



издательство

# МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

Е.Ю. МИХАЙЛОВА  
Д.В. ТАРЛАКОВСКИЙ  
Г.В. ФЕДОТЕНКОВ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ  
УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Москва • 2018

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ**  
(национальный исследовательский университет)

---

**Е.Ю. МИХАЙЛОВА, Д.В. ТАРЛАКОВСКИЙ,  
Г.В. ФЕДОТЕНКОВ**

**ОБЩАЯ ТЕОРИЯ  
УПРУГИХ ОБЛОЧЕК**

Учебное пособие

Утверждено  
на заседании редсовета  
30 августа 2017 г.

Москва  
Издательство МАИ  
2018

УДК 53 (075)

**Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.** Общая теория упругих оболочек: Учебное пособие. — М.: Изд-во МАИ, 2018. — 112 с.: ил.

В пособии содержится теоретический материал по основам теории оболочек: геометрия и кинематика, уравнения совместности деформаций, динамика, уравнения движения, основные типы граничных условий. В приложение включены необходимые разделы дифференциальной геометрии, а также вывод некоторых.

Для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная механика», всех профилей бакалавриата и магистерских программ, а также учащихся механико-математических факультетов и аспирантов, занимающихся вопросами механики деформируемого тела.

Рецензенты:

кафедра «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин» МЭИ (зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. *И.В. Меркурьев*);  
д-р физ.-мат. наук *С.Г. Пиеничнов*

ISBN 978-5-4316-0485-0

© Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет), 2018

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В механике сплошных сред и теории упругости рассматриваются трехмерные тела, занимаемые сплошной средой. Получены уравнения движения (равновесия) и дана постановка начально-краевых (краевых) задач. В общем случае трехмерной области построить решение этих задач сложно. Поэтому в теории упругости конкретные решения даны лишь для частного вида таких областей (пространство, полупространство, шар и т.д.), либо рассмотрены двумерные (плоская задача, кручение, изгиб) или одномерные задачи.

Во многих практически важных случаях геометрическая область, занимаемая сплошной средой, характеризуется тем, что один из ее размеров много меньше двух других. Это обстоятельство может быть использовано для построения приближенных решений задач механики сплошной среды. Такой подход можно назвать *механикой твердого тела для двумерных областей*. Примером является изучаемая в сопротивлении материалов безмоментная теория оболочек. Вариантом *механики одномерных тел* являются стержни, также рассматриваемые в сопротивлении материалов. Механика твердого тела для двумерных областей, называемая теорией оболочек, рассматривается в пособии.

Теории оболочек посвящено большое количество монографий, статей и учебников (см., например, [1—7]). При этом в основном рассматривается классический вариант теории, не учитывающий сдвиговые деформации поперечного сечения и обжатие нормально-го волокна (оболочки Кирхгофа—Лява) и ее различные модификации. В данном пособии изложение строится с общих позиций, учитывающих указанные факторы. Из построенной модели классическая теория [1] вытекает как частный случай.

Авторы выражают благодарность доценту С.И. Жаворонку за участие в обсуждении материала пособия, позволившее улучшить его содержание.

# Глава 1. ГЕОМЕТРИЯ И КИНЕМАТИКА ОБОЛОЧЕК

## 1.1. Основные определения

*Теория оболочек* — раздел механики деформируемого твердого тела, изучающий напряженно-деформированное состояние тела, являющегося оболочкой или пластиной.

Далее везде будем рассматривать поверхности и кривые в трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$ .

**Определение 1.1.1.** Пусть  $\Pi$  — гладкая ориентированная поверхность (замкнутая или с краем  $\Gamma = \partial\Pi$ ),  $\mathbf{n}$  — единичный нормальный вектор к внешней стороне поверхности  $\Pi$ .

Через произвольную точку  $M \in \Pi$  проводим прямую с направляющим вектором  $\mathbf{n}$  и на ней откладываем точки  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 1.1.1) так, что

$$\overline{MM_1} = -h_1\mathbf{n}, \quad \overline{MM_2} = h_2\mathbf{n} \quad (h_1, h_2 \geq 0). \quad (1.1.1)$$

Совокупности точек  $M_1$  и  $M_2$  образуют соответственно поверхности  $\Pi_-$  и  $\Pi_+$ . Образованную движением вдоль кривой  $\Gamma$  отрезков  $M_1M_2$  линейчатую поверхность обозначаем  $\Pi_b$ . Если  $\Pi$  замкнутая, то  $\Pi_b = \emptyset$ .

Область  $G$ , ограниченная поверхностью

$$\partial G = \Pi_- \cup \Pi_+ \cup \Pi_b, \quad (1.1.2)$$

называется *оболочкой*. То же наименование сохраняется за областью  $G$ , заполненной сплошной средой. При этом совокупность точек на отрезке  $M_1M_2$  называется *нормальным волокном*.

Поверхности  $\Pi$ ,  $\Pi_+$ ,  $\Pi_-$  и  $\Pi_b$  называются *координатной (основной)*, *внешней*, *внутренней* и *боковой (краем, границей) поверхностями*, а величина

$$h = h_2 + h_1 \quad (1.1.3)$$

— толщиной оболочки. При  $h_2 = h_1 = h/2$  поверхность  $\Pi$  — срединная.

Если толщина зависит от точки  $M$ , то  $G$  — оболочка переменной толщины, в противном случае ( $h = \text{const}$ )  $G$  — оболочка постоянной толщины.

Если  $\Pi$  — плоскость, то  $G$  называется пластиной. ■

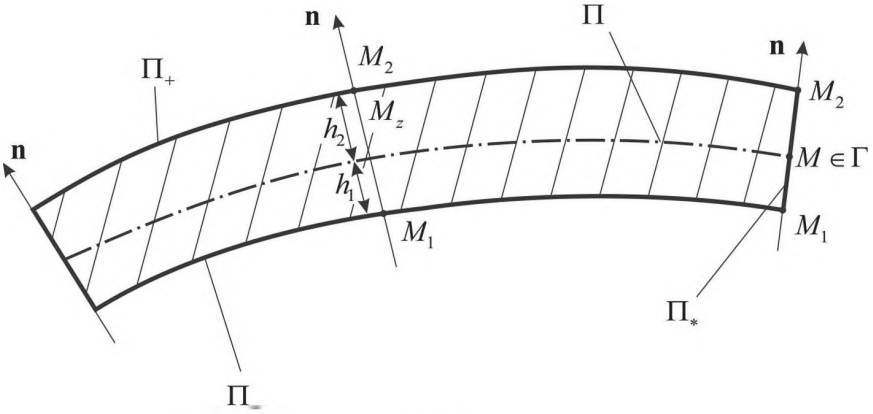


Рис. 1.1.1

**Определение 1.1.2.** Пусть поверхность  $\Pi$  ограниченная (не содержит бесконечно удаленных точек). Диаметр поверхности  $\Pi$  называется число  $d$ , задаваемое так:

а) если  $\Pi$  имеет край  $\Gamma = \partial\Pi$ , то

$$d = \sup_{A, B \in \Gamma} \rho_{\Pi}(A, B), \quad \rho_{\Pi}(A, B) = \inf_{AB \subset \Pi} |\widehat{AB}|; \quad (1.1.4)$$

б) если  $\Pi$  замкнутая, то

$$d = \sup_{A, B \in \Pi} \rho(A, B), \quad (1.1.5)$$

где  $\rho(A, B)$  — расстояние в смысле евклидова пространства.

Характерным размером поверхности  $\Pi$  называется следующее число

$$\lambda = \min(d, R_{1m}, R_{2m}), \quad (1.1.6)$$

где  $R_{km} = \inf_{M \in \Pi} R_k(M)$  ( $k=1,2$ );  $R_k(M)$  — главные радиусы кривизны поверхности  $\Pi$  в точке  $M$ . ■

Очевидно, для пластины (см. пример П.6.1)  $\Gamma$  — плоская кривая,  $\lambda = d = \sup_{A,B \in \Gamma} \rho(A,B)$ .

**Определение 1.1.3.** Оболочка называется *тонкой*, если

$$\frac{h_m}{\lambda} = \delta \ll 1, \quad (1.1.7)$$

где  $\lambda$  — характерный размер ее координатной поверхности;  $h_m = \sup_{M \in \Pi} h(M)$  — максимальная толщина. ■

Параметр  $\delta$  и характеризует малость «третьего» размера тела  $G$ , что позволяет строить приближенные теории (приближенные решения). От его величины зависит их точность. Некоторые оценки позволяют положить  $\delta \leq 1/20$ .

Рассматриваются также оболочки с кусочно-гладкой координатной поверхностью:  $\Pi = \bigcup_{k=1}^N \Pi_k$ ,  $\Pi_k \in C^1$ , где площадь пересечения ее составляющих равна нулю. Пересечение  $\Pi_k \cap \Pi_{k+1}$  составляющих  $\Pi$  поверхностей схематично изображено на рис. 1.1.2 (здесь  $\mathbf{n}_k$  и  $\mathbf{n}_{k-1}$  единичные нормальные векторы к гладким поверхностям  $\Pi_k$  и  $\Pi_{k+1}$ ). В этом случае внешняя и внутренняя поверхности оболочки нуждаются в доопределении (пунктирные линии). В заштрихованных зонах необходимо рассматривать трехмерные теории. Однако для тонких оболочек этими участками обычно пренебрегают.

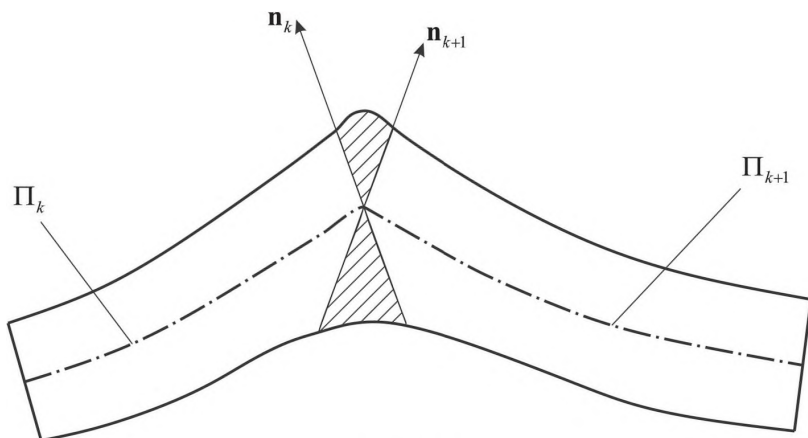


Рис. 1.1.2

## 1.2. Метрические соотношения

В дальнейшем понадобятся метрические свойства границы (1.1.2) оболочки  $G$ .

Будем везде полагать, что оболочка тонкая постоянной толщины  $h$ , а ее координатная поверхность  $\Pi$  является срединной. Эту поверхность будем задавать следующим образом (см. (П.6.3)):

$$\Pi: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2), \quad (\xi^1, \xi^2) \in D \subset R^2. \quad (1.2.1)$$

При этом ее граница  $\Gamma = \partial\Pi$  (если она есть) определяется так:

$$\Gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2), \quad (\xi^1, \xi^2) \in \partial D. \quad (1.2.2)$$

Тогда внешняя, внутренняя и боковая поверхности описываются соотношениями

$$\Pi_{\pm}: \mathbf{r} = \mathbf{r}_{\pm}(\xi^1, \xi^2) = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2) \pm \frac{h}{2} \mathbf{n}, \quad (\xi^1, \xi^2) \in D, \quad (1.2.3)$$

$$\Pi_b: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2) + z\mathbf{n}, \quad (\xi^1, \xi^2) \in \partial D, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}. \quad (1.2.4)$$



Базис касательного к срединной поверхности пространства (касательной плоскости)  $P = d\Pi$  находится следующим образом (см. (П.6.4)):

$$\mathfrak{e}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^j}. \quad (1.2.5)$$

**Замечание 1.2.1.** Здесь и в последующем изложении полагается, что латинские индексы принимают значения 1 и 2, а также используется мнемоническое правило суммирования по ним. При этом по греческим индексам суммирование не ведется. ■

В занимаемой оболочкой геометрической области  $G \subset R^3$  вводим связанные с (1.2.1) криволинейные координаты  $\xi^1, \xi^2, z$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2) + z \mathbf{n}(\xi^1, \xi^2), \quad (\xi^1, \xi^2) \in D, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}. \quad (1.2.6)$$

Отметим, что  $z$  отсчитывается в направлении нормального вектора  $\mathbf{n}$ , а  $z = 0$  соответствует срединной поверхности (см. рис. 1.1.1).

Пространственный базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  согласно (1.2.5) и (1.2.6) находится так:

$$\mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^j} = \mathfrak{e}_j + z \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^j}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{n}. \quad (1.2.7)$$

Использование второго соотношения из (П.7.1) позволяет записать первые равенства в (1.2.7) так:

$$\mathbf{e}_j = q_j^i \mathfrak{e}_i, \quad q_j^i = \delta_j^i - z b_j^i, \quad (1.2.8)$$

где  $\delta_j^i$  — символ Кронекера;  $b_j^i$  — компоненты тензора кривизны срединной поверхности.

Отметим, что для этих векторов имеют место равенства

$$\mathbf{e}_i \Big|_{z=0} = \mathfrak{e}_i. \quad (1.2.9)$$

Векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  наряду с  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$  можно рассматривать как еще один базис пространства  $P = d\Pi$ . При этом из (1.2.7) вытекает матричный вид их связи:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) \mathbf{Q}, \quad (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \mathbf{P}, \\ \mathbf{Q} &= (q_j^i)_{2 \times 2} = \mathbf{E} - z \underline{\mathbf{B}}, \quad \underline{\mathbf{B}} = (b_j^i), \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = (p_j^i)_{2 \times 2}, \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

где  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  — матрицы перехода.

Вычисляя с помощью (П.6.21) определитель матрицы  $\mathbf{Q}$  ( $K$  и  $H$  — полная и средняя кривизны срединной поверхности)

$$\det \mathbf{Q} = z^2 \det (\underline{\mathbf{B}} - z^{-1} \mathbf{E}) = z^2 (z^{-2} - 2Hz^{-1} + K) = 1 - 2Hz + Kz^2, \quad (1.2.11)$$

находим элементы матрицы  $\mathbf{P}$  (вывод приведен только для одного из них):

$$\begin{aligned} p_1^1 &= \frac{1 - zb_2^2}{1 - 2Hz + Kz^2} = (1 - zb_2^2) [1 + 2Hz + O(z^2)] = 1 + zb_1^1 + O(z^2), \\ p_2^2 &= 1 + zb_1^1 + O(z^2), \quad p_2^1 = zb_2^1 + O(z^2), \quad p_1^2 = zb_1^2 + O(z^2), \quad z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что согласно (П.6.22) имеет место равенство  $2H = b_1^1 + b_2^2$ .

Следовательно, эта матрица имеет следующий вид:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} + z \underline{\mathbf{B}}, \quad p_j^i = \delta_j^i + zb_j^i. \quad (1.2.12)$$

**Замечание 1.2.2.** Здесь и далее, если не оговорено противное, с использованием малости  $z$  отбрасываются слагаемые порядка  $O(z^2)$  при  $z \rightarrow 0$ , а приближенные равенства заменяются точными. Аналогичное соглашение принимается для соотношений, включающих толщину оболочки  $h$ . ■

Перейдем к построению фундаментальных матриц. В случае пространственного базиса (1.2.7) в соответствии с (1.2.8) соответствующая матрица  $\bar{\mathbf{G}}$  имеет вид (здесь равенства точные):

$$\bar{\mathbf{G}} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{G}_2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right), \quad \mathbf{G}_2 = (\tilde{g}_{ij})_{2 \times 2} = \mathbf{Q}^T \mathbf{G} \mathbf{Q}, \quad \mathbf{G} = (g_{ij})_{2 \times 2}, \quad (1.2.13)$$

$$\tilde{g}_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = q_i^k q_j^l g_{kl} = g_{ij} - 2b_{ij}z + c_{ij}z^2, \quad g_{kl} = (\mathfrak{e}_k, \mathfrak{e}_l),$$

где  $\mathbf{G}$  — фундаментальная матрица срединной поверхности, а компоненты  $c_{ij}$  симметричного тензора второго ранга определены в (П.7.24).

Из (1.2.11) с учетом (1.2.10) получаем следующую связь инвариантов (здесь равенства точные):

$$\bar{g} = \det \bar{\mathbf{G}} = \det \mathbf{G}_2 = g \det^2 \mathbf{Q} = (1 - 2Hz + Kz^2)^2 g, \quad g = \det \mathbf{G}. \quad (1.2.14)$$

Контравариантные компоненты метрического тензора в пространственном базисе (1.2.7) определяются так:

$$\bar{\mathbf{G}}^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{G}_2^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right), \quad \mathbf{G}_2^{-1} = (\tilde{g}^{ij})_{2 \times 2}, \quad \tilde{g}^{ij} = g^{ij} + 2z b^{ij}. \quad (1.2.15)$$

Эти равенства получены с учетом (1.2.7), (1.2.13) и (1.2.14) так (вывод приведен только для одной компоненты):

$$\begin{aligned} \bar{g}^{11} &= \frac{\tilde{g}_{22}}{\det \mathbf{G}_2} = \frac{g_{22} - 2b_{22}z}{\det \mathbf{G}_2} = \frac{1}{g} (g_{22} - 2b_{22}z)(1 + 4Hz) = \\ &= \frac{1}{g} [g_{22} + 2z(2Hg_{22} - b_{22})] = g^{11} + \frac{2z}{g} [(b_1^1 + b_2^2)g_{22} - (b_2^1 g_{12} + b_1^2 g_{22})] = \\ &= g^{11} + 2z(b_1^1 g^{11} + b_2^1 g^{12}) = g^{11} + 2zb^{11}. \end{aligned}$$

Для внешней и внутренней поверхностей оболочки в соответствии с (1.2.3) в предыдущих формулах необходимо положить  $z = \pm h/2$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{\pm i} &= \mathbf{e}_i \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}}, \quad \mathbf{g}_{\pm ij} = (\mathfrak{a}_{\pm i}, \mathfrak{a}_{\pm j}) = \bar{g}_{ij} \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}}, \\ g_{\pm} = \det \mathbf{G}_{\pm} &= g \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}} = (1 \mp Hh + K h^2/4)^2 g, \quad \mathbf{G}_{\pm} = (g_{\pm ij})_{2 \times 2}, \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

где  $\mathfrak{a}_{\pm i}$  и  $\mathbf{G}_{\pm}$  — базис и фундаментальная матрица поверхностей  $\Pi_{\pm}$ ;  $g_{\pm}$  — инварианты соответствующих метрических тензоров.

Рассмотрим теперь боковую поверхность (1.2.4). Положим, что граница срединной поверхности (1.2.2) задана в виде (П.5.2):

$$\begin{aligned} \Gamma: \mathbf{r} &= \mathbf{r}_{\Gamma}(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \\ \mathbf{r}_{\Gamma}(t) &= \mathbf{r}_0(\xi^1(t), \xi^2(t)), \quad (\xi^1(t), \xi^2(t)) \in \partial D. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Тогда боковую поверхность можно задать так:

$$\begin{aligned} \Pi_b: \mathbf{r} &= \mathbf{r}_b(t, z) = \mathbf{r}_{\Gamma}(t) + z \mathfrak{n}(\xi^1(t), \xi^2(t)), \\ (\xi^1(t), \xi^2(t)) &\in \partial D, \quad t \in D_t = [\alpha, \beta], \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}. \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Отсюда, с учетом (1.2.5), (1.2.7) и (1.2.13), находим формулы для ее базисных векторов  $\mathfrak{a}_{b1}, \mathfrak{a}_{b2}$ , компонентов метрического тензора и его инварианта:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{b1} &= \dot{\mathbf{r}}_b = \mathbf{e}_i \dot{\xi}^i, \quad \mathfrak{a}_{b2} = \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial z} = \mathbf{n}, \\ g_{b11} &= (\mathfrak{a}_{b1}, \mathfrak{a}_{b1}) = \bar{g}_{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j = (g_{ij} - 2b_{ij}z) \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j, \\ g_{b12} &= (\mathfrak{a}_{b1}, \mathbf{n}) = 0, \quad g_{b22} = (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1, \quad g_b = \det(g_{bij}) = g_{b11}. \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

Далее с использованием полученных выше результатов рассмотрим вопрос о параллельном переносе (см. раздел П.2) тензоров вдоль волокна из точки  $M_z(\xi^1, \xi^2, z)$  в точку  $M(\xi^1, \xi^2, 0)$  на срединной поверхности. Как показано в примере П.2.1, в используемом здесь пространстве  $R^3$  при параллельном переносе тензоры не меняются. Поэтому задача сводится только к переходу от базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$  к базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ . При этом первые пары векторов связаны между собой соотношениями (1.2.10), а третий вектор не меняется.

Таким образом, для вектора  $\mathbf{u}$  и тензора второго ранга  $\mathbf{d}$  справедливы равенства [8]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \hat{u}^i \mathbf{e}_i + \hat{u}^3 \mathbf{n} = \bar{u}_i \mathbf{e}^i + \bar{u}_3 \mathbf{n} = \hat{u}^J \mathbf{e}_J + \hat{u}^3 \mathbf{n} = \hat{u}_j \mathbf{e}^j + \hat{u}_3 \mathbf{n}, \\ \mathbf{d} &= \bar{d}^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \bar{d}^{i3} \mathbf{e}_i \mathbf{n} + \bar{d}^{3j} \mathbf{n} \mathbf{e}_j + \bar{d}^{33} \mathbf{n} \mathbf{n} = \bar{d}_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j + \bar{d}_{i3} \mathbf{e}^i \mathbf{n} + \bar{d}_{3j} \mathbf{n} \mathbf{e}^j + \bar{d}_{33} \mathbf{n} \mathbf{n} = \\ &= \hat{d}^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \hat{d}^{i3} \mathbf{e}_i \mathbf{n} + \hat{d}^{3j} \mathbf{n} \mathbf{e}_j + \hat{d}^{33} \mathbf{n} \mathbf{n} = \hat{d}_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j + \hat{d}_{i3} \mathbf{e}^i \mathbf{n} + \hat{d}_{3j} \mathbf{n} \mathbf{e}^j + \hat{d}_{33} \mathbf{n} \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Здесь  $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{n}$  и  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$  — соответствующие контравариантные базисы, связь которых с ковариантными базисами вытекает из (1.2.13) и (1.2.15) (отсюда же следует неизменность третьего вектора):

$$\mathbf{e}^i = \bar{g}^{ij} \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_i = \bar{g}_{ij} \mathbf{e}^j. \quad (1.2.21)$$

Ковариантные компоненты вектора и тензора в (1.2.20) связаны между собой с помощью элементов матриц перехода в (1.2.10):

$$\hat{u}_j = q^i_j \hat{u}_i = \hat{u}_j - z b^i_j \hat{u}_i, \quad \hat{u}^3 = \hat{u}^3 = \bar{u}_3 = \hat{u}_3 = u_3, \quad (1.2.22)$$

$$\begin{aligned} \hat{d}_{kl} &= p^i_k p^j_l \bar{d}_{ij} = \bar{d}_{kl} + z (b^i_k \bar{d}_{il} + b^j_l \bar{d}_{kj}), \\ \hat{d}_{k3} &= p^i_k \bar{d}_{i3} = \bar{d}_{k3} + z b^i_k \bar{d}_{i3}, \quad \hat{d}_{3k} = p^i_k \bar{d}_{3i} = \bar{d}_{3k} + z b^i_k \bar{d}_{3i}, \quad \hat{d}_{33} = \bar{d}_{33} = d_{33}. \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

Здесь учтен вид фундаментальных матриц в (1.2.13) и (1.2.15), а также формулы (1.2.7) и (1.2.12).

Отметим также, что фундаментальная матрица пространственного базиса  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathbf{n}$  согласно (1.2.13) имеет вид

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & | & 0 \\ \hline 0 & | & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.2.24)$$

откуда вытекают следующие равенства:

$$g_{13} = g_{23} = g^{13} = g^{23} = 0, \quad g_{33} = g^{33} = 1. \quad (1.2.25)$$

### 1.3. Деформированное состояние оболочки

В соответствии с (1.2.20) представим вектор перемещения точек оболочки так:

$$\mathbf{u} = \hat{u}^i \mathbf{e}_i + u_3 \mathbf{n} = \bar{u}_i \mathbf{e}^i + u_3 \mathbf{n} = \hat{u}^i \mathfrak{e}_j + u_3 \mathbf{n} = \hat{u}_j \mathfrak{e}^j + u_3 \mathbf{n}. \quad (1.3.1)$$

Компоненты тензора дисторсии в координатах  $\xi^1, \xi^2, z$  вычисляются так [9]:

$$\begin{aligned} \bar{d}_{ij} &= \bar{\nabla}_i \bar{u}_j = \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \xi^i} - \bar{\Gamma}_{ij}^k \bar{u}_k - \bar{\Gamma}_{ij}^3 u_3, \quad \bar{d}_{i3} = \bar{\nabla}_i u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \xi^i} - \bar{\Gamma}_{i3}^k \bar{u}_k - \bar{\Gamma}_{i3}^3 u_3, \\ \bar{d}_{3i} &= \bar{\nabla}_3 \bar{u}_i = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial z} - \bar{\Gamma}_{3i}^k \bar{u}_k - \bar{\Gamma}_{3i}^3 u_3, \quad \bar{d}_{33} = \bar{\nabla}_3 u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial z} - \bar{\Gamma}_{33}^k \bar{u}_k - \bar{\Gamma}_{33}^3 u_3, \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

где  $\bar{\Gamma}_{ij}^k, \bar{\Gamma}_{ij}^3, \bar{\Gamma}_{i3}^k = \bar{\Gamma}_{3i}^k, \bar{\Gamma}_{i3}^3 = \bar{\Gamma}_{3i}^3, \bar{\Gamma}_{33}^3$  — символы Кристоффеля второго рода.

Для дальнейшего будут необходимы компоненты этого тензора в базисе  $\mathfrak{e}^1, \mathfrak{e}^2, \mathbf{n}$ , связь которых с компонентами (1.3.2) дается формулами (1.2.23). Кроме того, необходимо выразить их через координаты вектора перемещения в базисе  $\mathfrak{e}^1, \mathfrak{e}^2, \mathbf{n}$  и ковариантные производные в пространстве  $P = d\Pi$ .

Для вычисления  $\bar{d}_{ij}, \bar{d}_{i3}, \bar{d}_{3i}, \bar{d}_{33}$  сначала, учитывая (1.2.13), а также уравнения Кодацци в (П.7.12) и второе равенство в (П.7.13), находим символы Кристоффеля первого рода:

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{ij,m} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{g}_{im}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \bar{g}_{jm}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial \xi^m} \right) = \Gamma_{ij,m} - z \left( \frac{\partial b_{im}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial b_{jm}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial b_{ij}}{\partial \xi^m} \right) = \\ &= \Gamma_{ij,m} - z \left( \nabla_j b_{im} + 2\Gamma_{ij}^k b_{km} \right),\end{aligned}\quad (1.3.3)$$

где  $\Gamma_{ij,m}, \Gamma_{ij}^k$  — символы Кристоффеля в пространстве  $P = d\Pi$ .

Остальные символы Кристоффеля первого рода в координатах  $\xi^1, \xi^2, z$  находятся аналогично с использованием (1.2.13):

$$\bar{\Gamma}_{ij,3} = b_{ij} - z c_{ij}, \quad \bar{\Gamma}_{i3,m} = -\bar{\Gamma}_{im,3}, \quad \bar{\Gamma}_{33,i} = \bar{\Gamma}_{i3,3} = \bar{\Gamma}_{33,3} = 0. \quad (1.3.4)$$

Символы Кристоффеля второго рода в координатах  $\xi^1, \xi^2, z$  находим с использованием (1.2.15) и уравнений Кодацци:

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{ij}^k &= \bar{g}^{km} \bar{\Gamma}_{ij,m} = (g^{km} + 2z b^{km}) \left[ \Gamma_{ij,m} - z \left( \nabla_j b_{im} + 2\Gamma_{ij}^l b_{lm} \right) \right] = \\ &= \Gamma_{ij}^k - z \left( g^{km} \nabla_j b_{im} + 2\Gamma_{ij}^l b_i^k - 2\Gamma_{ij,m} g^{ml} b_l^k \right) = \Gamma_{ij}^k - z \nabla_j b_i^k = \Gamma_{ij}^k - z \nabla_j b_j^k, \\ \bar{\Gamma}_{ij}^3 &= g^{33} \bar{\Gamma}_{ij,3} = b_{ij} - z c_{ij}, \quad \bar{\Gamma}_{i3}^3 = \bar{\Gamma}_{33}^k = \bar{\Gamma}_{33}^3 = 0, \\ \bar{\Gamma}_{i3}^k &= \bar{g}^{km} \bar{\Gamma}_{i3,m} = -(b_{im} - z c_{im}) (g^{km} + 2z b^{km}) = -b_i^k - z c_i^k.\end{aligned}\quad (1.3.5)$$

Подставляя теперь эти равенства в (1.3.2), с использованием (1.2.22) получаем следующий результат:

$$\begin{aligned}\bar{d}_{ij} &= \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\hat{u}_j - b_j^k \hat{u}_k z) - (\Gamma_{ij}^k - z \nabla_i b_j^k) (\hat{u}_k - b_k^l \hat{u}_l z) - (b_{ij} - z c_{ij}) u_3 = \\ &= \nabla_i \hat{u}_j - b_{ij} u_3 + z (c_{ij} u_3 - b_j^k \nabla_i \hat{u}_k),\end{aligned}$$

$$\bar{d}_{i3} = \frac{\partial u_3}{\partial \xi^i} + (b_i^k + z c_i^k)(\hat{u}_k - b_k^l \hat{u}_l z) = \frac{\partial u_3}{\partial \xi^i} + b_i^k \hat{u}_k, \quad (1.3.6)$$

$$\bar{d}_{3i} = \frac{\partial}{\partial z}(\hat{u}_i - b_i^k \hat{u}_k z) + (b_i^k + z c_i^k)(\hat{u}_k - b_k^l \hat{u}_l z) = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z} - z b_i^k \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial z}, \quad \bar{d}_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}.$$

Используя теперь эти равенства в (1.2.23), приходим к таким формулам для компонентов тензора дисторсии в базисе  $\mathfrak{e}^1, \mathfrak{e}^2, \mathbf{n}$ :

$$\begin{aligned} \hat{d}_{ij} &= \nabla_i \hat{u}_j - b_{ij} u_3 + z (b_i^k \nabla_k \hat{u}_j - c_{ij} u_3), \\ \hat{d}_{i3} &= \frac{\partial u_3}{\partial \xi^i} + b_i^k \hat{u}_k + z \left( b_i^k \frac{\partial u_3}{\partial \xi^k} + c_i^l \hat{u}_l \right), \quad \hat{d}_{3i} = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z}, \quad \hat{d}_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Далее с учетом малости толщины оболочки раскладываем  $\hat{u}_j$  и  $\hat{u}_3$  в степенные ряды по  $z$ :

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(\xi^1, \xi^2, z) &= u_i(\xi^1, \xi^2) + \Psi_i(\xi^1, \xi^2) z + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \Psi_{ij}(\xi^1, \xi^2) z^j, \\ u_3(\xi^1, \xi^2, z) &= w(\xi^1, \xi^2) + \Psi_3(\xi^1, \xi^2) z + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \Psi_{3j}(\xi^1, \xi^2) z^j, \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

где

$$\begin{aligned} u_i &= \hat{u}_i|_{z=0}, \quad w = u_3|_{z=0}, \quad \Psi_i = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z} \Big|_{z=0}, \\ \Psi_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad \Psi_{ij} = \frac{\partial^j \hat{u}_i}{\partial z^j} \Big|_{z=0}, \quad \Psi_{3j} = \frac{\partial^j u_3}{\partial z^j} \Big|_{z=0}. \end{aligned}$$

Далее принимаем обычно используемое в теории тонких оболочек допущение.

**Аксиома 1** (*гипотеза прямой нормали*). Нормальное к срединной поверхности в начальном состоянии прямолинейное материальное волокно остается прямолинейным в актуальном состоянии. ■



Отметим, что здесь, в отличие от вводимой в сопротивлении материалов гипотезы Бернулли, не требуется, чтобы волокно было нормальным к деформированной срединной поверхности.

Эта гипотеза проиллюстрирована на рис. 1.3.1, где времена  $t = t_0$  и  $t > t_0$  соответствуют начальному и актуальному (деформированному) состоянию,  $\Pi_*$  и  $\mathbf{n}_*$  — деформированная срединная поверхность оболочки и единичный нормальный вектор к ней. Поскольку время здесь является параметром, то в аргументах оно не указывается.

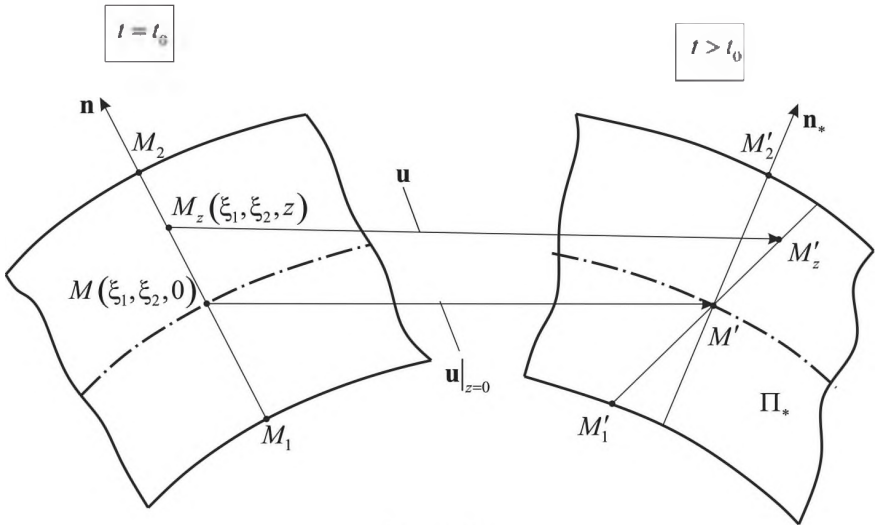


Рис. 1.3.1

При деформации нормальное волокно  $l_0 = M_1MM_2$  переходит в криволинейное волокно  $l = \overline{M'_1M'M'_2}$ . Гипотеза же полагает, что оно остается прямолинейным:

$$l = M'_1M'M'_2. \quad (1.3.9)$$

Для ее аналитической записи используем параметрические уравнения волокон:

$$l_0: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2) + \mathbf{n}z, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}; \quad (1.3.10)$$

$$l: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2) + \mathbf{n}z + \mathbf{u} = \mathbf{r}_*(\xi^1, \xi^2) + \mathbf{n}z + \Delta\mathbf{u},$$

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi^1, \xi^2, z) - \mathbf{u}(\xi^1, \xi^2, 0). \quad (1.3.11)$$

Здесь  $\mathbf{r}_*$  — вектор-функция, задающая деформированную срединную поверхность:

$$\Pi_*: \mathbf{r} = \mathbf{r}_*(\xi^1, \xi^2) = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2) + \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}|_{z=0}. \quad (1.3.12)$$

Необходимым и достаточным условием выполнения соотношения (1.3.9) является существование такого вектора  $\mathbf{m}(\xi^1, \xi^2)$ , чтобы последнее слагаемое в (1.3.11) имело следующий вид:

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{m}z. \quad (1.3.13)$$

Только это равенство гарантирует, что волокно  $l$  является прямым:

$$l: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{s}z, \quad \mathbf{s} = \mathbf{n} + \mathbf{m}. \quad (1.3.14)$$

Сравнивая (1.3.13) с (1.3.11), приходим к выводу, что в (1.3.8) следует положить

$$\psi_{ij} \equiv 0, \quad \psi_{3j} \equiv 0, \quad (1.3.15)$$

а вектор  $\mathbf{m}$  имеет вид

$$\mathbf{m} = \psi_i \mathfrak{E}^i + \psi_3 \mathbf{n}. \quad (1.3.16)$$

При этом соотношения (1.3.8) переходят в следующие равенства:

$$\hat{u}_i(\xi^1, \xi^2, z) = u_i(\xi^1, \xi^2) + \psi_i(\xi^1, \xi^2)z,$$

$$u_3(\xi^1, \xi^2, z) = w(\xi^1, \xi^2) + \psi_3(\xi^1, \xi^2)z. \quad (1.3.17)$$

Подставляя теперь (1.3.17) в формулы (1.3.7), приходим к следующему результату для компонент тензора дисторсии:

$$\hat{d}_{ij} = \alpha_{ij} + z\beta_{ij}, \quad \hat{d}_{i3} = -\vartheta_i + (b_i^k \theta_k + \nabla_i \psi_3)z, \quad \hat{d}_{3i} = \psi_i, \quad \hat{d}_{33} = \psi_3, \quad (1.3.18)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \nabla_i u_j - b_{ij} w, \quad -\vartheta_i = \frac{\partial w}{\partial \xi_i^2} + b_i^k u_k, \quad \theta_k = \psi_k - \vartheta_k, \\ \beta_{ij} &= \nabla_i \psi_j - b_{ij} \psi_3 + b_i^k \nabla_k u_j - c_{ij} w = \nabla_i \psi_j - b_{ij} \psi_3 + b_i^k \alpha_{kj}.\end{aligned}\tag{1.3.19}$$

Последние соотношения позволяют найти компоненты тензора деформаций в базисе  $\mathfrak{E}^1, \mathfrak{E}^2, \mathbf{n}$ :

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2}(\hat{d}_{ij} + \hat{d}_{ji}) = \varepsilon_{ij} + z\kappa_{ij}, \quad \hat{\varepsilon}_{33} = \hat{d}_{33} = \psi_3, \\ \hat{\varepsilon}_{i3} &= \frac{1}{2}(\hat{d}_{i3} + \hat{d}_{3i}) = \frac{1}{2}\theta_i + \frac{1}{2}z(b_i^k \theta_k + \nabla_i \psi_3),\end{aligned}\tag{1.3.20}$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{2}(\beta_{ij} + \beta_{ji}).$$

Таким образом, поле перемещений и деформированное состояние оболочки полностью определяется следующими кинематическими параметрами:  $u_1, u_2, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}$ .

#### 1.4. Механический смысл кинематических параметров

Для введенных равенствами (1.3.8) величин  $u_i$  и  $w$  из (1.2.20) следует, что они являются координатами вектора перемещения точек срединной поверхности:

$$\mathbf{u}_0 = u_i \mathfrak{E}^i + w \mathbf{n}.\tag{1.4.1}$$

При этом вектор  $u_i \mathfrak{E}^i$  определен на пространстве  $P = d\Pi$ . Поэтому используется следующая терминология.

**Определение 1.4.1.** Вектор  $u_i \mathfrak{E}^i$  (его координаты) и скаляр  $w$  называются *тангенциальным* и *нормальным перемещениями оболочки*. ■

Также на пространстве  $P = d\Pi$  определены векторные

$$\boldsymbol{\Psi} = \psi_i \mathfrak{E}^i, \quad \boldsymbol{\Theta} = \vartheta_i \mathfrak{E}^i, \quad \boldsymbol{\theta} = \theta_i \mathfrak{E}^i$$

и тензорные

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}^i \boldsymbol{\varepsilon}^j, \quad \boldsymbol{\kappa} = \kappa_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}^i \boldsymbol{\varepsilon}^j, \quad \boldsymbol{\alpha} = \alpha_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}^i \boldsymbol{\varepsilon}^j, \quad \boldsymbol{\beta} = \beta_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}^i \boldsymbol{\varepsilon}^j$$

поля.

Для выяснения их механического смысла рассмотрим деформированную срединную поверхность (1.3.12). Ее базисные векторы согласно (П.6.4) с учетом (1.2.9) и (1.3.18) вычисляются следующим образом [9]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{*i} = \frac{\partial \mathbf{r}_*}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \xi^i} = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \alpha_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}^j - \vartheta_i \mathbf{n}. \quad (1.4.2)$$

Здесь также использована вытекающая из (1.3.7) формула для производной вектора  $\mathbf{v} = v_k (\xi^1, \xi^2, z) \boldsymbol{\varepsilon}^k + v_3 (\xi^1, \xi^2, z) \mathbf{n}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi^i} &= \hat{\nabla}_i v_j \boldsymbol{\varepsilon}^j + \hat{\nabla}_i v_3 \mathbf{n}, \\ \hat{\nabla}_i v_j &= \nabla_i v_j - b_{ij} v_3 + z b_i^k (\nabla_k v_j - b_{jk} v_3), \\ \hat{\nabla}_i v_3 &= \nabla_i v_3 + b_i^k v_k + z b_i^k (\nabla_k v_3 + b_k^l v_l), \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

а именно ее частный случай при  $z = 0$ .

Компоненты метрического тензора этой поверхности находим по формулам (П.1.10) с учетом (1.3.20):

$$g_{*ij} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{*i} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{*j}) = g_{ij} + \alpha_{ij} + \alpha_{ji} = g_{ij} + 2\varepsilon_{ij}. \quad (1.4.4)$$

**Замечание 1.4.1.** Здесь и далее предполагается, что все кинематические параметры являются малыми и слагаемые второго порядка малости отбрасываются. ■

Из формулы (1.4.4) вытекает аналогичное механике сплошной среды равенство [9]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (g_{*ij} - g_{ij}), \quad (1.4.5)$$

т.е. тензор  $\varepsilon$  характеризует изменение метрики срединной поверхности П.

**Определение 1.4.2.** Тензор  $\varepsilon$  называется *тензором тангенциальных деформаций*. ■

Очевидно, этот тензор является симметричным.

Для определения коэффициентов второй квадратичной формы поверхности  $\Pi_*$ , используя (П.6.5) и (1.4.2), сначала находим нормальный вектор:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_* &= [\mathfrak{a}_{*1}, \mathfrak{a}_{*2}] = \\ &= \mathbf{N} + \alpha_{2l} [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}^l] - \vartheta_2 [\mathfrak{a}_1, \mathbf{n}] + \alpha_{1k} [\mathfrak{a}^k, \mathfrak{a}_2] - \vartheta_1 [\mathbf{n}, \mathfrak{a}_2]. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

В результате, учитывая (П.8.8) и (П.8.9), получаем следующее представление нормального вектора:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_* &= (\sqrt{g} + \alpha_{2l} g^{ml} \chi_{1m} - \alpha_{1l} g^{ml} \chi_{2m}) \mathbf{n} - \vartheta_2 \chi_{m1} \mathfrak{a}^m + \vartheta_1 \chi_{m2} \mathfrak{a}^m = \\ &= \sqrt{g} \left[ (1 + \alpha_{kl} g^{kl}) \mathbf{n} + \vartheta_i \mathfrak{a}^i \right] = \sqrt{g} \left[ (1 + I_{1\varepsilon}) \mathbf{n} + \vartheta_i \mathfrak{a}^i \right]. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Здесь учтено, что в соответствии с (1.3.20)  $\alpha_{kl} g^{kl} = I_{1\alpha} = I_{1\varepsilon} = \varepsilon_k^k$ , где  $I_{1\alpha}$  и  $I_{1\varepsilon}$  — первые инварианты тензоров  $\alpha$  и  $\varepsilon$ .

Соответствующий единичный вектор с учетом замечания 1.4.1 имеет следующий вид:

$$\mathbf{n}_* = \frac{\mathbf{N}_*}{|\mathbf{N}_*|} = \frac{(1 + I_{1\varepsilon}) \mathbf{n} + \vartheta_i \mathfrak{a}^i}{\sqrt{1 + 2I_{1\varepsilon}}} = \mathbf{n} + \vartheta_i \mathfrak{a}^i. \quad (1.4.8)$$

При вычислении его производных для первого слагаемого используются дериационные уравнения (П.7.1), а дифференцирование второго слагаемого проводится аналогично (1.4.2):

$$\frac{\partial \mathbf{n}_*}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^i} + \nabla_i \vartheta_j \mathfrak{a}^j + b_i^j \vartheta_j \mathbf{n} = (\nabla_i \vartheta_j - b_{ij}) \mathfrak{a}^j + b_i^j \vartheta_j \mathbf{n}. \quad (1.4.9)$$

Коэффициенты второй квадратичной формы находим по формуле (П.7.8), принимая во внимание (1.4.2), (1.4.9) и замечание 1.4.1:

$$-b_{\mu j} = (\nabla_j \vartheta_i - b_{\mu i}) - b_j^k \alpha_{ik}. \quad (1.4.10)$$

Отсюда с учетом симметрии тензора кривизны получаем следующее равенство:

$$b_{*ij} - b_{ij} = \frac{1}{2}(b_i^k \alpha_{jk} + b_j^k \alpha_{ik}) - \frac{1}{2}(\nabla_i \vartheta_j + \nabla_j \vartheta_i). \quad (1.4.11)$$

Пусть тангенциальные деформации отсутствуют ( $\varepsilon_{ij} = 0$ ), что в силу (1.3.20) эквивалентно равенству  $\alpha_{ij} = 0$ . Кроме того, положим, что  $\psi_3 = 0$  и  $\theta_k = 0$ , что согласно (1.3.18) эквивалентно равенству  $\vartheta_k = \Psi_k$  (смысл последних двух условий будет ясен из дальнейшего изложения). Тогда из (1.3.20) и (1.4.11) отсюда получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} b_{*ij} - b_{ij} &= -\frac{1}{2}(\nabla_i \vartheta_j + \nabla_j \vartheta_i) = -\frac{1}{2}(\nabla_i \Psi_j + \nabla_j \Psi_i) = \\ &= \frac{1}{2}(\beta_{ij} + \beta_{ji}) = \kappa_{ij}. \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Следовательно, тензор  $\kappa$  характеризует изменение кривизны срединной поверхности.

**Определение 1.4.3.** Тензор  $\kappa$  называется *тензором изменения кривизны*. ■

Механический смысл величины  $\Psi_3$  следует из равенства  $\Psi_3 = \hat{\varepsilon}_{33}$  в (1.3.20) — это есть *относительное удлинение нормального волокна*  $M_1 M M_2$  (см. рис. 1.3.1).

Для определения механического смысла кинематических параметров  $\Psi_i, \vartheta_j$  и  $\theta_j$  положим, что

$$\varepsilon_{ij} = 0 \quad (\alpha_{ij} = 0), \quad \Psi_3 = 0. \quad (1.4.13)$$

Сначала, используя (1.3.14) и (1.3.16), получаем следующее равенство:

$$\sin^2(\mathbf{n}, \mathbf{s}) = 1 - \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{n} + \psi_i \mathfrak{E}^i)^2}{(\mathbf{n} + \psi_i \mathfrak{E}^i)^2} = \frac{\psi_i \psi^i}{1 + \psi_i \psi^i}. \quad (1.4.14)$$

Следовательно, величины  $\psi_i$  определяют угол между нормальным вектором  $\mathbf{n}$  и направляющим вектором  $\mathbf{s}$  волокна  $M'_1 M' M'_2$ .

Для подобного вывода относительно  $\vartheta_i$  необходимо в формулах для нормального вектора  $\mathbf{n}$ , учесть величины второго порядка малости относительно кинематических параметров. При этом в предположениях (1.4.13) формула (1.4.6) сохраняется с учетом того, что  $I_{1e} = 0$ , а равенство (1.4.8) трансформируется следующим образом:

$$\mathbf{n}_* = \frac{\mathbf{n} + \vartheta_i \mathfrak{E}^i}{\sqrt{1 + \vartheta_i \vartheta^i}}. \quad (1.4.15)$$

Отсюда получаем такой результат:

$$\sin^2(\mathbf{n}, \mathbf{n}_*) = 1 - (\mathbf{n}, \mathbf{n}_*)^2 = \frac{\vartheta_i \vartheta^i}{1 + \vartheta_i \vartheta^i}. \quad (1.4.16)$$

Таким образом, величины  $\vartheta_i$  определяют угол между нормальными векторами к срединной поверхности в начальном и актуальном состояниях. А из равенства  $\theta_k = \psi_k - \vartheta_k$  в (1.3.18) вытекает, что параметры  $\theta_i$  характеризуют угол между векторами  $\mathbf{n}_*$  и  $\mathbf{s}$ .

## 1.5. Уравнения совместности деформаций

Как следует из раздела 1.3, поле перемещений оболочки полностью определяется шестью кинематическими параметрами  $u_1, u_2, \psi_1, \psi_2, w, \psi_3$ . При заданных тензорах  $\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}$ , перемещении  $w$  и удлинении  $\psi_3$ , как следует из соотношений (1.3.18) и (1.3.20), пер-

вые из четырех кинематических параметров удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) = \varepsilon_{ij} + b_{ij} w, \quad (1.5.1)$$

$$\frac{1}{2}(\nabla_i \Psi_j + \nabla_j \Psi_i) + \frac{1}{2}(b_i^k \nabla_k u_j + b_j^k \nabla_k u_i) = \kappa_{ij} + c_{ij} w + b_{ij} \Psi_3. \quad (1.5.2)$$

Следовательно, тензоры  $\varepsilon$  и  $\kappa$  не могут быть заданы произвольно. Они должны удовлетворять условиям интегрируемости этой системы (*уравнениям совместности деформаций*). Их построим, линеаризовывая шесть независимых уравнений совместности для трехмерного тела  $G$  [9]:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_1 \tilde{\nabla}_1 \tilde{\varepsilon}_{22} + \tilde{\nabla}_2 \tilde{\nabla}_2 \tilde{\varepsilon}_{11} &= \tilde{\nabla}_1 \tilde{\nabla}_2 \tilde{\varepsilon}_{12} + \tilde{\nabla}_2 \tilde{\nabla}_1 \tilde{\varepsilon}_{12}, \\ \tilde{\nabla}_1 \tilde{\nabla}_2 \tilde{\varepsilon}_{23} + \tilde{\nabla}_2 \tilde{\nabla}_3 \tilde{\varepsilon}_{12} &= \tilde{\nabla}_1 \tilde{\nabla}_3 \tilde{\varepsilon}_{22} + \tilde{\nabla}_2 \tilde{\nabla}_2 \tilde{\varepsilon}_{13}, \\ \tilde{\nabla}_1 \tilde{\nabla}_1 \tilde{\varepsilon}_{23} + \tilde{\nabla}_2 \tilde{\nabla}_3 \tilde{\varepsilon}_{11} &= \tilde{\nabla}_1 \tilde{\nabla}_3 \tilde{\varepsilon}_{21} + \tilde{\nabla}_2 \tilde{\nabla}_1 \tilde{\varepsilon}_{13}; \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_1 \tilde{\nabla}_1 \tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{\nabla}_3 \tilde{\nabla}_3 \tilde{\varepsilon}_{11} &= \tilde{\nabla}_1 \tilde{\nabla}_3 \tilde{\varepsilon}_{13} + \tilde{\nabla}_3 \tilde{\nabla}_1 \tilde{\varepsilon}_{13}, \\ \tilde{\nabla}_2 \tilde{\nabla}_2 \tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{\nabla}_3 \tilde{\nabla}_3 \tilde{\varepsilon}_{22} &= \tilde{\nabla}_2 \tilde{\nabla}_3 \tilde{\varepsilon}_{23} + \tilde{\nabla}_3 \tilde{\nabla}_2 \tilde{\varepsilon}_{23}, \\ \tilde{\nabla}_1 \tilde{\nabla}_2 \tilde{\varepsilon}_{33} + \tilde{\nabla}_3 \tilde{\nabla}_3 \tilde{\varepsilon}_{12} &= \tilde{\nabla}_1 \tilde{\nabla}_3 \tilde{\varepsilon}_{23} + \tilde{\nabla}_3 \tilde{\nabla}_2 \tilde{\varepsilon}_{13}. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Для получения искомого результата сюда необходимо подставить выражения величин  $\varepsilon_{ij}$  через кинематические параметры оболочки. С этой целью сначала аналогично (1.2.22) находим их связь с деформациями  $\hat{\varepsilon}_{ij}$  в базисе  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{n}$  (напомним, что все операции выполняются с точностью до линейных по  $z$  слагаемых):

$$\varepsilon_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ij} - z(b_j^n \hat{\varepsilon}_{in} + b_i^m \hat{\varepsilon}_{mj}), \quad \varepsilon_{i3} = \hat{\varepsilon}_{i3} - z b_i^m \hat{\varepsilon}_{m3}, \quad \varepsilon_{33} = \hat{\varepsilon}_{33}, \quad (1.5.5)$$

а затем, используя (1.3.20), получаем следующие равенства:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + z(v_{ij} - b_j^n \varepsilon_{in}), \quad 2\bar{\varepsilon}_{i3} = \theta_i + z \nabla_i \Psi_3, \quad \bar{\varepsilon}_{33} = \Psi_3, \quad v_{ij} = \kappa_{ij} - b_i^m \varepsilon_{mj}. \quad (1.5.6)$$



После подстановки этих соотношений в (1.5.3) и (1.5.4) придем к равенству нулю линейных  $z$  функций, что эквивалентно их нулевым коэффициентам при  $z^0$  и  $z^1$ . Однако в соотношения (1.5.4) входят вторые производные по  $z$ . Поэтому они не могут быть удовлетворены в рамках используемого линейного приближения. Также нельзя считать справедливыми вытекающие из второго и третьего уравнения в (1.5.3) равенства коэффициентов при  $z^1$ , поскольку в этих соотношениях присутствуют первые производные по  $z$ .

Следовательно, можно рассматривать только четыре уравнения: два, следующие из первого соотношения в (1.5.3), и по одному, которые вытекают из последних двух соотношений. Для оценки возможности точного удовлетворения этих уравнений в отличие от (1.3.18)—(1.3.20) будем учитывать члены второго порядка по  $z$  в рядах (1.3.8) (приближенное равенство по-прежнему заменяется точным):

$$\hat{u}_i = u_i + \psi_i z + \frac{1}{2} \psi_{i2} z^2, \quad u_3 = w + \psi_3 z + \frac{1}{2} \psi_{32} z^2. \quad (1.5.7)$$

Это представление, вообще-то, противоречит использованным выше линейным приближениям. Однако оно находится в рамках традиционных допущений теории оболочек и, кроме того, позволяет, по крайней мере, убедиться в том, что коэффициенты квадратичных членов не будут входить в окончательный результат.

Подставляя теперь равенства (1.5.7) в (1.3.7), приходим к следующему уточнению формул (1.3.18)—(1.3.20):

$$\begin{aligned} \hat{d}_{ij} &= \alpha_{ij} + z\beta_{ij}, \quad \hat{d}_{i3} = -\vartheta_i + (b_i^k \theta_k + \nabla_i \psi_3) z, \quad \hat{d}_{3i} = \\ &= \psi_i + \psi_{i2} z, \quad \hat{d}_{33} = \psi_3 + \psi_{32} z; \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + z\kappa_{ij}, \quad \hat{\varepsilon}_{i3} = \frac{1}{2} \theta_i + \frac{1}{2} z (b_i^k \theta_k + \nabla_i \psi_3 + \psi_{i2}), \quad \hat{\varepsilon}_{33} = \psi_3 + \psi_{32} z. \quad (1.5.9)$$

Отсюда с учетом (1.5.5) получаем такую модификацию равенств (1.5.6):

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + z(v_{ij} - b_j^n \varepsilon_{in}), \quad 2\tilde{\varepsilon}_{i3} = \theta_i + z(\nabla_i \psi_3 + \psi_{i2}), \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = \psi_3 + \psi_{32} z. \quad (1.5.10)$$

Отметим, что в (1.5.8)—(1.5.10) по отношению к (1.3.18)—(1.3.20) изменились только равенства для  $\hat{d}_{3i}, \hat{d}_{33}, \hat{\varepsilon}_{i3}, \hat{\varepsilon}_{33}$  и  $\tilde{\varepsilon}_{i3}, \tilde{\varepsilon}_{33}$ .

Теперь, используя правила ковариантного дифференцирования и формулы (1.3.5), находим необходимые находимые для уравнений в (1.5.3) первые производные:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{kl} &= \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{kl}}{\partial \xi^j} - \bar{\Gamma}_{jk}^m \bar{\varepsilon}_{ml} - \bar{\Gamma}_{jl}^m \bar{\varepsilon}_{km} - \bar{\Gamma}_{jk}^3 \bar{\varepsilon}_{3l} - \bar{\Gamma}_{jl}^3 \bar{\varepsilon}_{k3} = \\ &= \nabla_j \bar{\varepsilon}_{kl} + z \left( \bar{\varepsilon}_{ml} \nabla_j b_k^m + \bar{\varepsilon}_{km} \nabla_j b_l^m \right) - (b_{jk} - z c_{jk}) \bar{\varepsilon}_{3l} - (b_{jl} - z c_{jl}) \bar{\varepsilon}_{k3} = \\ &= A_{jkl} + z B_{jkl} - \frac{1}{2} z \left( b_{jk} \Psi_{l2} + b_{jl} \Psi_{k2} \right); \quad (1.5.11)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_3 \bar{\varepsilon}_{kl} &= \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{kl}}{\partial z} - \bar{\Gamma}_{k3}^m \bar{\varepsilon}_{ml} - \bar{\Gamma}_{l3}^m \bar{\varepsilon}_{km} = \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{kl}}{\partial z} + (b_k^m + z c_k^m) \bar{\varepsilon}_{ml} + \\ &+ (b_l^m + z c_l^m) \bar{\varepsilon}_{km} = A_{3kl} + z B_{3kl}; \quad (1.5.12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{k3} &= \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{k3}}{\partial \xi^j} - \bar{\Gamma}_{jk}^m \bar{\varepsilon}_{m3} - \bar{\Gamma}_{j3}^m \bar{\varepsilon}_{km} - \bar{\Gamma}_{jk}^3 \bar{\varepsilon}_{33} = \\ &= \nabla_j \bar{\varepsilon}_{k3} + b_j^m \bar{\varepsilon}_{km} - b_{jk} \bar{\varepsilon}_{33} + z \left( \bar{\varepsilon}_{m3} \nabla_j b_k^m + c_j^m \bar{\varepsilon}_{km} + c_{jk} \bar{\varepsilon}_{33} \right) = \\ &= A_{jk3} + z B_{jk3} + z \left( \frac{1}{2} \nabla_j \Psi_{k2} - b_{jk} \Psi_{32} \right); \quad (1.5.13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{33} &= \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{33}}{\partial \xi^j} - 2 \bar{\Gamma}_{j3}^m \bar{\varepsilon}_{m3} = \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{33}}{\partial \xi^j} + 2 (b_j^m + z c_j^m) \bar{\varepsilon}_{m3} = \\ &= A_{j33} + z B_{j33} + z \left( \nabla_j \Psi_{32} + b_j^m \Psi_{m2} \right); \quad (1.5.14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_3 \bar{\varepsilon}_{k3} &= \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{k3}}{\partial z} - \bar{\Gamma}_{3k}^m \bar{\varepsilon}_{m3} = \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{k3}}{\partial z} + (b_k^m + z c_k^m) \bar{\varepsilon}_{m3} = \\ &= A_{3k3} + z B_{3k3} + \frac{1}{2} \left( \Psi_{k2} + z b_k^m \Psi_{m2} \right). \quad (1.5.15)\end{aligned}$$

Здесь

$$A_{jkl} = \nabla_j \varepsilon_{kl} - \frac{1}{2} \left( b_{jk} \theta_l + b_{jl} \theta_k \right),$$

$$\begin{aligned}
B_{jkl} &= \nabla_j (v_{lk} - b_k^n \varepsilon_{ln}) + \varepsilon_{ml} \nabla_j b_k^m + \varepsilon_{km} \nabla_j b_l^m + \\
&\quad + \frac{1}{2} (c_{jk} \theta_l + c_{jl} \theta_k - b_{jk} \nabla_l \Psi_3 - b_{jl} \nabla_k \Psi_3), \\
A_{3kl} &= \kappa_{kl}, B_{3kl} = b_k^m v_{lm} + b_l^m v_{km}, A_{jk3} = b_j^m \varepsilon_{km} + \frac{1}{2} \nabla_j \theta_k - b_{jk} \Psi_3, \\
B_{jk3} &= b_j^m v_{km} + \frac{1}{2} (\nabla_j \nabla_k \Psi_3 + \theta_m \nabla_j b_k^m) + c_{jk} \Psi_3,
\end{aligned} \tag{1.5.16}$$

$$A_{j33} = 2A_{3j3} = \nabla_j \Psi_3 + b_j^m \theta_m, B_{j33} = 2B_{3j3} = b_j^m \nabla_m \Psi_3 + c_j^m \theta_m.$$

Далее вычисляем вторые ковариантные производные:

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{kl} &= \frac{\partial \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{kl}}{\partial \xi^i} - \bar{\Gamma}_{ij}^m \bar{\nabla}_m \bar{\varepsilon}_{kl} - \bar{\Gamma}_{ik}^m \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{ml} - \bar{\Gamma}_{il}^m \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{km} - \bar{\Gamma}_{ij}^3 \bar{\nabla}_3 \bar{\varepsilon}_{kl} - \\
&\quad - \bar{\Gamma}_{ik}^3 \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{3l} - \bar{\Gamma}_{il}^3 \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{k3} = \nabla_i \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{kl} + \\
&\quad + z (\nabla_i b_j^m \bar{\nabla}_m \bar{\varepsilon}_{kl} + \nabla_i b_k^m \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{ml} + \nabla_i b_l^m \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{km}) - (b_{ij} - z c_{ij}) \bar{\nabla}_3 \bar{\varepsilon}_{kl} - \\
&\quad - (b_{ik} - z c_{ik}) \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{3l} - (b_{il} - z c_{il}) \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{k3} = C_{ijkl} + z D_{ijkl} - z F_{ijkl};
\end{aligned} \tag{1.5.17}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{k3} = \\
&= \frac{\partial \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{k3}}{\partial \xi^i} - \bar{\Gamma}_{ij}^m \bar{\nabla}_m \bar{\varepsilon}_{k3} - \bar{\Gamma}_{ik}^m \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{m3} - \bar{\Gamma}_{i3}^m \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{km} - \bar{\Gamma}_{ij}^3 \bar{\nabla}_3 \bar{\varepsilon}_{k3} - \bar{\Gamma}_{ik}^3 \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{33} = \\
&= \nabla_i \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{k3} + z (\nabla_i b_j^m \cdot \bar{\nabla}_m \bar{\varepsilon}_{k3} + \nabla_i b_k^m \cdot \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{m3}) + (b_i^m + z c_i^m) \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{km} - \\
&- (b_{ij} - z c_{ij}) \bar{\nabla}_3 \bar{\varepsilon}_{k3} - (b_{ik} - z c_{ik}) \bar{\nabla}_j \bar{\varepsilon}_{33} = C_{ijk3} + z D_{ijk3} + E_{ijk3} + z F_{ijk3};
\end{aligned} \tag{1.5.18}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_3 \bar{\varepsilon}_{kl} = \\
&= \frac{\partial \bar{\nabla}_3 \bar{\varepsilon}_{kl}}{\partial \xi^i} - \bar{\Gamma}_{i3}^m \bar{\nabla}_m \bar{\varepsilon}_{kl} - \bar{\Gamma}_{ik}^m \bar{\nabla}_3 \bar{\varepsilon}_{ml} - \bar{\Gamma}_{il}^m \bar{\nabla}_3 \bar{\varepsilon}_{km} - \bar{\Gamma}_{ik}^3 \bar{\nabla}_3 \bar{\varepsilon}_{3l} - \bar{\Gamma}_{il}^3 \bar{\nabla}_3 \bar{\varepsilon}_{k3} = \\
&= \nabla_i \bar{\nabla}_3 \bar{\varepsilon}_{kl} + (b_i^m + z c_i^m) \bar{\nabla}_m \bar{\varepsilon}_{kl} + z (\nabla_k b_i^m \cdot \bar{\nabla}_3 \bar{\varepsilon}_{ml} + \nabla_l b_i^m \cdot \bar{\nabla}_3 \bar{\varepsilon}_{km}) - \\
&- (b_{ik} - z c_{ik}) \bar{\nabla}_3 \bar{\varepsilon}_{3l} - (b_{il} - z c_{il}) \bar{\nabla}_3 \bar{\varepsilon}_{k3} = C_{i3kl} + z D_{i3kl} + E_{i3kl} + z F_{i3kl}.
\end{aligned} \tag{1.5.19}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
C_{ijk} &= \nabla_i A_{jkl} - b_{ij} A_{3kl} - b_{ik} A_{jl3} - b_{il} A_{jk3}, \\
D_{ijkl} &= \nabla_i B_{jkl} + \nabla_i b_j^m A_{mkl} + \nabla_i b_k^m A_{jml} + \nabla_i b_l^m A_{jkm} + \\
&+ c_{ij} A_{3kl} + c_{ik} A_{jl3} + c_{il} A_{jk3} - b_{ij} B_{3kl} - b_{ik} B_{jl3} - b_{il} B_{jk3}, \\
C_{ijk3} &= \nabla_i A_{jk3} + b_i^m A_{jkm} - b_{ij} A_{3k3} - b_{ik} A_{j33}, \\
D_{ijk3} &= \nabla_i B_{jk3} + A_{m3} \nabla_i b_j^m + A_{jm3} \nabla_i b_k^m + c_i^m A_{jkm} + b_i^m B_{jkm} + \\
&+ c_{ij} A_{3k3} + c_{ik} A_{j33} - b_{ij} B_{3k3} - b_{ik} B_{j33}, \\
C_{i3kl} &= \nabla_i A_{3kl} + b_i^m A_{mkl} - b_{ik} A_{33l} - b_{il} A_{33k}, \\
D_{i3kl} &= \nabla_i B_{3kl} + c_i^m A_{mkl} + b_i^m B_{mkl} + A_{3ml} \nabla_k b_l^m + A_{3km} \nabla_l b_i^m + \\
&+ c_{ik} A_{33l} + c_{il} A_{33k} - b_{ik} B_{33l} - b_{il} B_{33k},
\end{aligned} \tag{1.5.20}$$

а связанные с учетом членов второго порядка (1.5.7) слагаемые имеют вид:

$$\begin{aligned}
F_{ijkl} &= -\frac{1}{2} \left[ b_{ik} \nabla_j \Psi_{l2} + b_{il} \nabla_j \Psi_{k2} + \nabla_i (b_{jk} \Psi_{l2} + b_{jl} \Psi_{k2}) \right] + (b_{ik} b_{jl} + b_{il} b_{jk}) \Psi_{32}, \\
E_{ijk3} &= -\frac{1}{2} b_{ij} \Psi_{k2}, \quad E_{i3kl} = -\frac{1}{2} (b_{ik} \Psi_{l2} + b_{il} \Psi_{k2}), \quad F_{i3kl} = -\frac{1}{2} (b_{ik} b_l^m + b_{il} b_k^m) \Psi_{m2}, \\
F_{ijk3} &= \frac{1}{2} \left[ \nabla_i \nabla_j \Psi_{k2} - (b_i^m b_{jk} + b_{ij} b_k^m + 2b_{ik} b_j^m) \Psi_{m2} \right] - \\
&- \left[ \nabla_i (b_{jk} \Psi_{32}) + b_{ik} \nabla_j \Psi_{32} \right].
\end{aligned} \tag{1.5.21}$$

Простой проверкой убеждаемся, что для них имеют соотношения

$$\begin{aligned}
F_{1122} + F_{2211} - F_{1212} - F_{2112} &\neq 0, \\
E_{1223} + E_{2312} - E_{1322} - E_{2213} &= 0, \quad E_{2113} + E_{1321} - E_{2311} - E_{1123} = 0,
\end{aligned} \tag{1.5.22}$$

из которых вытекает, что среди уравнений в (1.5.3) удовлетворяются только вытекающие из них равенства коэффициентов при  $z^0$ .

Отсюда, учитывая (1.5.17) — (1.5.19), получаем три уравнения совместности деформаций для оболочки:

$$C_{1122} + C_{2211} - C_{1212} - C_{2112} = 0, \\ C_{1223} + C_{2312} - C_{1322} - C_{2213} = 0, \quad C_{2113} + C_{1321} - C_{2311} - C_{1123} = 0. \quad (1.5.23)$$

Подставляя сюда соответствующие равенства из (1.5.20) с учетом материала п. П.7 приводим их к операторному виду:

$$K_n(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) + L_n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}_3) = 0 \quad (n=0,1,2), \quad (1.5.24)$$

где

$$K_0(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) = \nabla_1(\nabla_1 \varepsilon_{22} - \nabla_2 \varepsilon_{12}) + \nabla_2(\nabla_2 \varepsilon_{11} - \nabla_1 \varepsilon_{12}) - l_b(\kappa_{ij}) + R\varepsilon, \\ K_1(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) = \nabla_2 v_{21} - \nabla_1 v_{22} + b_2^1(\nabla_1 \varepsilon_{12} - \nabla_2 \varepsilon_{11}) - b_1^1(\nabla_1 \varepsilon_{22} - \nabla_2 \varepsilon_{12}), \\ K_2(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) = \nabla_1 v_{12} - \nabla_2 v_{11} + b_1^2(\nabla_2 \varepsilon_{12} - \nabla_1 \varepsilon_{22}) - b_2^2(\nabla_2 \varepsilon_{11} - \nabla_1 \varepsilon_{12}), \quad (1.5.25) \\ l_b(x_{ij}) = b_{22}x_{11} - b_{12}(x_{12} + x_{21}) + b_{11}x_{22};$$

$$L_0(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}_3) = l_b(\nabla_i \theta_j) - 2R\psi_3, \\ L_1(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}_3) = -R\theta^1 + \frac{1}{2}\nabla_2(\nabla_1 \theta_2 - \nabla_2 \theta_1) + b_{12}\nabla_2 \psi_3 - b_{22}\nabla_1 \psi_3, \quad (1.5.26) \\ L_2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}_3) = -R\theta^2 + \frac{1}{2}\nabla_1(\nabla_2 \theta_1 - \nabla_1 \theta_2) + b_{12}\nabla_1 \psi_3 - b_{11}\nabla_2 \psi_3.$$

Здесь

$$\varepsilon = \varepsilon_{kl} g^{kl}, \quad (1.5.27)$$

а величина  $R$  задается соответствующим равенством в (П.7.16).

Легко проверяется, что выражения для операторов (1.5.25) и (1.5.26) с использованием дискриминантного тензора (определение П.8.1) и формулы (П.7.20) после деления уравнений (1.5.24) на инвариант метрического тензора  $g$  могут быть приведены к следующему компактному виду:

$$K_0(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) = \chi^{ij} \chi^{kl} \nabla_k \nabla_i \varepsilon_{jl} - b_{ij} \chi^{ik} \chi^{jl} \kappa_{kl} + K\varepsilon, \quad L_0(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}_3) = \\ = \chi^{ik} \chi^{jl} b_{ij} \nabla_k \theta_l - 2K\psi_3, \\ K_n(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) = \chi^{ij} \left( \chi^{nm} \nabla_i v_{mj} + \chi^{kl} b_l^n \nabla_i \varepsilon_{kj} \right), \quad (1.5.28) \\ L_n(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}_3) = \chi^{ij} \chi^{nm} \left( \frac{1}{2} \nabla_m \nabla_i \theta_j + b_{im} \nabla_j \psi_3 \right) - K\theta^n \quad (n=1,2).$$

## Глава 2. ДИНАМИКА ОБОЛОЧЕК

### 2.1. Энергетические характеристики оболочки

Далее будем полагать, что материал оболочки однородный, и будем считать процессы деформирования изотермическими или адиабатическими.

Сначала рассмотрим потенциальную энергию оболочки. Она как соответствующая величина для трехмерного тела записывается так [9—11]:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_G (\mathbf{S}, \boldsymbol{\varepsilon}) dy, \quad (2.1.1)$$

где  $\mathbf{S}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензоры напряжений и деформаций;  $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + y_3 \mathbf{k}$  — радиус-вектор в прямоугольной декартовой системе координат в  $R^3$  с ортами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

В теории оболочек тройные интегралы вида (2.1.1) приближенно заменяются поверхностными по срединной поверхности. С этой целью тройной интеграл по области  $G$  от некоторой функции  $f$  с использованием (П.1.20) записываем в криволинейной системе координат  $\xi^1, \xi^2, z$  (1.2.6). Затем в соответствии со спецификой области  $G$  сводим его к повторному интегралу и учитываем связь (1.2.14) инвариантов метрических тензоров, а также равенства (П.6.8) для поверхностного интеграла:

$$\begin{aligned} \iiint_G f(M) dy &= \iiint_G f(\xi^1, \xi^2, z) \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 dz = \\ &= \iint_D \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 \int_{-h/2}^{h/2} (1 - 2Hz + Kz^2) f(\xi^1, \xi^2, z) dz = \\ &= \iint_{\Pi} \left[ \int_{-h/2}^{h/2} f(\xi^1, \xi^2, z) dz \right] dS. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

**Замечание 2.1.1.** Здесь и далее, если не оговорено противное, слагаемые порядка  $h^2$  отбрасываются и приближенное равенство заменяется точным. ■

Тогда потенциальная энергия оболочки записывается в виде поверхностного интеграла:

$$W = \frac{1}{2} \iint_{\Pi} \left[ \int_{-h/2}^{h/2} (\mathbf{S}, \boldsymbol{\varepsilon}) dz \right] dS. \quad (2.1.3)$$

Свертку тензоров с учетом следствия П.2.1 записываем в базисе  $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{n}$  и внутренний интеграл в (2.1.3) с учетом (1.3.20) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} (\mathbf{S}, \boldsymbol{\varepsilon}) dz &= \int_{-h/2}^{h/2} (\hat{\sigma}^{ij} \hat{\varepsilon}_{ij} + 2\hat{\sigma}^{i3} \hat{\varepsilon}_{i3} + \hat{\sigma}^{33} \hat{\varepsilon}_{33}) dz = \\ &= \hat{T}^{ij} \varepsilon_{ij} + M^{ij} \kappa_{ij} + \hat{Q}^i \theta_i + \mu^i (b_i^k \theta_k + \nabla_i \psi_3) + \hat{N} \psi_3. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Здесь введены такие обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{T}^{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\sigma}^{ij} dz, \quad M^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} z \hat{\sigma}^{ij} dz, \quad \hat{Q}^i = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\sigma}^{i3} dz, \\ \mu^i &= \int_{-h/2}^{h/2} z \hat{\sigma}^{i3} dz, \quad \hat{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\sigma}^{33} dz. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Тогда потенциальная энергия оболочки окончательно принимает следующий вид:

$$W = \frac{1}{2} \iint_{\Pi} \left[ \hat{T}^{ij} \varepsilon_{ij} + M^{ij} \kappa_{ij} + \hat{Q}^i \theta_i + \mu^i (b_i^k \theta_k + \nabla_i \psi_3) + \hat{N} \psi_3 \right] dS. \quad (2.1.6)$$

Очевидно,

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{T}^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{M} = M^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad \hat{\mathbf{Q}} = \hat{Q}^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{m} = \mu^i \mathbf{e}_i \quad (2.1.7)$$

— тензоры второго ранга и векторы, определенные на пространстве  $P = d\Pi$ .

**Определение 2.1.1.** Величины  $\hat{\mathbf{T}}$  и  $\hat{\mathbf{M}}$  называются *тензорами тангенциальных усилий и моментов*,  $\hat{\mathbf{Q}}$  и  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  — *векторами перерезывающих усилий и дополнительных моментов*,  $\hat{N}$  — *нормальным усилием*. ■

Смысл этих наименований будет ясен из материала п. 2.4.

Второй вид энергии оболочки — кинетическая энергия. Она, с учетом вида соответствующей величины для трехмерного тела и приближенного равенства (2.1.2), записывается следующим образом [9, 11]:

$$E = \frac{1}{2} \iiint_G \rho(\mathbf{v}, \mathbf{v}) d\mathbf{y} = \frac{\rho}{2} \iint_{\Pi} \left[ \int_{-h/2}^{h/2} (\mathbf{v}, \mathbf{v}) dz \right] dS, \quad (2.1.8)$$

где  $\rho$  — плотность материала;  $\mathbf{v}$  — вектор скорости.

Полагая перемещения малыми и используя (1.3.1), (1.3.17), получаем, что скорость оболочки имеет вид:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_i + \psi_i z) \mathfrak{E}^i + (\dot{w} + \psi_3 z) \mathbf{n}. \quad (2.1.9)$$

Здесь и далее точками обозначаются частные производные по времени.

Тогда внутренний интеграл в (2.1.8) преобразовывается так:

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\mathbf{v}, \mathbf{v}) dz = h(\dot{u}_i \dot{u}^i + \dot{w}^2) + I(\dot{\psi}_i \dot{\psi}^i + \dot{\psi}_3^2), \quad I = h^3/12. \quad (2.1.10)$$

Здесь сделано отступление от замечания 2.1.1. Смысл этого действия будет ясен из дальнейшего изложения. Отметим также, что введенная геометрическая величина  $I$  есть погонный момент инерции любого сечения оболочки типа боковой поверхности (1.2.4) — момент инерции прямоугольника единичной ширины и высоты  $h$  относительно главной центральной оси [12].

Подстановка (2.1.10) в формулу (2.1.8) приводит к окончательному выражению для кинетической энергии оболочки:

$$E = \frac{\rho}{2} \iint_{\Pi} \left[ h(\dot{u}_i \dot{u}^i + \dot{w}^2) + I(\dot{\psi}_i \dot{\psi}^i + \dot{\psi}_3^2) \right] dS. \quad (2.1.12)$$



## 2.2. Работа внешних сил

Работа действующих на оболочку внешних массовых  $\rho \mathbf{F}$  и поверхностных сил  $\mathbf{P}$  как соответствующая величина для трехмерного тела записывается так [9, 11]:

$$A = \rho \iiint_G (\mathbf{F}, \mathbf{u}) dy + \iint_{\Pi_+} (\mathbf{P}, \mathbf{u}) dS + \iint_{\Pi_-} (\mathbf{P}, \mathbf{u}) dS + \iint_{\Pi_b} (\mathbf{P}, \mathbf{u}) dS, \quad (2.2.1)$$

где

$$\mathbf{F} = \hat{F}^j \mathfrak{e}_j + F_3 \mathbf{n}, \quad \mathbf{P} = \hat{P}^j \mathfrak{e}_j + P_3 \mathbf{n}.$$

Первый из интегралов в правой части этого выражения преобразовывается аналогично (2.1.12):

$$\rho \iiint_G (\mathbf{F}, \mathbf{u}) dy = \iint_{\Pi} (q_F^i u_i + m_F^i \psi_i + q_F w + m_F \psi_3) dS, \quad (2.2.2)$$

где

$$q_F^i = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \hat{F}^i dz, \quad q_F = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \hat{F}_3 dz, \quad m_F^i = \rho \int_{-h/2}^{h/2} z \hat{F}^i dz, \quad m_F = \rho \int_{-h/2}^{h/2} z \hat{F}_3 dz.$$

Далее, аналогично (2.1.2), интегралы по внешней и внутренней поверхности с использованием (П.6.8), (1.2.3), (1.2.16) приближенно заменяем поверхностными по срединной поверхности, а интеграл по боковой поверхности при дополнительном учете (1.2.18), (1.2.19), (П.5.15) — криволинейным по границе срединной поверхности:

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi_{\pm}} f(M) dS &= \iint_D f(\xi^1, \xi^2, \pm h/2) \sqrt{g_{\pm}} d\xi^1 d\xi^2 = \\ &= \iint_D f(\xi^1, \xi^2, \pm h/2) (1 \mp Hz + K h^2/4) \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 = \\ &= \iint_D f(\xi^1, \xi^2, \pm h/2) \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 = \iint_{\Pi} f(M) dS; \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Pi_b} f(M) dS &= \int_{\alpha}^{\beta} dt \int_{-h/2}^{h/2} f(\xi^1(t), \xi^2(t), z) \sqrt{g_b} dz = \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} dt \int_{-h/2}^{h/2} f(\xi^1(t), \xi^2(t), z) \sqrt{(g_{ij} - 2b_{ij}z) \xi^i \xi^j} dz = \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g_{ij} \xi^i \xi^j} \left[ \int_{-h/2}^{h/2} f(\xi^1(t), \xi^2(t), z) dz \right] dt = \\
&= \int_{\Gamma} \left[ \int_{-h/2}^{h/2} f(\xi^1(t), \xi^2(t), z) dz \right] ds. \tag{2.2.4}
\end{aligned}$$

Тогда поверхностные интегралы в (2.2.1) записываются следующим образом:

$$\iint_{\Pi_{\pm}} (\mathbf{P}, \mathbf{u}) dS = \iint_{\Pi} (q_{\pm}^i u_i + m_{\pm}^i \psi_i + q_{\pm} w + m_{\pm} \psi_3) dS. \tag{2.2.5}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
q_{\pm}^i &= \hat{P}^i \Big|_{z=\pm h/2}, \quad q_{\pm} = \hat{P}^3 \Big|_{z=\pm h/2}, \quad m_{\pm}^i = \pm \frac{h}{2} q_{\pm}^i, \quad m_{\pm} = \pm \frac{h}{2} q_{\pm}; \\
\iint_{\Pi_b} (\mathbf{P}, \mathbf{u}) dS &= \int_{\Gamma} [(\mathbf{T}_{(0)}, \mathbf{u}) + (\mathbf{M}_{(0)}, \boldsymbol{\psi}) + Q_{(0)} w + \mu_{(0)} \psi_3] ds, \tag{2.2.6}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{(0)} &= T_{(0)}^i \mathbf{e}_i, \quad T_{(0)}^i = \int_{-h/2}^{h/2} P^i \Big|_{\Gamma} dz, \quad \mathbf{M}_{(0)} = M_{(0)}^i \mathbf{e}_i, \quad M_{(0)}^i = \int_{-h/2}^{h/2} z P^i \Big|_{\Gamma} dz, \\
Q_{(0)} &= \int_{-h/2}^{h/2} P_3 dz, \quad \mu_{(0)} = \int_{-h/2}^{h/2} z P_3 dz.
\end{aligned}$$

Векторы в последних равенствах имеют смысл *обобщенных погонных усилий и моментов на контуре  $\Gamma$* , а именно,  $\mathbf{T}_{(0)}$  и  $\mathbf{M}_{(0)}$  — *касательное усилие и момент относительно срединной поверхности*,  $Q_{(0)}$  и  $\mu_{(0)}$  — *нормальное усилие и момент от него*.

Сумму первых трех интегралов в (2.2.1) с использованием (2.2.2) и (2.2.5) записываем следующим образом:

$$\begin{aligned} & \rho \iiint_G (\mathbf{F}, \mathbf{u}) dy + \iint_{\Pi_+} (\mathbf{P}, \mathbf{u}) dS + \iint_{\Pi_-} (\mathbf{P}, \mathbf{u}) dS = \\ & = \iint_{\Pi} [(\mathbf{q}, \mathbf{u}) + (\mathbf{m}, \boldsymbol{\psi}) + qw + m\psi_3] dS, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= q^i \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \mathbf{m} = m^i \boldsymbol{\varepsilon}_i, \\ q^i &= q_F^i + q_+^i + q_-^i, \quad m^i = m_F^i + m_+^i + m_-^i, \\ q &= q_F + q_+ + q_-, \quad m = m_F + m_+ + m_-. \end{aligned}$$

Очевидно, векторы  $\mathbf{q} + q\mathbf{n}$  и  $\mathbf{m} + m\mathbf{n}$  имеют смысл *векторов поверхностного давления и отнесенных к единице площади моментов*.

Подставляя (2.2.6) и (2.2.7) в (2.2.1), получаем окончательное выражение для работы внешних сил, приложенных к оболочке:

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\Pi} [(\mathbf{q}, \mathbf{u}) + (\mathbf{m}, \boldsymbol{\psi}) + qw + m\psi_3] dS + \\ &+ \int_{\Gamma} [(\mathbf{T}_{(0)}, \mathbf{u}) + (\mathbf{M}_{(0)}, \boldsymbol{\psi}) + Q_{(0)}w + \mu_{(0)}\psi_3] ds. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

### 2.3. Физический закон для оболочки

Далее будем полагать, что материал оболочки является упругим анизотропным и обладает симметрией относительно срединной поверхности, что эквивалентно следующим равенствам для компонентов тензора упругих постоянных [11] (указывающий на их соответствие базису  $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \mathbf{n}$  значок здесь и далее опущен):

$$C^{ijk3} = C^{i3kl} = C^{i333} = C^{33k3} = 0, \quad (2.3.1)$$

Отметим, что аналогичные соотношения имеют место и в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ , что следует из полученных с учетом (1.2.12) равенств:

$$\tilde{C}^{ijk3} = p_m^i p_n^j p_r^k C^{mnr3} = 0, \quad \tilde{C}^{i333} = p_m^i C^{m333} = 0, \quad \tilde{C}^{33k3} = p_m^k C^{33m3} = 0.$$

В предположении (2.3.1) закон Гука имеет следующий вид:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \hat{\epsilon}_{kl} + C^{ij33} \hat{\epsilon}_{33}, \quad \tilde{\sigma}^{i3} = 2C^{i3k3} \hat{\epsilon}_{k3}, \quad \tilde{\sigma}^{33} = C^{33kl} \hat{\epsilon}_{kl} + C^{3333} \hat{\epsilon}_{33}. \quad (2.3.2)$$

Эти же равенства могут быть получены другим способом. А именно, записываем закон Гука в базе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ :

$$\tilde{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \epsilon_{kl} + C^{ij33} \epsilon_{33}, \quad \tilde{\sigma}^{i3} = 2C^{i3k3} \epsilon_{k3}, \quad \tilde{\sigma}^{33} = C^{33kl} \epsilon_{kl} + C^{3333} \epsilon_{33}. \quad (2.3.3)$$

Затем аналогично (1.2.23) с использованием (1.2.8) находим связь компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} &= q_m^i q_n^j \tilde{\sigma}^{mn} = \sigma^{ij} - z \left( b_m^i \tilde{\sigma}^{mj} + b_m^j \tilde{\sigma}^{im} \right), \\ \tilde{\sigma}^{i3} &= q_m^i \tilde{\sigma}^{m3} = \sigma^{i3} - z b_m^i \tilde{\sigma}^{m3}, \quad \tilde{\sigma}^{33} = \sigma^{33}. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Далее с учетом (2.3.1) получаем связь компонент тензора упругих постоянных:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{ijkl} &= p_m^i p_n^j p_r^k p_s^l C^{mnr3} = C^{ijkl} + z \left( D^{ijkl} + D^{klj} \right), \\ \tilde{C}^{i3k3} &= p_m^i p_r^k C^{m3r3} = C^{i3k3} + z D^{i3k3}, \\ \tilde{C}^{33ij} &= \tilde{C}^{ij33} = p_m^i p_n^j C^{mn33} = C^{ij33} + z D^{ij33}, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

где

$$\begin{aligned} D^{ijkl} &= b_m^i C^{mjkl} + b_m^j C^{imkl}, \\ D^{ij33} &= b_m^j C^{im33} + b_m^i C^{mj33}, \quad D^{i3j3} = b_m^i C^{m3j3} + b_m^j C^{i3m3}. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Причем для последних величин имеет место симметрия:

$$\hat{D}^{ijkl} = \hat{D}^{jikl}, \quad \hat{D}^{ijkl} = \hat{D}^{ijlk}, \quad \hat{D}^{ij33} = \hat{D}^{ji33}, \quad \hat{D}^{i3j3} = \hat{D}^{j3i3}. \quad (2.3.7)$$

Если теперь последовательно подставить в (2.3.4) соотношения (2.3.3), (2.3.5) и (1.5.5), то придем к (2.3.2).

Подставляя в (2.3.2) соотношения (1.3.20), получаем закон изменения напряжений по толщине оболочки:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^{ij} &= C^{ijkl} (\varepsilon_{kl} + z\kappa_{kl}) + C^{ij33}\Psi_3, \quad \hat{\sigma}^{33} = C^{33kl} (\varepsilon_{kl} + z\kappa_{kl}) + C^{3333}\Psi_3, \\ \hat{\sigma}^{i3} &= C^{i3k3} \left[ \theta_k + z(b_k^n \theta_n + \nabla_k \Psi_3) \right].\end{aligned}\quad (2.3.8)$$

Совместное рассмотрение равенств (2.3.8) с формулами (2.1.5) приводит к связи внутренних силовых факторов с кинематическими параметрами оболочки — *физическому закону*:

$$\begin{aligned}\hat{T}^{ij} &= h(C^{ijkl}\varepsilon_{kl} + C^{ij33}\Psi_3), \quad M^{ij} = IC^{ijkl}\kappa_{kl}, \quad \hat{Q}^i = hC^{i3k3}\theta_k, \\ \mu^i &= IC^{i3k3}(b_k^l \theta_l + \nabla_k \Psi_3), \quad \hat{N} = h(C^{33kl}\varepsilon_{kl} + C^{3333}\Psi_3).\end{aligned}\quad (2.3.9)$$

В частном случае изотропной среды [11] с учетом (1.2.25) компоненты тензора упругих постоянных принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}C^{ijkl} &= \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}), \\ C^{i3k3} &= \mu g^{ik}, \quad C^{ij33} = \lambda g^{ij}, \quad C^{3333} = \lambda + 2\mu,\end{aligned}\quad (2.3.10)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — упругие постоянные Ламе.

В этом варианте физический закон (2.3.9) записывается так:

$$\begin{aligned}\hat{T}^{ij} &= h[\lambda(\varepsilon + \Psi_3)g^{ij} + 2\mu\varepsilon^{ij}], \quad M^{ij} = I(\lambda g^{ij}\kappa + 2\mu\kappa^{ij}), \\ \hat{Q}^i &= \mu h\theta^i, \quad \mu^i = \mu I(b^i \theta_l + g^{ik}\nabla_k \Psi_3), \quad \hat{N} = h[\lambda\varepsilon + (\lambda + 2\mu)\Psi_3],\end{aligned}\quad (2.3.11)$$

где

$$\kappa = \kappa_{kl}g^{kl}, \quad (2.3.12)$$

а величина  $\varepsilon$  определяется формулой (1.5.27).

Последние равенства для инвариантов тензоров тангенциальных деформаций и изменения кривизны с помощью формул (1.3.18), (1.3.20), (П.6.2), (П.7.26) и (П.8.2) могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \nabla_k u^k - b_{kl} g^{kl} w = \operatorname{div} \mathbf{u} - 2Hw, \\
\kappa &= \nabla_k \Psi^k + b^{kl} \nabla_k u_l - b_{kl} g^{kl} \Psi_3 - c_{kl} g^{kl} w = \\
&= \operatorname{div} \Psi + b^{kl} \nabla_k u_l - 2H\Psi_3 - 2(2H^2 - K)w.
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Используя связь  $\lambda$  и  $\mu$  с коэффициентом Пуассона  $\nu$  и модулем Юнга  $E$  [10, 11]

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \tag{2.3.14}$$

формулы (2.3.11) можно записать так:

$$\begin{aligned}
\hat{T}^{ij} &= \frac{Eh}{1+\nu} \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon + \Psi_3) g^{ij} + \varepsilon^{ij} \right], \quad M^{ij} = \frac{EI}{1+\nu} \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \kappa g^{ij} + \kappa^{ij} \right), \\
\hat{Q}^i &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \theta^i, \quad \mu^i = \frac{EI}{2(1+\nu)} \left( b^{ij} \theta_j + g^{ik} \frac{\partial \Psi_3}{\partial \xi^k} \right), \\
\hat{N} &= \frac{Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon + (1-\nu)\Psi_3].
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

## 2.4. Начально-краевые задачи для оболочек

Уравнения движения и граничные условия для упругих тел получим из вариационного уравнения Гамильтона [11]:

$$\delta H = 0 \tag{2.4.1}$$

при условиях

$$\delta \mathbf{u} \Big|_{t=t_1} = \delta \mathbf{u} \Big|_{t=t_2} = \mathbf{0}. \tag{2.4.2}$$

Здесь  $\delta$  обозначает вариацию; моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  произвольны, но  $t_1 < t_2$ ;  $H$  — функционал действия (функционал Гамильтона), который имеет вид:

$$H = \int_{t_1}^{t_2} (I - E) dt, \quad I = W - A, \tag{2.4.3}$$

где  $I$  — функционал Лагранжа;  $W$  и  $E$  — потенциальная и кинетическая энергии, определяемые формулами (2.1.6) и (2.1.12);  $A$  — работа внешних сил, задаваемая равенством (2.2.8).

Уравнение (2.4.1) с учетом (2.4.3) преобразовываем так:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta I - \delta E) dt = 0, \quad \delta I = \delta W - \delta A. \quad (2.4.4)$$

Его используем для построения с принятой точностью уравнений движения и граничных условий для оболочек. С этой целью находим входящие в (2.4.4) величины. Вариация потенциальной энергии согласно (2.1.6) имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta W = \frac{1}{2} \iint_{\Pi} \{ & \delta(\hat{T}^{ij} \varepsilon_{ij}) + \delta(M^{ij} \kappa_{ij}) + \delta(\hat{Q}^i \theta_i) + \\ & + \delta[\mu^i (b_i^k \theta_k + \nabla_i \psi_3)] + \delta(\hat{N} \psi_3) \} dS. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Слагаемые в фигурных скобках преобразовываем с использованием кинематических соотношений (1.3.18), (1.3.20) и физического закона (2.3.9). Например, для первого из них, с учетом симметрии тензоров упругих постоянных и тангенциальных усилий, получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \delta(\hat{T}^{ij} \varepsilon_{ij}) + \delta(\hat{N} \psi_3) &= h(2C^{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} + C^{ij33} \varepsilon_{ij} \delta \psi_3 + C^{ij33} \psi_3 \delta \varepsilon_{ij}) + \\ + (C^{33kl} \psi_3 \delta \varepsilon_{kl} + C^{33kl} \varepsilon_{kl} \delta \psi_3 + 2C^{3333} \psi_3 \delta \psi_3) &= 2(\hat{T}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \hat{N} \delta \psi_3) = \\ = 2(\hat{T}^{ij} \delta \alpha_{ij} + \hat{N} \delta \psi_3) &= 2[\hat{T}^{ij} (\nabla_i \delta u_j - b_{ij} \delta w) + \hat{N} \delta \psi_3]; \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

$$\begin{aligned} \delta(M^{ij} \kappa_{ij}) &= IC^{ijkl} \delta(\kappa_{kl} \kappa_{ij}) = 2M^{ij} \delta \kappa_{ij} = 2M^{ij} \delta \beta_{ij} = \\ &= 2M^{ij} (\nabla_i \delta \psi_j - b_{ij} \delta \psi_3 + b_i^k \nabla_k \delta u_j - c_{ij} \delta w); \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

$$\delta(\hat{Q}^i \theta_i) = 2\hat{Q}^i \delta \theta_i = 2\hat{Q}^i (\delta \psi_i - \delta \vartheta_i) = 2\hat{Q}^i (\delta \psi_i + \nabla_i \delta w + b_i^k \delta u_k); \quad (2.4.8)$$

$$\begin{aligned}
\delta \left[ \mu^i (b_i^k \theta_k + \nabla_i \psi_3) \right] &= 2\mu^i (b_i^k \delta \theta_k + \nabla_i \delta \psi_3) = \\
&= 2\mu^i \left[ b_i^k (\delta \psi_k - \delta \theta_k) + \nabla_i \delta \psi_3 \right] = \\
&= 2\mu^i \left[ b_i^k (\delta \psi_k + \nabla_k \delta w + b_k^l \delta u_l) + \nabla_i \delta \psi_3 \right] = \\
&= 2\mu^i \left[ b_i^k (\delta \psi_k + \nabla_k \delta w) + c_i^k \delta u_k + \nabla_i \delta \psi_3 \right]. \tag{2.4.9}
\end{aligned}$$

Подставляя последние равенства в (2.4.5), получаем следующее выражение для вариации потенциальной энергии:

$$\begin{aligned}
\delta W = \iint_{\Pi} (b_i^k Q^i \delta u_k + T^{ij} \nabla_i \delta u_j - b_{ij} T^{ij} \delta w + Q^i \nabla_i \delta w + \\
+ M^{ij} \nabla_i \delta \psi_j + N \delta \psi_3 + \mu^i \nabla_i \delta \psi_3) dS, \tag{2.4.10}
\end{aligned}$$

где

$$Q^i = \hat{Q}^i + b_j^i \mu^j, T^{ij} = \hat{T}^{ij} + b_k^i M^{kj}, N = \hat{N} - b_{ij} M^{ij}. \tag{2.4.11}$$

Очевидно,  $\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  и  $\mathbf{Q} = Q^i \mathbf{e}_i$  — тензор второго ранга и вектор, определенные на пространстве  $P = d\Pi$ . За ними сохраняются такие же наименования, как и у величин  $\hat{\mathbf{T}}$  и  $\hat{\mathbf{Q}}$  в определении 2.1.1. Однако в отличие от  $\hat{\mathbf{T}}$  тензор  $\mathbf{T}$  несимметричный.

В равенство (2.4.10) кроме независимых вариаций кинематических параметров оболочки входят их производные, которые не являются произвольными. Для того, чтобы «избавиться» от них, используем теорему П.8.4 (эквивалентное ей равенство (П.8.20)):

$$\begin{aligned}
\iint_{\Pi} T^{ij} \nabla_i \delta u_j dS &= \iint_{\Pi} \nabla_i (T^{ij} \delta u_j) dS - \iint_{\Pi} \nabla_i T^{ij} \delta u_j dS = \\
= \int_{\Gamma} T^{ij} \nu_i \delta u_j ds - \iint_{\Pi} \nabla_i T^{ij} \delta u_j dS, \quad \iint_{\Pi} Q^i \nabla_i \delta w dS &= \int_{\Gamma} Q^i \nu_i \delta w ds - \iint_{\Pi} \nabla_i Q^i \delta w dS, \\
\iint_{\Pi} M^{ij} \nabla_i \delta \psi_j dS &= \int_{\Gamma} M^{ij} \nu_i \delta \psi_j ds - \iint_{\Pi} \nabla_i M^{ij} \delta \psi_j dS, \tag{2.4.12} \\
\iint_{\Pi} \mu^i \nabla_i \delta \psi_3 dS &= \int_{\Gamma} \mu^i \nu_i \delta \psi_3 ds - \iint_{\Pi} \nabla_i \mu^i \delta \psi_3 dS.
\end{aligned}$$



Подставляя теперь эти равенства в (2.4.5), с учетом (2.4.10), и записывая в скалярном виде вариацию работы внешних сил (2.2.8)

$$\begin{aligned} \delta A = & \iint_{\Pi} \left( q^i \delta u_i + m^i \delta \psi_i + q \delta w + m \delta \psi_3 \right) dS + \\ & + \int_{\Gamma} \left( T_{(0)}^i \delta u_i + M_{(0)}^i \delta \psi_i + Q_{(0)} \delta w + \mu_{(0)} \delta \psi_3 \right) ds, \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

приходим к следующему представлению вариации функционала Лагранжа в (2.4.4):

$$\begin{aligned} \delta I = & \iint_{\Pi} \left[ \left( b_{\lambda}^i Q^{\lambda} - \nabla_j T^{ji} - q^i \right) \delta u_i - \left( \nabla_i Q^i + b_{ij} T^{ij} + q \right) \delta w + \right. \\ & \left. + \left( Q^i - \nabla_j M^{ij} - m^i \right) \delta \psi_i + \left( N - \nabla_i \mu^i - m \right) \delta \psi_3 \right] dS + \\ & + \int_{\Gamma} \left[ \left( T^{ji} \nu_j - T_{(0)}^i \right) \delta u_i + \left( Q^i \nu_i - Q_{(0)} \right) \delta w + \right. \\ & \left. + \left( M^{ij} \nu_j - M_{(0)}^i \right) \delta \psi_i + \left( \mu^i \nu_i - \mu_{(0)} \right) \delta \psi_3 \right] ds. \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Далее, используя (2.1.12), находим вариацию кинетической энергии:

$$\delta E = \rho \iint_{\Pi} \left[ h \left( \dot{u}^i \delta \dot{u}_i + \dot{w} \delta \dot{w} \right) + I \left( \dot{\psi}^i \delta \dot{\psi}_i + \dot{\psi}_3 \delta \dot{\psi}_3 \right) \right] dS. \quad (2.4.15)$$

Здесь под знак вариаций входят производные по времени. Для того чтобы этого избежать, с использованием интегрирования по частям и учетом (2.4.2) преобразовываем интеграл по времени от  $\delta E$  (полагаем, что допустима перестановка интегралов):

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \delta E dt = \\ & = \rho \iint_{\Pi} \left[ h \left( \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}^i d(\delta u_i) + \int_{t_1}^{t_2} \dot{w} d(\delta w) \right) + I \left( \int_{t_1}^{t_2} \dot{\psi}^i d(\delta \psi_i) + \int_{t_1}^{t_2} \dot{\psi}_3 d(\delta \psi_3) \right) \right] dS + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + I \left( \int_{t_1}^{t_2} \dot{\psi}^i d(\delta\psi_i) + \int_{t_1}^{t_2} \dot{\psi}_3 d(\delta\psi_{33}) \right) \Big] dS = \rho \iint_{\Pi} \left[ h \left( \dot{u}^i \delta u_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}^i \delta u_i dt + \dot{w} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_{t_1}^{t_2} \dot{w} \delta w dt \right) + I \left( \dot{\psi}^i \delta \psi_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\psi}^i \delta \psi_i dt + \dot{\psi}_3 \delta \psi_3 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\psi}_3 \delta \psi_3 dt \right) \right] dS = \\
& = -\rho \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Pi} \left[ h \left( \ddot{u}^i \delta u_i + \ddot{w} \delta w \right) + I \left( \ddot{\psi}^i \delta \psi_i + \ddot{\psi}_3 \delta \psi_3 \right) \right] dS. \quad (2.4.16)
\end{aligned}$$

Подставляя (2.4.14) и (2.4.16) в (2.4.4) и используя основную лемму вариационного исчисления [13—15], получаем уравнения движения оболочки:

$$\begin{aligned}
\rho h \ddot{u}^i &= \nabla_j T^{ji} - b_j^i Q^j + q^i, \quad \rho h \ddot{w} = \nabla_i Q^i + b_{ij} T^{ij} + q, \\
\rho I \ddot{\psi}^i &= \nabla_j M^{ij} - Q^i + m^i, \quad \rho I \ddot{\psi}_3 = \nabla_\mu \mu^i - N + m. \quad (2.4.17)
\end{aligned}$$

Для замыкания этой системы уравнений к ней нужно добавить физический закон (2.3.9) ((2.3.11) или (2.3.15)), равенства (2.4.11), а также вытекающие из (1.3.18) и (1.3.20) кинематические соотношения:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{2} (\beta_{ij} + \beta_{ji}), \quad \alpha_{ij} = \nabla_i u_j - b_{ij} w, \\
\beta_{ij} &= \nabla_i \psi_j - b_{ij} \psi_3 + b_i^k \alpha_{kj}, \quad -\vartheta_i = \nabla_i w + b_i^k u_k, \quad \theta_k = \psi_k - \vartheta_k. \quad (2.4.18)
\end{aligned}$$

Можно показать, что эта замкнутая система уравнений имеет гиперболический тип.

Полагая, что граница срединной поверхности имеет вид  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ , где  $l(\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma) = 0$ , из (2.4.4) получаем так называемые «естественные» граничные условия как равенства, обращающие в ноль криволинейный интеграл в (2.4.14):

$$u_i \Big|_{\Gamma_u} = u_{(0)i}, \quad w \Big|_{\Gamma_u} = w_{(0)}, \quad \psi_i \Big|_{\Gamma_u} = \psi_{(0)i}, \quad \psi_3 \Big|_{\Gamma_u} = \psi_{(0)3}; \quad (2.4.19)$$

$$T^{ji}v_j|_{\Gamma_\sigma} = T_{(0)}^i, M^{ij}v_j|_{\Gamma_\sigma} = M_{(0)}^i, Q^i v_i|_{\Gamma_\sigma} = Q_{(0)}, \mu^i v_i|_{\Gamma_\sigma} = \mu_{(0)}. \quad (2.4.20)$$

Эти равенства вместе с (2.2.6) дают обоснование названий, введенных определением 2.1.1.

**Определение 2.4.1.** Граничные условия (2.4.19), (2.4.20) называются *смешанными* (соответствуют *III краевой задаче*). При  $\Gamma = \Gamma_u$  остаются только равенства (2.4.19) — *кинематические граничные условия* (соответствуют *I краевой задаче*), а при  $\Gamma = \Gamma_\sigma$  остаются только равенства (2.4.20) — *статические граничные условия* (соответствуют *II краевой задаче*).

Однородные кинематические ( $u_{(0)i} = w_{(0)} = 0, \psi_{(0)l} = \psi_{(0)3} = 0$ ) и статические ( $T_{(0)}^i = Q_{(0)} = 0, M_{(0)}^i = \mu_{(0)} = 0$ ) называются *жесткой заделкой* и *свободным краем* соответственно. ■

Возможны общие граничные условия следующего вида:

$$\chi_k(u_1, u_2, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3, T^{11}, T^{12}, T^{21}, T^{22}, M^{11}, M^{12}, M^{22}, Q^1, Q^2, \mu^1, \mu^2) = 0. \quad (2.4.21)$$

Однако функции  $\chi_k$  не могут быть произвольными. Равенства (2.4.21) должны быть такими, чтобы криволинейный интеграл в (2.4.14) обращался в ноль. Обычно выделяют следующие их частные варианты.

**Определение 2.4.2.** Условия вида

$$T^{ji}v_j|_{\Gamma_\sigma} = 0, M^{ij}v_j|_{\Gamma_\sigma} = 0, w|_{\Gamma_u} = 0, \mu^i v_i|_{\Gamma_\sigma} = 0 \quad (2.4.22)$$

называются *шарнирным опиранием*, а если

$$\psi_i|_{\Gamma_u} = 0, \psi_3|_{\Gamma_u} = 0, \quad (2.4.23)$$

то говорят о наличии *жесткой диафрагмы*. ■

Из вариационного уравнения Гамильтона (2.4.1), (2.4.2), как известно, не вытекают *начальные условия*. Их обычно, в соответствии

с порядком входящих в уравнения (2.4.17) производных, принимают такими:

$$\begin{aligned} u^i|_{t=t_0} &= f_u^i, \quad \dot{u}^i|_{t=t_0} = g_u^i, \quad w|_{t=t_0} = f_w, \quad \dot{w}|_{t=t_0} = g_w, \\ \Psi^j|_{t=t_0} &= f_\Psi^j, \quad \dot{\Psi}^j|_{t=t_0} = g_\Psi^j, \quad \Psi_3|_{t=t_0} = f_{\Psi_3}, \quad \dot{\Psi}_3|_{t=t_0} = g_{\Psi_3}. \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

Таким образом, движение оболочки определяется начально-краевой задачей (2.4.11), (2.4.17), (2.3.9), (2.4.18)—(2.4.20), (2.4.24).

В случае статических задач в (2.4.17) необходимо опустить инерционные члены:

$$\ddot{u}^i = \ddot{w} = 0, \quad \ddot{\Psi}^j = \ddot{\Psi}_3 = 0. \quad (2.4.25)$$

Тогда приходим к краевой задаче (2.4.17), (2.3.9), (2.4.11), (2.4.18)—(2.4.20).

В заключение этого раздела установим связь использованных в условиях (2.4.20) координат вектора  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ , входящего в утверждение (П.8.18) теоремы П.8.1, с параметрами боковой поверхности (1.2.18). Нормальный вектор к ней при выборе в качестве параметра  $t$  длины дуги  $s$  согласно (П.6.5), (1.2.7) при учете (1.2.19), (П.5.11), (П.8.5) и (П.8.8) вычисляется так:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_b &= [\mathbf{e}_{b1}, \mathbf{e}_{b2}] = \xi^{i'} [\mathbf{e}_i, \mathbf{n}] = \xi^{i'} q_i^j [\mathbf{e}_j, \mathbf{n}] = \left( \xi^{j'} - z \xi^{i'} b_i^j \right) \chi_{kj} \mathbf{e}^k = \\ &= \left( \xi^{j'} - z \xi^{i'} b_i^j \right) [\mathbf{e}_j, \mathbf{n}] = [\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}] - z \xi^{i'} b_i^j [\mathbf{e}_j, \mathbf{n}] = \mathbf{v} - z \xi^{i'} b_i^j [\mathbf{e}_j, \mathbf{n}]. \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

Следовательно,  $\mathbf{v}$  — единичный нормальный вектор к боковой поверхности при  $z = 0$  (на линии пересечения  $\Pi_b \cap \Pi = \Gamma$ ).

## 2.5. Оболочка типа Тимошенко

Наиболее часто используются классические модели оболочек с меньшим числом неизвестных функций. Для этого наряду с аксиомой 1 (см. раздел 1.3) вводятся дополнительные гипотезы.

**Аксиома 2.** Нормальное к срединной поверхности волокно не растяжимо. ■

Это предположение в силу (1.3.20) эквивалентно равенству

$$\Psi_3 \equiv 0. \quad (2.5.1)$$

Кроме того, принимаются гипотезы, позволяющие уменьшить число неизвестных усилий.

**Аксиома 3.** Напряжения  $\hat{\sigma}^{i3}$  распределены симметрично по нормали к срединной поверхности, т.е. являются четными функции координаты  $z$ . ■

Это предположение согласно формулам (2.1.5) и (2.4.11) приводит к таким равенствам:

$$\mu^i \equiv 0; \quad (2.5.2)$$

$$Q^i = \hat{Q}^i = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\sigma}^{i3} dz. \quad (2.5.3)$$

Еще один тип гипотез связан либо с распределением касательных напряжений и деформаций по нормали, либо с углом поворота нормали.

В модели типа Тимошенко используется первая из них.

**Аксиома 4Т.** Напряжения  $\hat{\sigma}^{i3}$  пропорциональны перерезывающему усилию:

$$h\hat{\sigma}^{i3} = Q^i f(z), \quad f(-z) = f(z), \quad (2.5.4)$$

а соответствующие сдвиговые деформации имеют тот же закон распределения по  $z$ :

$$\hat{\varepsilon}_{i3} = \varepsilon_i f(z), \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i(\xi^1, \xi^2). \quad \blacksquare \quad (2.5.5)$$

Подставляя (2.5.4) в (2.5.3), получаем равенство

$$hQ^i = Q^i \int_{-h/2}^{h/2} f(z) dz,$$

из которого в силу произвольности  $Q^i$  следует, что функция  $f(z)$  должна быть нормирована так:

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(z) dz = h. \quad (2.5.6)$$

Для определения  $\varepsilon_i$  в (2.5.5) приравняем полученную из (2.1.6) удельную (отнесенную к единице площади срединной поверхности) потенциальную энергию чисто сдвиговых ( $\varepsilon_{ij} = 0, \kappa_{ij} = 0$ ) деформаций к такой же величине, полученной с использованием (2.1.4), (2.5.4) и (2.5.5)

$$\int_{-h/2}^{h/2} \hat{\sigma}^{i3} \hat{\varepsilon}_{i3} dz = \frac{1}{k^2} Q^i \varepsilon_i, \quad \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\hat{n}} \int_{-h/2}^{h/2} f^2(z) dz, \quad (2.5.7)$$

получаем равенство  $2Q^i \varepsilon_i = k^2 Q^i \theta_i$ , из которого в силу произвольности  $Q^i$  получаем  $\varepsilon_i = k^2 \theta_i / 2$ . Тогда с учетом (2.5.3), (2.3.2) и (2.5.6) получаем физический закон для перерезывающих сил:

$$Q^i = 2 \int_{-h/2}^{h/2} C^{i3k3} \hat{\varepsilon}_{k3} dz = 2C^{i3k3} \varepsilon_k \int_{-h/2}^{h/2} f(z) dz = hk^2 C^{i3k3} \theta_k. \quad (2.5.8)$$

В общем, вид  $f(z)$  может быть выбран различными способами. Однако, как правило, полагают, что  $f(z)$  соответствует распределению касательных напряжений по высоте балки прямоугольного сечения с единичной шириной и высотой  $h$  (формула Журавского) [12]:

$$\hat{\sigma}^{i3} = \tau^i = \frac{6Q^i}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right), \quad f(z) = 6 \left( \frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right). \quad (2.5.9)$$

Легко проверяется, что такая функция  $f(z)$  удовлетворяет условию (2.5.6). Подстановка ее в (2.5.7) дает следующий результат для коэффициента  $k$ :

$$k^2 = 5/6. \quad (2.5.10)$$

Можно также принять  $f(z) = 1$ , что в силу (2.5.4) соответствует равномерному по толщине распределению касательных напряжений  $\sigma^{i3}$ . В этом варианте из (2.5.7) получаем  $k = 1$ . Тогда формула (2.5.8) согласно (2.4.11) и при  $\mu^j = 0$  совпадает с соответствующим равенством в (2.3.9).

Начально-краевая задача для этой модели вытекает из (2.4.17), (2.3.9), (2.4.11), (2.4.18)—(2.4.20), (2.4.24) с учетом всех выводов этого раздела:

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{u}^i &= \nabla_j T^{ji} - b_j^i Q^j + q^i, \quad \rho h \ddot{w} = \nabla_i Q^i + b_j^i T^{ij} + q, \\ \rho I \ddot{\Psi}^i &= \nabla_j M^{ij} - Q^i + m^i; \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

$$\hat{T}^{ij} = h C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad T^{ij} = \hat{T}^{ij} + b_k^i M^{kj}, \quad M^{ij} = I C^{ijkl} \kappa_{kl}, \quad Q^i = h k^2 C^{i3k3} \theta_k; \quad (2.5.12)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{2} (\beta_{ij} + \beta_{ji}), \quad \alpha_{ij} = \nabla_i u_j - b_{ij} w, \\ \beta_{ij} &= \nabla_i \Psi_j + b_i^k \alpha_{kj}, \quad -\vartheta_i = \nabla_i w + b_i^k u_k, \quad \theta_k = \Psi_k - \vartheta_k; \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

$$u_i \Big|_{\Gamma_u} = u_{(0)i}, \quad w \Big|_{\Gamma_u} = w_{(0)}, \quad \Psi_i \Big|_{\Gamma_u} = \Psi_{(0)i}; \quad (2.5.14)$$

$$T^{j\bar{j}} \nu_j \Big|_{\Gamma_\sigma} = T_{(0)}^i, \quad M^{j\bar{j}} \nu_j \Big|_{\Gamma_\sigma} = M_{(0)}^i, \quad Q^i \nu_i \Big|_{\Gamma_\sigma} = Q_{(0)}; \quad (2.5.15)$$

$$\begin{aligned} u^i \Big|_{t=t_0} &= f_u^i, \quad \dot{u}^i \Big|_{t=t_0} = g_u^i, \quad w \Big|_{t=t_0} = f_w, \\ \dot{w} \Big|_{t=t_0} &= g_w, \quad \Psi^i \Big|_{t=t_0} = f_\Psi^i, \quad \dot{\Psi}^i \Big|_{t=t_0} = g_\Psi^i. \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

По форме система уравнений (2.5.11)—(2.5.13) совпадает с (2.4.17) без последнего уравнения.

Можно показать, что и в этом варианте модели оболочки система уравнений (2.5.11)—(2.5.13) является гиперболической.

Для изотропной оболочки типа Тимошенко физический закон может быть получен из (2.5.12) с помощью соотношений (2.3.10), либо как частный случай равенств (2.3.11) с учетом модификации равенств для перерезывающих сил:

$$\begin{aligned} \hat{T}^{ij} &= h(\lambda g^{ij} \varepsilon + 2\varepsilon^{ij} \mu), \quad T^{ij} = \hat{T}^{ij} + b_k^i M^{kj}, \\ M^{ij} &= I(\lambda g^{ij} \kappa + 2\mu \kappa^{ij}), \quad Q^i = k^2 h \mu \theta^i. \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

Здесь  $\varepsilon$  и  $\kappa$  определяются равенствами (2.3.12) или откорректированными формулами (2.3.13):

$$\varepsilon = \operatorname{div} \mathbf{u} - 2Hw, \quad \kappa = \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} + b^{kl} \nabla_k u_l - 2(H^2 - K)w. \quad (2.5.18)$$

Физические соотношения (2.5.18), аналогично (2.3.15), также могут быть записаны с помощью технических постоянных:

$$\begin{aligned} \hat{T}^{ij} &= \frac{Eh}{1+\nu} \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon g^{ij} + \varepsilon^{ij} \right), \\ M^{ij} &= \frac{EI}{1+\nu} \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \kappa g^{ij} + \kappa^{ij} \right), \quad Q^i = \frac{Ehk^2}{2(1+\nu)} \theta^i. \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

Соответствующие модификации формулы для потенциальной и кинетической энергий, их вариаций и работы внешних сил получаются из (2.1.6) и (2.1.12), (2.4.14)—(2.4.16) и (2.2.8), если в них положить  $\psi_3 \equiv 0$ ,  $\mu^i \equiv 0$  и заменить  $\hat{Q}^i$  величиной  $Q^i$ .

В теории оболочек часто вместо аксиомы 2 используют другое предположение.

**Аксиома 2с** (*статическая гипотеза*). Нормальные напряжения в нормальном волокне отсутствуют:

$$\hat{\sigma}^{33} = 0. \quad \blacksquare \quad (2.5.20)$$



Последнее равенство дает возможность с помощью последнего соотношения в (2.3.2) исключить  $\hat{\varepsilon}_{33}$  и привести закон Гука к такой форме:

$$\hat{\sigma}^{ij} = A^{ijkl} \hat{\varepsilon}_{kl}, \hat{\sigma}^{i3} = 2C^{i3k3} \hat{\varepsilon}_{k3}, \quad (2.5.21)$$

где

$$A^{ijkl} = C^{ijkl} - C^{ij33} C^{33kl} / C^{3333}. \quad (2.5.22)$$

Очевидно,  $A^{ijkl}$  являются компонентами тензора четвертого ранга.

Отметим, что гипотеза (2.5.20) противоречива, поскольку, как следует из (2.3.8), приводит к линейной зависимости тангенциальных деформаций  $\varepsilon_{kl}$  от координаты  $z$ .

При ее использовании, как следует из (2.1.5), нормальное усилие равно нулю:

$$\hat{N} = 0, \quad (2.5.23)$$

и физический закон (2.5.12), с учетом (2.5.21), модифицируется следующим образом:

$$\hat{T}^{ij} = hA^{ijkl} \varepsilon_{kl}, T^{ij} = \hat{T}^{ij} + b_k^i M^{kj}, M^{ij} = IA^{ijkl} \kappa_{kl}, Q^i = hk^2 C^{i3k3} \theta_k. \quad (2.5.24)$$

В случае изотропной среды, как вытекает из (2.3.10) и (2.5.22), величины  $A^{ijkl}$  вычисляются так:

$$A^{ijkl} = \lambda' g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}), \quad (2.5.25)$$

где

$$\lambda' = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \lambda = \frac{E\nu}{1 - \nu^2}. \quad (2.5.26)$$

Отметим, что  $\lambda'$  совпадает с введенной в теории упругости величиной для плоского напряженного состояния.

Таким образом, при использовании статической гипотезы в физических соотношениях (2.5.18) упругую постоянную Ламе  $\lambda$  не-

обходимо заменить величиной  $\lambda'$ . При этом форма (2.5.17) этих соотношений модифицируется так:

$$\begin{aligned} \hat{T}^{ij} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [\nu \varepsilon g^{ij} + (1-\nu) \varepsilon^{\dot{ij}}], \quad T^{ij} = \hat{T}^{ij} + b_k^i M^{kj}, \\ M^{ij} &= \frac{EI}{1-\nu^2} [\nu \kappa g^{ij} + (1-\nu) \kappa^{\dot{ij}}], \quad Q^i = \frac{Ehk^2}{2(1+\nu)} \theta^i. \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

Приведем также уравнения совместности деформаций для оболочки типа Тимошенко. Они являются частным случаем соотношений (1.5.24)—(1.5.26), которые, в соответствии с (2.5.1), модифицируются так:

$$K_n(\varepsilon_{ij}, \kappa_{kl}) + L_n(\theta) = 0 \quad (n = 0, 1, 2), \quad (2.5.28)$$

где

$$\begin{aligned} L_1(\theta) &= l_b(\nabla_i \theta_j), \quad L_2(\theta) = -R\theta^1 + \frac{1}{2} \nabla_2(\nabla_1 \theta_2 - \nabla_2 \theta_1), \\ L_3(\theta, \psi_3) &= -R\theta^2 + \frac{1}{2} \nabla_1(\nabla_2 \theta_1 - \nabla_1 \theta_2), \end{aligned} \quad (2.5.29)$$

а операторы  $K_n(\varepsilon_{ij}, \kappa_{kl})$  по-прежнему задаются равенствами (1.5.25).

## 2.6. Оболочка Кирхгофа—Лява

В этой модели аксиомы 2—3 (см. разделы 1.3 и 2.5) сохраняются, а аксиома 1 модифицируется так.

**Аксиома 1К.** Нормальное к срединной поверхности в начальном состоянии прямолинейное материальное волокно остается прямолинейным и нормальным в актуальном состоянии. ■

Очевидно, это предположение аналогично используемой в сопротивлении материалов гипотезе Бернулли [12].

Аналитические выражения этой аксиомы следуют из раздела 1.4:

$$\theta_k = 0, \quad \psi_k = \vartheta_k. \quad (2.6.1)$$

Кроме того, вместо аксиомы 4Т вводится такая гипотеза.

**Аксиома 4К.** Скорости поворота нормального волокна и обусловленные поворотом инерционные силы пренебрежимо малы:

$$\dot{\psi}^i = 0, \ddot{\psi}^i = 0. \blacksquare \quad (2.6.2)$$

Соответствующая начально-краевая задача, очевидно, является частным случаем (2.5.11)—(2.5.16):

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{u}^i &= \nabla_j T^{ji} - b_j^i Q^j + q^i, \\ \rho h \ddot{w} &= \nabla_i Q^i + b_{ij} T^{ij} + q, \nabla_j M^{ij} - Q^i + m^i = 0; \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

$$\hat{T}^{ij} = h C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, T^{ij} = \hat{T}^{ij} + b_k^i M^{kj}, M^{ij} = IC^{ijkl} \kappa_{kl}; \quad (2.6.4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \alpha_{ij} = \nabla_i u_j - b_{ij} w,$$

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i \vartheta_j + \nabla_j \vartheta_i) + \frac{1}{2} (b_i^k \alpha_{kj} + b_j^k \alpha_{ki}), -\vartheta_i = \nabla_i w + b_i^k u_k; \quad (2.6.5)$$

$$u_i \Big|_{\Gamma_u} = u_{(0)i}, w \Big|_{\Gamma_w} = w_{(0)}, \vartheta_i \Big|_{\Gamma_\vartheta} = \vartheta_{(0)i}; \quad (2.6.6)$$

$$T^{ji} \nu_j \Big|_{\Gamma_\sigma} = T_{(0)}^i, M^{ij} \nu_j \Big|_{\Gamma_\sigma} = M_{(0)}^i, Q^j \Big|_{\Gamma_\sigma} = Q_{(0)}^j; \quad (2.6.7)$$

$$u^i \Big|_{t=t_0} = f_u^i, \dot{u}^i \Big|_{t=t_0} = g_u^i, w \Big|_{t=t_0} = f_w, \dot{w} \Big|_{t=t_0} = g_w. \quad (2.6.8)$$

Последнее уравнение в (2.6.3) позволяет выразить перерезывающие силы через моменты

$$Q^j = \nabla_j M^{ij} + m^i, \quad (2.6.9)$$

и свести систему уравнений движения к двум уравнениям:

$$\rho h \ddot{u}^i = \nabla_j T^{ji} - b_j^i \nabla_k M^{jk} + p^i, \rho h \ddot{w} = \nabla_i \nabla_j M^{ij} + b_{ij} T^{ij} + p, \quad (2.6.10)$$

где

$$p^i = q^i - b_j^i m^j, p = q + \nabla_j m^j. \quad (2.6.11)$$

Отметим, что это преобразование не понизило порядок системы уравнений, и, как можно показать, в отличие от модели типа Тимошенко система уравнений (2.6.10) является параболической.

Для изотропной оболочки Кирхгофа—Лява две формы записи физического закона вытекают из (2.5.17) и (2.5.19):

$$\hat{T}^{ij} = h(\lambda g^{ij} \varepsilon + 2\varepsilon^{ij} \mu), T^{ij} = \hat{T}^{ij} + b_k^i M^{kj}, M^{ij} = I(\lambda g^{ij} \kappa + 2\mu \kappa^{ij}); \quad (2.6.12)$$

$$\hat{T}^{ij} = \frac{Eh}{1+\nu} \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon g^{ij} + \varepsilon^{ij} \right), M^{ij} = \frac{EI}{1+\nu} \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \kappa g^{ij} + \kappa^{ij} \right). \quad (2.6.13)$$

В варианте модели Кирхгофа—Лява существенно упрощаются формулы (2.1.6) и (2.1.12) для потенциальной и кинетической энергий, а также равенство (2.2.8) для работы внешних сил:

$$W = \frac{1}{2} \iint_{\Pi} (\hat{T}^{ij} \varepsilon_{ij} + M^{ij} \kappa_{ij}) dS; \quad (2.6.14)$$

$$E = \frac{\rho h}{2} \iint_{\Pi} (\dot{u}_i \dot{u}^i + \dot{w}^2) dS; \quad (2.6.15)$$

$$A = \iint_{\Pi} [(\mathbf{q}, \mathbf{u}) + (\mathbf{m}, \Theta) + qw] dS + \int_{\Gamma} [(\mathbf{T}_{(0)}, \mathbf{u}) + (\mathbf{M}_{(0)}, \Theta) + Q_{(0)} w] ds. \quad (2.6.16)$$

Далее, как обычно принято для данной модели, будем пренебрегать поверхностными распределенными моментами:

$$\mathbf{m} = \mathbf{0}. \quad (2.6.17)$$

Тогда, как следует из (2.6.11),

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} = p^i \mathbf{e}_i, p = q, \quad (2.6.18)$$

и равенство (2.6.14) записывается так:

$$A = \iint_{\Pi} [(\mathbf{p}, \mathbf{u}) + pw] dS + \int_{\Gamma} [(\mathbf{T}_{(0)}, \mathbf{u}) + (\mathbf{M}_{(0)}, \Theta) + Q_{(0)} w] ds. \quad (2.6.19)$$

Упрощаются также равенства (2.4.14) и (2.4.16) для вариаций функционала Лагранжа и кинетической энергии:

$$\begin{aligned} \delta I = & \iint_{\Pi} \left[ (b_k^i Q^k - \nabla_j T^{ji} - p^i) \delta u_i - (\nabla_i Q^i + b_{ij} T^{ij} + p) \delta w + \right. \\ & \left. + (Q^i - \nabla_j M^{ij}) \delta \vartheta_i \right] dS + \\ & + \int_{\Gamma} \left[ (T^{ji} \nu_j - T_0^i) \delta u_i + (Q^i \nu_i - Q_{(0)}) \delta w + (M^{ij} \nu_j - M_0^i) \delta \vartheta_i \right] ds; \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E dt = -\rho h \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Pi} (\bar{u}^i \delta u_i + \bar{w} \delta w) dS. \quad (2.6.21)$$

Поверхностный интеграл от последнего слагаемого в (2.6.20) нуждается в преобразовании, поскольку, в силу (2.6.5), вариации  $\delta \vartheta_i$  не являются независимыми. Эту операцию выполняем с помощью теоремы П.8.1 (эквивалентного ей равенства (П.8.20)):

$$\begin{aligned} & \iint_{\Pi} (Q^i - \nabla_j M^{ij}) \delta \vartheta_i dS = \iint_{\Pi} (\nabla_j M^{ij} - Q^i) (\nabla_i \delta w + b_i^k \delta u_k) dS = \\ = & \iint_{\Pi} \left[ b_i^k (\nabla_j M^{ij} - Q^i) \delta u_k - (\nabla_i \nabla_j M^{ij} - \nabla_i Q^i) \delta w \right] dS + \int_{\Gamma} (\nabla_j M^{ij} - Q^i) \nu_i \delta w dS. \end{aligned}$$

Подставляя это равенство в (2.6.20), приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} \delta I = & \iint_{\Pi} \left[ (b_k^i \nabla_j M^{kj} - \nabla_j T^{ji} - p^i) \delta u_i - (b_{ij} T^{ij} + \nabla_i \nabla_j M^{ij} + p) \delta w \right] dS + \\ & + \int_{\Gamma} \left\{ (T^{ji} \nu_j - T_{(0)}^i) \delta u^i + (Q^i \nu_i - Q_{(0)}) \delta w + (M^{ij} \nu_j - M_{(0)}^i) \delta \vartheta_i \right\} ds, \end{aligned} \quad (2.6.22)$$

$$Q^i = \nabla_j M^{ij}.$$

Часто необходима обратная форма физического закона (2.6.12). Для ее построения сначала найдем первые инварианты  $T$  и  $M$  тензоров  $\hat{T}$  и  $\mathbf{M}$ :

$$T = \hat{T}^{ij} g_{ij} = 2h(\lambda + \mu)\varepsilon, \quad M = M^{ij} g_{ij} = 2I(\lambda + \mu)\kappa. \quad (2.6.23)$$

Определяя отсюда инварианты  $\theta$ ,  $\kappa$  и подставляя их в (2.6.12), приходим к искомой *обратной форме физического закона*:

$$2\mu h \varepsilon_{ij} = \hat{T}_{ij} - \frac{\lambda T g_{ij}}{2(\lambda + \mu)}, \quad 2\mu I \kappa_{ij} = M_{ij} - \frac{\lambda M g_{ij}}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.6.24)$$

Подставляя в формулы (2.6.23) и (2.6.24) равенства (2.3.14), получаем их выражения через технические постоянные:

$$T = \frac{E h \varepsilon}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad M = \frac{E I \kappa}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (2.6.25)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E h} (\hat{T}_{ij} - \nu T g_{ij}), \quad \kappa_{ij} = \frac{1 + \nu}{E I} (M_{ij} - \nu M g_{ij}). \quad (2.6.26)$$

При использовании статической гипотезы аналогично разделу 2.5, в соотношениях (2.6.23), (2.6.24)  $\lambda$  нужно заменить  $\lambda'$  из (2.5.26), а вместо равенств (2.6.23) и (2.6.24) должны использоваться следующие соотношения:

$$T = \frac{E h \varepsilon}{1 - \nu}, \quad M = \frac{E I \kappa}{1 - \nu}. \quad (2.6.27)$$

Определяя отсюда инварианты  $\varepsilon$ ,  $\kappa$  и подставляя их в (2.6.12), приходим к искомой *обратной форме физического закона*:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E h} [(1 + \nu) \hat{T}_{ij} - \nu T g_{ij}], \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{E I} [(1 + \nu) M_{ij} - \nu M g_{ij}]. \quad (2.6.28)$$

Приведем также *уравнения совместности деформаций для оболочки Кирхгофа—Лява*, которые вытекают из (2.5.28) при использовании (2.6.1):

$$K_n(\varepsilon_{ij}, \kappa_{kl}) = 0 \quad (n = 0, 1, 2), \quad (2.6.29)$$

где операторы  $K_n(\varepsilon_{ij}, \kappa_{kl})$  задаются равенствами (1.5.25).

Эти уравнения с точностью до обозначений совпадают с аналогичными соотношениями, полученными другим способом в [1].

## 2.7. Общие теоремы теории оболочек

Поскольку оболочки являются линейно упругими телами, то для них как следствия из теории упругости [11] справедливы следующие утверждения.

**Теорема 2.7.1** (*закон сохранения механической энергии*). Для любой оболочки выполняется соотношение

$$A = E + W, \quad (2.7.1)$$

где потенциальная энергия  $W$ , кинетическая энергия  $E$  и работа внешних сил  $A$  определяются равенствами (2.1.6), (2.1.12) и (2.2.8) или их соответствующими частными случаями из п.п. 2.5 и 2.6. ■

**Теорема 2.7.2** (*теорема взаимности, модель п. 2.4*). Пусть для одной и той же оболочки компоненты напряженно-деформированного состояния  $\mathbf{u}', \boldsymbol{\psi}', w', \psi'_3$  и  $\mathbf{T}', \mathbf{M}', \mathbf{Q}', \mu', N'$  соответствуют внешним нагрузкам  $\mathbf{q}', \mathbf{m}', q', m'$  и  $\mathbf{T}'_{(0)}, \mathbf{M}'_{(0)}, \mathbf{Q}'_{(0)}, \mu'_{(0)}$ , а  $\mathbf{u}'', \boldsymbol{\psi}'', w'', \psi''_3$  и  $\mathbf{T}'', \mathbf{M}'', \mathbf{Q}'', \mu'', N''$  — нагрузкам  $\mathbf{q}'', \mathbf{m}'', q'', m''$  и  $\mathbf{T}'', \mathbf{M}'', \mathbf{Q}'', \mu''_{(0)}$ . Тогда имеет место равенство

$$A_{12} = A_{21}, \quad (2.7.2)$$

где

$$\begin{aligned} A_{12} = & \iint_{\Pi} [(\mathbf{q}' - \rho h \ddot{\mathbf{u}}', \mathbf{u}'') + (\mathbf{m}' - I \dot{\boldsymbol{\psi}}', \boldsymbol{\psi}'') + (q' - \rho h \dot{w}') w'' + (m' - \rho I \dot{\psi}'_3) \psi''_3] dS + \\ & + \int_{\Gamma} [(\mathbf{T}'_{(0)}, \mathbf{u}'') + (\mathbf{M}'_{(0)}, \boldsymbol{\psi}'') + \mathbf{Q}'_{(0)} w'' + \mu'_{(0)} \psi''_3] ds, \\ A_{21} = & \iint_{\Pi} [(\mathbf{q}'' - \rho h \ddot{\mathbf{u}}'', \mathbf{u}') + (\mathbf{m}'' - I \dot{\boldsymbol{\psi}}'', \boldsymbol{\psi}') + (q'' - \rho h \dot{w}'') w' + (m'' - \rho I \dot{\psi}''_3) \psi'_3] dS + \\ & + \int_{\Gamma} [(\mathbf{T}''_{(0)}, \mathbf{u}') + (\mathbf{M}''_{(0)}, \boldsymbol{\psi}') + \mathbf{Q}''_{(0)} w' + \mu''_{(0)} \psi'_3] ds. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Теорема 2.7.2Г** (*теорема взаимности, оболочка типа Тимошенко*). Пусть для одной и той же оболочки типа Тимошенко компоненты напряженно-деформированного состояния  $\mathbf{u}', \boldsymbol{\psi}', w'$  и  $\mathbf{T}', \mathbf{M}', \mathbf{Q}'$  соответствуют внешним нагрузкам  $\mathbf{q}', \mathbf{m}', q'$  и  $\mathbf{T}'_{(0)}, \mathbf{M}'_{(0)}, \mathbf{Q}'_{(0)}$ ,

а  $\mathbf{u}''$ ,  $\boldsymbol{\psi}''$ ,  $w''$  и  $\mathbf{T}''$ ,  $\mathbf{M}''$ ,  $Q''$  — нагрузкам  $\mathbf{q}''$ ,  $\mathbf{m}''$ ,  $q''$  и  $\mathbf{T}'_{(0)}$ ,  $\mathbf{M}'_{(0)}$ ,  $Q'_{(0)}$ . Тогда имеет место равенство (2.7.2), в котором нужно положить  $\boldsymbol{\psi}''_3 = \boldsymbol{\psi}''_3 \equiv 0$ . ■

**Теорема 2.7.2К** (*теорема взаимности, оболочка Кирхгофа—Лява*). Пусть для одной и той же оболочки Кирхгофа—Лява компоненты напряженно-деформированного состояния  $\mathbf{u}'$ ,  $w'$  и  $\mathbf{T}'$ ,  $\mathbf{M}'$  соответствуют внешним нагрузкам  $\mathbf{p}'$ ,  $p'$  и  $\mathbf{T}'_{(0)}$ ,  $\mathbf{M}'_{(0)}$ ,  $Q'_{(0)}$ , а  $\mathbf{u}''$ ,  $w''$  и  $\mathbf{T}''$ ,  $\mathbf{M}''$  — нагрузкам  $\mathbf{p}''$ ,  $p''$  и  $\mathbf{T}''_{(0)}$ ,  $\mathbf{M}''_{(0)}$ ,  $Q''_{(0)}$ . Тогда имеет место равенство (2.7.2), в котором нужно положить

$$\begin{aligned}
 A_{12} &= \iint_{\Pi} [(\mathbf{p}' - \rho h \bar{\mathbf{u}}', \mathbf{u}'') + (p' - \rho h \bar{w}') w''] dS + \\
 &\quad + \int_{\Gamma} [(\mathbf{T}'_{(0)}, \mathbf{u}'') + (\mathbf{M}'_{(0)}, \boldsymbol{\Theta}'') + Q'_{(0)} w''] ds, \\
 A_{21} &= \iint_{\Pi} [(\mathbf{p}'' - \rho h \bar{\mathbf{u}}'', \mathbf{u}') + (p'' - \rho h \bar{w}'') w'] dS + \\
 &\quad + \int_{\Gamma} [(\mathbf{T}''_{(0)}, \mathbf{u}') + (\mathbf{M}''_{(0)}, \boldsymbol{\Theta}') + Q''_{(0)} w'_3] ds. \blacksquare
 \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

**Теорема 2.7.3** (*теорема Клапейрона*). Пусть оболочка находится в состоянии покоя под действием внешних сил. Тогда выполняется равенство

$$2W = A, \tag{2.7.4}$$

где потенциальная энергия  $W$  и работа внешних сил  $A$  определяются равенствами (2.1.6) и (2.2.8) или их соответствующими частными случаями из п.п. 2.5 и 2.6. ■

С помощью теоремы 2.7.1 абсолютно аналогично теории упругости [11] с использованием положительной определенности подынтегральных функций в выражениях для потенциальной и кинетической энергий доказываются следующие утверждения.

**Теорема 2.7.4** (*единственность решения динамических задач*). Решение начально-краевой задачи (2.3.9), (2.4.11), (2.4.17)—(2.4.20), (2.4.24) (задачи (2.5.11)—(2.5.16) или (2.6.3)—(2.6.8)) единственно. ■



**Теорема 2.7.5** (единственность решения статических задач). Решение краевой задачи (2.3.9), (2.4.17)—(2.4.20) при  $\ddot{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{0}, \ddot{\boldsymbol{\psi}} \equiv \mathbf{0}, \ddot{\mathbf{w}} \equiv 0, \ddot{\boldsymbol{\psi}}_3 \equiv 0$  (задачи (2.5.11)—(2.5.15) при  $\ddot{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{0}, \ddot{\boldsymbol{\psi}} \equiv \mathbf{0}, \ddot{\mathbf{w}} \equiv 0$  или (2.6.3)—(2.6.7) при  $\ddot{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{0}, \ddot{\mathbf{w}} \equiv 0$ ) единственно. ■

## 2.8. Уравнения движения в перемещениях

Из полученных выше уравнений (2.3.9), (2.4.11), (2.4.17) и (2.4.18), аналогично уравнениям Ламе в теории упругости [11], можно исключить усилия и деформации. Соответствующие преобразования с учетом симметрии тензора упругих постоянных (величины  $c_{ij}$  определены в (П.7.25)) приводят к следующему результату:

$$\ddot{\mathbf{W}} = \mathbf{L}\mathbf{W} + \mathbf{P}. \quad (2.8.1)$$

Здесь

$$\mathbf{L} = \left( L_j^i \right)_{6 \times 6}, \quad \mathbf{W} = \left( u^1, u^2, w, \psi^1, \psi^2, \psi_3 \right)^T, \quad (2.8.2)$$

$$\mathbf{P} = \left( \frac{q^1}{\rho h}, \frac{q^2}{\rho h}, \frac{q}{\rho h}, \frac{m^1}{\rho I}, \frac{m^2}{\rho I}, \frac{m}{\rho I} \right)^T,$$

где  $L_{ij}$  — дифференциальные операторы в частных производных следующих порядков:  $L_3^i, L_j^3, L_3^{3+i}, L_6^i, L_6^{3+i}, L_j^6, L_{3+j}^6$  имеют первый порядок, а  $L_j^i, L_{3+j}^i, L_3^3, L_{3+j}^3, L_j^{3+i}, L_{3+j}^{3+i}, L_6^3, L_3^5, L_6^5$  — второй порядок.

Для оболочек типа Тимошенко и Кирхгофа—Лява аналогичный анализ также приводит к системе уравнений (2.8.1). При этом соотношения (2.8.2) соответственно заменяются такими равенствами:

$$\mathbf{L} = \left( L_j^i \right)_{5 \times 5}, \quad \mathbf{W} = \left( u^1, u^2, w, \psi^1, \psi^2 \right)^T, \quad \mathbf{P} = \left( \frac{q^1}{\rho h}, \frac{q^2}{\rho h}, \frac{q}{\rho h}, \frac{m^1}{\rho I}, \frac{m^2}{\rho I} \right)^T; \quad (2.8.3)$$

$$\mathbf{L} = \left( K_j^i \right)_{3 \times 3}, \quad \mathbf{W} = \left( u^1, u^2, w \right)^T, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{\rho h} \left( p^1, p^2, p \right)^T. \quad (2.8.4)$$

При этом операторы в (2.8.3) совпадают с указанными выше, а операторы в (2.8.4) имеют такие порядки:  $K_j^i$  — второй,  $K_3^i$  и  $K_j^3$  — третий,  $K_3^3$  — четвертый.

Конкретный вид дифференциальных операторов не приводится в силу их громоздкости. Более того, в такой форме они практически не используются. Обычно уравнения движения в перемещениях записываются в физических компонентах векторов. Пример такой формы для изотропных круговых цилиндрических и сферических оболочек типа Тимошенко и Кирхгофа—Лява приведен в [16].

## 2.9. Начально-краевые задачи для оболочек в главных координатах

Запишем теперь начально-краевые задачи для трех полученных выше моделей оболочек в наиболее часто используемых главных ортогональных координатах (см. определение П.6.5) с использованием соотношений (П.6.26), (П.6.28)—(П.6.32) и (П.7.17). Сначала рассмотрим начально-краевую задачу (2.4.11), (2.4.17), (2.3.9), (2.4.18)—(2.4.20), (2.4.24). Соответствующие уравнения движения принимают следующий вид (здесь и далее, если не оговорено противное, звездочки в обозначениях физических компонент опущены):

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{u}_1 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial(H_2 T_{11})}{\partial \xi^1} + \frac{\partial(H_1 T_{21})}{\partial \xi^2} + T_{12} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} - T_{22} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right] - k_1 Q_1 + q_1, \\ \rho h \ddot{u}_2 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial(H_2 T_{12})}{\partial \xi^1} + \frac{\partial(H_1 T_{22})}{\partial \xi^2} + T_{21} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} - T_{11} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right] - k_2 Q_2 + q_2, \end{aligned} \quad (2.9.1)$$

$$\rho h \dot{w} = \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial(H_2 Q_1)}{\partial \xi^1} + \frac{\partial(H_1 Q_2)}{\partial \xi^2} \right] + k_1 T_{11} + k_2 T_{22} + q;$$

$$\rho I \ddot{\Psi}_1 = \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial(H_2 M_{11})}{\partial \xi^1} + \frac{\partial(H_1 M_{12})}{\partial \xi^2} + M_{12} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} - M_{22} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right] - Q_1 + m_1, \quad (2.9.2)$$

$$\rho I \ddot{\Psi}_2 = \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial(H_2 M_{12})}{\partial \xi^1} + \frac{\partial(H_1 M_{22})}{\partial \xi^2} + M_{12} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} - M_{11} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right] - Q_2 + m_2;$$

$$\rho I \ddot{\Psi}_3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial(H_2 \mu_1)}{\partial \xi^1} + \frac{\partial(H_1 \mu_2)}{\partial \xi^2} \right] - N + m. \quad (2.9.3)$$

Кинематические соотношения (2.4.18) записываются так:

$$2\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji}, \quad \alpha_{12} = \frac{1}{H_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \xi^1} - \frac{u_1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right), \quad \alpha_{21} = \frac{1}{H_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \xi^2} - \frac{u_2}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right), \quad (2.9.4)$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{H_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \xi^1} + \frac{u_2}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right) - k_1 w, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{H_2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \xi^2} + \frac{u_1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right) - k_2 w;$$

$$\kappa_{11} = \frac{1}{H_1} \left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi^1} + \frac{\Psi_2}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right) + k_1 (\alpha_{11} - \Psi_3),$$

$$\kappa_{22} = \frac{1}{H_2} \left( \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi^2} + \frac{\Psi_1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right) + k_2 (\alpha_{22} - \Psi_3); \quad (2.9.5)$$

$$2\kappa_{12} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi^1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{H_1 H_2} \left( \Psi_1 \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} + \Psi_2 \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right) + k_1 \alpha_{12} + k_2 \alpha_{21}, \quad (2.9.6)$$

$$-\vartheta_1 = k_1 u_1 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \xi^1}, \quad -\vartheta_2 = k_2 u_2 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \xi^2}, \quad \theta_i = \Psi_i - \vartheta_i.$$

Физические соотношения (2.3.9) с учетом (2.4.11) приобретают такой вид:

$$T_{1j} = \hat{T}_{1j} + k_1 M_{1j}, \quad T_{2j} = \hat{T}_{2j} + k_2 M_{2j},$$

$$\hat{T}_{ij} = h(C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + C_{ij33} \Psi_3), \quad M_{ij} = IC_{ijkl} \kappa_{kl}; \quad (2.9.7)$$

$$Q_1 = \hat{Q}_1 + k_1 \mu_1, \quad Q_2 = \hat{Q}_2 + k_2 \mu_2, \quad N = \hat{N} - k_1 M_{11} - k_2 M_{22},$$

$$\hat{Q}_i = h C_{i3k3} \theta_k, \quad \mu_i = I \left[ C_{i313} \left( k_1 \theta_1 + \frac{\partial \Psi_3}{\partial \xi^1} \right) + C_{i323} \left( k_2 \theta_2 + \frac{\partial \Psi_3}{\partial \xi^2} \right) \right], \quad (2.9.8)$$

$$\hat{N} = h(C_{33kl} \varepsilon_{kl} + C_{3333} \Psi_3).$$

Здесь, в соответствии с (П.6.28), под упругими постоянными  $C_{ijkl}$ ,  $C_{i3k3}$ ,  $C_{33kl}$  и  $C_{3333}$  понимаются физические компоненты соответствующего тензора:  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = H_\alpha H_\beta H_\gamma H_\delta C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ,  $C_{\alpha\alpha\beta\beta}^* = H_\alpha H_\beta C^{\alpha\alpha\beta\beta}$ ,  $C_{33\gamma\delta}^* = H_\gamma H_\delta C^{33\gamma\delta}$  и  $C_{3333}^* = C^{3333}$ .

Кинематические граничные условия сохраняют вид (2.4.19), а условия (2.4.20) переходят в следующие равенства:

$$T_{ji} \nu_j \Big|_{\Gamma_\sigma} = T_{i(0)}, M_{ij} \nu_j \Big|_{\Gamma_\sigma} = M_{i(0)}, Q_i \Big|_{\Gamma_\sigma} = Q_{i(0)}, \mu_i \nu_i \Big|_{\Gamma_\sigma} = \mu_{(0)}. \quad (2.9.9)$$

В начальных условиях (2.4.24) меняется только расположение индексов:

$$\begin{aligned} u_i \Big|_{t=t_0} &= f_{ui}, \dot{u}_i \Big|_{t=t_0} = g_{ui}, w \Big|_{t=t_0} = f_w, \dot{w} \Big|_{t=t_0} = g_w, \\ \Psi_i \Big|_{t=t_0} &= f_{\Psi i}, \dot{\Psi}_i \Big|_{t=t_0} = g_{\Psi i}, \Psi_3 \Big|_{t=t_0} = f_{\Psi 3}, \dot{\Psi}_3 \Big|_{t=t_0} = g_{\Psi 3}. \end{aligned} \quad (2.9.10)$$

Начально-краевая задача для оболочки типа Тимошенко, в соответствии с материалом п. 2.5, вытекает из соотношений (2.9.1)–(2.9.10). При этом уравнение (2.9.3) исключается, изменяются кинематические и физические соотношения (2.9.5) и (2.9.8), а также граничные и начальные условия (2.9.9) и (2.9.10):

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \frac{1}{H_1} \left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi^1} + \frac{\Psi_2}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right) + k_1 \alpha_{11}, \\ \kappa_{22} &= \frac{1}{H_2} \left( \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi^2} + \frac{\Psi_1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right) + k_2 \alpha_{22}; \end{aligned} \quad (2.9.11)$$

$$Q_i = hk^2 C_{i3k3}; \quad (2.9.12)$$

$$T_{ji} \nu_j \Big|_{\Gamma_\sigma} = T_{i(0)}, M_{ij} \nu_j \Big|_{\Gamma_\sigma} = M_{i(0)}, Q_i \Big|_{\Gamma_\sigma} = Q_{i(0)}; \quad (2.9.13)$$

$$\begin{aligned} u_i \Big|_{t=t_0} &= f_{ui}, \dot{u}_i \Big|_{t=t_0} = g_{ui}, w \Big|_{t=t_0} = f_w, \\ \dot{w} \Big|_{t=t_0} &= g_w, \Psi_i \Big|_{t=t_0} = f_{\Psi i}, \dot{\Psi}_i \Big|_{t=t_0} = g_{\Psi i}. \end{aligned} \quad (2.9.14)$$

Если материал оболочки типа Тимошенко изотропный, то физические соотношения (2.9.7) и (2.9.12) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} T_{1j} &= \hat{T}_{1j} + k_1 M_{1j}, \quad T_{2j} = \hat{T}_{2j} + k_2 M_{2j}, \\ \hat{T}_{ij} &= h(\lambda \delta_{ij} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ij}), \quad M^{ij} = I(\lambda \delta_{ij} \kappa + 2\mu \kappa_{ij}), \quad Q_i = k^2 h \mu \theta_i. \end{aligned} \quad (2.9.15)$$

При использовании технических постоянных последняя строка в этих равенствах записывается так:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{ij} &= \frac{Eh}{1+\nu} \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} \right), \\ M^{ij} &= \frac{EI}{1+\nu} \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \kappa \delta_{ij} + \kappa_{ij} \right), \quad Q_i = \frac{Ehk^2}{2(1+\nu)} \theta_i. \end{aligned} \quad (2.9.16)$$

Соответствующие соотношения для оболочки Кирхгофа—Лява получаем из начально-краевой задачи для оболочки типа Тимошенко с использованием гипотез (2.6.1), (2.6.2), (2.6.17) и (2.6.18). При этом уравнения движения принимают вид:

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{u}_1 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial(H_2 T_{11})}{\partial \xi^1} + \frac{\partial(H_1 T_{21})}{\partial \xi^2} + T_{12} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} - T_{22} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right] - k_1 Q_1 + p_1, \\ \rho h \ddot{u}_2 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial(H_2 T_{12})}{\partial \xi^1} + \frac{\partial(H_1 T_{22})}{\partial \xi^2} + T_{21} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} - T_{11} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right] - k_2 Q_2 + p_2, \\ \rho h \ddot{w} &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial(H_2 Q_1)}{\partial \xi^1} + \frac{\partial(H_1 Q_2)}{\partial \xi^2} \right] + k_1 T_{11} + k_2 T_{22} + p. \end{aligned} \quad (2.9.17)$$

Кинематические соотношения (2.9.4) сохраняются, а (2.9.5), (2.9.6) и (2.9.11) переходят в такие равенства:

$$\kappa_{11} = \frac{1}{H_1} \left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \xi^1} + \frac{\vartheta_2}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right) + k_1 \alpha_{11}, \quad \kappa_{22} = \frac{1}{H_2} \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \xi^2} + \frac{\vartheta_1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right) + k_2 \alpha_{22},$$

$$2\kappa_{12} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \xi^1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{H_1 H_2} \left( \vartheta_1 \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} + \vartheta_2 \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right) + k_1 \alpha_{12} + k_2 \alpha_{21}, \quad (2.9.18)$$

$$-\vartheta_1 = k_1 u_1 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \xi^1}, \quad -\vartheta_2 = k_2 u_2 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \xi^2}.$$

К ним добавляются вытекающая из (2.6.9) связь перерезывающих сил с моментами

$$Q_1 = \frac{1}{H_1} \left( \frac{\partial M_{11}}{\partial \xi^1} + \frac{2M_{12}}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right) + \frac{1}{H_2} \left( \frac{\partial M_{12}}{\partial \xi^2} + \frac{M_{11} - M_{22}}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right) + m_1,$$

$$Q_2 = \frac{1}{H_1} \left( \frac{\partial M_{12}}{\partial \xi^1} + \frac{M_{22} - M_{11}}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right) + \frac{1}{H_2} \left( \frac{\partial M_{22}}{\partial \xi^2} + \frac{2M_{12}}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right) + m_2.$$

К ним добавляются физические соотношения (2.9.7), кинематические граничные условия (2.6.6) и (2.9.13), а также соответствующим образом видоизмененные начальные условия (2.6.8):

$$u_i|_{t=t_0} = f_{ui}, \quad \dot{u}_i|_{t=t_0} = g_{ui}, \quad w|_{t=t_0} = f_w, \quad \dot{w}|_{t=t_0} = g_w. \quad (2.9.19)$$

Если материал оболочки Кирхгофа—Лява изотропный, то в физических соотношениях (2.9.15) и (2.9.16) необходимо отбросить равенства для перерезывающих сил  $Q_i$ .

## 2.10. Уравнения совместности деформаций в главных координатах

В заключение аналогично п. 2, используя формулы (П.6.23)—(П.6.34), (П.7.17) и (П.7.18), построим уравнения совместности деформаций для всех трех моделей оболочек в главных координатах.

Сначала рассмотрим уравнения (1.5.24). Для их преобразования находим следующие комбинации вторых производных компонент вектора  $\theta$  и симметричного тензора второго ранга  $\epsilon$ :

$$\nabla_2 (\nabla_1 \theta_2 - \nabla_2 \theta_1) = H_1^2 H_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left[ \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial (H_2 \theta_2^*)}{\partial \xi^1} - \frac{\partial (H_1 \theta_1^*)}{\partial \xi^2} \right] \right]; \quad (2.10.1)$$

$$\begin{aligned}
& \nabla_1(\nabla_1 \varepsilon_{22} - \nabla_2 \varepsilon_{12}) = H_2^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{(\partial \xi^1)^2} - H_1 H_2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + \\
& + H_2 \left( \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} - \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^1} \right) \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \xi^1} + H_1 \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \xi^2} - H_2 \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \xi^1} + \\
& + H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi^2} - 3 H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi^1} - 2 H_2 \left( \frac{\partial^2 H_1}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right) \varepsilon_{12} - \\
& - (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \left[ H_2 \frac{\partial^2 H_2}{(\partial \xi^1)^2} - \left( \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right)^2 - \left( \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right)^2 - \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right]. \quad (2.10.2)
\end{aligned}$$

Используя их, приходим к следующим уравнениям совместности деформаций:

$$K_{n*}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) + L_{n*}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}_3) = 0 \quad (n=0,1,2), \quad (2.10.3)$$

где

$$\begin{aligned}
& K_{0*}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) = -k_2 \kappa_{11} - k_1 \kappa_{22} + k_1 k_2 (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \\
& + \frac{1}{H_1 H_2} \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left[ \frac{1}{H_1} \left[ \frac{\partial (H_2 \varepsilon_{22})}{\partial \xi^1} - H_1 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi^2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} - 2 \varepsilon_{12} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right] \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left[ \frac{1}{H_2} \left[ \frac{\partial (H_1 \varepsilon_{11})}{\partial \xi^2} - H_2 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi^1} - \varepsilon_{22} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} - 2 \varepsilon_{12} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right] \right] \right\rangle, \quad (2.10.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L_{0*}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}_3) = -2k_1 k_2 \psi_3 + \\
& + \frac{1}{H_1 H_2} \left[ k_2 \frac{\partial (H_2 \theta_1)}{\partial \xi^1} + k_1 \frac{\partial (H_1 \theta_2)}{\partial \xi^2} + (k_1 - k_2) \left( \theta_1 \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} - \theta_2 \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right) \right]; \\
& K_{1*}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{H_2} \left[ \frac{\partial (H_1 \kappa_{12})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial (H_2 \kappa_{22})}{\partial \xi^1} + \kappa_{11} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} + \kappa_{12} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} + \right. \\
& \left. + \varepsilon_{12} \left[ k_1 \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial (H_1 k_2)}{\partial \xi^2} \right] + (k_1 - k_2) \left( H_1 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi^2} - H_2 \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \xi^1} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$L_{1*}(\theta, \psi_3) = \frac{H_1^2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial(H_2 \theta_2)}{\partial \xi^1} - \frac{\partial(H_1 \theta_1)}{\partial \xi^2} \right] \right\} - \quad (2.10.5)$$

$$- k_1 k_2 H_1 \theta_1 - k_2 \frac{\partial \psi_3}{\partial \xi^1}.$$

Равенства для операторов  $K_{2*}(\epsilon, \kappa)$  и  $L_{2*}(\theta, \psi_3)$  не приводятся, поскольку они вытекают из (2.10.5) при перемене местами индексов 1 и 2.

Отметим, что при построении формулы для оператора  $K_{0*}(\epsilon, \kappa)$  использованы легко проверяемые равенства:

$$\frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left( \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \epsilon_{11}}{\partial \xi^2} + \frac{\epsilon_{11}}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left( \frac{\epsilon_{11}}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \left( \frac{2}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} - \frac{H_1}{H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial \epsilon_{11}}{\partial \xi^2} + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{(\partial \xi^2)^2} - \frac{\epsilon_{11}}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\epsilon_{11}}{H_2} \frac{\partial^2 H_1}{(\partial \xi^2)^2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial \epsilon_{11}}{\partial \xi^1} + \frac{\epsilon_{11}}{H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^1} - \frac{\epsilon_{11}}{H_1} \frac{\partial^2 H_2}{(\partial \xi^1)^2} \right]; \quad (2.10.6)$$

$$- \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial \xi^1} + 2 \frac{\epsilon_{12}}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left( \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\epsilon_{12}}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right) \right] =$$

$$= - \frac{2}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial \xi^2} - \frac{\epsilon_{12}}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^2} + \frac{\epsilon_{12}}{H_2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial \xi^1} - \frac{\epsilon_{12}}{H_1^2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^1} + \frac{\epsilon_{12}}{H_1} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \right]; \quad (2.10.7)$$

а также соотношение, вытекающее из (2.10.6) при перемене местами индексов 1 и 2.

Для оболочки типа Тимошенко уравнения совместности деформаций несколько упрощаются за счет равенства  $\psi_3 \equiv 0$  (см. (2.5.1)).



Для оболочки Кирхгофа—Лява эти уравнения с использованием формул (2.5.1) и (2.6.1) записываются так:

$$K_{n*}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) = 0 \quad (n = 0, 1, 2). \quad (2.10.8)$$

Отметим, что последние соотношения переходят в полученные в [1] уравнения совместности деформаций, если ввести новые обозначения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \quad \omega = 2\varepsilon_{12}, \quad \kappa_1 = v_{ij} = \kappa_{11} - k_1 \varepsilon_{11}, \\ \kappa_2 &= v_{22} = \kappa_{22} - k_2 \varepsilon_{22}, \quad \tau = \frac{1}{2}(v_{12} + v_{21}) = \kappa_{12} - (k_1 + k_2) \varepsilon_{12}, \end{aligned}$$

где  $v_{ij}$  — физические компоненты соответствующего несимметричного тензора, указанного в (1.5.7).

# Приложение. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

## П.1. Понятие риманова пространства

Напомним основные определения, связанные с обобщением евклидова пространства — римановым пространством [9], а также дополним их некоторыми новыми терминами.

**Определение П.1.1.** Пусть  $V^n$  — множество элементов, которым поставлено во взаимно однозначное соответствие упорядоченные совокупности чисел  $(x^1, \dots, x^n) \in D_x \subset R^n$ , и на  $D_x$  задана невырожденная симметрическая матрица  $\mathbf{G} = (g_{ij})_{n \times n}$ .

Тогда  $V^n$  называется *римановым пространством размерности  $n$* , если:

а) функции  $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$  непрерывно дифференцируемы на  $D_x$

( $g_{ij} \in C^1(D_x)$ );

б) свойства матрицы  $\mathbf{G}$  инвариантны относительно группы допустимых преобразований

$$x^i = x^i(y^1, \dots, y^n), (y^1, \dots, y^n) \in D_y \subset R^n. \quad (\text{П.1.1})$$

За элементами риманова пространства  $V^n$  сохраняется принятое для евклидовых пространств название *точка*, за  $\mathbf{G}$  — *фундаментальная матрица*, а за числами  $x^i$  — *координаты точки  $M(x^1, \dots, x^n)$* . ■

В каждой точке риманова пространства по формулам

$$p_j^i = \left. \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right|_M, q_j^i = \left. \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right|_M \quad (\text{П.1.2})$$

определяются матрицы  $\mathbf{P} = (p_j^i)_{n \times n}$  и  $\mathbf{Q} = (q_j^i)_{n \times n}$ , которые считаются *матрицами перехода* между некоторыми базисами  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}'_j$ . Эти базисы вместе с матрицей  $\mathbf{G}$  образуют аналог точечного евклидова

пространства  $dV^n(M)$  с точками  $M_1(x^1 + dx^1, \dots, x^n + dx^n)$  и векторами (здесь  $d\mathbf{r}$  — обозначение)

$$\overline{MM_1} = d\mathbf{r} = dx^i \mathbf{e}_i, \quad (\text{П.1.3})$$

которое называется *касательным* к риманову пространству  $V^n$  в точке  $M$ .

Отметим, что в общем случае фундаментальная матрица  $\mathbf{G}$  может не быть положительно определенной. Однако результаты для евклидова пространства, не требующие ее положительной определенности, остаются в силе, чем и будем пользоваться далее.

Размерность  $dV^n(M)$ , очевидно, совпадает с размерностью самого пространства, и в нем  $d\mathbf{r}$  — радиус-вектор. Здесь может рассматриваться скалярное произведение векторов  $d\mathbf{r} = dx^i \mathbf{e}_i$  и  $d\mathbf{p} = dy^j \mathbf{e}_j$ :

$$(d\mathbf{r}, d\mathbf{p}) = g_{ij}(x^1, \dots, x^n) dx^i dy^j, \quad (\text{П.1.4})$$

в том числе остаются справедливыми все утверждения для евклидова пространства, не требующие положительной определенности фундаментальной матрицы  $\mathbf{G}$ , чем и будем пользоваться далее.

При этом элементы  $g_{ij}$  и  $g^{ij}$  фундаментальной матрицы и обратной к ней являются компонентами метрического тензора  $\mathbf{g}$  и имеют место равенства

$$g_{ij}(x^1, \dots, x^n) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \quad (\text{П.1.5})$$

В римановом пространстве определяются тензорные поля и, в том числе, операции над ними, включая ковариантное дифференцирование, как соответствующие понятия для касательного пространства. Символы Кристоффеля при этом непосредственно определяются формулами

$$\Gamma_{ij,n} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{in}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jn}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n} \right), \quad \Gamma_{ij}^k = g^{kn} \Gamma_{ij,n}. \quad (\text{П.1.6})$$

Также остаются в силе и остальные понятия евклидова пространства. В том числе аналогичным образом определяется поверхность.

**Определение П.1.2.**  $k$ -мерной поверхностью  $\Pi_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) в  $V^n$  называется совокупность точек  $M \in V^n$ , задаваемых отображением

$$x^i = x^i(\xi^1, \dots, \xi^k) \in C^1(D_\xi) \quad (i=1, \dots, n), \quad (\xi^1, \dots, \xi^k) \in D_\xi \subset R^k, \quad (\text{П.1.7})$$

где для любых  $(\xi^1, \dots, \xi^k) \in D_\xi$  ранг матрицы Якоби равен  $k$ :

$$\text{Rg} \mathbf{P}_k = k, \quad \mathbf{P}_k = (p'_{ij})_{n \times k}, \quad p'_{ij} = \left. \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right|_M.$$

При  $k=1$  поверхность называется *кривой*, а при  $k=n-1$  — *гиперповерхностью* или просто *поверхностью*.

При  $x^i(\xi^1, \dots, \xi^k) \in C^m(D_\xi)$  ( $m \geq 1$ ) поверхность  $\Pi_k$  называется *поверхностью класса  $C^m$*  (обозначение  $\Pi_k \in C^m$ ). В случае  $\Pi_k \in C^1$  также используется наименование *гладкая поверхность*. Если

$$\Pi_k = \bigcup_{j=1}^N \Pi_{kj}, \quad \text{где } \Pi_{kj} \in C^1 \text{ и на непустых пересечениях } \Pi_{kj} \cap \Pi_{kl} \quad (j \neq l)$$

условия гладкости не выполняются, то поверхность называется *кусочно-гладкой*. ■

Для кривой будем использовать следующие обозначения (координата  $\xi^1 = t$  также называется *параметром*):

$$\Pi_1 = \Gamma: x^i = x^i(t), \quad t \in D_t = [\alpha, \beta]. \quad (\text{П.1.8})$$

При  $k=n$  и  $D_\xi = D_x$  поверхность  $\Pi_n$ , очевидно, совпадает с  $V^n$ .

Далее в касательном пространстве  $dV^n(M)$  рассмотрим векторы

$$\mathfrak{e}_j = p'_{ij} \mathbf{e}_i, \quad (\text{П.1.9})$$

и с их использованием построим матрицу (скалярное произведение определено в (П.1.4))

$$\mathbf{G}_\Pi = (g_{\Pi ij})_{k \times k}, \quad g_{\Pi ij} = (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j). \quad (\text{П.1.10})$$

**Теорема П.1.1.** Поверхность  $\Pi_k$  в совокупности с матрицей (П.1.10) является римановым пространством размерности  $k$ . При этом векторы (П.1.9) — его базис, а  $g_{\Pi ij}$  — компоненты метрического тензора  $\mathbf{g}_\Pi$  на  $\Pi_k$ , для которых справедливо равенство

$$g_{\Pi ij} = g_{km} p_{\Pi i}^k p_{\Pi j}^m. \quad \blacksquare \quad (\text{П.1.11})$$

**Доказательство.** Согласно определению П.1.2 векторы (П.1.9) линейно независимы и, следовательно, матрица  $\mathbf{G}_\Pi$  невырожденная симметрическая. Выполнение условий а) и б) определения П.1.2 вытекает из теорем о свойствах сложных отображений [17]. Таким образом, поверхность  $\Pi_k$  в совокупности с матрицей (П.1.10) является римановым пространством размерности  $k$ .

Последняя часть утверждения следует из независимости векторов (П.1.9) и из формул (П.1.5) и (П.1.10).  $\blacksquare$

**Определение П.1.3.**  $m$ -мерной касательной плоскостью  $P_m$  ( $1 \leq m \leq k$ ) к поверхности  $\Pi_k$  в точке  $M \in \Pi_k$  называется касательное пространство  $d\Pi_k(M)$ .

При  $m = 1$  плоскость  $L = P_1$  называется *касательной прямой* (просто *касательной*), а если  $m = k$ , то  $P = P_k$  — просто *касательная плоскость*.  $\blacksquare$

Очевидно,  $m$ -мерная касательная плоскость является таковой и в точечном евклидовом пространстве  $dV^n(M)$  [8].

Отметим, что это равенство может быть записано в виде связи фундаментальных матриц  $\mathbf{G}_\Pi$  и  $\mathbf{G}$  поверхности  $\Pi_k$  и пространства  $V^n$  соответственно (матрица  $\mathbf{P}_k$  определена в (П.1.7)):

$$\mathbf{G}_{\Pi} = \mathbf{P}_k^T \mathbf{G} \mathbf{P}_k. \quad (\text{П.1.12})$$

Для кривой как одномерного пространства будем использовать специальные обозначения и наименования.

**Определение П.1.4.** Базисный вектор кривой  $\Gamma = \widehat{M_1 M_2}$  (П.1.8)

$$\mathfrak{e}_1 = \mathbf{T} \quad (\text{П.1.13})$$

называется *касательным* вектором к этой кривой.

Точки  $M_1(x^1(\alpha), \dots, x^n(\alpha))$  и  $M_2(x^1(\beta), \dots, x^n(\beta))$  — *начало* и *конец* кривой соответственно. ■

Из формул (П.1.7) и (П.1.9)—(П.1.13) получаем следующее утверждение.

**Следствие П.1.1.** Для кривой  $\Gamma$  (П.1.8) имеют место следующие равенства:

$$\mathbf{P}_1 = (p_{1j}^i)_{m \times l}, \quad p_{1j}^i = \dot{x}^i, \quad \dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial t}; \quad (\text{П.1.14})$$

$$\mathbf{T} = \dot{x}^i \mathbf{e}_i; \quad (\text{П.1.15})$$

$$\mathbf{G}_{\Pi} = \mathbf{G}_{\Gamma} = (g_{\Gamma})_{|x|} = \mathbf{P}_1^T \mathbf{G} \mathbf{P}_1, \quad g_{\Gamma} = g_{km} \dot{x}^k \dot{x}^m. \quad \blacksquare \quad (\text{П.1.16})$$

Далее в касательной плоскости  $P_k$  к  $k$ -мерной поверхности  $\Pi_k$  в  $V^n$  как в евклидовом пространстве рассмотрим ориентированный параллелепипед, построенный на векторах  $d\xi^1 \mathfrak{e}_1, d\xi^2 \mathfrak{e}_2, \dots, d\xi^k \mathfrak{e}_k$  [8, 9]. Его объем вычисляется так:

$$dV = \sqrt{|g_{\Pi}|} d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^k, \quad g_{\Pi} = \det \mathbf{G}_{\Pi}. \quad (\text{П.1.17})$$

С использованием этого равенства введем следующие понятия.

**Определение П.1.5.** *Площадь  $k$ -мерной поверхности  $\Pi_k$*  (П.1.7) называется интеграл

$$S(\Pi_k) = \int_{D_t} \sqrt{|g_{\Pi}|} d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^k. \quad (\text{П.1.18})$$

Если на поверхности  $\Pi_k$  определена скалярная функция  $f(M)$ , то

$$\int_{\Pi_k} f(M) dS_k = \int_{D_t} f(M) \sqrt{|g_{\Pi}|} d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^k \quad (\text{П.1.19})$$

— интеграл от  $f(M)$  по  $\Pi_k$ .

При  $k = n$  (поверхность есть  $V^n$ ) и  $k = 1$  (поверхность — кривая  $\Gamma$ ) вместо площади используются наименования *объем* и *длина*, а для поверхности (гиперповерхности  $\Pi = \Pi_{n-1}$ ) сохраняется то же название, и формулы (П.1.18) и (П.1.19) соответственно записываются так:

$$V = \int_{D_x} \sqrt{|g|} dx^1 dx^2 \dots dx^n, \quad \int_{V^n} f(M) dS_k = \int_{D_x} f(M) \sqrt{|g|} dx^1 dx^2 \dots dx^n; \quad (\text{П.1.20})$$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{|g_{\Gamma}|} dt, \quad \int_{\Gamma} f(M) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(M) \sqrt{|g_{\Gamma}|} dt; \quad (\text{П.1.21})$$

$$S = \int_{D_{\xi}} \sqrt{|g_{\Pi}|} d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^{n-1},$$

$$\int_{\Pi} f(M) dS = \int_{D_{\xi}} f(M) \sqrt{|g_{\Pi}|} d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^{n-1}. \quad \blacksquare \quad (\text{П.1.22})$$

Далее будет показано, что если риманово пространство является трехмерным евклидовым, то величины (П.1.20)—(П.1.22) совпадают с известными понятиями и формулами математического анализа.

## П.2. Параллельный перенос в римановом пространстве

**Определение П.2.1.** Абсолютным дифференциалом вдоль кривой  $\Gamma$  (П.1.8) в римановом пространстве  $V^n$  (просто абсолютным дифференциалом) ковариантных (контравариантных) компонент вектора  $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i = u_i \mathbf{e}^i \in C^1(\Gamma)$  называются компоненты следующих геометрических объектов первого ранга:

$$Du_j = D_{\Gamma} u_j = \nabla_i u_j dx^i, \quad Du^j = D_i u^j = \nabla_i u^j dx^i, \quad (\text{П.2.1})$$

где  $M(x^1, \dots, x^n) \in \Gamma$ ,  $dx^i = \dot{x}^i dt$ .

Аналогично определяются абсолютные дифференциалы компонентов  $t_{i_1 i_2 \dots i_r}$ , ... тензора  $\mathbf{t}$  произвольного ранга  $r$ :

$$Dt_{i_1 i_2 \dots i_r} = \nabla_k t_{i_1 i_2 \dots i_r} dx^k, \quad Dt^{i_1 i_2 \dots i_r} = \nabla_k t^{i_1 i_2 \dots i_r} dx^k \dots \blacksquare \quad (\text{П.2.2})$$

Далее везде, где это не приведет к разночтениям, нижний индекс «Г» будем опускать.

**Теорема П.2.1.** Абсолютные дифференциалы тензора ранга  $r$  являются компонентами тензора того же ранга.

**Доказательство.** Достаточно заметить, что определенные равенствами (П.2.2) величины являются свертками по первому индексу тензора ранга  $r + 1$  с вектором:

$$Dt = {}_1(\mathbf{P}d\mathbf{r})^1 = {}_1(\mathbf{P}d\mathbf{r})_1, \quad \mathbf{P} = \nabla_k t_{i_1 i_2 \dots i_r} \mathbf{e}^k \mathbf{e}^{i_1} \mathbf{e}^{i_2} \dots \mathbf{e}^{i_r}, \quad d\mathbf{r} = dx^k \mathbf{e}_k. \blacksquare \quad (\text{П.2.3})$$

**Определение П.2.2.** Тензор  $D\mathbf{t}$  в (П.2.3) называется абсолютным дифференциалом тензора  $\mathbf{t}$ .  $\blacksquare$

**Определение П.2.3.** Тензор  $\mathbf{t}$  параллельно переносится вдоль кривой  $\Gamma$ , если для любой точки  $M \in \Gamma$  имеет место равенство:

$$D\mathbf{t} = \mathbf{0}. \blacksquare \quad (\text{П.2.4})$$

В том числе при параллельном переносе вектора  $\mathbf{u}$  должно выполняться равенство  $D\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , которое в координатной форме эквивалентно одной из систем уравнений ( $j = 1, 2, \dots, n$ ):

$$Du_j = \nabla_i u_j dx^i = 0; \quad (\text{П.2.5})$$

$$Du^j = \nabla_i u^j dx^i = 0. \quad (\text{П.2.6})$$

Определение П.2.3 является обобщением известного из векторной алгебры определения параллельного переноса.



**Пример П.2.1.** Пусть  $V^n$  является евклидовым пространством. Выберем в качестве  $x^i$  декартовы координаты. При этом  $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$ . Тогда для ковариантных производных и абсолютных дифференциалов компонент вектора  $\mathbf{u}$  имеют место равенства:

$$\nabla_i u^j = \frac{\partial u^j}{\partial x^i}, \quad \nabla_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x^i}, \quad Du_j = \frac{\partial u_j}{\partial x^i} dx^i = du_j.$$

Следовательно, абсолютный дифференциал вектора  $\mathbf{u}$  совпадает с его полным дифференциалом:  $D\mathbf{u} = d\mathbf{u}$ , и из уравнения параллельного переноса (П.2.4) вытекает известный результат  $\mathbf{u}|_\Gamma = \text{const}$  (рис. П.2.1).

Очевидно, аналогичный вывод справедлив и для тензора  $\mathbf{t}$  произвольного ранга. ■

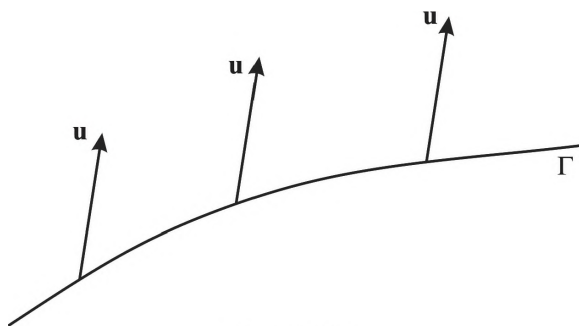


Рис. П.2.1

Отметим еще некоторые свойства параллельного переноса.

**Теорема П.2.2.** При параллельном переносе в римановом пространстве  $V^n$  тензор нулевого ранга (скаляр)  $\varphi$  не меняется.

**Доказательство.** Из определения П.2.3 вытекает равенство

$$D\varphi = \nabla_k \varphi dx^k = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} dx^k = d\varphi = 0, \quad (\text{П.2.7})$$

из которого и следует утверждение. ■

Отсюда практически очевидным образом вытекают такие утверждения.

**Следствие П.2.1.** При параллельном переносе в римановом пространстве  $V^n$  полная свертка тензоров  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{p}$  не меняется, т.е. для любых точек  $M_1, M_2 \in \Gamma$  имеет место равенство:

$$(\mathbf{t}, \mathbf{p})|_{M_1} = (\mathbf{t}, \mathbf{p})|_{M_2}. \blacksquare \quad (\text{П.2.8})$$

**Следствие П.2.2.** При параллельном переносе в римановом пространстве  $V^n$  полная свертка (скалярное произведение) векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  не меняется, т.е. для любых точек  $M_1, M_2 \in \Gamma$  имеет место равенство:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})|_{M_1} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})|_{M_2}. \blacksquare$$

### П.3. Специальные кривые в римановом пространстве

Как указано в разделе П.1, фундаментальная квадратичная форма  $g(d\mathbf{r})$  в общем случае не является положительно определенной. Поэтому могут существовать такие ненулевые векторы (*направления*)  $d\mathbf{r} = dx^i \mathbf{e}_i \neq \mathbf{0}$ , что

$$g(d\mathbf{r}) = g_{ij} dx^i dx^j = 0. \quad (\text{П.3.1})$$

**Определение П.3.1.** Направления, удовлетворяющие равенству (П.3.1), называются *изотропными*.  $\blacksquare$

Очевидно, для каждого не изотропного направления  $d\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$  существует такое число  $\varepsilon(d\mathbf{r}) = \pm 1$ , что справедливо неравенство

$$\varepsilon(d\mathbf{r}) g_{ij} dx^i dx^j > 0. \quad (\text{П.3.2})$$

**Определение П.3.2.** Использованное в (П.3.1) число  $\varepsilon(d\mathbf{r})$  называется *знаковым для не изотропного направления  $d\mathbf{r}$* , а число  $(d\mathbf{r} = \overline{MM_1})$

$$\|\mathbf{dr}\| = |\mathbf{dr}| = \rho(M, M_1) = \sqrt{\varepsilon g(\mathbf{dr})} = \sqrt{\varepsilon g_{ij} dx^i dx^j} \quad (\text{П.3.3})$$

— расстоянием между точками

$$M(x^1, \dots, x^n), M_1(x^1 + dx^1, \dots, x^n + dx^n) \in dV^n(M)$$

(нормой, длиной, модулем вектора  $\mathbf{dr}$ ).

Если направление изотропное, то полагаем  $ds = \rho(M, M_1) = 0$ . ■

Таким образом, в римановом пространстве даже при  $M \neq M_1$  расстояние между точками может быть равным нулю:  $\rho(M, M_1) = 0$ .

Дополнительно к формуле (П.3.2) введем понятие угла между направлениями.

**Определение П.3.3.** Угол  $\beta$  между двумя не изотропными направлениями  $\mathbf{dr}, \mathbf{dp} \in dV^n(M)$  задается так:

$$\cos \beta = \frac{(\mathbf{dr}, \mathbf{dp})}{|\mathbf{dr}| |\mathbf{dp}|}. \quad (\text{П.3.4})$$

Если хотя бы одно направление изотропное, то угол не определен. ■

В общем случае угол  $\beta$  может оказаться комплексным. В евклидовом пространстве для всех направлений  $\varepsilon(\mathbf{dr}) = 1$  формулы (П.3.3) и (П.3.4) переходят в известные равенства.

Введенные выше понятия применяются к кривым.

**Определение П.3.4.** Если в любой точке  $M$  кривой  $\Gamma$  касательное направление (касательный вектор) (П.1.13) является изотропным, то она называется *изотропной кривой (кривой нулевой длины)*. ■

Пусть кривая  $\Gamma$  (П.1.8) не изотропная. С использованием (П.1.16) и (П.1.21) найдем длину дуги  $\Gamma(t) \subset \Gamma$ :

$$s(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{\varepsilon g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} dt. \quad (\text{П.3.5})$$

Величину  $s$  можно выбрать в качестве параметра (*естественного параметра*) кривой  $\Gamma$  (обратная функция  $t = t(s)$  существует в силу соответствующих теорем математического анализа):

$$\Gamma: x^i = x^i(t(s)), \quad 0 \leq s \leq l, \quad (\text{П.3.6})$$

где  $l$  — длина кривой  $\Gamma$ .

**Теорема П.3.1.** При задании неизотропной кривой в виде (П.3.6) касательный вектор  $\tau$  является единичным.

**Доказательство.** В соответствии с (П.1.15) и (П.3.3) имеют место равенство

$$|\tau|^2 ds^2 = \varepsilon(\tau) g_{ij} dx^i dx^j. \quad (\text{П.3.7})$$

Но из (П.3.5) вытекает, что правая часть последнего равенства равна  $ds^2$ . Следовательно,  $|\tau|^2 = 1$ , что и приводит к сформулированному утверждению. ■

С помощью определения П.3.3 вводится следующее понятия.

**Определение П.3.5.** Пусть  $M = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$  и касательные направления к кривым  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  в точке  $M$  не являются изотропными. *Углом между этими кривыми* называется угол между соответствующими касательными векторами. ■

В римановых пространствах существуют кривые, обладающие свойствами прямых в евклидовых пространствах. Можно показать, что последние обладают следующим свойством:

$$\rho(M_1, M_2) = \min_{M_1 M_2} l \left| \overline{M_1 M_2} \right| = \left| \overline{M_1 M_2} \right|. \quad (\text{П.3.8})$$

**Определение П.3.6.** Кривая  $\Gamma$  с началом и концом в точках  $M_1$  и  $M_2$  называется *геодезической линией*, если для ее длины выполняется равенство

$$l(\Gamma) = \min_{M_1 M_2} l(\overline{M_1 M_2}), \quad (\text{П.3.9})$$

где  $\overline{M_1 M_2}$  — произвольная кривая с тем же началом и концом. ■

Если  $\widehat{M_1 M_2} : x^i = x^i(t), \alpha \leq t \leq \beta$ , то согласно (П.3.5)

$$l(\widehat{M_1 M_2}) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varepsilon g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} dt, \quad (\text{П.3.10})$$

и (П.3.9) — задача вариационного исчисления для интегрального функционала относительно функций  $x^i = x^i(t), i = 1, 2, \dots, n$ . Начальными условиями для нее является требование  $M_1(x_*^1, \dots, x_*^n) \in \Gamma$  и задание координат касательного вектора  $\tau$  в этой точке:

$$\xi^i(\alpha) = \xi_*^i, \quad \tau^i(\alpha) = \tau_*^i. \quad (\text{П.3.11})$$

На этой задаче подробно останавливаться не будем.

**Определение П.3.7.** Кривая  $\Gamma$  называется *изотропной геодезической*, если она обладает каждым из этих свойств. ■

#### П.4. Многогранник Френе

В римановом пространстве рассмотрим кривую, задаваемую с помощью естественного параметра (см. (П.3.6)):

$$\Gamma : x^i = x^i(s), \quad 0 \leq s \leq l. \quad (\text{П.4.1})$$

В точке  $M \in \Gamma$ , для которой касательное направление не является изотропным, введем следующую совокупность единичных векторов:

$$\mathbf{v}_{(0)} = \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{v}_{(1)}, \quad \mathbf{v}_{(2)}, \dots, \quad \mathbf{v}_{(n-1)}, \quad (\mathbf{v}_{(m)}, \mathbf{v}_{(n)}) = \delta_{mn}, \quad (\text{П.4.2})$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный касательный вектор;  $\delta_{mn}$  — символ Кронекера.

Перед доказательством существования системы (П.4.2) установим два вспомогательных утверждения (здесь и далее штрихом обозначены производные по параметру  $s$ ).

**Лемма П.4.1.** Для единичного вектора  $\boldsymbol{\tau} = \tau^i \mathbf{e}_i$  имеет место равенство

$$g_{ij} \tau^i \tau^j = \varepsilon(\boldsymbol{\tau}). \quad \blacksquare \quad (\text{П.4.3})$$

Доказательство. Поскольку вектор  $\tau$  единичный, то из (П.3.7) с учетом (П.1.15) получаем соотношения

$$1 = \varepsilon(\tau) g_{ij} x^i x^j = \varepsilon(\tau) g_{ij} \tau^i \tau^j,$$

откуда и следует (П.4.3). ■

**Лемма П.4.2.** Пусть  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$  и  $\boldsymbol{\mu} = \mu^i \mathbf{e}_i$  — определенные на кривой  $\Gamma$  векторы.

Если  $\mathbf{v}$  — единичный вектор, то

$$(\mathbf{v}, D\mathbf{v}) = 0. \quad (\text{П.4.4})$$

Если  $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = 0$ , то

$$(\mathbf{v}, D\boldsymbol{\mu}) = -(\boldsymbol{\mu}, D\mathbf{v}). \quad (\text{П.4.5})$$

Доказательство. Пусть  $\mathbf{v}$  — единичный вектор со знаком  $\varepsilon$ . Тогда, в соответствии с леммой П.4.1,  $g_{ij} v^i v^j = \varepsilon$ . Отсюда с использованием определения П.2.1 (для абсолютного дифференциала имеют место правила, аналогичные обычным дифференциалам) получаем равенство  $g_{ij} (v^j Dv^i + v^i Dv^j) = 0$ , которое в силу симметрии компонентов метрического тензора можно записать так:  $2g_{ij} v^i Dv^j = 0$ , что эквивалентно (П.4.4).

Пусть теперь  $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = 0$ , т.е.  $g_{ij} v^i \mu^j = 0$ . Следовательно,

$$g_{ij} (Dv^i \mu^j + D\mu^j v^i) = 0,$$

откуда вытекает равенство  $g_{ij} v^i D\mu^j = -g_{ij} \mu^j Dv^i$ , которое приводит к (П.4.5). ■

**Теорема П.4.1.** Пусть  $M \in \Gamma \subset V^n$ ,  $\Gamma \in C^n$  и любое направление в касательном пространстве  $dV^n(M)$  не является изотропным. Тогда система векторов (П.4.2) существует.

Доказательство проведем непосредственным построением этой системы, которое аналогично процессу ортогонализации в евклидовом пространстве [8].

Существование единичного касательного вектора  $\mathbf{v}_{(0)} = \boldsymbol{\tau}$  устанавливается теоремой П.3.1. Вектор  $\mathbf{v}_{(1)}$  зададим так:

$$\frac{D\boldsymbol{\tau}}{ds} = \kappa_1 \mathbf{v}_{(1)}, \quad \kappa_1 = \left| \frac{D\boldsymbol{\tau}}{ds} \right|. \quad (\text{П.4.6})$$

Очевидно, он является единичным, и в силу леммы П.4.2 имеет место равенство  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}_{(1)}) = 0$ , т.е.  $\mathbf{v}_{(1)}$  удовлетворяет требованиям (П.4.2).

Рассматриваем теперь систему векторов  $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}_{(1)}, D\mathbf{v}_{(1)}$  и из нее получаем ортогональную систему  $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}_{(1)}, \mathbf{N}_{(2)} = \alpha\boldsymbol{\tau} + \beta\mathbf{v}_{(1)} + D\mathbf{v}_{(1)}$  ( $\varepsilon$  и  $\varepsilon_1$  знаковые числа векторов  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{v}_{(1)}$  соответственно):

$$(\mathbf{N}_{(2)}, \boldsymbol{\tau}) = 0 = \alpha(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) + \beta(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}_{(1)}) + (\boldsymbol{\tau}, D\mathbf{v}_{(1)}) = \alpha\varepsilon - (\mathbf{v}_{(1)}, D\boldsymbol{\tau}),$$

$$(\mathbf{N}_{(2)}, \mathbf{v}_{(1)}) = 0 = \alpha(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}_{(1)}) + \beta(\mathbf{v}_{(1)}, \mathbf{v}_{(1)}) + (\mathbf{v}_{(1)}, D\mathbf{v}_{(1)}) = \beta\varepsilon_1.$$

Здесь использована ортогональность векторов  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{v}_{(1)}$ , их единичность, а также леммы П.4.1 и П.4.2.

Из этой системы уравнений, с учетом (П.4.6), находим коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ :  $\beta = 0$ ,  $\alpha = \varepsilon(\mathbf{v}_{(1)}, D\boldsymbol{\tau}) = \varepsilon\varepsilon_1\kappa_1 ds$ . Таким образом, вектор  $\mathbf{N}_{(2)}$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{N}_{(2)} = \varepsilon\varepsilon_1\kappa_1 ds\boldsymbol{\tau} + D\mathbf{v}_{(1)}.$$

Единичный вектор  $\mathbf{v}_{(2)}$  получаем, нормируя вектор  $\mathbf{N}_{(2)}$ :

$$\kappa_2 \mathbf{v}_{(2)} = \varepsilon\varepsilon_1\kappa_1 \boldsymbol{\tau} + \frac{D\mathbf{v}_{(1)}}{ds}, \quad \kappa_2 = \left| \varepsilon\varepsilon_1\kappa_1 \boldsymbol{\tau} + \frac{D\mathbf{v}_{(1)}}{ds} \right|.$$

С использованием индукции можно показать, что имеют место следующие равенства ( $2 \leq k \leq n$ ):

$$\begin{aligned} \kappa_k \mathbf{v}_{(k)} &= \varepsilon_{k-2} \varepsilon_{k-1} \kappa_{k-1} \mathbf{v}_{(k-2)} + \frac{D\mathbf{v}_{(k-1)}}{ds}, \\ \kappa_k &= \left| \varepsilon_{k-2} \varepsilon_{k-1} \kappa_{k-1} \mathbf{v}_{(k-2)} + \frac{D\mathbf{v}_{(k-1)}}{ds} \right|, \end{aligned} \quad (\text{П.4.7})$$

где полагается  $\varepsilon_0 = \varepsilon$ ,  $(\mathbf{v}_{(k)}, \mathbf{v}_{(k)}) = \varepsilon_k$ ,  $\kappa_n = 0$ . ■

**Определение П.4.1.** Совокупность ортонормированных векторов (П.4.2) называется *многогранником Френе*<sup>1</sup> (*сопровождающим многогранником*) для кривой  $\Gamma$ ,  $\mathbf{v}_{(k)}$  и  $\kappa_k$  —  $k$ -ми вектором нормали и кривизной кривой  $\Gamma$ , а равенства (П.4.6) и (П.4.7) — *формулами Френе*. ■

## П.5. Кривые в трехмерном евклидовом пространстве

В частном случае риманова пространства трехмерном точечном евклидовом пространстве  $R^3$  можно ввести радиус-вектор ( $x^i$  — декартовы координаты):

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (\text{П.5.1})$$

Тогда кривая  $\Gamma \subset R^3$  может быть задана с помощью вектора-функции:

$$\Gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in D_t = [\alpha, \beta], \quad (\text{П.5.2})$$

что эквивалентно координатной форме записи (П.1.8), где  $i = 1, 2, 3$ .

Если в качестве параметра выбирается длина, то последнее соотношение приобретает такой вид:

$$\Gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad 0 \leq s \leq l. \quad (\text{П.5.3})$$

Естественно, это равенство эквивалентно (П.4.1).

---

<sup>1</sup> Френе Ж.Ф. (Frenet J.F., 1816—1900) — французский математик, астроном, метеоролог.



В этом варианте для величин, указанных в определении П.4.1, вводятся специальные обозначения и наименования.

**Определение П.5.1.**  $\mathbf{v}_{(1)} = \mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}_{(2)} = \boldsymbol{\beta}$  — векторы главной нормали и бинормали,  $\kappa_1 = k$ ,  $\rho = |k|^{-1}$  и  $\kappa_2 = \kappa$  — кривизна, радиус кривизны и кручение кривой;  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  — трехгранник Френе (сопровождающий трехгранник). ■

При этом из теоремы П.4.1 с учетом результата примера П.2.1 и положительной определенности фундаментальной формы (знаковые числа любых направлений равны единице) вытекает следующее утверждение.

**Следствие П.5.1.** Пусть  $\Gamma \in C^3$ . Тогда сопровождающий трехгранник существует, а формулы Френе имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{\tau}' = k\mathbf{v}, \mathbf{v}' = -k\boldsymbol{\tau} + \kappa\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}' = -\kappa\mathbf{v}, \quad (\text{П.5.4})$$

где

$$k = |\boldsymbol{\tau}'|, \kappa = |\boldsymbol{\beta}'|. \quad \blacksquare \quad (\text{П.5.5})$$

**Теорема П.5.1.** Пусть функции  $k(s), \kappa(s) \in C^1[0, l]$ . Тогда решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (П.5.4) с начальными условиями  $(\boldsymbol{\tau}_0, \mathbf{v}_0, \boldsymbol{\beta}_0)$  — образующие правую тройку единичные векторы)

$$\boldsymbol{\tau}(0) = \boldsymbol{\tau}_0, \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \boldsymbol{\beta}(0) = \boldsymbol{\beta}_0 \quad (\text{П.5.6})$$

существует и единственно.

При этом существует единственная с точностью до положения в пространстве кривая  $\Gamma \in C^3$ , для которой  $k(s)$  и  $\kappa(s)$  являются кривизной и кручением. ■

Доказательство этого утверждения можно найти в [18].

**Теорема П.5.2.** В условиях теоремы П.5.1 векторы  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  связаны между собой так:

$$\boldsymbol{\tau} = [\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}], \mathbf{v} = [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}], \boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}] \quad (\text{П.5.7})$$

и образуют правую тройку.

**Доказательство.** Рассмотрим удовлетворяющие условиям (П.5.6) векторы  $\tau_1 = [\mathbf{v}, \beta]$ ,  $\mathbf{v}_1 = [\beta, \tau]$ ,  $\beta_1 = [\tau, \mathbf{v}]$ . С учетом (П.5.4) найдем их производные:

$$\tau_1' = [\mathbf{v}', \beta] + [\mathbf{v}, \beta'] = [-k\tau + \kappa\beta, \beta] + [\mathbf{v}, -\kappa\mathbf{v}] = -k[\tau, \beta] = k[\beta, \tau] = k\mathbf{v}_1,$$

$$\mathbf{v}_1' = [\beta', \tau] + [\beta, \tau'] = -\kappa[\mathbf{v}, \tau] + k[\beta, \mathbf{v}] = \kappa\beta_1 - k\tau_1,$$

$$\beta_1' = [\tau', \mathbf{v}] + [\tau, \mathbf{v}'] = [\tau, -k\tau + \kappa\beta] = \kappa[\tau, \beta] = -\kappa\mathbf{v}_1.$$

Отсюда следует, что  $\mathbf{v}_1, \beta_1, \tau_1$  удовлетворяют формулам Френе. Поэтому в соответствии с теоремой П.5.1  $\tau_1 = \tau$ ,  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$ ,  $\beta_1 = \beta$ , что соответствует равенствам (П.5.7).

Найдем теперь смешанное произведение векторов (П.5.7):

$$(\tau, \mathbf{v}, \beta) = (\tau, [\mathbf{v}, \beta]) = (\tau, \tau) = 1 > 0, \quad (\text{П.5.8})$$

что говорит о справедливости второй части утверждения [19]. ■

**Теорема П.5.3.** Пусть кривая  $\Gamma \in C^3$  задана в виде (П.5.3). Тогда ее кривизна и кручение определяются следующими равенствами

$$k = (\tau', \mathbf{v}) = |\mathbf{r}''| = (\mathbf{r}'', \mathbf{v}), \quad \kappa = -(\beta', \mathbf{v}) = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{k^2}, \quad (\text{П.5.9})$$

а векторы главной нормали и бинормали вычисляются так:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{k} \mathbf{r}'', \quad \beta = \frac{1}{k} [\mathbf{r}', \mathbf{r}'']. \quad (\text{П.5.10})$$

**Доказательство.** Равенства  $k = (\tau', \mathbf{v})$  и  $\kappa = -(\beta', \mathbf{v})$  получаем, умножая скалярно на вектор  $\mathbf{v}$ , с учетом его единичности, первую и третью формулы в (П.5.4).

Далее, отметим, что согласно (П.1.15) и (П.5.3) имеет место равенство:

$$\tau = \mathbf{r}' = x^i \mathbf{e}_i. \quad (\text{П.5.11})$$

Отсюда, с учетом (П.5.5), следует справедливость равенств  $k = |\tau'| = |\mathbf{r}''|$  и  $k = (\tau', \mathbf{v}) = (\mathbf{r}'', \mathbf{v})$ .

Теперь из (П.5.11) и первых двух равенств в (П.5.4) получаем следующее соотношение:

$$\boldsymbol{\tau}'' = \mathbf{r}''' = k'\mathbf{v} + k\mathbf{v}' = k'\mathbf{v} + k(-k\boldsymbol{\tau} + \kappa\boldsymbol{\beta}) = k'\mathbf{v} - k^2\boldsymbol{\tau} + k\kappa\boldsymbol{\beta}.$$

Вычисляя теперь с учетом (П.5.8) смешанное произведение

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') &= (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}', \mathbf{r}''') = (\boldsymbol{\tau}, k\mathbf{v}, k'\mathbf{v} - k^2\boldsymbol{\tau} + k\kappa\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\tau}, k\mathbf{v}, k\kappa\boldsymbol{\beta}) = \\ &= k^2\kappa(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}) = k^2\kappa, \end{aligned}$$

приходим к последнему равенству в (П.5.9).

Первое равенство в (П.5.10) есть следствие (П.5.11) и первой формулы в (П.5.4), а уже отсюда, с учетом последнего равенства в (П.5.7), приходим к справедливости формулы для  $\boldsymbol{\beta}$  в (П.5.10). ■

**Теорема П.5.4.** Пусть кривая  $\Gamma \in C^3$  задана в виде (П.5.2). Тогда для векторов ее трехгранника Френе, кривизны и кручения имеют место следующие равенства:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|}, \quad \mathbf{v} = \frac{[\mathbf{B}, \mathbf{T}]}{|\mathbf{B}||\mathbf{T}|}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}, \quad k = \frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{T}|^3}, \quad \kappa = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})}{\mathbf{B}^2}, \quad \mathbf{T} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{B} = [\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]. \quad (\text{П.5.12})$$

**Доказательство.** Формула  $\mathbf{T} = \dot{\mathbf{r}}$  фактически повторяет (П.1.15), а первое равенство (П.5.12) есть нормировка этого вектора.

Далее, используя правила дифференцирования сложных функций, находим следующие производные:

$$\dot{\mathbf{r}} = s\mathbf{r}' = s\boldsymbol{\tau}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = s^2\mathbf{r}'' + \dot{s}\mathbf{r}', \quad \ddot{\mathbf{r}} = s^3\mathbf{r}''' + 3\dot{s}\dot{s}\mathbf{r}'' + \ddot{s}\mathbf{r}'. \quad (\text{П.5.13})$$

Отсюда, с учетом (П.5.10) и (П.5.12), получаем равенства

$$\mathbf{T} = \dot{s}, \quad \mathbf{B} = [\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] = \dot{s}^3 [\mathbf{r}', \mathbf{r}''] = k\dot{s}^3\boldsymbol{\beta}, \quad |\mathbf{B}| = k\dot{s}^3 = k|\mathbf{T}|^3, \quad (\text{П.5.14})$$

из которых вытекает справедливость второго и четвертого равенств в (П.5.12).

Далее, подставляя первую и третью формулу в (П.5.12) в равенство  $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}]$  в (П.5.7), приходим ко второму соотношению в (П.5.12).

Теперь, учитывая (П.5.9), (П.5.13) и (П.5.14), находим смешанное произведение

$$\begin{aligned} (\vec{r}, \vec{r}, \vec{r}) &= ([\vec{r}, \vec{r}], \vec{r}) = s^3 ([\vec{r}', \vec{r}''], s^3 \vec{r}''' + 3s \vec{s} \vec{r}'' + \vec{s} \vec{r}') = \\ &= s^6 (\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = s^6 k^2 \kappa = |\mathbf{B}|^2 \kappa. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает формула для кривизны  $\kappa$  в (П.5.12), что и завершает доказательство. ■

Для кривых в трехмерном евклидовом пространстве используются также следующие понятия.

**Определение П.5.2.** Плоскости, проходящие через точку  $M \in \Gamma$ , в зависимости от пары направляющих векторов  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  (нормального вектора  $\mathbf{N}$ ), имеют следующие названия:

$\mathbf{p} = \mathbf{v}, \mathbf{q} = \boldsymbol{\beta}$  ( $\mathbf{N} = \boldsymbol{\tau}$ ) — нормальная плоскость;

$\mathbf{p} = \boldsymbol{\tau}, \mathbf{q} = \mathbf{v}$  ( $\mathbf{N} = \boldsymbol{\beta}$ ) — соприкасающаяся плоскость;

$\mathbf{p} = \boldsymbol{\beta}, \mathbf{q} = \boldsymbol{\tau}$  ( $\mathbf{N} = \mathbf{v}$ ) — спрямляющая плоскость.

Проходящая через  $M \in \Gamma$  прямая с направляющим вектором  $\boldsymbol{\tau}$  называется касательной к  $\Gamma$  в точке  $M$ . ■

Введенные здесь понятия проиллюстрированы на рис. П.5.1.

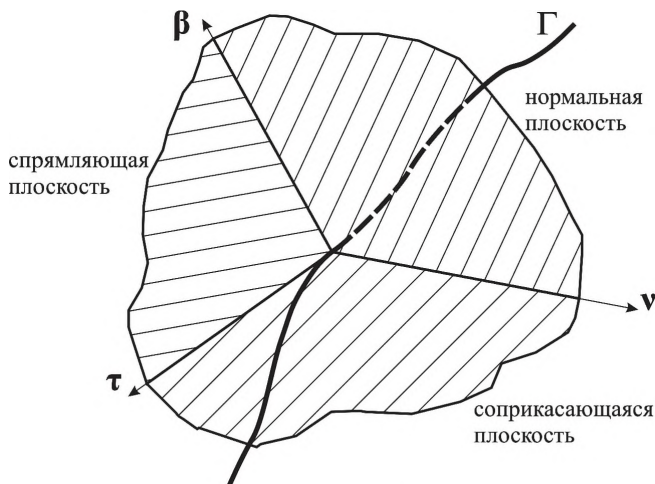


Рис. П.5.1

Отметим также, что в трехмерном евклидовом пространстве в силу положительной определенности фундаментальной квадратичной формы с учетом (П.1.16) интегралы в (П.1.21) записываются так:

$$l = \int_{\Gamma} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g_{km} \dot{x}^k \dot{x}^m} dt, \quad \int_{\Gamma} f(M) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(M) \sqrt{g_{km} \dot{x}^k \dot{x}^m} dt. \quad (\text{П.5.15})$$

При задании кривой  $\Gamma$  в виде (П.5.3) последнее равенство с учетом (П.5.11) может быть записано так (дополнительно учитывается, что  $|\tau|=1$ ):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(M) ds &= \int_0^l f(M(s)) \sqrt{g_{km} x^{k'} x^{m'}} ds = \\ &= \int_0^l f(M(s)) \sqrt{g_{km} \tau^k \tau^m} ds = \int_0^l f(M(s)) ds. \end{aligned} \quad (\text{П.5.16})$$

Очевидно, формулы (П.5.15) и (П.5.16) совпадают с известными равенствами для криволинейных интегралов первого рода [17].

## П.6. Поверхности в трехмерном евклидовом пространстве

В соответствии с определением П.1.2 поверхность  $\Pi \subset R^3$  задается следующим образом:

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2) \quad (i=1,2,3), \quad (\xi^1, \xi^2) \in D_{\xi} \subset R^2, \quad (\text{П.6.1})$$

где

$$\text{RgP}_{\Pi} = 2, \quad \mathbf{P}_{\Pi} = (p_{\Pi j}^i)_{3 \times 2}, \quad p_{\Pi j}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}. \quad (\text{П.6.2})$$

Если же ввести радиус-вектор (П.5.1), то аналогично (П.5.2) ее можно определить так:

$$\Pi: \mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2) \quad (\xi^1, \xi^2) \in D_{\xi} \subset R^2. \quad (\text{П.6.3})$$

Если  $\Pi \in C^1$ , то для нее как для риманова пространства в соответствии с (П.1.7) и (П.5.2) базисные векторы могут быть вычислены так:

$$\mathfrak{e}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^j}. \quad (\text{П.6.4})$$

Они же являются направляющими (базисными) векторами и для касательной плоскости (касательного пространства), см. раздел П.1.1.

Тогда нормальный  $\mathbf{N}$  и единичный нормальный  $\mathbf{n}$  векторы к касательной плоскости (к поверхности  $\Pi$ ) находятся следующим образом [17, 19]:

$$\mathbf{N} = [\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2], \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}. \quad (\text{П.6.5})$$

Для поверхности в  $R^3$  используется следующая терминология.

**Определение П.6.1.** Фундаментальная квадратичная форма

$$\varphi_1(d\mathbf{r}) = g_{\Pi ij} d\xi^i d\xi^j \quad (\text{П.6.6})$$

поверхности  $\Pi$  называется ее *первой квадратичной формой*, где  $g_{\Pi ij}$  — элементы фундаментальной матрицы (П.1.10). ■

**Теорема П.6.1.** Второй инвариант  $g_{\Pi} = |\mathbf{G}_{\Pi}|$  формы (П.6.6) (метрического тензора) поверхности связан с нормальным вектором так:

$$|\mathbf{N}| = \sqrt{|g_{\Pi}|}. \quad (\text{П.6.7})$$

Доказательство при учете (П.1.5) вытекает из следующих равенств:

$$|\mathbf{N}|^2 = ([\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2], [\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2]) = \left\| \begin{pmatrix} (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_1) & (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2) \\ (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2) & (\mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_2) \end{pmatrix} \right\| = |\det G_{\Pi}| = |g_{\Pi}|. \quad \blacksquare$$

Отметим также, что в трехмерном евклидовом пространстве в силу положительной определенности фундаментальной квадратичной формы интегралы в (П.1.22) при дополнительном учете (П.6.7) записываются так:

$$S = \iint_{\Pi} dS = \iint_{D_{\xi}} \sqrt{|g_{\Pi}|} d\xi^1 d\xi^2 = \iint_{D_{\xi}} |\mathbf{N}| d\xi^1 d\xi^2,$$

$$\iint_{\Pi} f(M) dS = \iint_{D_{\xi}} f(M) \sqrt{|g_{\Pi}|} d\xi^1 d\xi^2 = \iint_{D_{\xi}} f(M) |\mathbf{N}| d\xi^1 d\xi^2. \quad (\text{П.6.8})$$

Очевидно, они совпадают с известными криволинейными интегралами первого рода [17]. Т.е. знание первой квадратичной формы поверхности позволяет вычислить площадь поверхности.

Рассмотрим теперь кривую  $\Gamma \subset \Pi$ . Ее в соответствии с (П.1.8) и (П.6.3) зададим так:

$$\Gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^1(t), \xi^2(t)), \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (\text{П.6.9})$$

Поскольку согласно теореме П.1.1 поверхность  $\Pi$  — риманово пространство, то с использованием (П.1.21) ее длину и криволинейный интеграл по этой кривой можно вычислить так:

$$l = \int_{\Gamma} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{|g_{\Pi km} \dot{\xi}^k \dot{\xi}^m|} dt, \quad \int_{\Gamma} f(M) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(M) \sqrt{|g_{\Pi km} \dot{\xi}^k \dot{\xi}^m|} dt. \quad (\text{П.6.10})$$

Отсюда, учитывая, что  $g_{\Pi km} \dot{\xi}^k \dot{\xi}^m dt^2 = g_{\Pi ij} d\xi^i d\xi^j$ , получаем равенство, связывающее дифференциал дуги такой кривой со значением первой квадратичной формы (П.6.6) на ней:

$$ds^2 = |\varphi_1(d\mathbf{r})|. \quad (\text{П.6.11})$$

Полагая, что  $\Gamma \subset C^1$ , с использованием следствия П.1.1, теоремы П.3.3 и формулы (П.6.4) находим единичный касательный вектор к ней:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}' = \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \xi^i} \xi^{i'} = \xi^{i'} \mathbf{e}_i. \quad (\text{П.6.12})$$

**Определение П.6.2.** Пусть  $\Gamma \subset \Pi \in C^2$ ,  $\Gamma \in C^3$ ,  $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}$  и  $k$  — сопровождающий трехгранник и нормальная кривизна кривой  $\Gamma$  в точке  $M$ , а  $\mathbf{n}$  — единичный нормальный вектор поверхности  $\Pi$  в той же точке.

Тогда число

$$k_n = k \cos \theta, \quad (\text{П.6.13})$$

где  $\cos \theta = (\mathbf{v}, \mathbf{n})$ , называется *нормальной кривизной кривой*  $\Gamma$ , а

$$\varphi_2(d\mathbf{r}) = (d^2\mathbf{r}, \mathbf{n}) \quad (\text{П.6.14})$$

— *второй квадратичной формой поверхности*  $\Pi$  в точке  $M$ . ■

**Теорема П.6.2.** В условиях определения П.6.2 первая и вторая квадратичные формы поверхности  $\Pi$  на кривой  $\Gamma \subset \Pi$  связаны между собой так:

$$k_n \varphi_1(d\mathbf{r}) = \varphi_2(d\mathbf{r}). \quad (\text{П.6.15})$$

**Доказательство.** Полагаем, что кривая задана в виде (П.5.3). Учитывая первую формулу Френе (П.5.4), (П.6.10), (П.6.11) и (П.6.13), приходим к равенствам:

$$k_n \varphi_1(d\mathbf{r}) = k(\mathbf{v}, \mathbf{n}) ds^2 = (\boldsymbol{\tau}', \mathbf{n}) ds^2 = (\mathbf{r}'', \mathbf{n}) ds^2 = (d^2\mathbf{r}, \mathbf{n}),$$

что согласно (П.6.14) и завершает доказательство. ■

**Следствие П.6.1** (теорема Менье<sup>2</sup>). Нормальные кривизны любых кривых  $\Gamma \subset \Pi$ , имеющих общую касательную (общий касательный вектор  $\boldsymbol{\tau}$ ), равны между собой.

**Доказательство.** Из (П.6.12) вытекает равенство  $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau} ds$ . Подставляя его в (П.6.15) и учитывая (П.6.11), получаем, что нормальная кривизна равна значению второй квадратичной формы на векторе  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$k_n = \varphi_2(\boldsymbol{\tau}), \quad (\text{П.6.16})$$

что, очевидно, эквивалентно утверждению. ■

Далее отметим, что для поверхности  $\Pi \in C^2$ , заданной в виде (П.6.3), с учетом (П.6.4) имеют место равенства:

---

<sup>2</sup> Менье де ла Плас Ж.Б.М.Ш. (Meusnier de la Place J.V.M.C., 1754—1793) — французский математик, дивизионный генерал.



$$d^2\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j = \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial \xi^i} d\xi^i d\xi^j. \quad (\text{П.6.17})$$

Тогда квадратичную форму (П.6.14) можно записать в явном виде:

$$\varphi_2(d\mathbf{r}) = b_{ij} d\xi^i d\xi^j, \quad b_{ij} = \left( \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial \xi^j}, \mathbf{n} \right) = \left( \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial \xi^i}, \mathbf{n} \right). \quad (\text{П.6.18})$$

Определенный на касательной плоскости (касательном пространстве) в точке  $M$  к поверхности  $\Pi \in C^2$  тензор второго ранга

$$\mathbf{b} = b_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j \quad (\text{П.6.19})$$

является присоединенным к порождающей квадратичную функцию  $\varphi_2(d\mathbf{r})$  билинейной функции  $f(d\mathbf{r}, d\mathbf{p})$  [8]. В силу симметрии  $f(d\mathbf{r}, d\mathbf{p})$  этот тензор также является симметричным.

**Определение П.6.3.** Тензор  $\mathbf{b}$  в (П.6.19) называется *тензором кривизны поверхности*  $\Pi$  в точке  $M$ .

В зависимости от вида его тензорной поверхности (эллипс, гипербола, парабола, окружность), которая называется *индикатрисой Дюпена*<sup>3</sup>, различают следующие типы точек на поверхности  $\Pi$ : *эллиптическая, гиперболическая, параболическая, шаровая точки*. Если  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , то  $M$  — *точка уплощения*.

Главные значения тензора кривизны  $k_1, k_2$  называются *главными кривизнами*, собственные векторы — *главными направлениями*, а числа

$$R_1 = \frac{1}{|k_1|}, R_2 = \frac{1}{|k_2|} \quad (\text{П.6.20})$$

— *главными радиусами кривизны поверхности*  $\Pi$ . ■

Соответствующая задача на собственные значения, как известно, имеет вид:

<sup>3</sup> Дюпен П.Ш.Ф. (Dupin P.C.F., 1784—1873) — французский математик, экономист.

$$(\mathbf{B} - k\mathbf{G})\boldsymbol{\gamma} = 0, \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} d\xi^1 \\ d\xi^2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = (b_{ij})_{2 \times 2}. \quad (\text{П.6.21})$$

В силу симметричности тензора  $\mathbf{b}$ , его главные направления ортогональны. Очевидно, они определяются однозначно в любой точке за исключением точек уплощения и шаровой.

Поскольку тип тензорной поверхности связан со знакоопределенностью соответствующей квадратичной функции [8], а ее знак в силу (П.6.16) совпадает со знаком нормальной кривизны, то имеет место следующее утверждение.

**Следствие П.6.2.** Точка на поверхности  $\Pi$  является эллиптической, гиперболической или параболической тогда и только тогда, когда  $\Phi_2$  положительно определенная ( $k_n > 0$ ), неопределенная ( $k_n < 0$ ) или неотрицательная ( $k_n \geq 0$ ). ■

Инварианты тензора кривизны вычисляются так:

$$I_{1b} = b_{ij}g^{jj} = b_i^i = k_1 + k_2, I_{2b} = \det(b_j^i) = k_1 k_2. \quad (\text{П.6.22})$$

Они имеют специальные обозначения и названия.

**Определение П.6.4.**  $I_{2b} = K$  — полная (гауссова) кривизна,  $I_{1b} = 2H$ , где  $H$  — средняя кривизна поверхности. ■

**Определение П.6.5.** Кривая  $\Gamma \subset \Pi$  называется линией кривизны поверхности  $\Pi$ , если в любой точке  $M \in \Gamma$  касательный вектор сонаправлен главному направлению поверхности.

Координаты  $\xi^1, \xi^2$  поверхности (П.6.3) называются главными координатами, если координатные линии  $\Gamma_1 : \xi^1 = \text{const}$  и  $\Gamma_2 : \xi^2 = \text{const}$  являются линиями кривизны. ■

Может быть доказано следующее утверждение.

**Теорема П.6.3.** Для любой поверхности  $\Pi \in C^1$  (П.6.3) существует два таких ортогональных семейства линий  $\Gamma_1 : \xi^1 = \text{const}$  и  $\Gamma_2 : \xi^2 = \text{const}$ , что координаты  $\xi^1, \xi^2$  являются главными. ■

**Теорема П.6.4.** Для того чтобы координаты  $\xi^1, \xi^2$  поверхности  $\Pi \in C^1$  (П.6.3) были главными ортогональными, необходимо и дос-

таточно, чтобы компоненты метрического тензора и тензора кривизны удовлетворяли следующим условиям:

$$g_{12} = 0, b_{12} = 0. \quad (\text{П.6.23})$$

**Доказательство.** Очевидно, первое равенство — это условие ортогональности, а второе — условие того, что направления являются главными. ■

Для ортогональных координат поверхности аналогично тензорному анализу [9] вводятся *параметры Ламе*  $H_1, H_2$ :

$$H_1^2 = g_{11}, H_2^2 = g_{22}. \quad (\text{П.6.24})$$

При этом легко проверяется справедливость следующих равенств:

$$g^{12} = 0, g^{11} = H_1^{-2}, g^{22} = H_2^{-2}, g_{11} = (H_1 H_2)^2. \quad (\text{П.6.25})$$

Также достаточно просто с помощью определения П.6.3 и равенств (П.6.24), (П.6.25) устанавливаются выражения компонентов тензора кривизны поверхности через параметры Ламе в главных ортогональных координатах:

$$\begin{aligned} b_{11} = k_1 H_1^2, b_{22} = k_2 H_2^2, b_{12} = 0, b_1^1 = k_1, b_2^2 = k_2, b_2^1 = 0, b_1^2 = 0, \\ b^{11} = k_1 H_1^{-2}, b^{22} = k_2 H_2^{-2}, b^{12} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.6.26})$$

Символы Кристоффеля второго рода в ортогональных координатах, аналогично тензорному анализу [9], выражаются с использованием формул (П.1.6) через параметры Ламе так ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^1}, \Gamma_{11}^2 = -\frac{H_1}{H_2^2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2}, \Gamma_{22}^1 = -\frac{H_2}{H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1}, \\ \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^2}, \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2}, \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1}. \end{aligned} \quad (\text{П.6.27})$$

В ортогональных координатах часто вводятся физические компоненты (для их обозначения используем дополнительный индекс в виде звездочки) вектора  $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i = u_i \mathbf{e}^i$  и тензора  $\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  (ограничимся тензором второго ранга):

$$u^\alpha = u_\alpha^* H_\alpha^{-1}, \quad u_\alpha = u_\alpha^* H_\alpha, \quad T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^* H_\alpha H_\beta, \quad (\text{П.6.28})$$

$$T^{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^* (H_\alpha H_\beta)^{-1} \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

При этом ковариантные производные компонент вектора и тензора второго ранга в соответствии с (П.6.27), (П.6.28) и формулами ковариантного дифференцирования [9] выражаются через их физические компоненты так:

$$\begin{aligned} \nabla_1 u_1 &= H_1 \left( \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi^1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} u_2^* \right), \quad \nabla_2 u_1 = H_1 \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi^2} - u_2^* \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1}, \\ \nabla_2 u_2 &= H_2 \left( \frac{\partial u_2^*}{\partial \xi^2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} u_1^* \right), \quad \nabla_1 u_2 = H_2 \frac{\partial u_2^*}{\partial \xi^1} - u_1^* \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2}; \end{aligned} \quad (\text{П.6.29})$$

$$\begin{aligned} \nabla_1 u^1 &= \frac{1}{H_1} \left( \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi^1} + \frac{u_2^*}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right), \quad \nabla_2 u^2 = \frac{1}{H_2} \left( \frac{\partial u_2^*}{\partial \xi^2} + \frac{u_1^*}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right), \\ \nabla_1 u^2 &= \frac{1}{H_2} \left( \frac{\partial u_2^*}{\partial \xi^1} - \frac{u_1^*}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right), \quad \nabla_2 u^1 = \frac{1}{H_1} \left( \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi^2} - \frac{u_2^*}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right); \end{aligned} \quad (\text{П.6.30})$$

$$\begin{aligned} \nabla_1 T^{11} &= \frac{1}{H_1^2} \left( \frac{\partial T_{11}^*}{\partial \xi^1} + \frac{T_{12}^* + T_{21}^*}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right), \quad \nabla_1 T^{12} = \frac{1}{H_1 H_2} \left( \frac{\partial T_{12}^*}{\partial \xi^1} + \frac{T_{22}^* - T_{11}^*}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right), \\ \nabla_1 T^{21} &= \frac{1}{H_1 H_2} \left( \frac{\partial T_{21}^*}{\partial \xi^1} + \frac{T_{22}^* - T_{11}^*}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right), \quad \nabla_1 T^{22} = \frac{1}{H_2^2} \left( \frac{\partial T_{22}^*}{\partial \xi^1} - \frac{T_{12}^* + T_{21}^*}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right); \end{aligned} \quad (\text{П.6.31})$$

$$\begin{aligned} \nabla_2 T^{11} &= \frac{1}{H_1^2} \left( \frac{\partial T_{11}^*}{\partial \xi^2} - \frac{T_{12}^* + T_{21}^*}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right), \quad \nabla_2 T^{12} = \frac{1}{H_1 H_2} \left( \frac{\partial T_{12}^*}{\partial \xi^2} + \frac{T_{11}^* - T_{22}^*}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right), \\ \nabla_2 T^{21} &= \frac{1}{H_1 H_2} \left( \frac{\partial T_{21}^*}{\partial \xi^2} + \frac{T_{11}^* - T_{22}^*}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right), \quad \nabla_2 T^{22} = \frac{1}{H_2^2} \left( \frac{\partial T_{22}^*}{\partial \xi^2} + \frac{T_{12}^* + T_{21}^*}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right); \end{aligned} \quad (\text{П.6.32})$$

$$\nabla_1 T_{11} = H_1^2 \left[ \frac{\partial T_{11}^*}{\partial \xi^1} + \frac{T_{21}^* + T_{12}^*}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right], \quad \nabla_1 T_{12} = H_1 \left[ H_2 \frac{\partial T_{12}^*}{\partial \xi^1} + (T_{22}^* - T_{11}^*) \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right],$$

$$\nabla_1 T_{21} = H_1 \left[ H_2 \frac{\partial T_{21}^*}{\partial \xi^1} + (T_{22}^* - T_{11}^*) \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right], \quad (\text{П.6.33})$$

$$\nabla_1 T_{22} = H_2 \left[ H_2 \frac{\partial T_{22}^*}{\partial \xi^1} - (T_{12}^* + T_{21}^*) \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right];$$

$$\nabla_2 T_{11} = H_1 \left[ H_1 \frac{\partial T_{11}^*}{\partial \xi^2} - (T_{12}^* + T_{21}^*) \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right],$$

$$\nabla_2 T_{12} = H_2 \left[ H_1 \frac{\partial T_{12}^*}{\partial \xi^2} + (T_{11}^* - T_{22}^*) \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right],$$

$$\nabla_2 T_{21} = H_2 \left[ H_1 \frac{\partial T_{21}^*}{\partial \xi^2} + (T_{11}^* - T_{22}^*) \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right], \quad (\text{П.6.34})$$

$$\nabla_2 T_{22} = H_2^2 \left( \frac{\partial T_{22}^*}{\partial \xi^2} + \frac{T_{12}^* + T_{21}^*}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right).$$

**Пример П.6.1.** А. Поверхность  $\Pi$  — плоскость [19]:

$$\Pi: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{p} + v\mathbf{q} \quad (u, v) \in D \subset R^2.$$

Здесь  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  — ее направляющие векторы. Они не зависят от  $\xi^1$  и  $\xi^2$ .

Из (П.6.4) следует, что эти векторы являются базисными.

Поскольку в этом случае  $d^2\mathbf{r} = 0$ , то в соответствии с (П.6.18) и (П.6.19) тензор кривизны нулевой:  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , и из (П.6.22) следует, что  $k_1 = k_2 = 0$ . При этом согласно (П.6.20) и (П.6.21)  $R_1 = R_2 = \infty$ , и любое направление является главным.

Б. Поверхность  $\Pi$  — сфера радиуса  $R$ . С использованием сферической системы координат задаем ее так:

$$\Pi: \mathbf{r} = R\mathbf{r}_1(\psi, \varphi), \quad \mathbf{r}_1 = \cos\varphi \sin\psi \mathbf{e}_1 + \sin\varphi \sin\psi \mathbf{e}_2 + \cos\psi \mathbf{e}_3,$$

$$-\pi < \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \psi \leq \pi,$$

где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — орты прямоугольной декартовой системы координат, начало которой совпадает с центром сферы.

Используя (П.6.4), (П.6.5) и (П.1.10), последовательно определяем базисные и нормальный векторы, а также компоненты метрического тензора ( $\xi^1 = \psi, \xi^2 = \varphi$ ):

$$\mathbf{e}_1 = R(\cos \varphi \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \cos \psi \mathbf{e}_2 - \sin \psi \mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{e}_2 = R(-\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2) \sin \psi,$$

$$\mathbf{N} = R \mathbf{r} \sin \psi, \mathbf{n} = \mathbf{r}_1, g_{111} = R^2, g_{112} = 0, g_{122} = R^2 \sin^2 \psi.$$

Компоненты тензора кривизны находим по формулам (П.6.18):

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \psi} = -R \mathbf{r}_1, \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \varphi} = -R(\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2) \sin \psi,$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \varphi} = R(-\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2) \cos \psi,$$

$$b_{11} = -R, b_{12} = 0, b_{22} = \left( \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \varphi}, \mathbf{n} \right) = -R \sin^2 \psi.$$

Следовательно, согласно теореме П.6.4 выбранные координаты являются главными ортогональными.

Легко проверяется, что характеристическое уравнение задачи (П.6.21) имеет вид  $(1 + kR)^2 = 0$ , откуда следует, что  $k_1 = k_2 = -R^{-1}$ . Учитывая теперь (П.6.20), получаем ожидаемый результат для главных радиусов кривизны:  $R_1 = R_2 = R$ .

**В.** Поверхность П — круговой цилиндр радиуса  $R$ . С использованием цилиндрической системы координат задаем ее так (используются обозначения предыдущего примера):

$$\text{П: } \mathbf{r} = R \mathbf{r}_0(\varphi) + z \mathbf{e}_3, \mathbf{r}_0 = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, -\pi < \varphi \leq \pi, z \in \mathbb{R}.$$

Действия, аналогичные п. Б, приводят к следующим результатам ( $\xi^1 = \varphi, \xi^2 = z$ ):

$$\mathfrak{e}_1 = R(-\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2), \quad \mathfrak{e}_2 = \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{N} = R\mathbf{r}_0, \quad \mathbf{n} = \mathbf{r}_0, \quad g_{\Pi 11} = R^2, \quad g_{\Pi 12} = 0, \quad g_{\Pi 22} = 1;$$

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial \varphi} = -R\mathbf{r}_0, \quad \frac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial z} = 0, \quad b_{11} = -R, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = 0.$$

Таким образом, выбранные здесь координаты также являются главными ортогональными.

Характеристическое уравнение задачи (П.6.21) в этом случае таково:  $k(1+kR)=0$ , откуда следует, что  $k_2 = -R^{-1}$ ,  $k_2 = 0$  и  $R_1 = R$ ,  $R_2 = \infty$ . ■

## П.7. Деривационные уравнения

Аналогично формулам Френе (П.5.4) для векторов сопровождающего трехгранника в трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$  может быть установлена связь базиса  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$  касательной к поверхности  $\Pi$  плоскости с ее нормальным вектором  $\mathbf{n}$ .

**Теорема П.7.1** (деривационные уравнения<sup>4</sup>, уравнения Гаусса<sup>5</sup>). Для поверхности  $\Pi \in C^2$  (П.6.3) с метрическим тензором  $\mathbf{g}_\Pi = g_{ij}(\xi^1, \xi^2)\mathfrak{e}^i\mathfrak{e}^j$  и тензором кривизны  $\mathbf{b} = b_{ij}(\xi^1, \xi^2)\mathfrak{e}^i\mathfrak{e}^j$  справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial \xi^j} = \Gamma_{ij}^k \mathfrak{e}_k + b_{ij} \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^i} = -b_i^j \mathfrak{e}_j. \quad (\text{П.7.1})$$

**Доказательство.** Прежде всего, отметим, что введенные в разделе векторы  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathbf{n}$  являются базисом  $R^3$  и вектор  $\mathbf{n}$  ортогонален векторам  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ . Разложим по этому базису производные первых двух векторов:

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial \xi^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi^i \partial \xi^j} = G_{ij}^k \mathfrak{e}_k + h_{ij} \mathbf{n}. \quad (\text{П.7.2})$$

<sup>4</sup> От лат. derivation — отведение, отклонение.

<sup>5</sup> Гаусс И.К.Ф. (Gauss J.C.F., 1777—1855) — немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист.

В силу того, что  $\Pi \in C^2$ , координаты этих векторов обладают следующей симметрией:

$$G_{ij}^k = G_{ji}^k, \quad h_{ij} = h_{ji}. \quad (\text{П.7.3})$$

Учитывая (П.1.5) и (П.6.5), находим скалярное произведение

$$\left( \frac{\partial \mathfrak{a}_i}{\partial \xi^j}, \mathfrak{a}_l \right) = G_{ij}^m g_{ml}$$

и производные от компонент метрического тензора

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^j} = \frac{\partial (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_l)}{\partial \xi^j} = \left( \frac{\partial \mathfrak{a}_i}{\partial \xi^j}, \mathfrak{a}_l \right) + \left( \mathfrak{a}_i, \frac{\partial \mathfrak{a}_l}{\partial \xi^j} \right) = G_{ij}^m g_{ml} + G_{lj}^m g_{mi}. \quad (\text{П.7.4})$$

С использованием последнего равенства и (П.7.3) получаем, что символы Кристоффеля (П.1.6) для поверхности  $\Pi$  совпадают с коэффициентами  $G_{ij}^k$ :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{kn}}{2} \left( \frac{\partial g_{im}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{jn}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^n} \right) = \frac{1}{2} (G_{ij}^m \delta_m^k + G_{ji}^m \delta_m^k) = G_{ij}^k. \quad (\text{П.7.5})$$

Далее из (П.6.18) и (П.7.2) находим коэффициенты компоненты тензора кривизны:

$$b_{ij} = \left( \frac{\partial \mathfrak{a}_i}{\partial \xi^j}, \mathbf{n} \right) = h_{ij} (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = h_{ij}. \quad (\text{П.7.6})$$

Подставляя теперь (П.7.5) и (П.7.6) в (П.7.2), приходим к первому соотношению в (П.7.1).

Перед обоснованием второго соотношения, используя равенства  $(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1$  и  $(\mathfrak{a}_k, \mathbf{n}) = 0$ , получим два вспомогательных соотношения. Во-первых, получаем, что производные вектора  $\mathbf{n}$  ортогональны ему:

$$\frac{\partial (\mathbf{n}, \mathbf{n})}{\partial \xi^i} = 2 \left( \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^i}, \mathbf{n} \right) = 0. \quad (\text{П.7.7})$$



Во-вторых, для векторов  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$  приходим к равенству

$$\left( \frac{\partial \mathfrak{a}_j}{\partial \xi^j}, \mathbf{n} \right) + \left( \mathfrak{a}_i, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^j} \right) = 0,$$

из которого с учетом (П.6.18) находим еще одну формулу для компонент тензора кривизны:

$$b_{ij} = \left( \frac{\partial \mathfrak{a}_i}{\partial \xi^j}, \mathbf{n} \right) = - \left( \mathfrak{a}_i, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^j} \right). \quad (\text{П.7.8})$$

Из (П.7.7) вытекает, что разложение производных вектора  $\mathbf{n}$  по базису  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathbf{n}$  имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^j} = a_j^k \mathfrak{a}_k. \quad (\text{П.7.9})$$

Учитывая его в (П.7.8) и принимая во внимание (П.1.5), получаем такой результат:  $b_{ij} = -a_j^k g_{ik}$ . Отсюда приходим к следующему выводу:

$$b_j^i = b_{ij} g^{il} = -a_j^k \delta_k^i = -a_j^i. \quad (\text{П.7.10})$$

Подстановка (П.7.10) в (П.7.9) дает вторые соотношения в (П.7.1), что и завершает доказательство. ■

Отметим, что последние равенства в (П.7.1) называют также *формулами Вейнгартена*<sup>б</sup>.

**Следствие П.7.1.** Первые уравнения в (П.7.1) эквивалентны равенствам:

$$\frac{\partial \mathfrak{a}^j}{\partial \xi^j} = -\Gamma_{jk}^i \mathfrak{a}^k + b^j \mathbf{n}. \quad (\text{П.7.11})$$

**Доказательство.** Дифференцируем равенство  $\mathfrak{a}_j = \mathfrak{a}^k g_{kj}$  с использованием соотношений (П.7.4) и (П.7.5):

<sup>б</sup> Вейнгартен Ю. (Weingarten J., 1836—1910) — немецкий математик.

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_l}{\partial \xi^j} = \left( \Gamma_{kj}^m g_{ml} + \Gamma_{lj}^m g_{mi} \right) \mathfrak{e}^k + g_{kl} \frac{\partial \mathfrak{e}^k}{\partial \xi^j}.$$

Применяя теперь (П.7.1), приходим к равенствам

$$g_{kl} \frac{\partial \mathfrak{e}^k}{\partial \xi^j} = \Gamma_{lj}^k \mathfrak{e}_k + b_{lj} \mathbf{n} - \left( \Gamma_{kj}^m g_{ml} + \Gamma_{lj}^m g_{mk} \right) \mathfrak{e}^k = -g_{ml} \Gamma_{kj}^m \mathfrak{e}^k + b_{lj} \mathbf{n},$$

из которых после свертки с  $g^m$  и следует требуемый результат. ■

Из теоремы П.7.1 вытекают дополнительные свойства тензора кривизны.

**Теорема П.7.2.** Для поверхности  $\Pi \in C^2$  (П.6.3) с метрическим тензором  $\mathbf{g}_{|1} = g_{ij}(\xi^1, \xi^2) \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^j$  и тензором кривизны  $\mathbf{b} = b_{ij}(\xi^1, \xi^2) \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^j$  справедливы следующие соотношения:

$$R_{ijk}^{\cdot l} = b_{ik} b_j^l - b_{jk} b_i^l, \quad \nabla_i b_{ij} = \nabla_j b_{ii}, \quad (\text{П.7.12})$$

где  $R_{ijk}^{\cdot l}$  — компоненты тензора Римана—Кристоффеля.

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что введенные в разделе векторы  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathbf{n}$  являются базисом  $R^3$  и вектор  $\mathbf{n}$  ортогонален векторам  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ . На уравнения (П.7.1) можно смотреть как на систему дифференциальных уравнений в частных производных, определяющих поверхность по заданным первой и второй квадратичным формам (тензором  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{b}$ ). Однако коэффициенты  $g_{kj}$  и  $b_{kj}$  форм (тензоров) не могут быть заданы произвольно.

Условием интегрируемости первых двух уравнений в (П.7.1) являются равенства

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{e}_i}{\partial \xi^l \partial \xi^j} = \frac{\partial^2 \mathfrak{e}_i}{\partial \xi^j \partial \xi^l}. \quad (\text{П.7.13})$$

Вычисляя вторые производные

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{e}_i}{\partial \xi^l \partial \xi^j} = \frac{\partial}{\partial \xi^l} \left( \Gamma_{ij}^k \mathfrak{e}_k + b_{ij} \mathbf{n} \right) = \mathfrak{e}_k \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial \xi^l} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \mathfrak{e}_k}{\partial \xi^l} + \mathbf{n} \frac{\partial b_{ij}}{\partial \xi^l} + b_{ij} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^l} =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathfrak{e}_m \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial \xi^l} + \Gamma_{ij}^k \left( \Gamma_{kl}^m \mathfrak{e}_m + b_{kl} \mathbf{n} \right) + \mathbf{n} \frac{\partial b_{ij}}{\partial \xi^l} - b_{ij} b_l^m \mathfrak{e}_m = \\
&= \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial \xi^l} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^m - b_{ij} b_l^m \right) \mathfrak{e}_m + \left( \frac{\partial b_{ij}}{\partial \xi^l} + \Gamma_{ij}^k b_{kl} \right) \mathbf{n}
\end{aligned}$$

и учитывая связь компонент тензора Римана—Кристоффеля с символами Кристоффеля [9]

$$R_{ijk}^{\dots l} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial \xi^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial \xi^i} + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^l - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l, \quad R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}^{\dots m}, \quad (\text{П.7.14})$$

из (П.7.13) получаем векторное равенство

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathfrak{e}_i}{\partial \xi^l \partial \xi^j} &= \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial \xi^l} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^m - b_{ij} b_l^m \right) \mathfrak{e}_m + \left( \frac{\partial b_{ij}}{\partial \xi^l} + \Gamma_{ij}^k b_{kl} \right) \mathbf{n}, \\
\frac{\partial^2 \mathfrak{e}_i}{\partial \xi^l \partial \xi^j} - \frac{\partial^2 \mathfrak{e}_i}{\partial \xi^j \partial \xi^l} &= \left( \frac{\partial b_{ij}}{\partial \xi^l} + \Gamma_{ij}^k b_{kl} - \frac{\partial b_{il}}{\partial \xi^j} - \Gamma_{il}^k b_{kj} + \Gamma_{jl}^k b_{ik} - \Gamma_{jl}^k b_{ik} \right) \mathbf{n} + \\
&+ \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial \xi^l} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^m - b_{ij} b_l^m - \frac{\partial \Gamma_{il}^m}{\partial \xi^j} - \Gamma_{il}^k \Gamma_{kj}^m + b_{il} b_j^m \right) \mathfrak{e}_m = \\
&= (\nabla_l b_{ij} - \nabla_j b_{il}) \mathbf{n} + (R_{jli}^{\dots m} + b_{il} b_j^m - b_{ij} b_l^m) \mathfrak{e}_m,
\end{aligned}$$

из которого и вытекают соотношения (П.7.12).

Условия интегрируемости последних двух уравнений в (П.7.1) аналогичны (П.7.13):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \xi^l \partial \xi^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \xi^j \partial \xi^l}. \quad (\text{П.7.15})$$

Вычисляем соответствующие производные, учитывая (П.7.1):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \xi^l \partial \xi^j} &= -\frac{\partial}{\partial \xi^l} (b_j^k \mathfrak{e}_k) = -\mathfrak{e}_k \frac{\partial b_j^k}{\partial \xi^l} - b_j^k \frac{\partial \mathfrak{e}_k}{\partial \xi^l} = -\mathfrak{e}_k \frac{\partial b_j^k}{\partial \xi^l} - b_j^k (\Gamma_{kl}^m \mathfrak{e}_m + b_{kl} \mathbf{n}) = \\
&= -\left( \frac{\partial b_j^k}{\partial \xi^l} + b_j^k \Gamma_{kl}^m \right) \mathfrak{e}_m - b_j^k b_{kl} \mathbf{n} = -(\nabla_l b_j^m + \Gamma_{jl}^k b_k^m) \mathfrak{e}_m - b_j^k b_{kl} \mathbf{n}.
\end{aligned}$$

Подставляя этот результат в (П.7.15), приходим к эквивалентному второму соотношению в (П.7.12) равенству  $\nabla_j b_j^m = \nabla_j b_j^m$ , что и завершает доказательство. ■

Соотношения (П.7.12) называются *формулами Гаусса—Петерсона*<sup>7</sup>—*Кодацци*<sup>8</sup>. Последние из этих равенств также именуются *уравнениями Кодацци*.

Поскольку в данном случае пространство двумерное, тензор Римана—Кристоффеля имеет одну независимую компоненту [9], то из теоремы П.7.2 вытекает следующее утверждение.

**Следствие П.7.2.** Для поверхности в трехмерном евклидовом пространстве имеют место равенства

$$R_{1212} = R = b_{11}b_{22} - b_{12}^2, \nabla_1 b_{22} = \nabla_2 b_{12}, \nabla_2 b_{11} = \nabla_1 b_{12}. \quad \blacksquare \quad (\text{П.7.16})$$

Отсюда с учетом равенств (П.6.23), (П.6.26) и (П.6.27) приходим к такому выводу.

**Следствие П.7.3.** В главных координатах поверхности соотношения (П.7.16) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right) &= -k_1 k_2 H_1 H_2, \\ H_2 \frac{\partial k_2}{\partial \xi^1} &= (k_1 - k_2) \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1}, \quad H_1 \frac{\partial k_1}{\partial \xi^2} = (k_2 - k_1) \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2}. \end{aligned} \quad (\text{П.7.17})$$

**Доказательство.** Последние два равенства следуют из второго и третьего соотношений в (П.7.16) при учете в них формул ковариантного дифференцирования [9] и соотношений (П.6.23)—(П.6.27).

Для доказательства первого равенства сначала подставляем в первое соотношение в (П.7.16) формулы (П.6.26):

$$R_{1212} = k_1 k_2 H_1^2 H_2^2. \quad (\text{П.7.18})$$

Затем с помощью формул (П.6.27) и (П.7.14) получаем

<sup>7</sup> Петерсон К.М. (1828—1881) — русский математик.

<sup>8</sup> Кодацци Д. (Codazzi D., 1824—1873) — итальянский математик.

$$\begin{aligned}
R_{1212} &= g_{22} \left( \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial \xi^1} + \Gamma_{11}^m \Gamma_{m2}^2 - \Gamma_{12}^m \Gamma_{1m}^2 \right) = \\
&= -H_1 H_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right) \right]. \quad (\text{П.7.19})
\end{aligned}$$

Требуемое равенство вытекает из (П.7.18) и (П.7.19). ■

Справедливо и обратное теореме П.7.2 утверждение (доказательство этого утверждения можно найти в [18]).

**Теорема П.7.3** (*теорема Бонне*<sup>9</sup>). Пусть даны квадратичные формы  $g_{ij} d\xi^i d\xi^j$  и  $b_{ij} d\xi^i d\xi^j$ . Причем первая из них положительно определена,  $g_{ij}(\xi^1, \xi^2)$ ,  $b_{ij}(\xi^1, \xi^2) \in C^3(D_\xi)$  и коэффициенты этих форм удовлетворяют равенствам (П.7.16), где  $R_{1212}$  вычисляется по формулам (П.7.14), в которых  $\Gamma_{ik}^l$  выражаются через  $g_{ij}$  с помощью равенств (П.1.6).

Тогда в  $R^3$  существует единственная с точностью до положения в пространстве поверхность  $\Pi \in C^3$  (П.6.3), для которой  $g_{ij}$  и  $b_{ij}$  — компоненты метрического тензора и тензора кривизны,  $R_{1212}$  — компонента тензора Римана-Кристоффеля, а  $\nabla_k b_{ij}$  и  $\Gamma_{ij}^k, \Gamma_{ij,n}$  — ковариантные производные и символы Кристоффеля. ■

**Следствие П.7.4.** Гауссова кривизна поверхности  $\Pi$  связана с тензором Римана—Кристоффеля так:

$$g_{\Pi} K = R_{1212}. \quad (\text{П.7.20})$$

**Доказательство.** Из (П.6.22) и определения П.6.2 вытекает такой результат:

---

<sup>9</sup> Бонне П.О. (Bonnet P.O., 1819—1892) — французский математик.

$$K = I_{2b} = \det(b_j^i) = \det(g^{ik} b_{kj}) = \det(g^{ik}) \det(b_{kj}) = g_{\Pi}^{-1} (b_{11} b_{22} - b_{12}^2).$$

Учитывая теперь первое равенство в (П.7.16), получаем требуемый результат. ■

В заключение введем тензор Риччи<sup>10</sup> с компонентами  $R_{ij}$  как внутреннюю свертку тензора Римана—Кристоффеля:

$$R_{ij} = R_{kij}^{\cdot k}. \quad (\text{П.7.21})$$

С использованием свойств тензора Римана—Кристоффеля [9] достаточно просто доказываем, что он симметричный. А в двумерном пространстве (на поверхности) он шаровой и имеют место равенства

$$R_{ij} = -\frac{g_{ij}}{g_{\Pi}} R_{1212}, \quad (\text{П.7.22})$$

а дополнительный учет (П.7.20) приводит к такому результату:

$$R_{ij} = -Kg_{ij}. \quad (\text{П.7.23})$$

Кроме того, рассмотрим еще один часто используемый тензор, компоненты которого вычисляются через компоненты тензора кривизны поверхности:

$$c_{ij} = b_{ik} b_j^k. \quad (\text{П.7.24})$$

Нетрудно проверить, что он симметричный.

Его компоненты выражаются через компоненты метрического тензора, тензора кривизны и его инварианты. Действительно, используя (П.6.22), определение П.6.2, (П.7.12) и (П.7.23), получаем такую формулу:

$$c_{ij} = b_{ik} b_j^k = R_{kij}^{\cdot k} + b_{ij} l_k^k = R_{ij} + b_{ij} I_{1b} = 2Hb_{ij} - Kg_{ij}. \quad (\text{П.7.25})$$

Отметим также, что первый инвариант этого тензора выражается через среднюю и гауссову кривизну поверхности:

$$I_{1c} = c_{ij} g^{ij} = 2Hg^{ij} b_{ij} - Kg^{ij} g_{ij} = 2(2H^2 - K). \quad (\text{П.7.26})$$

---

<sup>10</sup> Риччи-Курбастро Г. (Ricci-Curbastro G., 1853—1925) — итальянский математик.

Еще один инвариант этого тензора — определитель его матрицы из ковариантных компонент (сравнить с (П.7.12)) — находится с помощью (П.6.22), (П.7.24) и свойств определителя:

$$\det(c_{ij}) = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = \det(b_{ik})\det(b_j^k) = KR. \quad (\text{П.7.27})$$

В главных ортогональных координатах компоненты тензора (П.7.24) в соответствии с (П.6.26) записываются так:

$$\begin{aligned} c_{11} &= (k_1 H_1)^2, \quad c_{22} = (k_2 H_2)^2, \quad c_{12} = 0, \quad c_1^1 = k_1^2, \quad c_2^2 = k_2^2, \\ c_1^2 &= 0, \quad c_2^1 = 0, \quad c^{11} = k_1^2 H_1^{-2}, \quad c^{22} = k_2^2 H_2^{-2}, \quad c^{12} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.7.28})$$

Используется также связанная с тензором кривизны линейная форма

$$l_b(x_{ij}) = b_{11}x_{22} + b_{22}x_{11} - b_{12}(x_{12} + x_{21}). \quad (\text{П.7.29})$$

Она обладает следующим свойством.

**Теорема П.7.4.** Если  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора второго ранга, то имеет место равенство:

$$l_b(b_i^m \varepsilon_{mj}) = R\varepsilon, \quad \varepsilon = \varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2. \quad (\text{П.7.30})$$

Доказательство вытекает из следующих равенств:

$$\begin{aligned} l_b(b_i^m \varepsilon_{mj}) &= b_{11}b_2^m \varepsilon_{2m} + b_{22}b_1^m \varepsilon_{1m} - b_{12}(b_1^m \varepsilon_{2m} + b_2^m \varepsilon_{1m}) = b_{11}b_{2m} \varepsilon_2^m + b_{22}b_{1m} \varepsilon_1^m - \\ &- b_{12}(b_{2m} \varepsilon_1^m + b_{1m} \varepsilon_2^m) = (b_{11}b_{2m} - b_{12}b_{1m})\varepsilon_2^m + (b_{22}b_{1m} - b_{12}b_{2m})\varepsilon_1^m = R\varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Следствие П.7.5.** Значение формы (П.7.29) на компонентах тензора  $c_{ij}$  определяется так:

$$l_b(c_{ij}) = 2HR. \quad (\text{П.7.31})$$

Доказательство вытекает из (П.7.25) и (П.7.30):

$$l_b(c_{ij}) = l_b(b_i^m b_{mj}) = R(h_1^1 + h_2^2) = 2HR. \quad \blacksquare \quad (\text{П.7.32})$$

## П.8. Дифференциальные операторы на поверхности в трехмерном евклидовом пространстве

На задаваемой соотношением (П.6.3) поверхности  $\Pi$  в  $R^3$  как римановом пространстве рассмотрим скалярное  $w(M) = w(\xi^1, \xi^2)$ , векторное  $\mathbf{u}(M) = \mathbf{u}(\xi^1, \xi^2) = u^i \mathfrak{e}_i$  поля, где  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$  — ковариантный базис поверхности. Будем полагать, что указанные поля дифференцируемы необходимое число раз.

Абсолютно аналогично тензорному анализу в евклидовом пространстве [9] в римановом пространстве вводится понятие *вектора-оператора набла*:

$$\nabla = \nabla_i \mathfrak{e}^i, \quad (\text{П.8.1})$$

где  $\nabla_i$  — оператор ковариантного дифференцирования;  $\mathfrak{e}^1, \mathfrak{e}^2$  — контравариантный базис поверхности.

Подобным же образом определяются операторы *дивергенции* и *градиента*:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = (\nabla, \mathbf{u}) = \nabla_i u^i, \quad \operatorname{div} \mathbf{t} = (\nabla, \mathbf{t}) = \nabla_i \tau^{ij} \mathfrak{e}_j; \quad (\text{П.8.2})$$

$$\operatorname{grad} w = \nabla w = \frac{\partial w}{\partial \xi^i} \mathfrak{e}^i, \quad \operatorname{grad} \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} = \nabla_i u_j \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^j, \quad (\text{П.8.3})$$

$$\operatorname{grad} \mathbf{t} = \nabla \mathbf{t} = \nabla_i \tau_{jk} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^j \mathfrak{e}^k.$$

Отметим, что в этом случае, аналогично тензорному анализу, доказывается равенство:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g_\Pi}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (u^i \sqrt{g_\Pi}). \quad (\text{П.8.4})$$

Определенные вторым равенством в (П.8.2) и первым равенством в (П.8.3) векторные поля принадлежат касательному пространству  $d\Pi$ . С третьим известным оператором — ротором ситуация иная. Введем его только для векторного поля.

Рассмотрим сначала векторное произведение. Для векторов  $\mathbf{u} = u^i \mathfrak{e}_i$  и  $\mathbf{v} = v^j \mathfrak{e}_j$  оно определяется как осевой вектор в  $R^3$  [9] в связанном с поверхностью  $\Pi$  базисе  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathbf{n}$ :



$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \chi_{jk} u^j v^k \mathbf{n} = \chi^{jk} u_j v_k \mathbf{n}, \quad \chi_{jk} = \varepsilon_{jk3}, \quad \chi^{jk} = \varepsilon^{jk3}. \quad (\text{П.8.5})$$

Здесь  $\varepsilon_{3jk}$  и  $\varepsilon^{3jk}$  — ковариантные и контравариантные компоненты дискриминантного тензора (тензора Леви—Чивита), которые задаются так:

$$\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{213} = \sqrt{g}, \quad \varepsilon_{113} = \varepsilon_{223} = 0, \quad \varepsilon^{123} = -\varepsilon^{213} = \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad \varepsilon^{113} = -\varepsilon^{223} = 0. \quad (\text{П.8.6})$$

Здесь  $g$  — инвариант метрического тензора базиса  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathbf{n}$  на поверхности  $\Pi$ , для которого имеет место очевидное равенство  $g = g_\Pi$ .

**Определение П.8.1.** Величины  $\chi_{jk}$  и  $\chi^{jk}$  — компоненты дискриминантного тензора на поверхности  $\Pi$ . ■

Отметим их свойства.

**Теорема П.8.1.** Для компонент дискриминантного тензора на поверхности  $\Pi$  имеют место равенства:

$$\chi^{ij} \chi_{kl} = \delta_k^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_k^j, \quad \chi^{ik} \chi_{jk} = \delta_j^i, \quad \chi^{ik} \chi_{ik} = 2, \quad \chi^{12} \chi_{12} = 1, \quad (\text{П.8.7})$$

где  $\delta_j^i$  — символ Кронекера.

**Доказательство.** Справедливость этих равенств устанавливается непосредственной проверкой с помощью (П.8.5) и (П.8.6). ■

**Теорема П.8.2.** Базисные векторы  $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathbf{n}$  связаны между собой и с компонентами дискриминантного тензора так:

$$[\mathfrak{e}_k, \mathbf{n}] = \chi_{mk} \mathfrak{e}^m, \quad [\mathfrak{e}^k, \mathbf{n}] = \chi^{mk} \mathfrak{e}_m, \quad [\mathfrak{e}_k, \mathfrak{e}_m] = \chi_{km} \mathbf{n}, \quad [\mathfrak{e}^k, \mathfrak{e}^m] = \chi^{km} \mathbf{n}; \quad (\text{П.8.8})$$

$$\chi_{ij} = (\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j, \mathbf{n}), \quad \chi^{ij} = (\mathfrak{e}^i, \mathfrak{e}^j, \mathbf{n}), \quad (\text{П.8.9})$$

где  $(\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j, \mathbf{n})$  — смешанное произведение [19].

**Доказательство.** Равенства (П.8.8) вытекают из определения (П.8.5) векторного произведения. Для получения соотношений (П.8.9) последние два равенства в (П.8.8) достаточно скалярно умножить на нормальный вектор  $\mathbf{n}$ . ■

По отношению к ковариантному дифференцированию дискриминантный тензор ведет себя аналогично метрическому тензору.

**Теорема П.8.3.** Для компонент дискриминантного тензора имеют место равенства:

$$\nabla_k \chi_{ij} = 0, \nabla_k \chi^{ij} = 0. \quad (\text{П.8.10})$$

Доказательство. В силу (П.8.5) и (П.8.6) достаточно рассмотреть случай  $i=1, j=2$ . Первое из требуемых равенств получаем, дифференцируя первое соотношение в (П.8.9) с учетом (П.7.1) и свойств смешанного произведения:

$$\begin{aligned} \nabla_k \chi_{12} &= \frac{\partial \chi_{12}}{\partial \xi^k} - \Gamma_{1k}^m \chi_{m2} - \Gamma_{2k}^m \chi_{1m} = \\ &= \left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \xi^k}, \vartheta_2, \mathbf{n} \right) + \left( \vartheta_1, \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \xi^k}, \mathbf{n} \right) + \left( \vartheta_1, \vartheta_2, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^k} \right) - (\Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{2k}^2) \chi_{12} = \\ &= (\Gamma_{1k}^1 \vartheta_1, \vartheta_2, \mathbf{n}) + (\vartheta_1, \Gamma_{1k}^2 \vartheta_2, \mathbf{n}) - (\Gamma_{1k}^1 + \Gamma_{2k}^2) \chi_{12} = 0. \end{aligned}$$

Второе равенство в (П.8.10) доказывается аналогично с дополнительным привлечением соотношения (П.7.11). ■

С помощью дискриминантного тензора в соответствии с определением, данным в [9], определяется *ротор векторного поля*  $\mathbf{u} = u^i (\xi^1, \xi^2) \vartheta_i$ . Это осевой вектор в  $R^3$  следующего вида:

$$\text{rot } \mathbf{u} = [\nabla, \mathbf{u}] = \chi^{jk} \nabla_j u_k \mathbf{n}. \quad (\text{П.8.11})$$

*Операторы Лапласа*  $\Delta$  определяются аналогично соответствующим понятиям в  $R^3$  (ограничиваемся скалярным и векторным полями):

$$\Delta w = \nabla_i (\nabla w)^i = \nabla_i g^{ij} \nabla_j w = g^{ij} \nabla_i \nabla_j w; \quad (\text{П.8.12})$$

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla_i (\nabla \mathbf{u})^i \vartheta_j = \nabla_i (g^{ki} \nabla_k u^j) \vartheta_j = g^{ik} \nabla_i \nabla_k u^j \vartheta_j. \quad (\text{П.8.13})$$

Получим теперь формулы для некоторых из построенных дифференциальных операторов в главных координатах поверхности. Используя (П.6.25), (П.6.28) и (П.8.4), получаем дивергенцию вектора:

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial (u_1^* H_2)}{\partial \xi^1} + \frac{\partial (u_2^* H_1)}{\partial \xi^2} \right]. \quad (\text{П.8.14})$$

Выражение ротора вектора через физические компоненты находим из (П.8.9), дополнительно учитывая равенства (П.6.29), (П.8.5) и (П.8.6):

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g_{\Pi}}} (\nabla_1 u_2 - \nabla_2 u_1) \mathbf{n} = \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial (H_2 u_2^*)}{\partial \xi^1} - \frac{\partial (H_1 u_1^*)}{\partial \xi^2} \right] \mathbf{n}. \quad (\text{П.8.15})$$

Аналогичным образом находим необходимые для вычисления оператора Лапласа от скаляра (П.8.12) вторые производные:

$$\begin{aligned} \nabla_1 \nabla_1 w &= H_1 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \xi^1} \right) + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial w}{\partial \xi^2} \right], \\ \nabla_2 \nabla_2 w &= H_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \xi^2} \right) + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial w}{\partial \xi^1} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.8.16})$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \Delta w &= g^{11} \nabla_1 \nabla_1 w + g^{22} \nabla_2 \nabla_2 w = \\ &= \frac{1}{H_1} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \xi^1} \right) + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial w}{\partial \xi^2} \right] + \\ &+ \frac{1}{H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \xi^2} \right) + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial w}{\partial \xi^1} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.8.17})$$

В заключение этого раздела приведем обобщение одной из теорем векторного анализа — формулы Грина [17].

**Теорема П.8.4 (обобщенная формула Грина).** Пусть  $\Pi$  — поверхность в  $R^3$  класса  $C^1$ , задаваемая в виде (П.6.3) и ограниченная кривой  $\Gamma \in C^1$ . На этой поверхности определено векторное поле  $\mathbf{u} = u^i(\xi^1, \xi^2) \mathbf{e}_i$ . Тогда имеет место равенство:

$$\iint_{\Pi} \operatorname{div} \mathbf{u} dS = \int_{\Gamma} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) ds, \quad \mathbf{v} = [\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}]. \quad (\text{П.8.18})$$

где  $\boldsymbol{\tau} = \tau^i \mathbf{e}_i$  — единичный касательный вектор к кривой  $\Gamma$ .

**Доказательство.** Положим, что кривая  $\Gamma$  задана в виде (П.6.9), тогда граница области  $D_{\xi} \subset R^2$  в (П.6.3) определяется так:

$$\partial D_\xi : \xi^1 = \xi^1(s), \xi^2 = \xi^2(s), t \in [0, l]. \quad (\text{П.8.19})$$

При этом касательный вектор к этой кривой имеет такие же координаты, как и вектор  $\boldsymbol{\tau}$ .

Левую часть равенства (П.8.18) сводим к двойному интегралу с помощью равенств (П.6.8), учитываем равенство (П.8.4), а также применяем упомянутую выше формулу Грина и равенства (П.5.16):

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi} \operatorname{div} \mathbf{u} dS &= \iint_{D_\xi} \sqrt{g} \operatorname{div} \mathbf{u} d\xi^1 d\xi^2 = \iint_{D_\xi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi^1} (u^1 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (u^2 \sqrt{g}) \right] d\xi^1 d\xi^2 = \\ &= \int_{\frac{\partial D_\xi}{\partial \xi^1}} \sqrt{g} (-u^2 \tau^1 + u^1 \tau^2) ds = \int_0^l (-u^2 \tau^1 + u^1 \tau^2) \sqrt{g_{km} \tau^k \tau^m} ds = \int_{\Gamma} (-u^2 \tau^1 + u^1 \tau^2) ds. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что согласно (П.8.5) и (П.8.18) имеют место равенства  $u^1 \tau^2 - u^2 \tau^1 = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ . ■

Как следует из (П.8.2), равенство в (П.8.18) может быть записано в скалярной форме:

$$\iint_{\Pi} \nabla_i u^i dS = \int_{\Gamma} v_i u^i ds. \quad (\text{П.8.20})$$

Отсюда следует мнемоническое правило его использования: при переходе от поверхностного интеграла к криволинейному необходимо оператор  $\nabla_i$  заменить координатой  $v_i$  вектора  $\mathbf{v}$ .

## П.9. Повторное ковариантное дифференцирование на поверхности в трехмерном евклидовом пространстве

Ограничимся рассмотрением указанных в п. П.8 скалярного  $w(M) = w(\xi^1, \xi^2)$  и векторного  $\mathbf{u}(M) = \mathbf{u}(\xi^1, \xi^2) = u_i \boldsymbol{\vartheta}^i$  полей, а также определенного на поверхности  $\Pi \subset R^3$  кососимметричного тензорного поля  $\boldsymbol{\lambda}(M) = \boldsymbol{\lambda}(\xi^1, \xi^2) = \lambda_{12} \boldsymbol{\vartheta}^1 \boldsymbol{\vartheta}^2$ .

Сначала приведем следствие из доказанного в [9] утверждения для векторного поля.

**Теорема П.9.1.** Пусть  $\Pi$  — поверхность в  $R^3$  класса  $C^1$ , задаваемая в виде (П.6.3). На этой поверхности определено дважды диф-

ференцируемое векторное поле  $\mathbf{u} = u^i(\xi^1, \xi^2)\mathfrak{e}_i$ . Тогда имеют место равенства

$$\nabla_2\nabla_1u_1 - \nabla_1\nabla_2u_1 = -Ru^2, \nabla_2\nabla_1u_2 - \nabla_1\nabla_2u_2 = Ru^1, R_{1212} = R. \blacksquare \quad (\text{П.9.1})$$

Далее докажем аналогичные утверждения для указанных выше скалярного и тензорного полей.

**Теорема П.9.2.** Пусть на указанной в теореме П.9.1 поверхности  $\Pi$  определено дважды дифференцируемое скалярное поле  $w(M) = w(\xi^1, \xi^2)$ .

Тогда справедливы равенства

$$\nabla_2\nabla_1w = \nabla_1\nabla_2w. \quad (\text{П.9.2})$$

**Доказательство** проведем, непосредственно вычисляя повторные производные с использованием правила ковариантного дифференцирования (учитываем симметрию символов Кристоффеля второго рода по нижним индексам):

$$\nabla_i w = \frac{\partial w}{\partial \xi^i}; \quad (\text{П.9.3})$$

$$\begin{aligned} \nabla_1\nabla_2w &= \frac{\partial \nabla_2w}{\partial \xi^1} - \Gamma_{12}^m \nabla_m w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} - \Gamma_{12}^m \nabla_m w, \\ \nabla_2\nabla_1w &= \frac{\partial \nabla_1w}{\partial \xi^2} - \Gamma_{21}^m \nabla_m w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} - \Gamma_{21}^m \nabla_m w, \end{aligned} \quad (\text{П.9.4})$$

откуда и следует требуемое утверждение.  $\blacksquare$

**Теорема П.9.3.** Пусть на указанной в теореме П.9.1 поверхности  $\Pi$  определено дважды дифференцируемое кососимметричное тензорное поле  $\lambda(M) = \lambda(\xi^1, \xi^2) = \lambda_{12}\mathfrak{e}^1\mathfrak{e}^2$ .

Тогда справедливы равенства

$$\nabla_2\nabla_1\lambda_{12} = \nabla_1\nabla_2\lambda_{12}. \quad (\text{П.9.5})$$

**Доказательство** проведем аналогично предыдущей теореме. Производные от ненулевой компоненты тензора имеют вид:

$$\nabla_i \lambda_{12} = \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial \xi^i} - \Gamma_{i1}^m \lambda_{m2} - \Gamma_{i2}^m \lambda_{1m} = \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial \xi^i} - (\Gamma_{i1}^1 + \Gamma_{i2}^2) \lambda_{12}; \quad (\text{П.9.6})$$

$$\begin{aligned} \nabla_1 \nabla_2 \lambda_{12} &= \frac{\partial \nabla_2 \lambda_{12}}{\partial \xi^1} - \Gamma_{12}^m \nabla_m \lambda_{12} - \Gamma_{11}^m \nabla_2 \lambda_{m2} - \Gamma_{12}^m \nabla_2 \lambda_{1m} = \\ &= \frac{\partial \nabla_2 \lambda_{12}}{\partial \xi^1} - \Gamma_{12}^m \nabla_m \lambda_{12} - (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) \nabla_2 \lambda_{12}, \\ \nabla_2 \nabla_1 \lambda_{12} &= \frac{\partial \nabla_1 \lambda_{12}}{\partial \xi^2} - \Gamma_{21}^m \nabla_m \lambda_{12} - \Gamma_{21}^m \nabla_1 \lambda_{m2} - \Gamma_{22}^m \nabla_1 \lambda_{1m} = \\ &= \frac{\partial \nabla_1 \lambda_{12}}{\partial \xi^2} - \Gamma_{21}^m \nabla_m \lambda_{12} - (\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2) \nabla_1 \lambda_{12}. \end{aligned} \quad (\text{П.9.7})$$

Используя эти равенства, получаем искомую разность:

$$\begin{aligned} \nabla_2 \nabla_1 \lambda_{12} - \nabla_1 \nabla_2 \lambda_{12} &= \frac{\partial \nabla_1 \lambda_{12}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \nabla_2 \lambda_{12}}{\partial \xi^1} - (\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2) \nabla_1 \lambda_{12} + \\ &+ (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) \nabla_2 \lambda_{12} = \left( \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial \xi^2} \right) \lambda_{12}. \end{aligned} \quad (\text{П.9.8})$$

Далее с использованием первого равенства в (П.7.1) и свойств компонент тензора Римана—Кристоффеля получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} R_{121.}^{-1} &= \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial \xi^1} + \Gamma_{11}^m \Gamma_{m2}^1 - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m1}^1 = g^{1n} R_{121n} = g^{12} R, \\ R_{212.}^{-2} &= \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial \xi^2} + \Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^2 - \Gamma_{12}^m \Gamma_{m2}^2 = g^{2n} R_{212n} = g^{12} R_{2121} = g^{12} R. \end{aligned} \quad (\text{П.9.9})$$

Из последних двух формул приходим к равенству

$$\nabla_2 \nabla_1 \lambda_{12} - \nabla_1 \nabla_2 \lambda_{12} = R_{212.}^{-2} - R_{121.}^{-1} = 0,$$

которое и завершает доказательство. ■

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.* Линейная теория тонких оболочек. — Л.: Политехника, 1991. — 656 с.
2. *Власов В.З.* Общая теория оболочек. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949. — 784 с.
3. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. — М.: Наука, 1966. — 635 с.
4. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. — М.: Наука, 1976. — 512 с.
5. *Огибалов П.М., Колтунов М.А.* Оболочки и пластины. — М.: Из-во МГУ, 1969. — 695 с.
6. *Кильчевский Н.А., Издебская Г.А., Киселевская Л.М.* Лекции по аналитической механике оболочек. — Киев: Вища школа, 1974. — 232 с.
7. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа (задачи аэроупругости). — М.: Наука, 1976. — 416 с.
8. *Вестяк А.В., Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Алгебра и аналитическая геометрия. Ч. 2. — М.: Изд-во МАИ, 2007. — 544 с.
9. *Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Основы тензорного анализа и механика сплошной среды. — М.: Наука, 2000. — 214 с.
10. *Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В.* Теория упругости и пластичности. — М.: Физматлит, 2002. — 416 с.
11. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Общие соотношения и вариационные принципы математической теории упругости: Учебное пособие. — М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. — 112 с.
12. Сборник задач по сопротивлению материалов с теорией и примерами: Учеб. пособие для вузов / Под ред. А.Г. Горшкова, Д.В. Тарлаковского. — 2-е изд., перераб. и допол. — М.: Физматлит, 2003. — 632 с.
13. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 424 с.
14. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. литер., 1961. — 228 с.
15. *Буслаев В.С.* Вариационное исчисление: Учебное пособие. — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1980. — 288 с.
16. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах. — М.: Физматлит, 2004. — 472 с.
17. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: Учебник для студентов университетов и вузов. — М.: Дрофа, т. I — 2003. — 704с.; т. II — 2004. — 720 с.
18. *Позняк Э.Г., Шикин Е.В.* Дифференциальная геометрия: первое знакомство. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 384 с.
19. *Вестяк А.В., Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Алгебра и аналитическая геометрия. Ч. 1. — М.: Изд-во МАИ, 2002. — 460 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
Глава 1. ГЕОМЕТРИЯ И КИНЕМАТИКА ОБОЛОЧЕК .....	4
1.1. Основные определения .....	4
1.2. Метрические соотношения .....	7
1.3. Деформированное состояние оболочки .....	13
1.4. Механический смысл кинематических параметров .....	18
1.5. Уравнения совместности деформаций .....	22
Глава 2. ДИНАМИКА ОБОЛОЧЕК .....	29
2.1. Энергетические характеристики оболочки .....	29
2.2. Работа внешних сил .....	32
2.3. Физический закон для оболочки .....	34
2.4. Начально-краевые задачи для оболочек .....	37
2.5. Оболочка типа Тимошенко .....	43
2.6. Оболочка Кирхгофа-Лява .....	49
2.7. Общие теоремы теории оболочек .....	54
2.8. Уравнения движения в перемещениях .....	56
2.9. Начально-краевые задачи для оболочек в главных координатах .....	57
2.10. Уравнения совместности деформаций в главных координатах .....	61
Приложение. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ .....	65
П.1. Понятие риманова пространства .....	65
П.2. Параллельный перенос в римановом пространстве .....	70
П.3. Специальные кривые в римановом пространстве .....	73
П.4. Многогранник Френе .....	76
П.5. Кривые в трехмерном евклидовом пространстве .....	79
П.6. Поверхности в трехмерном евклидовом пространстве .....	84
П.7. Дериационные уравнения .....	94
П.8. Дифференциальные операторы на поверхности в трехмерном евклидовом пространстве .....	103
П.9. Повторное ковариантное дифференцирование на поверхности в трехмерном евклидовом пространстве .....	107
Библиографический список .....	110



Тем. план 2018, поз. 21

**Михайлова Елена Юрьевна  
Тарлаковский Дмитрий Валентинович  
Федотенков Григорий Валерьевич**

**ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК**

Редактор *Е.В. Дмитриева*  
Компьютерная верстка *О.Г. Лавровой*

Сдано в набор 14.03.18. Подписано в печать 19.06.18.  
Бумага писчая. Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 6,51. Уч.-изд. л. 7,00. Тираж 150 экз.  
Зак. 870/567.

Издательство МАИ  
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993  
Типография Издательства МАИ  
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993

