha) \leq x(t_0) < N$, то решение $y(t)$, $y(t_0) = x(t_0)$, монотонно убывает при $t > t_0$ и для него имеет место следующее предельное соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = N(\alpha);$$

4) если $y(t_0) = x(t_0) = N(\alpha)$, то $y(t) \equiv N(\alpha)$ при всех $t \geq t_0$.

Определенный интерес представляет также модель процесса трансфера с конкуренцией, в которой скорость отторжения переносимой технологии является постоянной величиной,

$$\dot{z} = pzN^{-1}(N - z) - \beta, \quad (31)$$

где $z = z(t)$ — число фирм, участвующих в трансфере T в момент времени $t \geq 0$; β ($\beta > 0$) — число фирм, отторгающих в единицу времени переносимую технологию T по причине конкуренции.

Перечислим основные свойства решений дифференциальной модели (31) [20].

1) При $\beta < \beta_0 \equiv \frac{pN}{4}$ у модели (31) имеются два положения равновесия: $N_1(\beta)$, $N_2(\beta)$, $0 < N_1(\beta) < N_2(\beta)$. Состояние $N_2(\beta)$ устойчиво, а $N_1(\beta)$ — неустойчиво. При $1 \leq z(0) < N_1(\beta)$ справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0.$$

Процесс трансфера в этом случае является затухающим. При $z(0) > N_1(\beta)$ для решения $z(t)$ уравнения (31) выполнено соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = N_2(\beta).$$

2) При $\beta > \beta_0$ равновесных состояний у модели (31) не существует совсем и процесс трансфера является затухающим при любых начальных численностях $z(0)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0.$$

3) В случае $\beta = \beta_0$ устойчивое и неустойчивое положения равновесия модели (31) сливаются, образуя полуустойчивое равновесие $N_0 = \frac{N}{2}$.

Таким образом, модель (30) описывает ситуации, когда скорость отторжения переносимой технологии нарастает по времени, но число отторгающих фирм относительно невелико. В результате процесс трансфера всегда завершается успешно при любой начальной численности участвующих фирм. Модель (31) описывает ситуации, когда скорость отторжения постоянна, и независимо от числа отторгающих фирм возможно как успешное, так и неудачное развитие процесса трансфера. При этом существенное значение приобретает начальная численность фирм-участниц: для успешного завершения процесса переноса она должна быть не ниже $N_1(\beta)$.

7. Двумерные дифференциальные модели конкурентных взаимодействий на рынке технологического переноса

В настоящем параграфе рассмотрим двумерную дифференциальную модель технологического переноса типа Вольтерра-Костицина [26–28] с дихотомией множества реципиентов N на подмножества внедряющих и отторгающих переносимую технологию T :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= pxN^{-1}(N-x) - \beta xy, \\ \dot{y} &= \gamma xy - \varepsilon y, \end{aligned} \quad (32)$$

где $x = x(t)$ — число участников процесса технологического трансфера, внедряющих в момент времени $t \geq 0$ переносимую технологию T ; p — коэффициент роста числа внедряющих T участников; N — общее число потенциальных реципиентов T ; $y = y(t)$ — число участников, отторгающих в момент времени $t \geq 0$ переносимую технологию T ; β — коэффициент снижения числа участников; γ — коэффициент роста числа отторгающих T участников; ε — коэффициент замедления роста числа участников, отторгающих переносимую технологию T .

Исследование особых точек дифференциальной модели (32) при монопольном внедрении технологии T проведено в следующем параграфе.

7.1. Анализ особых точек модели Вольтерра–Костицина

Особые точки (положения равновесия) модели (32) характеризуют поведение параметров предельной численности участников процесса трансфера.

Исследуем нетривиальную особую точку z_0 с координатами $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Эти координаты задаются следующей двумерной системой алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} p - pN^{-1}x_0 - \beta y_0 &= 0, \\ \gamma x_0 - \varepsilon &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Решая систему (33), находим, что

$$x_0 = \varepsilon \gamma^{-1}, \quad (34)$$

$$y_0 = p\beta^{-1}(1 - \varepsilon\gamma^{-1}N^{-1}). \quad (35)$$

Для того, чтобы особая точка (34)–(35) модели (32) лежала в первом квадранте фазовой плоскости необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты модели были связаны неравенством

$$\epsilon\gamma^{-1} < N. \quad (36)$$

В дальнейшем будем считать, что неравенство (36) для модели (32) выполнено.

Отметим, что

а) соотношения (34), (35) определяют предельные значения численностей $x(t)$, $y(t)$;

б) неравенство (36) показывает, что процесс трансфера, описываемый моделью (32), сможет охватить меньшее, чем N число реципиентов переносимой технологии T .

Положим

$$\alpha \equiv pN^{-1}, \quad (37)$$

$$\nu \equiv [(\epsilon\alpha\beta)^2 - 4\beta^2\epsilon\gamma(p\gamma - \epsilon\alpha)]^{1/2}. \quad (38)$$

Учитывая (37), (38), нетрудно показать, что корни λ_1 , λ_2 характеристического уравнения модели (32), линеаризованной в окрестности особой точки (34)–(35), определяются выражениями

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-(\epsilon\alpha\beta + \nu)}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{-(\epsilon\alpha\beta - \nu)}{2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Из (39) следует, что если для коэффициентов модели (32) выполнено неравенство

$$\epsilon\alpha^2 < 4\gamma(p\gamma - \epsilon\alpha), \quad (40)$$

то модель (32) имеет грубую нетривиальную особую точку — устойчивый фокус (λ_1 , λ_2 — комплексные, $\text{Re } \lambda_i < 0$, $i = 1, 2$). Численности $x(t)$, $y(t)$ совершают во времени затухающие колебания.

Предположим теперь, что параметры дифференциальной модели (32) изменяются так, что условие (40) превращается в равенство. В этом случае особая точка z_0 будет лежать на границе устойчивых фокусов и узлов. При изменении знака неравенства (40) на обратный в системе происходит бифуркация: особая точка модели становится устойчивым узлом (λ_1 , λ_2 — вещественные и отрицательные).

При качественном исследовании двумерной нелинейной дифференциальной системы (32) определенный интерес представляет задача нахождения геометрических свойств решений этой системы или системы ее первого приближения, гарантирующих наличие (отсутствие) особых точек определенного типа.

Обозначим $z \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ — двумерный вектор-столбец с координатами x , y ;

$|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ — длина вектора z ; $\angle(z_1, z_2)$ — угол между ненулевыми векторами z_1 , z_2 двумерного евклидова пространства \mathbb{R}^2 .

Введем следующее определение.

Определение 2. Пусть задана нелинейная двумерная дифференциальная система

$$\dot{z} = f(z) \quad (z \in \mathbb{R}^2, t \geq 0) \quad (41)$$

с непрерывно-дифференцируемой правой частью $f(z)$, имеющая невырожденную особую точку z_s :

$$z_s \equiv \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix}, \quad f(z_s) = 0.$$

Система (41) называется *геометрически регулярной* в окрестности точки z_s , если система ее первого приближения

$$\dot{z} = Az \left(A \equiv \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z=z_s}, z \in \mathbb{R}^2, y \geq 0 \right)$$

обладает следующим геометрическим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\omega > 0$, что у всякой двумерной стационарной линейной системы

$$\dot{u} = Bu \left(u \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, t \geq 0 \right),$$

$$\rho(A, B) \equiv \sup_{u \in \mathbb{R}^2, u \neq 0} |(A - B)u| |u|^{-1} < \omega$$

найдется ненулевое решение $u_B(t)$, удовлетворяющее соотношению

$$\sup_{t \geq 0} \angle(u_B(t), z_B(t)) < \varepsilon$$

для некоторого ненулевого решения $z_B(t)$ системы $\dot{z} = Az$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть система (41) в окрестности положения равновесия z_s является геометрически регулярной. Тогда точка z_s не может быть центром, фокусом, дикритическим узлом.

Следствие 1 (к теореме 1). Пусть система (32) в окрестности положения равновесия z_0 , задаваемого соотношениями (34), (35) геометрически регулярна. Тогда точка z_0 является невырожденным узлом.

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении.

8. Многомерные дифференциальные модели переноса разложимых технологий

Как уже отмечалось в параграфе 4 настоящей работы, одним из основных способов преодоления начального инвестиционного барьера является использование свойств разложимых технологий.

Напомним (см. параграф 4), что многокомпонентная производственная технология называется *разложимой*, если ее компоненты могут быть реализованы раздельно с соответствующим уменьшением затрат по сравнению с затратами на полную технологию. В параграфе 4 процесс переноса разложимых технологий предполагался одноэтапным и описывался одномерными логистическими дифференциальными уравнениями. Вместе с тем важным

преимуществом разложимых технологий является возможность разделения процесса переноса на несколько этапов в соответствии с очередностью реализации компонент технологии. Например, трансфер разложимой технологии происходит по крайней мере в два этапа: на первом этапе производится “отверточная сборка” изделий из готовых узлов и компонентов, поставляемых фирмой-донором, а на втором этапе фирма-реципиент осваивает изготовление всех деталей и узлов выпускаемой продукции.

В данном параграфе процесс переноса разложимой технологии исследуется как двухэтапный процесс с помощью многомерных систем нелинейных дифференциальных уравнений. Предложены модели для анализа действия различных факторов рыночной среды на развитие процесса трансфера на каждом из этапов с учетом взаимодействия этапов.

8.1. Дифференциальная модель процесса поэтапного трансфера разложимой технологии

Предположим, что процесс трансфера некоторой разложимой технологии осуществляется в два этапа. Допустим также, что часть участвующих в технологическом переносе фирм отторгают технологию T в результате воздействия возмущений со стороны рыночной среды (например, конкуренции или изменения спроса на продукцию). Рассмотрим вначале случай, когда процесс отторжения на заключительном этапе не оказывает существенного негативного влияния на динамику распространения технологии T на начальном этапе. В этом случае процесс поэтапного трансфера может быть описан следующей двумерной треугольной дифференциальной моделью:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= pxN^{-1}(N-x) - \alpha x, \\ \dot{y} &= \sigma x - \beta y, \end{aligned} \quad (42)$$

где $x = x(t)$ — число производителей, вовлеченных в процесс трансфера на начальном этапе внедрения технологии T ; p — коэффициент роста числа производителей x ; N — общее число потенциальных реципиентов переносимой технологии T на начальном этапе трансфера (или планируемое число участников трансфера); α ($0 \leq \alpha < p$) — коэффициент отторжения T на начальном этапе трансфера; $y = y(t)$ — число производителей, участвующих в трансфере T на заключительном этапе; σ — коэффициент роста числа производителей y ; β — коэффициент отторжения технологии T на заключительном этапе внедрения.

Первое из уравнений системы (42) является логистическим. Его общее решение $x(t)$ ($x(0) = x_0$, $x_0 > 0$) имеет вид

$$x(t) = x_0 e^{(p-\alpha)t} [1 + x_0(p-\alpha)^{-1} p N^{-1} (e^{(p-\alpha)t} - 1)]^{-1}. \quad (43)$$

Напомним (см. параграф 2 настоящей работы), что функция $x(t)$ обладает следующими свойствами:

- а) если $0 < x_0 < (1 - \alpha p^{-1})N$, то $x(t)$ монотонно возрастает при $t > 0$;
- б) функция $x(t)$ удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = (1 - \alpha p^{-1})N. \quad (44)$$

Координата $y(t)$ ($y(0) = y_0$, $y_0 \geq 0$) определяется формулой

$$y(t) = y_0 e^{-\beta t} + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t x(\nu) e^{\beta \nu} d\nu. \quad (45)$$

Принимая во внимание соотношения (43)–(45), можно показать, что

1) при $0 < x_0 < (1 - \alpha p^{-1})N$, $y_0 = 0$, функция $y(t)$ является монотонно возрастающей на положительной полуоси времени (в самом деле, при $t > 0$ для производной $\frac{dy}{dt}$ выполнено

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \sigma \left(-\beta e^{-\beta t} \int_0^t x(\nu) e^{\beta \nu} d\nu + e^{-\beta t} e^{\beta t} x(t) \right) > \\ &> \sigma \left(-\beta e^{-\beta t} x(t) \int_0^t e^{\beta \nu} d\nu + x(t) \right) = \sigma e^{-\beta t} x(t) > 0, \end{aligned}$$

следовательно, $y(t)$ является монотонно возрастающей при $t > 0$);

2) если $0 < x_0 < (1 - \alpha p^{-1})N$, $y_0 = 0$, то для $x(t)$, $y(t)$ при $t > 0$ справедливо соотношение

$$y(t)x^{-1}(t) < \sigma\beta^{-1} \quad (46)$$

(действительно, ввиду монотонности возрастания $x(t)$ при $t > 0$ из (43), (45)

имеем $y(t) < \sigma e^{-\beta t} x(t) \int_0^t e^{\beta \nu} d\nu = \sigma\beta^{-1} e^{-\beta t} (e^{\beta t} - 1)x(t) < \sigma\beta^{-1} x(t)$, откуда

$y(t)x^{-1}(t) < \sigma\beta^{-1}$);

3) для функции $y(t)$, $y(0) = y_0$, $y_0 > 0$, имеет место предельное соотношение

$$y_M \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \sigma\beta^{-1}(1 - \alpha p^{-1})N. \quad (47)$$

Предельное соотношение (47) является следствием следующего известного утверждения об асимптотических свойствах решений линейных неоднородных дифференциальных уравнениях первого порядка.

Т е о р е м а 2 (23, 29). Пусть задано дифференциальное уравнение

$$\dot{u} + \gamma u = g(t),$$

где $\gamma > 0$, $g(t)$ — непрерывна при $t \geq 0$ и имеет конечный предел при $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \omega.$$

Тогда для любого решения $u(t)$ этого уравнения справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \gamma^{-1}\omega.$$

Для доказательства (47) достаточно положить в теореме 2 $u(t) = y(t)$, $g(t) = \sigma x(t)$, $\gamma = \beta$, $\omega = \sigma(1 - \alpha p^{-1})N$.

Отметим, что неравенство (46) дает верхнюю оценку отношения численностей участвующих в трансфере фирм на заключительном и начальном этапах внедрения при любом неотрицательном значении времени t . Кроме того, из соотношения (47) вытекает следующее:

1) при $\varepsilon = \sigma\beta^{-1}(1 - \alpha p^{-1}) \geq 1$ для равновесной численности y_M справедливо неравенство

$$y_M \geq N.$$

Это означает, что при отсутствии негативного влияния отторжения второго этапа на первый, число участников трансфера будет не меньше планируемого числа N , позволяя рассматривать весь двухэтапный процесс внедрения переносимой технологии как имеющий высокие шансы на успех.

2) При $\varepsilon < 1$ величина y_M удовлетворяет противоположному неравенству

$$y_M < N.$$

В этом случае влияние отторжения на каждом из этапов в отдельности будет обязательно уменьшать число участников трансфера по сравнению с планируемым значением N . Поэтому такой процесс внедрения технологии может оказаться неудачным.

Рассмотрим теперь случай, когда процесс отторжения технологии T на заключительном этапе внедрения оказывает существенное негативное влияние на динамику освоения технологии на начальном этапе. Причинами такого влияния могут быть экономические факторы, уменьшающие спрос на продукцию, или невозможность выполнения всех необходимых для трансфера условий (например, в результате изменения законодательства). В данном случае двухэтапный процесс трансфера можно описать следующей двумерной дифференциальной моделью:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= pxN^{-1}(N-x) - \alpha x - \varphi\beta xy, \\ \dot{y} &= \sigma x - \beta y, \end{aligned} \quad (48)$$

где φ — коэффициент снижения числа производителей x на первом этапе в результате негативного влияния второго этапа.

В отличие от модели (42) данная модель неразрешима в квадратурах, поэтому имеет смысл искать значения равновесной численности участников внедрения переносимой технологии.

Координаты x_0, y_0 единственного нетривиального положения равновесия модели (48) удовлетворяют следующей двумерной системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} pN^{-1}x_0 + \varphi\beta y_0 &= p - \alpha, \\ \sigma x_0 - \beta y_0 &= 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Решая систему (49) находим, что

$$\begin{aligned} x_0 &= (p - \alpha)(p + \sigma\varphi N)^{-1}N, \\ y_0 &= \sigma\beta^{-1}(p - \alpha)(p + \sigma\varphi N)^{-1}N. \end{aligned} \quad (50)$$

Принимая во внимание (50) получаем, что величины x_0, y_M связаны соотношением

$$y_0 = p(p + \sigma\varphi N)^{-1}y_M. \quad (51)$$

Таким образом, из (51) следует, что при любом $\varphi > 0$ равновесная численность с учетом влияния отторжения второго этапа всегда меньше равновесной численности при отсутствии этого влияния.

9. Модель Вольтерра–Гаузе для случая конкурентного трансфера

Исследуем задачу трансфера двух конкурирующих между собой производственных технологий. С этой целью воспользуемся следующей двумерной моделью конкурентных взаимодействий Вольтерра–Гаузе [30, 31]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_1xN^{-1}(N-x) - \beta_1xy, \\ \dot{y} &= p_2yN^{-1}(N-y) - \beta_2xy, \end{aligned}$$

где $x = x(t)$ — число участников трансфера, внедряющих первую технологию T_1 , p_1 — коэффициент роста числа участников, внедряющих первую технологию, $y = y(t)$ — число участников трансфера, внедряющих вторую технологию T_2 , p_2 — коэффициент роста числа участников, внедряющих вторую технологию, N — общее число потенциальных реципиентов переносимых технологий, β_1, β_2 — коэффициенты снижения числа участников для первой и второй технологии.

В соответствии с результатами работ [30, 31] имеем:

а) при $\beta_1 p_1^{-1} < N^{-1}$, $\beta_2 p_2^{-1} > N^{-1}$, первая производственная технология вытеснит с рынка трансфера вторую технологию;

б) при обратных знаках неравенств преимущество на рынке имеет вторая производственная технология;

в) при $\beta_1 p_1^{-1} > N^{-1}$, $\beta_2 p_2^{-1} > N^{-1}$, на рынке остается лишь одна из переносимых технологий, но которая из двух — зависит от начальных условий;

г) при $\beta_1 p_1^{-1} < N^{-1}$, $\beta_2 p_2^{-1} < N^{-1}$, возможно устойчивое “сосуществование” на рынке обеих технологий. Таким образом, выше представлены все основные случаи поведения на рынке трансфера двух конкурирующих технологий.

10. Дифференциальные модели технологического переноса с запаздыванием

В настоящем параграфе оценим влияние предыстории процесса технологического трансфера на динамику его текущего развития. Для учета этого влияния вначале рассмотрим, следуя [32, 33], одномерную дифференциальную модель процесса технологического трансфера с распределенным непрерывным запаздыванием

$$\dot{u} = \left(\varphi - \eta u - \int_0^t f(t - \omega) u(\omega) d\omega \right) u, \quad (52)$$

где φ — коэффициент роста числа участников процесса трансфера; η — коэффициент замедления роста числа участников.

Функция f под знаком интеграла в уравнении (52) определяет степень влияния предыстории процесса трансфера на динамику его текущего развития в зависимости от отдаленности во времени этой предыстории от рассматриваемого момента времени $t > 0$. В. Вольтерра называл эту функцию *наследственной функцией*.

Имеет место следующее утверждение, установленное в работе [32].

Т е о р е м а 3. *Предположим, что коэффициенты φ, η модели (52) положительны, а функция f является непрерывной и абсолютно интегрируемой при $t \geq 0$. Пусть, кроме того, $f(t) \neq 0$ и*

$$\eta - \int_0^{\infty} |f(\omega)| d\omega > 0.$$

Тогда для любого начального значения $u(0) > 0$ существует единственное решение $u(t)$, $t > 0$, такое, что

а) $u(t) > 0$ для всех $t > 0$;

б) при $t \rightarrow +\infty$ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u_0 \equiv \varphi \left(\eta + \int_0^{\infty} f(w) dw \right)^{-1}.$$

Таким образом, если наследственная функция f модели (52) непрерывна и абсолютно интегрируема при $t \geq 0$, то со временем число $u(t)$ участвующих в трансфере фирм неограниченно приближается к равновесному состоянию модели

$$u_0 \equiv \varphi \left(\eta + \int_0^{\infty} f(w) dw \right)^{-1}.$$

Прямым следствием теоремы 3 является следующее утверждение.

Теорема 4. 1. *Предположим, что для модели (52) выполняются все условия теоремы 3. Допустим также, что*

$$\int_0^{\infty} f(w) dw > 0 \quad \left(\int_0^{\infty} f(w) dw < 0 \right).$$

Тогда для любых ненулевых решений $u(t)$ модели (52) и $x(t)$ логистической дифференциальной модели трансфера без запаздывания

$$\dot{x} = (\varphi - \eta x)x$$

таких, что $u(0) = x(0)$, найдется такое число t_0 , что при всех $t \geq t_0$ справедливо неравенство

$$x(t) > u(t) \quad (x(t) < u(t)).$$

2. Допустим, что процесс трансфера технологии T может быть осуществлен двумя различными способами, описываемыми логистическими моделями с распределенным запаздыванием вида (52):

$$\dot{y} = \left(\varphi_1 - \eta_1 y - \int_0^t f_1(t-w)y(w) dw \right) y, \quad (53)$$

$$\dot{z} = \left(\varphi_2 - \eta_2 z - \int_0^t f_2(t-w)z(w) dw \right) z. \quad (54)$$

Пусть модели (53), (54) удовлетворяют условию теоремы 3, а коэффициенты $\varphi_1, \eta_1, \varphi_2, \eta_2$ и наследственные функции f_1, f_2 связаны соотношениями

$$\text{а) } \varphi_1 \geq \varphi_2, \eta_1 > 0, \eta_2 > 0, \varphi_1 \eta_1^{-1} \geq \varphi_2 \eta_2^{-1};$$

$$\text{б) } \int_0^{\infty} f_2(w) dw > \int_0^{\infty} f_1(w) dw > 0.$$

Тогда для любых ненулевых решений $y(t)$, $z(t)$ соответственно моделей (53), (54) таких, что $y(0) = z(0)$, найдется такое число $t_1 > 0$, что при всех $t > t_1$ выполнено неравенство

$$y(t) > z(t).$$

Отметим, что предложение 2 теоремы 3 дает достаточные условия знакоопределенности при всех достаточно больших значениях времени функции прироста числа вовлеченных в трансфер участников для логистических дифференциальных моделей процесса технологического трансфера с распределенным запаздыванием вида (52).

Предположим теперь, что запаздывание в логистической модели трансфера является постоянной величиной:

$$\dot{\nu} = (\varphi - \eta\nu(t - \tau))\nu \quad (55)$$

($\tau > 0$ — постоянное запаздывание модели трансфера (55)).

Условие устойчивости нетривиального положения равновесия $\nu_0 = \varphi\eta^{-1}$ модели (55) имеет следующий вид [33]:

$$\varphi\tau < \frac{\pi}{2}. \quad (56)$$

Условие (56) показывает, что при достаточно большой скорости роста числа участников φ и при достаточно большом запаздывании τ нетривиальное равновесие модели (55) может быть нарушено. В [33] установлено также, что в модели с запаздыванием (55) в отличие от логистической модели трансфера $\dot{x} = (\varphi - \eta x)x$, возможно появление колебаний:

а) при выполнении неравенства (56) эти колебания являются затухающими и выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \nu(t) = \varphi\eta^{-1};$$

б) при $\varphi\tau = \frac{\pi}{2}$ колебания не затухают, но численность остается ограниченной;

в) при выполнении обратного неравенства $\varphi\tau > \frac{\pi}{2}$ амплитуда возникающих в модели (55) колебаний неограниченно возрастает со временем.

Таким образом, введение постоянного запаздывания в логистическую модель процесса технологического трансфера уменьшает устойчивость ее нетривиального положения равновесия и приводит к возникновению колебаний численности вовлеченных в трансфер фирм-реципиентов переносимой технологии.

11. Стохастическая модель процессов трансфера передовых производственных технологий

Для исследования динамики процессов активного технологического трансфера в предыдущих параграфах настоящей работы применялись одно- и многомерные детерминированные дифференциальные модели.

Заметим, однако, что во многих случаях оригинальные условия успешной реализации проектов трансфера, выполненные у донора переносимой технологии, могут быть существенно нарушены в процессе трансфера у реципиента технологии. Спрогнозировать такие нарушения, как правило, очень сложно. В этих условиях процесс трансфера приобретает вероятностный характер. Отметим также, что на ранних этапах технологического трансфера

число активно участвующих в нем фирм мало, а конкурентные взаимодействия между фирмами еще достаточно слабы. Поэтому для моделирования динамики процесса трансфера на ранних его стадиях можно применить аппарат теории случайных марковских ветвящихся процессов.

Напомним (см., например, [34–36]), что однородная цепь Маркова $\nu(t)$ ($t \geq 0$) с неотрицательными целочисленными значениями называется *ветвящимся процессом с одним типом элементов*, если ее переходные вероятности

$$P_{ij}(t) = P\{\nu(t) = j \mid \nu(0) = i\}$$

удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} 1) & P_{0j} = \sigma_{0j}; \\ 2) & P_{ij}(t) = \sum_{j_1 + \dots + j_i = j} P_{1j_1}(t) \cdot \dots \cdot P_{1j_i}(t), \quad i \neq 0; \\ 3) & \lim_{t \rightarrow 0} P_{ij}(t) = \sigma_{ij} \quad (\sigma_{ij} \text{ — символ Кронекера}); \end{aligned} \quad (57)$$

4) функции $P_{1j}(t)$ при значениях t , близких к нулю, представимы в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_{11}(t) &= 1 + q_1 t + o(t), \quad q_1 < 0, \\ P_{1j}(t) &= q_j t + o(t), \end{aligned} \quad (58)$$

где $q_j \geq 0$ и $\sum_{j=0}^{\infty} q_j = 0$ (величины q_j называются плотностями перехода однородного ветвящегося процесса).

В нашем случае элементами ветвящегося процесса являются фирмы, внедряющие некоторое технологическое новшество T .

Ветвящийся процесс трансфера T может быть описан следующим образом.

Пусть в некоторый исходный момент $s = 0$ имеется ровно i фирм, разрабатывающих T . Предположим, что за промежуток времени t каждая из этих фирм, независимо от других фирм и от обстоятельств, предшествующих моменту времени s , “порождает” с вероятностью $P_{1j}(t)$ j внедряющих T фирм, причем

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(t) = 1.$$

За время t i фирм, разрабатывающих T в момент времени s , порождают дополнительно

$$\nu(s+t) = \nu^{(1)}(t) + \dots + \nu^{(i)}(t)$$

фирм, где $\nu^{(n)}(t)$ — численность “потомства” n -ой фирмы; все $\nu^{(n)}(t)$, $n = 1, \dots, i$, независимы и имеют одно и то же распределение

$$P_{1j}(t) = P\{\nu^{(n)}(t) = j\},$$

удовлетворяющее (58).

Учитывая вышеизложенное, получаем, что вероятность $P_{ij}(t)$ перехода от i фирм, внедряющих T , к j фирмам за время t в однородном ветвящемся процессе трансфера T действительно равна i -кратной свертке $P_{1j}(t)$ вида (57):

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) &= P\{\nu(t+s) = j \mid \nu(s) = i\} = P\{\nu^{(1)}(t) + \dots + \nu^{(i)}(t) = j\} = \\ &= \sum_{j_1 + \dots + j_i = j} P_{1j_1}(t) \cdot \dots \cdot P_{1j_i}(t). \end{aligned}$$

Отметим, что аппарат теории случайных ветвящихся процессов позволяет исследовать поведение вероятности затухания (продолжения) процесса технологического трансфера.

В самом деле, пусть $\alpha = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_{10}(t)$ — вероятность затухания процесса трансфера. Имеет место следующее утверждение, приводимое в удобной для дальнейшего изложения форме.

Теорема 5 ([34–36]). *Величина α равна наименьшему неотрицательному корню уравнения*

$$g(x) = 0,$$

где $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$ — дифференциальная производящая функция ветвящегося процесса трансфера.

Прямым следствием теоремы 1 является следующее утверждение.

Утверждение 2. *Предположим, что процесс трансфера T может быть осуществлен двумя различными альтернативными способами, описываемыми однородными ветвящимися процессами с плотностями переходов $\{q'_k\}$ и $\{q''_k\}$. Пусть α' , α'' — наименьшие неотрицательные корни соответственно уравнений*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q'_k x^k = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} q''_k x^k = 0.$$

Тогда, если $\alpha' < \alpha''$, то можно указать такое число $t_0 = t_0(\alpha', \alpha'')$, что при всех $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$P'_{10}(t) < P''_{10}(t),$$

где $P'_{10}(t)$, $P''_{10}(t)$ — вероятности вырождения к моменту времени $t > 0$ соответственно первого и второго вариантов процесса технологического трансфера.

Утверждение 2 дает достаточные условия уменьшения вероятности вырождения процесса трансфера для всех достаточно больших значений времени.

Отметим, что аппарат теории случайных ветвящихся процессов применялся ранее в основном при исследовании моделей цепных реакций [34, 37], в генетике [38], демографии [34], [39–41]. В настоящей работе этот аппарат впервые используется при изучении процессов технологического трансфера.

11.1 Достаточные условия уменьшения вероятности вырождения процесса технологического трансфера на любом конечном интервале времени

Рассмотрим частный случай ветвящегося процесса трансфера передовой производственной технологии, для которого плотности перехода q_j равны

$$q_0 = p, \quad q_1 = -(p+q), \quad q_2 = q \quad (p > 0, q > 0), \quad q_j = 0, \quad j > 2. \quad (59)$$

В этом случае одна фирма, начавшая внедрение T , за малый промежуток времени t или отторгает T с вероятностью $pt + o(t)$, или с вероятностью $qt + o(t)$ порождает еще одну фирму, внедряющую T , либо с вероятностью

$$1 - (p+q)t + o(t)$$

остаётся в единственном числе, не порождая при этом новых внедряющих фирм.

Вероятность порождения более чем одной внедряющей фирмы равна $o(t)$. Известно (см., например, [35, 36]), что для этого ветвящегося процесса имеют место следующие соотношения:

$$P_{10}(t) = \begin{cases} 1 - e^{(p-q)t} [q(q-p)^{-1}(e^{(p-q)t} - 1) + 1]^{-1}, & q \neq p, \\ 1 - (qt + 1)^{-1}, & p = q, \end{cases} \quad (60)$$

где $P_{10}(t)$ — вероятность вырождения (затухания) процесса трансфера T к моменту времени $t > 0$.

Формулы (60) дают возможность вычислять вероятность вырождения процесса трансфера $P_{10}(t)$ для любого конечного момента времени t .

Заметим, что из (60) непосредственно вытекают следующие асимптотические соотношения:

а) если $q \leq p$, то при $t \rightarrow +\infty$

$$P_{10}(t) \rightarrow 1;$$

б) если $q > p$, то при $t \rightarrow +\infty$

$$P_{10}(t) \rightarrow pq^{-1}.$$

Таким образом, в случае а) процесс трансфера T с вероятностью 1 вырождается; в случае б) вероятность вырождения процесса T

$$\alpha \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} P_{10}(t)$$

равна pq^{-1} .

Предположим теперь, что процесс трансфера T может быть осуществлён двумя различными способами, описываемыми однородными ветвящимися процессами с плотностями переходов p' , q' , p'' , q'' . Имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть плотности переходов p' , q' , p'' , q'' вариантов трансфера T связаны соотношениями

$$p' < q', \quad p'' < q'', \quad (61)$$

$$q' > q'', \quad p' < p''. \quad (62)$$

Тогда для любого положительного t справедливо неравенство

$$P'_{10}(t) < P''_{10}(t), \quad (63)$$

где $P'_{10}(t)$, $P''_{10}(t)$ — вероятности вырождения к моменту времени $t > 0$ соответственно первого и второго вариантов трансфера T .

Доказательство. Обозначим

$$x(t) \equiv e^{(q'-p')t} [q'(q'-p')^{-1}(e^{(q'-p')t} - 1) + 1]^{-1}, \quad (64)$$

$$y(t) \equiv e^{(q''-p'')t} [q''(q''-p'')^{-1}(e^{(q''-p'')t} - 1) + 1]^{-1}. \quad (65)$$

Нетрудно показать, что функции $x(t)$, $y(t)$ ($x(0) = y(0) = 1$), задаваемые формулами (64), (65), являются решениями соответственно логистических дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = (q' - p')x - q'x^2, \quad (66)$$

$$\dot{y} = (q'' - p'')y - q''y^2. \quad (67)$$

Используя свойства 1–6 решений логистических дифференциальных уравнений (см. параграф 2), находим, что для решений $x(t)$, $y(t)$ уравнений (66), (67) выполнено:

а1) функции $x(t)$, $y(t)$ монотонно убывают на полуоси времени $[0, +\infty)$;

б1) для решений $x(t)$, $y(t)$ имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1 - p'(q')^{-1},$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1 - p''(q'')^{-1}.$$

Введем следующие обозначения:

$$g_1 \equiv (q' - p')u - q'u^2, \quad (68)$$

$$g_2 \equiv (q'' - p'')u - q''u^2, \quad (69)$$

$$\alpha \equiv (p'' - p')(q' - q'')^{-1} \quad (70)$$

(заметим, что в силу (62) справедливо неравенство $\alpha > 0$).

Нетрудно показать, что решением квадратного неравенства

$$g(u) \equiv g_1(u) - g_2(u) > 0$$

($g_1(u)$, $g_2(u)$ задаются формулами (68)–(70)) являются все u из интервала $(0, 1 + \alpha)$

$$g(u) > 0 \leftrightarrow u \in (0, 1 + \alpha). \quad (71)$$

Обозначим через t' момент времени, при котором решение $y(t)$ ($y(0) = 1$) уравнения (64) достигает значения

$$y(t') = 1 - p'(q')^{-1}.$$

Пусть ε — такое положительное число, что при всех $t \in (-\varepsilon, 0]$

$$0 < x(t) < 1 + a,$$

$$0 < y(t) < 1 + a.$$

Положим

$$K_\varepsilon \equiv \{(t, u), -\varepsilon < t < t'; 0 < u < 1 + a\}.$$

Нетрудно видеть, что решения $x(t)$, $y(t)$ дифференциальных уравнений (66), (67) удовлетворяют на открытом множестве $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ всем требованиям теоремы сравнения Чаплыгина [23–25]. Действительно, решения $x(t)$, $y(t)$ определены при всех $t \in (-\varepsilon, t')$ и удовлетворяют

а2) при $t = 0$ равенству

$$x(t) = y(t) = 1;$$

б2) при $t \in (-\varepsilon, t')$ включениям

$$\begin{aligned}(t, x(t)) &\in K_\varepsilon, \\ (t, y(t)) &\in K_\varepsilon;\end{aligned}$$

в2) при $t \in (-\varepsilon, t')$ дифференциальному неравенству

$$\dot{y} \equiv (g_2(y(t))) < g_1(y(t)),$$

что и требовалось доказать.

Воспользовавшись теоремой Чаплыгина, находим, что при любом $t \in (0, t')$

$$y(t) < x(t). \quad (71)$$

В силу свойств а1, б1 решений логистических дифференциальных уравнений (66), (67) при любом $t \geq t'$ имеем

$$\begin{aligned}x(t) &> 1 - p'(q')^{-1}, \\ y(t) &\leq 1 - p'(q')^{-1}.\end{aligned} \quad (72)$$

Принимая во внимание (72), получаем, что

$$y(t) < x(t) \quad \text{при всяком } t \geq t'. \quad (73)$$

Используя (71), (73), находим, что при всех $t > 0$

$$y(t) < x(t). \quad (74)$$

Учитывая (74), окончательно получаем, что при любом $t > 0$

$$P'_{10}(t) = 1 - x(t) < 1 - y(t) = P''_{10}(t).$$

Теорема 6 полностью доказана.

Теорема 6 дает достаточные условия уменьшения вероятности вырождения процесса трансфера передовой производственной технологии T , удовлетворяющего (59), (60), на любом конечном интервале времени.

12. Модель оценки влияния инвестиционной активности предприятий с участием иностранного капитала на динамику экономического роста страны-реципиента переносимой технологии

Как уже отмечалось во введении, одним из важных факторов, позволяющим развивающимся странам и странам с переходной экономикой сгладить ряд внутренних проблем и придать дополнительный импульс экономическому развитию, является открытие своих рынков для иностранных фирм и совместных предприятий. В ряде случаев уже одного этого оказывается достаточно для прогрессивной перестройки всего экономического уклада страны и достижения высокой динамичности национального производства. Классическими примерами сказанного могут служить КНР, Южная Корея и ряд других динамично развивающихся стран Юго-Восточной Азии.

Проблема оценки влияния иностранных капиталов на экономический рост страны-реципиента имеет длительную историю. Одним из наиболее известных подходов к решению данной проблемы является предложенная крупным американским экономистом, лауреатом Нобелевской премии В. Леонтьевым дифференциальная модель перераспределения капитала [42].

Модель В. Леонтьева воспроизводит динамику функционирования двух групп стран — развитых и развивающихся. Применительно к развитым странам данная модель сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей динамику выпуска валового национального продукта (ВНП) в группе развитых стран:

$$\begin{aligned} I_1(t) &= S_1 y_1(t), \\ \dot{y}_1(t) &= b_1^{-1} I_1(t), \end{aligned}$$

где $y_1(t)$ — выпуск (ВНП) в данной группе стран, $I_1(t)$ — объем инвестиций в развитых странах, S_1 — норма накоплений (инвестирования) или мультипликатор инвестиций, b_1 — коэффициент приростной капиталоемкости или акселератор инвестиций. Решая данную систему, находим, что

$$y_1(t) = y_1(0)e^{S_1 b_1^{-1} t}.$$

Далее предполагается, что объем капитала, переводимого в развивающиеся страны из развитых, составляет постоянную долю h от валового национального продукта стран, экспортирующих капитал

$$H(t) \equiv h y_1(t) = h y_1(0) e^{S_1 b_1^{-1} t},$$

где $H(t)$ — величина переводимого капитала. Для группы развивающихся стран имеем следующую систему уравнений динамики выпуска ВНП [42]:

$$\begin{aligned} I_2(t) &= S_2 y_2(t) + h y_1(0) e^{S_1 b_1^{-1} t}, \\ \dot{y}_2(t) &= b_2^{-1} I_2(t). \end{aligned}$$

Решая полученную систему уравнений в общем случае, когда $S_1 b_1^{-1} \neq S_2 b_2^{-1}$, получаем, что

$$y_2(t) = \left(y_2(0) - \frac{H(0)}{b_2 c} \right) e^{S_2 b_2^{-1} t} + \frac{H(0)}{b_2 c} e^{S_1 b_1^{-1} t},$$

где $c = S_1 b_1^{-1} - S_2 b_2^{-1}$.

Таким образом, в модели В. Леонтьева экономический рост в развивающихся странах напрямую зависит от темпов роста в развитых странах и от начального значения вывозимого из стран капитала.

Несмотря на то, что дифференциальная модель экономического роста В. Леонтьева внесла вклад в изучение динамики международных экономических связей различных стран [42, 43], она имеет и ряд недостатков, среди которых выделим следующие.

1. Вывозимый капитал предполагается однородным. Вместе с тем для стран с переходной экономикой важны не столько объемы импортируемого капитала, сколько его структура. Так, например, значительная часть иностранных инвестиций в России направлялась на покупку краткосрочных государственных ценных бумаг, а не в реальный сектор экономики. Понятно, что такие финансовые вложения способствуют скорее замедлению, чем ускорению экономического роста страны-реципиента. В этом смысле прикладные расчеты по модели В. Леонтьева могут сильно дезориентировать исследователя относительно истинной роли иностранных инвестиций.

2. Национальные и иностранные инвестиции предполагаются равноэффективными. Здесь В. Леонтьев предполагает, что иностранный капитал — это всего лишь дополнительные финансовые ресурсы, отдача от которых определяется национальными условиями воспроизводства. Однако, именно это положение является неверным, так как глубинный экономический смысл привлечения иностранного капитала заключается в том, что вместе с ним в национальную экономику приходят новые технологии и новые организационные формы производства, дающие совершенно иной экономический эффект по сравнению с местными технологиями и способами предпринимательства.

Заметим, однако, что перечисленные выше недостатки дифференциальной модели В. Леонтьева отнюдь не означают ее полной непригодности для макроэкономического анализа. Будет правильнее сказать, что ее использование эффективно для уяснения качественной картины в развитии хозяйственных процессов, в то время как для детальных количественных расчетов по конкретной стране требуется несколько иная модельная схема.

В настоящей работе для исследования влияния инвестиционной деятельности иностранных и совместных предприятий на темпы экономического роста страны-реципиента будет использована предложенная в работах [44, 45] акселераторно-мультипликативная модель экономического роста. Данная модель лишена перечисленных выше недостатков дифференциальной модели В. Леонтьева и позволяет максимально конкретно изучать влияние иностранного бизнеса на развитие внутренних экономических рынков принимающей страны.

12.1. Основные свойства акселераторно-мультипликативной модели оценки влияния инвестиционной активности иностранного сектора экономики на динамику экономического роста страны-реципиента переносимых технологий

Для изучения динамики влияния сектора иностранных и совместных предприятий, участвующих в трансфере и освоении передовых производственных технологий и ноу-хау, на темпы экономического роста в стране-реципиенте воспользуемся следующей акселераторно-мультипликативной разностной моделью экономического роста [44, 45]:

$$\begin{aligned} I(t) &= (1 - r)sx(t), \\ \Delta_\tau(x(t)) &= kI(t), \end{aligned} \quad (75)$$

где $I(t)$ — инвестиции в основной капитал (капиталовложения) в году t , $x(t)$ — ВВП в году t , s — средняя склонность к инвестированию (мультипликатор модели (75)), r — доля промежуточного потребления в валовом продукте, k — приростная капиталоемкость производства (акселератор модели (75)), $\Delta_\tau(x(t)) \equiv x(t + \tau + 1) - x(t + \tau)$, τ ($\tau \geq 0$) — инвестиционный лаг модели (75).

Вводя в рассмотрение показатели капиталоемкости отечественного и зарубежного секторов, соответственно,

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \Delta x_h(t)(I_h(t))^{-1}, \\ \beta &\equiv \Delta x_f(t)(I_f(t))^{-1}, \end{aligned}$$

где $x_h(t)$, $x_f(t)$ — объем ВВП, создаваемый, соответственно, на отечественных предприятиях с участием иностранного капитала, $I_h(t)$, $I_f(t)$ — инвестиции, осуществляемые отечественными предприятиями с участием иностранного капитала, и доли инвестиций зарубежного сектора в общем объеме капиталовложений

$$n \equiv I_f(t)(I_h(t))^{-1},$$

сведем систему (75) к следующему разностному уравнению:

$$x(t + \tau + 1) - x(t + \tau) - [(1 - n)\alpha + n\beta](1 - r)sx(t) = 0. \quad (76)$$

Из практики известно, что коэффициент n в большинстве случаев не превышает величин $0,1-0,2$, т.е. удельные иностранные инвестиции намного меньше объемов ВВП страны-реципиента.

Разностное уравнение (76) в частных случаях при значениях параметра инвестиционного лага $\tau = 0; 1$ исследовалось в работах [44, 45].

Соберем основные свойства разностной модели (75)–(76), полученные в указанных работах, в нижеследующем утверждении.

Теорема 7. 1. Пусть $\tau = 0$. Тогда

а) в случае отсутствия иностранного сектора экономики и при отрицательной отдаче от инвестиций ($\alpha < 0$), характерной для неблагоприятных периодов развития экономики страны-реципиента, спад производства не может быть предотвращен;

б) в случае наличия эффективно работающего иностранного сектора промышленного производства ($\beta > 0$) и при выполнении соотношения

$$n > (1 - \beta\alpha^{-1})^{-1}$$

иностранный бизнес может перевести экономику страны-реципиента из режима застоя в режим экономического роста.

2. Пусть $\tau = 1$. Тогда

а1) циклические колебания в модели (75)–(76) возможны тогда и только тогда, когда для коэффициентов модели имеет место неравенство

$$(1 - n)\alpha + n\beta < (4s(1 - r))^{-1}; \quad (77)$$

б1) при одновременном выполнении неравенств $\alpha < 0$, $\beta > 0$ и соотношения (77) рост доли совместных и иностранных предприятий может сгладить начавшиеся экономические колебания и придать динамике промышленного производства более гладкий и однонаправленный характер;

в1) в случае, когда справедливы противоположные неравенства $\alpha > 0$, $\beta < 0$ рост масштабов иностранного и совместного бизнеса может подталкивать экономику страны-реципиента к циклическому режиму функционирования (другими словами, в этом случае активизация деятельности иностранных предприятий оказывает дестабилизирующее воздействие на экономику страны-реципиента).

Рассмотрим теперь случай, когда коэффициент инвестиционного лага τ модели (76) равен двум. Предположим также, что в экономике страны-реципиента существует сектор предприятий с участием иностранного капитала, для которого показатель капиталоемкости β больше нуля. Используя ряд известных свойств решений разностных уравнений с постоянными коэффициентами типа (2) (см., например, [46–48]), можно установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 8. Пусть для модели экономического роста типа (76) выполнены перечисленные выше условия. Допустим дополнительно, что коэффициенты α , β , n связаны соотношением

$$(1 - n)\alpha + n\beta > 0. \quad (78)$$

Тогда модель (78) имеет циклические режимы функционирования. Возникающие при этих режимах колебания динамики роста промышленного производства не могут быть устранены или сглажены путем увеличения величины n -доли инвестиций зарубежного сектора экономики в общем объеме капиталовложений.

Таким образом, в наиболее распространенном случае ограниченных иностранных инвестиций принципиальное значение имеет величина лага освоения инвестиций — с увеличением лага появляется возможность снижения, а не увеличения объема ВВП страны-реципиента.

Доказательство. Пусть

$$c \equiv c(n) \equiv -[(1-n)\alpha + n\beta](1-r)s, \quad (79)$$

$P(\lambda) \equiv \lambda^3 - \lambda^2 + c$ — характеристический полином разностного уравнения третьей степени (76).

Подстановкой $\lambda \equiv \sigma + \frac{1}{3}$ приведем полином $P(\lambda)$ к следующему стандартному виду:

$$P_0(\sigma) \equiv \sigma^3 + p\sigma^2 + q, \quad (80)$$

где

$$p = -\frac{1}{27} \quad (81)$$

$$q = -\frac{2}{27} + c < -\frac{2}{27} < 0. \quad (82)$$

Для доказательства теоремы 8 нам достаточно показать, что уравнение третьей степени (80) при любом n , $0 \leq n \leq 1$, имеет комплексно-сопряженные не вещественные корни

$$\sigma_1 = \sigma_{1,1} + i\sigma_{1,2}, \quad \sigma_2 = \sigma_{1,1} - i\sigma_{1,2} \quad (i \equiv \sqrt{-1}),$$

такие, что для некоторого $a > 0$ и всякого $n \in [0, 1]$ выполнено

$$|\sigma_{1,2}| > a.$$

Обозначим

$$Q \equiv -\left(\frac{1}{27}\right)^3 + \left(\frac{2}{27} - c\right)^2.$$

Используя (79), (82), находим, что величина Q удовлетворяет неравенству

$$Q > 0.$$

Так как $p = -\frac{1}{27} < 0$, $Q > 0$, то, воспользовавшись известными формулами Кардано нахождения корней $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ кубического уравнения $P_0(\sigma) = 0$ (см., например, [48, 49]), получаем, что

$$\sigma_1, \sigma_2 = \left(\frac{1}{27}\right)^{1/2} (\operatorname{cosec}(2\varphi) \pm i\sqrt{3} \operatorname{ctg}(2\varphi)), \quad \sigma_3 = -2\left(\frac{1}{27}\right)^{1/2} \operatorname{cosec}(2\varphi), \quad (83)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = \left(\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right)^{1/3} \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{4} \right), \quad (84)$$

$$\sin \psi = \frac{2}{27} q^{-1} \left(|\psi| \leq \frac{\pi}{2} \right). \quad (85)$$

Принимая во внимание (82), (85), находим, что величина угла ψ удовлетворяет при любом n , $0 \leq n \leq 1$, соотношениям

$$0 < |\psi| < \psi_0, \quad \psi_0 = \operatorname{const}, \quad \psi_0 < \frac{\pi}{2}. \quad (86)$$

Используя (83)–(86), окончательно получаем, что *существует такое положительное число $a_0 > 0$, что для всякого n из отрезка $[0, 1]$ выполнено*

$$|\sigma_{1,2}| \equiv \sqrt{3} \left(\frac{1}{27} \right)^{1/2} |\operatorname{ctg}(2\varphi)| = \frac{1}{3} |\operatorname{ctg}(2\varphi)| > a_0.$$

Теорема 8 полностью доказана.

13. Дифференциальная модель оценки влияния налоговых отчислений предприятий на процесс распространения переносимой технологии

В настоящем параграфе работы мы рассмотрим вопрос о том, как влияют налоговые отчисления предприятий на скорость распространения новой производственной технологии в некоторой отрасли промышленного производства. Следуя [50, 51], будем предполагать, что предприятия данной отрасли распределены по уровням технологической эффективности $k = 1, 2, \dots$

Обозначим: M_k — объем производственных мощностей уровня k , которые дают прибыль L_k с каждой единицы мощности в единицу времени, b_k — фондоемкость создания единицы мощности на k -ом уровне эффективности, $\lambda_k \equiv L_k b_k^{-1}$ — показатель эффективности технологии уровня k ,

$$F_k \equiv \left(\sum_{m=0}^k M_m \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} M_m \right)^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

— функция распределения мощностей по уровням технологической эффективности, $Q \equiv Q(t)$ — денежные средства, полученные от отрасли в виде налогов на осуществление государственных программ к моменту времени t .

Будем также предполагать, взимаемая с предприятий отрасли доля прибыли в момент времени t пропорциональна величине $Q(t)(Q(t) + M(t))^{-1}$, где $M(t) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} M_m(t)$ — суммарная мощность всей отрасли.

Модель экономического роста рассматриваемой отрасли имеет следующий вид [50, 51]:

$$\begin{aligned} \dot{M}_m = & [1 - \varphi_m(Q(Q + M)^{-1} - \varphi_m)]_+ \lambda_m M_m(t) + \\ & [\varphi_{m-1} - Q(Q + M)^{-1}]_+ \lambda_{m-1} M_{m-1}(t), \end{aligned} \quad (87)$$

$$\dot{Q} = \sum_{m=0}^{\infty} Q(Q + M)^{-1} M_m, \quad (88)$$

где $[a]_+ \equiv \max(a, 0)$, φ_m — доля прибыли $L_m M_m(t)$ m -го уровня эффективности, идущая на создание мощностей следующего $(m + 1)$ -го уровня, $(1 - \varphi_m)L_m M_m(t)$ — объем прибыли m -го уровня, идущий на расширение производства уровня m , $\varphi_m \equiv \varphi(F_m) = \gamma_0 + \omega_0(1 - F_m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, где γ_0, ω_0 — соответственно положительные инновационная и имитационная константы. Граничные и начальные условия системы (87)–(88) имеют следующий вид:

$$M_0(t) \equiv 0, \quad M_k(0) \geq 0, \quad \sum_{m=0}^k M_m(0) > 0, \quad M_k(0) = 0, \quad k > K, \quad (89)$$

$$Q(0) = Q_0 > 0. \quad (90)$$

Принимая во внимание результаты работ [50, 51], находим, что система (87)–(90) удовлетворяет следующему утверждению.

Теорема 9. Пусть для модели (87)–(90) выполнены следующие дополнительные условия:

а) последовательность чисел $\{\lambda_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ строго возрастает и стремится к пределу λ :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = \lambda \quad (\lambda > 0);$$

б) для последовательности $\{\lambda_k\}$ справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda - \lambda_k) < +\infty.$$

Тогда

1. Функция $Q(t)(M(t))^{-1}$ является первым интегралом дифференциальной модели (87)–(90).

2. Если $\gamma_0 \leq Q(Q + M)^{-1}$, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} M_K(t)(M(t))^{-1} = 1. \quad (91)$$

Более того, при всяком $k > K$ справедливо соотношение

$$M_k(t) \equiv 0. \quad (92)$$

Теорема 9 означает, что если доля прибыли $Q(Q + M)^{-1}$, взимаяемая с предприятий отрасли в виде налоговых отчислений, превышает величину инновационной константы γ_0 , то процесс распространения переносимой производственной технологии прекращается (см. формулы (91), (92) утверждения 2 теоремы 10).

14. Заключение

Таким образом, в настоящей работе на базе аппарата логистических дифференциальных уравнений и многомерных систем конкурентных взаимодействий типов Вольтерра–Костицина и Вольтерра–Гаузе разработаны новые математические модели анализа процесса переноса и освоения передовых производственных технологий и ноу-хау в неблагоприятных экономических условиях. Для специальных классов таких моделей получены геометрические достаточные условия отсутствия (наличия) особых точек различных типов.

На основе методов теории ветвящихся случайных процессов с непрерывным временем созданы математические модели оценки случайных возмущений рыночной среды на устойчивость процесса распространения технологических новшеств.

Исследован ряд дифференциальных моделей оценки влияния инвестиционной активности секторов иностранных и совместных предприятий на темпы экономического развития страны-реципиента переносимой передовой производственной технологии.

Проведен также анализ влияния налоговых отчислений предприятий на скорость распространения технологических новшеств. Разработанные модели нашли применение при реализации проектов трансфера технологических решений в области систем обработки информации для финансовых, коммерческих и промышленных организаций.

15. Приложение

Доказательство теоремы 2. Теорема 2 является прямым следствием следующего более общего утверждения.

Теорема 10. *Для линейной стационарной двумерной дифференциальной системы*

$$\dot{z} = Az \left(A \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z=z_s, f(z_s)=0, z \in \mathbb{R}^2, t \geq 0} \right) \quad (93)$$

следующие два утверждения равносильны.

1. Матрица A системы (93) имеет различные вещественные собственные значения.
2. Система (93) является геометрически регулярной (см. определение 2 параграфа 8 настоящей работы).

Доказательство теоремы 10. Справедливость импликации $1 \Rightarrow 2$ вытекает из результатов работ [52–54]. Доказательство импликации $2 \Rightarrow 1$ проведем в наиболее важном частном случае, когда $\det A = ad - bc \neq 0$. Допустим противное. Возможны следующие пять случаев.

А) Корни характеристического уравнения системы (93)

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

являются комплексно-сопряженными невещественными числами

$$\lambda_1 = \sigma + i\tau, \quad \lambda_2 = \sigma - i\tau$$

(отметим, что в этом случае $(a - d)^2 + 4bc < 0$).

Общее решение $z \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ системы (93) в этом случае имеет следующий вид [23, 24]:

$$x = e^{\sigma t} \{bC_1 \sin \tau t + bC_2 \cos \tau t\}, \quad (94)$$

$$y = e^{\sigma t} \{[(\sigma - a)C_1 - \tau C_2] \sin \tau t + [\tau C_1 + (\sigma - a)C_2] \cos \tau t\}. \quad (95)$$

Для любого достаточно малого числа $\omega_1 > 0$ выбираем двумерную стационарную систему

$$\dot{u} = B_{\omega_1} u \quad \left(u \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, t \geq 0 \right) \quad (96)$$

такую, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \rho(A, B_{\omega_1}) < \omega_1. \\ \text{б) } \text{характеристическое уравнение системы (96)} \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \dot{u} = B_{\omega_1} u &\equiv \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \\ \lambda^2 - (a' + d')\lambda + a'd' - b'c' &= 0, \end{aligned}$$

имеет комплексно сопряженные невещественные корни λ'_1, λ'_2 вида

$$\lambda'_1 = \sigma + i\tau \left(\frac{2m+1}{2m} \right), \quad \lambda'_2 = \sigma - i\tau \left(\frac{2m+1}{2m} \right), \quad (m \in N). \quad (98)$$

Общее решение $u(t)$ системы (96) имеет следующий вид:

$$u(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \quad (99)$$

$$x' = e^{\sigma t} \{b'C_1 \sin \tau' t + b'C_2 \cos \tau' t\}, \quad (100)$$

$$y' = e^{\sigma t} \{[(\sigma - a')C_1 - \tau'C_2] \sin \tau' t + [\tau'C_1 + (\sigma - a')C_2] \cos \tau' t\} \quad (101)$$

($\tau' = \left(\frac{2m+1}{2m} \right) \tau$, m — некоторое фиксированное натуральное число).

Для решений $z(t), u(t)$ соответственно систем (93), (96) мыслимы следующие две возможности:

- а1) $\angle(z(0), u(0)) \geq \frac{\pi}{4}$;
- б1) $\angle(z(0), u(0)) < \frac{\pi}{4}$.

В случае а1 имеем

$$\sup_{t \geq 0} \angle(z(t), u(t)) \geq \angle(z(0), u(0)) \geq \frac{\pi}{4}. \quad (102)$$

Рассмотрим случай б1. Используя (98)–(101), находим, что

$$\angle(z(0), u(0)) = \angle(z_0, u_0) < \frac{\pi}{4}, \quad (103)$$

где

$$z_0 = \begin{pmatrix} bC_2 \\ \tau C_1 + (\sigma - a)C_2 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} b'C_2 \\ \tau'C_1 + (\sigma - a)C_2 \end{pmatrix}.$$

Положим $t_0 \equiv \frac{2m\pi}{\tau} > 0$. Принимая во внимание (94), (95), (98), (100), (101), получаем, что

$$\sup_{t \geq 0} \angle(z(t), u(t)) \geq \angle\left(z\left(\frac{2m\pi}{\tau}\right), u\left(\frac{2m\pi}{\tau}\right)\right) = \angle(z_0, -u_0) > \frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{4}. \quad (104)$$

Используя (102), (104), окончательно получаем, что

$$\angle(z(t), u(t)) \geq \frac{\pi}{4}$$

для любых двух ненулевых решений $z(t)$, $u(t)$ систем (93), (96), что противоречит условию теоремы 11.

Теорема 10 в случае А нами доказана.

Б) Рассмотрим теперь случай, когда

$$(a - d)^2 + 4bc = 0, \quad a \neq d.$$

В этом случае общее решение $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ системы (93) имеет следующий вид:

$$x = \left[2bC_1 + \left(2bt + \frac{2b}{a-d} \right) C_2 \right] e^{\left(\frac{a+d}{2}\right)t}, \quad (105)$$

$$y = [(d-a)C_1 + ((d-a)t + 1)C_2] e^{\left(\frac{a+d}{2}\right)t}. \quad (106)$$

Выберем для любого достаточно малого стационарную двумерную дифференциальную систему

$$\dot{w} = B_{\omega_2} w \left(w \equiv \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}, t \geq 0, B_{\omega_2} \equiv \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) \quad (107)$$

так, чтобы

а1) $\rho(A, B_{\omega_2}) < \omega_2$;

б1) характеристическое уравнение системы (107) имело комплексно сопряженные невещественные корни λ_1'', λ_2'' вида

$$\lambda_1'' = \frac{a'' + d''}{2} + i\eta, \quad \lambda_2'' = \frac{a'' + d''}{2} - i\eta. \quad (108)$$

Общее решение $w(t)$ системы (107)–(108) имеет следующий вид:

$$w(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix},$$

$$x''(t) = e^{\sigma_0 t} \{ b'' C_1'' \sin \eta t + b'' C_2'' \cos \eta t \}, \quad (109)$$

$$y''(t) = e^{\sigma_0 t} \{ [(\sigma_0 - a'') C_1'' - \eta C_2''] \sin \eta t + [\eta C_1'' + (\sigma_0 - a'') C_2''] \cos \eta t \}, \quad (110)$$

$$\left(\sigma_0 \equiv \frac{a + d}{2} \right).$$

Используя (105), (106), выберем такое число $t_1 > 0$, что при $t \geq t_1$ выполнено

$$\angle(z(t), z_1(t)) < \frac{\pi}{8}, \quad (111)$$

где

$$z_1(t) \equiv te^{\left(\frac{a+d}{2}\right)t} \left(\frac{2bC_2}{(d-a)C_2} \right). \quad (112)$$

Для вектор-функции $w(t)$, $z_1(t)$ возможны следующие два случая:

а2) существует такое натуральное m_0 , что $\frac{2m_0\pi}{\eta} \geq t_1$ и

$$\angle\left(z_1\left(\frac{2m_0\pi}{\eta}\right), w\left(\frac{2m_0\pi}{\eta}\right)\right) \geq \frac{\pi}{4}; \quad (113)$$

б2) для любого натурального m такого, что $\frac{2m\pi}{\eta} \geq t_1$

$$\angle\left(z_1\left(\frac{2m\pi}{\eta}\right), w\left(\frac{2m\pi}{\eta}\right)\right) < \frac{\pi}{4}. \quad (114)$$

Рассмотрим вначале случай а2). Ввиду (111), (113), имеем

$$\sup_{t \geq 0} \angle(z(t), w(t)) \geq \angle\left(z\left(\frac{2m_0\pi}{\eta}\right), w\left(\frac{2m_0\pi}{\eta}\right)\right) \geq \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}. \quad (115)$$

Рассмотрим теперь случай б2). Пусть m_1 — произвольное натуральное число, удовлетворяющее неравенству $\frac{2m_1\pi}{\eta} \geq t_1$. Используя (109)–(112), (114), находим, что

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \angle(z(t), w(t)) &\geq \angle\left(z\left(\frac{(2m_1+1)\pi}{\eta}\right), w\left(\frac{(2m_1+1)\pi}{\eta}\right)\right) > \\ &> \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{8} > \frac{5}{8}\pi > \frac{\pi}{8}. \end{aligned} \quad (116)$$

Принимая во внимание (115), (116), окончательно получаем, что

$$\sup_{t \geq 0} \angle(z(t), w(t)) \geq \frac{\pi}{8}$$

для любых двух ненулевых решений $z(t)$, $w(t)$ системы (93), (103), что противоречит условию теоремы 11.

Теорема 10 в случае Б нами доказана.

Отметим, что в оставшихся случаях В, Г, Д:

В) $a = d \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$;

Г) $a = d \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$;

Д) $a = d \neq 0$, $b = 0$, $c = 0$; доказательство теоремы 11 аналогично ее доказательству в случае Б.

В самом деле, рассмотрим, например, случай Г. В этом случае общее решение системы (93) имеет следующий вид:

$$z(t) = \begin{pmatrix} bC_1 t + C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} e^{at}. \quad (117)$$

Выберем теперь для достаточно малого числа $\omega_3 > 0$ стационарную линейную систему

$$\dot{\nu} = B_{\omega_3} \nu \quad \left(\nu \in \mathbb{R}^2, t \geq 0, B_{\omega_3} \equiv \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{c} \end{pmatrix} \right) \quad (118)$$

такую, что

а2) $\rho(A, B_{\omega_3}) < \omega_3$;

б2) характеристическое уравнение системы (118) имело комплексно сопряженные невещественные корни $a + i\varphi$, $a - i\varphi$.

Общее решение $\nu(t)$ системы (118) имеет следующий вид:

$$\nu(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix}, \quad (119)$$

$$\bar{x}(t) = e^{at} \{ \bar{b}\bar{C}_1 \sin \varphi t + \bar{b}\bar{C}_2 \cos \varphi t \},$$

$$\bar{y}(t) = e^{at} \{ [(a - \bar{a})\bar{C}_1 - \varphi\bar{C}_2] \sin \varphi t + [\varphi\bar{C}_1 + (a - \bar{a})\bar{C}_2] \cos \varphi t \}. \quad (120)$$

Как и в случае Б выберем такое положительное число t_2 , что при всех $t \geq t_2$ выполнено:

$$\angle(z(t), z_2(t)) < \frac{\pi}{8}, \quad (121)$$

где

$$z_2(t) \equiv e^{at} \begin{pmatrix} bC_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (122)$$

Для вектор-функций $z_2(t)$, $\nu(t)$ мыслимы следующие две возможности:

а3) существует такое натуральное m_2 , $\frac{2m_2\pi}{\varphi}$, что

$$\psi(m_2) = \angle \left(z_2 \left(\frac{2m_2\pi}{\varphi} \right), \nu \left(\frac{2m_2\pi}{\varphi} \right) \right) \geq \frac{\pi}{4}; \quad (123)$$

б3) для любого натурального m такого, что $\frac{2m\pi}{\varphi} \geq t_2$,

$$\psi(m) < \frac{\pi}{4}. \quad (124)$$

В случае а3) в силу (121)–(123) имеем

$$\sup_{t \geq 0} \angle(z(t), \nu(t)) \geq \psi(m_2) - \frac{\pi}{8} > \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}. \quad (125)$$

Рассмотрим теперь случай б3). Пусть m_3 — произвольное натуральное число, удовлетворяющее неравенству $\frac{2\pi m_3}{\varphi} \geq t_2$. Принимая во внимание (119)–(122), (124), получаем, что

$$\sup_{t \geq 0} \angle(z(t), \nu(t)) \geq \angle \left(z \left(\frac{(2m_3 + 1)\pi}{\varphi} \right), \nu \left(\frac{(2m_3 + 1)\pi}{\varphi} \right) \right) >$$

$$> \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{8} > \frac{5}{8}\pi > \frac{\pi}{8}. \quad (126)$$

Принимая во внимание (125), (126), окончательно имеем, что

$$\sup_{t \geq 0} \angle(z(t), \nu(t)) \geq \frac{\pi}{8}$$

для любых ненулевых решений $z(t)$, $\nu(t)$ соответственно систем (93), (118), что противоречит условию теоремы 10.

Тем самым теорема 10 нами полностью доказана.

В заключение отметим, что теорема 10 устанавливает геометрические необходимые и достаточные условия наличия у матрицы коэффициентов линейной стационарной двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений различных вещественных собственных значений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН № 14 “Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий” (проект № 2.44).

Список литературы

1. Сахал Д. Технический прогресс: концепции, модели, оценки.—М.: Финансы и статистика, 1985.
2. Фишер П. Прямые иностранные инвестиции для России: стратегия возрождения промышленности.—М.: Финансы и статистика, 1999.
3. Millman A.F. Technology transfer in the international market //Eur. J. of Market.—1983.—Vol. 17.—P. 26–46.
4. Barros P.P. Multi-project R and D competition with free-entry //Econ. Innov. New-Techn.—1993.—Vol. 2.—P. 309–317.
5. Гапоненко Н.П. Инновации и инновационная политика на этапе перехода к новому технологическому порядку //Вопросы экономики.—1997.—№ 9.—С. 84–97.
6. Ахрем А.А., Калининченко А.Ю., Макаров И.М., Рахманкулов В.З. Активные методы технологического трансфера в экстремальных экономических условиях //Автоматика и телемеханика.—1996.—№ 2.—С. 126–134.
7. Ахрем А.А., Макаров И.М., Рахманкулов В.З. Моделирование процессов активного технологического трансфера //Автоматика и телемеханика.—1998.—№ 5.—С. 152–156.
8. Ахрем А.А., Макаров И.М., Рахманкулов В.З., Соклеткин А.В. Моделирование процессов активного технологического трансфера в экстремальных экономических условиях //Материалы Международной научно-технической конференции “Системные проблемы качества, математического моделирования и информационных технологий”, ч. 6, Москва—Сочи (2000).— М.: НИИ “Автоэлектроника”, 2000.—С.22–24.
9. Kuznetz S. Secular movements in production and prices.—New York: Boston Univ., 1930.
10. Davies S. The Diffusion of Process Innovations.—Cambridge: Cambridge University Press, 1979.
11. Davies S. Interfirm diffusion of process innovations //European Economic Review.—1979.—Vol. 12.—P. 299–317.
12. Mansfield E. Industrial Research and Technological Innovation.—N. Y.: W.W. Norton and Co., 1968.
13. Stoneman P.L. The Economic Analysis of Technological Change.—Oxford: Oxford University Press, 1983.
14. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование.—М.: Наука, 1997.
15. Ахрем А.А., Рахманкулов В.З. Динамические модели процесса технологического трансфера.—В кн.: Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник.—М.: Эдиториал УРСС, 1997.—С. 252–262.
16. Ахрем А.А., Рахманкулов В.З. Об одной стохастической модели процесса технологического переноса.—В кн.: Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник.—Ч. I.—М.: Эдиториал УРСС, 1999.—С. 277–283.

17. Ахрем А.А., Рахманкулов В.З. Дифференциальные модели переноса разложимых технологий.—В кн.: Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник.—Ч. II.—М.: Эдиториал УРСС, 2000.—С. 198–202.
18. Макаров И.М., Рахманкулов В.З., Ахрем А.А. Логистические дифференциальные модели технологического переноса.—В сб.: Нелинейная динамика и управление.—М.: Эдиториал УРСС, 1999.—С. 143–149.
19. Ахрем А.А., Рахманкулов В.З., Вашевник Т.Л. Об одной логистической модели процесса технологического трансфера с запаздыванием.—В сб.: Управление и проектирование на базе интеллектуальных технологий.—М.: МГИРЭА (ТУ), 1999.—С. 80–83.
20. Макаров И.М., Ахрем А.А., Рахманкулов В.З. Динамика процессов конкурентных взаимодействий на рынке технологического трансфера.—В сб.: Методы и средства работы с документами.—М.: Эдиториал УРСС, 2000.—С. 237–245.
21. Ахрем А.А., Рахманкулов В.З. Многомерные дифференциальные модели процессов технологического трансфера.—В сб.: Нелинейная динамика и управление. Вып. 1.—М.: Физматлит, 2001.—С. 417–420.
22. Ахрем А.А., Рахманкулов В.З., Соклеткин А.В. Модели проектирования и переноса передовых информационных технологий.—В сб.: Нелинейная динамика и управление. Вып. 2—М.: Физматлит, 2002.—С. 271–278.
23. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: ГИТТИ, 1952.
24. Богданов Ю.С., Сыроид Ю.Б. Дифференциальные уравнения.—Минск: Высшая школа, 1983.
25. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. Воронова А.А., Матросова В.М.—М.: Наука, 1985.
26. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование.—М.: Наука, 1976.
27. Kostitzin V.A. La Biologie Mathematique.—Paris: A.Colin, 1937.
28. Свирижев Ю.М., Елизаров Е.Я. Математическое моделирование биологических систем.—М.: Наука, 1972.
29. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.—М.: Наука, 1976.
30. Gauze G.F. The Struggle for Existence.—Baltimore: Williams and Wilkins, 1934.
31. Bhargava S.C. Generalized Volterra equations and the mechanism of technological substitution //Technological Forecasting and Social Change.—1989.—Vol. 35, № 4.—P. 319–326.
32. Miller R. On Volterra's population equation //SIAM J. Appl. Math.—1966.—Vol. 14.—P. 446–452.
33. Хейл Д. Теория функционально-дифференциальных уравнений.—М.: Мир, 1984.
34. Харрис Т. Теория ветвящихся случайных процессов.—М.: Мир, 1966.
35. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы.—М.: Наука, 1971.
36. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика.—М.: Наука, 1985.
37. Семенов Н.Н. Цепные реакции.—Л.: ОНТИ, Госхимиздат, 1934.
38. Fisher R.A. The Genetic Theory of Natural Selection.—Oxford: Oxford University Press, 1930.
39. Колмогоров А.Н. К решению одной биологической задачи //Известия НИИ Математики и Механики при Томском Университете.—1938.—№ 2.—С. 7–12.
40. Бартоломью Д. Стохастические модели социальных процессов.—М.: Финансы и статистика, 1985.
41. Староверов О.В. Азы математической демографии.—М.: Наука, 1997.
42. Леонтьев В. Темпы долговременного роста и перевод капитала из развитых в развивающиеся страны.—В кн.: Экономическое эссе. Теории, исследования, факты и политика.—М.: Наука, 1990.
43. Столерю Л. Равновесие и экономический рост.—М.: Мир, 1974.
44. Балацкий Е.В. Иностраный бизнес и его влияние на экономику страны-реципиента //Мировая экономика и международные отношения.—1999.—№ 6.—С. 82–91.
45. Балацкий Е.В., Павличенко Р.В. Иностраные инвестиции и экономический рост: теория и практика исследования //Мировая экономика и междунар. отнош.—2002.—№ 1.—С. 52–64.
46. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.—М.: Наука, 1987.
47. Самарский А.А. Введение в численные методы.—М.: Наука, 1987.

48. Анго А. Математика для радиоинженеров.—М.: Наука, 1964.
49. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.—М.: Наука, 1975.
50. Полтерович В.М., Хенкин Г.М. Эволюционная модель экономического роста // Экономика и математические методы. Вып. 3.—1989.—Т. 25.—С. 216–230.
51. Ташлицкая Я.М., Шананин А.А. Многоукладность технологической структуры и влияние транзакционных издержек на распространение инноваций // Математическое моделирование.—2000.—Т. 12, № 12.—Р. 24–34.
52. Миллионщиков В.М. Критерий малого изменения направлений решений линейной системы дифференциальных уравнений при малых возмущениях коэффициентов системы // Матем. заметки.—1968.—Т. 4, № 2.—С. 173–180.
53. Миллионщиков В.М. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.—1971.—Т. 7, № 3.—С. 387–390.
54. Ахрем А.А. Некоторые свойства специального класса линейных систем дифференциальных уравнений.—Деп. в ВИНТИ 04.02.83, № 5294-83.—105 с.

К ВВЕДЕНИЮ МЕРЫ НЕДООПРЕДЕЛЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ

Л. А. Шоломов

Рассматриваются трудности, возникающие при введении понятий условной энтропии и меры информации для недоопределенных данных, связанные с тем, что в общем случае недоопределенных данных не удастся совместить правило сложения энтропий $H(X) + H(Y|X) = H(XY)$ с интерпретацией условной энтропии в терминах относительной сложности. Обсуждается возможность компромисса путем введения дополнительного допущения и ослабления правила сложения энтропий

1. Введение

С недоопределенными данными имеют дело в задачах распознавания образов, синтеза управляющих систем, принятия решений, управления, генетики. Под недоопределенными данными будем понимать последовательности недоопределенных символов. Каждому такому символу соответствует некоторое множество полностью определенных (основных) символов, одним из которых он может быть замещен (доопределен). Применительно к недоопределенным данным возникают задачи исследования информационных свойств, введения и анализа информационных характеристик. Поскольку мера информации выражается через энтропию и условную энтропию, основное внимание будем уделять двум последним характеристикам.

В теории информации используются два подхода к введению информационных характеристик — статистический [1] и детерминированный (алгоритмический [2]). В первом рассматриваются случайные опыты с заданными вероятностями исходов (эквивалентно, источники с заданными вероятностями порождения символов), во втором — классы последовательностей с заданными частотами появления символов. При алгоритмическом подходе энтропия возникает как характеристика сложности последовательностей из частотных классов, условная энтропия — как характеристика относительной сложности. Сложность измеряется минимальной длиной двоичной программы, позволяющей построить последовательность, а относительная сложность — минимальной длиной двоичной программы, позволяющей по одной последовательности построить другую. Можно также говорить о характеристиках сжатия и относительного сжатия последовательностей.

Важным соотношением статистической теории информации является правило сложения энтропий: энтропия произведения опытов XY равна сумме энтропии опыта X и энтропии опыта Y при условии X . Это правило (в более слабом варианте) включено К. Шенноном в число свойств, аксиоматически определяющих вид энтропийной функции. Оно обеспечивает симметрию информации. Указанное соотношение с точностью до малых членов выполнено также при алгоритмическом подходе и означает, что при последовательном сжатии нескольких последовательностей можно добиться асимптотически той же суммарной характеристики, что и при их совместном сжатии.

Для недоопределенных данных в постановке задачи сжатия требуется восстановить по коду последовательности какое-либо ее доопределение (но не ее саму). В соответствии с этим при распространении алгоритмического подхода на недоопределенные данные под сложностью понимается минимальная длина двоичной программы, позволяющей построить доопределение последовательности, а под относительной сложностью — минимальная длина двоичной программы, позволяющей по доопределению одной последовательности построить доопределение другой. В [3] (краткое изложение см. в [4]) установлено, что статистический и алгоритмический подходы к введению энтропии недоопределенных данных согласованы, т.е. приводят к одной и той же величине. Для условной энтропии ситуация оказывается более сложной. В общем случае недоопределенных данных не удается ввести условную энтропию так, чтобы она одновременно характеризовала относительную сложность и удовлетворяла правилу сложения энтропий.

Цель данной работы — рассмотрение этой ситуации и изучение возможности компромисса. Имеются содержательно важные случаи, когда можно ввести условную энтропию опыта Y при условии X , допускающую интерпретацию в терминах относительной сложности и удовлетворяющую правилу сложения энтропий. Это относится к случаю, когда опыт X полностью определен (Y недоопределен), и к его обобщениям, когда X “конкретней” Y и X “слабо конкретней” Y [5].

Условная энтропия вычисляется на основе некоторого доопределения \hat{X} опыта X и существенно зависит от выбранного доопределения. Содержательные рассуждения приводят к допущению, что для вычисления условной энтропии следует использовать “наилучшее доопределение”. Это допущение может быть формализовано, что позволяет найти параметры доопределения \hat{X} . Показано, что в общем случае правило сложения энтропий недостижимо и можно рассчитывать лишь на справедливость его ослабленного варианта — обобщенного правила.

Для вычисления условной энтропии недостаточно одних вероятностных характеристик доопределения \hat{X} , необходимо знать совместное распределение произведения $\hat{X}Y$. Вопрос о нахождении этого распределения для недоопределенных опытов общего вида требует дополнительного исследования и мы его пока оставляем в стороне.

В заключение работы рассмотрен пример, в котором введенных понятий и результатов достаточно для полного анализа информационных свойств — нахождения в явном виде энтропии, условной энтропии и меры информации, исследования ситуации, связанной с правилом сложения энтропий, обобщенным правилом и свойством симметрии информации. На основе проведенного анализа понятий в дальнейшем предполагается ввести и исследовать понятия условной энтропии и меры информации для общего случая недоопределенных данных.

Большинство утверждений приведено без доказательств. Недостающие доказательства имеются в цитируемых источниках либо могут быть получены развитыми в них методами.

2. Некоторые известные факты

Напомним ряд известных фактов и соотношений теории информации (подробнее в [1]), на которых будем базироваться при введении информационных характеристик недоопределенных данных. Эти факты здесь представлены в виде, удобном для модификации применительно к недоопределенным данным.

Пусть $A = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ — конечный алфавит, X — случайный опыт с исходами $a_i \in A$, происходящими независимо с вероятностями $p_i \geq 0$, $p_0 + \dots + p_{m-1} = 1$. Будем использовать обозначение $X = (A, P)$, где $P = (p_0, \dots, p_{m-1})$. *Энтропией опыта X* называется величина

$$H(X) = H(P) = - \sum_{0 \leq i \leq m-1} p_i \log p_i$$

(логарифмы двоичные, $0 \log 0 = 0$). Энтропия характеризует степень сжимаемости последовательностей исходов опыта X . При вероятностной постановке задачи сжатия она указывает минимальное значение среднего числа двоичных кодовых символов, затрачиваемых на символ последовательности исходов.

В детерминированной постановке задачи сжатия рассматривается класс $K_n(X)$ последовательностей длины n , в которых символы a_i встречаются np_i раз. Правильнее было бы полагать кратности символов равными ближайшим к np_i целым, но, чтобы не усложнять изложение выкладками, связанными с округлением, здесь (и дальше в подобных случаях) с числами np_i обращаемся как с целыми. Обозначим через $N_n(X)$ мощность класса $K_n(X)$. Из формулы Стирлинга следует, что *комбинаторная энтропия* $\log N_n(X)$ класса $K_n(X)$ удовлетворяет оценкам

$$nH(X) - c \log n \leq \log N_n(X) \leq nH(X) + c \log n,$$

где $c = c(m)$ — некоторая константа. Принятая здесь точность $O(\log n)$ позволяет не конкретизировать способ округления величин np_i до ближайших целых (с сохранением длины n последовательностей).

Под *методом сжатия F* последовательностей класса $K_n(X)$ будем понимать пару алгоритмов (φ_F, ψ_F) .

Алгоритм φ_F по последовательности $\mathbf{x} \in K_n(X)$ выдает двоичное слово $\varphi_F(\mathbf{x}) = \tilde{\alpha}$ (программу вычисления \mathbf{x} [2]), а алгоритм ψ_F по $\tilde{\alpha}$ восстанавливает \mathbf{x} . В качестве характеристики сжатия $l_F(\mathbf{x})$ будем использовать длину $l(\tilde{\alpha})$ программы для \mathbf{x} , а метод сжатия будем характеризовать функцией $l_F(X, n) = \max\{l_F(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in K_n(X)\}$.

Из приведенных выше оценок и мощностных соображений следует утверждение.

Утверждение 1. *Существует константа $c = c(m)$ такая, что для любого класса $K_n(X)$*

- а) *существует метод сжатия F с $l_F(X, n) \leq nH(X) + c \log n$;*
- б) *при любом методе сжатия F доля последовательностей $\mathbf{x} \in K_n(X)$, для которых $l_F(\mathbf{x}) \leq nH(X) - c \log n$, стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$.*

Пусть теперь задано произведение $XY = (AB, P_{XY})$ случайных опытов $X = (A, P_X)$ и $Y = (B, P_Y)$. Здесь $P_X = (p(a_i), a_i \in A)$, $P_Y = (p(b_j), b_j \in B)$, $P_{XY} = (p(a_i, b_j), a_i \in A, b_j \in B)$, $p(a_i) = \sum_{b_j \in B} p(a_i, b_j)$, $p(b_j) = \sum_{a_i \in A} p(a_i, b_j)$. При $p(a_i) \neq 0$ *энтропией опыта Y при условии исхода a_i* называется величина

$$H(Y|a_i) = - \sum_{b_j \in B} p(b_j|a_i) \log p(b_j|a_i), \tag{1}$$

где $p(b_j|a_i) = p(a_i, b_j)/p(a_i)$ — условные вероятности (при $p(a_i) = 0$ значение $H(Y|a_i)$ не определяем). (*Средняя*) *условная энтропия опыта Y при условии опыта X* вводится как математическое ожидание

$$H(Y|X) = \sum_{a_i \in A} p(a_i) H(Y|a_i). \tag{2}$$

Имеет место [1] *правило сложения энтропий*

$$H(X) + H(Y|X) = H(XY),$$

в силу которого в качестве определения условной энтропии иногда (например, в [6]) вместо (1)–(2) используют

$$H(Y|X) = H(XY) - H(X). \quad (3)$$

Условной энтропии может быть дана детерминированная интерпретация в терминах относительного сжатия. Рассмотрим класс $K_n(XY)$ пар (\mathbf{x}, \mathbf{y}) последовательностей $\mathbf{x} = a_{u_1} \dots a_{u_n} \in A^n$, $\mathbf{y} = b_{v_1} \dots b_{v_n} \in B^n$, в которых среди (a_{u_s}, b_{v_s}) , $1 \leq s \leq n$, пара (a_i, b_j) встречается $np(a_i, b_j)$ раз. Наряду с ним будем рассматривать класс $K_n(X)$, соответствующий опыту X . Под *методом относительного сжатия* G последовательностей \mathbf{y} относительно \mathbf{x} для $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in K_n(XY)$ будем понимать пару алгоритмов (φ_G, ψ_G) , первый из которых по (\mathbf{x}, \mathbf{y}) выдает двоичное слово $\tilde{\beta}$ (программу вычисления \mathbf{y} относительно \mathbf{x}), а второй по программе $\tilde{\beta}$ и \mathbf{x} восстанавливает \mathbf{y} . Длину $l(\tilde{\beta})$ программы обозначим через $l_G(\mathbf{y}|\mathbf{x})$, и метод относительного сжатия G будем характеризовать функцией $l_G(Y|X, n) = \max\{l_G(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in K_n(XY)\}$.

Следующий факт связывает характеристику относительного сжатия с условной энтропией.

Утверждение 2. Существует константа c (зависящая от мощностей алфавитов A и B) такая, что для любого класса $K_n(XY)$

а) существует метод относительного сжатия G , для которого

$$l_G(Y|X, n) \leq nH(Y|X) + c \log n;$$

б) для любого метода относительного сжатия G доля пар $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in K_n(XY)$ с $l_G(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \leq nH(Y|X) - c \log n$ стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$.

Из предшествующих утверждений и правила сложения энтропий получаем следующий факт.

Утверждение 3. Существует константа c (зависящая от мощностей алфавитов A и B) такая, что для любого произведения опытов XY существуют метод F сжатия для класса $K_n(X)$ и метод G относительного сжатия для $K_n(XY)$ такие, что для любого метода J сжатия пар из $K_n(XY)$

а) выполнено $l_F(X, n) + l_G(Y|X, n) \leq l_J(XY, n) + c \log n$;

б) доля пар $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in K_n(XY)$, для которых $l_J(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq l_F(\mathbf{x}) + l_G(\mathbf{y}|\mathbf{x}) - c \log n$, стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$.

Этот факт позволяет интерпретировать правило сложения энтропий в терминах последовательного сжатия. А именно, можно так осуществить сжатие последовательностей \mathbf{x} (независимо от \mathbf{y}), а затем \mathbf{y} относительно \mathbf{x} , чтобы суммарная характеристика сжатия была не хуже (с точностью до $O(\log n)$) наилучшей характеристики, достижимой при совместном сжатии \mathbf{x} и \mathbf{y} . Заметим, что пара $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, возникающая при последовательном сжатии, может быть представлена одним двоичным набором длины $l(\tilde{\alpha}) + l(\tilde{\beta}) + O(\log n)$. Поскольку рассуждения ведутся с точностью $O(\log n)$, это делает корректным предыдущее сравнение суммы длин $l_F(\mathbf{x}) + l_G(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ с длиной $l_J(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ одной последовательности.

(Среднее) количество информации $I(X, Y)$ в опыте X об опыте Y измеряется величиной

$$I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X).$$

При рассмотрении частично определенных данных также будем исходить из этого выражения, и вопрос о мере информации для них сведется к определению для частично определенных данных понятий энтропии и условной энтропии. При введении и исследовании этих понятий будем основываться на интерпретации энтропии и условной энтропии в терминах сжатия и относительного сжатия, а правила сложения энтропий — в терминах последовательного сжатия.

3. Энтропия недоопределенных данных

Пусть задан алфавит $A_0 = \{a_0, a_1, \dots, a_{m-1}\}$ основных символов. Положим $M = \{0, 1, \dots, m-1\}$. Пусть каждому непустому $T \subseteq M$ сопоставим символ a_T . Алфавит символов $a_T, T \subseteq M$, которые будем называть *недоопределенными*, обозначим через A . Мы не отличаем одноэлементные множества $\{i\}$ от элементов $i \in M$ и считаем $A_0 \subseteq A$.

Доопределением символа $a_T \in A$ назовем всякий основной символ $a_i, i \in T$, а *доопределением последовательности* $\mathbf{x} \in A^n$ — любую последовательность $\hat{\mathbf{x}} \in (A_0)^n$, полученную из \mathbf{x} заменой всех символов некоторыми доопределениями. Символ a_M , доопределимый любым основным символом, играет особую роль. Его будем называть *неопределенным* и обозначать $*$.

Будем говорить, что *символ* $a_{T'}$ *четче* a_T , если $T' \subseteq T$. *Частичным доопределением последовательности* $\mathbf{x} \in A^n$ назовем всякую последовательность $\mathbf{x}' \in A^n$, символы которой четче соответствующих символов из \mathbf{x} . При этом будем говорить, что *последовательность* \mathbf{x}' *четче* \mathbf{x} .

Пусть $X = (A, P), P = (p_T, T \subseteq M), \sum_T p_T = 1$ — случайный опыт с недоопределенными исходами $a_T \in A$, происходящими независимо с вероятностями $p_T \geq 0$. Будем называть его *недоопределенным опытом*. Преобразование *частичного доопределения* задается набором переходных вероятностей $p_{T'|T} = p(a_{T'}|a_T), T, T' \subseteq M, \sum_{T'} p_{T'|T} = 1$, в котором $p_{T'|T} > 0$ лишь если $T \supseteq T'$. Результатом его применения к опыту X является опыт $X' = (A, P')$, где $P' = (p'_{T'}, T' \subseteq M), p'_{T'} = \sum_T p_T p_{T'|T}$. Будем говорить, что *опыт* X' *четче* X , если он может быть получен из X некоторым преобразованием *частичного доопределения*. Частным случаем является преобразование доопределения (полного), когда положительными могут быть лишь переходные вероятности $p_{i|T} = p(a_i|a_T), i \in T$. Опыт \hat{X} , полученный из X некоторой операцией доопределения, будем называть *доопределением опыта* X . Для наборов вероятностей $P = (p_T, T \subseteq M), p_T \geq 0, \sum_T p_T = 1$, и $Q = (q_i, i \in M), q_i \geq 0, q_0 + \dots + q_{m-1} = 1$, введем функцию

$$\mathcal{H}(P, Q) = - \sum_{T \subseteq M} p_T \log \sum_{i \in T} q_i. \tag{4}$$

Энтропией недоопределенного опыта $X = (A, P)$ назовем величину

$$\mathcal{H}(X) = \mathcal{H}(P) = \min_Q \mathcal{H}(P, Q). \tag{5}$$

Легко убедиться, что для опытов $(A_0, P), P = (p_i, i \in M)$, с полностью определенными исходами величина $\mathcal{H}(P)$ совпадает с энтропией $H(P) = - \sum_{i \in M} p_i \log p_i$.

При вычислении энтропии полезен следующий факт [3].

Утверждение 4. Набор вероятностей Q минимизирует функцию $\mathcal{H}(P, Q)$ тогда и только тогда, когда при каждом $i, i \in M$, выполнено

$$\sum_{T: i \in T} \frac{p_T}{\sum_{j \in T} q_j} \leq 1, \quad (6)$$

где строгое неравенство может иметь место лишь при тех i , для которых $q_i = 0$.

В постановке задачи сжатия не полностью определенных данных требуется по коду недоопределенной последовательности восстановить какое-либо ее доопределение (но не саму последовательность). Величина $\mathcal{H}(X)$ характеризует сжимаемость последовательностей исходов опыта X : математическое ожидание длины кода на символ последовательности не меньше $\mathcal{H}(X)$ и может быть сделано сколь угодно близким к этой величине [3].

В детерминированной постановке задачи сжатия недоопределенных данных рассматривается класс $\mathcal{K}_n(X)$ всех последовательностей $\mathbf{x} \in A^n$, в которых символы a_T встречаются np_T раз. Обозначим через $N_n(X)$ наименьшее число последовательностей длины n в алфавите A_0 , среди которых имеются доопределения всех последовательностей класса $\mathcal{K}_n(X)$. Величину $\log N_n(X)$ будем называть комбинаторной энтропией класса $\mathcal{K}_n(X)$. Имеет место следующий факт [3].

Утверждение 5. Существует константа $c = c(m)$ такая, что

$$n\mathcal{H}(X) - c \log n \leq \log N_n(X) \leq n\mathcal{H}(X) + c \log n.$$

Под методом сжатия F для класса $\mathcal{K}_n(X)$ будем понимать пару алгоритмов (φ_F, ψ_F) . Алгоритм φ_F по недоопределенной последовательности $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_n(X)$ выдает двоичное слово $\varphi_F(\mathbf{x}) = \tilde{\alpha}$ (программу), а алгоритм ψ_F по программе $\tilde{\alpha}$ находит некоторое доопределение $\hat{\mathbf{x}} = \psi(\tilde{\alpha})$ последовательности \mathbf{x} . Длину $l(\tilde{\alpha})$ программы обозначим через $l_F(\mathbf{x})$ и метод сжатия будем характеризовать функцией $l_F(X, n) = \max\{l_F(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{K}_n(X)\}$.

Используя утверждение 5 и мощные соображения, можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 6. Существует константа $c = c(m)$ такая, что для класса $\mathcal{K}_n(X)$

- а) существует метод сжатия F с $l_F(X, n) \leq n\mathcal{H}(X) + c \log n$;
- б) при любом методе сжатия F доля последовательностей $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_n(X)$ таких, что $l_F(\mathbf{x}) \leq n\mathcal{H}(X) - c \log n$, стремится к 0 с ростом n .

Таким образом, в задаче сжатия недоопределенных данных энтропия $\mathcal{H}(X)$ играет ту же роль, какую играет $H(X)$ при сжатии всюду определенных данных.

4. Условная энтропия недоопределенных данных относительно всюду определенных

Пусть задано произведение XY недоопределенных опытов X и Y с множествами исходов $A = \{a_T, T \subseteq M\}$ и $B = \{b_U, U \subseteq L\}$, $L = \{0, 1, \dots, l-1\}$, и пусть $P_{XY} = (p_{TU}, T \subseteq M, U \subseteq L)$ — распределение пар (a_T, b_U) в XY . Для XY определение (4)–(5) энтропии приобретает вид

$$\mathcal{H}(XY) = \mathcal{H}(P_{XY}) = \min_{Q=(q_{ij}, i \in M, j \in L)} \left\{ - \sum_{T \subseteq M, U \subseteq L} p_{TU} \log \sum_{i \in T, j \in U} q_{ij} \right\},$$

где минимум берется по наборам Q с $q_{ij} \geq 0$, $\sum_{i,j} q_{ij} = 1$.

Для детерминированной интерпретации будем использовать класс $\mathcal{K}_n(XY)$ пар (\mathbf{x}, \mathbf{y}) недоопределенных последовательностей

$$\mathbf{x} = a_{T_1} \dots a_{T_n}, \quad \mathbf{y} = b_{U_1} \dots b_{U_n},$$

в которых среди (a_{T_i}, b_{U_i}) , $1 \leq i \leq n$, пара (a_T, b_U) встречается np_{TU} раз. Будем рассматривать также класс $\mathcal{K}_n(X)$ последовательностей $\mathbf{x} \in A^n$ с np_T символами a_T , где $p_T = \sum_U p_{TU}$.

При распространении статистического подхода на недоопределенные опыты естественно по аналогии с (3) ввести условную энтропию $\mathcal{H}(Y|X)$ равенством $\mathcal{H}(Y|X) = \mathcal{H}(XY) - \mathcal{H}(X)$. При этом правило сложения энтропий

$$\mathcal{H}(XY) = \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y|X) \tag{7}$$

будет выполнено по определению. Детерминированный подход основывается на интерпретации условной энтропии в терминах относительного сжатия (подобно утверждению 2). Если для заданных X и Y эти два подхода совместимы, т.е. удастся ввести условную энтропию $\mathcal{H}(Y|X)$ так, чтобы она удовлетворяла правилу сложения энтропий и характеризовала относительное сжатие, эту величину будем считать *вполне обоснованной*.

Вначале рассмотрим случай, когда опыт X полностью определен (Y недоопределен), т.е. когда $P_{XY} = (p_{iU}, i \in M, U \subseteq L)$. Имеем $p_i = p(a_i) = \sum_U p_{iU}$. Если $p_i > 0$, находим условные вероятности $p_{U|i} = p(b_U|a_i) = p_{iU}/p_i$, полагаем $P_{Y|i} = (p_{U|i}, U \in \mathcal{L})$ и аналогично (4)–(5) вводим *энтропию опыта Y при условии исхода a_i* равенством

$$\mathcal{H}(Y|i) = \mathcal{H}(P_{Y|i}) = \min_{Q^{(i)}} \left\{ - \sum_{U \subseteq L} p_{U|i} \log \sum_{j \in U} q_j^{(i)} \right\},$$

где $Q^{(i)} = (q_j^{(i)}, j \in L)$, $q_j^{(i)} \geq 0$, $\sum_j q_j^{(i)} = 1$ (при $p_i = 0$ величину $\mathcal{H}(Y|i)$ не определяем).

Условную энтропию $\mathcal{H}(Y|X)$ вводим как в (2)

$$\mathcal{H}(Y|X) = \sum_{i \in M} p_i \mathcal{H}(Y|i). \tag{8}$$

Из результатов работы [5] вытекает утверждение.

Утверждение 7. *Если X — опыт с полностью определенными исходами и условная энтропия $\mathcal{H}(Y|X)$ введена указанным способом, то справедливо правило сложения энтропий (7).*

Рассмотрим теперь детерминированную интерпретацию введенного понятия условной энтропии. В случае полностью определенного опыта X последовательности \mathbf{x} в парах $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{K}_n(XY)$ также полностью определены. Метод относительного сжатия G определяется как раньше с тем отличием, что по программе $\tilde{\beta}$ и по \mathbf{x} должно быть восстановлено некоторое доопределение $\hat{\mathbf{y}}$ последовательности \mathbf{y} , а не сама последовательность. Аналогично предыдущему вводятся характеристики $l_G(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = l(\tilde{\beta})$ и $l_G(Y|X, n)$.

Следующее утверждение, вытекающее из [5], позволяет интерпретировать условную энтропию в рассматриваемом случае в терминах относительного сжатия.

Утверждение 8. Если опыт X полностью определен, то существует константа c (зависящая лишь от мощностей алфавитов A и B) такая, что для класса $\mathcal{K}_n(XY)$

а) существует метод относительного сжатия G , для которого

$$l_G(Y|X, n) \leq n\mathcal{H}(Y|X) + c \log n;$$

б) для любого метода относительного сжатия G доля пар $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{K}_n(XY)$ с $l_G(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \leq n\mathcal{H}(Y|X) - c \log n$ стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$.

Этот факт и правило сложения энтропий подобно утверждению 3 означают, что для пар $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{K}_n(XY)$ при последовательном сжатии, когда вначале кодируются последовательности \mathbf{x} , а затем \mathbf{y} относительно \mathbf{x} и на каждом шаге используется кодирование с наилучшей (до слагаемого $O(\log n)$) оценкой, достижима та же суммарная оценка, что и при наилучшем совместном сжатии пар (\mathbf{x}, \mathbf{y}) .

Из сказанного видно, что введенное для случая всюду определенного опыта X понятие условной энтропии $\mathcal{H}(Y|X)$ является вполне обоснованным. Оно будет служить базой для определения условной энтропии в более общих ситуациях.

5. Другие вполне обоснованные случаи условной энтропии

Если опыт X , участвующий в произведении XY , недоопределен, применим к X некоторое преобразование доопределения. Напомним, что оно задается набором переходных вероятностей $p_{i|T}$, $i \in M$, $T \subseteq M$, $\sum_i p_{i|T} = 1$, в котором $p_{i|T} > 0$ лишь если $i \in T$. Результатом его применения к X является полностью определенный опыт $\hat{X} = (A_0, Q)$, $Q = (q_i, i \in M)$, $q_i = \sum_T p_{Ti} p_{i|T}$. При этом XY переходит в произведение $\hat{X}Y$, в котором пары (a_i, b_U) имеют вероятность $\hat{p}_{iU} = \sum_T p_{TU} p_{i|T}$, где p_{TU} — компоненты набора P_{XY} . Поскольку опыт \hat{X} полностью определен, можно вычислить условную энтропию $\mathcal{H}(Y|\hat{X})$. В общем случае она зависит от использованного доопределения.

Выделим содержательно важный случай, когда такой зависимости нет. Будем говорить, что символ a_T конкретней b_U , если a_T является основным (т.е. принадлежит A_0) либо b_U является неопределенным (т.е. совпадает с $*$ = b_L), и что опыт X конкретней Y , если $p_{TU} > 0$ лишь когда a_T конкретней b_U (здесь p_{TU} — компонента набора P_{XY}). В частности, полностью определенный опыт X конкретней (не строго) любого опыта Y . Имеет место следующий факт.

Утверждение 9. Если опыт X конкретней Y , то величина $\mathcal{H}(Y|\hat{X})$ не зависит от выбора доопределения \hat{X} опыта X .

Доказательство. Пусть X конкретней Y . Учитывая лишь компоненты p_{iU} набора P_{XY} , соответствующие одноэлементным множествам $T = \{i\}$, введем $p_{U|i}$, $P_{Y|i}$, $\mathcal{H}(Y|i)$ и $\mathcal{H}(Y|X)$ теми же выражениями, что и для опыта X с полностью определенными исходами. Отметим, что в этом случае $\mathcal{H}(Y|X)$ не будет математическим ожиданием величин $\mathcal{H}(Y|i)$, поскольку $\sum_i p_i$, вообще говоря, меньше 1. Покажем, что при любом способе доопределения опыта X до \hat{X} имеет место равенство

$$\mathcal{H}(Y|\hat{X}) = \mathcal{H}(Y|X).$$

Этим утверждение будет доказано.

Пусть $P_{XY} = (p_{TU}, T \subseteq M, U \subseteq L)$ и $Q_{\hat{X}Y} = (q_{iU}, i \in M, U \subseteq L)$ — совместные распределения для произведений XY и $\hat{X}Y$, и пусть $p_i = \sum_U p_{iU}$, $q_i = \sum_U q_{iU}$. Положим $p_{U|i} = p_{iU}/p_i$, $q_{U|i} = q_{iU}/q_i$, $P_{U|i} = (p_{U|i}, U \subseteq L)$, $Q_{U|i} = (q_{U|i}, U \subseteq L)$. Поскольку X конкретней Y , то $q_{iU} = p_{iU}$ при $U \neq L$ и $q_{iL} = p_{iL} + q_i - p_i$. С учетом этого, введя обозначение $r_i = 1 - \frac{p_i}{q_i}$, получаем $p_{U|i} = \frac{q_{U|i}}{1 - r_i}$ при $U \neq L$ и $p_{L|i} = \frac{q_{L|i} - r_i}{1 - r_i}$. По свойству функции \mathcal{H} (см. лемму 3 из [5]) имеет место $\mathcal{H}(Q_{Y|i}) = (1 - r_i)\mathcal{H}(P_{Y|i})$. Это эквивалентно соотношению $q_i\mathcal{H}(Q_{Y|i}) = p_i\mathcal{H}(P_{Y|i})$, суммированием которого по i с учетом (8) получаем требуемое равенство $\mathcal{H}(Y|\hat{X}) = \mathcal{H}(Y|X)$. Утверждение доказано.

Поскольку в рассматриваемом случае величина $\mathcal{H}(Y|\hat{X})$ не зависит от доопределения \hat{X} , под условной энтропией $\mathcal{H}(Y|X)$ будем понимать $\mathcal{H}(Y|\hat{X})$ при произвольном \hat{X} . Явное выражение для $\mathcal{H}(Y|X)$ через параметры произведения XY исходных опытов указано при доказательстве утверждения.

В [5] установлено следующее.

Утверждение 10. Если X конкретней Y и условная энтропия $\mathcal{H}(Y|X)$ введена указанным образом, то выполнено правило сложения энтропий.

Перейдем к детерминированной интерпретации. Пусть задано произведение XY произвольных недоопределенных опытов и пусть $\mathcal{K}_n(XY)$ — соответствующий класс пар (\mathbf{x}, \mathbf{y}) . Последовательности \mathbf{x} , входящие в эти пары, образуют класс $\mathcal{K}_n(X)$. Пусть задан способ F доопределения последовательностей $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_n(X)$. Под методом относительного сжатия G для класса $\mathcal{K}_n(XY)$ при способе доопределения F будем понимать пару алгоритмов (φ_G, ψ_G) , первый из которых для произвольной пары $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{K}_n(XY)$ выдает по \mathbf{y} и доопределению $\hat{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ двоичное слово $\varphi_G(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{x}}) = \tilde{\beta}$ (программу вычисления \mathbf{y} относительно $\hat{\mathbf{x}}$), а второй по программе $\tilde{\beta}$ и доопределению $\hat{\mathbf{x}}$ находит некоторое доопределение $\psi_G(\tilde{\beta}, \hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{y}}$ последовательности \mathbf{y} . Длину $l(\tilde{\beta})$ программы обозначим через $l_{G|F}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ и метод относительного сжатия будем характеризовать функцией $l_{G|F}(Y|X, n) = \max\{l_{G|F}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{K}_n(XY)\}$.

В случае, когда метод G не зависит от способа доопределения, будем использовать обозначения $l_G(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ и $l_G(Y|X, n)$.

Пусть $\mathbf{x} = a_{T_1} \dots a_{T_n} \in A^n$ и $\mathbf{y} = b_{U_1} \dots b_{U_n} \in B^n$ — недоопределенные последовательности. Будем говорить, что последовательность \mathbf{x} конкретней \mathbf{y} , если при каждом i , $1 \leq i \leq n$, символ a_{T_i} конкретней b_{U_i} . Ясно, что если опыт X конкретней Y и $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{K}_n(XY)$, то \mathbf{x} конкретней \mathbf{y} . Из результатов [5] вытекает следующий факт.

Утверждение 11. Если X конкретней Y , то существует константа c (зависящая лишь от мощности алфавитов A и B) такая, что для класса $\mathcal{K}_n(XY)$

а) существует способ относительного сжатия G (не зависящий от способа доопределения F последовательностей из $\mathcal{K}_n(X)$), обеспечивающий оценку $l_G(Y|X, n) \leq n\mathcal{H}(Y|X) + c \log n$;

б) при любом способе доопределения F и любом способе относительного сжатия G при доопределении F доля пар $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{K}_n(XY)$, для которых $l_{G|F}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \leq n\mathcal{H}(Y|X) - c \log n$, стремится к 0 с ростом n .

Тот факт, что способ относительного сжатия из пункта (а) не зависит от способа доопределения, означает, что соответствующая программа $\tilde{\beta}$ применима к любым доопределениям $\hat{\mathbf{x}}$ последовательности \mathbf{x} . При использовании различных $\hat{\mathbf{x}}$ могут возникать различные доопределения $\hat{\mathbf{y}}$ последовательности \mathbf{y} . Из правила сложения энтропий вытекает, что последовательное сжатие пар (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , когда вначале кодируются последовательности \mathbf{x} , а затем \mathbf{y} относительно полученных доопределений $\hat{\mathbf{x}}$, и на каждом шаге используется кодирование с наилучшей оценкой, приводит к наилучшим совместным характеристикам сжатия пар (\mathbf{x}, \mathbf{y}) (всюду “наилучшая” понимается с точностью до слагаемого $O(\log n)$).

Таким образом, если опыт X конкретней Y , величина $\mathcal{H}(Y|X)$ обладает основными свойствами, связываемыми с понятием условной энтропии, т. е. является вполне обоснованной.

С использованием информационно эквивалентных преобразований нечетких данных, изученных в [7], эти результаты могут быть распространены на более общий случай. Пусть X и X' — недоопределенные опыты и опыт X' четче X (может быть получен из X частичным доопределением). Будем говорить, что опыт X' *адекватен* X , если для любого недоопределенного опыта Y выполнено $\mathcal{H}(X'Y) = \mathcal{H}(XY)$. В [7] найдено полное описание всех опытов, адекватных заданному. Адекватный опыт назовем *максимально четким*, если не существует строго более четкого адекватного опыта. Один из способов частичного доопределения дает операция *исключения символа (исхода)*. Она применима к исходу a_i опыта $X = (A, P)$ в случае $p_i = 0$ и производит детерминированную замену символов a_T на $a_{T \setminus \{i\}}$. Результатом является опыт $X' = (A', P')$, $A' = \{a_{T'}, T' \subseteq M \setminus \{i\}\}$, $p'_{T'} = p_{T'} + p_{T' \cup \{i\}}$. Будем говорить, что символ a_i *мажорирует* в X символ a_j , $i, j \in M$, если для любого $T \subseteq M$ с $p_T > 0$ из $j \in T$ следует $i \in T$. В [7] установлен следующий результат.

Утверждение 12. Для любого недоопределенного опыта X существует единственный (с точностью до обозначения символов) максимально четкий адекватный опыт. Он может быть получен из X исключением в произвольном порядке всех мажорируемых символов.

В качестве простого примера рассмотрим недоопределенный опыт X , в котором ненулевые вероятности имеют лишь исходы a_1 , a_{23} и a_{01} . Здесь символ a_1 мажорирует a_0 , а символы a_2 и a_3 мажорируют друг друга. Устранив мажорируемые символы a_0 и, например, a_3 , получим полностью определенный опыт, адекватный опыту X . В нем исходы a_1 и a_2 имеют вероятности $p_1 + p_{01}$ и p_{23} .

Будем говорить, что опыт X *слабо конкретней* Y , если построенный по X максимально четкий адекватный опыт X' конкретней Y . В этом случае введем условную энтропию равенством $\mathcal{H}(Y|X) = \mathcal{H}(Y|X')$ (поскольку X' конкретней Y , правая часть определена).

Утверждения 10 и 11 в том же самом виде переносятся на более общий случай, когда опыт X слабо конкретней Y [5]. Поэтому введенное для этого случая понятие условной энтропии также вполне обосновано.

Величина условной энтропии здесь совпадает с $\mathcal{H}(Y|\hat{X})$, где \hat{X} — полностью определенный опыт, полученный произвольным доопределением опыта, образованного из X последовательным удалением мажорируемых символов. Полностью исключить зависимость от доопределения здесь нельзя. Рассмотрим пример.

Пусть в произведении XY опытов с недоопределенными исходами $\{0, 1, *\}$ пары $(0, 0)$ и $(*, 1)$ порождаются с ненулевыми вероятностями p_{00} и p_{*1} , а вероятности остальных пар равны 0. Если доопределить все $*$ символом 0,

получим опыт \hat{X}' с единственным исходом 0. Для него $\mathcal{H}(\hat{X}') = 0$, $\mathcal{H}(Y|\hat{X}') = \mathcal{H}(Y)$. Если же доопределить * символом 1, получим опыт \hat{X}'' , совпадающий с Y . Тогда $\mathcal{H}(\hat{X}'') = \mathcal{H}(Y)$, $\mathcal{H}(Y|\hat{X}'') = \mathcal{H}(Y|Y) = 0$. При этом $\mathcal{H}(\hat{X}') + \mathcal{H}(Y|\hat{X}') = \mathcal{H}(\hat{X}'') + \mathcal{H}(Y|\hat{X}'') = \mathcal{H}(XY)$. Максимально четким опытом, адекватным X , является тождественно нулевой опыт \hat{X}' , поэтому опыт X слабо конкретней Y и в соответствии с определением следует положить $\mathcal{H}(Y|X) = \mathcal{H}(Y|\hat{X}')$. Отметим на будущее, что в качестве доопределения \hat{X} , использованного для вычисления условной энтропии, здесь выбрано “наиболее простое”.

6. Обобщенное правило сложения энтропий

Если X конкретней Y , то удастся ввести условную энтропию $\mathcal{H}(Y|X)$, не зависящую от способа доопределения опыта X . Как показывает предшествующий пример, в общем случае имеется зависимость от доопределения и существует возможность понижения условной энтропии $\mathcal{H}(Y|\hat{X})$ за счет “ухудшения” доопределения \hat{X} . Будем исходить из тезиса, что при вычислении условной энтропии следует использовать “наилучшее” доопределение опыта X . Это согласуется с принятой нами интерпретацией правила сложения энтропий (7) в терминах последовательного сжатия. Слагаемое $\mathcal{H}(X)$ в (7) характеризует наилучшее доопределение опыта X , а слагаемое $\mathcal{H}(Y|X)$ — наилучшее доопределение опыта Y относительно выбранного (наилучшего) доопределения опыта X .

Чтобы сделать этот тезис более конструктивным, рассмотрим задачу последовательного сжатия недоопределенных последовательностей в детерминированной постановке. Пусть задано произведение XY недоопределенных опытов и пусть $\mathcal{K}_n(XY)$ и $\mathcal{K}_n(X)$ — классы последовательностей, соответствующие опытам XY и X . Будем рассматривать последовательное сжатие пар $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{K}_n(XY)$, когда вначале некоторым методом F для класса $\mathcal{K}_n(X)$ сжимается последовательность \mathbf{x} , а затем с использованием полученного доопределения $\hat{\mathbf{x}}$ осуществляется сжатие последовательности \mathbf{y} .

С последовательностью $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_n(X)$ свяжем ее доопределение $\hat{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$, возникающее при способе сжатия F , т.е. $\hat{\mathbf{x}} = \psi_F(\varphi_F(\mathbf{x}))$. Обозначим через $Q_F(\mathbf{x})$ набор частот (q_0, \dots, q_{m-1}) символов в доопределении $\hat{\mathbf{x}}$. С помощью рассуждений из работы [8] может быть доказан следующий факт.

Утверждение 13. *Если Q_0 — произвольная точка минимума функции $\mathcal{H}(P_X, Q)$, то существует способ сжатия F последовательностей класса $\mathcal{K}_n(X)$ такой, что $Q_F(\mathbf{x}) = Q_0$ для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_n(X)$ и*

$$l_F(X, n) \leq n\mathcal{H}(X) + c \log n,$$

где $c = c(m)$ — константа (чтобы не отвлекаться на округления, компоненты набора nQ_0 рассматриваем как целые).

Будем измерять расстояние между наборами

$$Q = (q_0, \dots, q_{m-1}) \quad \text{и} \quad Q' = (q'_0, \dots, q'_{m-1})$$

в равномерной метрике: $d(Q, Q') = \max_i |q_i - q'_i|$. Метод сжатия F для $\mathcal{K}_n(X)$ будем называть *асимптотически наилучшим*, если $l_F(X, n) \sim n\mathcal{H}(X)$. В [8] доказано следующее утверждение.

Утверждение 14. Если $\mathcal{H}(P_X, Q)$ как функция от Q имеет единственную точку минимума Q_0 и F — асимптотически наилучший метод сжатия для класса $\mathcal{K}_n(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ доля последовательностей \mathbf{x} класса $\mathcal{K}_n(X)$, для которых $d(Q_F(\mathbf{x}), Q_0) \geq \varepsilon$, стремится к 0 с ростом n .

Будем рассматривать невырожденный случай, когда у $\mathcal{H}(P_X, Q)$ имеется единственная точка минимума Q_0 . Достаточным для этого является условие, чтобы матрица, строками которой служат характеристические векторы множеств T с $p_T > 0$ и строка из единиц, имела ранг m (число самих строк может быть экспоненциальным по m). Из приведенных утверждений следует, что в невырожденном случае при всяком асимптотически наилучшем методе сжатия почти все доопределения имеют почти одинаковый частотный состав букв, близкий к Q_0 , и существует асимптотически наилучший метод сжатия, при котором набор частот букв во всех доопределениях совпадает с Q_0 . В соответствии с принятым тезисом будем считать, что при вычислении условной энтропии $\mathcal{H}(Y|\hat{X})$ следует использовать доопределение $\hat{X} = (A_0, Q_0)$, где Q_0 — точка минимума функции $\mathcal{H}(P_X, Q)$.

Будем говорить, что набор $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_{m-1})$ совместим с классом $\mathcal{K}_n(X)$, если для каждого $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_n(X)$ существует доопределение, в котором символ a_i , $0 \leq i \leq m-1$, присутствует s_i раз. Доопределение $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ пары (\mathbf{x}, \mathbf{y}) назовем \mathbf{s} -ограниченным, если параметры доопределения $\hat{\mathbf{x}}$ совпадают с \mathbf{s} . Обозначим через $N_n(XY)_{\mathbf{s}}$ минимальную мощность множества, содержащего для каждой пары (\mathbf{x}, \mathbf{y}) из $\mathcal{K}_n(XY)$ \mathbf{s} -ограниченное доопределение. Величину $\log N_n(XY)_{\mathbf{s}}$ назовем \mathbf{s} -ограниченной комбинаторной энтропией класса $\mathcal{K}_n(XY)$.

Пусть $R = \|r_{TUij}\|$ — матрица, строки которой соответствуют парам множеств (T, U) , $T \subseteq M$, $U \subseteq L$, столбцы — парам (i, j) , $i \in M$, $j \in L$, и элементы матрицы удовлетворяют условиям $r_{TUij} \geq 0$, $r_{TUij} > 0 \Rightarrow (i \in T, j \in U)$, $\sum_{T,U,i,j} r_{TUij} = 1$. Положим

$$\mathcal{I}(R) = \sum_{T,U,i,j} r_{TUij} \log \frac{r_{TUij}}{\sum_{T,U} r_{TUij} \sum_{i,j} r_{TUij}}.$$

Будем говорить, что матрица R согласована с XY при ограничении

$$Q = (q_i, i \in M), \quad q_i \geq 0, \quad \sum_i q_i = 1,$$

если $\sum_{i,j} r_{TUij} = p_{TU}$, $\sum_{T,U,j} r_{TUij} = q_i$, где p_{TU} ($T \subseteq M$, $U \subseteq L$) — компоненты набора P_{XY} . В этом случае также будем использовать запись

$$\mathcal{I}(R) = \sum_{T,U,i,j} r_{TUij} \log \frac{r_{TUij}}{p_{TU} q_{ij}}, \quad (9)$$

где $q_{ij} = \sum_{T,U} r_{TUij}$, $\sum_j q_{ij} = q_i$. Обозначим через $\mathcal{H}(XY)_Q$ минимум величин $\mathcal{I}(R)$ по всем матрицам R , согласованным с XY при ограничении Q . Имеет место следующий факт [8].

Утверждение 15. Существует константа c (зависящая от мощностей множеств M и L) такая, что

$$n\mathcal{H}(XY)_{\mathbf{s}/n} - c \log n \leq \log N_n(XY)_{\mathbf{s}} \leq n\mathcal{H}(XY)_{\mathbf{s}/n} + c \log n.$$

На основе этого утверждения [8] доказано утверждение.

Утверждение 16. Если Q_0 — единственная точка минимума функции $\mathcal{H}(P_X, Q)$, F — асимптотически наилучший метод сжатия для класса $\mathcal{K}_n(X)$ и G — произвольный метод относительного сжатия для класса $\mathcal{K}_n(XY)$ при способе доопределения, возникающем при сжатии методом F , то для любого $\varepsilon > 0$ доля пар (\mathbf{x}, \mathbf{y}) из $\mathcal{K}_n(XY)$, для которых

$$l_F(\mathbf{x}) + l_{G|F}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \leq (1 - \varepsilon)n\mathcal{H}(XY)_{Q_0},$$

стремится к 0 с ростом n .

Это дает асимптотическое неравенство $l_F(n, X) + l_{G|F}(n, Y|X) \gtrsim n\mathcal{H}(XY)_{Q_0}$, из которого в силу утверждений 6 и 8 получаем

Утверждение 17. Если условная энтропия $\mathcal{H}(Y|X)$ введена с использованием доопределения $\tilde{X} = (A_0, Q_0)$, т.е. $\mathcal{H}(Y|X) = \mathcal{H}(Y|\tilde{X})$, то имеет место неравенство

$$\mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y|X) \geq \mathcal{H}(XY)_{Q_0}. \quad (10)$$

Пусть $Q = (q_i, i \in M)$ и $\tilde{Q} = (q_{ij}, i \in M, j \in L)$ — наборы вероятностей. Скажем, что набор \tilde{Q} согласован с Q , если $\sum_{j \in L} q_{ij} = q_i, i \in M$. В [8] установлен следующий факт.

Утверждение 18. Если Q_0 — единственная точка минимума функции $\mathcal{H}(P_X, Q)$ и среди точек минимума функции $\mathcal{H}(P_{XY}, \tilde{Q})$ нет согласованных с Q_0 , то имеет место строгое неравенство $\mathcal{H}(XY)_{Q_0} > \mathcal{H}(XY)$.

По-видимому, ситуация несогласованности является типичной (в [9] этот факт проанализирован и доказан для двоичного случая $M = L = \{0, 1\}$). Поэтому вместо правила сложения энтропий (7) можно рассчитывать лишь на выполнение равенства

$$\mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y|X) = \mathcal{H}(XY)_{Q_0},$$

которое будем называть *обобщенным правилом сложения энтропий*. В случае, когда правило сложения энтропий выполнимо, обобщенное правило переходит в него.

Для недоопределенных опытов X и Y обычным образом определим *количество информации* $\mathcal{I}(X, Y)$ в X об Y , положив

$$\mathcal{I}(X, Y) = \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(Y|X).$$

Из приведенных выше соотношений вытекает неравенство

$$\mathcal{I}(X, Y) \leq \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(XY),$$

которое может оказаться строгим. Напомним, что в теории информации справедливо равенство $I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(XY)$, из которого следует свойство симметрии $I(X, Y) = I(Y, X)$. Если в случае недоопределенных опытов выполнено правило сложения энтропий (7) (например, если X конкретной Y), то также возникает равенство $\mathcal{I}(X, Y) = \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(XY)$, но из его симметричного вида не следует симметрия информации. Оно обеспечивает лишь неравенство $\mathcal{I}(X, Y) \geq \mathcal{I}(Y, X)$, которое может оказаться строгим (см. пример из следующего раздела).

7. Пример анализа информационных свойств

Для вычисления условной энтропии $\mathcal{H}(Y|\hat{X})$ при заданном совместном распределении P_{XY} недостаточно вероятностных характеристик Q_0 доопределения \hat{X} , необходимо знать совместное распределение $P_{\hat{X}Y}$ для произведения $\hat{X}Y$. Вопрос нахождения этого распределения требует дополнительного исследования и его отложим на последующее. Рассмотрим пример, в котором введенных понятий и результатов достаточно для анализа информационных свойств — нахождения в явном виде энтропии, условной энтропии и меры информации, полного исследования ситуации, связанной с правилом сложения энтропий, обобщенным правилом и свойством симметрии информации.

Пусть $A_0 = \{a_i, i \in M\}$, $A = A_0 \cup \{*\}$, $B = B_0 = \{b_j, j \in L\}$, и пусть произведение XY опытов $X = (A, P)$ и $Y = (B, P')$ задано совместным распределением P_{XY} , в котором отличными от 0 являются лишь вероятности p_{ij} и p_{*0} . Здесь и дальше считаем $i \in M$, $j \in L$, $v \in L \setminus \{0\}$. Компонентами наборов P и P' являются $p_i = \sum_j p_{ij}$, $p_* = p_{*0}$ и, соответственно, $p'_v = \sum_i p_{iv}$, $p'_0 = \sum_i p_{i0} + p_*$. Все приводимые в данном разделе утверждения относятся к рассматриваемой паре опытов.

Вычислим энтропию $\mathcal{H}(X)$ и $\mathcal{H}(Y)$. С помощью утверждения 4 можно проверить, что минимум функции $\mathcal{H}(P_X, Q)$ достигается на единственном наборе

$$Q_0 = (q_i, i \in M), \quad q_i = \frac{p_i}{1 - p_*}. \quad (11)$$

Его подстановка в $\mathcal{H}(P_X, Q)$ дает

$$\mathcal{H}(X) = (1 - p_*) \log(1 - p_*) - \sum_i p_i \log p_i. \quad (12)$$

Для полностью определенного опыта Y

$$\mathcal{H}(Y) = - \sum_j p'_j \log p'_j. \quad (13)$$

Утверждение 19.

$$\mathcal{H}(XY) = - \sum_{i,j} p_{ij} \log p_{ij} - p'_0 \log p'_0 + (p'_0 - p_*) \log(p'_0 - p_*). \quad (14)$$

Доказательство. Соотношения (4) для точки $\hat{Q} = (\hat{q}_{ij})$ минимума функции

$$\mathcal{H}(P_{XY}, Q) = - \sum_{i,j} p_{ij} \log q_{ij} - p_* \log \sum_i q_{i0} \quad (15)$$

приобретают вид

$$\frac{p_{i0}}{\hat{q}_{i0}} + \frac{p_*}{\sum_{i'} \hat{q}_{i'0}} = 1, \quad \frac{p_{iv}}{\hat{q}_{iv}} = 1.$$

Из них видно, что отношение p_{i0}/\hat{q}_{i0} не зависит от i . Положив $p_{i0}/\hat{q}_{i0} = \gamma$, получаем $\sum_i \hat{q}_{i0} = p_*/(1 - \gamma)$ и

$$p'_0 - p_* = \sum_i p_{i0} = \gamma \sum_i \hat{q}_{i0} = \frac{\gamma p_*}{1 - \gamma}.$$

Решив это уравнение относительно γ , находим $\gamma = \frac{p'_0 - p_*}{p'_0}$. Откуда $\hat{q}_{i0} = \frac{p_{i0}}{\gamma} = \frac{p_{i0}p'_0}{p'_0 - p_*}$ и $\sum_i \hat{q}_{i0} = \frac{p_*}{1 - \gamma} = p'_0$. Подстановка найденных значений в $\mathcal{H}(P_{XY}, \hat{Q})$ дает

$$\mathcal{H}(XY) = \mathcal{H}(P_{XY}, \hat{Q}) = - \sum_{i,v} p_{iv} \log p_{iv} - \sum_i p_{i0} \log \frac{p_{i0}p'_0}{p'_0 - p_*} - p_* \log p'_0.$$

С учетом равенства $\sum_i p_{i0} = p'_0 - p_*$ это выражение преобразуется к виду (14). Утверждение доказано.

Опыт Y полностью определен. Поэтому в силу утверждения 7 справедливо правило сложения энтропий

$$\mathcal{H}(Y) + \mathcal{H}(X|Y) = \mathcal{H}(XY). \tag{16}$$

Дадим его прямое доказательство для рассматриваемого случая.

Утверждение 20. *Имеет место правило сложения энтропий (16).*

Доказательство. Энтропия $\mathcal{H}(X|0)$ может быть выражена аналогично (12):

$$\mathcal{H}(X|0) = \left(1 - \frac{p_*}{p'_0}\right) \log \left(1 - \frac{p_*}{p'_0}\right) - \sum_i \frac{p_{i0}}{p'_0} \log \frac{p_{i0}}{p'_0}.$$

Принимая во внимание

$$\mathcal{H}(X|v) = \sum_i \frac{p_{iv}}{p'_v} \log \frac{p_{iv}}{p'_v},$$

находим

$$\mathcal{H}(X|Y) = (p'_0 - p_*) \log \frac{p'_0 - p_*}{p'_0} - \sum_{i,j} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p'_j}.$$

С учетом $\sum_i p_{i0} = p'_0 - p_*$ это выражение может быть преобразовано к виду

$$\mathcal{H}(X|Y) = - \sum_{i,j} p_{ij} \log p_{ij} + \sum_j p'_j \log p'_j - p'_0 \log p'_0 + (p'_0 - p_*) \log(p'_0 - p_*).$$

Отсюда, из (13) и (14) получаем (16). Утверждение доказано.

Опыт X недоопределен, поэтому вместо правила сложения энтропий (7) можно рассчитывать лишь на выполнимость обобщенного правила.

Утверждение 21. *Для рассматриваемых опытов X и Y справедливо обобщенное правило сложения энтропий*

$$\mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y|X) = \mathcal{H}(XY)_{Q_0}, \tag{17}$$

где Q_0 — точка минимума функции $\mathcal{H}(P_X, Q)$.

Доказательство. Компонентами точки минимума Q_0 являются

$$q_i = \frac{p_i}{(1 - p_*)}$$

(см. (11)). Обозначим через \hat{X} доопределение (A_0, Q_0) опыта X . В рассматриваемом случае совместное распределение $P_{\hat{X}Y} = (\hat{p}_{ij})$ находится однозначно: $\hat{p}_{iv} = p_{iv}$, $\hat{p}_{i0} = p_{i0} + (q_i - p_i) = p_{i0} + p_i p_*/(1 - p_*)$. Соответствующие условные вероятности $\hat{p}(j|i) = \hat{p}_{ij}/q_i$ приобретают вид

$$\hat{p}_{iv} = \frac{p_{iv}(1 - p_*)}{p_i}, \quad \hat{p}_{i0} = \frac{p_{i0} + p_*(p_i - p_{i0})}{p_i}.$$

Учитывая это, находим условную энтропию $\mathcal{H}(Y|X)$, равную по определению $\mathcal{H}(Y|\hat{X})$,

$$\mathcal{H}(Y|X) = - \sum_{i,v} p_{iv} \log \frac{p_{iv}(1 - p_*)}{p_i} - \sum_i \frac{p_{i0} + p_*(p_i - p_{i0})}{1 - p_*} \log \frac{p_{i0} + p_*(p_i - p_{i0})}{p_i}.$$

Суммируя это представление с (12), после преобразований получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y|X) &= - \sum_{i,v} p_{iv} \log p_{iv} + \left(\sum_i p_{i0} \right) \log(1 - p_*) + \\ &+ \sum_i \frac{p_* p_i}{1 - p_*} \log p_i - \sum_i \frac{p_{i0} + p_*(p_i - p_{i0})}{1 - p_*} \log(p_{i0} + p_*(p_i - p_{i0})). \end{aligned} \quad (18)$$

Существует единственная матрица R , согласованная с XY при ограничении Q_0 . Ее ненулевыми компонентами являются $r_{ij,ij} = p_{ij}$, $r_{*0,i0} = q_i - p_i = p_i p_*/(1 - p_*)$. Величины q_{ij} из (9) приобретают вид

$$q_{iv} = p_{iv}, \quad q_{i0} = p_{i0} + \frac{p_i p_*}{1 - p_*} = \frac{p_{i0} + p_*(p_i - p_{i0})}{1 - p_*}.$$

Подставив указанные значения в (9) и произведя сокращения, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X, Y)_{Q_0} = \mathcal{I}(R) &= \sum_{i,v} p_{iv} \log \frac{1}{p_{iv}} + \sum_i p_{i0} \log \frac{1 - p_*}{p_{i0} + p_*(p_i - p_{i0})} + \\ &+ \sum_i \frac{p_i p_*}{1 - p_*} \log \frac{p_i}{p_{i0} + p_*(p_i - p_{i0})}. \end{aligned} \quad (19)$$

Это выражение может быть преобразовано к виду (18). Утверждение доказано.

Следующее утверждение указывает условие на распределение P_{XY} , при выполнении которого справедливо правило сложения энтропий (7).

Утверждение 22. *Для того, чтобы имело место правило сложения энтропий, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\frac{p_{00}}{p_0} = \frac{p_{10}}{p_1} = \dots = \frac{p_{m-1,0}}{p_{m-1}}, \quad (20)$$

где $p_i = \sum_j p_{ij}$.

Доказательство. Пусть, как и раньше, $Q_0 = (q_i)$ и $\hat{Q} = (\hat{q}_{ij})$ — точки минимума функций $\mathcal{H}(P_X, Q)$ и $\mathcal{H}(P_{XY}, Q)$. Их компоненты выражаются в виде $q_i = \frac{p_i}{1-p_*}$ (11) и $\hat{q}_{iv} = p_{iv}$, $\hat{q}_{i0} = \frac{p_{i0}p'_0}{p'_0 - p_*}$ (см. доказательство утверждения 19). Согласно утверждению 18, необходимым условием выполнимости правила сложения энтропий являются равенства $\sum_j \hat{q}_{ij} = q_i$. В рассматриваемом случае

$$\sum_j \hat{q}_{ij} = \sum_v p_{iv} + \frac{p_{i0}p'_0}{p'_0 - p_*} = p_i - p_{i0} + \frac{p_{i0}p'_0}{p'_0 - p_*} = p_i + \frac{p_{i0}p_*}{p'_0 - p_*}$$

и равенства приобретают вид $p_i + \frac{p_{i0}p_*}{p'_0 - p_*} = \frac{p_i}{1-p_*}$. Из них следует, что отношение p_{i0}/p_i не зависит от i , т. е. имеет место (20).

Обратно, пусть выполнено (20). Из свойств отношений следует, что

$$\frac{p_{i0}}{p_i} = \frac{\sum_{i'} p_{i'0}}{\sum_{i'} p_{i'}} = \frac{p'_0 - p_*}{1 - p_*}.$$

Отсюда $p_{i0} = \frac{p_i(p'_0 - p_*)}{1 - p_*}$. Используя это, преобразуем \hat{q}_{i0}

$$\hat{q}_{i0} = \frac{p_{i0}p'_0}{p'_0 - p_*} = p_{i0} + \frac{p_{i0}p_*}{p'_0 - p_*} = p_{i0} + \frac{p_i p_*}{1 - p_*} = \frac{p_{i0} + p_*(p_i - p_{i0})}{1 - p_*}. \quad (21)$$

Кроме того, $\hat{q}_{i0} = \frac{p_{i0}p'_0}{p'_0 - p_*} = \frac{p_i p'_0}{1 - p_*}$ и, следовательно, отношение \hat{q}_{i0}/p_i не зависит от i . С учетом свойств отношений получаем

$$\frac{\hat{q}_{i0}}{\sum_{i'} \hat{q}_{i'0}} = \frac{p_i}{\sum_{i'} p_{i'}} = \frac{p_i}{1 - p_*}.$$

Это и (21) приводят к равенствам

$$\frac{p_i}{p_{i0} + p_*(p_i - p_{i0})} = \frac{1}{\sum_i \hat{q}_{i0}}. \quad (22)$$

Используя равенства $p_{iv} = \hat{q}_{iv}$, (21) и (22) выводим из (19)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(XY)_{Q_0} &= \sum_{i,v} p_{iv} \log \frac{1}{\hat{q}_{iv}} + \sum_i p_{i0} \log \frac{1}{\hat{q}_{i0}} + \sum_i \frac{p_i p_*}{1 - p_*} \log \frac{1}{\sum_{i'} \hat{q}_{i'0}} = \\ &= - \sum_{i,j} p_{ij} \log \hat{q}_{ij} - p_* \log \sum_i \hat{q}_{i0} = \mathcal{H}(P_{XY}, \hat{Q}) = \mathcal{H}(XY). \end{aligned}$$

Отсюда и из утверждения 21 следует доказываемый факт.

В заключение рассмотрим вопрос о симметрии информации.

Утверждение 23. *Свойство симметрии информации $\mathcal{I}(X, Y) = \mathcal{I}(Y, X)$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие (20). В остальных случаях справедливо строгое неравенство $\mathcal{I}(X, Y) < \mathcal{I}(Y, X)$.*

Доказательство. Из (17) и (13) вытекают соотношения

$$\mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y|X) = \mathcal{H}(XY)_{Q_0} \geq \mathcal{H}(XY) = \mathcal{H}(Y) + \mathcal{H}(X|Y),$$

из которых следует $\mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X|Y) \geq \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(Y|X)$, что эквивалентно неравенству $\mathcal{I}(Y, X) \geq \mathcal{I}(X, Y)$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда выполнено правило сложения энтропий (7), т. е. когда справедливо условие (20). Утверждение доказано.

Работа выполнена при финансовой поддержке Отделения нанотехнологий и информационных технологий РАН по программе фундаментальных исследований (проект № 1-1) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-07-89293).

Список литературы

1. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь.—М.: Советское радио, 1974.
2. Колмогоров А. Н. Алгоритм, информация, сложность.—М.: Знание, 1991.
3. Шоломов Л. А. Сжатие частично определенной информации // *Нелинейная динамика и управление*. Вып. 4.—М.: Физматлит, 2004.—С. 385–399.
4. Шоломов Л. А. Кодирование частично-определенных дискретных источников без памяти // *Доклады РАН*.—2004.—Т. 397, № 2.—С. 178–180.
5. Шоломов Л. А. О мере информации нечетких и частично-определенных данных // *Доклады АН*.—2006.—Т. 410, № 1.—С. 321–325.
6. Чисар И., Кернер Я. Теория информации: теоремы кодирования для дискретных систем без памяти.—М.: Мир, 1985.
7. Шоломов Л. А. Преобразование нечетких данных с сохранением информационных свойств // *Дискретный анализ и исследование операций*. Сер. 1.—2005.—Т. 12, № 3.—С. 85–104.
8. Шоломов Л. А. О сложности последовательной реализации частичных булевых функций схемами // *Дискретный анализ и исследование операций*. Сер. 1.—2007.—Т. 14, № 1.—С. 110–139.
9. Шоломов Л. А. Качественные условия оптимальности метода последовательной реализации // *Материалы IX Международного семинара “Дискретная математика и ее приложения”*, Москва, 2007.—М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2007.—С. 144–147.

ДВА ПОДХОДА К ПРОБЛЕМЕ ПОИСКА В WWW

В. С. Левченков, Л. Г. Левченкова

В работе исследуется связь проблем упорядочения и расширения множества страниц, релевантных запросу по ключевым словам. Предлагаются две концепции поиска: а) поиск на основе удаленной поисковой системы, работающей одновременно с большим числом пользователей и запросов; б) поиск на основе локальной программы, установленной на персональном компьютере пользователя и использующей удаленную поисковую систему как источник внешней информации при организации процесса поиска в диалоговом режиме.

1. Введение

Опыт поиска в обширных массивах информации — типа World Wide Web (WWW) — показывает, что использование только набора ключевых слов при поиске релевантных страниц приводит к ряду нежелательных эффектов. Например, целая совокупность страниц WWW, важная с точки зрения пользователя, вообще может не попасть в поле зрения поисковой системы, если набор ключевых слов для этих страниц по какой-то причине оказался неудачным. С другой стороны, в отобранном поисковой системой массиве находится много неинформативных страниц, которые к тому же зачастую оказываются в первых рядах этого массива.

В последнее время появилось много поисковых систем, которые преодолевают эти трудности, опираясь на естественную структуру связей, присутствующую в WWW и выражаемую матрицей цитирований одних страниц другими. Этот подход был реализован в поисковой системе Google (см. [1]) на основе введения специального числового критерия — Google PageRank, вычисляемого сразу для всех страниц WWW и дополняющего числовые оценки, получаемые на основе соответствия ключевых слов содержанию рассматриваемых страниц. Методика расчета значений PageRank опирается на технику нахождения левого собственного вектора стохастической матрицы, связанной с матрицей цитирований, и требует введения специального параметра (демпфирующего фактора), позволяющего сделать рассматриваемую матрицу неразложимой. Однако, введение этого параметра искажает структуру исходных связей страниц WWW, что, как показывают модельные примеры (см. [2]), может приводить к построению упорядочения, не отвечающего критерию “здорового смысла”. Более того, структура реального графа связей WWW имеет форму “галстука-бабочки” и характеризуется разложимой матрицей. На это недвусмысленно указывает исследование реальной структуры графа WWW [3]. Авторы этой работы провели ряд исследований реального состояния части страниц WWW (май 1999—октябрь 1999). Они изучили связи между 200 миллионами страниц (около 1,5 миллиарда связей) и установили их структуру, так называемую “структуру галстука-бабочки” (рис. 1).

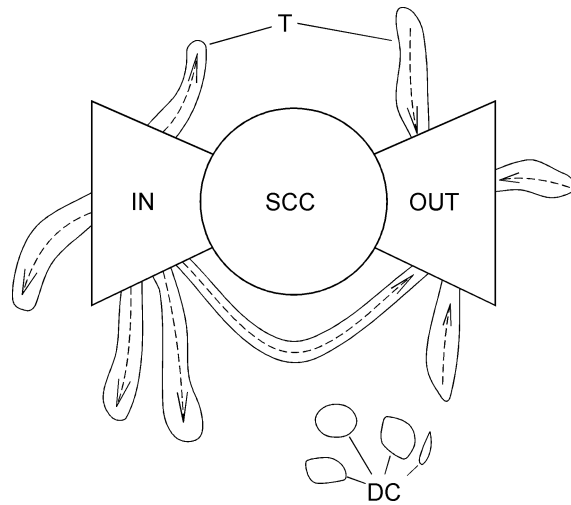


Рис. 1. Структура WWW: “галстук-бабочка”

В WWW есть четыре больших части: первая (сердце WWW — сильно связанная компонента — SCC), содержащая примерно 56 млн. страниц; вторая и третья — названные IN и OUT — состоят из страниц, связанных с SCC; и, наконец, четвертая T (tendrils — “усики”) содержит страницы, из которых либо нельзя достигнуть SCC, либо эти страницы нельзя достигнуть из SCC. Однако, страницы части IN содержат ссылки, ведущие в SCC, а страницы OUT могут быть достигнуты из SCC. Размеры IN, OUT и T примерно одинаковы и составляют около 44 млн. страниц. Есть еще набор DC относительно мелких не связанных с другими частями и между собой компонент. Набор DC включает около 17 млн. страниц.

Таким образом, реальная структура WWW — это несвязный ориентированный граф, т. е. порождающая его матрица связей разложима и содержит большое число классов эквивалентности.

Оказывается, что неполноту списка страниц, релевантных запросу по ключевым словам, можно преодолеть, используя конкретный вид разложимой матрицы связей страниц WWW друг с другом [4]. Для этого необходимо на основе матрицы цитирований сформировать понятие “тематической близости” страниц WWW и ввести соответствующие бинарные отношения [5, 6]. В [6] было выделено два типа таких отношений: отношение внутренней (тематической) когерентности и отношение внешней когерентности. Эти отношения позволяют построить разбиение множества \mathcal{P} всех страниц WWW на классы тематически однородных страниц. При наличии такого разбиения, если мы обнаруживаем некоторое непустое подмножество страниц $Q \subset \mathcal{P}$, релевантных запросу по ключевым словам, то существует естественное расширение Q до множества $\mathcal{P}_0 \supset Q$, содержащего все те страницы из \mathcal{P} , которые эквивалентны хотя бы одной странице из Q . Более того, бинарные отношения когерентности могут быть снабжены количественными мерами, оценивающими сравнительную степень их выполнения, а они, в свою очередь, позволяют провести соответствующее упорядочение \mathcal{P}_0 на основе некоторого скалярного критерия.

Настоящая работа посвящена исследованию взаимной связи проблем упорядочения и расширения множества страниц, релевантных запросу по ключевым словам и содержит изложение двух возникающих при этом концепций

поиска:

— (RS) поиск на основе удаленной поисковой системы, работающей одновременно с большим числом пользователей и обрабатывающей большое число запросов;

— (LS) поиск на основе локальной поисковой программы, установленной на персональном компьютере пользователя и использующей удаленную поисковую систему как источник внешней информации при организации процесса поиска в диалоговом режиме.

2. Расширение множества релевантных страниц на основе отношения тематической когерентности

Пусть \mathcal{P} — множество всех страниц WWW; $L = (l_{ij})_{i,j \in \mathcal{P}}$ — матрица связей (цитирований) для \mathcal{P} ($l_{ij} = 1$, когда страница i цитирует страницу j , $l_{ij} = 0$ во всех остальных случаях); Q — подмножество \mathcal{P} , найденное поисковой системой по запросу пользователя.

Практика показывает, что опираясь на ключевые слова, поисковая система строит множество Q , которое весьма неоднородно: часть найденных страниц вполне информативна, а другая часть содержит источники, мало полезные для пользователя. Однако, более существенным недостатком Q оказывается неполнота этого множества: среди страниц множества $\mathcal{P} \setminus Q$ находится достаточно много страниц, в которые пользователю следовало бы заглянуть, но поисковая система, оперируя только ключевыми словами, сочла эти страницы нерелевантными запросу. Поэтому важной проблемой поиска является не только сужение, но и расширение Q за счет тех страниц из $\mathcal{P} \setminus Q$, которые “тематически близки” Q и тем самым могут представлять интерес для пользователя.

Такое расширение можно провести, если использовать одно из отношений тематической близости (когерентности) страниц \mathcal{P} , строящееся на основе матрицы связей L . В [6] были введены два отношения такого типа: отношение *внутренней когерентности* I и отношение *внешней когерентности* E . Оба отношения строятся на основе значений элементов матрицы L и могут быть представлены в следующем виде

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \mathcal{P} \quad iIj &\Leftrightarrow (l_{ij} + l_{ji} \geq 1), \text{ если } i \neq j \\ \forall i \in \mathcal{P} \quad iIi, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\forall i, j \in \mathcal{P} \quad iEj \Leftrightarrow \left[\sum_s (l_{si}l_{sj} + l_{is}l_{js}) > 1 \right], \text{ если } i \neq j \tag{2}$$

$$\forall i \in \mathcal{P} \quad iEi.$$

Очевидно, отношения I и E рефлексивны и симметричны.

Из (1) видно, что поскольку отношение I связывает две различные страницы i и j , если одна из них цитирует другую, то для его построения нужна информация только об элементах l_{ij} и l_{ji} матрицы L . Таким образом, для выполнения этого отношения на паре $\{i, j\}$ достаточно, чтобы только лишь один из создателей страниц i или j принял решение о помещении соответствующей ссылки на своей странице. По этой причине отношение I может оказаться весьма субъективным и ненадежным с точки зрения целесообразности расширения множества Q только на его основе.

Для построения отношения E из матрицы L привлекается более обширная информация, так как выполнение этого отношения на паре $\{i, j\}$ обеспечивается либо решением авторов посторонних $\{i, j\}$ страниц, ссылающихся на i

и j (значит, $\sum_s l_{si}l_{sj} > 0$), либо решением создателей страниц i и j , помещающих на свои страницы ссылку на одну и ту же страницу $s \in \mathcal{P} \setminus \{i, j\}$ (в этом случае $\sum_s l_{is}l_{js} > 0$). Таким образом, отношение E , привлекающее для оценки пары $\{i, j\}$ внешнюю к этим страницам информацию (т. е. элементы матрицы $L = \{l_{is}, l_{js}, l_{si}, l_{sj}\}_{s \in \mathcal{P} \setminus \{i, j\}}$), по-видимому, более объективно оценивает степень тематической согласованности страниц i и j .

Построим теперь на основе этих отношений соответствующее разбиение множества \mathcal{P} на классы эквивалентных (“тематически однородных”) страниц. Для этого перейдем от отношений I и E к их транзитивным замыканиям \hat{I} и \hat{E} , соответственно. Эти отношения определяются по одинаковой схеме. Именно, пусть R — рефлексивное и симметричное отношение. Его транзитивное замыкание — это такое отношение \hat{R} , которое находится по R согласно соотношениям

$$\forall i, j \in \mathcal{P} \quad i\hat{R}j \Leftrightarrow iRj \vee \exists i_1, \dots, i_k \in \mathcal{P} \quad iRi_1 \& \dots \& i_k Rj. \quad (3)$$

Утверждение 1. *Отношение \hat{E} содержится в отношении \hat{I} , т. е.*

$$\forall i, j \in \mathcal{P}, \quad i\hat{E}j \Rightarrow i\hat{I}j.$$

Доказательство. Согласно (3), выполнение $i\hat{E}j$ означает, что либо выполнено iEj (а значит, имеет место $i\hat{I}j$), либо существует такая последовательность страниц i_1, \dots, i_k , что справедливо $iEi_1 \& \dots \& i_k E j$ (т. е. опять имеет место $i\hat{I}j$).

Утверждение 2. *Отношения \hat{I} и \hat{E} рефлексивны, симметричны и транзитивны, т. е. являются отношениями эквивалентности на \mathcal{P} .*

Доказательство непосредственно следует из свойств I и E , а также определения (3).

Пусть $\{\mathcal{P}_i^{(0)}\}_{i=1}^{k_0}$ и $\{\mathcal{P}_i^{(1)}\}_{i=1}^{k_1}$ — разбиения множества \mathcal{P} на классы эквивалентных по \hat{I} и \hat{E} элементов, соответственно. Введем в рассмотрение следующие расширения множества Q [6]:

$$\mathcal{P}_0^{(j)} = \bigcup_{i \in \Delta^{(j)}} \mathcal{P}_i^{(j)}; \quad \Delta^{(j)} = \{i : \mathcal{P}_i^{(j)} \cap Q \neq \emptyset\}; \quad j = 0, 1. \quad (4)$$

Множество $\mathcal{P}_0^{(0)}$ ($\mathcal{P}_0^{(1)}$) содержит те страницы из \mathcal{P} , которые эквивалентны хотя бы одной странице из Q по отношению \hat{I} (\hat{E}). Согласно утверждению 1, множество $\mathcal{P}_0^{(1)}$ содержит, вообще говоря, меньше страниц, чем множество $\mathcal{P}_0^{(0)}$,

$$\mathcal{P}_0^{(1)} \subset \mathcal{P}_0^{(0)}, \quad (5)$$

что приводит к различию стратегий поиска нужной пользователю информации в множествах $\mathcal{P}_0^{(0)}$ и $\mathcal{P}_0^{(1)}$. Для иллюстрации этого различия заметим, что при использовании множества $\mathcal{P}_0^{(0)}$, если хотя бы один элемент $i \in Q$ попадает в гигантскую связную компоненту SSC графа WWW (см. рис. 1), то $\mathcal{P}_0^{(0)}$ будет содержать все элементы этой компоненты, а их десятки миллионов. Множество $\mathcal{P}_0^{(1)}$ может быть в этом случае существенно уже.

2. Поиск в множестве $\mathcal{P}_0^{(0)}$

Множество $\mathcal{P}_0^{(0)}$, согласно (4), представляет собой объединение совокупности $\Delta^{(0)} \subset \{1, \dots, k_0\}$ элементов $\{\mathcal{P}_i^{(0)}\}_{i=1}^{k_0}$ разбиения множества \mathcal{P} всех страниц WWW на классы $\mathcal{P}_i^{(0)}$ эквивалентных по отношению \hat{I} элементов \mathcal{P} ,

$$\mathcal{P}_0^{(0)} = \bigcup_{i \in \Delta^{(0)}} \mathcal{P}_i^{(0)}.$$

В силу (1), (3), любые два различных множества $\mathcal{P}_n^{(0)}$ и $\mathcal{P}_m^{(0)}$ ($n, m \in \Delta^{(0)}$) не связаны друг с другом взаимными цитированиями, т.е. нет ни одной страницы $i \in \mathcal{P}_n^{(0)}$, которая цитирует хотя бы одну страницу $j \in \mathcal{P}_m^{(0)}$ (и наоборот), и с этой точки зрения являются совершенно независимыми.

Сужение матрицы L на множество $\mathcal{P}_0^{(0)}$, очевидно, разложимо и имеет блочную структуру: каждый блок на диагонали соответствует сужению матрицы L на один из классов $\mathcal{P}_m^{(0)}$, $m \in \Delta^{(0)}$, и может быть разложимым; вне диагональных блоков все элементы матрицы L равны 0. Таким образом, упорядочение элементов $\mathcal{P}_0^{(0)}$ разбивается на $|\Delta^{(0)}|$ независимых упорядочений: элементы каждого множества $\mathcal{P}_m^{(0)}$, $m \in \Delta^{(0)}$, должны упорядочиваться отдельно друг от друга.

Для построения соответствующего упорядочения рассмотрим те отношения, которыми связаны элементы каждого $\mathcal{P}_m^{(0)}$ между собой:

(1) отношение прямого цитирования L^T :

$$iL^Tj \Leftrightarrow l_{ji} = 1 \quad (\text{страница } j \text{ цитирует страницу } i);$$

(2) отношение внутренней когерентности $I^{(s)}$ ($s = 1, 2$):

$$iI^{(s)}j \Leftrightarrow l_{ij} + l_{ji} \geq s \quad (\text{при } s = 1: \text{ страница } i \text{ или } j \text{ содержит цитирование другой страницы; при } s = 2: \text{ страница } i \text{ цитирует } j, \text{ а } j \text{ цитирует } i);$$

(3) отношение внешней когерентности $E^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$):

$$iE^{(k)}j \Leftrightarrow \sum_s (l_{si}l_{sj} + l_{is}l_{js}) \geq k$$

(существует не менее k страниц, каждая из которых либо цитирует обе страницы i и j , либо цитируется на страницах i и j одновременно).

Заметим, что в работе [6] мы ограничились только двумя отношениями I и E . Они связаны с введенными выше бинарными отношениями следующим образом: $I^{(1)} = I$, $E^{(1)} = E$; при этом $I^{(1)} \supset I^{(2)}$; $E^{(k)} \supset E^{(k+1)}$, $k = 1, 2$.

Таким образом, семейства отношений $\{I^{(s)}\}_{s=1}^2$, $\{E^{(k)}\}_{k \geq 1}$ представляют собой последовательные усиления введенных в разделе 2 отношений I и E , соответственно. Для построения скалярного критерия, учитывающего вклад этих отношений в упорядочение элементов $\mathcal{P}_m^{(0)}$, необходимо перейти к количественному описанию, используя технику мультиотношений, как это было сделано в [6]. При этом мы рассмотрим следующую совокупность мультиотношений:

(1') для отношения L^T

$$l(i, j) = \begin{cases} l_{ji}, & \text{если } j \neq i \\ 0, & \text{если } j = i; \end{cases} \quad (6)$$

(2') для отношения $I^{(s)}$ ($s = 1, 2$):

$$\tau^{(s)}(i, j) = \begin{cases} l_{ij} + l_{ji}, & \text{если } (j \neq i) \& (l_{ij} + l_{ji} \geq s) \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (7)$$

(3') для отношения $E^{(k)}$ ($k \geq 1$):

$$e^{(k)}(i, j) = \begin{cases} \sum_s (l_{si}l_{sj} + l_{is}l_{js}) & \text{если } \left(\sum_s (l_{si}l_{sj} + l_{is}l_{js}) \geq k \right) \& (j \neq i) \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (8)$$

Объединение (6)–(8) в единое мультиотношение позволяет количественно учесть влияние всех отношений вместе. Можно выбрать, например, результирующее мультиотношение $p(i, j)$ в виде

$$p(i, j) = l(i, j) + \tau^{(1)}(i, j) + e^{(1)}(i, j) = 2l_{ji} + l_{ij} + \sum_s (l_{si}l_{sj} + l_{is}l_{js}). \quad (9)$$

Упорядочение множества $\mathcal{P}_m^{(0)}$ находится по информации в виде (9) согласно следующим соотношениям [6].

Сначала строится матрица переходов $T_m^{(0)} = (t_{ij}^{(0)})_{i, j \in \mathcal{P}_m^{(0)}}$ с элементами

$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} p(j, i), & j \neq i \\ \sum_{s \in \mathcal{P}_m^{(0)}} p(i, s), & j = i. \end{cases} \quad (10)$$

Поскольку в $p(i, j)$ присутствует слагаемое $\tau^{(1)}(i, j)$, эта матрица неразложима, а тогда искомое упорядочение определяется критерием $p_m(i)$, вычисляемым из системы уравнений

$$\begin{aligned} p_m(i) &= u^{(0)}(i)v^{(0)}(i); & \sum_{s \in \mathcal{P}_m^{(0)}} p_m(i) &= 1; \\ T_m^{(0)}u^{(0)} &= \lambda^{(0)}u^{(0)}; & v^{(0)}T_m^{(0)} &= \lambda^{(0)}v^{(0)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\lambda^{(0)}$ — максимальное собственное значение неотрицательной неразложимой матрицы $T_m^{(0)}$.

Учитывая, что любые два множества $\mathcal{P}_m^{(0)}$ и $\mathcal{P}_n^{(0)} \in \Delta^{(0)}$ не связаны друг с другом отношением L^T , упорядочения $p_m^{(0)}$ и $p_n^{(0)}$ независимы и лучшие элементы этих разбиений должны предъявляться пользователю на равном

основании без какой-либо дискриминации. Суждение об их относительном качестве должен делать сам пользователь, а не поисковая система.

Таким образом, для множества $\mathcal{P}_0^{(0)}$ результат действия поисковой системы состоит в построении разбиения $\mathcal{P}_0^{(0)}$ на классы $\{\mathcal{P}_m^{(0)}\}_{m \in \Delta^{(0)}}$, вычислении всех скалярных критериев $p_m(i)$, $i \in \mathcal{P}_m^{(0)}$; предъявлении пользователю структуры разбиения и упорядоченных совокупностей элементов из каждого класса разбиения.

Отметим, что при работе в режиме реального времени поисковая система в момент поступления запроса должна только найти множество релевантных запросу страниц Q и номера $\Delta^{(0)}$ тех классов $\mathcal{P}_m^{(0)}$ ($m \in \Delta^{(0)}$), которые содержат в себе элементы из Q . Вычисление значений критерия $p_m(i)$ для каждого класса разбиения $\mathcal{P}_m^{(0)}$ можно провести заранее, поскольку его значения не зависят от состава запроса, а только лишь от вида матрицы цитирований L .

4. Поиск в множестве $\mathcal{P}_0^{(1)}$

Множество $\mathcal{P}_0^{(1)}$ возникает как расширение множества Q на основе элементов из классов эквивалентности $\{\mathcal{P}_m^{(1)}\}_{m \in \Delta^{(1)}}$, содержащих хотя бы одну страницу из множества Q . Каждое множество $\mathcal{P}_m^{(1)}$ содержит “тематически” близкие по отношению $E^{(1)}$ страницы. Это отношение, определяемое на паре страниц $\{i, j\}$ условием $\sum_s (l_{si}l_{sj} + l_{is}l_{js}) \geq 1$, достаточно жестко сортирует страницы по классам и приводит, вообще говоря, к множествам $\mathcal{P}_0^{(1)}$ и $\mathcal{P}_m^{(1)}$, $m \in \Delta^{(1)}$, существенно меньшей мощности, чем в случае отношения I . Однако, то обстоятельство, что для установления тематической связи страниц мы используем здесь отношение $E^{(1)}$, а не $I^{(1)}$, приводит к важному последствию. Именно, различные классы эквивалентных элементов, например, $\mathcal{P}_m^{(1)}$ и $\mathcal{P}_n^{(1)}$ ($m, n \in \Delta^{(1)}$), оказываются не изолированными друг от друга с точки зрения присутствия цитирования между страницами $i \in \mathcal{P}_m^{(1)}$ и страницами $j \in \mathcal{P}_n^{(1)}$. Поскольку мы хотели бы упорядочить элементы множества $\mathcal{P}_0^{(1)}$ перед предъявлением их пользователю, то необходимо предварительно исследовать возникающую структуру связей. Этого можно достигнуть, введя в рассмотрение соответствующее задаче мультиотношение, описывающее связи между страницами. Обозначим его через $r(i, j)$. Это мультиотношение должно включать составляющую, аналогичную мультиотношению прямого цитирования $l(i, j)$ (см. (6)), а также содержать вклад от мультиотношения, связанного с оценкой тематической связи между страницами. Поскольку при построении $\mathcal{P}_0^{(1)}$ мы применяли отношение $E^{(1)}$, то целесообразно использовать мультиотношение $e^{(1)}(i, j)$ (см. (8)). В результате, $\mathcal{P}_0^{(1)}$ можно упорядочить на основе мультиотношения

$$r(i, j) = \begin{cases} l(i, j) + e^{(1)}(i, j), & \text{если } j \neq i \\ 0, & \text{если } j = i. \end{cases} \quad (12)$$

Это мультиотношение обладает более сложной структурой связей между элементами, чем мультиотношение (9). Для выявления этой структуры введем в рассмотрение матрицу $S = (s_{ij})_{i,j \in \mathcal{P}_0^{(1)}}$ с элементами

$$s_{ij} = \begin{cases} r(j, i), & \text{если } j \neq i \\ 0, & \text{если } j = i, \end{cases} \quad (13)$$

и приведем ее к нормальному виду [6], который характеризуется специальной блочной структурой и представлен на рис. 2.

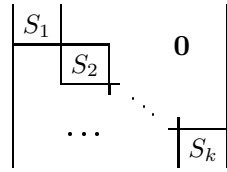


Рис. 2

В нормальной (канонической) форме матрица S имеет блочно-треугольный вид: матрицы S_i , стоящие на блочной диагонали, либо неразложимы, либо содержат единственный нулевой элемент, выше блочной диагонали все элементы матрицы равны 0.

Пусть $V_i \subset \mathcal{P}_0^{(1)}$ — множество страниц, нумерующих строки матрицы S_i . Совокупность $V = \{V_1, \dots, V_k\}$ представляет собой разбиение множества $\mathcal{P}_0^{(1)}$

$$\mathcal{P}_0^{(1)} = \bigcup_{i=1}^k V_i$$

и имеет следующую иерархическую структуру [4]. Семейство множеств V можно занумеровать в такую последовательность, разбиение которой на куски

$$\tilde{V}_1 = \{V_1, \dots, V_{s_1}\}, \tilde{V}_2 = \{V_{s_1+1}, \dots, V_{s_2}\}, \dots, \tilde{V}_h = \{V_{s_{h-1}+1}, \dots, V_k\} \quad (14)$$

обладает следующими свойствами:

$$(A) \forall V_l, V_m \in \tilde{V}_s \quad l \neq m \Rightarrow \forall i \in V_l, \forall j \in V_m \quad r(i, j) = r(j, i) = 0;$$

$$(B) \forall V_l \in \tilde{V}_i, \forall V_m \in \tilde{V}_j \quad i < j \Rightarrow \forall p \in V_l, \forall q \in V_m \quad r(p, q) = 0;$$

$$(C) \forall V_l \in \tilde{V}_i \quad \exists V_m \in \tilde{V}_{i+1}, \quad \exists p \in V_l, \quad \exists q \in V_m \quad r(p, q) = 1.$$

Содержательно, условие (A) означает, что элементы различных множеств, принадлежащих одному и тому же куску \tilde{V}_s , не связаны друг с другом мультиотношением $r(i, j)$. Условия (B) и (C) показывают, что куски $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_h$ можно упорядочить сверху вниз так, что:

1) ни один элемент из множества $V_i \in V$ не связан мультиотношением r с элементом множества $V_j \in V$, если $i > j$;

2) в куске \tilde{V}_{i+1} , непосредственно следующем за куском \tilde{V}_i в этом упорядочении для любого множества $V_l \in \tilde{V}_i$ найдется такое множество $V_m \in \tilde{V}_{i+1}$, что некоторый элемент V_l связан отношением r с некоторым элементом множества V_m .

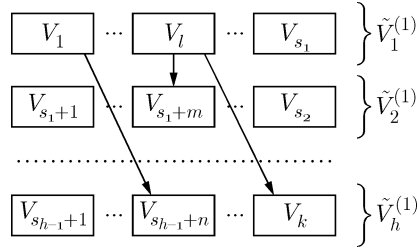


Рис. 3

Графически такую иерархию можно представить в виде “слоев”, содержащих множества из одного куска и “связей” по отношению r , ведущих сверху вниз (рис. 3). Точную структуру связей мы исследуем позже.

Заметим только, что направленная связь между страницами p и q , выражаемая условиями $r(p, q) = 1, r(q, p) = 0$, содержательно означает в силу (12), (6) и (8), что страница q цитирует страницу p , а обратное не имеет места.

Между разбиением $V = \{V_1, \dots, V_m\}$ множества $\mathcal{P}_0^{(1)}$ и его разбиением $\{\mathcal{P}_i^{(1)}\}_{i \in \Delta^{(1)}}$ существует следующее соотношение.

Утверждение 3. Для любого $\mathcal{P}_i^{(1)}$ ($i \in \Delta^{(1)}$) существует такое множество $V_m \in V$, что $\mathcal{P}_i^{(1)} \subset V_m$.

Доказательство. Пусть V_m выбрано так, что $V_m \cap \mathcal{P}_i^{(1)} \neq \emptyset$.

В силу того, что матрица S_m (см. рис. 2) неразложима, отвечающий ей граф $M(S_m)$ — с множеством вершин V_m и множеством дуг

$$E_m = \{ij : i, j \in V_m \& r(j, i) > 0\}$$

— будет сильно связной компонентой графа $M(S)$. В силу того, что $\mathcal{P}_i^{(1)}$ — класс эквивалентности по отношению \hat{E} , а $r(i, j) \geq e^{(1)}(i, j)$ (см. (12)), то все элементы $\mathcal{P}_i^{(1)}$ принадлежат множеству вершин графа $M(S_m)$. Значит, $\mathcal{P}_i^{(1)} \subset V_m$.

Следствие 1. Разбиение $\{\mathcal{P}_i^{(1)}\}_{i \in \Delta^{(1)}}$ является измельчением разбиения $V = \{V_i\}_{i=1}^k$ множества $\mathcal{P}_0^{(1)}$.

Таким образом, каждое множество $V_m \in V$ состоит из компонент разбиения $\{\mathcal{P}_i^{(1)}\}_{i \in \Delta^{(1)}}$ и для нахождения вида связей в иерархии, представленной на рис. 3, достаточно установить структуру этих связей между множествами из $\{\mathcal{P}_i^{(1)}\}_{i \in \Delta^{(1)}}$. Для этого рассмотрим “сужение” D матрицы L на множество $\Delta^{(1)}$. Именно, положим

$$D = (d_{ij})_{i, j \in \Delta^{(1)}}, \quad d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists m \in \mathcal{P}_i^{(1)}, \exists n \in \mathcal{P}_j^{(1)}, l_{mn} = 1 \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (15)$$

$$\left. \begin{array}{c|ccc} D_1 & & & \\ \hline & D_2 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline \mathbf{0} \vee \mathbf{1} & & & D_k \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta_1^{(1)} \\ \Delta_2^{(1)} \\ \Delta_k^{(1)} \end{array}$$

Рис. 4

Представим теперь матрицу D в нормальной форме (рис. 4). Тогда в силу определения (15) элементов D и утверждения 2, справедливо

$$\Delta^{(1)} = \bigcup_{i=1}^k \Delta_i^{(1)}, \quad (16)$$

где множество $\Delta_i^{(1)}$ содержит элементы, нумерующие строки матрицы D_i ; при этом,

$$\forall i \quad V_i = \bigcup_{j \in \Delta_i^{(1)}} \mathcal{P}_j^{(1)}. \quad (17)$$

Матрицу D назовем скелетной матрицей разбиения $V = \{V_1, \dots, V_k\}$. Отметим, что положение единичных элементов в нижнем левом углу матрицы D (см. рис. 4) показывает связи между слоями и множествами иерархии, представленной на рис. 3. Соотношение (17) устанавливает связь между разбиением $V = \{V_1, \dots, V_k\}$ и структурой диагональных блоков $\{D_i\}_{i \in \Delta^{(1)}}$.

Знание нормального вида скелетной матрицы позволяет также упорядочить классы V_s , принадлежащие заданному слою иерархии \tilde{V}_i . Действительно, с точки зрения структуры матрицы D элементы, входящие в \tilde{V}_i , по-разному связаны с элементами, входящими во все остальные слои \tilde{V}_j ($j \neq i$).

Будем говорить, что классы $V_i, V_j \in V$ связаны друг с другом отношением цитирования (см. раздел 2.1), если существуют такие страницы $m \in V_i$ и $n \in V_j$, что $l_{mn} + l_{nm} \geq 1$ (т. е. либо страница m цитирует n , либо страница n цитирует m).

Это отношение аналогично отношению внутренней когерентности (1), но действует не на множестве страниц, а на множестве классов V .

Сопоставим теперь каждому классу $V_m \in V$ число $\rho(V_m)$ тех отличных от V_m классов, которые связаны с ним отношением цитирования. Функция $\rho(V_m)$ является естественным скалярным критерием [4], упорядочивающим классы одного уровня иерархии \tilde{V}_i . Это упорядочение накладывается на упорядочение классов, принадлежащих разным слоям иерархии (когда из двух классов $V_m \in \tilde{V}_i$ и $V_n \in \tilde{V}_j$ лучшим считается тот класс, который принадлежит слою с меньшим номером), и порождает упорядочение всего множества V . Остается только упорядочить страницы внутри каждого $V_m \in V$. Для этого используем мультиотношение $r(i, j)$ из (12) и применим соотношение типа (10) и (11) для построения соответствующего скалярного критерия.

Именно, введем матрицу переходов $T_m^{(1)} = (t_{ij}^{(1)})_{i, j \in V_m}$

$$t_{ij}^{(1)} = \begin{cases} r(j, i), & \text{если } j \neq i \\ \sum_{s \in V_m} r(i, s), & \text{если } j = i. \end{cases} \quad (18)$$

Искомый скалярный критерий $r_m(i)$ находится из уравнений

$$\begin{aligned} r_m(i) &= u^{(1)}(i)v^{(1)}(i); & \sum_{s \in V_m} r_m(i) &= 1; \\ T_m^{(1)}u^{(1)} &= \lambda^{(1)}u^{(1)}; & v^{(1)}T_m^{(1)} &= \lambda^{(1)}v^{(1)}. \end{aligned} \quad (19)$$

В результате, схему поиска в иерархии V с построенной выше структурой упорядочений можно организовать следующим образом.

Поиск начинается с верхнего слоя иерархии \tilde{V}_1 . Из \tilde{V}_1 выбирается один из тех классов $V_m \in \tilde{V}_1$, для которого значение функции $\rho(V_m)$ на множестве \tilde{V}_1 достигает максимума. Заметим теперь, что множество V_m разбивается на группы тематически однородных страниц согласно (17): $V_m = \bigcup_{j \in \Delta_m^{(1)}} \mathcal{P}_j^{(1)}$.

Каждое $\mathcal{P}_j^{(1)}$ ($j \in \Delta_m^{(1)}$) содержит страницы, связанные друг с другом отношением внешней тематической когерентности. Поэтому, если выделить из $\mathcal{P}_j^{(1)}$ некоторое количество лучших (по критерию $r_m(i)$) страниц, то по ним пользователь может сделать определенное суждение о релевантности $\mathcal{P}_j^{(1)}$ для поиска на основании оценки того, та ли эта тематика, которую он имел в виду, делая запрос по ключевым словам.

Если ответ пользователя отрицателен, то просмотр $\mathcal{P}_j^{(1)}$ прекращается и это множество помечается. Аналогичный анализ проводится для остальных $\mathcal{P}_i^{(1)}$, составляющих множество V_m , $i \in \Delta_m^{(1)} \setminus \{j\}$. При этом, если для некоторой компоненты $\mathcal{P}_i^{(1)}$ ($i \in \Delta_m^{(1)}$) пользователем обнаружено хорошее соответствие выделенных страниц с предметом поиска, то по его желанию

1) либо поиск внутри $\mathcal{P}_i^{(1)}$ будет продолжен на основе изучения остального множества элементов из $\mathcal{P}_i^{(1)}$, упорядоченного согласно критерию r_m ;

2) либо будет организован просмотр класса V_n , принадлежащего следующему за \tilde{V}_1 уровню иерархии \tilde{V}_2 и связанного с V_m отношением цитирования. При таком просмотре в V_n (его разбиение имеет вид $V_n = \bigcup_{k \in \Delta_n^{(1)}} \mathcal{P}_k^{(1)}$) выделя-

ется тот класс тематической когерентности, который связан с $\mathcal{P}_i^{(1)}$ согласно матрице D . Этот класс упорядочивается согласно критерию r_n и его элементы предъявляются пользователю в соответствующем порядке.

В обоих случаях все просмотренные классы помечаются.

После завершения просмотра первого слоя иерархии, пользователь переходит к просмотру следующего уровня \tilde{V}_2 , ограничиваясь теми множествами $V_i \in \tilde{V}_2$, у которых помечены не все компоненты $\mathcal{P}_j^{(1)}$ их разбиения $V_i = \bigcup_{j \in \Delta_i^{(1)}} \mathcal{P}_j^{(1)}$. Просмотр распространяется до множеств слоя \tilde{V}_h , если

пользователь не прекратит его своим решением на каком-то более высоком уровне иерархии.

Достоинством такой процедуры поиска с нашей точки зрения является то, что не поисковая система указывает пользователю всю последовательность прохождения страниц из $\mathcal{P}_0^{(1)}$ (как это делается в случае множества $\mathcal{P}_0^{(0)}$), а предоставляет эту возможность самому пользователю. Однако, это не снижает роль поисковой машины, поскольку она проводит большую предварительную работу, формируя по матрице L структуру иерархии в

$$V = \{V_1, \dots, V_k\}$$

и вычисляет соответствующие критерии (r_i, ρ) , позволяющие упорядочить элементы внутри каждого V_i и в каждом слое иерархии. Увязывание этих порядков друг с другом осуществляет сам пользователь, дополняя исходную информацию (содержащуюся в ключевых словах) новой информацией, позволяющей “сортировать” тематически однородные множества $\mathcal{P}_i^{(1)}$, $i \in \Delta^{(1)}$, с учетом представления пользователя о цели поиска.

З а м е ч а н и е 1. Набор множеств поиска $\mathcal{P}_0^{(0)}$ и $\mathcal{P}_0^{(1)}$ можно пополнить, если при рассмотрении множества Q применять не только отношения $I = I^{(1)}$, $E = E^{(1)}$, но также и другие отношения типа $I^{(2)}$, $E^{(k)}$, $k \geq 2$. В частности, можно рассмотреть классы, построенные только на основе отношений $E^{(k)}$, $k \geq 2$ и вести поиск в множествах $\mathcal{P}_0^{(k)}$, $k \geq 2$. Можно также построить пересечение отношений I и E и их производных отношений $I^{(s)}$, $E^{(k)}$, например, в следующем виде

$$F^{(2,1)}(i, j) = I^{(2)}(i, j) \cdot E^{(1)}(i, j). \quad (20)$$

Это отношение “ужесточает” понятие тематической когерентности, полагая, что i и j тематически когерентны, если каждая из этих страниц цитирует другую (внутренняя когерентность) и одновременно найдется хотя бы одна страница $s \notin \{i, j\}$, которая либо цитирует обе страницы i и j , либо $\{i, j\}$ цитируют страницу s (внешняя когерентность). Используя $F^{(2,1)}$, можно выделить множество $\mathcal{P}_0^{(2,1)}$, расширяющее Q и содержащее классы эквивалентности с иным понятием тематической однородности. Подчеркнем, что использование того или иного класса поиска является параметром поисковой системы. Его конкретное значение может, например, увязываться с той тематикой, которую задает пользователь своим запросом.

Список литературы

1. Page L., Brin S., Motwani R., Winograd T. The page rank citation ranking: bringing order to the web.—Stanford Digital Library working paper SIDL-WP-1999-0120.—Stanford University, 1999.
2. Левченков В. С., Левченкова Л. Г. Методы символической динамики и проблема моделирования поиска информации в Интернете // Прикладная математика и информатика. № 16.—М.: МГУ, 2004.—С. 74–89.
3. Broder A., Kumar R., Maghoul F., Raghavan P., Stata S., Tomkins A., Wiener J. // “Graph Structure in the Web”, Proc. WWW9 conference, Amsterdam (2000).—P. 309–320.
4. Левченков В. С., Левченкова Л. Г. Упорядочение страниц WWW по информации о взаимных цитированиях // Прикладная математика и информатика. № 18.—М.: МГУ, 2004.—С. 93–107.
5. Левченков В. С. Теория выбора и проблема поиска информации в WWW // Доклады РАН.—2005.—Т. 403, № 2.—С. 178–182.
6. Левченков В. С., Левченкова Л. Г. Поиск информации в WWW с учетом тематической однородности страниц // В сб.: Нелинейная динамика и управление. Вып. 6 / Под ред. С. В. Емельянова, С. К. Корвина.—М.: Физматлит, 2008.—С. 267–278.

ИЗУЧЕНИЕ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ СБОРА НАЛОГОВ С ПРЕДПРИЯТИЯ ГОСУДАРСТВОМ С УЧЕТОМ БЕЛОГО И ТЕНЕВОГО КАПИТАЛОВ

А. В. Кряжимский, С. П. Коновалов, М. С. Никольский

Работа посвящена разработке и анализу упрощенной математической модели финансового взаимодействия государства и предприятия по налоговой линии. В первой части статьи на основании эвристических соображений строится упрощенная модель, описывающая динамику сбора налогов с предприятия государством с учетом белого и теневого капиталов. Во второй части статьи эта модель изучается с теоретико-игровых позиций.

1. Построение модели. Эвристические соображения

В работе рассматривается игровая модель взаимодействия государства и предприятия на отрезке времени $[0, T]$.

В момент $t \in [0, T]$ предприятие характеризуется следующими параметрами: $C(t)$ — объем капитала, $P(t)$ — чистая прибыль, $Y(t)$ — величина валового выпуска продукции, $\Pi(t)$ — валовая прибыль. Управляющий параметр — доля легализованного (белого) капитала $u(t)$, $u(t) \in [0, 1]$.

Чтобы оценить поведение предприятия, введем показатель качества функционирования предприятия $I(C(\cdot), P(\cdot))$. Предприятие стремится к максимизации показателя качества $I(C(\cdot), P(\cdot))$, выбирая $u(t)$, $t \in [0, T]$. Государство характеризуется следующими параметрами: Δ — время введения налогов, $N(t)$ — налог, взимаемый государством с предприятия в момент времени t , при этом

$$N(t) = \Pi(t) \cdot u(t) \cdot \tau,$$

где τ — доля налоговых отчислений предприятия (с легализованной прибыли).

Критерий качества для государства есть суммарный налог на отрезке времени $[\Delta, T]$ взимания налога:

$$J(\Delta, u(\cdot)) = \int_{\Delta}^T e^{-\lambda t} N(t) dt.$$

Государство стремится максимизировать $J(\Delta, u(\cdot))$, выбирая Δ .

1.1. Формализация и анализ модели

Конкретизируем постановку задачи, введя динамическую модель предприятия. Список обозначений основных параметров приведен в Приложении.

Классическая модель. Величина Y валового выпуска продукции предприятия определяется многими параметрами — объемами капитала, рабочей силы, материалов, энергозатрат, технологий и др. При упрощенном моделировании производственной динамики в математической экономике обычно выделяют один определяющий параметр; часто таким параметром выступает объем C капитала предприятия. При выводе зависимости выпуска Y от капитала C исходят из того, что темп прироста валового выпуска пропорционален темпу прироста капитала:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \alpha \frac{\Delta C}{C}.$$

Здесь ΔY — годовой прирост валового выпуска, ΔC — годовой прирост капитала, α — положительный коэффициент пропорциональности.

После суммирования по времени (с применением формул интегрального исчисления) приходят к следующему выражению валового выпуска через капитал:

$$Y = aC^\alpha;$$

здесь a — положительный коэффициент.

Данная формула есть простейший вариант известной в математической экономике производственной функции Кобба-Дугласа [1].

Модель с белым и теневым капиталом. Приведенная выше классическая производственная функция не отражает подразделения капитала на легализованный (белый) и теневой — весь капитал считается белым. Между тем, прирост производства за счет отчисления в него единицы белого капитала выше, чем за счет отчисления в него единицы теневого.

Это объясняется по крайней мере двумя обстоятельствами.

Во-первых, внедрение в производство единицы теневого капитала связано с дополнительными расходами нелегального характера: реально в производство приходит лишь некоторый процент от отчисленной единицы; в случае внедрения единицы белого капитала этот процент выше.

Во-вторых, при внедрении в производство единицы белого капитала возрастает ликвидность предприятия, это делает предприятие более привлекательным для инвесторов, притягивая тем самым внешний капитал и способствуя увеличению валового выпуска; в случае внедрения единицы теневого капитала этот эффект отсутствует.

Таким образом, относительный темп прироста $\frac{\Delta C_{\text{legal}}}{C}$ белого капитала имеет большее влияние на темп прироста производства, чем относительный темп прироста $\frac{\Delta C_{\text{shady}}}{C}$ теневого капитала; здесь ΔC_{legal} и ΔC_{shady} — годовой прирост белого и теневого капитала соответственно. Иначе,

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \alpha \frac{\Delta C_{\text{legal}}}{C} + \beta \frac{\Delta C_{\text{shady}}}{C}, \quad (1.1)$$

где $\alpha > \beta$.

Отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ показывает, во сколько раз отчисление в производство единицы белого капитала эффективнее для производства, чем отчисление единицы теневого капитала.

Введем такой ключевой параметр, как доля белого капитала; будем обозначать его через u . Очевидно,

$$\begin{aligned} 0 &\leq u \leq 1, \\ \Delta C_{\text{legal}} &= u \Delta C, \\ \Delta C_{\text{shady}} &= (1 - u) \Delta C. \end{aligned}$$

Подставляя в выражение (1.1), получаем

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \alpha \frac{u \Delta C}{C} + \beta \frac{(1-u) \Delta C}{C} = \gamma(u) \frac{\Delta C}{C},$$

где

$$\gamma(u) = \beta + (\alpha - \beta)u.$$

После суммирования по времени, так же, как в классической модели, получаем выражение для валового выпуска через капитал. В данном случае оно имеет вид

$$Y = aC^{\gamma(u)}; \quad (1.2)$$

здесь a — положительный коэффициент, смысл которого — объем выпуска при единичном капитале.

Далее считаем, что $C > 1$ (можно принять, что 1 — минимальный уровень капитала, необходимый для основания предприятия).

Полученное выражение есть модификация простейшей производственной функции Кобба-Дугласа для случая, когда капитал подразделяется на белый и теневой. Показатель $\gamma(u)$ в производственной функции (1.2) возрастает от β до α , когда доля u белого капитала возрастает от 0 до 1. Так как $C > 1$, то возрастание показателя $\gamma(u)$ или, что то же самое, возрастание доли u белого капитала, означает и возрастание выпуска Y . При заданном уровне капитала C выпуск Y минимален, если $u = 0$ (весь капитал теневой), и он максимален, если $u = 1$ (весь капитал белый).

1.2. Чистая прибыль

Валовая прибыль Π предприятия равна разности объема выпуска Y и себестоимости S продукции:

$$\Pi = Y - S.$$

Себестоимость примем для простоты пропорциональной объему капитала:

$$S = \sigma C,$$

здесь σ — положительный коэффициент, смысл которого — себестоимость продукции при единичном капитале. (Такое допущение естественно на начальном этапе функционирования предприятия, когда накопление технологического потенциала еще не ведет к систематическому удешевлению процесса производства.)

Таким образом, для валовой прибыли Π имеем выражение

$$\Pi = Y - \sigma C.$$

Подставляя выражение для Y через производственную функцию (1.2), получаем уточненное выражение:

$$\Pi = aC^{\gamma(u)} - \sigma C. \quad (1.3)$$

Полагаем, что доля белой валовой прибыли соответствует доле белого капитала:

$$\Pi_{\text{legal}} = u\Pi.$$

Рассмотрим чистую прибыль P предприятия.

В доналоговый период чистая прибыль равна валовой:

$$P = \Pi.$$

В период взимания налогов чистая прибыль P есть валовая прибыль Π за вычетом налога N :

$$P = \Pi - N.$$

Размер налога есть установленная доля белой валовой прибыли:

$$N = \tau \Pi_{\text{legal}} = \tau u \Pi;$$

здесь τ — установленная государством доля налоговых отчислений,

$$0 < \tau < 1.$$

Итак, получаем:

$$P = \begin{cases} \Pi, & t < \Delta \\ \Pi - \tau u \Pi, & t \geq \Delta. \end{cases}$$

Подставляя выражение (1.3) для валовой прибыли Π , приходим к окончательной формуле:

$$P = \begin{cases} aC^{\gamma(u)} - \sigma C, & t < \Delta \\ (aC^{\gamma(u)} - \sigma C)(1 - \tau u), & t \geq \Delta. \end{cases} \quad (1.4)$$

1.3. Легализующий капитал

В каждый текущий краткосрочный период предприятие заинтересовано в максимизации своей чистой прибыли P . Последняя, согласно формуле (1.4), есть функция доли τ налоговых отчислений, капитала C и доли u белого капитала предприятия. Предприятие не может снижать установленную долю τ и в течение краткосрочного периода существенно изменять капитал C .

Единственный управляющий параметр, которым предприятие может распоряжаться достаточно оперативно — это доля u его белого капитала. Стало быть, предприятие оперативно максимизирует чистую прибыль, подстраивая долю u белого капитала.

Рассмотрим чистую прибыль P как функцию доли u . Используем формулу (1.4). Эта формула показывает, что в доналоговый период, когда чистая прибыль равна валовой, она возрастает при увеличении доли u : в этот период выгодно “обеление” капитала (см. графики на рисунке рис. 1 слева).

В период взимания налогов зависимость чистой прибыли от доли u белого капитала не столь проста — см. графики на рисунке 1 справа.

Эти графики показывают следующее:

(а) при малых значениях капитала чистая прибыль P , в отличие от доналоговой ситуации, убывает при возрастании доли u белого капитала;

(б) при средних значениях капитала максимум чистой прибыли P достигается на промежуточных значениях u , расположенных между нулем и единицей, причем при увеличении капитала точка максимума сдвигается в сторону единицы;

(в) при больших значениях капитала чистая прибыль P возрастает при возрастании u (эта ситуация в принципе напоминает доналоговую, хотя скорость роста чистой прибыли по u значительно ниже).

Рассмотрим функцию P (см. (1.4)) при $t \geq \Delta$, $C > 1$, $u \in [0, 1]$. Легализующим капиталом C^+ будем называть величину бóльшую единицы и такую, что при уровне капитала C ниже C^+ максимум чистой прибыли P достигается при $u < 1$ (оптимальное распределение капитала предполагает ненулевую теневую составляющую, обеление всего капитала невыгодно, в этом смысле предприятие находится в теневой зоне), а при уровне капитала C не ниже C^+ максимум чистой прибыли P достигается при $u = 1$ (то

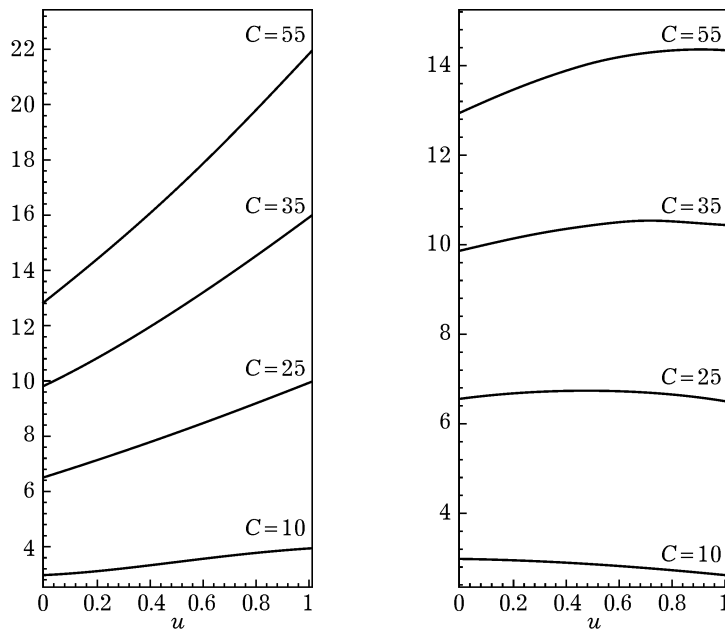


Рис. 1

есть самым выгодным для предприятия решением является обеление всего капитала, предприятие находится в белой зоне).

Ниже, при условии (2.23), будет показано, что для величины C^+ справедлива формула (2.37).

1.4. Принцип вывода из тени

Указанное свойство легализующего капитала позволяет заключить, что в начальный период своей деятельности, когда капитал мал, предприятие находится в теневой зоне. Введение налога в теневой зоне (до достижения предприятием легализующего капитала) автоматически влечет сохранение части его капитала в тени (теневая часть тем больше, чем раньше вводятся налоги). С другой стороны, теневой капитал автоматически устраняется принятием следующего принципа вывода из тени:

С предприятия, с самого начала обелившего весь свой капитал, налоги начинают собираться с момента достижения им уровня легализующего капитала.

Если принят этот принцип, то предприятие все время максимизирует свою чистую прибыль при постоянно нулевой доле теневого капитала: в течение доналогового периода обеление капитала заведомо выгодно, с началом же взимания налогов предприятие оперирует в белой зоне и, значит, оставляет весь капитал белым. Длительность доналогового периода, рассчитанную в соответствии с принципом вывода из тени, назовем оптимальной и обозначим через Δ_{opt} . Для априорной оценки оптимальной длительности Δ_{opt} следует смоделировать белую траекторию капитала, то есть траекторию капитала C предприятия при условии его полного обеления и в отсутствии налогообложения.

В данной работе для такого моделирования использована модель, согласно которой годовой прирост ΔC капитала C есть чистая прибыль P за

вычетом устаревшего капитала, размер последнего, как обычно, принимается пропорциональным размеру всего капитала. Таким образом, полагаем

$$\Delta C = P - \mu C; \quad (1.5)$$

здесь $\mu > 0$ — коэффициент устаревания капитала. Выражение чистой прибыли P по формуле (1.4) уточняет доналоговую динамику обеленного капитала:

$$\Delta C = aC^\alpha - (\sigma + \mu) C. \quad (1.6)$$

Оптимальная длительность Δ_{opt} доналогового периода находится как время, в течение которого траектория обеленного безналогового капитала C , описываемая законом (1.6) и исходящая из начального значения $C = C_0$, достигает уровня C^+ легализующего капитала.

При моделировании удобно использовать дифференциальную форму, закона (1.6):

$$\frac{dC}{dt} = aC^\alpha - (\sigma + \mu) C. \quad (1.7)$$

Для обеспечения возрастания обеленного безналогового капитала, не выходя за пределы классических моделей экспоненциального роста, естественно принять $\alpha = 1$, $a > \sigma + \mu$.

Тогда из уравнения

$$C(t) = C^+$$

получаем, что

$$\Delta_{\text{opt}} = \frac{1}{(a - \sigma - \mu)} \ln \frac{C^+}{C_0}.$$

1.5. Оптимальный доналоговый период: обеление капитала выгодно

Допустим, что государством назначена оптимальная длительность Δ_{opt} доналогового периода. Начиная с момента Δ_{opt} (исходный момент считаем нулевым), в динамике (1.5) капитала следует подставить выражение для чистой прибыли P с удержанием налогов (см. (1.4)).

При этом закон изменения капитала в период взимания налогов приобретает вид

$$\Delta C = (aC^{\gamma(u)} - \sigma C) (1 - \tau u) - \mu C$$

или, в дифференциальной форме,

$$\frac{dC}{dt} = (aC^{\gamma(u)} - \sigma C) (1 - \tau u) - \mu C. \quad (1.8)$$

Так как после момента Δ_{opt} предприятие находится в белой зоне, то, как замечено выше, максимум ее чистой прибыли достигается при обелении капитала, то есть при $u = 1$.

Итак, при $t \geq \Delta_{\text{opt}}$ в (1.8) подставляется $u = 1$ (при этом $\gamma(u) = \gamma(1) = \alpha = 1$) и полная результирующая динамика капитала предприятия описывается уравнением

$$\frac{dC}{dt} = \begin{cases} (a - \sigma - \mu) C, & t < \Delta, \\ [(a - \sigma)(1 - \tau) - \mu] C, & t \geq \Delta. \end{cases} \quad (1.9)$$

Эту динамику капитала можно сравнить с динамикой, получающейся при каком-либо законе изменения доли u белого капитала.

Показанные на рисунках 2 и 3 траектории капитала и чистой прибыли смоделированы при различных значениях u .

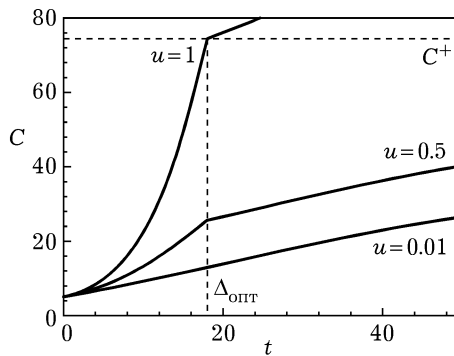


Рис. 2

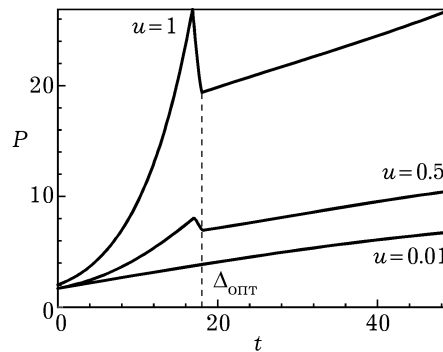


Рис. 3

З а м е ч а н и е 1. По техническим причинам на рисунках 2–5, 7–10 нижний индекс “opt” при величине Δ заменен на нижний индекс “опт”.

1.6. Доналоговый период меньше оптимального: обеление капитала невыгодно

Государство может, однако, счесть, что оптимальная длительность $\Delta_{\text{опт}}$ доналогового периода, найденная из принципа вывода из тени, чрезмерно велика. Допустим, что оно назначает длительность Δ доналогового периода, меньшую чем $\Delta_{\text{опт}}$.

Динамика капитала предприятия описывается уравнением

$$\frac{dC}{dt} = \begin{cases} (a - \sigma - \mu)C, & t < \Delta, \\ (aC^{\gamma(u)} - \sigma C)(1 - \tau u) - \mu C, & t \geq \Delta. \end{cases} \quad (1.10)$$

Первая часть уравнения описывает динамику капитала до введения налогов, когда оптимальная доля u равна, как отмечалось, единице.

Вторая часть уравнения описывает динамику капитала после введения налогов.

В отличие от случая оптимальной длительности $\Delta_{\text{опт}}$, сейчас налоги вводятся при нахождении предприятия в теневой зоне, когда легализующий капитал еще не достигнут. В теневой зоне доля u , максимизирующая чистую прибыль, меньше единицы. При нахождении в теневой зоне предприятие придерживается доли $u = u_{\Delta}$, близкой к максимизирующей, до тех пор, пока не выйдет из теневой зоны на уровень легализующего капитала (далее капитал обелается).

Суммируем сказанное выше в следующем эвристическом выводе:

Введение налога раньше оптимального времени $\Delta_{\text{опт}}$ ведет к сохранению теневого капитала, тормозит рост капитала и прибыли, а также удлиняет время нахождения предприятия в теневой зоне.

На рисунках 4 и 5 показаны траектории капитала и чистой прибыли для $u = 1$ и для $u = u_{\Delta}$, где u_{Δ} (см. рис. 6) падает с 1 до 0.2 в момент Δ введения налогов (80 % капитала уводится в “тень”).

При $u = u_{\Delta}$ капитал и чистая прибыль остаются выше соответственно капитала и чистой прибыли, получаемых при обелении капитала ($u = 1$): в теневой зоне увод в тень некоторой доли (в данном случае 80 %) капитала более выгоден, чем сохранение всего капитала белым. Сравнивая рисунок 4 с рисунком 2, видим, что при обеих стратегиях, $u = u_{\Delta}$ и $u = 1$, скорость

роста капитала в теневой зоне существенно ниже, чем в случае оптимальной длительности доналогового периода. Время нахождения в теневой зоне существенно удлиняется.

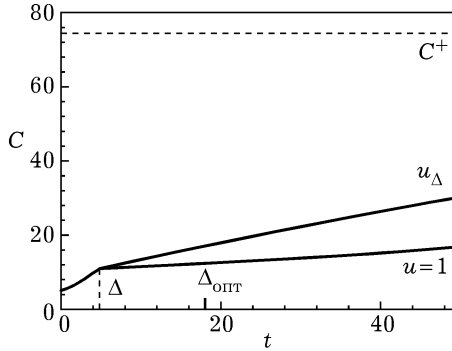


Рис. 4

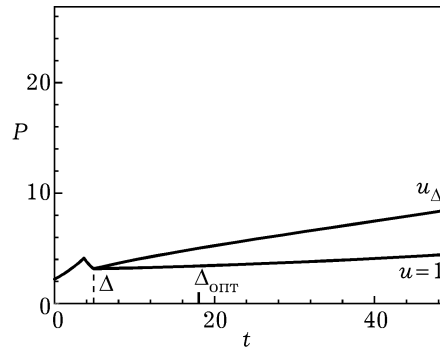


Рис. 5

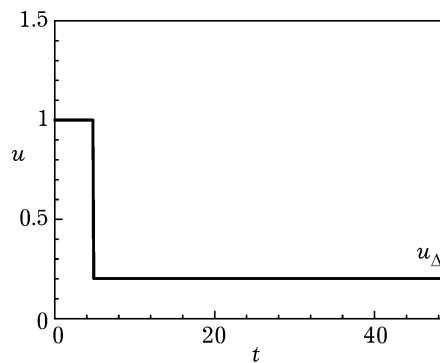


Рис. 6

1.7. Оптимизация капитала и прибыли по длине доналогового периода

Рассмотрим графики капитала при оптимальной длительности $\Delta_{\text{опт}}$ доналогового периода и при его длительности Δ , меньшей оптимальной. Сравним эти графики для наилучших стратегий: стратегии обеления $u = 1$ при оптимальной длительности $\Delta_{\text{опт}}$ и стратегии $u = u_{\Delta}$ частичного увода в тень при длительности Δ .

Наложение графиков показано на рисунке 7 (там же для сравнения показан график динамики капитала при стратегии обеления $u = 1$ для длительности Δ , эта стратегия, как замечено выше, в данном случае неэффективна). Мы видим, что обеленный капитал, отвечающий оптимальной длительности $\Delta_{\text{опт}}$, начиная с момента Δ , все время выше, чем частично уведенный в тень капитал, отвечающий длительности Δ .

То же самое показывает наложение графиков чистой прибыли (рисунок 8). Эти иллюстрации свидетельствуют о том, что оптимальная длительность $\Delta_{\text{опт}}$ — действительно наилучшая для предприятия в отношении как капитала, так и чистой прибыли. Таким образом, можно сделать соответствующий эвристический вывод:

При оптимальной длительности $\Delta_{\text{опт}}$ доналогового периода стратегия обеления капитала, $u = 1$, все время дает бóльшие значения капитала, чистой прибыли и скоростей их прироста, чем любая стратегия и разделения капитала на белый и теневой при любой длительности Δ доналогового периода, отличной от $\Delta_{\text{опт}}$.

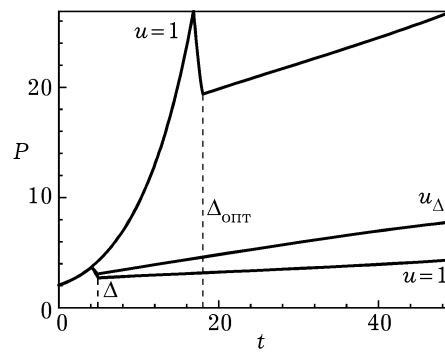
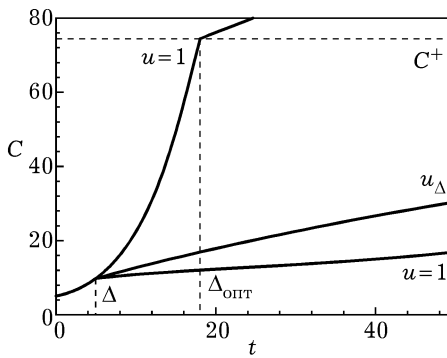
1.8. Оптимизация налога по длине доналогового периода

Рассмотрим вопрос о целесообразности назначения оптимальной длительности $\Delta_{\text{опт}}$ доналогового периода с точки зрения государства.

Государство заинтересовано в максимизации налога

$$N = \tau u\Pi$$

в каждый год, а также в максимизации суммарного налога Z за прошедшие годы.



Для суммарного налога Z за время от начала деятельности предприятия (нулевой момент) до текущего момента t используем интегральную формулу:

$$Z = Z(t) = \int_0^t N(s) ds,$$

здесь $N(s)$ — годовой налог, отвечающий состоянию предприятия в момент $s < t$. Отметим, что стремление максимизировать текущий налог N толкает государство к установлению короткой длительности Δ доналогового периода (что, как показано выше, не согласуется с интересами предприятия).

На рисунке 9 показаны графики текущего налога N при оптимальной длительности $\Delta_{\text{опт}}$ доналогового периода и при его длительности Δ , меньшей оптимальной.

Графики соответствуют наилучшим ответным стратегиям предприятия: стратегии обеления $u = 1$ при оптимальной длительности $\Delta_{\text{опт}}$ и стратегии $u = u_\Delta$ частичного увода в тень при длительности Δ . Мы видим, что при оптимальной длительности $\Delta_{\text{опт}}$ текущий налог, начиная с момента $\Delta_{\text{опт}}$, значительно выше, чем текущий налог, отвечающий меньшей доналоговой длительности Δ . Относительное преимущество назначения меньшей доналоговой длительности Δ , конечно, в том, что при назначении этой длительности текущий налог — ненулевой на отрезке времени между Δ и $\Delta_{\text{опт}}$, в то время, как при назначении оптимальной доналоговой длительности $\Delta_{\text{опт}}$ на данном

отрезке времени текущий налог равен нулю. Однако это краткосрочное преимущество (при весьма малом размере налога на отрезке времени между Δ и Δ_{opt}) с лихвой компенсируется значительным выигрышем в размере налога, который получается по прошествии относительно малого времени — от Δ до Δ_{opt} — при назначении оптимальной длительности Δ_{opt} доналогового периода. Иными словами, небольшая задержка во времени введения налогов приводит к существенному выигрышу в размере взимаемого налога N .

Тот же эффект демонстрирует наложение графиков суммарного налога Z (рисунок 10).

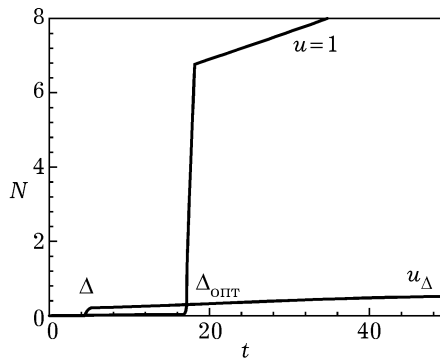


Рис. 9

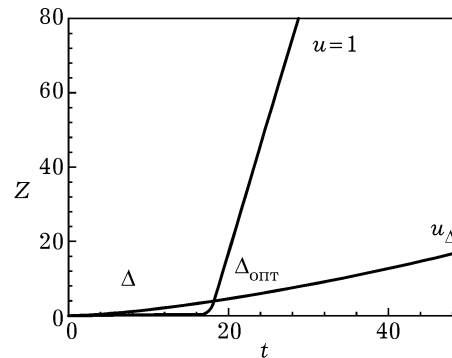


Рис. 10

Эти иллюстрации дают возможность предположить, что оптимальная доналоговая длительность Δ_{opt} является наилучшей для государства — в отношении как текущего, так и суммарного налога — с той лишь поправкой, что эффект существенного преимущества оптимальной длительности Δ_{opt} проявляется только после ее фактического введения.

Можно предположить следующее:

При оптимальной длительности Δ_{opt} доналогового периода оптимальная стратегия предприятия (стратегия обеления капитала $u = 1$), начиная с момента Δ_{opt} , дает большие значения текущего налога, а начиная с момента $\Delta_{\text{opt}} > \Delta_{\text{opt}}$ — большие значения суммарного налога, чем любая стратегия u предприятия при любой длительности Δ доналогового периода меньшей Δ_{opt} .

Однако формальный анализ данного утверждения выходит за пределы этой работы.

1.9. Комментарий к графикам

Графики траекторий 2–10 симулированы с использованием программы MAPLE при следующих значениях параметров:

- a — выпуск при единичном капитале — 0,5;
- σ — коэффициент себестоимости — 0,1;
- μ — коэффициент устаревания капитала — 0,2;
- α — максимальный показатель производственной функции — 1;
- β — минимальный показатель производственной функции — 0,9;
- τ — доля налоговых отчислений — 0,35;
- $\Delta \in [0, T]$ — длительность доналогового периода.

2. Игровая модель и ее математический анализ

В этой части рассматривается динамическая игровая модель финансового взаимодействия государства и предприятия по налоговой линии, при этом активно используются понятия, обозначения и результаты первой части статьи. Отметим, что при рассмотрении игровых моделей важным является выбор понятия оптимального поведения участников игрового процесса. Наиболее известным здесь является понятие равновесия по Нэшу (см., например, [2], [3]). Однако это понятие приемлемо, если оперирующие стороны в некотором смысле равноправны. При описании же взаимодействия государства и предприятия естественно считать, что государство обладает большими возможностями, нежели предприятие. Т.е. здесь более подходит иерархический подход, восходящий к работам Штакельберга и Ю.Б.Гермейера (см. [3], [4]). Исходя из этих соображений, мы занимаемся здесь изучением равновесия по Штакельбергу в нашей динамической игровой модели.

Отметим, что при описании изучаемой игровой модели активно используются без особых пояснений некоторые обозначения, понятия и факты из математической теории оптимального управления (см., например, [5], [6]) и из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [7]). Это обстоятельство делает изложение более сухим и формализованным по сравнению с первой частью статьи.

Поставим игровую задачу. Везде далее предполагается, что

$$\alpha = 1, \quad \beta \in (0, 1),$$

тогда

$$\gamma(u) = \beta + (1 - \beta)u. \quad (2.1)$$

Динамика капитала предприятия при $C > 0$ на отрезке $[0, T]$ задается двухступенчатым уравнением

$$\dot{C}(t) = \begin{cases} (aC^{\gamma(u(t))}(t) - \sigma C(t)) - \mu C(t), & t \in [0, \Delta), \\ (aC^{\gamma(u(t))}(t) - \sigma C(t))(1 - \tau u(t)) - \mu C(t), & t \in [\Delta, T], \end{cases} \quad (2.2)$$

$$C(0) = C_0 > 0, \quad (2.3)$$

где $\Delta \in [0, T]$, $u(t) \in [0, 1]$ — произвольное измеримое по Лебегу управление на $[0, T]$, константы a, σ, μ положительны, константа $\tau \in (0, 1)$. При $\Delta = 0$ будем считать, что сразу включается вторая ступень на всем $[0, T]$, а при $\Delta = T$ будем считать, что первая ступень “работает” при $t \in [0, T]$, а вторая отсутствует. Подобного рода соглашения мы будем использовать дальше и для других двухступенчатых уравнений и функций.

З а м е ч а н и е 2. В соответствии с материалом первой части следовало бы считать, что в (2.2), (2.3) $C > 1, C_0 > 1$. Однако для дальнейшего нашего анализа это малосущественно и мы для полноты картины считаем, что в (2.2), (2.3) $C > 0, C_0 > 0$.

При $t \in [0, T]$, $\Delta \in [0, T]$, $C > 0, u \in [0, 1]$ определим функцию

$$F(t, \Delta, C, u) = \begin{cases} (aC^{\gamma(u)} - \sigma C) - \mu C, & t \in [0, \Delta) \\ (aC^{\gamma(u)} - \sigma C)(1 - \tau u) - \mu C, & t \in [\Delta, T]. \end{cases} \quad (2.4)$$

Тогда задача Коши (2.2), (2.3) переписывается в виде

$$\dot{C}(t) = F(t, \Delta, C(t), u(t)), \quad (2.5)$$

$$C(0) = C_0 > 0, \quad (2.6)$$

где $C > 0$.

Фиксируем константу $\Delta \in [0, T]$, произвольное измеримое управление $u = u(t) \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$, и рассмотрим задачу Коши (2.5), (2.6), как это принято делать в теории оптимального управления (см., например, [5], [6]), в классе абсолютно непрерывных функций. Для доказательства существования и единственности решения рассматриваемой задачи Коши на всем отрезке $[0, T]$ можно использовать теорему IA [6, с. 66], доопределяя функцию $F(t, \Delta, C, u)$ при $t < 0$ и $t > T$ некоторой константой. Согласно теореме IA решение $C(t)$ рассматриваемой задачи Коши существует и единственно на максимальном по длине полусегменте $[0, \theta_+)$, где $0 < \theta_+ \leq +\infty$. Отметим, что $C(t) > 0$ на $[0, \theta_+)$. Покажем, что $\theta_+ > T$. Допустим, что $\theta_+ \leq T$. Из условия $\beta \in (0, 1)$ и формулы (2.1) вытекает неравенство

$$\beta \leq \gamma(u) \leq 1 \quad \forall u \in [0, 1]. \quad (2.7)$$

Поэтому при $t \in R^1$, $\Delta \in [0, T]$, $C > 0$, $u \in [0, 1]$ имеет место оценка

$$|F(t, \Delta, C, u)| \leq m(1 + C), \quad (2.8)$$

где $m > 0$ — константа. Используя известные теоремы сравнения (см., например, [7], [8]), при $t \in [0, \theta_+)$ получаем неравенство

$$C(t) \leq e^{mt}(1 + C_0).$$

От противного теперь можно показать, что существует такая последовательность чисел $t_i \in [0, \theta_+)$, $i = 1, 2, \dots$, что при $i \rightarrow \infty$ $t_i \rightarrow \theta_+$ и

$$C(t_i) \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Для рассматриваемой задачи Коши (2.5), (2.6) введем уравнение сравнения вида

$$\dot{y} = -(\sigma + \mu)y, \quad (2.10)$$

$$y(0) = C_0. \quad (2.11)$$

Решение задачи Коши (2.10), (2.11) выписывается в явном виде:

$$y(t) = e^{-(\sigma + \mu)t} C_0.$$

Используя известные теоремы сравнения (см. [7], [8]), можно утверждать, что при $t \in [0, \theta_+)$

$$C(t) \geq e^{-(\sigma + \mu)t} C_0. \quad (2.12)$$

Из (2.9), (2.12) получаем противоречие. Итак, доказана

Лемма 1. При произвольном измеримом управлении $u = u(t) \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$ решение задачи Коши (2.5), (2.6) определено и единственно на $[0, T]$.

В дальнейшем произвольную измеримую функцию $u(t) \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$ будем обозначать символом $u(\cdot)$. Так как решение $C(t)$ задачи Коши (2.5), (2.6) зависит от пары $(\Delta, u(\cdot))$, то эту зависимость можно отразить формулой

$$C(t) = C(t | \Delta, u(\cdot)). \quad (2.13)$$

Опишем классы стратегий 2-х игроков — государства и предприятия. Под стратегией государства будем понимать величину $\Delta \in [0, T]$. Государство распоряжается выбором стратегии $\Delta \in [0, T]$. Предприятие же в нашей

игровой модели распоряжается выбором измеримого управления $u(\cdot)$, которое и является его стратегией.

При $t \in [0, T]$, $\Delta \in [0, T]$, $C > 0$, $u \in [0, 1]$ определим две функции (см. (2.2)):

$$\Pi_1(C, u) = aC^{\gamma(u)} - \sigma C, \quad (2.14)$$

$$P_1(t, \Delta, C, u) = \begin{cases} \Pi_1(C, u), & t \in [0, \Delta) \\ \Pi_1(C, u) \cdot (1 - \tau u), & t \in [\Delta, T]. \end{cases} \quad (2.15)$$

Определение 1. Текущей прибылью предприятия в момент $t \in [0, T]$ при стратегиях Δ , $u(\cdot)$ назовем величину (см. (2.13), (2.14))

$$\Pi(t) = \Pi(t | \Delta, u(\cdot)) = \Pi_1(C(t), u(t)), \quad (2.16)$$

где $u(t) = u(t | u(\cdot))$.

Определение 2. Текущей чистой прибылью предприятия в момент $t \in [0, T]$ при стратегиях Δ , $u(\cdot)$ назовем (см. (2.13)–(2.15)) величину

$$P(t) = P(t | \Delta, u(\cdot)) = P_1(t, \Delta, C(t), u(t)), \quad (2.17)$$

где $u(t) = u(t | u(\cdot))$.

Качество пары стратегий Δ , $u(\cdot)$ с точки зрения государства условимся оценивать интегральным функционалом вида (см. (2.14), (2.16)):

$$J(\Delta, u(\cdot)) = \int_{\Delta}^T e^{-\lambda s} u(s) \cdot \tau \cdot \Pi(s) ds, \quad (2.18)$$

где параметр дисконтирования $\lambda > 0$.

Государство стремится к максимизации величины (2.18) за счет выбора своей стратегии $\Delta \in [0, T]$.

Качество пары стратегий Δ , $u(\cdot)$ с точки зрения предприятия будет оцениваться некоторым функционалом $I(\Delta, u(\cdot))$ общего вида. Считается, что предприятие стремится к максимизации величины $I(\Delta, u(\cdot))$ за счет выбора своей стратегии $u(\cdot)$. Нами будут рассмотрены два вида функционалов $I(\Delta, u(\cdot))$. Первый, более простой, характеризуется тем, что

$$I(\Delta, u(\cdot)) = I_1(\Delta, C(\cdot)). \quad (2.19)$$

Второй, более сложный, вид характеризуется тем, что

$$I(\Delta, u(\cdot)) = I_2(\Delta, C(\cdot), P(\cdot)). \quad (2.20)$$

В (2.19), (2.20) $C(t)$, $P(t)$ определяются формулами (2.13), (2.17). Например, характерным представителем функционалов типа I_1 являются интегральные функционалы вида

$$\int_0^T g_1(s, C(s)) ds,$$

а типа I_2 — интегральные функционалы вида

$$\int_0^T g_2(s, C(s), P(s)) ds,$$

где скалярная функция g_1 определена и непрерывна по совокупности переменных (s, C) при $s \in [0, T]$, $C \in R^1$; скалярная функция g_2 определена и непрерывна по совокупности переменных (s, C, P) при $s \in [0, T]$, $C \in R^1$, $P \in R^1$.

Перейдем теперь к определению понятия равновесия $(\Delta_*, u_*(\cdot))$ по Штакельбергу (см. [2]–[4], [9]). В качестве ведущего игрока (лидера) мы фиксируем государство. Оно выбирает и сообщает величину $\Delta \in [0, T]$ предприятию. В качестве ведомого игрока (исполнителя) мы фиксируем предприятие. Зная Δ , предприятие стремится к максимизации величины $I(\Delta, u(\cdot))$ по допустимым управлениям $u(\cdot)$. Таким образом, его интересует величина

$$m(\Delta) = \max_{u(\cdot) \in U} I(\Delta, u(\cdot)), \quad (2.21)$$

где U — множество измеримых функций $u(t) \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$. В общем случае существование такого максимума проблематично. Обозначим через $\Omega(\Delta)$ множество функций $u(\cdot) \in U$, максимизирующих функционал $I(\Delta, u(\cdot))$. Если $\Omega(\Delta) \neq \emptyset$ при всех $\Delta \in [0, T]$, то лидеру естественно рассмотреть задачу вычисления величины (см. (2.18))

$$\gamma = \max_{\Delta \in [0, T]} \min_{u(\cdot) \in \Omega(\Delta)} J(\Delta, u(\cdot)). \quad (2.22)$$

Отметим, что в общем случае существование такого максимина проблематично. Предположим, что он существует. Тогда пара стратегий $(\Delta_*, u_*(\cdot))$ называется равновесием по Штакельбергу, если (см. (2.22))

$$\min_{u(\cdot) \in \Omega(\Delta_*)} J(\Delta_*, u(\cdot)) = \gamma, u_*(\cdot) \in \Omega(\Delta_*).$$

Таким образом, при поиске равновесий по Штакельбергу приходится, в частности, озаботиться существованием максимума в (2.21) при произвольном $\Delta \in [0, T]$ и максимина в (2.22). Именно этим мы и будем заниматься при некоторых специальных предположениях о монотонности функционалов $I_1(\Delta, C(\cdot))$, $I_2(\Delta, C(\cdot), P(\cdot))$ соответственно по $C(\cdot)$ и парам $(C(\cdot), P(\cdot))$ при произвольном фиксированном $\Delta \in [0, T]$.

В дальнейшем будем предполагать выполненным следующее неравенство:

$$(a - \sigma)(1 - \tau) \geq \mu. \quad (2.23)$$

Лемма 2. При произвольных $t \in [0, T]$, $\Delta \in [0, T]$ и $C > 0$ функция

$$G(t, \Delta, C) = \max_{u \in [0, 1]} F(t, \Delta, C, u) \quad (2.24)$$

удовлетворяет неравенству

$$G(t, \Delta, C) \geq 0. \quad (2.25)$$

Доказательство. Из формул (2.1), (2.4), (2.23) следует, что при $t \in [0, T]$, $\Delta \in [0, T]$ и $C > 0$

$$F(t, \Delta, C, 1) \geq 0.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

Нетрудно доказать, что при фиксированном $\Delta \in [0, T]$ функция $G(t, \Delta, C)$ при $C > 0$ локально липшицева по C равномерно относительно $t \in [0, T]$. Это

обстоятельство оказывается полезным при рассмотрении следующей задачи Коши:

$$\dot{y} = G(t, \Delta, y), \tag{2.26}$$

$$y(0) = C_0 > 0, \tag{2.27}$$

где $\Delta \in [0, T]$ фиксировано, $y > 0$. Доопределим функцию $G(t, \Delta, y)$ при $t < 0$ и $t > T$ некоторой константой. Используя некоторое видоизменение теоремы IA [6, с. 66], можно утверждать, что решение задачи Коши (2.26), (2.27) $\hat{y}(t, \Delta)$ определено и единственно на некотором максимальном по длине полусегменте $[0, \theta_+)$, где $0 < \theta_+ \leq +\infty$ (видоизменение теоремы IA состоит в замене требования непрерывной дифференцируемости правой части уравнения (2.26) по y на условие локальной липшицевости, о котором говорилось выше).

Далее, используя неравенство (2.8), аналогично тому, как это делалось при рассмотрении задачи Коши (2.5), (2.6) (где $u = u(t)$, $t \in [0, T]$ — некоторая измеримая функция), можно обосновать неравенство $\theta_+ > T$. Таким образом, интересующее нас решение $\hat{y}(t, \Delta)$ при произвольном фиксированном $\Delta \in [0, T]$ определено на всем отрезке $[0, T]$ и выполняется неравенство

$$\hat{y}(t, \Delta) > 0 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.28}$$

Для дальнейшего изучения свойств задачи Коши (2.26), (2.27) полезно рассмотреть две функции (см. (2.2))

$$f_1(y, u) = ay^{\gamma(u)} - \sigma y, \tag{2.29}$$

$$f_2(y, u) = (ay^{\gamma(u)} - \sigma y)(1 - \tau u), \tag{2.30}$$

где $y > 0$, $u \in [0, 1]$. Очевидно, что $\max_{u \in [0, 1]} f_1(y, u)$ достигается при $0 < y < 1$ в единственной точке $u = 0$, при $y = 1$ при любом $u \in [0, 1]$, а при $y > 1$ в единственной точке $u = 1$. Определим новую функцию $\tilde{u}_1(y)$ по формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(y) &\equiv 0 \quad \text{при } y \in (0, 1), \\ \tilde{u}_1(y) &\equiv 1 \quad \text{при } y \geq 1. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Для вычисления $\max_{u \in [0, 1]} f_2(y, u)$ полезна следующая формула для частной производной по u от функции $f_2(y, u)$ при $y > 0$, $u \in [0, 1]$:

$$f_{2u}(y, u) = y^{\gamma(u)} \cdot r(y, u), \tag{2.32}$$

где

$$r(y, u) = a(1 - \beta) \ln y \cdot (1 - \tau u) - a\tau + \sigma y^{1-\gamma(u)} \tau. \tag{2.33}$$

При $0 < y < 1$ функция $r(y, u)$ в силу (2.23) удовлетворяет неравенству

$$r(y, u) < 0.$$

Поэтому при $0 < y < 1$ функция $f_2(y, u)$ строго монотонно убывает по $u \in [0, 1]$ и максимум по $u \in [0, 1]$ достигается в единственной точке $u = 0$. При $y = 1$ максимум по $u \in [0, 1]$ функции $f_2(y, u)$ (см. (2.30)) достигается при $u = 0$. При $0 < y \leq 1$ определим новую функцию $\tilde{u}_2(y)$:

$$\tilde{u}_2(y) \equiv 0 \quad \text{при } 0 < y \leq 1. \tag{2.34}$$

При $y > 1$ функция $r(y, u)$ строго монотонно убывает по $u \in [0, 1]$. Рассмотрим три возможных случая.

1 случай: при данном $y > 1$

$$r(y, 1) \geq 0.$$

Здесь (см. (2.30), (2.32), (2.33)) функция $f_2(y, u)$ строго монотонно возрастает по $u \in [0, 1]$ и единственной точкой максимума будет точка $\tilde{u}_2(y) = 1$.

2 случай: при данном $y > 1$

$$r(y, 1) < 0, \quad r(y, 0) > 0.$$

Здесь (см. (2.30), (2.32), (2.33)) функция $f_2(y, u)$ сначала строго монотонно возрастает по u , а потом строго монотонно убывает по u на $[0, 1]$ и максимум по $u \in [0, 1]$ функции $f_2(y, u)$ достигается в единственной точке $\tilde{u}_2(y) \in (0, 1)$.

3 случай: при данном $y > 1$

$$r(y, 1) < 0, \quad r(y, 0) \leq 0.$$

Здесь (см. (2.30), (2.32), (2.33)) функция $f_2(y, u)$ убывает строго монотонно по $u \in [0, 1]$ и максимум достигается в единственной точке $\tilde{u}_2(y) = 0$.

Отметим, что в (2.23) $\tau \in (0, 1)$, $\mu > 0$, поэтому выполняется неравенство

$$a > \sigma. \quad (2.35)$$

Рассмотрим при $y > 1$ уравнение

$$r(y, 1) = 0. \quad (2.36)$$

Нетрудно видеть (см. (2.33)), что уравнение (2.36) имеет единственный корень

$$C^+ = e^{\frac{(a-\sigma)\tau}{a(1-\beta)(1-\tau)}}. \quad (2.37)$$

Из формулы (2.33) легко следует, что при $y \geq C^+$

$$r(y, 1) \geq 0,$$

а при $y \in (1, C^+)$

$$r(y, 1) < 0.$$

Таким образом, случай 1 имеет место при $y \geq C^+$, а случаи 2, 3 возможны лишь при $y \in (1, C^+)$.

Рассмотрим далее при $y > 1$ уравнение $r(y, 0) = 0$, т. е. уравнение

$$a(1 - \beta) \ln y - a\tau + \sigma y^\beta \tau = 0. \quad (2.38)$$

Из неравенства (2.35) вытекает, что при $y > 1$ и y близких к 1, $r(y, 0) < 0$, а при y достаточно больших $r(y, 0) > 0$. Таким образом, уравнение (2.38) при $y > 1$ имеет хотя бы один корень. Пусть $y = \theta > 1$ один из таких корней. Нетрудно видеть (см. (2.38)), что при $y \in (1, \theta)$ $r(y, 0) < 0$, а при $y > \theta$ $r(y, 0) > 0$. Таким образом, уравнение (2.38) имеет единственный корень

$\theta > 1$, мы его обозначим через C^- . Из сказанного и формул (2.32)–(2.34) вытекают соотношения:

$$1 < C^- < C^+, \tag{2.39}$$

$$\tilde{u}_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < y \leq C^- \\ 1 & \text{при } y \geq C^+, \end{cases} \tag{2.40}$$

$$\tilde{u}_2(y) \in (0, 1) \quad \text{при } y \in (C^-, C^+). \tag{2.41}$$

Относительно свойств функции $\tilde{u}_2(y)$ при $y > 0$ можно высказать следующее утверждение.

Лемма 3. Функция $\tilde{u}_2(y)$ непрерывна при $y > 0$.

Доказательство. Как видно из (2.39), (2.40), достаточно обосновать непрерывность функции $\tilde{u}_2(y)$ при $y > 1$. Выше были рассмотрены три случая поведения функции $r(y, u)$ (см. (2.32), (2.33)) и было установлено, что при $y > 1$ функция $f_2(y, u)$ имеет единственную точку максимума по $u \in [0, 1]$. Эту точку мы и обозначили через $\tilde{u}_2(y)$. Учитывая непрерывность по совокупности переменных функции $f_2(y, u)$ при $y > 1, u \in [0, 1]$ и используя единственность максимизатора $\tilde{u}_2(y)$, можно от противного показать, что функция $\tilde{u}_2(y)$ непрерывна при $y > 1$.

При $t \in [0, T], \Delta \in [0, T], y > 0$ определим новую функцию $u_*(t, \Delta, y)$ следующим образом (см. (2.31), (2.40), (2.41)):

$$\begin{aligned} u_*(t, \Delta, y) &= \tilde{u}_1(y) & \text{при } t \in [0, \Delta), \\ u_*(t, \Delta, y) &= \tilde{u}_2(y) & \text{при } t \in [\Delta, T]. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Из сказанного при $t \in [0, T], \Delta \in [0, T], y > 0$ мы получаем равенство

$$G(t, \Delta, y) = F(t, \Delta, y, u_*(t, \Delta, y)) \tag{2.43}$$

и то, что функция $\hat{y}(t, \Delta)$ (см. (2.26)–(2.28)) является решением следующих задач Коши:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= F(t, \Delta, y, u_*(t, \Delta, y)), \\ y(0) &= C_0 > 0, \\ \dot{y} &= F(t, \Delta, y, u_*(t, \Delta, \hat{y}(t, \Delta))), \\ y(0) &= C_0 > 0. \end{aligned}$$

Из (2.42) и леммы 3 вытекает непрерывность функции $u_*(t, \Delta, \hat{y}(t, \Delta))$ по $t \in [\Delta, T]$.

Покажем теперь, что функция $u_*(t, \Delta, \hat{y}(t, \Delta))$ измерима по $t \in [0, \Delta)$, где $\Delta \in (0, T]$. Из (2.23) и (2.29) следует, что

$$\max_{u \in [0, 1]} f_1(y, u) \geq \frac{\mu}{1 - \tau} y \tag{2.44}$$

при $y > 0$. Отсюда и из определения решения $\hat{y}(t, \Delta)$ следует, что

$$\frac{d\hat{y}(t, \Delta)}{dt} \geq \frac{\tau\mu}{1 - \tau} C_0 > 0 \tag{2.45}$$

почти всюду при $t \in [0, \Delta)$.

Из (2.31), (2.45) вытекает измеримость функции $\tilde{u}_1(\hat{y}(t, \Delta))$ при $t \in [0, \Delta)$, т.е. измеримость функции $u_*(t, \Delta, \hat{y}(t, \Delta))$ по $t \in [0, \Delta)$. Из сказанного следует, что при фиксированном $\Delta \in [0, T]$ функция $u_*(t, \Delta, \hat{y}(t, \Delta))$ является измеримым управлением на $[0, T]$.

Таким образом, при фиксированном $\Delta \in [0, T]$ функция $\hat{y}(t, \Delta)$ является решением задачи Коши (2.5), (2.6) с измеримым управлением

$$\hat{u}(t, \Delta) = u_*(t, \Delta, \hat{y}(t, \Delta)). \quad (2.46)$$

Фиксируем далее произвольное $\Delta \in [0, T]$, произвольное допустимое управление $u(\cdot)$ и рассмотрим соответствующее решение задачи Коши (2.5), (2.6) $C(t) = C(t | \Delta, u(\cdot))$. Из (2.24), (2.43) при $t \in [0, T]$, $y > 0$ вытекает неравенство

$$F(t, \Delta, y, u(t)) \leq F(t, \Delta, y, u_*(t, \Delta, y)).$$

Отсюда и из вышесказанного с помощью известных теорем сравнения (см. [7], [8]) при $t \in [0, T]$ получаем неравенство

$$C(t | \Delta, u(\cdot)) \leq \hat{y}(t, \Delta). \quad (2.47)$$

Будем считать, что функционал $I(\Delta, u(\cdot))$, к максимизации которого стремится предприятие, имеет вид (2.19). Более того, предположим, что функционал $I_1(\Delta, C(\cdot))$ (см. (2.19)) при каждом фиксированном $\Delta \in [0, T]$ определен на множестве скалярных непрерывных на $[0, T]$ функций и удовлетворяет следующему *условию монотонности*:

из того, что для двух произвольных непрерывных на $[0, T]$ функций $C_1(t)$, $C_2(t)$ выполняется поточечное неравенство

$$C_1(t) \leq C_2(t), \quad t \in [0, T] \quad (2.48)$$

следует, что

$$I_1(\Delta, C_1(\cdot)) \leq I_1(\Delta, C_2(\cdot)).$$

Из сказанного выше (см. в частности неравенство (2.47)) и сформулированного условия монотонности вытекает следующая лемма.

Лемма 4. При любом $\Delta \in [0, T]$ управление $\hat{u}(t, \Delta)$ (см. (2.46)) является оптимальным для максимизируемого функционала $I_1(\Delta, C(\cdot))$.

Вопрос о достижении минимума по $u(\cdot) \in \Omega(\Delta)$ в (2.22) упрощается, если множество $\Omega(\Delta)$ является одноточечным с обычным отождествлением произвольных допустимых управлений $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$, когда $u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду на $[0, T]$.

Лемма 5. Пусть выполнены неравенство (ср. с (2.23))

$$(a - \sigma)(1 - \tau) > \mu \quad (2.49)$$

и следующее **усиленное условие монотонности**:

1) функционал $I_1(\Delta, C(\cdot))$ удовлетворяет вышесформулированному условию монотонности;

2) при произвольном фиксированном $\Delta \in [0, T]$, если $C_1(t)$, $C_2(t)$ — произвольные непрерывные функции на $[0, T]$, причем для них выполняется поточечное неравенство (2.48) и $C_1(t_1) < C_2(t_1)$ хотя бы при одном $t_1 \in [0, T]$, то

$$I_1(\Delta, C_1(\cdot)) < I_1(\Delta, C_2(\cdot)).$$

Тогда множество $\Omega(\Delta)$ одноточечно для каждого $\Delta \in [0, T]$.

Доказательство. Допустим, что при данном $\Delta \in [0, T]$ помимо управления $\hat{u}(t, \Delta)$ (см. (2.46)) оптимальным является также некоторое другое допустимое управление $u_0(t)$, $t \in [0, T]$, причем оно отличается от $\hat{u}(t, \Delta)$ на множестве положительной меры из $[0, T]$. Обозначим через $C_0(t)$ соответствующее ему решение задачи Коши (2.5), (2.6). Согласно сказанному выше при $t \in [0, T]$ для $C_0(t)$ выполняется поточечное неравенство (2.47). Если оно выполняется строго хотя бы при одном $t_1 \in [0, T]$, то в силу **усиленного условия монотонности** мы получим противоречие с нашим исходным предположением. Допустим, что

$$C_0(t) = \hat{y}(t, \Delta) \quad \forall t \in [0, T]$$

и попробуем прийти к противоречию. При анализе свойств функций $f_1(y, u)$, $f_2(y, u)$ (см. (2.29), (2.30)) было установлено, что при сделанных предположениях максимум по $u \in [0, 1]$ от этих функций достигается в единственной точке $\tilde{u}_1(y)$, $\tilde{u}_2(y)$ соответственно, если $y \in (0, 1)$ или $y > 1$. При $y = 1$ в качестве максимизирующих точек для $f_1(y, u)$ выступают все точки отрезка $[0, 1]$, а для $f_2(1, u)$ максимум достигается лишь при $u = 0$. При $y > 0$ для $f_1(y, u)$ справедливо неравенство (2.44). Далее, в силу (2.30), (2.49) при $y > 0$ выполняется неравенство

$$\max_{u \in [0, 1]} f_2(y, u) \geq (a - \sigma)(1 - \tau)y.$$

При $\Delta \in [0, T]$ отсюда и из леммы 2 вытекает почти всюду при $t \in [\Delta, T]$ неравенство (ср. с (2.45))

$$\frac{d\hat{y}(t, \Delta)}{dt} \geq \theta_1 \hat{y}(\Delta, \Delta),$$

где

$$\theta_1 = (a - \sigma)(1 - \tau) - \mu > 0. \tag{2.50}$$

Из (2.45), (2.50) почти всюду при $t \in [0, T]$ получаем неравенство

$$\frac{d\hat{y}(t, \Delta)}{dt} \geq \theta_2 C_0 > 0, \tag{2.51}$$

где

$$\theta_2 = \min \left\{ \frac{\tau\mu}{1 - \tau}, \theta_1 \right\}.$$

Из неравенства (2.51) следует, что уравнение $\hat{y}(t, \Delta) = 1$ относительно $t \in [0, T]$ при фиксированном $\Delta \in [0, T]$ имеет не более одного корня. На основании сказанного почти всюду на $[0, T]$ получаем равенство $u_0(t) = \hat{u}(t, \Delta)$. Что и требовалось доказать.

Таким образом, в условиях леммы 5 формула (2.22) переписывается в более простом виде (см. (2.46)):

$$\gamma = \max_{\Delta \in [0, T]} J(\Delta, \hat{u}(\cdot, \Delta)). \tag{2.52}$$

Однако вопрос о достижении здесь максимума по $\Delta \in [0, T]$ остается открытым. Попытаемся обосновать непрерывность по Δ на $[0, T]$ функции $J(\Delta, \hat{u}(\cdot, \Delta))$ в условиях леммы 5. Обозначим (ср. с (2.2), (2.29), (2.30)) при $y > 0$, $u \in [0, 1]$

$$g_1(y, u) = f_1(y, u) - \mu y, \tag{2.53}$$

$$g_2(y, u) = f_2(y, u) - \mu y \tag{2.54}$$

и рассмотрим следующие задачи Коши:

$$\dot{\xi} = \max_{u \in [0,1]} g_1(\xi, u), \quad (2.55)$$

$$\xi(0) = C_0 > 0,$$

$$\dot{\eta} = \max_{u \in [0,1]} g_2(\eta, u), \quad (2.56)$$

$$\eta(0, \Delta) = \xi(\Delta),$$

где $\Delta \in [0, T]$. Отметим, что при фиксированном $\Delta \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \hat{y}(t, \Delta) &= \xi(t) \quad \text{при } t \in [0, \Delta], \\ \hat{y}(t, \Delta) &= \eta(t - \Delta, \Delta) \quad \text{при } t \in [\Delta, T] \end{aligned} \quad (2.57)$$

и что правые части дифференциальных уравнений (2.55), (2.56) неотрицательны соответственно при $\xi > 0$, $\eta > 0$. Отсюда вытекают неравенства

$$\begin{aligned} \xi(t) &\geq C_0 > 0 \quad \text{при } t \geq 0, \\ \eta(t, \Delta) &\geq C_0 > 0 \quad \text{при } t \geq 0, \Delta \in [0, T]. \end{aligned}$$

Можно показать, что функции $g_1(y, u)$, $g_2(y, u)$ (см. (2.53), (2.54)) удовлетворяют при $y \geq C_0 > 0$ глобальному условию Липшица по y с некоторой константой $\chi > 0$, не зависящей от $u \in [0, 1]$. Поэтому функции $\max_{u \in [0,1]} g_1(y, u)$,

$\max_{u \in [0,1]} g_2(y, u)$ при $y \geq C_0 > 0$ тоже удовлетворяют по y глобальному условию Липшица с константой $\chi > 0$. Отсюда и из непрерывности функции $\xi(\Delta)$ при $\Delta \in [0, T]$ с помощью неравенства Гронуолла (см. [7]) получаем непрерывность функции $\eta(t, \Delta)$ по совокупности переменных при $t \in [0, T]$, $\Delta \in [0, T]$. Теперь (см. (2.14)–(2.16), (2.18)) нетрудно получить с помощью леммы 3 и формул (2.46), (2.57) искомую непрерывность функции $J(\Delta, \hat{u}(\cdot, \Delta))$ по $\Delta \in [0, T]$.

Таким образом, в условиях леммы 5 максимум по $\Delta \in [0, T]$ в (2.52) достигается хотя бы в одной точке. Пусть Δ_* одна из таких точек. Тогда пара стратегий $(\Delta_*, \hat{u}(\cdot, \Delta_*))$ является равновесием по Штакельбергу в рассматриваемой игре.

Теперь рассмотрим случай, когда функционал $I(\Delta, u(\cdot))$, к максимизации которого стремится предприятие, имеет вид (2.20). Более того, предположим, что функционал $I_2(\Delta, C(\cdot), P(\cdot))$ (см. (2.20)) при каждом фиксированном $\Delta \in [0, T]$ определен на множестве пар скалярных непрерывных на $[0, T]$ $C(t)$, $P(t)$ и удовлетворяет следующему **условию монотонности**: из того, что для непрерывных на $[0, T]$ функций $C_1(t)$, $C_2(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$ выполняются при $t \in [0, T]$ поточечные неравенства

$$C_1(t) \leq C_2(t), \quad P_1(t) \leq P_2(t), \quad (2.58)$$

следует, что

$$I_2(\Delta, C_1(\cdot), P_1(\cdot)) \leq I_2(\Delta, C_2(\cdot), P_2(\cdot)).$$

Для дальнейшего будет полезно найти условия на положительные константы a , σ и константы $\beta \in (0, 1)$, $\tau \in (0, 1)$, обеспечивающие для функции $f_2(y, u)$ (см. (2.30)) следующие неравенства:

$$f_{2y}(y, u) \geq 0 \quad \begin{aligned} &\forall y \in (0, C^+], \\ &\forall u \in [0, 1], \end{aligned} \quad (2.59)$$

где $f_{2y}(y, u)$ означает частную производную по y для $f_2(y, u)$, константа $C^+ > 1$ и определяется формулой (2.37). Учитывая формулы (2.29), (2.30) и неравенство $1 - \tau > 0$, нетрудно понять, что вместо неравенства (2.59) можно рассмотреть эквивалентное неравенство

$$f_{1y}(y, u) \geq 0 \quad \forall y \in (0, C^+], \forall u \in [0, 1]. \quad (2.60)$$

Учитывая формулу

$$f_{1y}(y, u) = a\gamma(u)y^{\gamma(u)-1} - \sigma$$

и неравенство (2.7), делаем вывод, что

$$f_{1y}(y, u) \geq a\gamma(u)\zeta^{\gamma(u)-1} - \sigma \quad (2.61)$$

при $y \in (0, C^+]$, $u \in [0, 1]$, где

$$\zeta = C^+ > 1. \quad (2.62)$$

Из (2.61), (2.62) и определения функции $\gamma(u)$ получаем при $y \in (0, C^+]$, $u \in [0, 1]$ неравенство

$$f_{1y}(y, u) \geq a\beta\zeta^{\beta-1} - \sigma.$$

Из сказанного вытекает

Лемма 6. Для выполнения неравенств (2.59), (2.60) достаточно потребовать выполнения неравенства

$$a \geq \frac{\sigma}{\beta} (C^+)^{1-\beta}. \quad (2.63)$$

Аналогом леммы 4 для рассматриваемого теперь случая является следующая лемма.

Лемма 7. При сделанных предположениях и при выполнении неравенства (2.63) для любого $\Delta \in [0, T]$ управление $\hat{u}(t, \Delta)$ (см. (2.46)) является оптимальным для максимизируемого функционала $I_2(\Delta, C(\cdot), P(\cdot))$.

Доказательство. Фиксируем $\Delta \in [0, T]$ и допустимое управление $u(\cdot)$. Покажем, что при $t \in [0, T]$ выполняется следующее неравенство:

$$P(t) = P_1(t, \Delta, C(t), u(t)) \leq \hat{P}(t) = P_1(t, \Delta, \hat{y}(t, \Delta), \hat{u}(t, \Delta)). \quad (2.64)$$

Для этого мы используем определения функций $P_1(t, \Delta, y, u)$, $u_*(t, \Delta, y)$ (см. (2.14), (2.15), (2.42)) и соотношения (2.31), (2.40), (2.47), (2.60). Фиксируем $t \in [0, T]$ и рассмотрим три возможных случая.

1) Пусть $\hat{y}(t, \Delta) \leq C^+$, тогда имеем цепочку неравенств

$$P(t) \leq P_1(t, \Delta, \hat{y}(t, \Delta), u(t)) \leq \hat{P}(t).$$

2) Пусть $C(t) \leq C^+ \leq \hat{y}(t, \Delta)$, тогда получаем цепочку неравенств

$$P(t) \leq P_1(t, \Delta, C^+, u(t)) \leq P_1(t, \Delta, C^+, 1) \leq \hat{P}(t).$$

3) Пусть $C^+ \leq C(t)$, тогда

$$P(t) \leq P_1(t, \Delta, C(t), 1) \leq \hat{P}(t).$$

Используя неравенства (2.47), (2.64) и монотонность функционала $I_2(\Delta, C(\cdot), P(\cdot))$ получаем, что при фиксированном $\Delta \in [0, T]$ и при произвольном допустимом управлении $u(\cdot)$ имеет место искомое неравенство

$$I_2(\Delta, C(\cdot), P(\cdot)) \leq I_2(\Delta, \hat{y}(\cdot, \Delta), \hat{P}(\cdot)).$$

Вопрос о достижении минимума по $u(\cdot) \in \Omega(\Delta)$ в (2.22) упрощается, если множество $\Omega(\Delta)$ является одноточечным с обычным отождествлением произвольных допустимых управлений $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$, когда $u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду на $[0, T]$. Поэтому и для функционала $I(\Delta, u(\cdot))$ вида $I_2(\Delta, C(\cdot), P(\cdot))$ важным является вопрос об условиях, обеспечивающих одноточечность множества $\Omega(\Delta)$ при любом $\Delta \in [0, T]$. Мы хотим получить аналог леммы 5 для функционалов $I(\Delta, u(\cdot))$ вида $I_2(\Delta, C(\cdot), P(\cdot))$.

Лемма 8. Пусть выполнены неравенства (2.49), (2.63) и следующее усиленное условие монотонности:

1) функционал $I_2(\Delta, C(\cdot), P(\cdot))$ удовлетворяет вышесформулированному условию монотонности;

2) при произвольном фиксированном $\Delta \in [0, T]$, если $C_1(t), P_1(t), C_2(t), P_2(t)$ — произвольные непрерывные функции на $[0, T]$, причем для них выполняются поточечные неравенства (2.58) и $C_1(t_1) < C_2(t_1)$ хотя бы при одном $t_1 \in [0, T]$, то

$$I_2(\Delta, C_1(\cdot), P_1(\cdot)) < I_2(\Delta, C_2(\cdot), P_2(\cdot)).$$

Тогда множество $\Omega(\Delta)$ одноточечно для каждого $\Delta \in [0, T]$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\Delta \in [0, T]$. В доказательствах лемм 4, 7 было показано, что при произвольном допустимом управлении $u(\cdot)$ выполняются неравенства (2.47), (2.64). В доказательстве леммы 5 с помощью неравенства (2.49) было обосновано: из равенства

$$C(t | \Delta, u(\cdot)) = \hat{y}(t, \Delta), \quad t \in [0, T]$$

вытекает, что почти всюду на $[0, T]$ $u(t) = \hat{u}(t, \Delta)$. Из сказанного вытекает, что при произвольном допустимом управлении $u(t)$, $t \in [0, T]$, которое отличается от $\hat{u}(t, \Delta)$ на множестве положительной меры, выполнены неравенства (см. (2.47), (2.64))

$$C(t | \Delta, u(\cdot)) \leq \hat{y}(t, \Delta), \quad t \in [0, T]$$

$$P(t | \Delta, u(\cdot)) \leq \hat{P}(t, \Delta), \quad t \in [0, T]$$

и хотя бы при одном $t_1 \in [0, T]$ выполняется строгое неравенство

$$C(t_1 | \Delta, u(\cdot)) < \hat{y}(t_1, \Delta).$$

Отсюда и из усиленного условия монотонности получаем искомое неравенство

$$I(\Delta, u(\cdot)) < I(\Delta, \hat{u}(\cdot, \Delta)).$$

Таким образом, в условиях леммы 8 формула (2.22) переписывается в виде (2.52). Непрерывность же функции $J(\Delta, \hat{u}(\cdot, \Delta))$ по $\Delta \in [0, T]$ в условиях леммы 8 вытекает из доказательства непрерывности этой функции в условиях леммы 5 (см. выше). Таким образом, в условиях леммы 8 максимум по $\Delta \in [0, T]$ в (2.52) достигается хотя бы в одной точке. Пусть Δ_* одна из

таких точек. Тогда пара стратегий $(\Delta_*, \hat{u}(\cdot, \Delta_*))$ является равновесием по Штакельбергу в рассматриваемой игре.

При написании этой статьи были использованы некоторые результаты и рисунки из дипломной работы студентки М. Моховой, выполненной на кафедре Оптимального управления факультета ВМК МГУ под руководством А. В. Кряжмского. Мы приносим благодарность Л. Н. Лукьяновой, которая нам очень помогла при наборе статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-01-00633).

Приложение. Обозначения основных параметров

- Y — величина валового выпуска продукции предприятия;
- C — объем капитала предприятия;
- ΔY — годовой прирост валового выпуска;
- ΔC — годовой прирост капитала;
- $\Delta Y/Y$ — относительный прирост годового капитала;
- C_{legal} — легализованный (белый) капитал;
- C_{shady} — теневой капитал;
- ΔC_{legal} — годовой прирост легализованного (белого) капитала;
- ΔC_{shady} — годовой прирост теневого капитала;
- $\Delta C_{\text{legal}}/C$ — относительный темп прироста легализованного (белого) капитала;
- $\Delta C_{\text{shady}}/C$ — относительный темп прироста теневого капитала;
- C^+ — легализующий капитал;
- a — положительный коэффициент пропорциональности;
- α — положительный коэффициент пропорциональности, $0 < \alpha \leq 1$;
- β — положительный коэффициент пропорциональности, $0 < \beta \leq 1$;
- α/β — эффективность отчисления в производство единицы белого капитала по сравнению с отчислением для единицы теневого капитала;
- u — доля легализованного (белого) капитала, $0 \leq u \leq 1$;
- μ — коэффициент устаревания капитала, $\mu > 0$;
- Π — валовая прибыль предприятия;
- S — себестоимость продукции;
- σ — себестоимость продукции при единичном капитале, $\sigma > 0$;
- Π_{legal} — доля легализованной (белой) валовой прибыли, соответствующая доле белого капитала;
- P — чистая прибыль предприятия;
- N — налог;
- τ — установленная государством доля налоговых отчислений предприятия, $0 < \tau < 1$;
- t — время;
- Δ_{opt} — оптимальная длительность доналогового периода;
- Δ — длительность доналогового периода;
- u_{Δ} — доля u , максимизирующая чистую прибыль в теневой зоне, $u_{\Delta} < 1$;
- Z — суммарный налог за время от начала деятельности предприятия;
- $N(s)$ — годовой налог, отвечающий состоянию предприятия в момент $s < t$;
- λ — коэффициент дисконтирования.

Список литературы

1. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику.—М.: Наука, 1984.
2. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики.—М.: Мир, 1985.
3. Гермейер Ю. Б. Игры с противоположными интересами.—М.: Наука, 1976.
4. Von Stackelberg H. The Theory of Market Economy.—Oxford: University Press, 1952.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.—М.: ГИФМЛ, 1961.
6. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.—М.: Наука, 1972.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.—М.: Мир, 1970.
8. Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н. Метод сравнения в математической теории систем.—Новосибирск: Наука, 1980.
9. Basar T., Olsder G. J. Dynamic Noncooperative Game Theory.—London—New York: Academic Press, 1982.

ДИНАМИКА В СОПРЯЖЕННЫХ ПАРАХ ВСЕЛЕННЫХ И НОВЫЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Э. Р. Смольяков

Излагается математически обоснованная гипотеза образования нашей вселенной одновременно с двойственной к ней, что объясняет наличие в нашей вселенной обилия свободных электрических зарядов и магнитных диполей при полном отсутствии свободных магнитных зарядов, и предлагается методика нахождения новых фундаментальных физических постоянных, основанная на расширении классического анализа размерностей за счет введения в него принципа экстремальности.

1. Введение

В работах [1–4] построена теория переходов между двойственными пространствами Минковского и найдены уравнения движения в обоих пространствах. Согласно этой теории, любое массивное тело можно перевести из нашего пространства в двойственное к нему с помощью мощного электромагнитного поля с затратами энергии $\sqrt{2}mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$ (где c — скорость света в вакууме). Переход между пространствами при указанном расходе энергии можно осуществить, поместив тело в электромагнитное поле, напряженность которого, пропорциональная корню квадратному из массы тела, должна придать телу объемную энергию, превышающую вышеуказанное значение.

Еще в начале XX века М. Планк указывал на возможность и необходимость существования гипотетической частицы, в 10^{10} раз меньшей размера протона, без которой современная физика не в состоянии плодотворно развиваться. Эта частица позволяет объяснить строение и происхождение любых известных к настоящему времени элементарных частиц и понять механизм всех известных в настоящее время взаимодействий в природе.

Согласно веками создававшейся теории электричества и магнетизма [5], основанной на реальном опыте, и в соответствии с альтернативными теориями, электричество и магнетизм в энергетическом отношении абсолютно симметричны (если не сказать большего — идентичны). Эта симметрия нашла свое выражение и в предложенной Гауссом системе единиц (СГС), в которой соответствующие друг другу электрические и магнитные величины имеют одинаковую размерность. Поскольку в данной работе рассматривается динамика электромагнетизма, то в уравнениях движения как в нашем пространстве X , так и в двойственном к нему X^* , используется наиболее естественная для подобных процессов гауссова система единиц, приводящая в этом последнем к уравнениям, функционально тождественным уравнениям в нашем пространстве, если в них заменить электрический заряд на магнитный.

Однако, несмотря на указанную симметрию электричества и магнетизма, в нашей Вселенной наблюдается явная электромагнитная асимметрия, проявляющаяся в том, что имеется обилие одиночных электрических зарядов (в связи с чем нашу Вселенную естественно назвать “электрической”) и полное отсутствие единичных магнитных зарядов, несмотря на активные поиски их в течение последних двух веков.

Логичное объяснение этого факта, как нам кажется, можно получить, если предположить, что в момент “большого взрыва”, породившего нашу Вселенную, образовалась не одна Вселенная, а две: наша — в четырехмерном пространстве $X = (x_1, x_2, x_3, ict)$ и двойственная к ней — в четырехмерном пространстве $X^* = (ix_1, ix_2, ix_3, ct)$ [1, 2].

Иначе ни в рамках классических воззрений [5], ни в рамках теории и иных известных теорий [7, 8] невозможно объяснить наблюдаемую в нашей Вселенной электромагнитную асимметрию. Все встает на свои места, если допустить, что возмущенный вакуум состоит из элементарных частиц размером $\sim 10^{-25}$ м (в существование которых верил еще М. Планк), прочно связывающих два противоположных электрических и два противоположных магнитных заряда. И в момент “большого взрыва” [7], породившего нашу Вселенную, какая-то их часть распалась, образовав свободные единичные электрические и магнитные заряды, а также электрические и магнитные диполи (последние ярко проявляют себя во множестве магнетиков).

Согласно нашей гипотезе, в момент первичного локального взрыва в вакууме развалившиеся нейтральные частицы создали не одну нашу Вселенную, оказавшуюся “электрической” (т. е. содержащей обилие свободных электрических зарядов) и одновременно магнитно нейтральной (т. е. содержащей только магнитные диполи и никаких единичных магнитных зарядов), а две. Причем двойственная к нашей вселенной при этом должна быть “магнитной” (т. е. содержащей обилие свободных магнитных зарядов) и одновременно электрически нейтральной (т. е. включающей только электрические диполи). И в этой двойственной Вселенной должно быть такое же обилие единичных магнитных зарядов и электрических диполей, какое имеется обилие единичных электрических зарядов и магнитных диполей в нашей Вселенной. В этом случае все становится на свои места: наша Вселенная в четырехмерном пространстве X вобрала в себя все свободные электрические заряды и магнитные диполи, а двойственная ей Вселенная в двойственном четырехмерном пространстве X^* [1, 2] вобрала в себя все единичные магнитные заряды и электрические диполи.

Если принять, что двойственной к нашей “электрической” Вселенной является вышеуказанная “магнитная” Вселенная, то переход между подобными физически разными Вселенными требует дополнительного исследования по отношению к проведенному в [1, 2], поскольку в [1, 2] предполагалось, что двойственная нашей Вселенной тоже является “электрической”. Однако, если принять “квантонную” структуру вакуума и вышеприведенные рассуждения, то возникают серьезные основания ожидать, что двойственная к нашей Вселенной является, скорее, не “электрической”, а “магнитной”.

В [1, 2] на основе современной теории управления [6], расширенного пространства Минковского и ненулевых сфер Минковского получены базовые положения теории переходов между двойственными пространствами Минковского в предположении, что физика двойственного пространства X^* аналогична физике нашего пространства. Причем введение математического аппарата управления электромагнитными полями [1, 3, 4] позволило получить не только уравнения движения в двойственном пространстве, но и найти некоторые интегралы движения в этом пространстве, причем эти результаты, с учетом полученных ниже, оказываются справедливыми и для магнитной вселенной.

В данной работе, опирающейся на предположение, что при возникновении нашей (“электрической”) Вселенной в двойственном пространстве X^* образовалась также и двойственная ей (“магнитная”) Вселенная, приводятся результаты расчетов траекторий движения магнитно заряженных масс в “магнитной” Вселенной, а также рассчитывается энергия перехода между “электрической” и “магнитной” Вселенными. Причем показывается, что (в силу симметрии между электричеством и магнетизмом) все полученные в [1, 2] результаты остаются в силе вне зависимости от того, является ли двойственная Вселенная “электрической” или “магнитной”. Излагается также новый подход к нахождению новых физических постоянных, основанный на использовании предлагаемого принципа экстремальности в анализе размерностей.

2. Динамика электромагнетизма в “электрической” и “магнитной” вселенных

Учитывая, что классические методы вариационного исчисления, до сих пор использовавшиеся во всех учебниках по теоретической физике [5], непригодны для изучения движения в рассматриваемом 8-мерном комплексном пространстве с комплексными оптимизируемыми функционалами, пришлось воспользоваться последними результатами теории оптимального управления, следующими из общей теории конфликтных равновесий [6]. К тому же, в “принципе экстремального действия” мы допускаем к рассмотрению также и ограниченные управляемые электромагнитные поля [1, 3, 4], никогда не рассматривавшиеся в теоретической физике.

Пусть

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \triangleq (ict, x_1, x_2, x_3) \triangleq (ict, \vec{r})$$

— вектор в четырехмерной модели Минковского

$$X \triangleq \{ict, \vec{r}\}$$

нашего пространства, а ds — интервал между бесконечно близкими событиями в этом пространстве; аналогично, пусть $(ct, i\vec{r})$ — вектор в четырехмерном двойственном пространстве

$$X^* \triangleq \{ct, i\vec{r}\},$$

а ds^* — интервал в X^* . Поскольку в теоретической физике [5] условились определять интервал (ds) в пространстве Минковского величиной

$$ds = \sqrt{-\sum_{k=0}^3 dx_k^2} = \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{r}^2} = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

то, чтобы не нарушать этой традиции, мы и в двойственном пространстве

$$X^* \triangleq \{t, i\vec{r}\}$$

примем аналогичное определение для интервала ds^*

$$ds^* = \sqrt{-\sum_{k=0}^3 (dx_k^*)^2} = ic dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Уравнения движения релятивистской механики в X и X^* будем искать, пользуясь “Принципом экстремального действия” Лагранжа, оптимизируя функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L dt,$$

где L — функция Лагранжа рассматриваемой динамической системы, в общем случае представляющая собой аддитивную функцию нескольких своих составляющих

$$L = \sum_i L_i,$$

где каждая из функций L_i ответственна за те или иные процессы, в которых участвует система, причем каждая из функций L_i представляет собой истинный скаляр, имеющий размерность энергии.

Для свободно движущейся в X массы m функция Лагранжа имеет вид [5, с. 46]

$$L = mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

а оптимизируемый (максимизируемый) функционал — вид:

$$J = J_1 = mc \int ds = mc^2 \int_{t_0}^{t'} \sqrt{1 - v^2/c^2} dt, \quad (1)$$

где t' — момент перехода массы m из пространства X в пространство X^* .

Учитывая выражение для интервала ds^* в двойственном пространстве X^* , находим, что в X^* функция Лагранжа свободно движущейся массы должна иметь вид

$$L_1^* = imc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

а оптимизируемый функционал (1) — вид:

$$J_1^* = mc \int ds^* = imc^2 \int_{t'}^{t_1} \sqrt{1 - v^2/c^2} dt. \quad (2)$$

Если масса m несет электрический заряд e и находится в электромагнитном поле, определяемом четырехмерным электромагнитным потенциалом

$$(i\varphi, A_1, A_2, A_3) = (i\varphi, \vec{A}_r),$$

первая компонента которого, определяющая скалярный потенциал $\varphi(x)$, берется в той же форме, что и система координат Минковского (ict, x_1, x_2, x_3) , а остальные компоненты образуют обычный трехмерный векторный потенциал $\vec{A}_r = (A_1, A_2, A_3)$, то этот четырехмерный потенциал порождает некоторый интеграл действия J_2 , подынтегральной функцией которого должен быть скаляр, образованный из компонент потенциала и координат, причем этот максимизируемый интеграл должен линейно зависеть от заряда e . Перечисленным требованиям удовлетворяет только интеграл вида

$$J_2 = -\frac{e}{c} \int_{t_0}^{t'} \sum_{k=0}^3 A_k dx_k = \int_{t_0}^{t'} \left(e\varphi - \frac{e}{c} \vec{A}_r \vec{v} \right) dt. \quad (3)$$

Здесь множитель $(1/c)$ перед интегралом присутствует в связи с использованием нами гауссовой системы единиц.

Аналогичным образом сформулируем интеграл действия в электромагнитном поле “магнитной” Вселенной в двойственном пространстве

$$X^* = (ct, i\vec{r}),$$

в котором четырехмерный потенциал электромагнитного поля (по аналогии) должен иметь вид $(\psi, i\vec{A}_g)$:

$$J_2^* = \int_{t'+0}^{t_1} \left(-g\psi + \frac{g}{c} \vec{A}_g \vec{v} \right) dt. \quad (4)$$

Движение в электромагнитном поле с электромагнитным потенциалом $A(x)$ заряженной частицы массой m можно найти с помощью необходимых условий экстремума (максимума) функционала действия, представляющего собой сумму интегралов (1) и (3):

$$J_{12} = J_1 + J_2 = \int_{t_0}^{t'} \left(mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + e\varphi - \frac{e}{c} \vec{A}_r \vec{v} \right) dt \quad (5)$$

при ограничениях

$$\dot{x}_i = v_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad |\vec{v}(t)| \leq c, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

где t' — момент входа в двойственное пространство X^* .

Поскольку затраты энергии на переход между двойственными “электрическими” Вселенными были найдены в [1, 2], а нас сейчас интересует энергия перехода между “электрической” Вселенной в X и “магнитной” Вселенной в X^* , то прежде чем искать уравнения движения заряженной массы в “магнитной” Вселенной, нам потребуются решение задачи (5), (6), найденное в [1, 2]. Приведем решение этой задачи, полученное на основе теоремы 5.1.1 или 5.3.1 из [6].

Учитывая, что гамильтониан H_{12} динамической системы (5), (6) имеет вид

$$H_{12} = mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + e\varphi - \frac{e}{c} (\vec{A}_r \vec{v}) + \sum_{k=1}^3 \lambda_k v_k,$$

получаем следующие уравнения:

$$\dot{\lambda}_k = -\frac{\partial H_{12}}{\partial x_k} = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{e}{c} \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial A_i}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

$$\frac{\partial H_{12}}{\partial v_k} = \lambda_k - \frac{mv_k}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{e}{c} A_k = 0. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) можно записать также в следующей векторной форме:

$$\dot{\vec{\lambda}} = -e \operatorname{grad} \varphi + \frac{e}{c} \operatorname{grad} (\vec{v} \vec{A}_r) = -e \operatorname{grad} \varphi + \frac{e}{c} (\vec{v} \nabla) \vec{A}_r + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{A}_r], \quad (9)$$

$$\vec{\lambda} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{e}{c} \vec{A}_r. \quad (10)$$

Вводя в рассмотрение определение импульса в релятивистской механике

$$\vec{p} = m\vec{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

и вычисляя полную производную по времени от уравнения (10), получаем

$$\dot{\vec{\lambda}} = \dot{\vec{p}} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial \vec{A}_r}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{A}_r \right). \quad (11)$$

Исключая $\dot{\vec{\lambda}}$ из уравнений (9) и (10), приходим к хорошо известному в релятивистской механике уравнению движения заряженной частицы в электромагнитном поле

$$\dot{\vec{p}} = e \left\{ \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_r}{\partial t} - \text{grad } \varphi \right) + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \text{rot } \vec{A}_r] \right\} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}], \quad (12)$$

где \vec{E} и \vec{H} — напряженности, соответственно, электрического и магнитного полей.

Необходимое условие (5.1.14) из [6, с. 203] (т.е. условие $\max_v H_{12}$) не удовлетворяется при $|\vec{v}| = c$ или $|v_k| = c$, что указывает на неоптимальность движения со скоростью света.

Если при поиске уравнений движения в вещественном пространстве X вполне допустимо было бы применение даже классического вариационного исчисления, то при поиске уравнений движения в двойственном векторно-комплексном четырехмерном пространстве $X^* = (i\vec{r}, t)$ необходимо использовать теоремы 5.1.1 и 5.3.1 из [6], доказанные для принципов оптимальности и равновесности, существенно более общих, чем классическое понятие оптимальности, да, к тому же, применимые в произвольных векторно-комплексных пространствах.

Уравнения движения заряженной частицы в двойственном пространстве X^* будем искать, максимизируя нижеследующий интеграл (J_{12}^*), представляющий собой сумму интегралов (2) и (4), начиная с момента ($t' + 0$) входа массы m в пространство X^* и до момента t_1 возвращения в X :

$$J_{12}^* = \int_{t'+0}^{t_1} \left(imc\sqrt{1 - v^2/c^2} - g\psi + \frac{g}{c} (\vec{A}^g \vec{v}) \right) dt, \quad (13)$$

$$\dot{x}_i = v_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad |v| \leq c, \quad (14)$$

$$x_i(t' + 0) = x_i(t' - 0), \quad (15)$$

где $x_i(t' - 0)$ — решение задачи (5), (6).

Т е о р е м а 1. Пусть $\vec{x}(t)$ — абсолютно непрерывная трехмерная вектор-функция, удовлетворяющая уравнению (14), а $\vec{v}(t)$ — почти всюду на (t_0, t_1) измеримая по Лебегу трехмерная вектор-функция; пусть, далее, (ψ, \vec{A}^g) — четырехмерный электромагнитный потенциал в пространстве X^* и пусть подынтегральная функция $f_0(\vec{x}, \vec{v}, t)$ функционала (13) непрерывна, непрерывно дифференцируема и ее модуль мажорируется на (t', t_1) функцией $s(t)(|\vec{x}| + 1)$, где $s(t)$ — некоторая неотрицательная интегрируемая функция. Тогда движение в двойственном пространстве X^*

определяется следующим комплексным обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\dot{\vec{p}} = -i \left\{ \frac{g}{c} \frac{\partial \vec{A}^g}{\partial t} + g \operatorname{grad} \psi - \frac{g}{c} [\vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{A}^g] \right\}. \quad (16)$$

Доказательство. Необходимые условия оптимальности (теоремы 5.1.1 и 5.3.1 из [6, с. 203–203, 232–233]) справедливы и для векторно-комплексного функционала (13) и приводят к уравнениям

$$\dot{\lambda}_k^* = -\frac{\partial H_{12}^*}{\partial x_k} = g \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \frac{g}{c} \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial A_i^g}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (17)$$

$$\frac{\partial H_{12}^*}{\partial v_k} = \lambda_k^* - \frac{mv_k}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{g}{c} A_k^g = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (18)$$

где

$$H_{12}^* \triangleq imc^2 \sqrt{1-v^2/c^2} - g\psi + \frac{g}{c} \vec{A}^g \vec{v} + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^* v_k.$$

Как и в случае задачи (5), (6), уравнения (17) и (18) можно записать в векторной форме, продифференцировать уравнения (18) и исключить из всех уравнений функции $\dot{\lambda}_k^*$. В результате получаем векторное уравнение движения (16) в двойственном пространстве X^* .

Чтобы оценить на основе задач (5) и (13), какие требуются энергии при переходе массы и электромагнитного поля между пространствами X и X^* , необходимо вычислить величину разрыва гамильтониана в точке t' перехода между пространствами, т. е. определить величину разности

$$|H_{12}^*(t' + 0) - H_{12}(t' - 0)|.$$

При выходе из пространства X имеем

$$H_{12}(t' - 0) = mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2} + e\varphi - \frac{e}{c} (\vec{A}_r \vec{v}) + (\vec{\lambda} \vec{v}) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e\varphi, \quad (19)$$

а при входе в пространство X^* получаем

$$H_{12}^*(t' + 0) = imc^2 \sqrt{1-v^2/c^2} - g\psi + \frac{g}{c} (\vec{A}^g \vec{v}) + (\vec{\lambda}^* \vec{v}) = \frac{imc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - g\psi. \quad (20)$$

Очевидно, переход массы m между пространствами X и X^* требует дополнительной энергии

$$\sqrt{2}mc^2 / \sqrt{1-v^2/c^2},$$

а переход электромагнитной энергии (в данном случае порождаемой скалярными потенциалами φ и ψ) требует дополнительной энергии

$$e\varphi + g\psi.$$

Но эта сумма, вследствие симметрии двойственных пространств X и X^* и равенства энергий, порождаемых электрическим и магнитным потенциалами, равносильна равенству

$$2e\varphi = 2g\psi.$$

Таким образом, независимо от того, является Вселенная, двойственная к нашей, “электрической” или “магнитной”, энергетика переходов между ними оказывается одинаковой, что делает законными соответствующие формулы, найденные в [1, 2] для случая перехода между двойственными “электрическими” вселенными.

3. Ограниченные возможности классической теории размерностей

Покажем, как с помощью теории размерностей, дополненной поиском особых экстремалей, открывается возможность находить новые фундаментальные физические постоянные и даже открывать новые физические законы на основе анализа всего лишь размерностей физических величин. В частности, удалось определить границы трех смежных миров — субмикрокосмоса, микрокосмоса и макрокосмоса, найти аналоги постоянной Планка для этих миров разного размера и показать, что “постоянная тонкой структуры” может быть выражена через известные размерные фундаментальные физические постоянные и что квантовая механика справедлива для любых миров, для которых определена нижняя граница и найден отвечающий каждому миру аналог постоянной Планка. Отсюда сделан вывод, что угловые скорости вращения невозмущенных или слабовозмущенных небесных тел строго квантованы.

Теория размерностей, использовавшаяся до сих пор для нахождения параметров подобия и частных решений (с точностью до произвольной постоянной) сложных задач (полное решение которых получить всеми известными методами математики, механики и физики оказывалось весьма затруднительным), страдает тем недостатком, что ее применение зачастую приводит к системе уравнений с числом неизвестных, превышающим число уравнений. Причем практикуемые в этой теории попытки обходить эту многозначность посредством искусственного расширения числа основных единиц далеко не всегда допустимы как с математической, так и с содержательной точек зрения. И, к тому же, не имеется никаких критериев для удачного выбора дополнительных основных единиц. Благодаря же использованию особых экстремалей, независимо от применяемых в теории размерностей систем единиц измерения и от числа основных (независимых) единиц измерения, решение всегда однозначно определяется (разумеется, с точностью до произвольной постоянной). Так что особые экстремали явились именно тем звеном, которого так недоставало теории размерностей.

Несмотря на относительную простоту теории размерностей, в отношении нее до сих пор не утихают научные споры [10–14]. Остановимся только на основных разногласиях специалистов. Главное из них касается выбора основных (независимых) единиц измерения и их числа. Как пишет Л. А. Сена, одни считают, что число “основных единиц задано нам природой и определяется характером тех явлений, которые подлежат рассмотрению”, [10, с. 30]. А поскольку “качества материального мира бесконечно многообразны, ... то число таких единиц будет также бесконечно большим”, [10, с. 30]. Другие считают, что “должна быть только одна основная единица. Оба эти вывода являются ошибочными.” [10, с. 31]. Соглашаясь, в основном, с этим мнением Л. А. Сена, покажем сначала, что неудачное трактование теории размерностей в мировой литературе явилось причиной одностороннего и ограниченного ее использования, а затем продемонстрируем, как за счет всего лишь надлежащего ее трактования и дополнения ее процедурой поиска особых экстремалей приоткрываются новые возможности для физики и техники.

Продemonстрируем прежде всего, что любые формулы размерности в любой системе единиц выражают некоторые физические законы, причем как уже известные, так и еще неизвестные, которые науке предстоит открыть

в будущем и в открытии которых теория размерностей (дополненная нами понятием особой экстремали [6]) может сыграть существенную роль (вопреки скептическому отношению к ней М. Планка [14] и солидарного с ним Л. А. Сена [10]). В подтверждение того, что формулы теории размерностей не бессмысленны (вопреки намекам Л. А. Сена [10] на их бессмысленность), рассмотрим тот же самый пример размерности электрической емкости (конденсатора) C , который приводится Л. А. Сена в качестве демонстрации абсурдности поиска физического смысла в формулах размерности. Л. А. Сена пишет: "... формула может приобрести довольно причудливый вид. Для примера приведем размерность емкости в Международной системе единиц", [10, с. 74]:

$$[C] = [L]^{-2}[M]^{-1}[T]^4[I]^2, \quad (21)$$

где $[L]$, $[M]$, $[T]$ и $[I]$ — размерности, соответственно, длины, массы, времени и силы тока.

Однако формула (21) вовсе не "причудлива", а выражает через себя неявно заложенные в ней уже известные нам законы физики. В самом деле, поскольку емкость C определяется как частное от деления заряда Q на напряжение U , то получаем для соответствующих размерностей

$$[C] = \left[\frac{Q}{U} \right] = \left[\frac{IT}{P/I} \right] = \left[\frac{I^2 T}{P} \right] = \left[\frac{I^2 T}{ML^2/T^3} \right] = \left[\frac{I^2 T^2}{ML^2/T^2} \right] = [L]^{-2}[M]^{-1}[T]^4[I]^2,$$

где мы использовали определение заряда

$$Q = IT$$

и мощности, с одной стороны, через посредство закона Ома ($P = IU$), а с другой, через посредство формулы

$$P = W/T,$$

где W — работа. Таким образом, даже пример (21), специально выбранный Л. А. Сена для демонстрации отсутствия всякого смысла в формуле размерности емкости, демонстрирует, скорее, обратное, а именно, что эта размерность явно выражает именно те физические зависимости, через посредство которых емкость себя определяет и проявляет в различных явлениях.

Аналогичным образом, в гауссовой системе единиц СГС емкость характеризуется следующей цепочкой тождеств, завязанных через закон Кулона

$$F = Q^2/L^2$$

и различные выражения для работы и мощности:

$$[C] = [L] = \left[\frac{Q}{U} \right] = \left[\frac{Q}{W/Q} \right] = \left[\frac{Q^2}{W} \right] = \left[\frac{Q^2}{FL} \right] = \left[\frac{Q^2}{(Q^2/L^2)L} \right] = [L].$$

Подобным же образом могут быть проанализированы любые формулы размерности в любых системах единиц. Причем подобный анализ в каких-то случаях позволит обнаружить совершенно новые физические законы. Продемонстрированный пример анализа подтверждает мнение А. Зоммерфельда, считавшего, что следует обращать внимание на размерность физических величин и сказавшего [15]: "Мы не придерживаемся точки зрения Планка, согласно которой вопрос о действительной размерности физической величины лишен смысла".

Несерьезным считаем мы и следующее возражение Л. А. Сена против физического смысла формул размерности: “И уж, конечно, никаких конкретных представлений не вызывают формулы размерности электрических единиц в системе СГС, в которой символы размерности основных единиц стоят в дробных степенях”, [10, с. 74]. Но разве формула (21) для емкости в Международной системе (СИ) не может быть переписана, к примеру, в следующем эквивалентном (21) виде:

$$[T] = [C]^{\frac{1}{4}}[M]^{\frac{1}{4}}[L]^{\frac{1}{2}}[I]^{-\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

в котором она задается именно дробными степенями?

Вопрос о целых или дробных степенях — это вопрос лишь удобства пользования, а вовсе не принципиальный вопрос. Заметим, что уравнение (22) в дробных степенях можно возвести в четвертую степень и получить следующую формулу размерности уже в целых степенях:

$$[T]^4 = [C][M][L]^2[I]^{-2},$$

абсолютно эквивалентную (21) и (22).

И все же, несмотря на вышеприведенные аргументы в подтверждение мнения А. Зоммерфельда, мы не можем не согласиться и с мнением М. Планка, считавшего, что вопрос об “истинной” размерности физических величин “имеет не более смысла, чем вопрос об “истинном” названии какого-либо предмета”, [14].

Мы покажем, что роль теории размерностей в развитии науки несомненно гораздо большая, чем мнение о ней М. Планка. В принципе, число произвольно выбираемых основных единиц измерения может быть любым. Однако, если довести число этих единиц до нуля, т. е. по существу полностью устранить само понятие размерности, то, как мы продемонстрируем ниже, будет утерян некий дополнительный механизм, позволяющий выявлять еще неоткрытые связи (законы физики) между различными физическими величинами.

Если бы наука с самого своего зарождения и до настоящего времени опиралась на принцип безразмерности любых величин, то, можно не сомневаться, что к XXI веку она не достигла бы уровня даже начала XIX века. Современному научно-техническому прогрессу мы обязаны в значительной степени тем, что в науке и технике широко использовались понятия размерности [10–14].

Л. А. Сена, “полностью разделяющий точку зрения М. Планка” [10, с. 78], тем не менее, прибегает не к процедуре уменьшения числа основных единиц (что естественно следовало бы из логики М. Планка и Л. А. Сена), а к процедуре искусственного расширения числа основных единиц в тех случаях, когда теория размерностей не позволяет получить числа уравнений, равного числу неизвестных величин, [10, с. 81–90]. Но и эта процедура лишь в отдельных случаях приводит к желаемой цели. В общем же случае необходимо использовать особые экстремали, общие методы поиска и расчета которых в любых областях науки можно найти в [6].

4. Особые экстремали в теории размерностей

Особыми называют экстремали (или решения), в отношении которых возникают принципиальные затруднения в вопросе выяснения того, определяют они максимум, минимум или какие-то иные экстремальные состояния динамической системы. Например, в “невыпуклых” задачах оптимального управления, к которым относится подавляющая часть задач оптимизации, именно

на особых экстремалях, на которых реализуются так называемые “скользящие режимы”, зачастую и достигается глобальный максимум или минимум. В игровых же задачах решение нередко возможно только в классе так называемых “смешанных стратегий”, реализующихся тоже зачастую на особых экстремалях. Роль особых экстремалей в теории игр и оптимизации невозможно переоценить.

В предельно упрощенном виде существование особого решения можно продемонстрировать на задаче максимизации или минимизации линейной функции $y = kx$, определенной на множестве $(-\infty < x < +\infty)$. Формально особый экстремум этой линейной функции достигается в тех точках $x \in R$, в которых $dy/dx = 0$. Если $k \neq 0$, то множество подобных точек пусто, а если $k = 0$, то это множество совпадает с множеством R всех вещественных чисел. Следовательно, любая функция $y(x) = \text{const}$ формально является особой экстремалью. Использование этого, казалось бы, тривиального факта позволило в данной работе получить далеко не тривиальные результаты в отношении теории размерностей и фундаментальных физических постоянных.

Теория размерностей с применением понятия особой экстремали предоставляет возможность уточнять менее точно известные физические постоянные с помощью более точно известных постоянных и даже находить неизвестные новые физические постоянные.

Покажем сначала, что “экстремальной” постоянной \hat{h} соответствует некоторая “экстремальная” постоянная

$$\hat{L}_0 = e\sqrt{G}/c^2 = 1,3804513 \cdot 10^{-34} \text{ см},$$

определяющая размер какой-то устойчивой субчастицы в субмикрокосмосе (здесь e — заряд электрона, c — скорость света в вакууме и G — гравитационная постоянная). Затем на основе этого найдем представление “постоянной тонкой структуры” ($1/\alpha$) через известные на сегодня размерные физические постоянные (e, c, G, L_q) и попробуем найти пару (h_p, L_p) фундаментальных постоянных для макрокосмоса.

Чтобы учесть в расчетах основные фундаментальные физические постоянные, найдем на основе теории размерностей [10] представление константы мощности (P) через эти постоянные, рассматривая все постоянные в системе СГС, т. е. запишем, опуская возможный безразмерный коэффициент,

$$P = e^\beta \cdot c^\gamma \cdot L_0^\delta \cdot G^p \cdot h^q,$$

или, в базовых размерностях системы СГС (принимая обозначения: M — масса, L — длина, T — время):

$$[P] \triangleq \left[\frac{ML^2}{T^3} \right] = \left[\frac{L^{3/2}M^{1/2}}{T} \right]^\beta \cdot \left[\frac{L}{T} \right]^\gamma \cdot [L]^\delta \cdot \left[\frac{L^3}{MT^2} \right]^p \cdot \left[\frac{ML^2}{T} \right]^q.$$

Приравнивая размерности с обеих сторон, получаем систему трех линейных уравнений с пятью неизвестными

$$1 = \frac{1}{2}\beta - p + q,$$

$$2 = \frac{3}{2}\beta + \gamma + \delta + 3p + 2q,$$

$$3 = \beta + \gamma + 2p + q.$$

Решая ее относительно (β, γ, δ) , находим

$$\beta = 2(1 + p - q), \quad \gamma = 1 - 4p + q, \quad \delta = -2(1 + p). \quad (23)$$

В результате получаем для P следующее представление (с точностью до безразмерного множителя):

$$P = e^{2(1+p-q)} \cdot c^{(1-4p+q)} \cdot L_0^{-2(1+p)} \cdot G^p \cdot h^q. \quad (24)$$

Логарифмируя (24) и приравнивая нулю частные производные от $\lg P$ по p и q (т. е. определяя особые экстремали), получаем следующие экстремальные базовые представления для h и L_0 :

$$\begin{aligned} \hat{h} &= \frac{e^2}{c} = 7,6957018 \cdot 10^{-30} \left[\frac{\text{г} \cdot \text{см}^2}{\text{сек}} \right], \\ \hat{L}_0 &= \frac{e\sqrt{G}}{c^2} = 1,3804513 \cdot 10^{-34} [\text{см}]. \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что какие бы представления для любой из рассмотренных выше фундаментальных физических постоянных через любые остальные ни использовались, результатом всегда оказывается найденная пара (25) экстремальных базовых физических постоянных \hat{h} и \hat{L}_0 , причем их эквивалентные представления могут быть многообразны, например:

$$\begin{aligned} \hat{h} &= \frac{e^2}{c} = \frac{ec\hat{L}_0}{\sqrt{G}} = \frac{e^{(3/2)}\hat{L}_0^{(1/2)}}{G^{(1/4)}} = \frac{c^3\hat{L}_0^2}{G} = \dots, \\ \hat{L}_0 &= \frac{e\sqrt{G}}{c^2} = \frac{\hat{h}^2\sqrt{G}}{e^3} = \dots \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя найденные экстремальные коэффициенты \hat{h} и \hat{L}_0 в выражение (24) для константы мощности P , получаем для этого коэффициента экстремальное базовое представление

$$\hat{P} = \frac{c^5}{G} = 0,36295049 \cdot 10^{60} [\text{СГС}] = 0,36295049 \cdot 10^{53} \text{Вт}. \quad (27)$$

Аналогичным образом нетрудно найти экстремальные базовые постоянные, например, для массы (M), времени (T), энергии (W), силы (F) и напряженности электрического поля (E):

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \frac{e}{\sqrt{G}} = 1,859544 \cdot 10^{-6} \text{г}, \\ \hat{T} &= \frac{e\sqrt{G}}{c^3} = 4,6046906 \cdot 10^{-45} \text{сек}, \\ \hat{W} &= \frac{ec^2}{\sqrt{G}} = 1,6712748 \cdot 10^{15} [\text{СГС}] = 1,6712748 \cdot 10^8 \text{Дж}, \\ \hat{F} &= \frac{c^4}{G} = 1,2106724 \cdot 10^{49} [\text{СГС}] = 1,2106724 \cdot 10^{44} \text{Н}, \\ \hat{E} &= \frac{e}{\hat{L}_0^2} = \frac{G^{(1/6)}\hat{h}^{(2/3)}}{\hat{L}_0^{(7/3)}} = 2,5205326 \cdot 10^{58} [\text{СГС}] = 7,5615978 \cdot 10^{62} \text{В/м}. \end{aligned} \quad (28)$$

5. Аналоги постоянной Планка и границы трех миров

Итак, мы нашли лишь одну базовую экстремальную пару (\hat{h}, \hat{L}_0) , отвечающую классической тройке фундаментальных физических постоянных (e, c, G) . Однако существуют и другие пары (h_k, L_k) этих же фундаментальных физических постоянных, соответствующих той же тройке (e, c, G) . Например, в современной ядерной физике основную роль играет вовсе не экстремальный параметр \hat{h} , а постоянная Планка

$$\hbar = \frac{1}{\alpha} \hat{h}.$$

Поэтому важно узнать, какого размера L_q устойчивая прачастица формирует микрокосмос совместно с константой \hbar , и выяснить, что за странный безразмерный множитель связывает \hbar с \hat{h} .

Чтобы разобраться в этом, а заодно и определить, может ли безразмерная “постоянная тонкой структуры” $(\frac{1}{\alpha})$ выражаться через размерные фундаментальные физические постоянные, достаточно воспользоваться разложением

$$\hbar = e^\beta \cdot c^\gamma \cdot L_q^\delta \cdot G^p,$$

для которого находим

$$\beta = 2 - \delta, \quad \gamma = 2\delta - 1, \quad p = -\delta/2,$$

а, следовательно, получаем

$$\hbar = e^{(2-\delta)} \cdot c^{(2\delta-1)} \cdot L_q^\delta \cdot G^{(-\delta/2)}. \quad (29)$$

Искать снова особую экстремаль для равенства (29) не имеет смысла, как мы уже об этом говорили, поскольку снова получим экстремальную пару (\hat{h}, \hat{L}_0) . Так что теперь необходимо лишь найти такое L_q , которое отвечает константе \hbar .

Подставляя в (29) $\delta \equiv 1/5$, получаем точное значение для новой фундаментальной физической постоянной: $L_q = 6,6710825 \cdot 10^{-24}$ см.

Чтобы найти представление для “постоянной тонкой структуры” через фундаментальные физические постоянные (e, c, L_q, G) , достаточно подставить в (29) $\delta = (1/5)$ и выполнить элементарные алгебраические преобразования:

$$\hbar = e^{\frac{9}{5}} \cdot c^{-\frac{3}{5}} \cdot L_q^{\frac{1}{5}} \cdot G^{-\frac{1}{10}} = \frac{e^2}{c} \left[\left(\frac{c^2 L_q}{e\sqrt{G}} \right)^{\frac{1}{5}} \right] = \hat{h} \left(\frac{L_q}{\hat{L}_0} \right)^{\frac{1}{5}} = \hat{h} \left(\frac{1}{\alpha} \right), \quad (30)$$

откуда находим

$$\frac{1}{\alpha} = \left(\frac{c^2 L_q}{e\sqrt{G}} \right)^{\frac{1}{5}} = 137,03604.$$

Таким образом, базовая постоянная L_q оказалась строго определенной функцией от основных фундаментальных физических постоянных

$$(e, c, G, \hbar, 1/\alpha).$$

Итак, помимо экстремальной пары фундаментальных констант (\hat{h}, \hat{L}_0) (ответственной за процессы в субмикросмосе), удовлетворяющей (29) при

любом δ , этому равенству при $\delta = 1/5$ удовлетворяет также пара (\hbar, L_q) , существенным образом определяющая спины элементарных частиц и ответственная за процессы в микрокосмосе, которыми занимается современная ядерная физика [16, 18].

Таким образом, получаем, что некоторая устойчивая гипотетическая частица размером \hat{L}_0 формирует субмикрокосмос, устойчивая частица (“квантон”) размером L_q формирует известный нам мир элементарных частиц (микрокосмос). И покажем еще, что устойчивая частица протон размером L_p формирует окружающий нас материальный мир (макрокосмос) по крайней мере в диапазоне $10^{-13} - 10^{10}$ см (где верхняя граница, несущественная в наших дальнейших расчетах, пока еще нами строго не определена). Из того, что все рассмотренные выше экстремальные и неэкстремальные фундаментальные постоянные выражаются только через три константы (e, c, G) , следует, что эти последние лежат в основе образования по крайней мере трех миров — субмикрокосмоса, микрокосмоса и макрокосмоса.

Поскольку теоретические основы квантовой механики [16] построены вне зависимости от того, какова конкретная величина постоянной Планка \hbar (и отвечающей ей постоянной L_q), то эта механика должна быть справедлива не только для микрокосмоса, формируемого парой (\hbar, L_q) , но и для любых других миров, для которых лишь должны быть иными аналогичные пары постоянных (h_k, L_k) . Между прочим, отсюда сразу следует, что угловые скорости вращения (зависящие от h_k) любых невозмущенных (или слабовозмущенных) объектов из мира размером (L_k, L_{k+1}) , формируемого парой констант (h_k, L_k) , должны подчиняться уравнению

$$\frac{h_k}{2} = \int_V \omega r^2 \rho dV = \text{const}, \quad (31)$$

где ρ — распределенная массовая плотность объекта, а ω угловая скорость его вращения. В (31) берется $h_k/2$ в соответствии с формулами (58.1) и (59.15) квантовой механики [16].

А из (31), в свою очередь, следует, что угловые скорости вращения любых невозмущенных (или слабовозмущенных) объектов в любом мире вовсе не случайны и не произвольны. Они — квантованы. Так что, например, как бы любое невозмущенное или слабо возмущенное небесное тело искусственно не раскрутили (или не затормозили), оно (в отсутствие возмущений) неизбежно (вследствие электромагнитной природы вакуума) вернется к своей, предначертанной ей уравнением (31) угловой скорости вращения. А сильно возмущенные тела (например, Луна в поле Земли) условию (31) удовлетворить не в состоянии.

6. Пример предсказания фундаментальных постоянных для макрокосмоса

В качестве примера попробуем спрогнозировать хотя бы одну пару констант (h_p, L_p) , ответственную за процессы в макрокосмосе. Успех предсказания существенно зависит от правильности выбора “эталонного” тела, в отношении которого должна быть уверенность, что его угловая скорость является результатом действия констант (h_k, L_k) , а не результатом возмущения внешней среды. На роль подобного тела вполне может претендовать Земля, для которой известны угловая скорость вращения $\omega = 7,29213 \cdot 10^{-5}$ рад/с и момент инерции $J = 8,104 \cdot 10^{44}$ г·см² [17], а, следовательно, и кинетический момент $h_e = \omega J = 5,9095422 \cdot 10^{40}$ г·см²/с. Земля расположена на столь больших расстояниях от Солнца и больших планет, что они относительно слабо

вливают на ее угловую скорость вращения. Вследствие малости Луны по сравнению с Землей ее влияние на скорость вращения Земли также незначительно. Правда, обратное влияние Земли на Луну столь велико, что под действием мощного гравитационного поля Земли Луна полностью потеряла способность свободно вращаться вокруг своей оси.

На роль фундаментальной константы L_p для макрокосмоса вполне может претендовать диаметр протона $L_p = 1,628 \cdot 10^{-13}$ см. Причем требуется найти еще и соответствующую константе L_p постоянную h_p . В этом может помочь уравнение (29), если при этом окажется возможным выразить постоянные L_p и h_p через фундаментальные постоянные (e, c, G), используя степени, определяемые рациональными числами.

Подставив в уравнение (29) h_e вместо \hbar и L_p вместо L_q и переписав его в виде, аналогичном уравнению (30), получаем $\delta \approx 3,3165 \approx 10/3$. Если же теперь в полученное уравнение подставить $\delta \equiv 10/3$, то мы найдем новую безразмерную физическую постоянную

$$1/\alpha_p \triangleq h_p/\hat{h} = (L_p/\hat{L}_0)^{(10/3)} = 1,7329162 \cdot 10^{70}$$

и новую размерную фундаментальную физическую постоянную для макрокосмоса $h_p = 1,3336 \cdot 10^{41}$ г·см²/с.

Согласно (31) и формулам (58.1) и (59.15) из [16] кинетический момент Земли (спин) в отсутствие возмущений должен равняться величине $\hat{h}_e = \frac{h_p}{2} = 6,668 \cdot 10^{40}$ СГС, а рассогласование $\Delta h_e = \hat{h}_e - h_e$ следует отнести на счет возмущения угловой скорости Земли Солнцем и другими планетами и (или) на счет неточного знания момента инерции Земли J , уточнить который для Земли и для таких слабо возмущенных планет, как Юпитер, Сатурн и Уран, можно с помощью уравнения (31).

Если же привлечь к расчетам и другие известные фундаментальные постоянные и особые экстремали, то можно найти новые базовые экстремальные и неэкстремальные фундаментальные физические постоянные и для других областей науки и техники. Можно также показать, что теория “кварков” [18] несовместима с экстремальной теорией размерностей.

Работа выполнена по программе “Фундаментальные основы информационных технологий и систем” РАН, Проект № 1.3, и при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00655-а.

Список литературы

1. Смольяков Э.Р. Теоретическое обоснование межзвездных полетов.—М.: Едиториал УРСС, 2005.
2. Смольяков Э.Р. Динамика и энергетика переходов между двойственными пространствами // ДАН.—2006.—Т. 404, № 6.—С. 734–737.
3. Смольяков Э.Р. Вариационные уравнения электродинамики // Дифференц. уравнения.—2007.—Т. 43, № 4.—С. 475–480.
4. Смольяков Э.Р. Интегралы движения в двойственном пространстве // ДАН.—2007.—Т. 414, № 4.—С. 459–463.
5. Ландау Л.Д., Ли́фши́ц Е.М. Теория поля.—М.: Физматлит, 2003.
6. Смольяков Э.Р. Теория конфликтных равновесий.—М.: Едиториал УРСС, 2005.
7. Климишин И.А. Релятивистская астрономия.—М.: Наука, 1989.
8. Боулер М. Гравитация и относительность.—М.: Мир, 1979.
9. Бриджмен П.В. Анализ размерностей.—Л.-М.: ГТТИ, 1934.
10. Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности.—М.: Наука, 1977.

11. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике.—М.: Наука, 1987.
12. Бурдун Г. Д. Справочник по Международной системе единиц.—М.: Изд-во Стандартов, 1972.
13. Чертов А. Г. Единицы физических величин.—М.: Высшая школа, 1977.
14. Планк М. Введение в теоретическую физику. Электричество и магнетизм. Ч. 3.—Л.-М.: ГТТИ, 1933.
15. Зоммерфельд А. Электродинамика.—М.: ИЛ, 1958.
16. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики.—М.: Наука, 1976.
17. Космонавтика. Маленькая энциклопедия / Под ред. В. П. Глушко.—М.: Советская энциклопедия, 1970.
18. Бопп Ф. Введение в физику ядра, адронов и элементарных частиц.—М.: Мир, 1999.

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ ОБРАЩЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

А. В. Краев

Исследована проблема обращения дискретной динамической системы с векторным входом. Предложены алгоритмы, решающие задачу при заданных ограничениях (предполагается известной волновая модель входа). Приводятся условия применимости и оценки скорости сходимости предложенных алгоритмов. Результаты являются обобщением исследованной ранее задачи обращения дискретной динамической системы со скалярным входом.

1. Введение. Постановка задачи

Рассматривается следующая постановка задачи обращения. Задана дискретная динамическая система с векторным входом:

$$x^{t+1} = Ax^t + B\vec{\xi}^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $x^t \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — известные матрицы с постоянными коэффициентами, $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^m$ — неизвестное входное воздействие. (Чтобы подчеркнуть особенность постановки задачи, входную переменную будем дополнять значком вектора). Требуется по известному фазовому вектору x^t , либо по измерениям выходного сигнала

$$y^t = Cx^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

(где $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ — известная матрица с постоянными коэффициентами) построить оценку $\tilde{\xi}^t$ неизвестного сигнала $\vec{\xi}^t$ в момент времени t , считая известными значения x^t , либо, соответственно, y^t в моменты времени $0, 1, \dots, t$.

Заметим, что задача обращения входного сигнала не может быть решена в текущий момент времени (без запаздывания), то есть $\vec{\xi}^t$ не может быть найден без дополнительных предположений ни точно, ни приближённо, в чём можно убедиться, проанализировав уравнения (1)–(2). В самом деле, располагая в текущий момент времени t величинами x^t, y^t , можно делать выводы лишь о характере тех значений ξ , которые участвовали в формировании данных величин (x^t, y^t) , то есть о значениях $\vec{\xi}^0, \vec{\xi}^1, \dots, \vec{\xi}^{t-1}$. Величина $\vec{\xi}^t$ (как это видно из уравнений (1)–(2)) не входит в соотношения для x^t, y^t , а появляется впервые лишь в формулах для x^{t+1}, y^{t+1} , и следовательно, может быть получена лишь при анализе этих соотношений, то есть с задержкой.

2. Обращение по фазовому вектору

В этом параграфе будем считать, что в момент времени t известен весь фазовый вектор x^t . Это упрощающее предположение при определённых условиях может быть снято, что будет показано в дальнейшем.

2.1. Восстановление произвольного входа с запаздыванием

Сначала выполним следующее преобразование:

$$x^{t+1} = Ax^t + B\vec{\xi}^t \iff x^{t+1} - Ax^t = B\vec{\xi}^t \implies \dots \quad (3)$$

Домножим левую и правую части равенства на некоторую матрицу $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$, выбор которой будет рассмотрен в дальнейшем:

$$\dots \implies Hx^{t+1} - HAx^t = HB\vec{\xi}^t. \quad (4)$$

Теперь заметим, что если выбором матрицы H добиться равенства $HB = I$, где I — единичная матрица, то последнее равенство, записанное для момента времени $t-1$, примет вид

$$\vec{\xi}^{t-1} = Hx^t - HAx^{t-1}. \quad (5)$$

В правой части равенства (5) все значения переменных в момент времени t известны, следовательно, известно и стоящее слева значение $\vec{\xi}^{t-1}$.

Заметим, что такую матрицу H (чтобы $HB = I$) можно подобрать не всегда. Можно показать, что необходимым и достаточным условием существования матрицы H такой, что $HB = I$, является условие

$$\det(B^\top B) \neq 0.$$

В данном случае эквивалентом этого условия является требование

$$\text{rank } B = m.$$

Если фазовый вектор x^t измеряется с погрешностью, для которой известна мажоранта, то есть известно значение \tilde{x}^t такое, что:

$$|\varepsilon^t| = |\tilde{x}^t - x^t| \leq \varepsilon_0, \quad (6)$$

то оценка входного сигнала также будет иметь погрешность, определяемую из неравенства

$$\begin{aligned} |\Delta \vec{\xi}^{t-1}| &= |\tilde{\xi}^{t-1} - \vec{\xi}^{t-1}| = \\ &= |H\tilde{x}^t - HAx^{t-1} - Hx^t + HAx^{t-1}| \leq |H|\varepsilon_0(1 + |A|). \end{aligned} \quad (7)$$

Оптимальным значением H , при котором правая часть (7) даёт наилучшую оценку при ограничении $HB = I$, является значение

$$H = (B^\top B)^{-1} B^\top.$$

В этом случае имеет место следующая оценка:

$$|\Delta \vec{\xi}^{t-1}| \leq \varepsilon_0(1 + |A|)|(B^\top B)^{-1} B^\top|. \quad (8)$$

2.2. Восстановление входа при известной волновой модели

Чтобы получить оценку неизвестного входа без задержки, необходимо накладывать дополнительные ограничения на область решений. В частности, одним из путей для этого является дополнительное предположение о том, что входной сигнал имеет волновую природу, а именно, является выходом известного линейного стационарного объекта с неизвестным начальным состоянием:

$$\begin{cases} w^{t+1} = Qw^t, \\ \vec{\xi}^t = qw^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \tag{9}$$

где $w^t \in \mathbb{R}^s$ — неизвестный фазовый вектор волновой модели, а $Q \in \mathbb{R}^{s \times s}$ и $q \in \mathbb{R}^{m \times s}$ — известные параметры. Заметим, что задача обращения (1)–(2) в этом случае сводится к определению (точному или с погрешностью) величины w_0 . В самом деле, зная волновую модель (9) и её начальное состояние w_0 , можно в любой момент времени подсчитать выход, который и совпадает с искомым неизвестным. В случае, если w_0 определяется с погрешностью, необходимо произвести оценивание ошибки при вычислении $\vec{\xi}^t$.

В работе [1] для случая $m = 1$ было показано, что задача имеет решение в случае наблюдаемости пары $\{q, Q\}$, если известно s первых значений выхода $\xi: \xi^0, \xi^1, \dots, \xi^{s-1}$. В общем случае требование наблюдаемости $\{q, Q\}$ остаётся в силе, однако теперь для решения задачи может быть достаточно меньшее количество измерений, а именно такое их количество ν (называемое индексом наблюдаемости системы), что

$$\text{rank} \begin{pmatrix} q \\ qQ \\ \dots \\ qQ^{\nu-1} \end{pmatrix} = s. \tag{10}$$

В этом случае для нахождения w^0 достаточно разрешить подсистему системы

$$\begin{cases} \vec{\xi}^0 = qw^0, \\ \vec{\xi}^1 = qQw^0, \\ \dots \\ \vec{\xi}^{\nu-1} = qQ^{\nu-1}w^0, \end{cases} \tag{11}$$

составленную из любых s линейно-независимых уравнений. Если обозначить буквой G квадратную матрицу выбираемой для решения подсистемы,

$$Gw^0 = \vec{\xi}_G, \tag{12}$$

то оценка решения будет содержать множитель G^{-1} :

$$w^0 = G^{-1} \cdot \vec{\xi}_G, \tag{13}$$

$$(\vec{\xi})^t = qQ^t \cdot w^0 = qQ^t G^{-1} \cdot \vec{\xi}_G. \tag{14}$$

Здесь через $\vec{\xi}_G$ обозначен вектор правых частей подсистемы системы (11) с матрицей G .

Отсюда следует, что если вместо $\vec{\xi}$ известна его оценка $\tilde{\vec{\xi}}$, то для минимизации погрешности решения следует из всех линейно-независимых подсистем (11) размерности s выбирать подсистему с такой матрицей G , чтобы

$|G^{-1}|$ была минимальна. Заметим, что выбор матрицы G однозначно фиксирует и вектор правых частей $\vec{\xi}_G$, но учесть особенность выбора данного вектора в оценке погрешности не представляется возможным в силу того, что нет информации о покомпонентных погрешностях для вектора $\vec{\xi}$, в то время как различия в выборе матрицы G удаётся отразить в выражении для погрешности. Именно поэтому при оценке погрешности выбор подсистемы нужно производить, основываясь на свойствах матрицы подсистемы (G), а не правой части подсистемы ($\vec{\xi}_G$). Если обозначить такую “оптимальную” матрицу через \bar{G} , то погрешность решения, получаемого по приближённой оценке $\vec{\xi}$, такова:

$$|\Delta \vec{\xi}^t| = |qQ^t \bar{G}^{-1}| \cdot |(\vec{\xi})_{\bar{G}} - (\vec{\xi})_{\bar{G}}| \leq |q||Q|^t |\bar{G}^{-1}| \sqrt{s} |(B^\top B)^{-1} B^\top| (1 + |A|) \varepsilon_0. \quad (15)$$

Этот способ, однако, имеет недостаток. Если значение w^0 найдено не точно, а с погрешностью (например, вследствие неточности измерений $\vec{\xi}$), то с увеличением t ошибка при вычислении $\vec{\xi}^t$ будет неограниченно расти, если матрица Q неустойчива. Данный недостаток можно преодолеть, если в каждый текущий момент времени, зная ν (где ν — индекс наблюдаемости системы) последних измерений $\vec{\xi}^{t-\nu}, \dots, \vec{\xi}^{t-1}$, решать систему, аналогичную (11), составленную для неизвестного $w^{t-\nu}$:

$$\begin{cases} \vec{\xi}^{t-\nu} = qw^{t-\nu}, \\ \vec{\xi}^{t-\nu+1} = qQw^{t-\nu}, \\ \dots \\ \vec{\xi}^{t-1} = qQ^{\nu-1}w^{t-\nu}. \end{cases} \quad (16)$$

В этом случае даже если матрица Q неустойчива, её степень при вычислении $\vec{\xi}^t$ не будет превосходить ν , что гарантирует ограниченность ошибки малой константой. В этом случае для неизвестного вектор-сигнала $\vec{\xi}^t$ имеют место равенства:

$$(\vec{\xi})_{\bar{G}_{t-\nu}}^{t-1} = \bar{G}_{t-\nu} w^{t-\nu}, \quad (17)$$

$$(\vec{\xi})^t = qQ^r w^{t-\nu} = qQ^r \bar{G}_{t-\nu}^{-1} (\vec{\xi})_{\bar{G}_{t-\nu}}^{t-1}, \quad (18)$$

где $\bar{G}_{t-\nu}$ — квадратная $s \times s$ матрица линейно-независимой подсистемы (17) системы (16), такая, что $|\bar{G}_{t-\nu}^{-1}|$ минимальна среди всех квадратных невырожденных подсистем этой системы.

В этом случае погрешность оценивания при неточном знании предыдущих значений входа не превосходит следующую константу:

$$|\Delta \vec{\xi}^t| \leq |q||Q|^r |\bar{G}_{t-\nu}^{-1}| \sqrt{s} |(B^\top B)^{-1} B^\top| (1 + |A|) \varepsilon_0. \quad (19)$$

2.3. Восстановление входа в “зоне разгона”

Алгоритм обращения из пункта 2.2 может быть использован для нахождения $\vec{\xi}^t$, только начиная с некоторого момента времени, в который нам становятся известны r предыдущих значений $\vec{\xi}$, вычисляемых, например, по алгоритму из пункта 2.1. То есть существует некоторый “участок разгона”,

значения в котором не удаётся найти ни точно, ни даже приближённо. Этот недостаток можно преодолеть, если воспользоваться теорией наблюдателей.

Представим волновую модель как динамическую систему с известным выходом v^{t+1} :

$$\begin{cases} w^{t+1} = Qw^t, \\ v^{t+1} = \xi^t = qw^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (20)$$

Если пара $\{q, Q\}$ наблюдаема, то задачу восстановления фазового вектора w^t решает наблюдатель Льюенбергера для дискретных систем:

$$\begin{cases} \tilde{w}^t = Q\tilde{w}^{t-1} - L(q\tilde{w}^{t-1} - \tilde{\xi}^{t-1}), \\ (\tilde{\xi})^t = q\tilde{w}^t, \end{cases} \quad (21)$$

где матрица L определяется выбором желаемого спектра (из соображений устойчивости) матрицы $Q_L = Q - Lq$ (это всегда можно сделать, если пара $\{q, Q\}$ наблюдаема). В частности, выбором спектра, состоящего из нулей, строится финитный наблюдатель, который будет давать значения без дополнительной погрешности, начиная с момента s . До этого момента времени значения, получаемые при помощи (даже финитного) наблюдателя, вообще говоря, являются приближёнными, что определяется неоднозначностью выбора стартового значения начального состояния (\tilde{w}^0) для рекуррентной формулы (21). Однако эти значения асимптотически или финитно сходятся к точным, если матрица Q_L устойчива.

Заметим, что если вместо $\tilde{\xi}^{t-1}$ известна оценка $\tilde{\xi}^{t-1}$, определяемая подстановкой в (5) приближённо измеренных значений фазового вектора, то вместо точного значения выхода в (20) известна его оценка, которую и используем для построения наблюдателя, поэтому вместо (21) имеем:

$$\begin{cases} \tilde{w}^t = Q\tilde{w}^{t-1} - L(q\tilde{w}^{t-1} - \tilde{\xi}^{t-1}), \\ (\tilde{\xi})^t = q\tilde{w}^t. \end{cases} \quad (22)$$

В этом случае ошибка наблюдения

$$\Delta w^t = \tilde{w}^t - w^t$$

удовлетворяет уравнению

$$\Delta w^t = Q_L \Delta w^t + L \Delta \tilde{\xi}^t. \quad (23)$$

Для случая нильпотентной матрицы Q_L оценка будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} |\Delta w^t| &= |Q_L \Delta w^{t-1} + L \Delta \tilde{\xi}^{t-1}| = |Q_L^2 \Delta w^{t-2} + Q_L L \Delta w^{t-2} + L \Delta \tilde{\xi}^{t-1}| = \dots \\ &\dots = |Q_L^s \Delta w^{t-s-1} + Q_L L \Delta w^{t-s} + \dots + L \Delta \tilde{\xi}^{t-1}| \leq \\ &\leq \varepsilon_0 (1 + |A|) |(B^T B)^{-1} B^T| |L| (1 + |Q_L| + \dots + |Q_L|^s). \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, в случае ошибки в измерении x^t (а значит, и в построении $(\tilde{\xi})^{t-1}$) возникает неисчезающая статическая ошибка, определяемая вторым слагаемым в (24). В этом случае для оценки $(\tilde{\xi})^t$ имеет место неравенство

$$|\Delta \tilde{\xi}^t| = |(\tilde{\xi})^t - \xi^t| \leq |q| \varepsilon_0 (1 + |A|) |(B^T B)^{-1} B^T| |L| \frac{(|Q_L|^{s+1} - 1)}{|Q_L| - 1}. \quad (25)$$

3. Восстановление векторного входа по векторному выходу

Усложним постановку задачи. Будем теперь предполагать, что состояние системы (1)–(2) нам неизвестно, а известен только её выход (2), измеряемый в текущий момент времени. Если размерность входа больше размерности выхода, или иными словами,

$$\text{rank } C < \text{rank } B,$$

то в общем случае не существует способа решить эту задачу, и можно построить тривиальные примеры, демонстрирующие, что при сколь угодно различающихся значениях входа система будет иметь одинаковые значения выхода. Поэтому содержательный интерес представляет задача обращения в том случае, когда размерность входа не превосходит размерности выхода.

Рассмотрим подробно случай “квадратной” системы, т. е. случай, когда размерности входа и выхода совпадают, или, более точно,

$$\text{rank } B = \text{rank } C = l. \quad (26)$$

Случай, когда имеет место строгое неравенство

$$\text{rank } B < \text{rank } C,$$

конструктивно сводится к этому случаю фиксированием нужного подмножества выходов.

Будем предполагать, что для системы (1)–(2) помимо условия (26) выполнено определение относительного порядка векторной системы по Исидори, [2].

Определение 1 (по Исидори). Вектор $r = (r_1, \dots, r_l)$ — вектор относительного порядка системы (1)–(2), если выполнены условия:

- 1) $C_i A^j B = 0$, $j = 1, \dots, r_i - 2$; $C_i A^{r_i - 1} B \neq 0$, для всех $i = 1, \dots, l$;
- 2)

$$\det H(r_1, \dots, r_l) = \det \begin{pmatrix} C_1 A^{r_1 - 1} B \\ \dots \\ C_l A^{r_l - 1} B \end{pmatrix} \neq 0,$$

где C_i — строки матрицы C .

Заметим, что существуют системы, для которых определение относительного порядка по Исидори не выполняется, т. е. условия определения несовместны. Однако, если это определение выполняется, то имеет место следующее каноническое разложение векторной системы с выделением нулевой динамики, [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x')^{t+1} = A_{11}(x')^t + A_{12}y^t, \\ (y_i^1)^{t+1} = (y_{i+1}^1)^t, \quad i = 1, \dots, r_1 - 1, \\ (y_i^2)^{t+1} = (y_{i+1}^2)^t, \quad i = 1, \dots, r_2 - 1, \\ \dots \\ (y_i^l)^{t+1} = (y_{i+1}^l)^t, \quad i = 1, \dots, r_l - 1, \end{array} \right. \quad (27)$$

$$\begin{pmatrix} (y_{r_1}^1)^{t+1} \\ \vdots \\ (y_{r_l}^l)^{t+1} \end{pmatrix} = A_{21}(x')^t + \sum_{i=1}^l A_{22}^i \bar{y}_i^t + H(r) \bar{\xi}^t.$$

В новых координатах вектор состояния составлен из координат x' и координат, совпадающих с выходами системы (2) за, соответственно, r_1, r_2, \dots, r_l моментов времени, начиная с текущего. Таким образом, часть вектора состояния, составленная из этих координат, будет известна с задержкой r , где

$$r = \max\{r_1, r_2, \dots, r_l\}.$$

Неизвестный вход $\vec{\xi}$ не влияет на вектор x' , и этот вектор можно оценить из первого уравнения (27), используя результаты теории наблюдателей, в том случае, если матрица A_{11} устойчива. При формулировке основного результата используется матрица Розенброка. Напомним, что матрицей Розенброка для системы (1)–(2) является матрица следующего вида:

$$R(z) = \begin{pmatrix} zI - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Справедлива следующая основная теорема.

Теорема 1. *В разложении (27) системы (1)–(2) собственные числа матрицы A_{11} совпадают с инвариантными нулями системы, т.е. такими значениями z , которые понижают ранг матрицы Розенброка (28) системы (1)–(2).*

Далее будем предполагать, что инвариантные нули матрицы Розенброка (28) устойчивы. В этом случае сходящуюся оценку неизвестного фазового вектора x' даёт наблюдатель

$$(\tilde{x}')^{t+1} = A_{11}(\tilde{x}')^t + A_{12}y^t, \tag{29}$$

в уравнении которого матрица A_{11} устойчива, а вектор y^t известен. Теперь, чтобы оценить неизвестный векторный вход $\vec{\xi}^t$, домножим последнее уравнение (27) на $H^{-1}(r)$, которая существует в силу требования 2 определения относительного порядка по Исидори. Тогда:

$$\vec{\xi}^t = H^{-1}(r) \begin{pmatrix} (y_{r_1}^1)^{t+1} \\ \vdots \\ (y_{r_l}^l)^{t+1} \end{pmatrix} - H^{-1}(r)A_{21}(x')^t - \sum_{i=1}^l H^{-1}(r)A_{22}^i y_i^t. \tag{30}$$

На место x' подставляем оценку, даваемую наблюдателем. Это позволяет получить сходящуюся оценку входа в идущие с задержкой r моменты времени. Далее рассуждения проводятся по аналогии со случаем обращения по полному фазовому вектору. Предполагая известной волновую модель входного сигнала, в полной аналогии с пунктом 2, находится оценка входного сигнала в текущий момент времени, если этот момент не находится в “зоне разгона”, определяемой задержкой r . Оценки погрешности, даваемые для случая приближённо известного входа, остаются справедливыми.

Список литературы

1. Коровин С.К., Краев А.В., Фомичев В.В. Некоторые алгоритмы обращения дискретных систем // *Нелинейная динамика и управление*. Вып. 4 / Под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина.— М.: Физматлит, 2004.— С. 119–126.

2. Isidori A. Nonlinear control systems.—London: Springer Verlag, 1995.
3. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределённостью.—М.: Физматлит, 2007.
4. Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В. Методы робастного обращения динамических систем.—М.: Физматлит, 2009.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ ВРАЩЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА

А. Н. Канатников

Приведен вывод кинематических и динамических уравнений движения, в котором не используются физические соображения. Получены формулы для расчета управлений (моментов сил), обеспечивающих заданный закон вращения твердого тела. Алгоритмы управления проверены в процессе математического моделирования.

1. Введение

Движение твердого тела — известная и хорошо изученная задача. Она, с одной стороны, довольно простая, а с другой, имеет важные практические применения. Этой задаче посвящается обширный материал практически в любом учебнике по теоретической механике [1, 2, 3]. Традиционно движение твердого тела описывается с помощью углов трех поворотов, при помощи которых твердому телу можно в пространстве придать любое положение (например, углы Эйлера или углы Крылова). Однако при таком описании в системе дифференциальных уравнений возникают особенности, которые никак не связаны с процессом движения, а только с выбранным способом описания этого движения. Это связано с тем, что конфигурационное пространство твердого тела представляет собой многообразие $SO(3)$, для которого не существует атласа из одной координатной карты. Выбор углов Эйлера или Крылова задает координатную карту, которая не полностью покрывает конфигурационное пространство.

Для преодоления описанной трудности в использовании углов поворота можно использовать две координатные системы и переходить в определенных ситуациях из одной координатной системы в другую. Другой подход — использование четырехмерного пространства, в котором движение твердого тела описывается как движение изображающей точки, подчиненной уравнению связи. В качестве такого четырехмерного пространства наиболее удобным является выбор четырехмерной алгебры кватернионов, в которой дополнительная операция умножения позволяет упростить запись уравнений.

Рассмотрены все описанные выше подходы к описанию движения твердого тела и приведен вывод соответствующих кинематических уравнений с единых позиций.

2. Кинематические уравнения вращения

Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки можно описать, связав с твердым телом систему координат (*связанную*) и задав уравнения движения этой системы координат относительно *неподвижной*. Положение связанной системы координат в момент времени t описывается матрицей перехода $P(t)$, которая, как матрица перехода из одного ортонормированного

базиса в другой, является ортогональной (т. е. $P(t)^\top P(t) = E$ — единичная матрица). При этом, поскольку ориентация базиса не изменяется, $P(t)$ имеет положительный определитель. Множество ортогональных матриц с единичным определителем образует группу, обозначаемую $SO(3)$. Таким образом, $P(t)$ — элемент группы $SO(3)$.

Положение точки твердого тела в связанной системе координат описывается некоторым постоянным вектором \mathbf{y}_0 , а положение $\mathbf{x}(t)$ этой же точки в неподвижной системе координат меняется по закону $\mathbf{x}(t) = P(t)\mathbf{y}_0$. Дифференцируя это равенство по времени, получаем:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{P}(t)\mathbf{y}_0 = \dot{P}(t)P(t)^{-1}P(t)\mathbf{y}_0 = \dot{P}(t)P(t)^{-1}\mathbf{x}(t).$$

Отсюда видим, что вектор $\dot{P}(t)P(t)^{-1}\mathbf{x}$ представляет собой скорость точки, описываемой вектором \mathbf{x} , в момент времени t . Итак, в неподвижной системе координат кинематические уравнения движения можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{P}(t)P(t)^{-1}\mathbf{x}. \quad (1)$$

Отметим, что матрица $\dot{P}P^{-1}$ в любой момент времени является кососимметрической. Действительно, из условия $PP^\top = E$ ортогональности матрицы P заключаем, что $\dot{P}P^\top + P\dot{P}^\top = 0$, откуда

$$(\dot{P}P^{-1})^\top + \dot{P}P^{-1} = (\dot{P}P^\top)^\top + \dot{P}P^\top = P\dot{P}^\top + \dot{P}P^\top = 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что отображение $\mathbf{y} = A_\omega\mathbf{x}$ с кососимметрической матрицей A_ω вида

$$A_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix},$$

представляет собой векторное умножение вектора \mathbf{x} слева на вектор $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_z x_2 + \omega_y x_3 \\ \omega_z x_1 - \omega_x x_3 \\ -\omega_y x_1 + \omega_x x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_\omega \mathbf{x}.$$

Полагая $A_\omega = \dot{P}P^{-1}$, можем записать векторное уравнение (1) в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = A_\omega \mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}.$$

Отсюда заключаем, что вектор $\boldsymbol{\omega}$, соответствующий матрице $A_\omega = \dot{P}P^{-1}$, представляет собой вектор *мгновенной угловой скорости*. Из соотношения $A_\omega = \dot{P}P^{-1}$ получаем уравнение

$$\dot{P} = A_\omega P, \quad (2)$$

известное как *уравнение Пуассона*. В зависимости от способа описания матрицы $P(t)$, из уравнения Пуассона получаем различные варианты кинематических уравнений вращения вокруг неподвижной точки.

3. Описание матрицы $P(t)$ с помощью углов Эйлера

Пусть x, y, z — неподвижная система координат (по местной вертикали направлена ось Oz), а ξ, η, ζ — связанная система координат. Преобразование первой системы координат во вторую можно получить тремя последовательными поворотами. Для этого вводим ось узлов, расположенную на прямой пересечения плоскостей Oxy и $O\xi\eta$. Повернем систему $Oxyz$ вокруг оси Oz на угол ψ до совмещения оси Ox с осью узлов. Затем поворотом системы координат вокруг оси узлов на угол θ совмещаем ось Oz с осью $O\xi$. Наконец, поворотом вокруг оси $O\xi$ на угол φ совмещаем положение системы координат с $O\xi\eta\zeta$.

Указанные углы (углы Эйлера) в теории движения твердого тела имеют названия¹⁾: ψ — угол прецессии; θ — угол нутации; φ — угол собственного вращения.

Углы Эйлера позволяют представить матрицу перехода P как произведение трех матриц специального вида: $P = A_\psi B_\theta C_\varphi$. Здесь

$$A_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad C_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя произведение $P = A_\psi B_\theta C_\varphi$, получим:

$$\begin{aligned} \dot{P}P^{-1} &= (\dot{A}_\psi B_\theta C_\varphi + A_\psi \dot{B}_\theta C_\varphi + A_\psi B_\theta \dot{C}_\varphi) C_\varphi^{-1} B_\theta^{-1} A_\psi^{-1} = \\ &= \dot{A}_\psi A_\psi^{-1} + A_\psi (\dot{B}_\theta B_\theta^{-1}) A_\psi^{-1} + (A_\psi B_\theta) (\dot{C}_\varphi C_\varphi^{-1}) (A_\psi B_\theta)^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Каждое из трех слагаемых в правой части равенства (3) представляет собой кососимметрическую матрицу: первая связана с ортогональной матрицей A_ψ , вторая и третья получаются ортогональным преобразованием кососимметрических матриц $\dot{B}_\theta B_\theta^{-1}$ и $\dot{C}_\varphi C_\varphi^{-1}$. Каждой матрице соответствует мгновенный поворот вокруг некоторой оси. В совокупности мы получаем суммарный поворот с вектором угловой скорости ω , полученным сложением трех векторов.

Непосредственным вычислением можно убедиться в том, что матрица $\dot{A}_\psi A_\psi^{-1}$ задает вращение, определяемое вектором угловой скорости $\omega_\psi = (0, 0, 1)^\top \dot{\psi}$, т. е. вращение вокруг оси Oz с угловой скоростью $\dot{\psi}$. Матрица $A_\psi (\dot{B}_\theta B_\theta^{-1}) A_\psi^{-1}$ представляет собой преобразование, реализуемое матрицей $\dot{B}_\theta B_\theta^{-1}$ в промежуточной системе координат Ox_1y_1z , полученной из $Oxyz$ с помощью матрицы перехода A_ψ (т. е. при повороте вокруг Oz на угол ψ). Ясно, что это матрица вращения вокруг оси узлов со скоростью $\dot{\theta}$. Наконец, третья матрица $(A_\psi B_\theta) (\dot{C}_\varphi C_\varphi^{-1}) (A_\psi B_\theta)^{-1}$ задает вращение вокруг оси $O\xi$ со скоростью $\dot{\varphi}$.

Запишем координаты трех векторов угловых скоростей в связанной системе координат:

$$\omega_\psi = \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \dot{\psi}; \quad \omega_\theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\theta}; \quad \omega_\varphi = C_\varphi^\top \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\varphi}.$$

¹⁾ Предполагается, что ось Oz направлена по вертикали вверх.

Складывая эти векторы, получаем координаты вектора ω в связанной системе координат:

$$\omega = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \dot{\psi} + \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\theta} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\varphi} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}.$$

Используя обратную матрицу, находим производные углов Эйлера:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi & 0 \\ -\cos \theta \sin \varphi & -\cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \end{pmatrix} \omega. \quad (4)$$

Полученные уравнения представляют собой кинематические уравнения вращения твердого тела в углах Эйлера.

4. Описание матрицы $P(t)$ с помощью углов Крылова

Положение летательного аппарата можно описывать не через углы Эйлера, а через углы Крылова:

- *угол рыскания* ψ — угол между проекцией оси $O\xi$ на плоскость Oxy и осью Ox ;
- *угол тангажа* θ — угол между осью $O\xi$ и плоскостью Oxy ;
- *угол крена* γ — угол между плоскостью $O\xi\zeta$ и плоскостью, проведенной через оси $O\xi$ и Oz (местной вертикальной плоскостью).

Как и в случае углов Эйлера, неподвижная система координат $Oxyz$ может быть преобразована в связанную тремя поворотами: на угол ψ вокруг вертикальной оси (оси Oz), затем на угол θ вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости $O\xi\zeta$ (нового положения оси Oy после первого поворота) и, наконец, на угол γ вокруг оси $O\xi$. Значит, матрица перехода P разлагается в произведение трех матриц

$$P = A_\psi B_\theta C_\gamma,$$

где

$$A_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad C_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Повторяя рассуждения, использованные в случае углов Эйлера, получаем следующее представление вектора угловой скорости:

$$\omega = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & 1 \\ \sin \gamma \cos \theta & -\cos \gamma & 0 \\ \cos \gamma \cos \theta & \sin \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Обращая матрицу, находим

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin \gamma}{\cos \theta} & \frac{\cos \gamma}{\cos \theta} \\ 0 & -\cos \gamma & \sin \gamma \\ 1 & -\sin \gamma \operatorname{tg} \theta & -\cos \gamma \operatorname{tg} \theta \end{pmatrix} \omega. \quad (6)$$

5. Использование кватернионов

Описание положения твердого тела с помощью углов Эйлера или Крылова приводит к системе дифференциальных уравнений с особенностью ($\theta = 0, \pi$ в уравнениях (4) для углов Эйлера, $\theta = \pm\pi/2$ в уравнениях (6) для углов Крылова). Это закономерно, так как на многообразии $SO(3)$ нет единой системы координат. Необходимо использовать минимум две локальные системы координат. При приближении к особым точкам приходится менять локальную систему координат и пересчитывать углы.

Другой способ учесть эту особенность многообразия $SO(3)$ — использовать четыре или более фазовых переменных, связанных друг с другом одним или несколькими уравнениями связи. На практике это можно реализовать с помощью кватернионов.

Среди всех кватернионов выделим единичные кватернионы, т. е. те, которые по модулю равны 1. Получим группу по умножению со свойствами многообразия — группу Ли. В \mathbb{R}^4 это многообразие представляет собой единичную сферу. Существует гомоморфизм группы единичных кватернионов на группу $SO(3)$, ядро которого содержит числа 1 и -1 . Этот гомоморфизм является гладким отображением многообразий. Это означает, что многообразие $SO(3)$ получается, если на единичной сфере в \mathbb{R}^4 отождествить противоположные точки.

Существование такого гомоморфизма позволяет рассматривать любую ортогональную матрицу с определителем, равным единице, как единичный кватернион, а траекторию вращения твердого тела — как кривую на единичной сфере в \mathbb{R}^4 . Хотя гомоморфизм устанавливает неоднозначное соответствие между единичными кватернионами и ортогональными матрицами с единичным определителем, соответствие между начальным положением твердого тела и одним из двух кватернионов, соответствующих этому положению, однозначно реализует траекторию твердого тела как кривую на сфере в \mathbb{R}^4 .

Отметим, что гомоморфизм группы единичных кватернионов на $SO(3)$ определен неоднозначно — лишь с точностью до группы автоморфизмов $SO(3)$. Поэтому существует бесконечно много интерпретаций ортогональных матриц с единичным определителем как единичных кватернионов. Рассмотрим одну из таких интерпретаций.

Для каждого кватерниона Λ единичной длины рассмотрим отображение алгебры всех кватернионов вида

$$\varphi_\Lambda(M) = \Lambda M \Lambda^{-1}.$$

Очевидно, что это отображение в \mathbb{R}^4 является линейным оператором. При этом оно сохраняет норму, поскольку

$$|\varphi_\Lambda(M)| = |\Lambda| |M| |\Lambda|^{-1} = |M|.$$

Кроме того, это отображение коммутирует с операцией сопряжения кватернионов, так как

$$\overline{\varphi_\Lambda(M)} = \overline{\Lambda^{-1} M \Lambda} = \Lambda \overline{M} \Lambda^{-1}$$

в силу равенства $\overline{\Lambda} = \Lambda^{-1}$, верного для любого единичного кватерниона. Отсюда следует, что

$$\operatorname{Re} \varphi_\Lambda(M) = \frac{\varphi_\Lambda(M) + \overline{\varphi_\Lambda(M)}}{2} = \Lambda \frac{M + \overline{M}}{2} \Lambda^{-1} = \frac{M + \overline{M}}{2} = \operatorname{Re} M,$$

т. е. отображение сохраняет действительную часть кватерниона и, в частности, мнимый кватернион переводит в мнимый.

Рассматривая мнимый кватернион $\zeta = ai + bj + ck$ как вектор $\zeta = ai + bj + ck$ в линейном пространстве V_3 трехмерных векторов, заданный разложением в правом ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, приходим к отображению φ_Λ из V_3 в V_3 , которое является линейным и сохраняет евклидову норму вектора, т. е. является ортогональным оператором. Выясним, как действует этот оператор.

Представим единичный кватернион Λ в виде

$$\Lambda = a + b\xi,$$

где a, b — действительные числа, причем

$$b \geq 0, \quad a^2 + b^2 = 1,$$

а ξ — мнимый кватернион (вектор) единичной длины. Разложим вектор ζ на ортогональную проекцию $\alpha\xi$ на направление вектора ξ и на ортогональную составляющую $\beta\xi^\perp$, где ξ^\perp — единичный вектор, ортогональный ξ , т. е.

$$\zeta = \alpha\xi + \beta\xi^\perp.$$

Тогда

$$\varphi_\Lambda(\zeta) = \alpha\varphi_\Lambda(\xi) + \beta\varphi_\Lambda(\xi^\perp).$$

Имеем

$$\varphi_\Lambda(\xi) = (a + b\xi)\xi(a - b\xi) = (a + b\xi)(a - b\xi)\xi = (a^2 + b^2)\xi = \xi,$$

так как кватернионы $a + b\xi$, ξ , $a - b\xi$ коммутируют будучи многочленами от одного кватерниона ξ . Рассмотрим ортогональную составляющую вектора ζ :

$$\varphi_\Lambda(\xi^\perp) = (a + b\xi)\xi^\perp(a - b\xi) = (a\xi^\perp + b\xi\xi^\perp)(a - b\xi) = a^2\xi^\perp + ab\xi\xi^\perp - ab\xi^\perp\xi - b^2\xi\xi^\perp\xi.$$

Из свойств умножения кватернионов нетрудно получить формулу умножения мнимых кватернионов, рассматривая их как векторы в V_3 :

$$\zeta_1\zeta_2 = -(\zeta_1, \zeta_2) + [\zeta_1, \zeta_2], \quad (7)$$

где (ζ_1, ζ_2) и $[\zeta_1, \zeta_2]$ — скалярное и векторное произведения векторов ζ_1 и ζ_2 . Из этой формулы с учетом ортогональности векторов ξ и ξ^\perp получаем:

$$\xi\xi^\perp = [\xi, \xi^\perp], \quad \xi\xi^\perp\xi = [[\xi, \xi^\perp], \xi] = \xi^\perp.$$

Следовательно,

$$\varphi_\Lambda(\xi^\perp) = (a^2 - b^2)\xi^\perp + 2ab[\xi, \xi^\perp].$$

Исходя из равенства $a^2 + b^2 = 1$, можем записать

$$a = \cos \frac{\theta}{2}, \quad b = \sin \frac{\theta}{2}$$

для некоторого угла θ (этот угол определяется однозначно на полуинтервале $(-\pi, \pi]$). Отсюда следует, что

$$\varphi_\Lambda(\xi^\perp) = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)\xi^\perp + 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}[\xi, \xi^\perp] = \cos \theta \xi^\perp + \sin \theta [\xi, \xi^\perp].$$

В результате приходим к равенству

$$\varphi_{\Lambda}(\zeta) = \varphi_{\Lambda}(\alpha\xi + \beta\xi^{\perp}) = \alpha\xi + (\beta \cos \theta)\xi^{\perp} + (\beta \sin \theta)[\xi, \xi^{\perp}],$$

представляющему собой запись действия линейного оператора в правом ортонормированном базисе $\xi, \xi^{\perp}, [\xi, \xi^{\perp}]$. Из этой записи легко сделать вывод, что линейный оператор φ_{Λ} поворачивает вектор ζ вокруг оси, определяемой вектором ξ , на угол θ . Матрицу этого линейного оператора в неподвижной системе координат можно интерпретировать как матрицу перехода в связанную систему координат, т.е. $\varphi_{\Lambda} \in SO(3)$.

Нетрудно убедиться в том, что отображение, которое единичному кватерниону Λ ставит в соответствие ортогональный оператор φ_{Λ} , произведение кватернионов переводит в произведение линейных операторов, т.е. является гомоморфизмом группы единичных кватернионов на группу ортогональных операторов с единичным определителем. Ядром этого гомоморфизма являются кватернионы 1 и -1 . Действительно, если φ_{Λ} — единичный линейный оператор, то $\Lambda i \Lambda^{-1} = i$, $\Lambda j \Lambda^{-1} = j$ и $\Lambda k \Lambda^{-1} = k$, а из этих равенств следует, что в этом случае кватернион Λ — действительное число, а так как $|\Lambda| = 1$, то $\Lambda = \pm 1$.

Построенный гомоморфизм позволяет интерпретировать траекторию $P(t)$ вращения твердого тела как кривую $\Lambda(t)$ на единичной сфере в \mathbb{R}^4 , рассматривая ее точки как единичные кватернионы. Из условия

$$\Lambda(t)\bar{\Lambda}(t) \equiv 1$$

вытекает, что

$$\dot{\Lambda}\bar{\Lambda} + \Lambda\dot{\bar{\Lambda}} \equiv 0.$$

Для кватерниона $M = \dot{\Lambda}\bar{\Lambda} = \dot{\Lambda}\Lambda^{-1}$ это означает, что $\bar{M} = -M$, т.е. он чисто мнимый. Равенство $M = \dot{\Lambda}\bar{\Lambda}$ можно переписать в виде $\dot{\Lambda} = M\Lambda$, что представляет собой кинематические уравнения для кривой на трехмерной сфере.

Установим связь между кватернионом M в уравнении $\dot{\Lambda} = M\Lambda$ и матрицей A_{ω} в уравнении $\dot{P} = A_{\omega}P$. Отметим, что эта связь зависит от выбора соответствия между единичными кватернионами и ортогональными матрицами с единичным определителем. В данном случае $P = \varphi_{\Lambda}$ и, если векторы в V_3 отождествляются с мнимыми кватернионами, то

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}_0 = \varphi_{\Lambda}(\mathbf{y}_0) = \Lambda\mathbf{y}_0\bar{\Lambda}.$$

Дифференцируем это равенство:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \dot{P}\mathbf{y}_0 = \dot{\Lambda}\mathbf{y}_0\bar{\Lambda} + \Lambda\mathbf{y}_0\dot{\bar{\Lambda}} = \dot{\Lambda}\mathbf{y}_0\bar{\Lambda} - \overline{\dot{\Lambda}\mathbf{y}_0\bar{\Lambda}} = \\ &= 2 \operatorname{Im} \dot{\Lambda}\mathbf{y}_0\bar{\Lambda} = 2 \operatorname{Im} \dot{\Lambda}\Lambda^{-1}(\Lambda\mathbf{y}_0\bar{\Lambda}) = 2 \operatorname{Im} \dot{\Lambda}\Lambda^{-1}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Мы видим, что скорость в точке, определяемой текущим положением

$$\mathbf{x} = \Lambda\mathbf{y}_0\bar{\Lambda},$$

получается умножением \mathbf{x} слева на кватернион $2\dot{\Lambda}\Lambda^{-1}$ и выбором мнимой части произведения. Но кватернионы $\dot{\Lambda}\Lambda^{-1}$ и \mathbf{x} мнимые, следовательно, мнимую часть их произведения можно представить как векторное произведение:

$$2 \operatorname{Im} \dot{\Lambda}\Lambda^{-1}\mathbf{x} = [2\dot{\Lambda}\Lambda^{-1}, \mathbf{x}] = [2M, \mathbf{x}].$$

Отсюда следует, что $\dot{\mathbf{x}} = [2M, \mathbf{x}]$ и мнимые компоненты кватерниона $2M = 2\dot{\Lambda}\Lambda^{-1}$ совпадают с координатами вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости, т. е. можно записать: $2M = \boldsymbol{\omega}$, откуда

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\Lambda. \quad (8)$$

Отметим, что система уравнений (8) имеет первый интеграл $|\Lambda|^2 = C$, означающий, что если начальное положение $\Lambda(t_0)$ кривой в \mathbb{R}^4 находится на единичной сфере (т. е. $|\Lambda|^2 = 1$), то и вся кривая $\Lambda(t)$ будет находиться на этой сфере. При численном интегрировании системы дифференциальных уравнений это свойство будет нарушаться и требуется такая модификация используемого метода, которая обеспечивает выполнение этого уравнения. Простейший вариант — нормировка получаемого кватерниона на каждом шаге интегрирования. Например, при использовании методом Эйлера вместо соотношения

$$\Lambda_{n+1} = \Lambda_n + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_n\Lambda_n\Delta t_n$$

можно использовать следующую схему:

$$\hat{\Lambda}_{n+1} = \Lambda_n + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_n\Lambda_n\Delta t_n, \quad \Lambda_{n+1} = \frac{\hat{\Lambda}_{n+1}}{|\hat{\Lambda}_{n+1}|},$$

которая сводится к разностной схеме

$$\Lambda_{n+1} = \frac{2 + \boldsymbol{\omega}_n\Delta t_n}{\sqrt{4 + \boldsymbol{\omega}_n^2\Delta t_n^2}}\Lambda_n.$$

Указанная корректировка метода Эйлера дает дополнительную ошибку порядка $O(\Delta t^2)$, которая мала по сравнению с ошибкой самого метода.

6. Уравнения динамики Эйлера

Движение системы материальных точек подчиняется основному закону динамики (2-му закону Ньютона)

$$m_i\dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{F}_i, \quad (9)$$

где m_i — масса i -й точки системы; \mathbf{v}_i — скорость i -й точки системы; \mathbf{F}_i — сумма сил, действующих на i -ю точку системы. Наличие связей (для твердого тела — неизменность расстояний между точками) накладывает определенные требования на силы, действующие на точки системы, которые состоят в том, что скорость точек твердого тела подчиняются условию

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i, \quad (10)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор мгновенной угловой скорости; \mathbf{r}_i — радиус-вектор точки относительно центра вращения.

Умножив уравнение (9) векторно слева на \mathbf{r}_i с учетом равенства $\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i = 0$, получим

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i) = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (11)$$

Величина $\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$ называется *кинетическим моментом* (моментом количества движения) \mathbf{K} материальной точки, а величина $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ — *моментом силы* \mathbf{F}_i . Суммируя уравнения (11) по всем точкам системы, приходим к уравнению динамики системы в следующей форме:

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M},$$

где \mathbf{K} — кинетический момент системы; \mathbf{M} — суммарный момент сил, действующих на систему.

Кинетический момент $\mathbf{K} = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$ материальной точки, учитывая (10), можно записать в виде:

$$\mathbf{K} = -m_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega}).$$

Двойное векторное умножение слева на \mathbf{r}_i — это линейный оператор L_{r_i} , который в земной системе координат имеет матрицу

$$[L_{r_i}] = \begin{pmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -(r_y^2 + r_z^2) & r_x r_y & r_x r_z \\ r_x r_y & -(r_x^2 + r_z^2) & r_y r_z \\ r_x r_z & r_y r_z & -(r_x^2 + r_y^2) \end{pmatrix}.$$

Матрица $I_i = -m_i [L_{r_i}]$ в теории механических систем известна как матрица инерции материальной точки \mathbf{r}_i . Ее элементы составляют *тензор инерции* I_i . Таким образом,

$$\mathbf{K}_i = I_i \boldsymbol{\omega}.$$

Так как у всех точек твердого тела мгновенная угловая скорость одна и та же, кинетический момент \mathbf{K} твердого тела выражается формулой $\mathbf{K} = I \boldsymbol{\omega}$, в которой I есть сумма моментов инерции составляющих это тело материальных точек. Следовательно, уравнения динамики можно записать так:

$$\frac{d}{dt}(I \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}. \tag{12}$$

Выясним, какой вид уравнение (12) имеет в связанной системе координат. Учтем, что в земной системе координат вектор-функция дифференцируется по координатам. Поэтому (12) можно рассматривать как матричную запись уравнений в этой системе координат. Преобразование матричного уравнения в связи с заменой базиса выполняется по обычным формулам линейной алгебры:

$$I = P I_b P^{-1}, \quad \boldsymbol{\omega} = P \omega_b, \quad \mathbf{M} = P M_b,$$

где I_b , ω_b , M_b — запись в связанной системе координат (в матричной форме) тензора инерции I , угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и момента сил \mathbf{M} ; P — матрица перехода из земной системы координат в связанную. Подставив эти соотношения в уравнение динамики (12), получим:

$$\frac{d}{dt}(P I_b P^{-1} P \omega_b) = P M_b,$$

или

$$\frac{d}{dt}(P I_b \omega_b) = P M_b.$$

Дифференцируя произведение в левой части по обычным правилам, находим:

$$\dot{P} I_b \omega_b + P \frac{d}{dt}(I_b \omega_b) = P M_b.$$

Умножим слева равенство на матрицу P^{-1} и выделим произведение $\dot{P}P^{-1}$:

$$P^{-1}(\dot{P}P^{-1})PI_b\omega_b + \frac{d}{dt}(I_b\omega_b) = M_b.$$

Теперь учтем, что компоненты тензора инерции в связанной системе координат не зависят от времени, а матрица $P^{-1}(\dot{P}P^{-1})P$ есть матрица оператора A_ω умножения слева на вектор ω , записанная в связанной системе координат. В результате:

$$I_b\dot{\omega}_b + \omega_b \times I_b\omega_b = M_b, \quad (13)$$

где $\dot{\omega}_b$ — вектор относительной угловой скорости, т. е. вектор, полученный по координатным дифференцированием ω_b . Слагаемое $\omega_b \times I_b\omega_b$ может быть записано в инвариантной форме $\omega \times I\omega$ и представляет собой составляющую угловой скорости, связанную с переносным движением (т. е. движением связанной системы координат относительно земной).

7. Управление вращением твердого тела в углах Крылова

Рассмотрим задачу управляемого вращения твердого тела, в которой управлениями являются координаты момента сил в связанной системе координат. Ориентацию твердого тела будем задавать углами Крылова. Тогда вращение твердого тела описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\Omega} = C\omega; \\ \dot{\omega} = I^{-1}M - I^{-1}(\omega \times I\omega), \end{cases} \quad (14)$$

где

$$\Omega = \begin{pmatrix} \psi \\ \theta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin \gamma}{\cos \theta} & \frac{\cos \gamma}{\cos \theta} \\ 0 & -\cos \gamma & \sin \gamma \\ 1 & -\sin \gamma \operatorname{tg} \theta & -\cos \gamma \operatorname{tg} \theta \end{pmatrix},$$

ω — вектор угловой скорости, записанный в связанной системе координат, M — суммарный момент сил, записанный в связанной системе координат.

Общие принципы построения управления динамической системой на основе концепции обратных задач динамики изложены в [6]. Один из подходов базируется на приведении управляемой системы к каноническому виду [7]. Дифференцируя первое уравнение (14) по времени и используя второе уравнение той же системы, находим:

$$\ddot{\Omega} = \dot{C}\omega + CI^{-1}(M - \omega \times I\omega). \quad (15)$$

С помощью первого уравнения (14) выразим вектор ω через канонические переменные и подставим в полученное уравнение:

$$\ddot{\Omega} = \dot{C}D\dot{\Omega} + CI^{-1}(M - D\dot{\Omega} \times ID\dot{\Omega}), \quad (16)$$

где $D = C^{-1}$ — матрица из уравнения (5).

Предположим, что задана траектория движения твердого тела в виде известной функции $\Omega_*(t)$. Тогда матрицы C и D , зависящие от углов ориентации, известны как функции времени. Матрица \dot{C} выражается через углы

и их производные:

$$\dot{C} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin \gamma \sin \theta}{\cos^2 \theta} & \frac{\cos \gamma \sin \theta}{\cos^2 \theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{\sin \gamma}{\cos^2 \theta} & -\frac{\sin \gamma}{\cos^2 \theta} \end{pmatrix} \dot{\theta} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\cos \gamma}{\cos \theta} & -\frac{\sin \gamma}{\cos \theta} \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \\ 1 & -\cos \gamma \operatorname{tg} \theta & \sin \gamma \operatorname{tg} \theta \end{pmatrix} \dot{\gamma}.$$

С учетом этих зависимостей из уравнения (16) можно найти управление M_* , реализующее заданную траекторию $\Omega_*(t)$:

$$M_* = ID_*(\ddot{\Omega}_* - \dot{C}_* D_* \dot{\Omega}_*) + D_* \dot{\Omega}_* \times ID_* \dot{\Omega}_*,$$

где D_* , C_* , \dot{C}_* вычислены через компоненты θ_* , ψ_* вектора Ω_* и производные этих компонент. Управление M_* есть функция времени, т. е. является программным.

Для учета возможных отклонений траектории движения $\Omega(t)$ от предписанной $\Omega_*(t)$ рассчитаем управление в виде обратной связи, потребовав дополнительно, чтобы отклонение $z = \Omega - \Omega_*$ удовлетворяло дифференциальному уравнению

$$\ddot{z} + K_1 \dot{z} + K_2 z = 0,$$

в котором диагональные матрицы K_1 и K_2 выбраны так, что нулевое положение равновесия этого уравнения является асимптотически устойчивым²⁾.

Полагая, что текущая ориентация Ω и текущая угловая скорость ω твердого тела известны, заключаем, что также известны отклонения $z = \Omega - \Omega_*$ и $\dot{z} = \dot{\Omega} - \dot{\Omega}_* = C\omega - \dot{\Omega}_*$. Соотношение $\ddot{z} = \ddot{\Omega} - \ddot{\Omega}_*$ с учетом (15) позволяет найти соответствующее управление:

$$M = ID(\ddot{\Omega} - \dot{C}\omega) + \omega \times I\omega = ID(\ddot{\Omega}_* - K_1 \dot{z} - K_2 z) - ID\dot{C}\omega + \omega \times I\omega. \quad (17)$$

В полученном управлении матрицы K_1 и K_2 определяют переходный процесс по отклонениям твердого тела от предписанной траектории. Чтобы его оценить, определим для $j = 1, 2, 3$ значение α_j как максимальное из действительных частей решений уравнения

$$\lambda_j^2 + k_{1j}\lambda_j + k_{2j} = 0,$$

где k_{1j} и k_{2j} — соответствующие диагональные элементы матриц K_1 и K_2 . Тогда отклонения z_j угловых переменных будут удовлетворять ограничениям $|z_j| \leq C e^{\alpha_j t}$.

8. Управление вращением твердого тела в кватернионах

В уравнении (8) вектор ω угловой скорости задан в неподвижной системе координат. Формулы преобразования координат вектора при переходе в связанную систему координат в кватернионной форме выглядят следующими образом:

$$\omega = \Lambda \omega_b \Lambda^{-1},$$

где ω_b — координаты вектора ω в связанной системе координат; Λ — единичный кватернион, соответствующий матрице перехода из неподвижной системы координат в связанную.

²⁾ Условие диагональности упрощает анализ дифференциального уравнения на асимптотическую устойчивость.

Выполнив в уравнении (8) замену, получим

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda\omega_b. \quad (18)$$

Для получения полной системы дифференциальных уравнений, описывающей движение твердого тела, к уравнению (18) необходимо добавить уравнение основного закона динамики (13):

$$\begin{cases} \dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda\omega_b, \\ \dot{\omega}_b = I_b^{-1}M_b - I_b^{-1}(\omega_b \times I_b\omega_b). \end{cases} \quad (19)$$

Однако система (19) неудобная, поскольку в ней используются разнородные операции (операции над кватернионами в кинематических уравнениях и операции над трехмерными векторами в динамических). Необходимо либо кватернионные операции преобразовать в векторные, либо наоборот, векторные в кватернионные. Первый вариант реализован в [8], остановимся на втором варианте.

Векторное произведение, согласно (7), можно выразить через произведение кватернионов и операцию сопряжения:

$$[\zeta_1, \zeta_2] = \frac{1}{2}(\zeta_1\zeta_2 - \overline{\zeta_1\zeta_2}) = \text{Im}(\zeta_1\zeta_2).$$

Матрица I_b представляет собой матрицу линейного оператора в \mathbb{R}^3 . Этот оператор можно расширить до линейного оператора в \mathbb{R}^4 следующим образом:

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_b \end{pmatrix}.$$

В результате получим систему, эквивалентную (19), но целиком записанную в кватернионах:

$$\begin{cases} \dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda\omega_b, \\ \dot{\omega}_b = \tilde{I}^{-1}[M_b - \text{Im}(\omega_b(\tilde{I}\omega_b))]. \end{cases} \quad (20)$$

Здесь ω_b и M_b — мнимые кватернионы, соответствующие одноименным векторам.

Для получения программного управления приведем ее к каноническому виду. Для этого продифференцируем первое уравнение (20) и используем второе:

$$\ddot{\Lambda} = \frac{1}{2}\dot{\Lambda}\omega_b + \frac{1}{2}\Lambda\dot{\omega}_b = \dot{\Lambda}\Lambda^{-1}\dot{\Lambda} + \frac{1}{2}\Lambda\left(\tilde{I}^{-1}[M_b - \text{Im}(\omega_b(\tilde{I}\omega_b))]\right). \quad (21)$$

Здесь необходимо ω_b заменить на $2\Lambda^{-1}\dot{\Lambda}$.

Пусть задана траектория вращения в виде некоторой функции $\Lambda_*(t)$, $t \in [t_0, t_*]$. Уравнение (21) позволяет управление M_{b*} выразить через функцию $\Lambda_*(t)$ и ее производные:

$$M_{b*} = 2\tilde{I}(\Lambda_*^{-1}(\ddot{\Lambda}_* - \dot{\Lambda}_*\Lambda_*^{-1}\dot{\Lambda}_*)) + \text{Im}(\omega_{b*}(\tilde{I}\omega_{b*})),$$

где $\omega_{b*} = 2\Lambda_*^{-1}\dot{\Lambda}_*$. Полученное выражение представляет собой программное управление, поскольку при заданной функции $\Lambda_*(t)$ величина M_{b*} есть функция времени.

Для получения управления в форме обратной связи исходим (как и выше) из того, что отклонение $\mathbf{z} = \Lambda - \Lambda_*$ подчиняется системе дифференциальных уравнений

$$\ddot{\mathbf{z}} + K_1 \dot{\mathbf{z}} + K_2 \mathbf{z} = 0$$

с устойчивым нулевым положением равновесия. Из этого уравнения получаем:

$$\ddot{\Lambda} - \ddot{\Lambda}_* + K_1(\dot{\Lambda} - \dot{\Lambda}_*) + K_2(\Lambda - \Lambda_*) = 0.$$

Следовательно,

$$\ddot{\Lambda} = \ddot{\Lambda}_* - K_1(\dot{\Lambda} - \dot{\Lambda}_*) - K_2(\Lambda - \Lambda_*).$$

Требуемое ускорение $\ddot{\Lambda}$, согласно уравнению (21), обеспечивает управление

$$M_b = 2\tilde{I}[\Lambda^{-1}(\ddot{\Lambda}_* - K_1(\dot{\Lambda} - \dot{\Lambda}_*) - K_2(\Lambda - \Lambda_*) - \dot{\Lambda}\Lambda^{-1}\dot{\Lambda})] + \text{Im}(\omega_b(\tilde{I}\omega_b)), \quad (22)$$

где $\Lambda, \dot{\Lambda}$ — параметры текущего положения, величина $\omega_b = 2\dot{\Lambda}\Lambda^{-1}$ также определяется текущим положением. Отметим, что правая часть соотношения (22) может не быть мнимым кватернионом, поскольку траектория

$$\Lambda(t) = \mathbf{z}(t) + \Lambda_*(t)$$

выходит за пределы единичной сферы в \mathbb{R}^4 . Проектирование указанной траектории на единичную сферу означает, что в действительности управление есть мнимая часть кватерниона, находящегося в правой части (22).

9. Моделирование вращения в углах Крылова и кватернионах

С целью анализа предложенных алгоритмов управления вращением твердого тела проведено моделирование в задаче стабилизации положения искусственного спутника Земли 1963 22А, имеющего следующие главные моменты инерции [6]: $I_1 = I_2 = 99 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_3 = 3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. В качестве траектории вращения задано фиксированное положение с углами Крылова $\psi = 20^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\gamma = 40^\circ$, а в качестве начального — положение, определяемое нулевыми значениями углов Крылова.

Моделирование осуществлялось в углах Крылова и в кватернионах. Интегрирование системы дифференциальных уравнений (14) проводилось методом Эйлера с шагом 0,01. Для расчета стабилизирующих управлений использованы скалярные матрицы K_1 и K_2 со значениями 0,5 и 0,05 на главной диагонали. Моделирование в двух вариантах дало схожие результаты, но эти результаты не совпадают. Расхождение по углам ориентации не превышает 2° , а по координатам угловой скорости остается в пределах $0,01 \text{ с}^{-1}$.

Управления наибольшего по модулю значения достигают на начальном участке траектории. На эти значения существенное влияние оказывают коэффициенты стабилизации: из структуры управления видно, что начальные значения управлений пропорциональны коэффициентам стабилизации. Уменьшение коэффициентов стабилизации приводит к снижению максимальных по модулю значений управлений, но в то же время увеличивает время, за которое траектория попадет в заданную окрестность конечного положения. Так, при заданных коэффициентах стабилизации снижение начального отклонения в сто раз происходит за 37 с. Уменьшение коэффициентов k_{1j} в два раза, коэффициентов k_{2j} в четыре раза приводит к увеличению времени в два раза, при этом максимальные по модулю значения управлений сокращаются в четыре раза.

Рассматриваемую задачу можно трактовать как задачу переориентации. При этом можно получить решение с меньшей величиной максимального по модулю значения моментов сил.

Для этого поставим двухточечную задачу, задав время движения $T = 20$ с, начальное состояние, характеризуемое нулевыми значениями углов ориентации, угловых скоростей и угловых ускорений, и конечное состояние, характеризуемое значениями углов ориентации $\psi = 20^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\gamma = 40^\circ$, нулевыми угловыми скоростями и ускорениями в конечной точке. Заданные граничные условия позволяют однозначно построить полиномы $\psi_*(t)$, $\theta_*(t)$, $\gamma_*(t)$ пятой степени. Пересчитаем кривую $(\psi_*(t), \theta_*(t), \gamma_*(t))$ в четырехмерную кривую $\Lambda_*(t)$ на единичной сфере в \mathbb{R}^4 . Управление рассчитываем по формуле (22). Мы получим траекторию движения, при которой переориентация спутника проходит за меньшее время при меньших по модулю значениях управлений. Увеличение интервала времени движения приводит к дальнейшему уменьшению максимальных по модулю значений управлений (рис. 1).

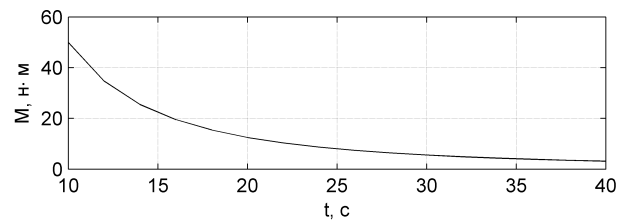


Рис. 1. Максимум модуля вектора управления в зависимости от времени движения

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 06-07-89265, 09-07-00327).

Список литературы

1. Айзерман М. А. Классическая механика.—М.: Наука, 1980.
2. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики.—М.: Физматлит, 2001.
3. Маркеев А. П. Теоретическая механика.—М.: ЧеРо, 1999.
4. Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела.—Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.
5. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела.—М.: Наука, 1973.
6. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: Нелинейные модели.—М.: Наука, 1988.
7. Крищенко А. П., Кавинов А. В. Стабилизация аффинных систем // Дифференц. уравн.—2000.—Т. 36, № 11.—С. 1–6.
8. Ермошина О. В., Крищенко А. П. Синтез программных управлений ориентацией космического аппарата методом обратных задач динамики // Изв. РАН. Теория и системы управления.—2000.—№ 2.—С. 155–162.

ИНСТРУМЕНТАРИЙ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ТРАНСНАЦИОНАЛЬНЫХ ПРОЕКТОВ

А. А. Пискунов, А. В. Лычев, М. А. Пискунова, В. Е. Кривоножко

В работе предлагается методика для оценки результатов формирования транснациональных проектов. Показывается, что переговорный процесс между странами можно представить как поведение объектов (стран) в многомерном пространстве экономических показателей на основе методологии Анализа Среды Функционирования (АСФ). В таком случае цели, которые страны достигнут в результате выполнения совместного проекта, можно определить как точки в многомерном пространстве. Оптимальные направления движения к поставленным целям и конусы возможных направлений предлагается находить с помощью метода анализа иерархий (МАИ). Применимость подхода иллюстрируется на реальных данных, взятых из открытых международных источников.

1. Введение и постановка задачи

В работе предлагается инструментарий для оценки результатов формирования транснациональных проектов. Любая математическая модель является всего лишь аппроксимацией поведения реальных социально-экономических процессов и явлений. Тем более сложно смоделировать деловые переговорные процессы по формированию транснациональных проектов, где в принятии решений существенную роль играет человеческий фактор. Наша задача заключается в том, чтобы предложенный инструментарий позволял давать прозрачную многомерную картину поведения объектов в каждый момент принятия решений, а также давал бы возможность получать количественную оценку развития ситуации в результате конкретных шагов принятия решений. Таким образом, в нашей модели существенную роль играют эксперты, чье мнение учитывается в каждом акте принятия решений.

Постановка задачи состоит в следующем.

Имеется две или более стран. Страны договариваются о формировании транснационального проекта, например, о строительстве порта, инвестициях в строительство и долях владения портом в будущем. На первый взгляд доли владения портом можно определить пропорционально инвестициям в строительство. Однако, такой подход не совсем корректно отражает экономико-политическую ситуацию. Дело в том, что для одного региона порт может дать существенное приращение доходов этого региона, а для другого региона приращение доходов будет незначительно, но зато строительство порта имеет большое стратегическое значение. Из этого примера следует, что определить доли в инвестициях только на основе будущего дохода не вполне корректно. Остановимся кратко на нашем подходе.

На первом этапе на основе показателей деятельности стран строится в многомерном пространстве множество производственных возможностей.

По существу, множество производственных возможностей можно построить с помощью двух основных групп методов.

Методы первой группы являются развитием и усложнением идеи производственной функции, но с попыткой сохранить явный аналитический вид функции и некоторые ее свойства, например, сделать постоянной эластичность замещения (CES функции) [1, 2, 3]. На наш взгляд такое стремление скорее выдает желание теоретиков иметь удобный объект для исследования, чем попытку адекватно описать функционирование реальных сложных объектов.

Однако, функционирование сложных объектов (систем) происходит в многомерном пространстве показателей деятельности этих объектов. Поэтому в современном неоклассическом подходе рассматривается отображение вектора ресурсов (затрат) во множество векторов выпуска [4, 5, 6]. В математике это называется точечно-множественным отображением. Далее, граница множества производственных возможностей строится как выпуклая оболочка реально существующих производственных (экономических) объектов.

Оказывается, что при таком подходе граница множества производственных возможностей представляет собой Парето-эффективное множество [6, 7, 8]. Такой подход гораздо более реально отображает экономическую реальность. Методология Анализа Среды Функционирования (АСФ) объединяет методы и модели второй группы для построения многомерного множества производственных возможностей и изучения поведения социально-экономических объектов нем.

В данной работе мы будем использовать методологию АСФ для наших построений.

На втором этапе нашего подхода каждая страна (регион, корпорация и т. д.) определяет цель, которую она достигнет через заданное количество лет, пусть для определенности будет для двух стран t_1 и t_2 . С формальной точки зрения это означает, что в многомерном пространстве показателей задаются две точки A и B , которые наши страны достигнут через t_1 и t_2 лет.

На третьем этапе, с помощью метода анализа иерархий (МАИ) [9] и привлечения экспертов находятся векторы a и b оптимального движения к целям для двух стран. Компоненты этих векторов являются весовыми коэффициентами, показывающими значимость каждого фактора (показателя), входящего в модель.

С другой стороны, можно показать, что векторы a и b являются градиентами функции потенциала для каждой страны, которая оценивает состояние объекта в каждой точке многомерного пространства показателей.

На четвертом этапе вычисляется мера эффективности для каждой страны Z_1 и Z_2 как отношение значений функции потенциала в начальных точках и конечных точках для каждого объекта. Затем находится приращение меры эффективности для выбранных стран.

Если приращения меры эффективности окажутся примерно одинаковыми и удовлетворят руководителей стран (регионов), то процесс переговоров можно окончить и принять начальные доли владения портом для обеих сторон. Однако такое редко встречается на практике. Тогда переговорный процесс продолжается. Руководство регионов договаривается о новых долях во владении портом. Эти доли влияют на доход регионов A и B в момент времени t_1 . Подчеркнем, что показатель дохода региона может входить в модель в качестве одной из переменных.

В результате цель в многомерном пространстве показателей сместится, и тогда надо рассматривать новые цели. Или цели могут быть достигнуты за время $(t_1 + \tau_1)$ для страны A , за время $(t_2 + \tau_2)$ для страны B . Тогда для

приращений мер эффективностей можно ввести поправочные множители, например, $(t_1 + \tau_1)$ для страны A и $(t_2 + \tau_2)$ для страны B .

Затем итерации переговорного процесса могут продолжаться.

Далее, оптимальные направления движения (векторы a и b) к поставленным целям являются на практике некоторыми идеальными направлениями. В реальной экономической жизни траектория движения объектов в многомерном пространстве будет отклоняться с определенной погрешностью.

Поэтому, на пятом этапе с помощью экспертов определяем конусы возможных направлений для каждого региона C_1 и C_2 , соответственно. Вершины конусов будут находиться в точках достижимых целей для регионов A и B . А сами конусы направлены вверх, в сторону увеличения выходных показателей. В самом простом случае конусы можно построить с помощью задания попарных соотношений между показателями модели. Таким образом, построить такие конусы — достаточно рутинная задача в экономической деятельности. Далее мы покажем, как задать конусы в более сложном случае, в математике такие конусы называются рецессивными конусами [10].

Шестой этап. Ранее мы говорили, что векторы a и b (идеальные направления) являются градиентами функций потенциала в точках A и B , которые определяют эквипотенциальные поверхности. Теперь мы можем модифицировать вид функций потенциала. Действительно, ранее полагалось, что оптимальное движение к точкам A и B будет вдоль векторов a и b . Однако, как мы понимаем, реальное движение объектов будет происходить в пределах конусов C_1 и C_2 .

На рисунке 1 показано сечение многомерного множества производственных возможностей по выходным (результатирующим) показателям, как строить такие сечения для многомерных множеств, изложено в работах [7, 11]. Точками Z_1 и Z_2 обозначены исходные положения регионов, а точки A и B представляют собой намеченные цели для регионов. Направления a и b являются оптимальными (идеальными) направлениями движения к цели. Конусы C_1 и C_2 определяют допустимые, близкие к оптимальным, направления развития регионов.

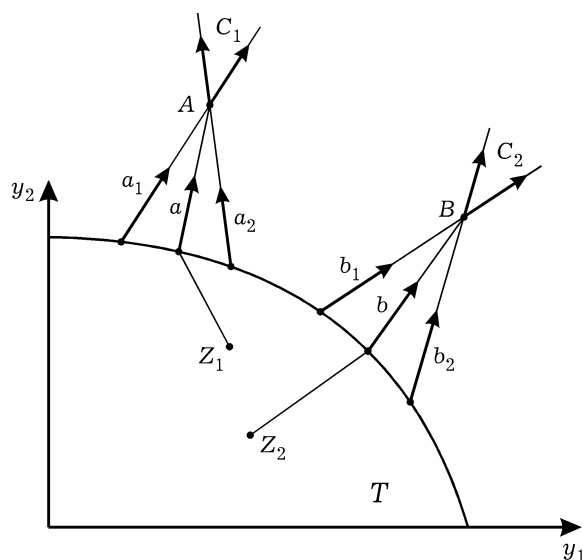


Рис. 1. Исходные положения регионов и достижимые цели

Поэтому объединение всех направлений, исходящих из вершины $A(B)$ и имеющих острый угол с любым вектором из конуса $C_1(C_2)$, даст нам направление возрастания функции потенциала. Все такие направления образуют сопряженный конус $C_1^*(C_2^*)$, граница этого конуса представляет собой эквипотенциальную поверхность. Таким образом, мы модифицировали форму функции потенциала. Теперь она представляет собой выпуклую функцию.

На рисунке 2 показано, что граница конуса C_1^* , исходящего из вершины A , является эквипотенциальной поверхностью построенной выпуклой функции. Подобным образом функцию можно определить для любой точки, расположенной на прямой, проходящей через точки $A(B)$, и определяемой векторами a и b , соответственно. На рисунке 2 показана эквипотенциальная поверхность выпуклой функции, построенная для точек B_i и B_j .

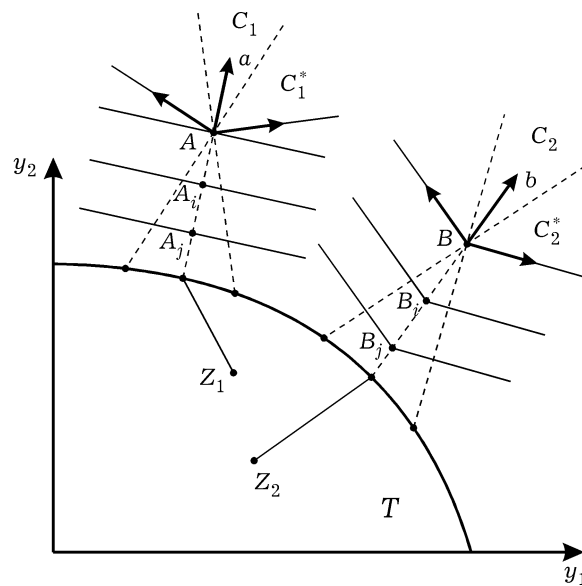


Рис. 2. Уточнение функции потенциалов

Седьмой этап. Как уже отмечалось ранее, в нашей задаче цели A и B предполагается достичь через определенное количество лет. Однако направления a и b , найденные нами как оптимальные на последних годах движения к цели, могут не быть оптимальными в начальные годы развития регионов. Действительно, например, чтобы построить порт, необходимо сначала запустить завод железобетонных конструкций, подвести железнодорожную ветку и т. д. Поэтому в начальный момент развития эксперты с помощью метода анализа иерархий находят направления развития регионов.

На рисунке 3 эти направления обозначены как d_1 из точки Z_1 и g_1 из точки Z_2 . Целесообразно эти направления выбирать так, чтобы они были направлены внутрь областей S_1 и S_2 , соответственно, образованных пересечением границы множества T и конусов (шатров) $-C_1$ и $-C_2$, направленных из точек A и B , соответственно, вниз, см. рисунок 3.

Восьмой этап. С течением времени граница множества производственных возможностей меняется, на рисунке 3 новая граница обозначена пунктирной линией. Определяем новые направления движения так, чтобы они находились в построенных конусах (шатрах), на рисунке 3 эти направления обозначены d_2 и g_2 , соответственно.

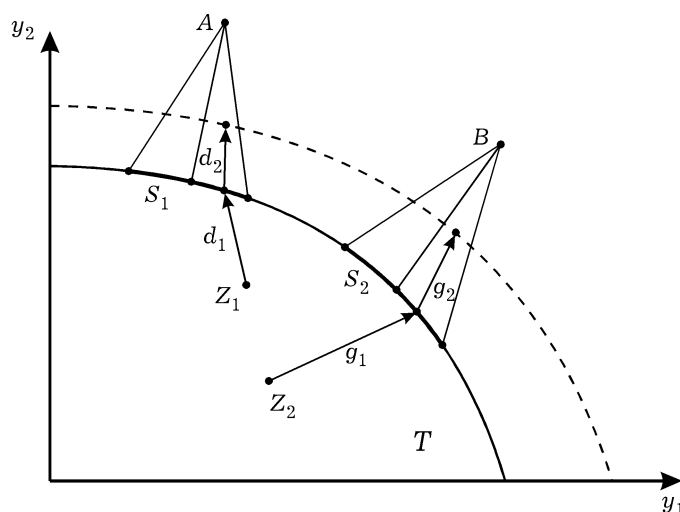


Рис. 3. Изменение границы множества производственных возможностей и выбор направлений для увеличения значений функции потенциалов

Далее предыдущие шаги можно повторить. Строим новую границу множества T , выбираем тактические направления и т. д. На каждом шаге достигнутые договоренности можно уточнять в зависимости от эффективности достижения поставленных целей.

В данном примере, без ограничения общности, рассматривались две страны (региона). Однако, подобный инструментарий можно применить для всех стран, участвующих в формировании транснационального проекта.

2. Множество производственных возможностей

Рассмотрим множество из n наблюдаемых производственных объектов (ПО), деятельность которых необходимо оценить. Каждый ПО потребляет m входных продуктов и производит r выходных продуктов. Таким образом, пусть

$$X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj}) \geq 0$$

является вектором входных параметров (затрат), а

$$Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{rj}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

будет вектором выходных параметров (выпуска). Предполагается, что каждый ПО имеет, по крайней мере, один положительный вход и один положительный выход.

Множество производственных возможностей T определяется как множество таких векторов (X, Y) , что вектор выпуска Y может быть произведен при векторе затрат X , т. е. $T = \{(X, Y) \mid \text{выходной вектор } Y \geq 0 \text{ может быть получен при входном векторе } X \geq 0\}$ [4, 5].

На основе наблюдаемых векторов (X_j, Y_j) , $j = 1, \dots, n$, множество производственных возможностей T эмпирически задается следующими постулатами [4].

Постулат 1 (выпуклость). Если $(X, Y) \in T$ и $(X', Y') \in T$, то $(\lambda X + (1 - \lambda)X', \lambda Y + (1 - \lambda)Y') \in T$ для всех $\lambda \in [0, 1]$.

Постулат 2 (монотонность). Если $(X, Y) \in T$ и $X' \geq X$, $Y' \leq Y$, то $(X', Y') \in T$.

Постулат 3 (минимальная экстраполяция). Множество T является пересечением всех множеств T' , удовлетворяющих предыдущим постулатам, при условии, что $(X_j, Y_j) \in T'$ для всех $j = 1, \dots, n$.

Таким образом, множество T строится как расширение по наблюдаемым производственным векторам (X_j, Y_j) , $j = 1, \dots, n$ и определяет возможные, экономически допустимые векторы выпуска Y по векторам затрат X . В дальнейшем будем использовать также обозначение $Z_j = (X_j, Y_j) \in E^{m \times n}$.

В алгебраическом виде множество производственных возможностей T запишется как [4]

$$T = \left\{ (X, Y) \left| \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j \leq X, \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j \geq Y, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right. \right\}. \quad (1)$$

Постулаты 1-3 и формула (1) определяют множество производственных возможностей T для модели ВСС (Banker, Charnes, Cooper) [4], которая является одной из основных моделей методологии АСФ. Более того, можно показать, что множество T модели ВСС является в определенном смысле минимальной экстраполяцией, построенной по реальным наблюдаемым объектам $Z_j = (X_j, Y_j)$, $j = 1, \dots, n$.

В настоящее время существуют десятки различных моделей методологии АСФ, которые отличаются в основном формой эффективной гиперповерхности (границы множества T) и способом вычисления меры эффективности производственных объектов.

Во входной модели ВСС деятельность неэффективного объекта (X_o, Y_o) улучшается, по крайней мере гипотетически, с помощью пропорционального сокращения вектора затрат, пока объект $(\theta X_o, Y_o)$ не достигнет границы множества T .

Проекция $(X_o, Y_o) \rightarrow (\theta^* X_o, Y_o)$ дает граничную точку множества T , множество таких граничных точек обозначим как множество слабо эффективных точек $WEff_I T$ по входной модели.

Мера эффективности во входной модели определяется относительным параметром θ^* . Смысл меры эффективности заключается в том, что она показывает, что существуют другие объекты в множестве производственных возможностей, реальные или гипотетические, которые производят такое же количество выходных продуктов, вектор Y_o , но при этом у них вектор затрат может быть меньше, $\theta^* X_o$.

В модели ВСС, ориентированной по выходу, эффективность объекта повышается с помощью пропорционального увеличения выпуска, пока объект $(X_o, \eta Y_o)$ не достигнет границы множества T . Таким образом, проекция $(X_o, Y_o) \rightarrow (X_o, \eta^* Y_o)$ определяет граничную точку множества T , множество таких граничных точек назовем множеством слабо эффективных точек $WEff_O T$ по выходной модели.

Выходная модель ВСС записывается в виде [4, 5]:

$$\begin{aligned} \max \quad & \eta \\ \text{при ограничениях} \quad & \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j \leq X_o, \\ & \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j \geq \eta Y_o, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

Мера эффективности для этой модели вычисляется как $(1/\eta^*)$. Смысл меры эффективности в данной модели состоит в том, что она показывает, что существуют другие объекты в множестве производственных возможностей, реальные или гипотетические, которые затрачивают такое же количество входных продуктов, вектор X_o , но при этом у них вектор выходных продуктов может быть больше, $\eta^* Y_o$.

Существуют и другие способы определения меры эффективности в зависимости от содержания задачи и сферы применения моделей [5].

В нашем подходе мы используем меру эффективности как

$$\mu = \frac{f(Z_1)}{f(A)},$$

т. е. как отношение значений функции потенциала в начальной точке и конечной точке. Функцию потенциала в первом приближении можно определить как линейную функцию

$$f(Z) = \sum_{i=1}^{m+r} a_i z_i.$$

Среди множества слабо эффективных точек $\text{WEff}_T T \cup \text{WEff}_O T$ можно выделить эффективные объекты — это такие объекты, состояние которых нельзя улучшить изменением хотя бы одной координаты. Множество таких точек обозначим $\text{Eff} T$.

В многокритериальной оптимизации основополагающим является определение эффективности и слабой эффективности по Парето. Дадим эти определения применительно к методологии АСФ [5].

Определение 1. Производственный объект (X^*, Y^*) *эффективен по Парето*, если $(X^*, Y^*) \in T$ и не существует вектора $(X, Y) \in T$, отличного от (X^*, Y^*) и такого, что $X \leq X^*, Y \geq Y^*$.

Это определение означает, что нельзя улучшить ни один из параметров объекта (X^*, Y^*) , не ухудшив при этом какой-либо другой параметр, оставаясь при этом во множестве производственных возможностей T .

Множество эффективных по Парето точек обозначим через $\text{Eff}_P T$.

Определение 2. Производственный объект (X^*, Y^*) *слабо эффективен по Парето*, если $(X^*, Y^*) \in T$ и не существует вектора $(X, Y) \in T$ такого, что $X < X^*, Y > Y^*$.

Другими словами, слабая эффективность по Парето означает, что нельзя одновременно улучшить все параметры объекта, если объект (X^*, Y^*) слабо эффективен. Множество слабо эффективных точек по Парето обозначим через $WEff_P T$.

В методологии АСФ [5, 6] показывается, что $(X_o, Y_o) \in Eff T$ тогда и только тогда, когда $(X_o, Y_o) \in Eff_P T$. Поэтому множество эффективных точек по Парето будем также обозначать через $Eff T$.

В [8] доказывается, что $Eff T \subset WEff_I T \cap WEff_O T$, $WEff_I T \cup WEff_O T \subset WEff_P T = Bound T$, где $Bound T$ обозначает границу множества T . Это утверждение означает, что только множество слабо эффективных по Парето точек совпадает с границей множества производственных возможностей.

Существует много различных оптимизационных моделей в рамках методологии АСФ. Сделаем краткий обзор других моделей АСФ [5, 6].

Исторически, модель ССР (Charnes, Cooper, Rhodes) появилась первой в методологии АСФ. Она отличается от модели ВСС тем, что в ней отсутствуют ограничения на сумму λ_j , $j = 1, \dots, n$, равной единице. Поэтому множество производственных возможностей для этой модели представляет собой выпуклый многогранный конус. Другими словами, если объект $z \in T_c$, где T_c — множество производственных возможностей по модели ССР, то и объект $\lambda z \in T_c$, где $\lambda > 0$. Поэтому, эту модель часто называют моделью с постоянным эффектом масштаба.

Однако, данная особенность модели ССР не вполне согласуется с реальной экономикой, в которой чаще наблюдаются нелинейные зависимости. По этой причине модель ВСС, которую часто называют моделью с переменным эффектом масштаба, получила большее распространение.

В модели ST ограничения на переменные λ_j , $j = 1, \dots, n$, записываются в виде

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 1. \quad (3)$$

В отличие от модели ВСС, ограничение (3) означает, что для любого объекта, расположенного на эффективной гиперповерхности, будет наблюдаться увеличение эффекта масштаба, поэтому модель (3) называется также моделью IRS (increasing returns-to-scale) [5].

Множество производственных возможностей для модели ST определяется как:

$$T_{ST} = \left\{ (X, Y) \left| \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j \leq X, \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j \geq Y, \sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right. \right\}. \quad (4)$$

В модели FG ограничения на переменные λ_j , $j = 1, \dots, n$, записываются в виде

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1. \quad (5)$$

В случае ограничений (5), в отличие от модели ВСС, объекты, расположенные на эффективной гиперповерхности, будут всегда иметь убывающий эффект масштаба, поэтому модель (5) называется также моделью DRS (decreasing returns-to-scale) [5].

Множество производственных возможностей для модели FG задается в виде:

$$T_{FG} = \left\{ (X, Y) \left| \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j \leq X, \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j \geq Y, \sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right. \right\}. \quad (6)$$

В модели GRS (generalized returns to scale) ограничения на λ_j , $j = 1, \dots, n$, задаются в обобщенном виде

$$L \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \leq M. \quad (7)$$

Такие ограничения (7) делают некоторые эффективные объекты в ВСС модели неэффективными.

В данной модели эффективная гиперповерхность строится не только по эффективным объектам, но и по некоторым виртуальным объектам согласно (7).

Множество производственных возможностей для модели GRS в аналитическом виде выглядит следующим образом:

$$T_G = \left\{ (X, Y) \left| \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j \leq X, \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j \geq Y, L \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \leq M, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right. \right\}. \quad (8)$$

Рассмотрим модель с обобщенным эффектом масштаба подробнее.

Производственный объект иногда для удобства будем обозначать одной буквой $Z_j = (X_j, Y_j) \in E^{m+r}$. Определим отображение множества производственных возможностей T_{VCC} (1) модели ВСС:

$$F(Z) = \left\{ Z \mid Z = \rho \tilde{Z}, L \leq \rho \leq U, \tilde{Z} \in T_{VCC} \right\}. \quad (9)$$

Множество производственных возможностей T_G (8) получается из множества T_{VCC} (1) с помощью отображения (9).

Теорема 1 ([6]). *Множество производственных возможностей T_G (8) получается в результате отображения $F(Z)$ (9) множества производственных возможностей T_{VCC} (1).*

Таким образом, модели определяются формой эффективной гиперповерхности и способом проектирования объекта на эффективную гиперповерхность. Следует подчеркнуть, что в общем многомерном случае вид многомерной эффективной гиперповерхности не столь очевиден. Необходимо было разработать еще методы визуализации для того чтобы пользователь мог представить вид различных моделей [7, 11].

С одной стороны разнообразие моделей позволяет пользователю выбрать подходящую модель для настройки. С другой стороны сделать это только на основе теоретических положений достаточно трудно.

Поэтому в последующих разделах будут рассмотрены модели, позволяющие учитывать дополнительную информацию в виде экспертных оценок, а также конструктивный метод трансформации эффективного фронта.

3. Модели АСФ с добавлением экспертных знаний

В предыдущем разделе были рассмотрены основные модели АСФ. Все они строились только на основе реальной информации об объектах и некоторых экономических постулатах. Таким образом мы минимизировали необходимость добавления в модель дополнительных предположений или ограничений. Однако на практике встречаются случаи, когда оправдано включение дополнительных условий в модель АСФ:

1. Известна информация, которая не может быть непосредственно учтена в модели.

2. Применение методологии АСФ приводит к результатам, которые сложно интерпретировать. Например, расчеты по модели АСФ дают 100% эффективность для объектов, которые эксперты считают неэффективными [5].

3. В некоторых моделях получается много эффективных объектов, поэтому аналитикам приходится привлекать другие методы для дальнейшего их ранжирования, что, естественно, приводит к потере экономической содержательности результатов [12].

Для учета подобных ситуаций в мировой литературе был предложен подход, основанный на ограничении множества значений, которые могут принимать двойственные оценки.

В общем случае этот подход предполагает использование в методологии АСФ конусов доминирования, которые применяются в многокритериальной оптимизации [14, 15]. Далее в этом разделе будут рассмотрены различные модели методологии АСФ, в которые добавлены дополнительные условия в виде ограничений на множества значений двойственных оценок.

В некоторых моделях АСФ для 100% эффективных объектов в оптимальных оценках (v_i^*, u_j^*) мы можем наблюдать множество нулевых величин, что говорит о слабой эффективности этих объектов. Для того, чтобы избавиться от слабой эффективности, и был предложен метод гарантированных областей¹⁾ [16, 17, 18], который налагает ограничения на относительные величины для некоторых двойственных оценок. Например, можно добавить ограничение на отношение двух входных оценок v_1 и v_2 :

$$L_{1,2} \leq \frac{v_2}{v_1} \leq U_{1,2}, \quad (10)$$

где $L_{1,2}$ и $U_{1,2}$ — нижняя и верхняя граница для отношения v_2/v_1 . Само название метода происходит от этого ограничения на область значений, которые могут принимать двойственные оценки. В общем случае при добавлении такого рода ограничений мера эффективности в соответствующей модели АСФ может уменьшиться и объект, который был эффективным (слабо эффективным), может стать неэффективным.

Необходимо отметить, что отношение оценок для оптимального решения может совпасть с верхней или нижней границей. Поэтому необходимо выбирать эти границы с осторожностью, для этого лучше воспользоваться вспомогательной информацией, такой как цены, затраты и др. Действительно, как считают авторы данного подхода [16, 17, 18], метод является обобщением методов для определения “эффективности по ценам” (“price” efficiency) и “эффективности распределения ресурсов” (“allocative” efficiency), которые требуют точных знаний о ценах и затратах.

Метод гарантированных областей состоит в том, что к модели АСФ добавляется ограничение вида (10) на пару двойственных оценок. Это ограниче-

¹⁾ В англоязычной литературе этот метод носит название “Assurance region method”.

ние можно переписать в эквивалентном линейном виде:

$$L_{1,2} v_1 \leq v_2 \leq U_{1,2} v_1.$$

Некоторые авторы [19] вместо ограничений вида (10) используют абсолютные ограничения на двойственные оценки, т. е. вида $L_i \leq v_i \leq U_i$. Этот прием хорошо согласуется с концепцией “Меры ценности” (Numeraire) [20], определяемой как базисная единица расчетов, в которой измеряются все товары и услуги.

В более общем случае мы можем ввести “Меру ценности входного товара” и “Меру ценности выходного товара”. Без ограничения общности будем считать, что v_1 и u_1 являются базисными товарами. Тогда все ограничения можно переписать в следующем виде:

$$v_1 l_{1,i} \leq v_i \leq v_1 u_{1,i}, \quad i = 2, \dots, m,$$

$$u_1 L_{1,r} \leq u_r \leq u_1 U_{1,r}, \quad r = 2, \dots, s.$$

Принимая во внимание, что v_1 и u_1 являются базисными товарами, то есть

$$v_1 = u_1 = 1,$$

получим $(m + s - 2)$ ограничения в абсолютной форме. Если некоторые из полученных ограничений не требуются, то их можно отбросить.

Модель с добавлением гарантированных областей CCR-AR запишется в виде:

$$\begin{aligned} & \max_{v,u} \sum_{i=1}^r u_i y_{i0} \\ & \text{при ограничениях} \quad \sum_{k=1}^m v_k x_{k0} = 1, \\ & \quad - \sum_{k=1}^m v_k x_{kj} + \sum_{i=1}^r u_i y_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \quad \sum_{k=1}^m v_k p_{kj} \leq 0, \quad \sum_{i=1}^r u_i q_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \quad u_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, r, \\ & \quad v_k \geq \varepsilon, \quad k = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (11)$$

где p_{kj} и q_{ij} — элементы матриц

$$P = \begin{pmatrix} l_{1,2} & u_{1,2} & l_{1,3} & u_{1,3} & \cdots & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

и

$$Q = \begin{pmatrix} L_{1,2} & U_{1,2} & L_{1,3} & U_{1,3} & \cdots & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

соответственно. Однако отметим, что выбор базисного товара v_1 в (10) произволен, поэтому мы можем использовать ограничения вида

$$l_{1,2} v_1 \leq v_2 \leq u_{1,2} v_1 \quad \text{и} \quad l_{2,3} v_2 \leq v_3 \leq u_{2,3} v_2$$

с соответствующим изменением матрицы P и/или Q .

Запишем задачу в прямом пространстве, так как в этом виде ее легче решать и интерпретировать,

$$\begin{aligned} & \min_{\theta, \lambda, \pi, \tau} \theta \\ \text{при ограничениях} & \theta x_{ko} - \sum_{j=1}^n x_{kj} \lambda_j - \sum_{j=1}^n p_{kj} \pi_j - s_k^- = 0, \\ & k = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n y_{ij} \lambda_j + \sum_{j=1}^n q_{ij} \tau_j - s_i^+ = y_{io}, \quad i = 1, \dots, r, \\ & s_k^- \geq 0, \quad k = 1, \dots, m, \\ & s_i^+ \geq 0, \quad i = 1, \dots, r, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad \pi_j \geq 0, \quad \tau_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть $(\theta^*, \lambda^*, \pi^*, \tau^*, s^{*-}, s^{*+})$ — оптимальное решение задачи (12), где дополнительные переменные s^{*-} и s^{*+} представляются в векторном виде:

$$\begin{aligned} s^{*-} &= \theta^* X_o - X \lambda^* + P \pi^*, \\ s^{*+} &= -Y_o + Y \lambda^* + Q \tau^*. \end{aligned}$$

Неэффективный объект (X_o, Y_o) можно сделать эффективным с помощью преобразования

$$(\theta^* X_o - s^{*-} + P \pi^*, Y_o + s^{*+} - Q \tau^*).$$

Выходная модель ССР-АР определяется по аналогии со входной моделью.

Далее предположим, что все входные и выходные параметры являются технологическими (не денежными). Как мы отмечали в первой главе, виртуальный вход и выход для объекта (X_k, Y_k) выражается в виде:

$$C_k = v_1 x_{1,k} + \dots + v_m x_{m,k} \quad \text{и} \quad P_k = u_1 y_{1,k} + \dots + u_r y_{r,k}.$$

Мы можем интерпретировать v_i как единицу затрат входа x_{ik} . Эта интерпретация соответствует соотношениям двойственности для переменных v и s^- , в которых оптимальная оценка v_i соответствует условной цене (imputed price) i -го входа.

Аналогично u_j интерпретируется как единица стоимости выхода y_{jk} , что соответствует соотношениям двойственности между переменными u и s^+ , в которых оптимальная оценка u_j является теневой ценой (shadow price) j -го выхода.

Пусть $c_{i,k}$ — фактическая себестоимость (actual unit cost) единицы продукции входа $x_{i,k}$. С точки зрения такой интерпретации, разумно определить нижнюю и верхнюю границу для отношения v_j/v_i по следующей схеме:

$$l_{i,j} = \min \frac{c_{j,k}}{c_{i,k}}, \quad k = 1, \dots, n \quad \text{и} \quad u_{i,j} = \max \frac{c_{j,k}}{c_{i,k}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Аналогичным образом мы можем поставить ограничения на выходные двойственные оценки с помощью фактических производственных цен. Однако, во многих случаях фактические цены (или удельные затраты) не известны точно.

Тем не менее мы можем наложить на них ограничения вида (10). В этом случае мы получим множество различных уровней цен (или удельных затрат). Если эти значения не являются удовлетворительными, они могут быть использованы для выбора новых границ, и т. д.

Таким образом для определения ограничений на двойственные оценки можно использовать как экспертные оценки, так и дополнительные данные о рыночных ценах и фактической себестоимости продукции.

Теперь перейдем к рассмотрению метода конусов отношений²⁾ [21, 22, 23]. Этот метод является более общим, чем метод гарантированных областей, и покрывает более широкий круг задач. Начнем с того, что установим взаимосвязь между этими двумя методами.

Для начала рассмотрим пространство оценок v . Пусть множество допустимых значений оценок v принадлежит выпуклому многогранному конусу V , образованному k неотрицательными векторами a_j , $j = 1, \dots, k$.

Таким образом множество допустимых значений оценок может быть записано в виде:

$$V = \sum_{j=1}^k \alpha_j a_j = A^T \alpha, \quad (13)$$

где $A^T = (a_1, \dots, a_k) \in E^{m \times k}$ и $\alpha^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, k$.

Аналогичным образом мы можем ограничить множество допустимых значений оценок u выпуклым многогранным конусом U , образованным l неотрицательными векторами b_j , $j = 1, \dots, l$,

$$U = \sum_{j=1}^l \beta_j b_j = B^T \beta, \quad (14)$$

где

$$B^T = (b_1, \dots, b_l) \in E^{r \times l}$$

и

$$\beta^T = (\beta_1, \dots, \beta_l), \quad \beta_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, l.$$

Далее покажем, что метод гарантированных областей является частным случаем метода конусов отношений. Действительно, если в методе гарантированных областей мы налагаем ограничения вида

$$l_{1,2} \leq \frac{v_2}{v_1} \leq u_{1,2},$$

то это равносильно выбору следующих двух образующих конус векторов:

$$a_1^T = (1, l_{1,2}, 0, 0, \dots, 0) \quad \text{и} \quad a_2^T = (1, u_{1,2}, 0, 0, \dots, 0),$$

в которых только два элемента отличны от нуля. Однако, метод конусов отношения является более общим, поскольку допускает чтобы все компоненты векторов были не нулевыми.

²⁾ В англоязычной литературе этот метод носит название "Cone-ratio method".

Добавляя в модель ССР выпуклые многогранные конусы U и V , образованные матрицами A и B , получим следующую ССР-СР модель:

$$\begin{aligned} & \max_{v,u} uY_o \\ \text{при ограничениях} & \quad vX_o = 1, \\ & \quad -vX + uY \leq 0, \\ & \quad u \in U, \\ & \quad v \in V, \end{aligned} \quad (15)$$

которая совпадает с обычной моделью ССР, когда $V = E_+^m$ и $U = E_+^r$ — положительные ортанты в m -мерном и r -мерном пространстве соответственно.

Используя соотношения (13) и (14), преобразуем задачу (15) к задаче в переменных α и β :

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha,\beta} \beta(BY_o) \\ \text{при ограничениях} & \quad \alpha(AX_o) = 1, \\ & \quad -\alpha(AX) + \beta(BY) \leq 0, \\ & \quad \alpha \geq 0, \\ & \quad \beta \geq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Прямая задача в переменных θ и $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top$ запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \max_{\theta,\lambda} \theta \\ \text{при ограничениях} & \quad \theta(AX_o) - (AX)\lambda \geq 0, \\ & \quad (BY_o) - (BY)\lambda \leq 0, \\ & \quad \lambda \geq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Эта задача очевидно совпадает с обычной моделью ССР, рассчитываемой для того же самого объекта только с трансформированными данными \bar{X} и \bar{Y} :

$$\bar{X} = AX \in E^{k \times n} \quad \text{и} \quad \bar{Y} = BY \in E^{l \times n}.$$

Таким образом, для расчета модели с конусами отношений на первом шаге вычисляются трансформированные данные \bar{X} и \bar{Y} . На втором шаге рассчитывается обычная модель АСФ, в которую подставлены полученные трансформированные данные.

В литературе предложено несколько способов выбора (a_j) и (b_j) , из которых чаще всего используются следующие два способа.

1. Для выбора допустимых соотношений оценок использовать мнение экспертов.

2. Рассчитать эффективности по исходной модели, а затем выбрать среди эффективных объектов те, которые являются наиболее предпочтительными по мнению экспертов. Далее использовать набор средних оптимальных оценок u^* и v^* для выбранных объектов в качестве допустимых направлений.

Однако отметим, что построить конус в двойственном многомерном пространстве оценок — задача достаточно сложная не только для руководителей и экспертов, но и для математиков. Например, в статье [23] по анализу техасских банков говорится, что эксперты не смогли найти попарные соотношения между двойственными оценками.

Поэтому для построения конусов использовались средние двойственные оптимальные решения для некоторых выбранных эффективных банков. Проиллюстрируем данный подход на конкретном примере.

На рисунке 4 сплошной линией $ABCDEF$ изображена изокванта по выходным параметрам по модели ВСС. Как известно, оптимальным решениям в двойственном пространстве соответствуют гиперплоскости в прямом пространстве, которые на данном сечении соответствуют отрезкам AB , BC , CD , DE и EF . Гиперплоскости однозначно задаются своими векторами нормали, которые обозначим \vec{n}_{AB} , \vec{n}_{BC} и т. д. Далее построим конус в двойственном пространстве с использованием, например, объектов B и E . Вычислим для объекта B средние двойственные оптимальные решения, что, с учетом вышесказанного, означает вычисление суммы векторов \vec{n}_{AB} и \vec{n}_{BC} , которые дают вектор \vec{n}_B . Таким образом, среднее двойственное оптимальное решение для объекта B в прямом пространстве задается гиперплоскостью ортогональной вектору \vec{n}_B .

Аналогично для объекта E получим вектор \vec{n}_E . В результате такой трансформации получается изокванта $B'BCDEE'$. Однако множество производственных возможностей в этом случае меняется незначительно и эффективность объектов, изображенных на рисунке, не меняется. Если же для построения конуса выбрать средние двойственные оптимальные решения для объектов C и D , то в результате трансформации получается изокванта $C'CDD'$. В этом случае объекты B и E становятся неэффективными, мера эффективности по выходу для объектов G и H уменьшится.

Таким образом, при выборе конуса доминирования на основе средних двойственных оптимальных решений результат трансформации эффективной гиперповерхности сильно зависит от того, какие объекты выбраны для вычисления средних двойственных оптимальных решений. Также результат зависит от способа вычисления оптимального среднего решения.

Помимо этого, конус строится в двойственном пространстве, в то время как модель решается и интерпретируется в прямом пространстве параметров. Все это сильно осложняет задачу аналитика при расчетах с помощью метода конусов отношений.

Рассмотрим модель GDEA [13], которая развивает модели, использующие

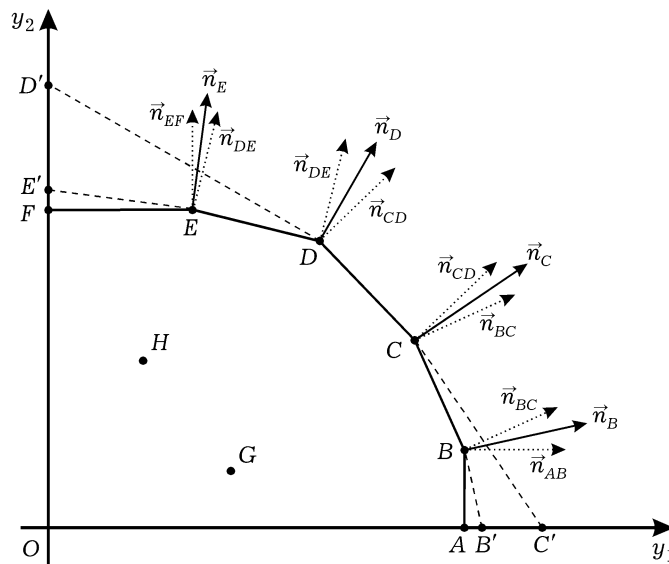


Рис. 4. Изокванта по выходным параметрам модели ВСС

технику конусов [14, 15], а также суммирует большое множество моделей методологии АСФ [21, 22, 13, 18, 23]

$$\begin{aligned} & \min \quad \theta \\ & \text{при ограничениях} \quad \left(\begin{array}{c} \bar{X}\lambda - \theta X_o \\ -\bar{Y}\lambda + Y_o \end{array} \right) \in W^*, \\ & \delta_1 e^\top \lambda + \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \lambda_{n+1} = \delta_1, \\ & \lambda \in -K^*, \lambda_{n+1} \geq 0, \theta \in E^1. \end{aligned} \quad (18)$$

Двойственная оптимизационная задача к задаче (18) запишется в виде:

$$\begin{aligned} & \max \quad (\mu^\top Y_o - \delta_1 \mu_o) \\ & \text{при ограничениях} \quad \omega^\top \bar{X} - \mu^\top \bar{Y} + \mu_o \delta_1 e^\top \in K, \\ & \omega^\top X_o = 1, \\ & \left(\begin{array}{c} \omega \\ \mu \end{array} \right) \in W, \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \mu_o \geq 0, \\ & \omega \in E^m, \mu \in E^r, \mu_o \in E^1, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$$

является матрицей размерности $m \times n$, в которой

$$X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj}) \geq 0$$

есть вектор входных параметров (затрат) производственного объекта j ; матрица

$$\bar{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$$

имеет размерность $r \times n$, в которой $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{rj}) \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, будет вектором выходных параметров (выпуска) объекта j . Переменные $\lambda \in E^n$ и $\lambda_{n+1} \in E^1$.

Параметры $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ принимают только двоичные значения 0 или 1. Придавая этим параметрам конкретные значения, получим ту или иную модель из множества моделей (18)–(19).

В задачах (18), (19) определяется мера эффективности объекта (X_o, Y_o) , который является одним из объектов $j = 1, \dots, n$. Вектор e определяется как

$$e = (1, \dots, 1) \in E^n.$$

Многогранные выпуклые конусы $W \subseteq E_+^{m+r}$ и $K \subseteq E_+^n$ являются острыми, при этом предполагается $\text{int } W \neq \emptyset$ и $\text{int } K \neq \emptyset$, поэтому для них существуют непустые полярные конусы W^* и K^* .

Множество производственных возможностей модели GDEA записывается в виде [13]:

$$\begin{aligned} T_{GDEA} = \left\{ (X, Y) \left| \left(\begin{array}{c} \bar{X}\lambda - X \\ -\bar{Y}\lambda + Y \end{array} \right) \in W^*, \lambda \in -K^*, \right. \right. \\ \left. \left. \delta_1 e^\top \lambda + \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \lambda_{n+1} = \delta_1, \lambda_{n+1} \geq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

В работе [13] выделено четыре основных класса моделей, обобщение которых привело к модели (18)–(19). Выбор различных комбинаций параметров

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ даст нам эти четыре основные модели. При этом конусы строятся таким образом, что исходные множества производственных возможностей могут только расшириться [21, 22, 13, 18, 23].

Сформулированные выше результаты элегантны с математической точки зрения. Однако на практике пользователю трудно определиться с выбором той или иной модели, поскольку четко не определены условия их применения. Для этих целей должен быть разработан более тонкий инструментарий.

В работе [13] показано, что модель GDEA является обобщением моделей BCC, CCR, FG и ST. Однако модель GRS не может быть описана с помощью модели GDEA. Покажем это на простом примере.

Рассмотрим двумерную модель GRS с двумя объектами

$$Z_1 = (X_1, Y_1) = (1, 1), \quad Z_2 = (X_2, Y_2) = (3, 2)$$

и ограничением на сумму переменных λ_1 и λ_2 :

$$\frac{1}{2} \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq \frac{3}{2}.$$

Множество производственных возможностей для этой модели представлено на рисунке 5. Здесь пунктирной линией показана граница множества производственных возможностей модели BCC, построенной на основе объектов Z_1 и Z_2 . Множество производственных возможностей модели GRS получается расширением множества производственных возможностей модели BCC путем добавления дополнительных объектов

$$\begin{aligned} Z'_1 &= (LX, LY) = \left(\frac{1}{2}X_1, \frac{1}{2}Y_1\right), \\ Z''_1 &= (UX, UY) = \left(\frac{3}{2}X_1, \frac{3}{2}Y_1\right), \\ Z'_2 &= \left(\frac{1}{2}X_2, \frac{1}{2}Y_2\right), \\ Z''_2 &= \left(\frac{3}{2}X_2, \frac{3}{2}Y_2\right). \end{aligned}$$

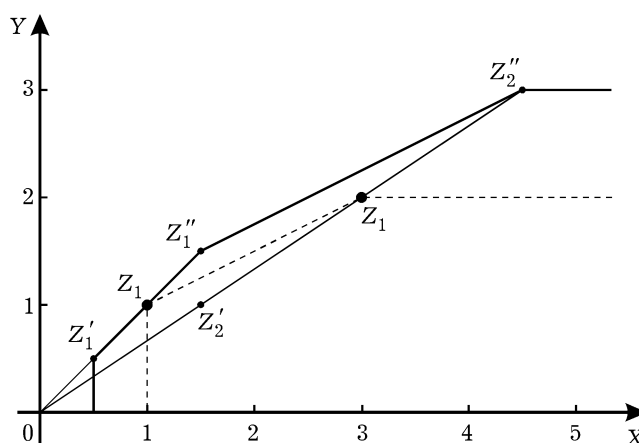


Рис. 5. Двумерная модель GRS с двумя объектами

Очевидно, что эта модель не может быть записана в виде (18) с двумя объектами Z_1 и Z_2 .

Далее мы докажем, что существуют достаточные условия в многомерном случае, когда множество производственных возможностей модели GRS не может быть описано с помощью модели GDEA (18). Подчеркнем, что обе модели задаются одним и тем же набором объектов

$$Z_j = (X_j, Y_j) \in E^{m+r}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим аффинное множество S , образованное объектами $Z_j, j = 1, \dots, n$, следующего вида:

$$S = \left\{ Z \mid Z = \sum_{j=1}^n \lambda_j Z_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \in E^1, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Обозначим размерность множества S через $\dim S$. Тогда докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть множество S не содержит начало координат и размерность множества $\dim S < (m+r)$. Тогда модель GRS не может быть описана в рамках модели GDEA. Это означает, что существуют объекты, которые принадлежат множеству T_G (8), но не принадлежат множеству T_{GDEA} (20), или, наоборот, существуют объекты из множества T_{GDEA} , не принадлежащие множеству T_G .

Каждая из рассмотренных в данном разделе моделей довольно специфична и разрабатывалась в свое время для конкретной области задач. Попытки сделать общую модель привели к наращиванию как математической, так и вычислительной сложности модели GDEA. Более того, как оказалось, модель GDEA покрывает лишь некоторую часть из всего многообразия моделей АСФ.

По существу введение конусов в моделях АСФ производит трансформацию эффективной гиперповерхности, такая возможность делает модели более гибкими и легко настраиваемыми под конкретные задачи. Однако, конусы строятся в пространстве оценок, двойственном по отношению к пространству, в котором функционируют объекты. И построение таких конусов — задача достаточно сложная для аналитиков и руководителей.

До сих пор на практике применялись только два вида моделей методологии АСФ с конусами доминирования: модель с гарантированными областями и модель с конусами отношений.

В первой модели эксперт должен задать ограничения на отношения двойственных оценок, что, как описано в работе [5], бывает достаточно проблематично сделать на практике.

Во второй модели конус отношений строится на основе средних векторов оптимальных двойственных решений для некоторых объектов, определяемых экспертами. Однако, как было показано на примере, такой прием также достаточно субъективен и сложен для практического применения.

Важное достоинство методологии АСФ заключается в том, что она строит множество производственных возможностей по реальным данным. Тем самым методология АСФ служит надежным связующим элементом между теоретической и практической экономикой. Использование конусов в моделях АСФ нарушает полученный баланс и делает сильный крен в сторону теории, тем самым сильно ограничивая их практическое применение.

4. Обобщенная модель методологии АСФ

В данном разделе формулируется обобщенная модель методологии АСФ, которая позволяет изменять эффективную гиперповерхность в прямом пространстве входных и выходных параметров, предлагается конструктивный подход для трансформации эффективной гиперповерхности.

Перед тем, как перейти непосредственно к рассмотрению модели, сформулируем несколько утверждений, которые позволят объяснить причины, по которым для исследования была выбрана искомая модель.

Определение 3. Пусть модель M_2 содержит все наблюдаемые объекты модели M_1 . Тогда будем говорить, что модель M_2 *аппроксимирует модель* M_1 , если меры эффективности всех наблюдаемых объектов Z_1, \dots, Z_n по входу и выходу моделей M_1 и M_2 совпадают, соответственно, для каждого объекта.

Отметим, что можно дать другие определения аппроксимации одной модели M_1 другой моделью M_2 . Суть здесь заключается в том, чтобы части эффективных гиперплоскостей совпадали именно на тех участках, где определяется эффективность объектов.

Рассмотрим следующую обобщенную модель методологии АСФ, ориентированную по выходу:

$$\begin{aligned} & \min \quad \theta \\ \text{при ограничениях} \quad & \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j + \sum_{i \in I} D_i \mu_i + \sum_{k \in J} A_k \rho_k \leq \theta X_o, \\ & \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j + \sum_{i \in I} G_i \mu_i + \sum_{k \in J} B_k \rho_k \geq Y_o, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j + \sum_{i \in I} \mu_i = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \mu_i \geq 0, \quad i \in I, \\ & \rho_k \geq 0, \quad k \in J. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь (D_i, G_i) , $i \in I$ — множество искусственных производственных объектов, (A_k, B_k) , $k \in J$ — множество лучей, добавленных в задачу.

Множество производственных возможностей для модели (21) запишется в виде:

$$\begin{aligned} T = \left\{ (X, Y) \mid X \geq \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j + \sum_{i \in I} D_i \mu_i + \sum_{k \in J} A_k \rho_k, \right. \\ \left. Y \leq \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j + \sum_{i \in I} G_i \mu_i + \sum_{k \in J} B_k \rho_k, \sum_{j=1}^n \lambda_j + \sum_{i \in I} \mu_i = 1, \right. \\ \left. \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \mu_i \geq 0, i \in I, \rho_k \geq 0, k \in J \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Задачу (21) можно рассматривать как модель ВСС (2), в которую добавлены искусственные производственные объекты (D_i, G_i) , $i \in I$ и лучи, задаваемые векторами (A_k, B_k) , $k \in J$.

Таким образом, множество T (22) определяется как векторная сумма двух множеств: выпуклой комбинации реальных и искусственных производственных объектов и многогранного конуса, задаваемого неотрицательной комбинацией лучей.

Добавление искусственных объектов в модель является достаточно распространенным приемом в исследовании операций. В частности, Фаррелл вводил искусственные объекты в своей работе [24]. Далее мы покажем, что в некоторых моделях искусственные объекты появляются естественным образом.

Можно показать, что обобщенные модели ССР, ВСС, FG и ST можно записать как частные случаи модели (18).

Теорема 3. Любая модель из семейства обобщенных моделей (18) может быть представлена в виде (21), или, другими словами, может быть получена из модели ВСС (2) с помощью добавления в нее новых вершин (искусственных производственных объектов) и неотрицательной линейной комбинации векторов (лучей).

Для нас существенным является то, что модель GDEA (18) можно получить из ВСС модели конструктивным образом с помощью добавления в нее новых вершин (производственных объектов) и неограниченных ребер (лучей).

Как мы увидим, такой подход дает нам конструктивный метод построения любой модели из семейства (18)–(19), взяв за основу модель ВСС.

Таким образом, модель ВСС является в некотором смысле минимальной моделью, на основе которой строятся все остальные модели из семейства (18).

На самом деле модель (21) оказывается более общей, чем модель (18). Действительно, в модели (18) не рассматривается явно введение новых искусственных объектов, в то же время некоторые модели методологии АСФ можно построить на основе включения только искусственных объектов в модель ВСС.

В разделе 2.2 было показано, что модель GRS (7) получается из модели ВСС (2) с помощью добавления искусственных производственных объектов, следовательно, модель GRS (7) представима в виде модели (21). В последней главе второго раздела устанавливается, что модель GRS не принадлежит семейству (18).

Теперь установим в некотором смысле противоположное утверждение, то есть что любую модель из семейства (18) можно аппроксимировать моделью ВСС.

Теорема 4. Пусть модель M принадлежит семейству (18), и при этом начало координат в пространстве входных и выходных параметров не принадлежит множеству производственных возможностей модели M . Тогда для модели M существует некоторая модель ВСС, которая ее аппроксимирует.

Доказательство. Спроецируем все наблюдаемые объекты модели M на эффективную гиперповерхность вдоль векторов входных и выходных параметров. Возьмем модель ВСС, которая содержит помимо исходных наблюдаемых объектов их проекции на эффективную гиперповерхность. В этой модели ВСС все проекции наблюдаемых объектов также будут лежать на эффективной гиперповерхности, поэтому эффективности объектов по входу и по выходу будут такими же как и в модели M .

По определению, построенная модель ВСС будет аппроксимировать исходную модель M из семейства (18). Теорема доказана.

Таким образом, предложенный метод позволяет, взяв за основу модель ВСС и последовательно добавляя в нее искусственные объекты/лучи, получить модель из семейства (18).

5. Трансформация эффективного фронта

Определим трехмерное аффинное подпространство в пространстве E^{m+r} [7, 11]:

$$PI(X_o, Y_o, d_1, d_2, d_3) = (X_o, Y_o) + \alpha d_1 + \beta d_2 + \gamma d_3, \quad (23)$$

где $(X_o, Y_o) \in T$, α и β — любые действительные числа, векторы $d_1, d_2, d_3 \in E^{m+r}$ и не параллельны. Подпространство (23) проходит через точку (X_o, Y_o) в E^{m+r} и натянуто на векторы d_1, d_2 и d_3 .

Далее, определим пересечение эффективной гиперповерхности с трехмерным аффинным подпространством [7, 11]:

$$\text{Sec}(X_o, Y_o, d_1, d_2, d_3) = \{(X, Y) \mid (X, Y) \in PI(X_o, Y_o, d_1, d_2, d_3) \cap \text{WEff}_P T, \text{ где } d_1, d_2, d_3 \in E^{m+r}\}.$$

Изменение направлений векторов d_1, d_2 и d_3 позволяет строить различные сечения множества производственных возможностей, проходящие через точку (X_o, Y_o) , что в свою очередь дает возможность получить обобщение известных экономических функций, например, таких как производственная функция, изокванта, изокоста, изопрофита и т. д.

В работах [7, 11] подробно рассмотрены алгоритмы визуализации многомерных множеств производственных возможностей.

На рисунке 6 пунктирной линией $A'ABCDD'$ обозначено исходное сечение производственная функция по модели ВСС. На графике сечения добавлены искусственные лучи, которые образуют конус Q . Сплошной линией обозначена полученная в результате трансформации производственная функция $B'BCDD'$.

После изменения эффективной гиперповерхности объект A стал неэффективным, у объекта G уменьшилась эффективность по входу, эффективность объектов E, F и H по выходу осталась неизменной, а по входу уменьшилась.

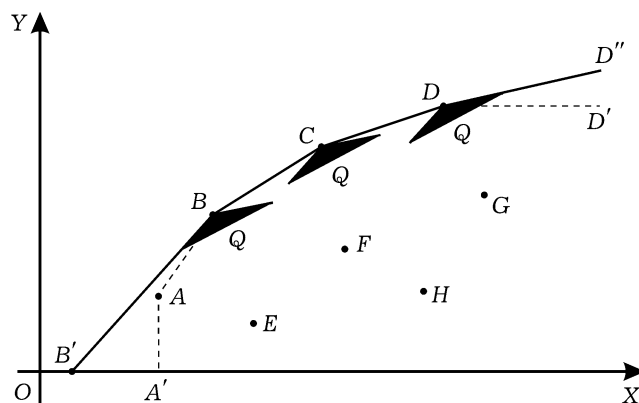


Рис. 6. Добавление искусственных лучей на производственной функции в обобщенной модели методологии АСФ

На рисунке 7 пунктирная линия $ABCD$ соответствует изокванте по входным параметрам по модели ВСС. Далее в модель были добавлены искусственные лучи, сумма которых образует конус Q . В результате получилось сечение эффективной гиперповерхности, обозначенное сплошной линией $B'BCC'$.

Эффективность объектов A, F, D и H по входу уменьшилась, а мера эффективности объектов B, C, E, G не изменилась.

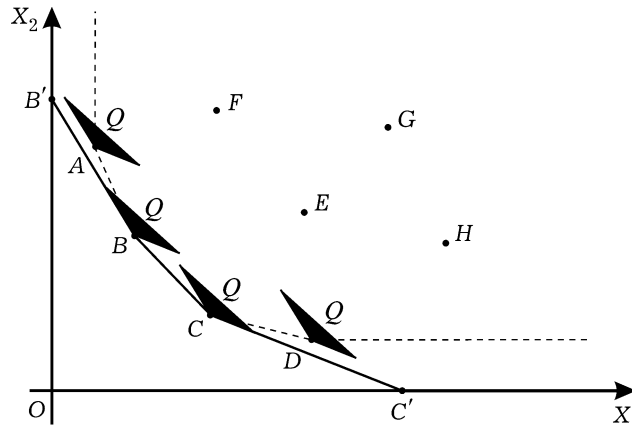


Рис. 7. Добавление искусственных лучей на изокванте по входам в обобщенной модели методологии АСФ

Теперь перейдем к рисунку 8. Здесь пунктирной линией $ABCD$ обозначена изокванта по выходным параметрам по модели ВСС. Сумма добавленных искусственных лучей образует конус Q .

После трансформации эффективного фронта изокванта по выходным параметрам, обозначенная на рисунке сплошной линией, стала проходить через точки $C'B'B'$. При этом эффективность объектов A , F , D и H по выходной модели уменьшилась, а мера эффективности объектов B , C , E и G осталась без изменений.

Рассмотрим рисунок 9, на нем пунктирной линией $ABCDEFGF$ изображено сечение структурная производственная функция по модели ВСС.

Сплошная линия $B'BCDEFF'$ получается в результате добавления в модель двух искусственных векторов, которые в сумме образуют конус Q . После трансформации эффективной гиперповерхности объект A стал неэффективным, в отличие от исходной модели, где он был эффективным.

В данном разделе предложена обобщенная модель методологии АСФ [25], которая дает возможность изменять эффективную гиперповерхность в прямом пространстве входных и выходных параметров, что позволяет развить конструктивный метод трансформации эффективного фронта.

6. Построение направления движения к поставленным целям

В работе Саати [9] предложен остроумный способ вычисления весовых коэффициентов значимости каждого фактора (показателя), участвующего в модели, с помощью экспертов. Используем этот метод для построения вектора движения к цели $A(B)$, по крайней мере, для некоторой окрестности точки $A(B)$. Действительно, при движении к цели $A(B)$ показатели, в наших терминах компоненты вектора Z , должны изменяться в некоторых пропорциях, которые и определяются весовыми коэффициентами.

Остановимся на этом подробнее. Пусть даны показатели деятельности производственных объектов $Z = (Z_1, \dots, Z_{m+r})$. Количественные суждения о парах показателей (Z_i, Z_j) выражаются матрицей размера $(m+r) \times (m+r)$.

$$D = (d_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, m+r. \quad (24)$$

В методе МАИ [9] с помощью матрицы суждений (24), которая задается экспертами, факторам (показателям) деятельности объектов (Z_1, \dots, Z_{m+r})

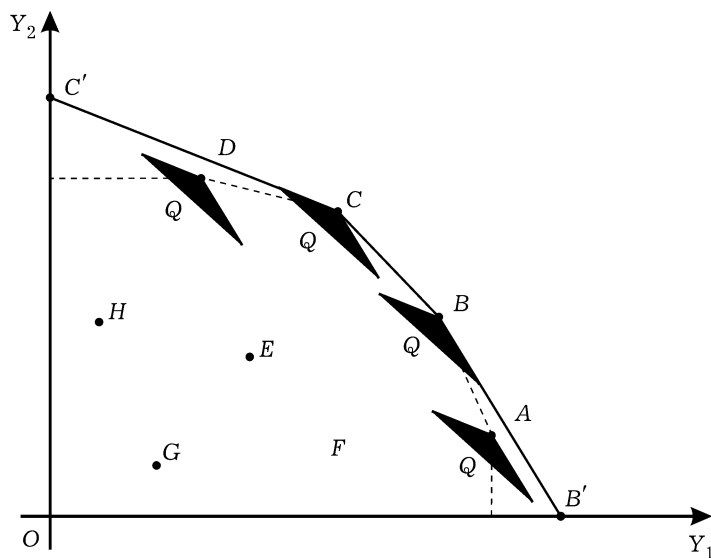


Рис. 8. Добавление искусственных лучей на изокванте по выходам в обобщенной модели методологии АСФ

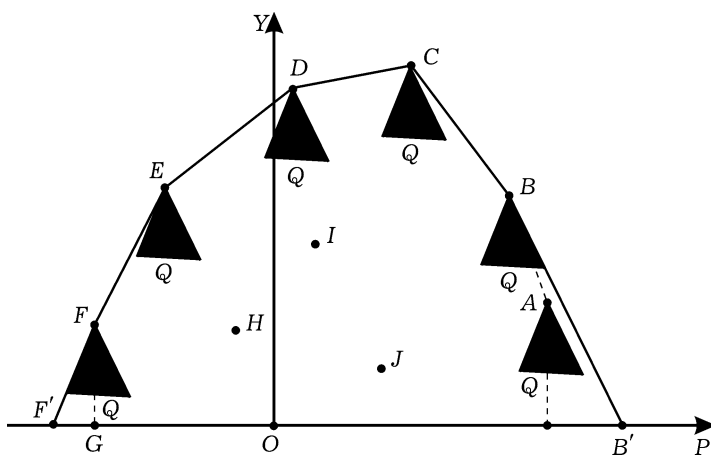


Рис. 9. Добавление искусственных лучей на структурной производственной функции в обобщенной модели методологии АСФ

ставятся в соответствие весовые коэффициенты $\omega_1, \dots, \omega_{m+r}$. Матрица (24) удовлетворяет соотношениям $d_{ii} = 1, d_{ij} = 1/d_{ji}$. Кроме того, матрица (24) считается согласованной, если выполняется соотношение

$$d_{ik} = d_{ij}d_{jk}$$

для всех i, j, k . Вектор весовых коэффициентов $(\omega_1, \dots, \omega_{m+r})$ находится как собственный вектор матрицы D , соответствующий наибольшему собственному значению λ_{\max} .

В качестве критерия близости собственного вектора матрицы D точным весовым коэффициентом берется индекс согласованности

$$\rho = (\lambda_{max} - n)/(n - 1).$$

Если $\rho \leq 0.1$, то суждения, задаваемые матрицей D , считаются удовлетворительными. В противном случае матрицу суждений необходимо пересчитать, следовательно, найти новый собственный вектор и собственное число.

В нашем подходе мы в качестве вектора направления движения $a(b)$ к поставленной цели $A(B)$ на последних шагах возьмем собственный вектор решения задачи (24). Сделаем здесь одно существенное дополнение.

В методе МАИ [9] матрица суждений (24) предполагается положительно определенной. Действительно, суждение об отношении значимости двух факторов задается положительной величиной. Однако, в нашей модели увеличение одного фактора может сопровождаться уменьшением другого. Например, сокращение потребления энергоресурсов в результате внедрения энергосберегающих технологий. Поэтому, в нашем случае эксперты должны задавать также ортант, в котором будет происходить изменение показателей. Следовательно, в каждом ортанте изменения значений показателей можно считать положительными. Затем, при формировании вектора $a(b)$ знаки компонент определяются с учетом ортанта. Сделать это при парном сравнении факторов нетрудно.

С учетом сделанного замечания, метод МАИ можно корректно применить при нахождении векторов $a(b)$.

При движении вдоль вектора $a(b)$ к поставленной цели $A(B)$ в пространстве показателей естественно считать, что происходит улучшение значения функции потенциала. Иначе, зачем тогда двигаться в указанных направлениях? Поэтому можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 1. Вектор $a(b)$, найденный указанным выше способом, является градиентом функции потенциала в некоторой окрестности точки $A(B)$.

Таким образом, гиперплоскость, перпендикулярная вектору $a(b)$ в точке $A(B)$, будет эквипотенциальной поверхностью функции потенциала в первом приближении.

Определив функцию потенциала в первом приближении, теперь мы можем вычислить меру эффективности каждого объекта Z_1 и Z_2 следующим образом:

$$\mu_1 = \frac{f_1(Z_1)}{f_1(A)} \cdot 100\% = \frac{\sum_{i=1}^{m+r} a_i z_{i1}}{\sum_{i=1}^{m+r} a_i A_i} \cdot 100\%,$$

$$\mu_2 = \frac{f_2(Z_2)}{f_2(B)} \cdot 100\% = \frac{\sum_{i=1}^{m+r} b_i z_{i2}}{\sum_{i=1}^{m+r} b_i B_i} \cdot 100\%,$$

где $a = (a_1, \dots, a_{m+r})$, $b = (b_1, \dots, b_{m+r})$, $A = (A_1, \dots, A_{m+r})$, $B = (B_1, \dots, B_{m+r})$, здесь a_i , b_i , A_i , B_i — компоненты векторов a , b , A , B , соответственно.

Следовательно, теперь договаривающиеся стороны могут сравнить приращения своих эффективностей в результате выполнения проекта

$$\Delta\mu_1 = 100\% - \mu_1, \quad \Delta\mu_2 = 100\% - \mu_2. \quad (25)$$

Если стороны согласны на приращения своих мер эффективностей (25), то переговоры можно закончить на этом. Если нет, то стороны определяют новые начальные условия выполнения проекта (вложения, степень владения новым сооружением в результате выполнения проекта и т. д.). В результате могут измениться поставленные цели, если, например, будущий доход регионов входит явным образом в одну из выходных переменных модели. Тогда вычисления повторяются и опять сравниваются приращения (25) мер эффективностей. Либо объекты достигнут намеченных целей за время $(t_1 + \tau_1)$ и $(t_2 + \tau_2)$, соответственно.

Заметим, что поправки τ_1 и τ_2 могут быть как положительные, так и отрицательные. Тогда для приращения мер эффективности (25) можно ввести поправочные множители

$$\Delta\mu'_1 = \Delta\mu_1 \cdot \frac{t_1}{(t_1 + \tau_1)}, \quad \Delta\mu'_2 = \Delta\mu_2 \cdot \frac{t_2}{(t_2 + \tau_2)}. \quad (26)$$

Теперь стороны могут сравнить приращение мер эффективностей по формуле (26). Если приращения (26) удовлетворяют стороны, то переговорный процесс оканчивается, если нет, то предыдущие вычисления можно повторить с изменившимися начальными условиями.

Подчеркнем, что употребляемый нами термин из физики “потенциальная функция” вполне уместен в данном контексте. В самом деле, в физике разность потенциалов определяется при постоянной силе и постоянном направлении перемещения тела как скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения. При непостоянных векторах силы и перемещения тела разность потенциалов определяется как интеграл от скалярного произведения векторов силы и перемещения.

В нашей модели векторы a и b являются полными аналогами силы, а перемещение происходит в пространстве социально-экономических показателей деятельности регионов, при этом векторы указывают направления улучшения состояния регионов.

В принципе, мы могли бы использовать в нашем контексте также понятие “разность потенциалов” вместо приращения меры эффективности.

Однако, во-первых, цели A и B , а, следовательно, и векторы a и b разные для разных регионов. Во-вторых, тогда бы пришлось определять единицы измерения потенциала, а они будут разными для разных социально-экономических моделей, в отличие от физики, где единицы измерения зависят только от выбранной системы измерения.

Поэтому в наших задачах мы выбрали для сравнения деятельности регионов важное понятие меры эффективности или приращение меры эффективности, которые измеряются в относительных единицах.

7. Модификация функции потенциалов

Векторы направлений a и b , определенные нами как градиенты функции потенциалов в предыдущем разделе, являются в некотором смысле идеальными направлениями движения. В реальной жизни направления движения будут отклоняться от этих идеальных направлений.

Поэтому определим с помощью экспертов конусы возможных направлений C_1 для цели A и C_2 для цели B . Такие конусы можно задать, например, с помощью следующих попарных сравнений между показателями модели:

$$\frac{z_i}{z_j} \leq k_{ij}, \quad \frac{z_i}{z_j} \geq \bar{k}_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m + r. \quad (27)$$

Определение таких попарных соотношений — достаточно обычная операция в любой социально-экономической деятельности. Однако следует подчеркнуть, что соотношения (27) не могут определить любой многогранный конус в многомерном пространстве показателей. Более того, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 5. *Существуют многогранные конусы в многомерном пространстве показателей, которые не могут быть представлены в виде (27).*

Действительно, число ребер и граней конуса вида (27) ограничено некоторым числом, зависящим от размерности пространства. В то же время многогранные конусы в пространстве размерности $(m+r)$ могут иметь любое наперед заданное число ребер и граней.

Строго говоря, построить осмысленно произвольный многогранный конус в многомерном пространстве — достаточно сложная задача, поэтому на практике ограничиваются построением конусов вида (27).

Разработанная нами программная система позволяет визуализировать многомерное множество производственных возможностей с помощью построения различных двухмерных и трехмерных сечений этого множества и задавать произвольные направляющие векторы неограниченных ребер конуса в интерактивном режиме.

Тем самым имеется возможность для экспертов построить произвольный конус в многомерном пространстве показателей.

Итак, пусть определены конусы C_1 и C_2 в многомерном пространстве показателей и исходящие из точки A и B , соответственно, в математике они называются рецессивными конусами [10], см. рисунок 1. Конусы $(-C_1)$ и $(-C_2)$, исходящие из тех же вершин, являются шатрами, они вырезают на границе множества T некоторые области S_1 и S_2 , см. рисунок 3. В эти области объекты стремятся попасть при планировании тактических шагов развития объектов.

Пусть теперь объект $Z_1'(Z_2')$ находится в области шатра, выберем направление движения c_i к цели $A(B)$. Это направление будет отличаться от направления $a(b)$, но оно будет достаточно хорошим для движения к цели $A(B)$, т. е. $c_i \in C_1(C_2)$.

Поэтому любое направление, исходящее из точки $A(B)$ и имеющее острый угол с любым вектором из конуса $C_1(C_2)$, даст нам направление возрастания функции потенциала. Все такие направления образуют сопряженный конус $C_1^+(C_2^+)$, т. е.

$$C_1^+ = \{w \mid w^T c \geq 0, c \in C_1\}, \quad C_2^+ = \{v \mid v^T c \geq 0, c \in C_2\}.$$

Границы сопряженных конусов C_1^+ и C_2^+ представляют собой эквипотенциальные поверхности новых потенциальных функций $\tilde{f}_1(Z)$, $\tilde{f}_2(Z)$. Теперь они являются выпуклыми функциями.

На рисунке 2 показаны эквипотенциальные поверхности для точек B , B_i , B_j , соответственно.

В предыдущем разделе мера эффективности вычислялась исходя из того, что функция $f_1(Z)$ ($f_2(Z)$) линейная.

Покажем теперь, как вычислять значение функции, когда она выпуклая. Решаем оптимизационную задачу

$$\min_{\alpha} \alpha \quad \text{при ограничении} \quad Z_l \in (A - \alpha a) + C^+. \quad (28)$$

Тогда значения функций $\tilde{f}_1(Z_l)$ и $\tilde{f}_2(Z_l)$ для произвольной точки Z_l определяются по формулам

$$\tilde{f}_1(Z_l) = (A - \alpha^* a)^\top a, \quad \tilde{f}_2(Z_l) = (B - \alpha^* b)^\top b, \quad (29)$$

где α^* — оптимальное значение функционала в задаче (28).

Смысл формул (28) и (29) поясняется на рисунке 10. На прямой, проходящей через вершину $A(B)$, ищется такая точка $(A - \alpha^* a)$ или $(B - \alpha^* b)$, которая имеет одинаковый потенциал с точкой Z_l , для этого решается оптимизационная задача вида (28).

Затем вычисляется значение функции для точки $(A - \alpha^* a)^\top a$, как в линейном случае.

На рисунке 10 пунктирной линией показана эквипотенциальная поверхность для линейной функции. Из рисунка 10 видно, что точки $Z_i, Z_k, (A - \alpha^* a)$ имеют одинаковый потенциал относительно линейной функции. Однако, положение объекта $(A - \alpha^* a)$ значительно лучше с точки зрения достижения цели A , чем объектов Z_i, Z_k , поэтому модифицированная потенциальная функция дает значительно лучшую оценку, чем линейная функция.

Выбранные экспертами оптимальные направления движения, векторы a и b , к намеченным целям могут не быть наилучшими направлениями на начальных шагах развития регионов. Действительно, на начальных шагах развития регионам необходимо будет, например, создать некоторую инфраструктуру, реструктурировать экономику регионов и т. д., а потом уже двигаться к намеченным целям по оптимальным направлениям.

Опишем теперь на формальном языке действия регионов на начальных шагах развития. Назовем шатрами конусы $\tilde{C}_1 = -C_1$ и $\tilde{C}_2 = -C_2$, исходящие

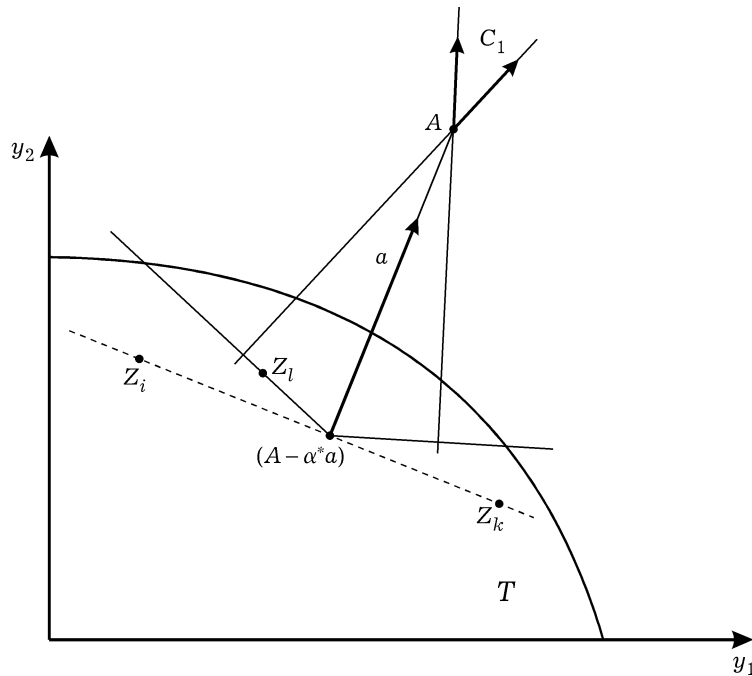


Рис. 10. Вычисление значения выпуклой функции потенциала

из точек A и B , на рисунке 3 шатры изображены конусами, направленными вниз.

На первом шаге эксперты выбирают векторы развития так, чтобы они были направлены внутрь областей S_1 и S_2 , образованных пересечением шатров \tilde{C}_1 и \tilde{C}_2 и эффективной гиперповерхности (границы) множества T . На рисунке 3 эти векторы обозначены d_1 для объекта Z_1 и g_1 для объекта Z_2 . Если объекты уже находятся внутри шатров и на границе множества T , то векторы можно выбрать так, чтобы они были направлены к намеченным целям A и B или близко к ним, на рисунке 3 такие направления обозначены векторами d_2 и g_2 , соответственно.

На последующих шагах развития граница множества T будет меняться в соответствии с изменением состояния всех регионов, на рисунке 3 новая эффективная гиперповерхность показана пунктирной линией.

Наш программный инструментарий позволяет достаточно быстро построить изменившуюся эффективную гиперповерхность по новым наблюдаемым объектам. Либо для каждого объекта можно найти новое состояние с помощью эконометрических методов на ближайшие несколько шагов, а затем построить границы для этих шагов. Затем на каждом шаге направление движения корректируется так, чтобы объекты сходились к целям A и B .

Следует подчеркнуть, что мы привели общую схему принятия решений в переговорном процессе. Отдельные этапы схемы могут уточняться и модифицироваться с учетом разработанного инструментария.

Общая схема описана для двух регионов, чтобы не усложнять изложение. Однако схема может быть легко расширена на все регионы, участвующие в формировании транснационального проекта.

8. Результаты моделирования по формированию транснациональных проектов стран участниц СНГ

Рассмотрим возможность использования предлагаемого подхода для моделирования переговорного процесса при формировании транснациональных проектов стран участниц СНГ. В качестве основной модели была взята модель ВСС методологии АСФ [4, 5]. Затем эффективная гиперповерхность, полученная в результате моделирования, была сглажена с применением техники, описанной в четвертом разделе, для того, чтобы избежать разрывов предельных показателей (частных производных) второго рода. Таким образом, в результате появилась обобщенная модель методологии АСФ [6].

В качестве входных показателей были использованы следующие статистические данные: потребление электроэнергии (кВт-ч); потребление нефти (барр. в сут.); рабочая сила (тыс. чел.).

Выходные данные модели: ВВП с учетом паритета покупательской способности.

Все статистические данные были взяты из открытых международных источников. Всего в модель были включены данные по 109 странам мира, включая страны СНГ, за 2007 г. Более поздних данных не имелось на момент выполнения работы.

Сначала были проведены расчеты по входной и выходной обобщенным моделям. Напомним, что меры эффективности по входной и выходной моделям характеризуют расстояние в относительных единицах до эффективной гиперповерхности вдоль, условно говоря, горизонтального и вертикального направления, то есть вдоль вектора затрат и вектора выпуска каждого объекта, включенного в модель. Большинство стран имеет приблизительно равные меры эффективности по входной и выходной моделям. Меры эффективности по разным моделям определяют положение страны в многомерном пространстве параметров.

Менее 30% стран имеет меру эффективности в пределах 95-100%. Далее все страны имеют эффективности с достаточно равномерным распределением от 35% до 95%. Лишь одна страна, Зимбабве, имеет меру эффективности 5%. В целом, результаты моделирования свидетельствуют о достаточной содержательности модели.

Для наглядной демонстрации предлагаемого подхода рассмотрим следующую гипотетическую ситуацию. Пусть три страны СНГ — Беларусь, Казахстан и Россия — договариваются о совместном транснациональном проекте, например, о строительстве и совместной эксплуатации нефтехимического завода, на строительство которого необходимо семь лет.

На рисунке 11 изображено сечение производственной функции исходного четырехмерного пространства, проведенное через объект Казахстан. Сплошной ломаной линией показано сечение многомерной эффективной гиперповерхности. Объект Беларусь изображен в виде проекции на плоскость сечения. На рисунке 12 представлено сечение производственной функции, проведенное через объект Россия. Объекты Беларусь и Казахстан изображены на этом рисунке как проекции на плоскость сечения.

На рисунках 11 и 12 точками A , B и C обозначены цели, которые поставило руководство стран Беларусь, Казахстан и России соответственно, для достижения в среднесрочной перспективе. Так как Беларусь и Казахстан в сравнении с Россией имеют значительно меньший масштаб в пространстве рассматриваемых показателей, то для удобства все построения для России выполнены на отдельном рисунке.

С помощью подхода, описанного в статье, были построены конусы, содержащие наиболее предпочтительные траектории движения объектов, на рисунках они изображены ребрами a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 и c_2 , соответственно, исходящими из точек A , B и C .

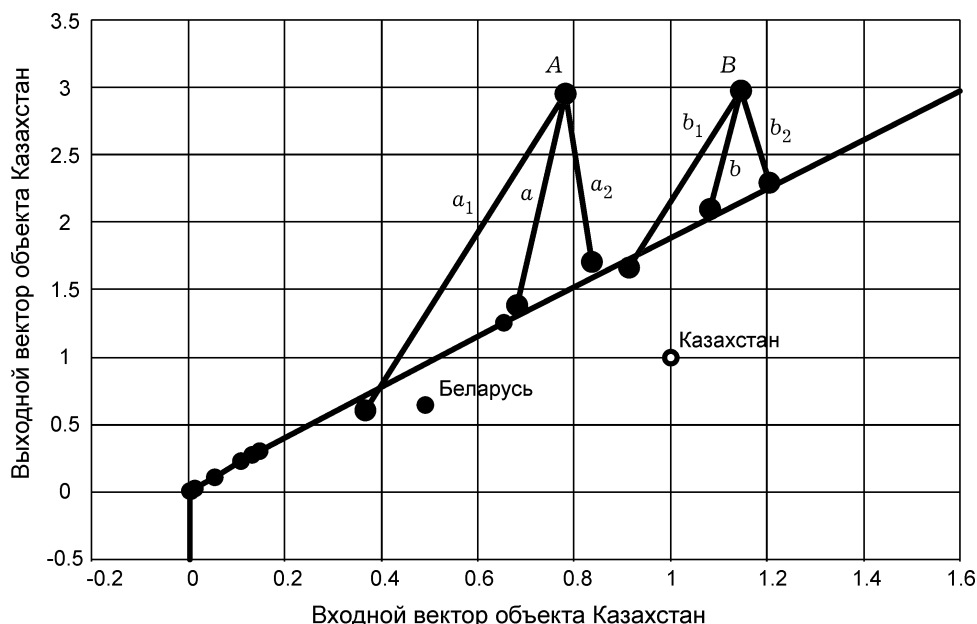


Рис. 11. Сечение производственной функции для объекта Казахстан

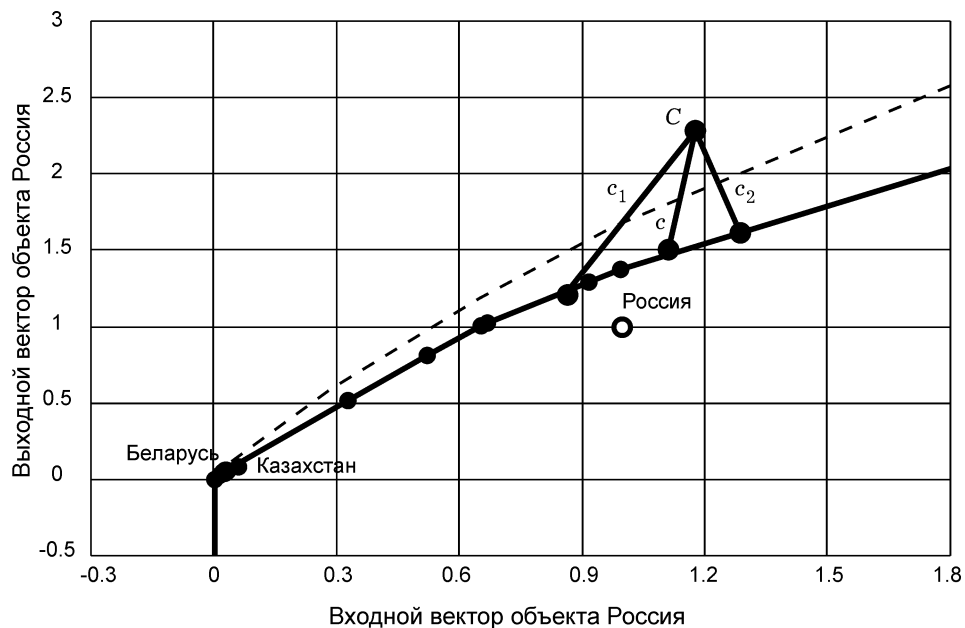


Рис. 12. Сечение производственная функция для объекта Россия

Для объектов были найдены меры эффективности, которые составили 31%, 27% и 34% для Беларуси, Казахстана и России, соответственно. После этого с помощью экспертных оценок и метода МАИ были выбраны оптимальные направления движения к поставленным целям. Векторы a , b и c представляют собой оптимальные направления развития для рассматриваемых стран, соответственно, на рисунках 11 и 12. А также были рассчитаны приращения мер эффективности для указанных объектов.

Далее было произведено моделирование нескольких итераций переговорного процесса, в результате которых были уточнены приращения эффективностей и векторы движения объектов.

На рисунке 12 пунктирной линией показано сечение эффективной гиперповерхности, построенной по прогнозируемым значениям через три года после начала совместного транснационального проекта. Отметим, что в процессе развития проекта некоторые данные могут уточняться, в этом случае необходимые изменения вносятся в модель и, согласно описанной в предыдущем разделе схеме, переговорный процесс повторяется.

На рисунке 13 изображено трехмерное сечение исходного четырехмерного множества, построенное через объект Казахстан, и цели развития для объектов Беларусь и Казахстан, соответственно. Это сечение проведено через три показателя исходной модели: потребление электроэнергии, потребление нефти, ВВП по паритету покупательной способности.

На рисунке 14 изображено трехмерное сечение четырехмерного множества производственных возможностей, проведенное через объект Россия.

Данное сечение построено на основе прогнозных данных через три года после начала совместного проекта. Из рисунка видно, что эффективная гиперповерхность проходит выше, в результате конус стал меньше, а объекты приблизились к своим намеченным целям.

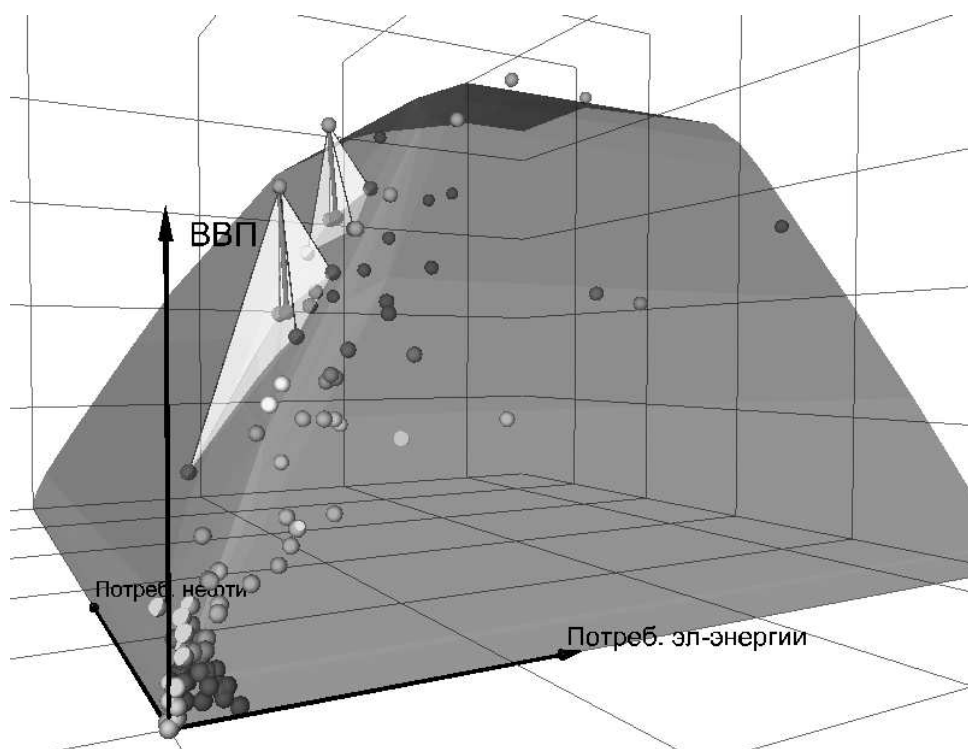


Рис. 13. Трехмерное сечение исходного четырехмерного пространства, проведенное через объект Казахстан

9. Заключение

В работе представлен научно-методический инструментарий по визуализации и оценке результатов формирования транснациональных проектов стран участниц СНГ. Подчеркнем, что визуализация играет ключевую роль в предложенном инструментарии [6, 7, 11, 26].

Действительно, с практической точки зрения визуализация многомерных множеств значительно усиливает интуицию и творческие возможности лиц, принимающих решения. В настоящее время ни один строитель не начнет стройку без полного набора чертежей, ни один капитан не пойдет в плавание без точного маршрута на карте, ни один врач не будет назначать лечение без предварительной диагностики (рентген, УЗИ и т. д.). И только руководитель сложными социально-экономическими объектами часто принимает решения, основываясь лишь на таблицах данных, простых графиках и диаграммах, без соответствующего интеллектуального инструментария. Хотя такой руководитель часто несет ответственность за громадные человеческие и материальные ресурсы.

Между тем в реальной экономической жизни и в бизнесе аналитические материалы часто представляют собой десятки, если не сотни, страниц литературного текста, часто даже с простыми графиками, диаграммами, таблицами, но без панорамного многомерного видения поля деятельности, без реальных экономических зависимостей.

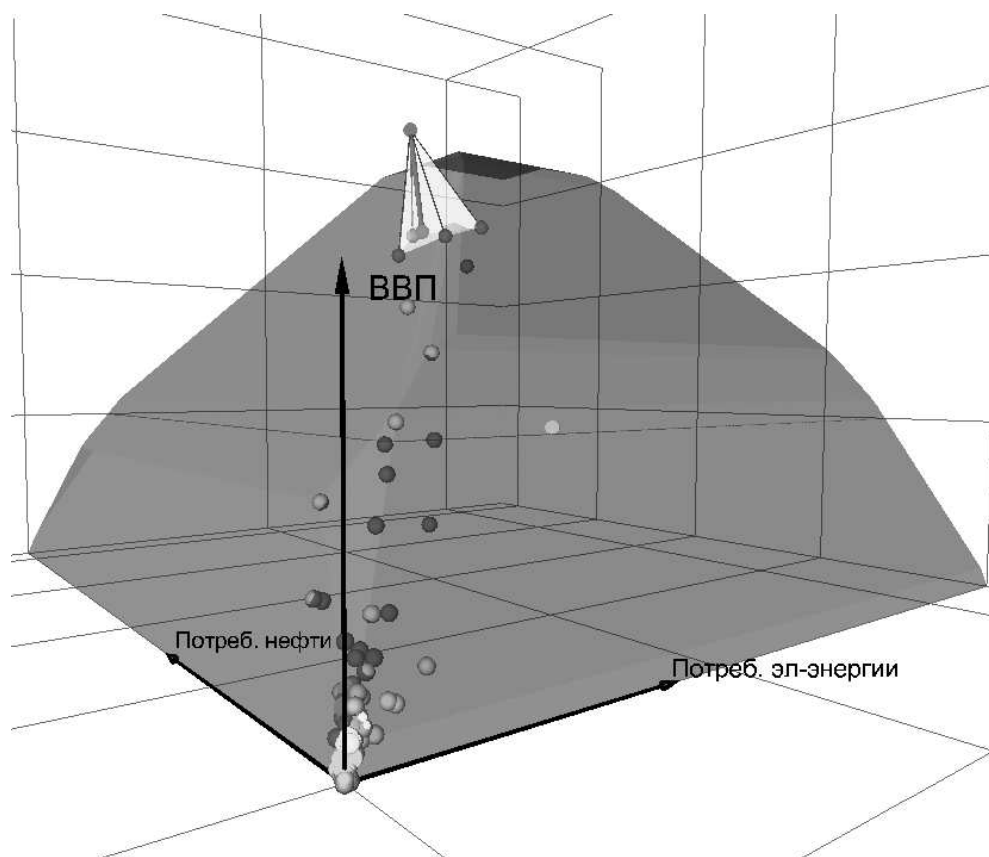


Рис. 14. Трехмерное сечение исходного четырехмерного пространства, построенное по прогнозным данным через три года

Наш подход и разработанный инструментарий дает возможность видеть объемное многомерное экономическое пространство, моделировать возможные ситуации развития событий в нем и, тем самым, определять оптимальные тактические и стратегические пути дальнейшего развития [6, 7, 26].

Целевую (потенциальную) функцию можно было бы определить как сумму материальных благ, которые будет иметь объект, в данной точке многомерного пространства в денежном эквиваленте.

Однако, вопросы прибыли и материальных благ не всегда играют первую роль в межгосударственных отношениях. Например, в Англии по каналу ВВС не показывают рекламу пива, и вообще любую рекламу, хотя, казалось бы, потеря прибыли очевидна, поэтому либо там не понимают ничего в бизнесе, либо имеются какие-то другие не всегда понятные мотивации.

Каждая сторона (государство) в транснациональных проектах выбирает сама себе достижимые цели, и, как уже было сказано, не всегда эти цели можно измерить в денежном эквиваленте, или других единицах.

Поэтому в работе рекомендуется рассматривать приращения меры эффективности каждой стороной в качестве аргументов в переговорном процессе.

Список литературы

1. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике.—М.: Наука, 1979.
2. Panzar J.C., Willig R.D. Economics of scale in multi-output production // *The Quart. J. of Econ.*—1977.—V. XC1, № 3.—P. 481–493.
3. Starrett D.A. Measuring returns to scale in the aggregate, and scale effect of public goods // *Econometrica*.—1977.—V. 45, № 6.—P. 1439–1455.
4. Banker R.D., Charnes A., Cooper W.W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis // *Management Sci.*—1984.—V. 30, № 9.—P. 1078–1092.
5. Cooper W.W., Seiford L.M., Tone K. *Data Envelopment Analysis*.—Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.
6. Системный аудит использования национальных ресурсов и управление по результатам / Под ред. А.А. Пискунова.—Ростов-на-Дону: Южный Федеральный Университет, 2007.
7. Krivonozhko V.E., Utkin O.B., Volodin A.V., Sablin I.A., Patrín M.V. Constructions of economic functions and calculations of marginal rates in DEA using parametric optimization methods // *J. of Operat. Res. Soc.*—2004.—V. 55, № 10.—P. 1049–1058.
8. Krivonozhko V.E., Utkin O.B., Volodin A.V., Sablin I.A. About the structure of boundary points in DEA // *J. of Operat. Res. Soc.*—2005.—V. 56, № 12.—P. 1373–1378.
9. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий.—М.: Радио и связь, 1993.
10. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ.—М.: Мир, 1973.
11. Кривоножко В.Е., Уткин О.Б., Володин А.В. Оптимизационные алгоритмы для построения трехмерных сечений в анализе эффективности сложных систем // *Нелинейная динамика и управление*. Вып. 3 / Под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина.—М.: Физматлит, 2003.—С. 227–304.
12. Adler N., Friedman L., Sinuany-Stern Z. Review of ranking methods in the data envelopment analysis context // *Eu. J. of Operat. Res.*—2002.—V. 140, № 2.—P. 249–265.
13. Yu G., Wei Q., Brockett P. A generalized data envelopment analysis model: a unification and extension of existing methods for efficiency analysis of decision making units // *Ann. of Operat. Res.*—1996.—V. 66, № 1.—P. 47–89.
14. Yu P.L. Cone convexity, cone extreme points and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives // *J. of Optimiz. Theory and App.*—1974.—V. 14, № 3.—P. 319–377.
15. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.—М.: Наука, 1982.
16. Thompson R.G., Langemeier L., Lee C.-T., Lee E., Thrall R.M. The role of multiplier bounds in efficiency analysis with an application to Kansas farming // *J. of Econometrics*.—1990.—V. 46, № 1–2.—P. 93–108.
17. Taylor W.M., Thompson R.G., Thrall R.M., Dharmapala P.S. DEA/AR efficiency and profitability of Mexican banks. A total income model // *Eu. J. of Oper. Res.*—1997.—V. 98, № 2.—P. 346–363.
18. Thompson R.G., Brinkman E.S., Dharmapala P.S., Gonzalez-Lima M.D., Thrall R.M. DEA/AR profit ratios and sensitivity of 100 large U.S. banks // *Eu. J. of Oper. Res.*—1997.—V. 98, № 2.—P. 213–229.
19. Roll Y., Cook W.D., Golany B. Controlling factor weights in Data Envelopment Analysis // *IIE Transactions*.—1991.—V. 23, № 1.—P. 2–9.
20. Pareto V. *Manuel d'economie politique*, deuxieme edition.—Paris: Marcel Giard, 1927.
21. Charnes A., Cooper W.W., Wei Q.L., Huang Z.M. Cone ratio data envelopment analysis and multi-objective programming // *Intern. J. of Syst. Sci.*—1989.—V. 20, № 7.—P. 1099–1118.
22. Charnes A., Cooper W.W., Huang Z.M., Sun D.B. Polyhedral Cone-ratio DEA models with an illustrative application to large commercial banks // *J. of Econometrics*.—1990.—V. 46, № 1–2.—P. 73–91.
23. Brockett P.L., Charnes A., Cooper W.W., Huang Z.M., Sun D.B. Data transformations in DEA cone ratio envelopment approaches for monitoring bank performance // *Eu. J. of Oper. Res.*—1997.—V. 98, № 2.—P. 250–268.

24. Farrell M.J. The measurement of productive efficiency // J. of the Royal Stat. Soc. (Series A).—1957.—V. 120, Part 3.—P. 253–281.
25. Krivonozhko V.E., Utkin O.B., Safin M.M., Lychev A.V. On some generalization of the DEA models // J. of Operat. Res. Soc.—2009.—V. 60.—P. 1518–1527.
26. Førsund F.R., Kittelsen S.A.C., Krivonozhko V.E. Farrell revisited — Visualizing properties of DEA production frontiers // J. of Operat. Res. Soc.—2009.—V. 60.—P. 1535–1545.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПАРАПЛАНА

А. М. Формальский, П. В. Зайцев

Параплан состоит из гондолы и паруса. Оба тела считаются абсолютно твердыми. Они соединены стропами, которые предполагаются абсолютно твердыми невесомыми стержнями. Эти стержни жестко прикреплены к гондole и к парусу. Тем самым, рассматриваемая модель аппарата представляет собой одно твердое тело с тремя степенями свободы. На гондole аппарата смонтирован жестко скрепленный с ней двигатель, содержащий пропеллер. Пропеллер развивает тягу, которая прикладывается к гондole. Ориентация вектора тяги относительно гондолы постоянна. Составлена математическая модель параплана, движущегося в продольной плоскости. Найдены стационарные режимы движения аппарата при постоянной величине тяги. Построен закон автоматического управления тягой, при котором стабилизируется полет аппарата на заданной высоте. В плоскости коэффициентов обратной связи построены области асимптотической устойчивости движения параплана на постоянной высоте, в том числе, с учетом запаздывания. В этой же плоскости построены области, в которых имеет место заданный запас устойчивости. Приведены результаты численного моделирования полета аппарата.

Введение

Создание дистанционно-управляемых и беспилотных летательных аппаратов является актуальным направлением развития современной авиации [1, 2]. Одним из таких перспективных летательных аппаратов может быть параплан. В настоящей статье с целью изучения динамики параплана и синтеза управления им составлена математическая модель аппарата в его плоском продольном движении.

Однозвенная модель параплана, которая изучается в настоящей статье, состоит из крыла (паруса) и гондолы. Оба эти тела считаются абсолютно твердыми; они соединены стропами, которые моделируются невесомыми абсолютно твердыми стержнями, жестко скрепленными как с гондолой, так и с парусом. Таким образом, рассматриваемая механическая модель параплана представляет собой одно твердое тело, которое в плоском продольном движении имеет три степени свободы.

На гондole жестко закреплен двигатель, который развивает тягу при помощи пропеллера. Ориентация относительно гондолы вектора тяги, развиваемой этим пропеллером, не меняется.

На парус, а значит и на весь аппарат, действует подъемная сила и аэродинамическая сила лобового сопротивления. Эти силы, а также сила тяги и сила лобового сопротивления гондолы создают моменты относительно центра масс, которые уравниваются в стационарном режиме полета. При определенном значении тяги двигателя параплан в стационарном режиме

движется горизонтально, т.е. на постоянной высоте. Этот горизонтальный полет при постоянной тяге не является, однако, асимптотически устойчивым по отношению к высоте. Он может быть стабилизирован путем управления величиной вектора тяги.

В начале движения — на стартовом участке — гондола парaplана движется по земле (катится на колесах). Приобретя некоторую достаточно большую скорость, аппарат отрывается от земли, поскольку подъемная сила становится больше веса. Таким образом, на стартовом участке на систему наложена односторонняя связь, которая учитывается в ее математической модели.

Составлена программа компьютерного моделирования продольного движения парaplана, включающая возможность анимации полета.

1. Математическая модель аппарата

На рис. 1 приведена схема парaplана. Крыло (парус) на этом рисунке изображено в виде прямолинейного отрезка BD с центром в точке A (вид сбоку). Пусть точка A будет также центром масс крыла. Будем считать, что как подъемная сила паруса

$$P = C_y \frac{1}{2} \rho V_A^2 S,$$

так и аэродинамическая сила его лобового сопротивления

$$Q = C_x \frac{1}{2} \rho V_A^2 S$$

приложены в центре A пластинки. Величины C_y и C_x представляют собой коэффициенты подъемной силы и силы лобового сопротивления [3, 4], величина $\frac{1}{2} \rho V_A^2 S$ представляет собой скоростной напор, ρ — плотность воздуха, V_A — скорость точки A относительно набегающего потока, S — площадь паруса.

Точка приложения подъемной силы P и силы лобового сопротивления Q , конечно, меняется с изменением скорости и ориентации паруса. Это обстоятельство, однако, учитывать не будем, хотя бы потому, что момент этих сил относительно центра масс парaplана “слабо” зависит от положения точки их приложения, если расстояние CA между центром масс аппарата и парусом велико, по сравнению с размером BD паруса.

Обозначим через G центр масс гондолы. Расстояние GA обозначим через L . Пусть m_1 — масса гондолы, m_2 — масса паруса и $m_1 + m_2 = M$. Тогда расстояние l_1 от центра масс C аппарата до точки G равно

$$l_1 = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 L}{M}.$$

Обозначим через l_2 расстояние CA , равное $L = l_1$. Если масса паруса m_2 существенно меньше массы гондолы m_1 , то расстояние l_1 существенно меньше расстояния l_2 : $l_1 \ll l_2$. При этом центр масс всего аппарата C близок к гондоле G . Через T обозначим тягу, развиваемую двигателем. Будем считать, что тяга T приложена в центре масс G гондолы, и ее вектор все время перпендикулярен прямой GA .

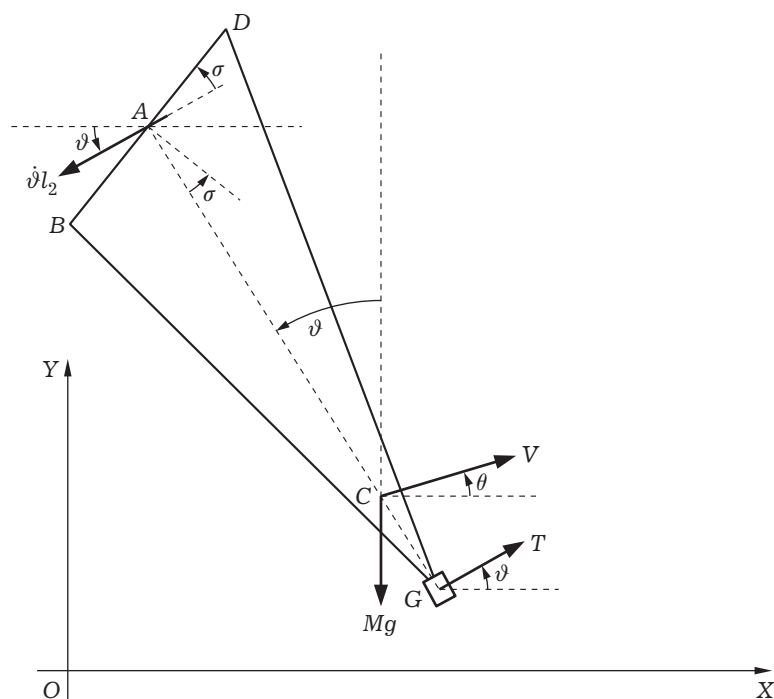


Рис. 1. Схема парашюта: C — центр масс аппарата; V — скорость точки C ; θ — угол, образуемый вектором скорости с горизонтом; ψ — угол тангажа; $\omega = \dot{\psi}$ — угловая скорость тангажа; T — тяга двигателя; G — центр масс gondoly; M — масса всего аппарата; A — центр масс паруса; σ — угол разворота паруса; $CG = l_1$; $AC = l_2$

Обозначим через J момент инерции аппарата относительно его центра масс C , через g — ускорение свободного падения. Если длины строп неодинаковы, то угол между парусом и прямой AG не является прямым; обозначим угол между перпендикуляром к парусу и прямой AG через σ (см. рис. 1). Разворот паруса в продольной плоскости на некоторый угол σ может быть использован для изменения его подъемной силы. В рассматриваемой ниже модели угол σ считается постоянным.

Введем неподвижную относительно земли систему координат XOY , ось OX которой направлена горизонтально в сторону движения парашюта, а ось OY — вертикально вверх. Пусть x и y — координаты центра масс C парашюта, V — скорость центра масс, θ — угол между вектором скорости центра масс и положительным направлением оси OX . Угол тангажа, т.е. угол между вертикальной осью OY и прямой CA , отсчитываемый против часовой стрелки, обозначим через ψ (см. рис. 1). Угловую скорость тангажа $\dot{\psi}$ обозначим через ω .

Если во время полета парашют поворачивается вокруг центра масс, то абсолютная скорость V_A центра паруса A , а также абсолютная скорость V_G центра масс gondoly G не равны скорости V центра масс C аппарата.

Векторы скорости V_A и V_G точек A и G складываются из вектора скорости центра масс парашюта и векторов скоростей этих точек относительно

центра масс. Величины этих скоростей вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} V_A &= \sqrt{V^2 + \omega^2 l_2^2 - 2V\omega l_2 \cos(\vartheta - \theta)}, \\ V_G &= \sqrt{V^2 + \omega^2 l_1^2 + 2V\omega l_1 \cos(\vartheta - \theta)}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Угол β_A между векторами \mathbf{V} и \mathbf{V}_A определяется при помощи теоремы синусов по формуле

$$\sin \beta_A = \omega l_2 \sin(\vartheta - \theta) / V_A. \quad (1.2)$$

Угол β_G между векторами скоростей ωl_1 и \mathbf{V}_G может быть найден также при помощи теоремы синусов

$$\sin \beta_G = V \sin(\vartheta - \theta) / V_G. \quad (1.3)$$

Коэффициент C_y подъемной силы паруса в линейном приближении по углу атаки α можно представить в виде произведения

$$C_y = C_y^\alpha,$$

где C_y^α , также как и C_x , — постоянные величины. Выражение для приведенного угла атаки паруса α имеет вид:

$$\alpha = \vartheta - \theta + \beta_A \sigma.$$

Слагаемое β_A в этой сумме возникает из-за изменения направления скорости набегающего на парус потока при вращении паруса относительно центра масс аппарата C . Синус этого угла (см. соотношение (1.2)) пропорционален угловой скорости тангажа ω и расстоянию l_2 от точки A до центра масс C , если скорость V_A близка к скорости V .

В каждой точке паруса есть, конечно, свой “местный” угол атаки, но он мало отличается от угла $\vartheta - \theta + \beta_A + \sigma$, если размер BD паруса мал по сравнению с расстоянием l_2 . Расстояние же l_2 тем больше, чем больше длина строп и ближе центр масс аппарата к гондоле. В настоящей работе считается, что угол атаки во всех точках паруса равен величине

$$\alpha = \vartheta - \theta + \beta_A \sigma.$$

Для того чтобы учесть нелинейную зависимость коэффициентов подъемной силы и силы лобового сопротивления от угла атаки, нужно знать поляру, которая связывает коэффициенты C_y и C_x при различных углах атаки [3, 4].

В приведенных ниже уравнениях движения будем учитывать силу лобового сопротивления гондолы

$$Q_G = C_{xG} \frac{1}{2} \rho V_G^2 S,$$

где $C_{xG} = \text{const}$ — коэффициент лобового сопротивления гондолы. Подъемную силу гондолы будем считать равной нулю.

Выведем дифференциальные уравнения, описывающие плоское продольное движение параплана. Для этого используем общие теоремы динамики системы материальных точек — теорему о движении центра масс и теорему об изменении момента количества движения системы относительно центра масс [5].

Уравнение движения центра масс аппарата C в проекции на касательную к его траектории имеет вид:

$$M\dot{V} = -Mg \sin \theta + T \cos(\vartheta - \theta) + C_y^\alpha(\vartheta - \theta + \beta_A + \sigma) \frac{1}{2} \rho V_A^2 S \sin \beta_A - \\ - C_x \frac{1}{2} \rho V_A^2 S \cos \beta_A - C_{xG} \frac{1}{2} \rho S \cos(\vartheta - \theta - \beta_G) + R_y \sin \theta - R_x \cos \theta. \quad (1.4)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (1.4) описывает проекцию на касательную к траектории силы тяжести аппарата Mg , второе — проекцию на касательную силы тяги T , третье — проекцию подъемной силы, четвертое и пятое слагаемые описывают проекции на касательную сил лобового сопротивления, приложенных к парусу и к гондоле соответственно. R_y — вертикальная составляющая силы реакции опорной поверхности, которая отлична от нуля на стартовом участке движения парашюта, т. е. во время его разгона, когда гондола катится на колесах по земле, R_x — горизонтальная составляющая силы, приложенной со стороны земли к гондоле; она описывает силу сопротивления качению гондолы по земле. Сила R_y считается положительной, если она направлена вертикально вверх. При моделировании (численном исследовании) считается, что аппарат отрывается от земли, как только эта величина меняет знак — становится отрицательной. После отрыва парашюта от земли

$$R_y = R_x = 0.$$

Уравнение движения центра масс аппарата C в проекции на нормаль к его траектории имеет вид:

$$MV\dot{\theta} = -Mg \cos \theta + T \sin(\vartheta - \theta) + C_y^\alpha(\vartheta - \theta + \beta_A + \sigma) \frac{1}{2} \rho V_A^2 S \cos \beta_A + \\ + C_x \frac{1}{2} \rho V_A^2 S \sin \beta_A - C_{xG} \frac{1}{2} \rho S \sin(\vartheta - \theta - \beta_G) + R_y \cos \theta + R_y \cos \theta + R_x \sin \theta. \quad (1.5)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (1.5) описывает проекцию на нормаль к траектории силы тяжести аппарата, второе — проекцию на нормаль силы тяги, третье — проекцию подъемной силы, приложенной к парусу, четвертое и пятое слагаемые описывают проекции на нормаль сил лобового сопротивления, приложенных к парусу и к гондоле соответственно.

Третье динамическое уравнение — уравнение моментов сил относительно центра масс — имеет вид:

$$J\ddot{\theta} = -C_y^\alpha \frac{1}{2} \rho V_A^2 S(\vartheta - \theta + \beta_A + \sigma) l_2 \sin(\vartheta - \theta + \beta_A) + C_x \frac{1}{2} \rho V_A^2 S l_2 \cos(\vartheta - \theta + \beta_A) - \\ - C_{xG} \frac{1}{2} \rho V_G^2 S l_1 \cos \beta_G + T l_1 + (R_y \sin \vartheta - R_x \cos \vartheta) l_1. \quad (1.6)$$

Для описания движения центра масс парашюта используем также очевидные кинематические соотношения:

$$\dot{x} = V \cos \theta, \quad \dot{y} = V \sin \theta. \quad (1.7)$$

Гондола парашюта во время его разгона движется (катится) по земле, а затем во время полета парашюта — над землей. Поэтому на ординату h центра G гондолы накладывается ограничение — односторонняя связь:

$$h = y - l_1 \cos \vartheta \geq 0.$$

Во время разгона аппарата, когда гондола движется по земле, имеет место тождество:

$$h = y - l_1 \cos \vartheta \equiv 0. \quad (1.8)$$

Продифференцировав тождество (1.8) дважды, получим соотношение:

$$\dot{V} \sin \theta + V \dot{\theta} \cos \theta + l_1 \ddot{\vartheta} \sin \vartheta + l_1 \dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta \equiv 0. \quad (1.9)$$

Подставив в равенство (1.9) выражения для \dot{V} из уравнения (1.4), для $\dot{\theta}$ из уравнения (1.5) и для $\ddot{\vartheta}$ из уравнения (1.6), можно разрешить его относительно силы реакции R_y (при заданной силе R_x).

Полученное при этом выражение для реакции R_y , которое зависит от фазовых координат системы, здесь не приводится из-за его громоздкости. Его, однако, необходимо использовать при моделировании движения аппарата на стартовом участке. Если значение этой реакции положительно, то, подставив его в соотношения (1.4)–(1.6), получим уравнения движения парaplана, при котором гондола движется по земле. В момент “обнуления” этой реакции начинается фаза полета аппарата, которая описывается уравнениями (1.4)–(1.6) при

$$R_y = R_x = 0.$$

Будем рассматривать тягу T в дальнейшем как управляющее воздействие, которое меняется в зависимости от изменения координат аппарата. Однако, вначале найдем стационарные режимы движения парaplана, считая тягу постоянной величиной.

Заметим, что уравнения движения (1.4)–(1.6) — существенно нелинейные и не допускают аналитического исследования. Поэтому почти все приведенные ниже результаты получены путем численного исследования.

2. Стационарные режимы неуправляемого (при постоянной тяге) полета парaplана

Найдем стационарные режимы движения парaplана при постоянном значении тяги двигателя $T = \text{const}$.

Пользуясь динамическими уравнениями (1.4)–(1.6), будем искать стационарный режим полета аппарата в виде:

$$\begin{aligned} V &\equiv \text{const}, \\ \vartheta &\equiv \text{const}, \\ \theta &\equiv \text{const}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Стационарный режим (2.1), если он существует, представляет собой равномерное поступательное движение аппарата вдоль прямой, которая составляет угол θ с горизонтальной осью OX . При условиях (2.1) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 0, \\ \dot{\vartheta} = \omega &= 0, \\ \dot{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из выражений (1.1)–(1.3) следует, что при условии $\omega = 0$

$$\begin{aligned} V_A &= V, \\ V_G &= V, \\ \beta_A &= 0, \\ \beta_G &= \vartheta - \theta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставив значения (2.2), (2.3) в уравнение (1.4), получим следующее соотношение, связывающее тягу T , углы ϑ , θ и скорость V в стационарном режиме (напомним, что в полете $R_y = R_x = 0$):

$$-Mg \sin \theta + T \cos(\vartheta - \theta) - (C_x + C_{xG}) \frac{1}{2} \rho V^2 S = 0. \quad (2.4)$$

Из равенства (2.4) вытекают следующие выражения:

$$\frac{1}{2} \rho V^2 S = \frac{T \cos(\vartheta - \theta) - Mg \sin \theta}{C_x + C_{xG}} \quad (2.5)$$

или

$$\frac{1}{2} \rho T = \frac{(C_x + C_{xG}) \rho V^2 S + 2Mg \sin \theta}{2 \cos(\vartheta - \theta)}.$$

Подставив значения (2.2), (2.3) в уравнение (1.5), получим

$$-Mg \cos \theta + T \sin(\vartheta - \theta) + C_y^\alpha (\vartheta - \theta + \sigma) \frac{1}{2} \rho V^2 S = 0. \quad (2.6)$$

При условиях (2.2), (2.3) уравнение (1.6) принимает вид:

$$\frac{1}{2} \rho V^2 S [C_x l_2 \cos(\vartheta - \theta) - C_{xG} l_1 \cos(\vartheta - \theta) - C_{y\alpha} (\vartheta - \theta + \sigma) l_2 \sin(\vartheta - \theta)] = 0. \quad (2.7)$$

Уравнения (2.5)–(2.7) относительно просто разрешить, если искать стационарный режим полета на постоянной высоте, т.е. когда $\dot{\theta} \equiv 0$. При условии $\dot{\theta} \equiv 0$ с учетом соотношений (2.5) из уравнения (2.7) получаем уравнение для определения угла тангажа ϑ :

$$\left(1 - \frac{C_{xG} l_1}{C_x l_2}\right) \cos^2 \vartheta + \left(1 + \frac{C_{xG}}{C_x}\right) \frac{l_1}{l_2} - \frac{C_y^\alpha}{C_x} (\vartheta + \sigma) \sin \vartheta \cos \vartheta = 0. \quad (2.8)$$

Из рассмотрения соотношения (2.8) следует, что стационарное значение угла тангажа ϑ зависит от трех отношений C_{xG}/C_x , C_y^α/C_x , l_1/l_2 и угла σ ориентации паруса и не зависит от значения тяги T или скорости V .

Уравнение (2.8) не разрешается аналитически относительно неизвестного угла тангажа ϑ . Однако, корень этого уравнения можно найти численно, построив при заданных значениях параметров аппарата зависимость левой части уравнения (2.8) от величины ϑ .

Положив в соотношениях (2.5), (2.6) угол $\theta = 0$, можно с их помощью при найденном значении угла ϑ вычислить значение тяги T , при котором параплан летит *горизонтально* — на постоянной высоте:

$$T = \frac{Mg}{\frac{C_y^\alpha}{C_x} \left(1 + \frac{C_{xG}}{C_x}\right)^{-1} (\vartheta + \sigma) \cos \vartheta + \sin \vartheta}. \quad (2.9)$$

При известной величине угла тангажа ϑ выражения (2.5) определяют соотношение между значениями тяги и скорости. Вычислив величину тяги по формуле (2.9), можно затем при помощи первого из соотношений (2.5) найти соответствующее значение скорости V .

Соотношения (2.5)–(2.7) позволяют отыскивать также стационарные режимы полета, при которых угол вектора скорости $\theta \neq 0$. Для этого удобно разрешать уравнения (2.5)–(2.7) “обратным” способом. Задавшись некоторым значением угла θ , подставим его в уравнения (2.5)–(2.7). Тогда эти три уравнения будут содержать три неизвестных величины: угол тангажа ϑ , скорость V и тягу T , которую будем считать неизвестной при заданном угле θ . Затем скоростной напор $\frac{1}{2}\rho V^2 S$ из первого соотношения (2.5) подставим в два уравнения (2.6) и (2.7).

В этих двух уравнениях останутся только две неизвестные величины: угол тангажа ϑ и тяга T . Причем тяга T входит в эти уравнения линейно и поэтому легко исключается. Полученное после исключения тяги одно нелинейное уравнение содержит только одну неизвестную величину — угол тангажа ϑ . Это нелинейное уравнение можно решить численно. После определения угла ϑ может быть найдена исключенная из двух уравнений тяга T , а затем при помощи первой формулы (2.5) и скорость V .

На рис. 2 для стационарных режимов приведены графики зависимостей скорости полета V , угла тангажа ϑ и тяги T от угла вектора скорости θ , построенные при $\sigma = 0$ и некоторых гипотетических значениях параметров парaplана ($m_1 = 100$ кг, $m_2 = 7$ кг, $L = 7,3$ м, $S = 30$ м², $C_y^\alpha = 1,2$, $C_x = 0,1$, $C_{xG} = 0,1$).

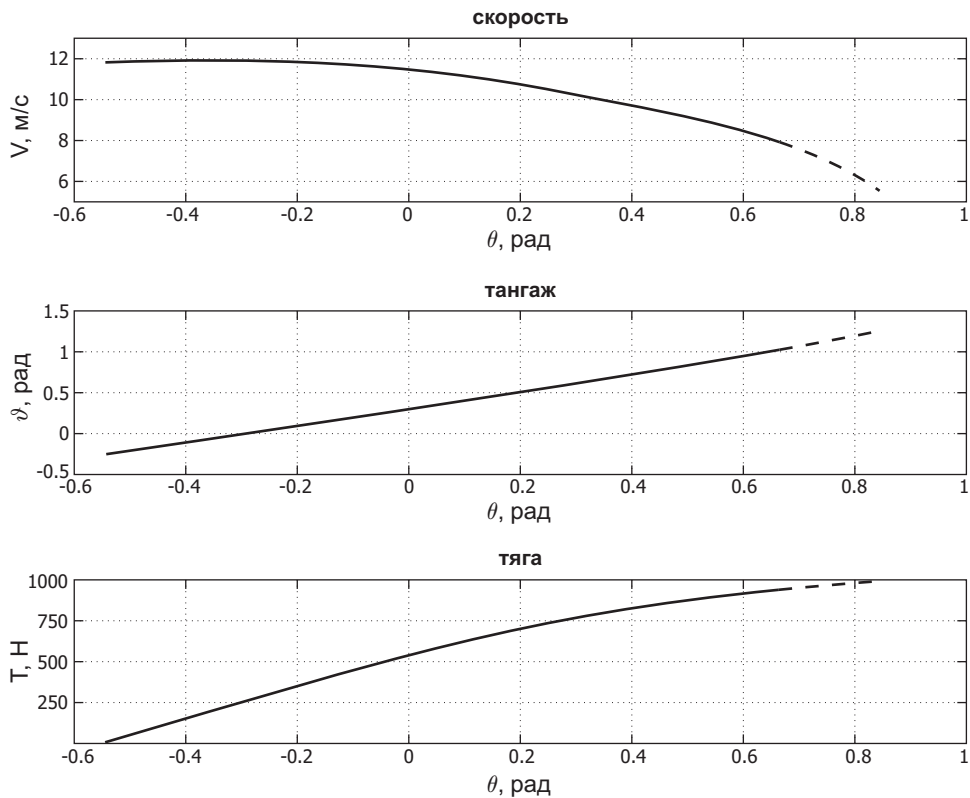


Рис. 2. Зависимости скорости полета V , угла тангажа ϑ и тяги T от угла вектора скорости θ в стационарных режимах полета. Пунктирной линией показаны неустойчивые стационарные режимы

Как следует из рассмотрения рис. 2, с увеличением тяги T стационарное значение угла θ становится больше, однако, скорость аппарата V при этом становится меньше. Такое уменьшение скорости можно объяснить тем, что с ростом угла θ увеличивается проекция силы тяжести аппарата на касательную к траектории $Mg \sin \theta$, направленная против скорости (см. уравнение (1.4) и первое из соотношений (2.5)). При $T = 0$ существует стационарный режим планирования, которому соответствуют постоянные значения скорости V , угла тангажа ϑ и угла вектора скорости θ (см. рис. 2).

В этом режиме центр тяжести парашюта движется по наклонной прямой вниз к земле, поскольку угол $\theta < 0$. Угол тангажа ϑ также является отрицательной величиной. Таким образом, в режиме планирования аппарат движется по прямолинейной траектории к земле, и его ось GA наклонена в сторону движения, так что парус опережает гондолу.

Как говорилось выше, среди стационарных режимов есть режим горизонтального полета, когда $\theta = 0$. Этот режим осуществляется при соответствующих постоянных значениях V , ϑ и T . Пусть T_* — значение тяги, соответствующее *горизонтальному* полету парашюта. Оно при найденном заранее значении угла тангажа ϑ вычисляется путем решения уравнения (2.9). При постоянных значениях тяги $T \neq T_*$ в стационарном режиме аппарат летит по прямолинейной траектории, набирая или теряя высоту. При $T > T_*$ он набирает высоту, а при $T < T_*$ — теряет.

Увеличить или уменьшить скорость горизонтального полета парашюта путем увеличения или уменьшения тяги двигателя *невозможно*. Эту скорость можно изменить, только изменив характеристики аппарата — аэродинамические, геометрические, масс-инерционные.

Пользуясь уравнениями (1.4)–(1.6), можно обычным путем выписать уравнения в вариациях относительно стационарных значений (2.1), получающихся из уравнений (2.5)–(2.7). Система уравнений в вариациях имеет четвертый порядок. Эта система, однако, из-за ее громоздкости здесь не приведена.

При помощи уравнений в вариациях можно исследовать устойчивость стационарных режимов движения парашюта по отношению к четырем переменным V , ω , ϑ и θ при заданном постоянном значении тяги T . На рис. 2 сплошной линией показаны стационарные режимы, которые являются асимптотически устойчивыми по отношению к указанным переменным, пунктиром же показаны неустойчивые режимы движения. Асимптотически устойчивыми, как следует из рассмотрения рис. 2, является и горизонтальный полет парашюта, и режим планирования парашюта.

При малых высотах полета парашюта зависимостью плотности воздуха ρ от высоты можно пренебречь. В рассматриваемой выше математической модели плотность ρ считается постоянной величиной. При этом движение парашюта не зависит от его высоты над землей. Другими словами, координата y центра масс C является *циклической* переменной. Поэтому горизонтальное неуправляемое (при $T = T_* = \text{const}$) движение аппарата безразлично к координате y и, тем самым, не является асимптотически устойчивым по отношению к высоте полета.

3. Управление высотой полета

Устойчивость полета парашюта на желаемой высоте можно обеспечить, управляя тягой двигателя. Управление тягой, стабилизирующее полет аппарата на заданной высоте, построим в виде обратной связи по отклонению высоты h полета гондолы G от желаемой (заданной) и по углу вектора ско-

рости θ :

$$T = T_s - k_h(h - h_d) - k_\theta\theta. \quad (3.1)$$

Здесь T_x — заданное постоянное значение тяги, равное величине T_* , или близкое к ней,

$$h = y - l_1 \cos \vartheta, \quad (3.2)$$

h_d — желаемая высота полета гондолы G над землей, k_h , k_θ — постоянные коэффициенты обратной связи. Коэффициент k_h должен быть положительным, что вытекает из физических соображений. Действительно, если высота полета превосходит желаемую, то тягу следует уменьшить, если же высота полета меньше желаемой, то тягу следует увеличить. Приведенные ниже численные исследования, при которых построены области асимптотической устойчивости, подтверждают указанный вывод. Заметим, что, как следует из второго соотношения (1.7), при малых значениях угла θ производная высоты y центра масс аппарата C над землей (скорость подъема)

$$\dot{y} \approx V\theta,$$

т.е. пропорциональна углу вектора скорости θ . Таким образом, последнее слагаемое в законе управления (3.1) при малых значениях угла θ пропорционально вертикальной составляющей \dot{y} скорости центра масс C .

При управлении (3.1) система (1.4)–(1.7), (3.2) имеет стационарный режим движения

$$\begin{aligned} V &\equiv \text{const}, & \theta &\equiv \text{const}, \\ \vartheta &\equiv \text{const}, & \omega &\equiv 0, \\ y &\equiv \text{const}, & h &\equiv \text{const}, \\ T &\equiv \text{const}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Значения ϑ , T и V определяются последовательно соотношениями (2.8), (2.9) и (2.5). При горизонтальном полете стационарное значение тяги равно T .

Как вытекает из равенства (3.1), при этом стационарное значение высоты полета гондолы h определяется соотношением

$$h = h_d + \frac{1}{k_h}(T_s - T_*). \quad (3.4)$$

Из выражения (3.4) следует, что ошибка

$$\Delta h = |h - h_d|$$

в отслеживании заданного значения высоты h_d тем меньше, чем ближе к нулю разность $|T_s - T_*|$ и (или) чем больше коэффициент обратной связи по высоте k_h . Из теории регулирования [6] известно, однако, что, если коэффициент k_h ($k_h > 0$) обратной связи по положению выбрать слишком большим, то стационарный режим (3.3) может стать неустойчивым.

Из рассмотрения построенных ниже областей устойчивости также вытекает это утверждение. Ошибка

$$\Delta h = |h - h_d| = 0,$$

если и только если $T_s = T_*$. Если $T_s > T_*$, то, как следует из выражения (3.4), высота h полета парaplана в стационарном режиме больше заданной h_d , эта высота h меньше заданной h_d , если $T_s < T_*$.

Заметим, что, поскольку характеристики аппарата известны всегда лишь приближенно, то и величина тяги T_* , при которой аппарат летит горизонтально, может быть найдена лишь приближенно. Поэтому величину T_s в

законе управления (3.1) невозможно задать в точности равной значению, при котором парашютист летит горизонтально.

Пользуясь уравнениями (1.4)–(1.6), вторым из кинематических уравнений (1.7), а также соотношениями (3.1), (3.2), можно выписать уравнения в вариациях относительно стационарного режима движения (3.3). Система уравнений в вариациях имеет пятый порядок. В её состав входят уравнения в вариациях, используемые для анализа устойчивости стационарного режима горизонтального полета в отсутствие обратной связи (3.1) — при

$$T = T_* = \text{const}.$$

Эта система из-за ее громоздкости здесь не приведена.

При помощи уравнений в вариациях можно исследовать устойчивость стационарного режима движения парашютиста по отношению к пяти переменным V , ω , ϑ , θ и h . На рис. 3 показана область асимптотической устойчивости по отношению к этим переменным, построенная численно при помощи уравнений в вариациях в плоскости коэффициентов обратной связи k_h , k_θ . Из рассмотрения этого рисунка следует, в частности, что величина k_h , будучи положительной, ограничена сверху при каждом значении коэффициента k_θ .

На этом же рисунке показаны границы областей с заданным запасом устойчивости 0,1, 0,2 и 0,3. Это области, в которых все собственные значения системы λ_i ($i = 1, \dots, 5$) отстоят от мнимой оси влево минимум на 0,1, 0,2 либо 0,3. С увеличением желаемого значения запаса устойчивости соответствующая область, естественно, уменьшается.

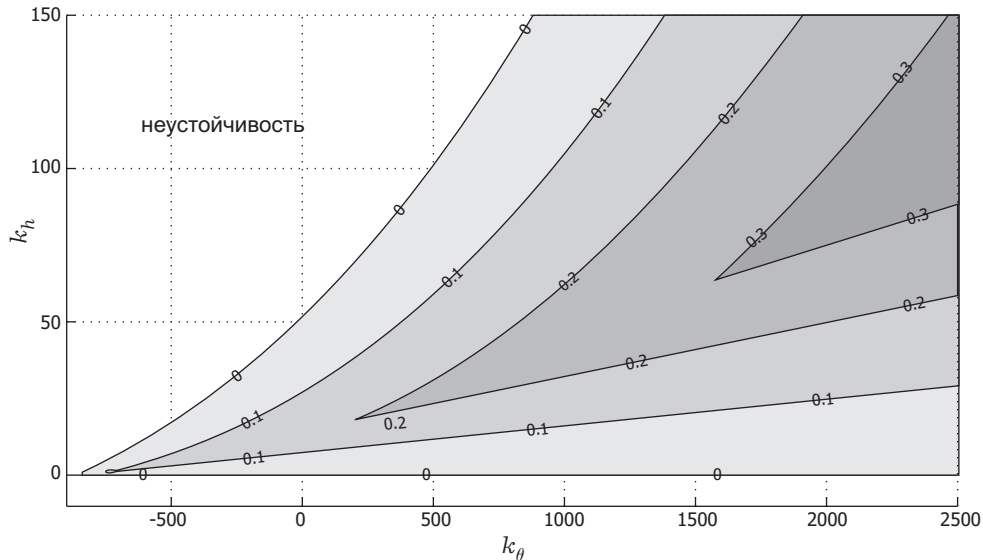


Рис. 3. Области асимптотической устойчивости и устойчивости с запасом 0,1, 0,2 либо 0,3, построенные в плоскости коэффициентов k_h , k_θ

В законе управления (3.1) не учитывается возможное запаздывание при поступлении в контур управления информации о текущей высоте h аппарата и (или) об угле вектора скорости θ . На рис. 4 приведена область асимптотической устойчивости, построенная в плоскости коэффициентов k_h , k_θ с учетом

запаздывания 0,5 сек при поступлении информации о текущей высоте h , а также для сравнения приведена область устойчивости, построенная на рис. 3 без учета какого-либо запаздывания. Запаздывание моделируется аperiодическим звеном.

Сопоставление построенных областей показывает, что запаздывание сужает область устойчивости. При этом ограничение сверху на коэффициент k_h становится более жестким. Уменьшение области устойчивости при учете запаздывания представляется естественным, поскольку запаздывание является обычно дестабилизирующим фактором.

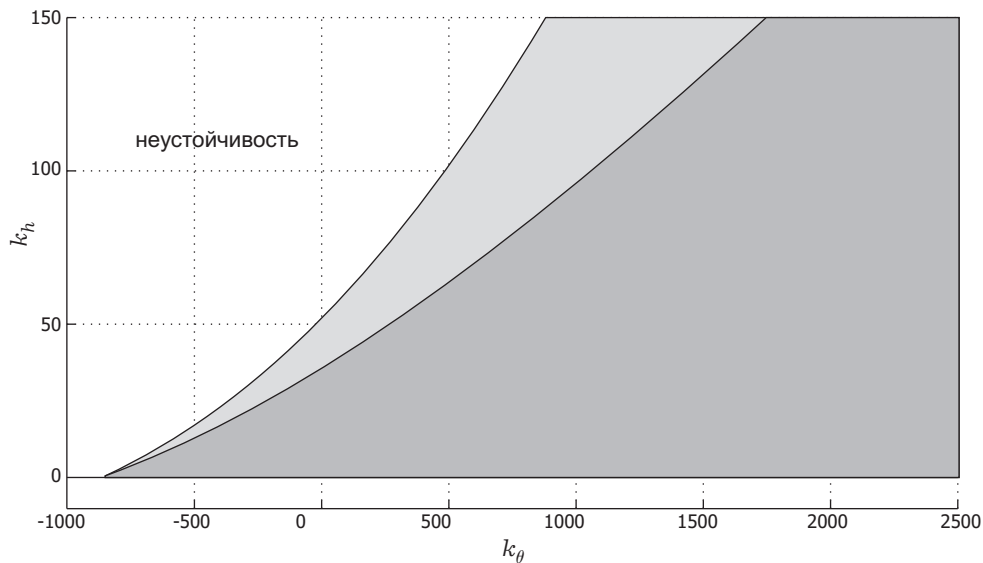


Рис. 4. Область асимптотической устойчивости без учета запаздывания и расположенная внутри нее область устойчивости (темная) с учетом запаздывания

Возможные значения тяги T ограничены сверху некоторой величиной T_m , кроме того, тяга не может быть отрицательной. Поэтому вместо “чисто” линейной обратной связи (3.1) следует рассматривать линейную обратную связь с насыщением вида

$$T = \begin{cases} T_m & \text{при } T_s - k_h(h - h_d) - k_\theta \geq T_m, \\ T_s - k_h(h - h_d) - k_\theta & \text{при } 0 \leq T_s - k_h(h - h_d) - k_\theta \leq T_m, \\ 0 & \text{при } T_s - k_h(h - h_d) - k_\theta \leq 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Составленная в среде “MATLAB” программа решения системы уравнений (1.4)–(1.7) позволяет исследовать режимы движения парашюта с управлением в виде обратной связи (3.5). Численные исследования проводились при указанных выше гипотетических значениях параметров аппарата.

На рис. 5 показаны графики изменения во времени скорости аппарата V , углов вектора скорости θ и тангажа ϑ , высоты h гондолы над землей, тяги, а также приведенного угла атаки

$$\alpha = \vartheta - \theta + \beta_A + \sigma$$

при управлении (3.5).

На участке разгона гондола движется по земле: $h(t) \equiv 0$. Затем она отрывается от земли — парашютист взлетает. Скорость движения парашютиста V , как следует из рассмотрения рисунка, сначала растёт, затем после нескольких колебаний “приходит” (асимптотически) к постоянному значению. Углы вектора скорости θ и тангажа ϑ после всплеска в начале движения и некоторого числа колебаний приходят (асимптотически) к своим стационарным значениям. Угол вектора скорости θ приходит к нулю. После взлета высота гондолы над землей h монотонно возрастает и “выходит” на постоянное значение 22 м. Однако, скорость набора высоты \dot{h} , угол вектора скорости θ и угол тангажа ϑ изменяются немонотонно.

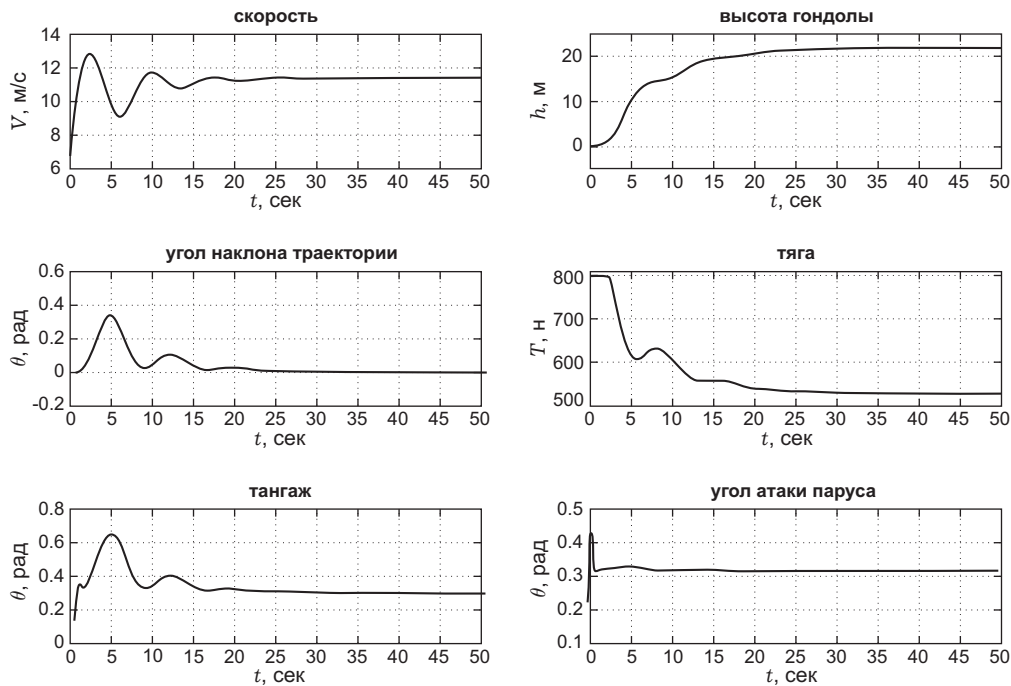


Рис. 5. Взлет парашютиста и полет на постоянной высоте

Как следует из рассмотрения рис. 5, во время взлета парашютист набирает высоту то быстрее, то медленнее. Эти колебания скорости набора высоты \dot{h} связаны с изменением подъемной силы аппарата, что обусловлено его колебаниями по тангажу. Колебания парашютиста по углу тангажа в процессе взлета напоминают колебания физического маятника, подвешенного в точке A , вокруг нижнего положения равновесия. Тяга T в начале движения принимает максимально возможное значение T_m , а затем после нескольких колебаний приходит к своему стационарному значению T_* .

Приведенный угол атаки после всплеска на участке разгона парашютиста “быстро” приближается к своему стационарному значению. Парашютист в стационарном режиме летит на постоянной высоте $h = 22$ м, в то время как в управлении (3.5) задана желаемая высота полета $h_d = 20$ м. Таким образом, статическая ошибка Δh составляет 2 м. Её можно уменьшить, увеличив коэффициент k_h . Нельзя забывать, однако, что с увеличением этого

коэффициента переходный процесс может стать колебательным и даже неустойчивым; подавить колебательность или неустойчивость можно, увеличив коэффициент k_θ .

Составленная в среде “MATLAB” программа позволяет путем анимации изучать движение парашюта по земле перед взлетом и последующий его полет над землей. На рис. 6 приведен один кадр из анимационного фильма, на котором запечатлен парашют, летящий (в стационарном режиме) над землей, на высоте 3 м. слева направо. Земля показана в виде отрезка прямой линии в нижней части рисунка. Этот кадр помогает лучше понять динамику полета. Из рассмотрения рисунка видно, что гондола, несколько “опережает” парус. Сила тяги, приложенная к гондоле, преодолевает приложенную к ней силу лобового сопротивления. При помощи строп гондола тянет за собой парус вперед. Парус несколько “отстает” от гондолы из-за силы лобового сопротивления, приложенной к нему. При этом парашют вместе с парусом оказывается повернутым в вертикальной (продольной) плоскости на некоторый угол против часовой стрелки.

При таком развороте возникает угол атаки паруса и, следовательно, подъемная сила, которая поднимает парус. Через стропы эта сила прикладывается также и к гондоле, удерживая её в воздухе.

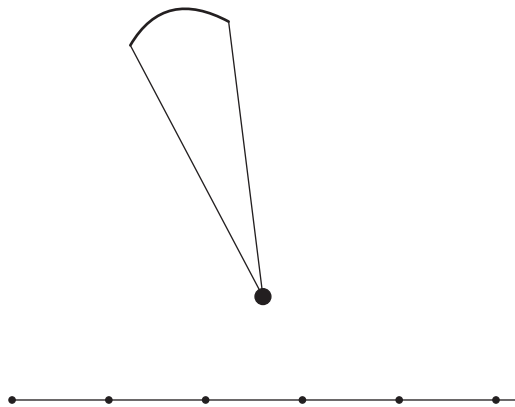


Рис. 6. Кадр из анимационного фильма

Построенная выше математическая модель неприменима для описания движения аппарата по земле при срагивании его с места. Моделирование показывает также, что при малой начальной скорости $V(0)$ парашюта приведенный угол атаки

$$\alpha = \vartheta - \theta + \beta_A + \sigma$$

в начале движения принимает “большие” значения, при которых линеаризация коэффициента подъемной силы C_y по углу атаки ($C_y = C_y^\alpha \alpha$) некорректна.

Таким образом, построенная математическая модель корректна, начиная с момента, когда парашют уже набрал достаточно большую скорость и, кроме того, при дальнейшем движении по земле не совершает больших колебаний по тангажу. Полет парашюта на заданной высоте удается стабилизировать не только при помощи управления (3.5), но также при помощи

обратной связи по высоте h и ее производной \dot{h} :

$$T = \begin{cases} T_m & \text{при } T_s - k_h(h - h_d) - k_h\dot{h} \geq T_m, \\ T_s - k_h(h - h_d) - k_h\dot{h} & \text{при } 0 \leq T_s - k_h(h - h_d) - k_h\dot{h} \leq T_m, \\ 0 & \text{при } T_s - k_h(h - h_d) - k_h\dot{h} \leq 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) описывает обратную связь по положению и его производной, что соответствует так называемому ПД-регулятору. Для реализации закона управления (3.6) необходимо измерять как высоту гондолы над землей (при помощи альтиметра), так и скорость изменения этой высоты. Заметим, что, как следует из выражений (1.7), (3.2), при малых значениях углов θ , ϑ и угловой скорости ω величина \dot{h} пропорциональна углу θ . Тем самым, законы управления (3.5) и (3.6) близки. С точностью до величин второго порядка малости можно считать, что коэффициенты k_h и k_θ связаны друг с другом множителем

$$V : k_h \cong V k_\theta.$$

Отметим, что, задавая величину h_d в виде функции времени $h_d = h_d(t)$ или дальности $h_d = h_d(x)$, можно планировать траекторию взлета аппарата, маршевый режим, а также траекторию посадки.

Управление высотой полета самолета, ракеты осуществляется обычно при помощи аэродинамических или газодинамических рулей высоты. Управление же высотой полета параплана, как показано выше, можно эффективно осуществлять, регулируя тягу двигателя.

Такая возможность возникает благодаря тому, что сила тяги двигателя прикладывается к гондоле, в то время как подъемная сила прикладывается к парусу, расположенному выше гондолы. Изменяя силу тяги двигателя, можно изменять угол тангажа и след за этим подъемную силу паруса, а значит и высоту полета параплана.

4. Заключение

В работе составлена математическая модель параплана в его продольном движении. Найдены стационарные режимы движения аппарата при постоянной величине тяги, развиваемой установленным на гондоле двигателем, и изучен вопрос об их устойчивости.

В виде обратной связи построен закон управления тягой, при котором стабилизируется полет аппарата на заданной высоте. В плоскости коэффициентов обратной связи построены области асимптотической устойчивости движения параплана на постоянной высоте.

Приведены результаты численного моделирования полета аппарата.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 07-01-92167-НЦНИ-а, 09-01-00593-а, 10-07-00619-а).

Список литературы

1. Лохин В.М., Манько С.В., Романов М.П., Гарцев И.Б., Евстигнеев Д.В., Колядин К.С. Перспективные системы и комплексы на базе летательных аппаратов /dd Перспективные системы и задачи управления. Тематический выпуск. Известия ТРТУ, № 3.— Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2006.

2. Абраменко Г. В., Васильков Д. В., Воронько О. В. Проектирование сложных наукоемких технических систем / Под ред. А. И. Григорьева.—М.: РФФИ, 2006.
3. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов.—М.: Машиностроение, 1973.
4. Горлин С. М. Экспериментальная аэромеханика.—М.: Высшая школа, 1970.
5. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Динамика. Т. 2.—М.: Наука, 1979.
6. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление.—М.: Наука, 1992.