



Издательство

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

Е.Ю. МИХАЙЛОВА
Д.В. ТАРЛАКОВСКИЙ
Г.В. ФЕДОТЕНКОВ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ
УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Москва • 2018

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

**Е.Ю. МИХАЙЛОВА, Д.В. ТАРЛАКОВСКИЙ,
Г.В. ФЕДОТЕНКОВ**

**УПРУГИЕ ПЛАСТИНЫ
И ПОЛОГИЕ ОБОЛОЧКИ**

Учебное пособие

Утверждено
на заседании редсовета
15 января 2018 г.

Москва
Издательство МАИ
2018

Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Упругие пластины и пологие оболочки: Учебное пособие. — М.: Изд-во МАИ, 2018. — 92 с.: ил.

В пособии содержится теоретический материал по теории пластин и приближенным моделям оболочек: геометрия и кинематика, уравнения совместности деформаций, уравнения движения, основные типы граничных условий. В том числе приводятся основные сведения о безмоментных оболочках и краевом эффекте. В приложение включены соотношения теории пластин в прямоугольных декартовых и полярных координатах, а также вопросы повторного ковариантного дифференцирования тензоров на поверхностях.

Для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная механика», всех профилей бакалавриата и магистерских программ, а также учащихся механико-математических факультетов и аспирантов, занимающихся вопросами механики деформируемого тела.

Рецензенты:

кафедра «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин» МЭИ (зав. кафедрой д-р техн. наук, профессор *И.В. Меркурьев*);

д-р физ.-мат. наук, *С.Г. Пшеничников*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теории пластин и оболочек, в том числе и ее приближенным вариантам, посвящено большое количество монографий, статей, учебников и учебных пособий (см., например, [1—6]). При этом в основном рассматривается классический вариант теории, не учитывающий сдвиговые деформации поперечного сечения и обжатие нормального волокна (оболочки Кирхгофа—Лява) и ее различные модификации.

В данном пособии материал подается с общих позиций, учитывающих указанные факторы. Из построенной модели классические модели вытекают как частный случай.

Это пособие, по сути, является продолжением издания [6], обозначения из которого, как правило, используются без пояснений. Предполагается, что читатель в достаточной мере знаком с этим материалом.

Глава 1. ПЛАСТИНЫ

1.1. Начально-краевые задачи для пластин

В соответствии с данным в [6] определением пластина есть частный случай оболочки со срединной поверхностью Π в виде плоскости (*срединной плоскости*). Ее так же, как и для оболочек, будем задавать следующим образом:

$$\Pi: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2), (\xi^1, \xi^2) \in D \subset R^2. \quad (1.1.1)$$

При этом ее граница $\Gamma = \partial\Pi$, очевидно, является плоской кривой, а боковая поверхность Π_b пластины — цилиндром. Она при условии постоянности толщины h , аналогично оболочкам, задается так:

$$\Pi_b: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2) + z\mathbf{n}, (\xi^1, \xi^2) \in \partial D, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}. \quad (1.1.2)$$

Здесь \mathbf{n} — единичный нормальный к срединной плоскости вектор, который сонаправлен оси Oz .

Внешняя Π_+ и внутренняя Π_- поверхности пластины есть плоскости, которые задаются так:

$$\Pi_{\pm}: z = \pm \frac{h}{2}, (\xi^1, \xi^2) \in D. \quad (1.1.3)$$

Как показано в пособии [6], тензор кривизны плоскости Π является нулевым ($\varepsilon^1, \varepsilon^2$ — контравариантный базис; латинские индексы принимают значения 1, 2):

$$\mathbf{b} = b_{ij} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^j = \mathbf{0}, \quad (1.1.4)$$

что соответствует равенству нулю главных кривизн k_1 , k_2 и бесконечным радиусам кривизны R_1 , R_2 :

$$k_1 = k_2 = 0, \quad R_1 = R_2 = \infty. \quad (1.1.5)$$

Следовательно, начально-краевые задачи для пластин можно получить из соответствующих задач для оболочек при условии (1.1.1). Для общей модели пластины с учетом поворота нормального к срединной плоскости волокна и его обжатия соответствующие соотношения вытекают из материала п. 2.4 пособия [6]. В частности, замкнутая система уравнений движения пластины имеет вид (точками обозначены производные по времени t):

— уравнения движения

$$\rho h \dot{u}^i = \nabla_j T^{ji} + q^i, \quad \rho I \dot{\Psi}_3 = \nabla_j \mu^j - N + m; \quad (1.1.6)$$

$$\rho h \ddot{w} = \nabla_i Q^i + q, \quad \rho I \ddot{\Psi}^i = \nabla_j M^{ij} - Q^i + m^i; \quad (1.1.7)$$

— кинематические соотношения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \quad \alpha_{ij} = \nabla_i u_j; \quad (1.1.8)$$

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{2} (\beta_{ij} + \beta_{ji}), \quad \beta_{ij} = \nabla_i \Psi_j, \quad -\vartheta_i = \nabla_i w, \quad \theta_k = \Psi_k - \vartheta_k; \quad (1.1.9)$$

— физический закон

$$T^{ij} = \hat{T}^{ij} = h (C^{ijkl} \varepsilon_{kl} + C^{ij33} \Psi_3), \quad (1.1.10)$$

$$\mu^i = IC^{i3k3} \nabla_k \Psi_3, \quad N = \hat{N} = h (C^{33kl} \varepsilon_{kl} + C^{3333} \Psi_3);$$

$$M^{ij} = IC^{ijkl} \kappa_{kl}, \quad Q^i = \hat{Q}^i = h C^{i3k3} \theta_k. \quad (1.1.11)$$

Здесь u_i и w — тангенциальные и нормальное перемещения; ρ — плотность материала; Ψ_i и Ψ_3 — координаты вектора поворота и относительное удлинение нормального волокна; ϑ_i — координаты

вектора поворота нормального к срединной плоскости вектора; h — толщина пластины; T^{ij} и M^{ij} — компоненты тензоров тангенциальных усилий и моментов; Q^i и μ^i — координаты векторов перерезывающих усилий и дополнительных моментов; N — нормальное усилие; q^i и m^i — тангенциальные координаты векторов поверхностного давления и отнесенных к единице площади моментов; q и m — их нормальные координаты; ε_{ij} и κ_{ij} — компоненты тензоров тангенциальных деформаций и изменения кривизны; C^{ijkl} , C^{ij33} , C^{i3k3} , C^{3333} — компоненты тензора упругих постоянных; $I = h^3/12$.

Заметим, что для пластин величины T^{ij} , Q^i , N , в отличие от произвольных оболочек, совпадают с усилиями \hat{T}^{ij} , \hat{Q}^i , \hat{N} . Причем тензор с компонентами T^{ij} является симметричным.

Естественные граничные условия для пластины записываются аналогично соответствующим равенствам для оболочек:

$$u_i|_{\Gamma_u} = u_{(0)i}, \Psi_3|_{\Gamma_u} = \Psi_{(0)3}; \quad (1.1.12)$$

$$w|_{\Gamma_u} = w_{(0)}, \Psi_i|_{\Gamma_u} = \Psi_{(0)i}; \quad (1.1.13)$$

$$T^{ji}v_j|_{\Gamma_\sigma} = T_{(0)}^i, \mu^i v_i|_{\Gamma_\sigma} = \mu_{(0)}; \quad (1.1.14)$$

$$M^{ij}v_j|_{\Gamma_\sigma} = M_{(0)}^i, Q^i|_{\Gamma_\sigma} = Q_{(0)}^i. \quad (1.1.15)$$

Здесь $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ и кривые Γ_u, Γ_σ могут пересекаться по множеству нулевой длины, $l(\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma) = 0$; $u_{(0)i}, \Psi_{(0)3}, w_{(0)}, \Psi_{(0)i}, T_{(0)}^i, \mu_{(0)}, M_{(0)}^i, Q_{(0)}^i$ — заданные функции; v_i — координаты единичного вектора

внешней нормали к боковой поверхности. В прямоугольной декартовой системе координат $\xi^1 = x$, $\xi^2 = y$ последние имеют смысл направляющих косинусов нормали к кривой Γ : $v_1 = \cos \alpha$, $v_2 = \cos \beta$ (рис. 1.1.1).

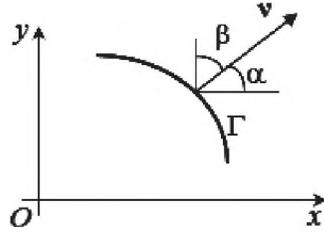


Рис. 1.1.1

Естественно, для замыкания начально-краевой задачи к соотношениям (1.1.6)—(1.1.15) необходимо добавить соответствующие начальные условия, которые аналогичны условиям для оболочек. Поэтому здесь и далее их, как правило, выписывать не будем.

В случае изотропного материала [6, 7] физический закон (1.1.10), (1.1.11) записывается так:

$$T^{\bar{j}} = h \left[\lambda (\varepsilon + \psi_3) g^{\bar{j}} + 2\mu \varepsilon^{\bar{j}} \right], \mu^i = \mu I g^{ik} \nabla_k \psi_3, \quad (1.1.16)$$

$$N = h \left[\lambda \varepsilon + (\lambda + 2\mu) \psi_3 \right], \varepsilon = \varepsilon_{kl} g^{kl};$$

$$M^{\bar{j}} = I \left(\lambda g^{\bar{j}} \kappa + 2\mu \kappa^{\bar{j}} \right), Q^i = \mu h \theta^i, \kappa = \kappa_{kl} g^{kl}, \quad (1.1.17)$$

где g^{kl} — компоненты метрического тензора; λ и μ — упругие постоянные Ламе.

Те же равенства при использовании технических постоянных (коэффициента Пуассона ν и модуля Юнга E) принимают следующий вид:

$$T^{\bar{j}} = \frac{Eh}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon + \psi_3) g^{\bar{j}} + \varepsilon^{\bar{j}} \right], \quad (1.1.18)$$

$$\mu^i = \frac{EI}{2(1+\nu)} g^{ik} \frac{\partial \psi_3}{\partial \xi^k}, N = \frac{Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\nu \varepsilon + (1-\nu) \psi_3 \right];$$

$$M^{\bar{j}} = \frac{EI}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \kappa g^{\bar{j}} + \kappa^{\bar{j}} \right), Q^i = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \theta^i. \quad (1.1.19)$$

Анализ соотношений (1.1.6)—(1.1.15) показывает, что они распадаются на две независимые задачи: (1.1.6), (1.1.8), (1.1.10), (1.1.12),

(1.1.14) и (1.1.7), (1.1.9), (1.1.11), (1.1.13), (1.1.15), описывающие соответственно движение в плоскости Π и изгиб пластины.

Вариационная постановка задачи вытекает из соответствующих соотношений для оболочек [6] при учете соотношений (1.1.4), (1.1.10) и (1.1.11). Функционал Лагранжа I , потенциальная W и кинетическая E энергии записываются с заменой поверхностных интегралов двойными по соответствующей области Ω в плоскости Π (x, y — прямоугольные декартовы координаты):

$$\begin{aligned}
 I(\mathbf{u}) &= W - \iint_{\Omega} (q^i u_i + m \psi_3 + m^i \psi_i + qw) dx dy - \\
 &\quad - \int_{\Gamma} (T_{(0)}^i u_i + \mu_{(0)} \psi_3 + M_{(0)}^i \psi_i + Q_{(0)} w) ds, \\
 W &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [T^{\bar{j}} \varepsilon_{\bar{j}} + M^{\bar{j}} \kappa_{\bar{j}} + Q^j \theta_i + \mu^i (b_i^k \theta_k + \nabla_i \psi_3) + N \psi_3] dx dy, \quad (1.1.20) \\
 E &= \frac{\rho}{2} \iint_{\Omega} [h(\dot{u}_i \dot{u}^i + \dot{w}^2) + I(\dot{\psi}_i \dot{\psi}^i + \dot{\psi}_3^2)] dx dy.
 \end{aligned}$$

Соответствующее вариационное уравнение имеет вид (знак « δ » обозначает вариацию; моменты времени t_1 и t_2 произвольны, но $t_1 < t_2$):

$$\begin{aligned}
 \delta H &= \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Omega} [(p h \dot{u}^i - \nabla_j T^{ji} - q^i) \delta u_i + (p h \dot{w} - \nabla_j Q^j - q) \delta w + \\
 &\quad + (p I \dot{\psi}^j + Q^j - \nabla_j M^{\bar{j}} - m^i) \delta \psi_i + (p I \dot{\psi}_3 - N + \nabla_j \mu^i + m^i) \delta \psi_i] dx dy + \\
 &\quad + \int_{\Gamma} [(T^{ji} v_j - T_{(0)}^i) \delta u_i + (Q^i v_i - Q_{(0)}) \delta w + \\
 &\quad + (M^{\bar{j}} v_j - M_{(0)}^i) \delta \psi_i + (\mu^i v_i - \mu_{(0)}) \delta \psi_3] ds = 0, \quad (1.1.21) \\
 \delta w|_{t=t_1} = \delta w|_{t=t_2} &= 0, \quad \delta \psi_i|_{t=t_1} = \delta \psi_i|_{t=t_2} = 0.
 \end{aligned}$$

Отметим, что на пластины переносятся все общие теоремы теории оболочек [7] (закон сохранения механической энергии, теоремы взаимности, теорема Клапейрона, теоремы о единственности

решения динамических и статических задач) с единственной модификацией: аналогично (1.1.20) и (1.1.21) поверхностные интегралы необходимо заменить двойными интегралами.

1.2. Уравнения движения пластины в перемещениях

Замкнутая система уравнений (1.1.6)—(1.1.11), в отличие от оболочек, достаточно просто сводится к уравнениям движения относительно кинематических параметров (*уравнениям в перемещениях*). С этой целью, учитывая симметрию тензора упругих постоянных [7], в физический закон (1.1.10), (1.1.11) подставляем кинематические соотношения (1.1.8), (1.1.9):

$$\begin{aligned} T^{ij} &= h(C^{ijkl}\nabla_k u_l + C^{ij33}\psi_3), \mu^i = IC^{i3k3}\nabla_k \psi_3, \\ N &= h(C^{33kl}\nabla_k u_l + C^{3333}\psi_3) \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

$$M^{ij} = IC^{ijkl}\nabla_k \psi_l, Q^i = hC^{i3k3}(\psi_k + \nabla_k w). \quad (1.2.2)$$

С учетом этих соотношений уравнения движения (1.1.6) и (1.1.7) приобретают такой вид (полагаем, что материал пластины однородный):

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}^i &= C^{ijkl}\nabla_j \nabla_k u_l + C^{ij33}\nabla_j \psi_3 + q^i/h, \\ \rho \ddot{\psi}_3 &= C^{i3k3}\nabla_i \nabla_k \psi_3 + \left[m - h(C^{33kl}\nabla_k u_l + C^{3333}\psi_3) \right] / I; \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

$$\begin{aligned} \rho \ddot{w} &= C^{i3k3}\nabla_i (\psi_k + \nabla_k w) + q/h, \\ \rho \ddot{\psi}^i &= C^{ijkl}\nabla_j \nabla_k \psi_l + \left[m^i - hC^{i3k3}(\psi_k + \nabla_k w) \right] / I. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

В случае изотропного материала [6, 7] эти уравнения записываются так:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i &= (\lambda + \mu)\nabla_i \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta u_i + \lambda \nabla_i \psi_3 + q_i/h, \\ \rho \ddot{\psi}_3 &= \mu \Delta \psi_3 + \left\{ m - h[\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + (\lambda + 2\mu)\psi_3] \right\} / I; \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

$$\begin{aligned} \rho \ddot{w} &= \mu (\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} + \Delta w) + q/h, \\ \rho \ddot{\psi}_i &= (\lambda + \mu) \nabla_i \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} + \mu \Delta \psi_i + [m_i - h\mu (\psi_i + \nabla_i w)]/I, \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

где

$$\mathbf{u} = u^i \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \boldsymbol{\psi} = \psi^i \boldsymbol{\varepsilon}_i. \quad (1.2.7)$$

Наиболее компактную форму эти уравнения приобретают при переходе к векторной записи:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\mathbf{u}} &= (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \lambda \operatorname{grad} \psi_3 + \mathbf{q}/h, \\ \rho \ddot{\psi}_3 &= \mu \Delta \psi_3 - \frac{h}{I} [\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + (\lambda + 2\mu) \psi_3] + m/I; \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

$$\begin{aligned} \rho \ddot{w} &= \mu (\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} + \Delta w) + q/h, \\ \rho \ddot{\boldsymbol{\psi}} &= (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} + \mu \Delta \boldsymbol{\psi} + [\mathbf{m} - h\mu (\boldsymbol{\psi} + \operatorname{grad} w)]/I, \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

где

$$\mathbf{q} = q^i \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \mathbf{m} = m^i \boldsymbol{\varepsilon}_i. \quad (1.2.10)$$

Очевидно, системы уравнений в каждой из пар (1.2.3) и (1.2.4), (1.2.5) и (1.2.6), (1.2.8) и (1.2.9), аналогично предыдущему разделу, независимы и описывают соответственно движение в плоскости Π и изгиб пластины.

Отметим также наличие в векторных уравнениях слагаемых, содержащих аналогичный входящему в уравнения Ламе в теории упругости оператор

$$L(\mathbf{u}) = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u}.$$

1.3. Пластина типа Тимошенко

Этот вариант можно получить из соответствующей модели оболочки [6] с использованием равенства (1.1.4). Однако тот же результат при выполнении условия

$$\psi_3 = 0 \quad (1.3.1)$$

фактически получен в пункте 1.1, с тем отличием, что последнее равенство в (1.1.17) должно быть заменено следующим:

$$Q^i = hk^2 C^{i3k3} \theta_k, \quad k^2 = 5/6. \quad (1.3.2)$$

С учетом равенства (1.3.1) независимая задача (1.1.6), (1.1.8), (1.1.10), (1.1.12), (1.1.14) без начальных условий приобретает вид

$$\begin{aligned} \rho h u^i &= \nabla_j T^{ji} + q^i, \quad T^{ij} = h C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \\ u_i|_{\Gamma_u} &= u_{(0)i}, \quad T^{ji} \nu_j|_{\Gamma_\sigma} = T_{(0)}^i, \quad \mu^i \nu_i|_{\Gamma_\sigma} = \mu_{(0)}, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

фактически совпадающий с видом плоской задачи теории упругости [8]. Для ее решения в случае однородной изотропной среды могут быть использованы функция Эри или комплексные потенциалы, вследствие чего уравнения в (1.1.6) относительно тангенциальных перемещений называют также *уравнениями Максвелла*¹—*Эри*².

Далее в силу линейности задачи положим

$$q^i = 0, \quad m = 0, \quad u_{(0)i} = 0, \quad \psi_{(0)3} = 0, \quad T_{(0)}^i = 0, \quad \mu_{(0)} = 0, \quad (1.3.4)$$

что при однородных начальных условиях приводит к тривиальному решению задачи (1.1.6), (1.1.8), (1.1.10), (1.1.12), (1.1.14):

$$u^i = 0, \quad T^{ij} = 0, \quad \psi_3 = 0, \quad \mu^i = 0, \quad N = 0. \quad (1.3.5)$$

Тогда нетривиальной для пластины типа Тимошенко является вытекающая из (1.1.7), (1.1.9), (1.1.11), (1.1.13), (1.1.15) и (1.3.2) задача изгиба без начальных условий:

$$\rho h \bar{w} = \nabla_i Q^i + q, \quad \rho I \bar{\Psi}^i = \nabla_j M^{ij} - Q^i + m^i, \quad (1.3.6)$$

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i \psi_j + \nabla_j \psi_i), \quad \theta_k = \psi_k + \nabla_k w, \quad (1.3.7)$$

$$M^{ij} = I C^{ijkl} \kappa_{kl}, \quad Q^i = hk^2 C^{i3k3} \theta_k; \quad (1.3.8)$$

¹ Максвелл Дж.К. (Maxwell J. C., 1831—1879) — британский физик, математик и механик.

² Эри Дж.Б. (Airy G.B., 1801—1892) — английский астроном, математик.

$$w|_{\Gamma_u} = w_{(0)}, \Psi_i|_{\Gamma_u} = \Psi_{(0)i}, M^{ij}\nu_j|_{\Gamma_u} = M_{(0)}^i, Q^i|_{\Gamma_u} = Q_{(0)}^i. \quad (1.3.9)$$

Очевидно, что она переходит в задачу изгиба для пластины, рассмотренной в п. 1.1, если положить $k = 1$. Как отмечено в [6], различие в этом коэффициенте связано с гипотезой о распределении по толщине касательных напряжений. Поэтому далее вместо двух моделей п. 1 и п. 3 будем рассматривать только пластину типа Тимошенко, как наиболее апробированную модель.

Отметим, что для оболочек из-за связи изгиба с тангенциальными деформациями эти модели отличаются принципиально.

В случае изотропной среды физические соотношения (1.3.8), аналогично (1.1.17) и (1.1.19), приобретают такой вид:

$$M^{ij} = I(\lambda g^{ij} \kappa + 2\mu \kappa^{ij}), Q^i = \mu h k^2 \theta^i, \quad (1.3.10)$$

$$M^{ij} = \frac{EI}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \kappa g^{ij} + \kappa^{ij} \right), Q^i = \frac{Ehk^2}{2(1+\nu)} \theta^i. \quad (1.3.11)$$

Нетривиальные уравнения движения в перемещениях для пластины типа Тимошенко фактически совпадают с (1.2.4), (1.2.6) и (1.2.9) при учете входящего в формулу (1.3.2) для перерезывающих сил коэффициента k^2 :

$$\begin{aligned} \rho \bar{w} &= k^2 C^{i3k3} \nabla_i (\Psi_k + \nabla_k w) + q/h, \\ \rho \bar{\Psi}^i &= C^{ijkl} \nabla_j \nabla_k \Psi_l + \left[m^i - k^2 h C^{i3k3} (\Psi_k + \nabla_k w) \right] / I; \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

$$\begin{aligned} \rho \bar{w} &= k^2 \mu (\operatorname{div} \Psi + \Delta w) + q/h, \\ \rho \bar{\Psi}_i &= (\lambda + \mu) \nabla_i \operatorname{div} \Psi + \mu \Delta \Psi_i + \left[m_i - k^2 h \mu (\Psi_i + \nabla_i w) \right] / I; \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

$$\begin{aligned} \rho \bar{w} &= k^2 \mu (\operatorname{div} \Psi + \Delta w) + q/h, \\ \rho \bar{\Psi} &= (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \Psi + \mu \Delta \Psi + \left[\mathbf{m} - k^2 h \mu (\Psi + \operatorname{grad} w) \right] / I. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Вариационная постановка задачи изгиба для пластины типа Тимошенко вытекает из соответствующих соотношений для анало-

гичной модели оболочек [6] или из (1.1.20) и (1.1.21) при учете (1.3.1) и (1.3.4). А именно, функционал Лагранжа I , потенциальная W и кинетическая E энергии записываются так:

$$I(\mathbf{u}) = W - \iint_{\Pi} (m^i \psi_i + qw) dS - \int_{\Gamma} (M_{(0)}^i \psi_i + Q_{(0)} w) ds,$$

$$W = \frac{1}{2} \iint_{\Pi} (M^{ij} \kappa_{ij} + Q^i \theta_i) dS, \quad E = \frac{1}{2} \iint_{\Pi} \rho (h\dot{w}^2 + I \dot{\psi}_i \dot{\psi}^i) dS. \quad (1.3.15)$$

Соответствующее вариационное уравнение имеет вид:

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Omega} [(\rho h \ddot{w} - \nabla_j Q^j - q) \delta w + (\rho I \ddot{\psi}^i + Q^i - \nabla_j M^{ij} - m^i) \delta \psi_i] dx dy +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Gamma} [(Q^j \nu_j - Q_{(0)}) \delta w + (M^{ij} \nu_j - M_{(0)}^i) \delta \psi_i] ds = 0. \quad (1.3.16)$$

1.4. Пластина Кирхгофа

Следуя модели оболочки Кирхгофа—Лява [6], соотношения для пластины Кирхгофа построим, используя материал предыдущего пункта с учетом предположений:

$$\theta_k = 0, \quad \psi_k = \vartheta_k; \quad (1.4.1)$$

$$\dot{\psi}^i = 0, \quad \dot{\vartheta}^i = 0. \quad (1.4.2)$$

Используя их, из (1.3.6)—(1.3.9) получаем следующую задачу без начальных условий:

$$\rho h \ddot{w} = \nabla_j \nabla_k M^{jk} + p, \quad p = q + \nabla_j m^j = q + \text{divm}; \quad (1.4.3)$$

$$\kappa_{ij} = -\nabla_i \nabla_j w, \quad \vartheta_i = -\nabla_i w; \quad (1.4.4)$$

$$M^{ij} = IC^{ijkl} \kappa_{kl}, \quad Q^i = \nabla_j M^{ij} + m^i; \quad (1.4.5)$$

$$w|_{\Gamma_u} = w_{(0)}, \quad \nabla_i w|_{\Gamma_u} = -\psi_{(0)i}, \quad M^{ij} \nu_j|_{\Gamma_c} = M_{(0)}^i, \quad Q^i|_{\Gamma_c} = Q_{(0)}. \quad (1.4.6)$$

При построении первого равенства в (1.4.4) учтено, что срединная плоскость является евклидовым пространством, и, следовательно, порядок ковариантного дифференцирования можно менять [9].

Отметим, что получающееся из второго уравнения в (1.3.6) соотношение не является дифференциальным. Поэтому оно перенесено в физический закон (1.4.5).

В случае однородной изотропной среды две формы физического закона для пластины Кирхгофа являются модификациями равенств (1.3.10) и (1.3.11) за счет второго соотношения в (1.4.5):

$$M^{ij} = I(\lambda g^{ij} \kappa + 2\mu \kappa^{ij}), \quad Q^i = \nabla_j M^{ij} + m^i; \quad (1.4.7)$$

$$M^{ij} = \frac{EI}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \kappa g^{ij} + \kappa^{ij} \right), \quad Q^i = \nabla_j M^{ij} + m^i. \quad (1.4.8)$$

Две формы уравнения изгиба пластины Кирхгофа в перемещениях можно получить из (1.3.12) и (1.3.14). Однако в силу отмеченного выше противоречия в них нельзя подставлять равенства (1.4.1). Необходимые преобразования продемонстрируем на примере системы уравнений (1.3.12). Полагая в силу (1.4.2) левую часть второго уравнения равной нулю, получаем

$$hk^2 C^{i3k3} \nabla_i (\Psi_k + \nabla_k w) = C^{ijkl} I \nabla_i \nabla_j \nabla_k \Psi_l + \nabla_i m^i.$$

Подставляя его в первое уравнение, с учетом обозначения в (1.4.3) и равенств (1.4.1), (1.4.4), приходим к следующему результату:

$$\rho h \ddot{w} = -I C^{ijkl} \nabla_i \nabla_j \nabla_k \nabla_l w + p. \quad (1.4.9)$$

Это же уравнение проще получить подстановкой первого равенства из (1.4.5) в (1.4.3) при учете (1.4.4). Поэтому аналогичным образом проводим преобразования, подставляя в (1.4.3) физический закон (1.4.7):

$$\rho h \ddot{w} = -D \Delta \Delta w + p, \quad D = (\lambda + 2\mu) I. \quad (1.4.10)$$

При выводе этого уравнения с учетом формул (1.4.4) и того, что порядок ковариантного дифференцирования можно менять, проведены следующие преобразования:

$$g^{jk}\nabla_j\nabla_k\kappa = g^{jk}g^{mn}\nabla_j\nabla_k\kappa_{mn} = -g^{jk}\nabla_j\nabla_k(g^{mn}\nabla_m\nabla_n w) = -\Delta\Delta w,$$

$$\begin{aligned}\nabla_j\nabla_k\kappa^{jk} &= g^{jm}g^{kn}\nabla_j\nabla_k\kappa_{mn} = -\nabla_j\nabla_k(g^{jm}g^{kn}\nabla_m\nabla_n w) = \\ &= -g^{jm}\nabla_j\nabla_m(g^{kn}\nabla_k\nabla_n w) = -\Delta\Delta w.\end{aligned}$$

Величина D называется *жесткостью на изгиб* (цилиндрической жесткостью), а (1.4.10) — *уравнением Софи Жермен—Лагранжа*. Собственно, таковым оно становится, если дополнительно принять гипотезу об отсутствии нормальных напряжений ($\tilde{\sigma}_{33} = 0$). Для этого в формуле для жесткости нужно заменить λ величиной $\lambda' = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$ [6], что приводит к такому равенству:

$$D = (\lambda' + 2\mu)I = 4\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} I. \quad (1.4.11)$$

Оно приводится к наиболее известной форме при переходе от упругих постоянных λ и μ к коэффициенту Пуассона ν и модулю Юнга E :

$$D = \frac{EI}{1 - \nu^2} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (1.4.12)$$

Выражения для функционала Лагранжа, потенциальной и кинетической энергии для пластины Кирхгофа вытекают из соответствующих соотношений для оболочки Кирхгофа—Лява [6]:

$$I(\mathbf{u}) = W - \iint_{\Pi} qwdS, \quad W = \frac{1}{2} \iint_{\Pi} M^{\bar{ij}} \kappa_{\bar{ij}} dS, \quad E = \frac{1}{2} \iint_{\Pi} \rho h w^2 dS. \quad (1.4.13)$$

Соответствующие вариации в этом случае записываются так:

$$\begin{aligned}\delta I &= - \iint_{\Pi} (\nabla_i \nabla_j M^{\bar{ij}} + p) \delta w dS + \\ &+ \int_{\Gamma} [(Q^j \nu_j - Q_{(0)}) \delta w + (M^{\bar{ij}} \nu_j - M_{(0)}^i) \delta \vartheta_i] ds, \\ &\int_{t_1}^{t_2} \delta E dt = - \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Pi} \rho h w \delta w dS.\end{aligned} \quad (1.4.14)$$

Тогда вариационное уравнение принципа Гамильтона для пластины Кирхгофа принимает следующую форму:

$$\begin{aligned} \delta H = \int_{t_1}^{t_2} (\delta I - \delta E) dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Pi} (\rho h \dot{w} - \nabla_i \nabla_j M^{ij} - p) \delta w dS + \\ + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Gamma} [(Q^j v_j - Q_{(0)}) \delta w + (M^{ij} v_j - M_{(0)}^i) \delta \vartheta_i] ds = 0. \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

1.5. Уравнения совместности деформаций для пластин

Эти уравнения можно получить как условия интегрируемости системы дифференциальных уравнений (1.1.8) и (1.1.9) относительно тангенциальных перемещений u_1, u_2 и углов поворота ψ_1, ψ_2 . При этом в силу евклидовости пространства, соответствующего срединной плоскости, все действия аналогичны механике сплошной среды [9] (предоставляем их выполнить в качестве упражнения читателю).

Однако проще получить уравнения совместности деформаций для пластин из соответствующих соотношений для оболочек [6] с учетом равенства (1.1.4). Приведем их для трех видов моделей.

Для модели *n. 1.1* и пластины типа Тимошенко эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \nabla_1 (\nabla_1 \varepsilon_{22} - \nabla_2 \varepsilon_{12}) + \nabla_2 (\nabla_2 \varepsilon_{11} - \nabla_1 \varepsilon_{12}) = 0, \\ \nabla_2 \kappa_{12} - \nabla_1 \kappa_{22} + \frac{1}{2} \nabla_2 (\nabla_1 \theta_2 - \nabla_2 \theta_1) = 0, \\ \nabla_1 \kappa_{12} - \nabla_2 \kappa_{11} + \frac{1}{2} \nabla_1 (\nabla_2 \theta_1 - \nabla_1 \theta_2) = 0. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Уравнения также могут быть записаны с использованием компонент χ^{ij} дискриминатного тензора [6]:

$$\chi^{ij} \chi^{kl} \nabla_k \nabla_l \varepsilon_{ij} = 0, \quad \chi^{ij} \chi^{mn} \left(\nabla_i \kappa_{mj} + \frac{1}{2} \nabla_m \nabla_i \theta_j \right) = 0 \quad (n=1,2). \quad (1.5.2)$$

При построении (1.5.1) и (1.5.2) дополнительно учтено, что для пластин имеют место равенства

$$v_{ij} = \kappa_{ij}, R = 0, K = 0. \quad (1.5.3)$$

В случае *пластины Кирхгофа* эти соотношения упрощаются и приобретают вид:

$$\begin{aligned} \nabla_1 (\nabla_1 \varepsilon_{22} - \nabla_2 \varepsilon_{12}) + \nabla_2 (\nabla_2 \varepsilon_{11} - \nabla_1 \varepsilon_{12}) &= 0, \\ \nabla_2 \kappa_{12} - \nabla_1 \kappa_{22} &= 0, \nabla_1 \kappa_{12} - \nabla_2 \kappa_{11} &= 0, \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

или

$$\chi^{ij} \chi^{kl} \nabla_k \nabla_i \varepsilon_{jl} = 0, \chi^{ij} \chi^{mn} \nabla_i \kappa_{mj} = 0 \quad (n = 1, 2). \quad (1.5.5)$$

1.6. Соотношения теории пластин в ортогональных координатах

Начально-краевые задачи и уравнения совместности деформаций относительно физических компонент искомым векторов и тензоров получаем для всех типов рассмотренных пластин из соответствующих формул для оболочек в главных координатах [6], используя равенства (1.1.4). При этом в силу замечания, высказанного в п. 1.1, ограничимся только независимыми от деформаций срединной плоскости соотношениями, связанными с изгибом.

1. *Пластина типа Тимошенко.* Уравнения движения, кинематические и физические соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{w} &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (H_2 Q_1)}{\partial \xi^1} + \frac{\partial (H_1 Q_2)}{\partial \xi^2} \right] + q, \\ \rho I \ddot{\Psi}_1 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (H_2 M_{11})}{\partial \xi^1} + \frac{\partial (H_1 M_{12})}{\partial \xi^2} + M_{12} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} - M_{22} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right] - Q_1 + m_1, \\ \rho I \ddot{\Psi}_2 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (H_2 M_{12})}{\partial \xi^1} + \frac{\partial (H_1 M_{22})}{\partial \xi^2} + M_{12} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} - M_{11} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right] - Q_2 + m_2; \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{11} &= \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi^1} + \frac{\psi_2}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right), \quad \kappa_{22} = \frac{1}{H_2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi^2} + \frac{\psi_1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right), \\
2\kappa_{12} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi^1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{H_1 H_2} \left(\psi_1 \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} + \psi_2 \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right), \\
-\vartheta_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \xi^1}, \quad -\vartheta_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \xi^2}, \quad \theta_i = \psi_i - \vartheta_i;
\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

$$M_{ij} = IC_{ijkl} \kappa_{kl}, \quad Q_i = hk^2 C_{i3k3} \theta_k. \tag{1.6.3}$$

Здесь H_1, H_2 — параметры Ламе.

Естественные граничные условия записываются так:

$$w|_{\Gamma_u} = w_{(0)}, \quad \psi_i|_{\Gamma_u} = \psi_{(0)i}, \quad M_{ij} \nu_j|_{\Gamma_\sigma} = M_{(0)ij}, \quad Q_i \nu_i|_{\Gamma_\sigma} = Q_{(0)i}. \tag{1.6.4}$$

Аналогичным образом получаем уравнения совместности деформаций для изгиба:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(H_1 \kappa_{12})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial(H_2 \kappa_{22})}{\partial \xi^1} + \kappa_{11} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} + \kappa_{12} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} + \\
&+ \frac{H_2 H_1^2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(H_2 \theta_2)}{\partial \xi^1} - \frac{\partial(H_1 \theta_1)}{\partial \xi^2} \right] \right\} = 0; \\
&\frac{\partial(H_2 \kappa_{12})}{\partial \xi^1} - \frac{\partial(H_1 \kappa_{11})}{\partial \xi^2} + \kappa_{22} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} + \kappa_{12} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} + \\
&+ \frac{H_1 H_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left\{ \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(H_1 \theta_1)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial(H_2 \theta_2)}{\partial \xi^1} \right] \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{1.6.5}$$

В случае изотропного материала две формы физического закона вытекают из (1.1.17) и (1.1.19):

$$M_{ij} = I(\lambda \delta_{ij} \kappa + 2\mu \kappa_{ij}), \quad Q_i = \mu h k^2 \theta_i, \quad \kappa = \kappa_{11} + \kappa_{22}; \tag{1.6.6}$$

$$M_{ij} = \frac{EI}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \kappa \delta_{ij} + \kappa_{ij} \right), \quad Q_i = \frac{E h k^2}{2(1+\nu)} \theta_i. \tag{1.6.7}$$

2. *Пластина Кирхгофа.* Уравнение движения и кинематические соотношения имеют вид:

$$\rho h \ddot{w} = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (H_2 Q_1)}{\partial \xi^1} + \frac{\partial (H_1 Q_2)}{\partial \xi^2} \right] + p; \quad (1.6.8)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \xi^1} + \frac{\vartheta_2}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right), \quad \kappa_{22} = \frac{1}{H_2} \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \xi^2} + \frac{\vartheta_1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right), \\ 2\kappa_{12} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \xi^1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{H_1 H_2} \left(\vartheta_1 \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} + \vartheta_2 \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right), \\ -\vartheta_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \xi^1}, \quad -\vartheta_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \xi^2}. \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

В граничных условиях (1.6.4) согласно (1.4.6) и формуле для ковариантной производной скаляра [9] изменяется только второе равенство:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial \xi^i} \right|_{\Gamma_u} = -\Psi_{(0)i}. \quad (1.6.10)$$

Физические соотношения (1.4.5) приобретают следующий вид [6]:

$$M_{ij} = IC_{ijkl} \kappa_{kl}; \quad (1.6.11)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial \xi^1} + \frac{2M_{12}}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right) + \frac{1}{H_2} \left(\frac{\partial M_{12}}{\partial \xi^2} + \frac{M_{11} - M_{22}}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right) + m_1, \\ Q_2 &= \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial M_{12}}{\partial \xi^1} + \frac{M_{22} - M_{11}}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right) + \frac{1}{H_2} \left(\frac{\partial M_{22}}{\partial \xi^2} + \frac{2M_{12}}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right) + m_2. \end{aligned} \quad (1.6.12)$$

Если материал пластины изотропный, равенства (1.6.11) записываются аналогично (1.6.6) и (1.6.7):

$$M_{ij} = I(\lambda \delta_{ij} \kappa + 2\mu \kappa_{ij}); \quad (1.6.13)$$

$$M_{ij} = \frac{EI}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \kappa \delta_{ij} + \kappa_{ij} \right) \quad (1.6.14)$$

Уравнения совместности деформаций для пластины Кирхгофа легко получаются из (1.6.5), если в них положить $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

Уравнения движения (1.3.12) или (1.3.13), (1.4.9) или (1.4.10) относительно перемещений в физических компонентах для произвольных ортогональных координат даже для изотропной среды для обеих моделей очень громоздкие. Поэтому при необходимости их строят для конкретных систем координат и видов симметрии тензора упругих постоянных (см., например, П.1 и П.2).

Глава 2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

В связи со сложностью решения начально-краевых задач для рассмотренных в [6] моделей оболочек часто используются их приближенные варианты. Естественно, они должны соответствовать либо специальным внешним нагрузкам (напряженно-деформированному состоянию), либо определенной геометрии оболочки.

2.1. Уравнения Муштари³—Донелла⁴

Эта модель, называемая также *технической теорией оболочек*, базируется на следующей гипотезе, соответствующей на практике определенным напряженно-деформированным состояниям.

Аксиома 5⁵. Вклад ковариантных производных от тангенциальных перемещений в компоненты тензора кривизны пренебрежимо мал по сравнению с другими слагаемыми. ■

В некотором смысле это предположение близко к теории пластин, в которой тангенциальные перемещения не влияют на кривизну срединной поверхности.

Далее ограничимся соответствующими этой гипотезе соотношениями для оболочек Тимошенко и Кирхгофа—Лява [6]. С использованием этого предположения формулы для компонентов тензора изменения кривизны в случае первой модели модифицируются так:

$$\beta_{ij} = \nabla_i \psi_j - c_{ij} w, \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{2}(\beta_{ij} + \beta_{ji}) = \frac{1}{2}(\nabla_i \psi_j + \nabla_j \psi_i) - c_{ij} w. \quad (2.1.1)$$

Связь компонент тензора моментов с кинематическими параметрами в этом случае, с учетом симметрии тензора упругих постоянных, принимает вид (отбрасываются слагаемые, связанные с тангенциальными перемещениями):

$$M^{ij} = IC^{ijkl} \kappa_{kl} = IC^{ijkl} (\nabla_k \psi_l - c_{kl} w). \quad (2.1.2)$$

³ Муштари Х.М. (1900—1981) — татарский учёный-физик.

⁴ Донелл Л.Г. (Donnell L.H., 1985—1997) — американский инженер-механик.

⁵ Нумерация аксиом продолжает использованную ранее в [8].

Для потенциальной W , кинетической E энергий и работы внешних сил A получаем следующие равенства:

$$W = \frac{1}{2} \iint_{\Pi} (\hat{T}^{ij} \varepsilon_{ij} + M^{ij} \kappa_{ij} + Q^i \theta_i) dS, \quad E = \frac{\rho}{2} \iint_{\Pi} [h(\dot{u}_i \dot{u}^i + \dot{w}^2) + I \dot{\Psi}_i \dot{\Psi}^i] dS,$$

$$A = \iint_{\Pi} (q^i u_i + m^i \Psi_i + qw) dS + \int_{\Gamma} (T_{(0)}^i u_i + M_{(0)}^i \Psi_i + Q_{(0)} w) ds. \quad (2.1.3)$$

При этом в силу (2.1.1) в вариации потенциальной энергии по сравнению с [6] отсутствует слагаемое $M^{ij} b_i^k \nabla_k \delta u_j$, и вариационное уравнение принципа Гамильтона принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta H = & \int_{t_1}^{t_2} (\delta W - \delta A - \delta E) dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Pi} [(b_k^i Q^k - \nabla_j \hat{T}^{ji} - q^i + \rho h \ddot{u}^i) \delta u_i - \\ & - (b_{ij} T^{ij} + \nabla_i Q^i + q - \rho h \dot{w}) \delta w - (\nabla_j M^{ji} - Q^j + m^j - \rho h \dot{\Psi}^j) \delta \Psi_j] dS + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Gamma} [(T^{ij} v_j - T_{(0)}^i) \delta u_i + (Q^i v_i - Q_{(0)}) \delta w + (M^{ij} v_j - M_{(0)}^i) \delta \Psi_i] ds = 0. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Отсюда вытекают уравнения движения

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{u}^i &= \nabla_j \hat{T}^{ji} - b_k^i Q^k + q^i, \\ \rho h \dot{w} &= b_{ij} T^{ij} + \nabla_i Q^i + q, \quad \rho h \dot{\Psi}^j = \nabla_j M^{ji} - Q^j + m^j \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

и граничные условия

$$u_i \Big|_{\Gamma_u} = u_{(0)i}, \quad w \Big|_{\Gamma_w} = w_{(0)}, \quad \Psi_i \Big|_{\Gamma_\Psi} = \Psi_{(0)i}; \quad (2.1.6)$$

$$\hat{T}^{ij} v_j \Big|_{\Gamma_\sigma} = T_{(0)}^i, \quad Q^i v_i \Big|_{\Gamma_\sigma} = Q_{(0)}, \quad M^{ij} v_j \Big|_{\Gamma_\sigma} = M_{(0)}^i. \quad (2.1.7)$$

Дополнительные к (2.1.1) и (2.1.2) кинематические и физические соотношения записываются так:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \alpha_{ij} = \nabla_i u_j - b_{ij} w, \quad (2.1.8)$$

$$\vartheta_i = \nabla_i w + b_i^k u_k, \theta_k = \psi_k - \vartheta_k;$$

$$\hat{T}^{ij} = h C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, T^{ij} = \hat{T}^{ij} + b_k^i M^{kj}, Q^i = h k^2 C^{i3k3} \theta_k. \quad (2.1.9)$$

Замыкают задачу (2.1.1), (2.1.2), (2.1.5)—(2.1.9) начальные условия:

$$\begin{aligned} u^i \Big|_{t=t_0} &= f_u^i, \dot{u}^i \Big|_{t=t_0} = g_u^i, w \Big|_{t=t_0} = f_w, \\ \dot{w} \Big|_{t=t_0} &= g_w, \psi^i \Big|_{t=t_0} = f_\psi^i, \dot{\psi}^i \Big|_{t=t_0} = g_\psi^i. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Таким образом, в варианте оболочки типа Тимошенко при учете аксиомы 5 изменяются только первые два уравнения движения, одно из статических граничных условий для тангенциальных усилий ($T^{\bar{ij}}$ заменяется на $\hat{T}^{\bar{ij}}$) и кинематическое соотношение для компонент тензора изменения кривизны.

К более существенным упрощениям принятие аксиомы 5 приводит в случае оболочки Кирхгофа—Лява. В этом варианте компоненты тензора изменения кривизны модифицируются следующим образом (отбрасываются слагаемые, связанные с тангенциальными перемещениями):

$$\kappa_{ij} = -\nabla_i \nabla_j w - c_{ij} w. \quad (2.1.11)$$

Вариационное уравнение принципа Гамильтона с учетом (2.1.11) для этой модели принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta H = \int_{t_1}^{t_2} (\delta W - \delta A - \delta E) dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Pi} [(-\nabla_j \hat{T}^{\bar{ij}} - p^i + \rho h \dot{u}^i) \delta u_i - \\ - (b_j T^{\bar{ij}} + \nabla_i \nabla_j M^{\bar{ij}} + p - \rho h \dot{w}) \delta w] dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Gamma} [(\hat{T}^{\bar{ij}} \nu_j - T_{(0)}^i) \delta u^i + \\ + (Q^j \nu_j - Q_{(0)}) \delta w + (M^{\bar{ij}} \nu_j - M_{(0)}^i) \delta \vartheta_i] ds = 0, \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

откуда следуют уравнения движения

$$\rho h \dot{u}^i = \nabla_j \hat{T}^{ji} + p^i, \quad \rho h \dot{w} = b_{ij} T^{ij} + \nabla_i \nabla_j M^{ij} + p \quad (2.1.13)$$

и граничные условия

$$u_i \Big|_{\Gamma_u} = u_{(0)i}, \quad w \Big|_{\Gamma_w} = w_{(0)}, \quad \vartheta_i \Big|_{\Gamma_\vartheta} = \vartheta_{(0)i}; \quad (2.1.14)$$

$$\hat{T}^{ij} \nu_i \Big|_{\Gamma_\sigma} = T_{(0)}^j, \quad Q^j \nu_j \Big|_{\Gamma_\sigma} = Q_{(0)}, \quad M^{ij} \nu_i \Big|_{\Gamma_\sigma} = M_{(0)}^j. \quad (2.1.15)$$

Дополнительные к (2.1.11) кинематические соотношения записываются так:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \quad \alpha_{ij} = \nabla_i u_j - b_{ij} w, \quad -\vartheta_i = \nabla_i w + b_i^k \alpha_k. \quad (2.1.16)$$

К (2.1.11), (2.1.13) — (2.1.16) добавляются физический закон

$$\hat{T}^{ij} = h C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad T^{ij} = \hat{T}^{ij} + b_k^i M^{kj}, \quad M^{ij} = IC^{ijkl} \kappa_{kl}, \quad Q^j = \nabla_j M^{ij} \quad (2.1.17)$$

и начальные условия

$$u^i \Big|_{t=t_0} = f_u^i, \quad \dot{u}^i \Big|_{t=t_0} = g_u^i, \quad w \Big|_{t=t_0} = f_w, \quad \dot{w} \Big|_{t=t_0} = g_w. \quad (2.1.18)$$

Моменты и перерезывающие силы в этом варианте с помощью (2.1.11) и (2.1.17) выражаются в явном виде через нормальное перемещение (оболочка полагается однородной):

$$\begin{aligned} M^{ij} &= IC^{ijkl} \kappa_{kl} = -IC^{ijkl} (\nabla_k \nabla_l w + c_{kl} w), \\ Q^i &= \nabla_j M^{ij} = -IC^{ijkl} \nabla_j [(\nabla_k \nabla_l w + c_{kl} w)]. \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Так как в главных координатах [6] имеют место равенства (R_1, R_2 — главные радиусы кривизны)

$$c_{\alpha\alpha} = \frac{H_\alpha^2}{R_\alpha^2}, \quad c_{12} = 0,$$

то при малых перемещениях ($|w| \ll R_\alpha$) слагаемыми с сомножителями c_{kl} в (2.1.13), (2.1.11) и (2.1.19) обычно пренебрегают:

$$b_{ij}T^{ji} = b_{ij}\hat{T}^{ij}; \quad (2.1.20)$$

$$\kappa_{ij} = -\nabla_i \nabla_j w, \quad M^{ij} = -IC^{ijkl} \nabla_k \nabla_l w, \quad Q^i = -IC^{ijkl} \nabla_j \nabla_k \nabla_l w. \quad (2.1.21)$$

С помощью этих равенств уравнения движения (2.1.13) приобретают следующий вид:

$$\rho h \ddot{u}^i = \nabla_j \hat{T}^{ij} + p^i, \quad \rho h \ddot{w} = b_{ij} \hat{T}^{ij} - IC^{ijkl} \nabla_i \nabla_j \nabla_k \nabla_l w + p. \quad (2.1.22)$$

Замечание 2.1.1. Поскольку во все окончательные соотношения входят только компоненты симметричного тензора \hat{T}^{ij} , то далее его дополнительный признак будем опускать. ■

В случае изотропной среды, напомним, компоненты тензора упругих постоянных имеют вид

$$C^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}). \quad (2.1.23)$$

Тогда подстановка (2.1.23) в (2.1.21) с учетом формулы для оператора Лапласа Δ [6, 9] приводит к таким равенствам (D — цилиндрическая жесткость):

$$\begin{aligned} M^{ij} &= -I (\lambda g^{ij} \Delta w + 2\mu g^{ik} g^{jl} \nabla_k \nabla_l w), \\ Q^i &= -D g^{ij} \nabla_j \Delta w, \quad D = I(\lambda + 2\mu). \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

Отсюда получаем вторые производные

$$\nabla_i \nabla_j M^{ij} = -IC^{ijkl} \nabla_i \nabla_j (\nabla_k \nabla_l w) = -D \Delta \Delta w. \quad (2.1.25)$$

Таким образом, в этом случае уравнения движения (2.1.22) приобретают такой вид:

$$\rho h \ddot{u}^i = \nabla_j T^{ij} + p^i, \quad \rho h \ddot{w} = b_{ij} T^{ij} - D \Delta \Delta w + p. \quad (2.1.26)$$

Итак, начально-краевая задача для последней модели однородной изотропной оболочки образуется соотношениями (2.1.11), (2.1.14), (2.1.15), (2.1.18) (2.1.24) и (2.1.26), к которым необходимо добавить вытекающий из (2.1.16), (2.1.17) и (2.1.23) соответствующий вариант физического закона для тангенциальных усилий (H — средняя кривизна поверхности):

$$T_{ij} = h(\lambda g_{ij} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ij}), \quad \varepsilon = g^{ij} \varepsilon_{ij} = \operatorname{div} u - 2Hw. \quad (2.1.27)$$

В заключение этого раздела выпишем основные соотношения для последней модели однородной изотропной оболочки в главных координатах, используя приведенные в пособии [6] формулы для метрического тензора

$$g_{11} = H_1^2, \quad g_{22} = H_2^2, \quad g_{12} = 0, \quad (2.1.28)$$

выражения для компонент тензора кривизны

$$\begin{aligned} b_{11} &= k_1 H_1^2, \quad b_{22} = k_2 H_2^2, \quad b_1^1 = k_1, \quad b_2^2 = k_2, \quad b_2^1 = 0, \quad b_1^2 = 0, \\ b^{11} &= k_1 H_1^{-2}, \quad b^{22} = k_2 H_2^{-2}, \quad b^{12} = 0, \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

связь компонент вектора и тензора второго ранга с их физическими величинами, выражения ковариантных производных вектора и тензора через их физические компоненты, а также формулы для вторых производных от скаляра.

В результате получаем (звездочка в обозначениях физических компонент векторов и тензоров опущена):

— уравнения движения (следуют из (2.1.26))

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{u}_1 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(H_2 T_{11})}{\partial \xi^1} + \frac{\partial(H_1 T_{12})}{\partial \xi^2} + T_{12} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} - T_{22} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right] + p_1, \\ \rho h \ddot{u}_2 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(H_1 T_{22})}{\partial \xi^2} + \frac{\partial(H_2 T_{12})}{\partial \xi^1} + T_{21} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} - T_{11} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right] + p_2, \quad (2.1.30) \\ \rho h \dot{w} &= k_1 T_{11} + k_2 T_{22} - D \Delta \Delta w + p; \end{aligned}$$

— кинематические соотношения (следуют из (2.1.11), (2.1.16) и (2.1.21))

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi^1} + \frac{u_2}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right) - k_1 w, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{H_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi^2} + \frac{u_1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right) - k_2 w, \\ 2\varepsilon_{12} &= \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi^1} - \frac{u_1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right) + \frac{1}{H_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi^2} - \frac{u_2}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right); \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= -\frac{1}{H_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \xi^1} \right) + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial w}{\partial \xi^2} \right], \\ \kappa_{22} &= -\frac{1}{H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \xi^2} \right) + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial w}{\partial \xi^1} \right], \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

$$\kappa_{12} = -\frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial w}{\partial \xi^1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial w}{\partial \xi^2} \right);$$

— физические соотношения (следуют из (2.1.24) и (2.1.27))

$$\begin{aligned} M_{11} &= -I \left\{ \lambda \Delta w + \frac{2\mu}{H_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \xi^1} \right) + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial w}{\partial \xi^2} \right] \right\}, \\ M_{22} &= -I \left\{ \lambda \Delta w + \frac{2\mu}{H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \xi^2} \right) + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial w}{\partial \xi^1} \right] \right\}, \\ M_{12} &= -\frac{2I\mu}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial w}{\partial \xi^1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial w}{\partial \xi^2} \right) \quad (2.1.33) \\ Q_1 &= -\frac{D}{H_1} \frac{\partial \Delta w}{\partial \xi^1}, \quad Q_2 = -\frac{D}{H_2} \frac{\partial \Delta w}{\partial \xi^2}, \end{aligned}$$

$$T_{11} = h(\lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{11}), \quad T_{22} = h(\lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{22}), \quad T_{12} = 2h\mu \varepsilon_{12}. \quad (2.1.34)$$

К соотношениям (2.1.30)—(2.1.34) должны быть добавлены граничные (2.1.14), (2.1.15) и начальные (2.1.18) условия.

При использовании равенств (2.1.30) (2.1.33) и (2.1.34) полезно учитывать приведенную в [6] формулу для оператора Лапласа от скаляра.

Соотношения (2.1.30)—(2.1.34) называются *уравнениями Муштыри—Донелла*.

2.2. Уравнения технической теории для круговой цилиндрической оболочки

Для демонстрации применения технической теории рассмотрим однородную изотропную круговую цилиндрическую оболочку ради-

уса R и длины l . В качестве ортогональных координат выберем координаты цилиндрической системы $\xi^1 = \vartheta$, $\xi^2 = z$.

Уравнение срединной поверхности в данном случае записывается так ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — орты прямоугольной декартовой системы координат):

$$\begin{aligned} \Pi: \mathbf{r} = \mathbf{r}(\vartheta, z) &= R \cos \vartheta \mathbf{e}_1 + R \sin \vartheta \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3, D_{\xi} : \\ &-\pi < \vartheta \leq \pi, 0 \leq z \leq l. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Легко показать, что ковариантный базис, нормальные векторы, метрический тензор, тензор кривизны срединной поверхности и связанные с ним величины имеют вид [6]:

$$\mathfrak{a}_1 = R(-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0), \mathfrak{a}_2 = (0, 0, 1); \quad (2.2.2)$$

$$\mathbf{N} = R(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0), \mathbf{n} = (\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0); \quad (2.2.3)$$

$$g_{11} = H_1^2 = R^2, g_{22} = H_2^2 = 1, g_{12} = 0, g^{12} = 0, g^{22} = 1, g^{11} = R^{-2}; \quad (2.2.4)$$

$$\begin{aligned} b_{11} = -R, b_{12} = b_{22} = 0, b_1^1 = -R^{-1}, b_1^2 = b_2^1 = b_2^2 = 0, b^{11} = -R^{-3}, \\ b^{12} = b^{22} = 0; c_{11} = 1, c_{12} = c_{22} = 0; \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

$$k_1 = -R^{-1}, k_2 = 0, R_1 = R, R_2 = \infty. \quad (2.2.6)$$

С учетом этих равенств уравнения Муштари—Донелла (2.1.30)—(2.1.34) принимают вид (физические компоненты векторов и тензоров обозначены нижними индексами, соответствующими выбранным криволинейным координатам):

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{u}_{\vartheta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial T_{\vartheta z}}{\partial z} + p_{\vartheta}, \rho h \ddot{u}_z = \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\vartheta z}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + p_z, \\ \rho h \ddot{w} &= -\frac{T_{\vartheta\vartheta}}{R} - D \Delta \Delta w + p; \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

$$\varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial \vartheta} + w \right), \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, 2\varepsilon_{\vartheta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial z}; \quad (2.2.8)$$

$$\kappa_{\vartheta\vartheta} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2}, \quad \kappa_{zz} = -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad \kappa_{\vartheta z} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta \partial z}; \quad (2.2.9)$$

$$M_{\vartheta\vartheta} = -I \left(\lambda \Delta w + \frac{2\mu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} \right), \quad M_{zz} = -I \left(\lambda \Delta w + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (2.2.10)$$

$$M_{12} = -\frac{2I\mu}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta \partial z}, \quad Q_{\vartheta} = -\frac{D}{R} \frac{\partial \Delta w}{\partial \vartheta}, \quad Q_z = -D \frac{\partial \Delta w}{\partial z};$$

$$T_{\vartheta\vartheta} = h(\lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{\vartheta\vartheta}), \quad T_{zz} = h(\lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{zz}), \quad (2.2.11)$$

$$T_{\vartheta z} = 2h\mu \varepsilon_{\vartheta z}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \varepsilon_{zz}.$$

Оператор Лапласа здесь записывается так:

$$\Delta w = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \quad (2.2.12)$$

Из соотношений (2.2.7)–(2.2.11) с учетом (2.2.12) стандартным образом получаются уравнения движения в перемещениях:

$$\rho \ddot{u}_{\vartheta} = L_{11}(u_{\vartheta}) + L_{12}(u_z) + L_{13}(w) + \frac{p_1}{h},$$

$$\rho \ddot{u}_z = L_{21}(u_{\vartheta}) + L_{22}(u_z) + L_{23}(w) + \frac{p_2}{h}, \quad (2.2.13)$$

$$\rho \ddot{w} = L_{31}(u_{\vartheta}) + L_{32}(u_z) + L_{33}(w) + \frac{p}{h},$$

где

$$L_{11}(u_{\vartheta}) = \frac{\lambda + 2\mu}{R^2} \frac{\partial^2 u_{\vartheta}}{\partial \vartheta^2} + \mu \frac{\partial^2 u_{\vartheta}}{\partial z^2}, \quad L_{12}(u_z) = \frac{\lambda + \mu}{R} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \vartheta \partial z}, \quad L_{13}(w) = \frac{\lambda + 2\mu}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \vartheta},$$

$$L_{22}(u_{\vartheta}) = \frac{\lambda + \mu}{R} \frac{\partial^2 u_{\vartheta}}{\partial \vartheta \partial z}, \quad L_{21}(u_z) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\mu}{R^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \vartheta^2}, \quad L_{23}(w) = \frac{\lambda}{R} \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$L_{31}(u_{\vartheta}) = -\frac{\lambda + 2\mu}{R^2} \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial \vartheta}, \quad L_{32}(u_z) = -\frac{\lambda}{R} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad L_{33}(w) = -\frac{w}{R^2} (\lambda + 2\mu) - \frac{D}{h} \Delta \Delta w.$$

Ограничимся далее статическими задачами, полагая

$$\ddot{u}_{\vartheta} = 0, \quad \ddot{u}_z = 0, \quad \ddot{w} = 0. \quad (2.2.14)$$

В этом случае систему (2.2.13) можно свести к трем независимым системам уравнений относительно функций перемещений χ_1 , χ_2 и χ_3 . Для этого в силу линейности (2.2.13) представляем ее решение в виде сумм:

$$\begin{aligned} u_{\vartheta} &= u_{\vartheta(1)} + u_{\vartheta(2)} + u_{\vartheta(3)}, \quad u_z = u_{z(1)} + u_{z(2)} + u_{z(3)}, \\ w &= w_{(1)} + w_{(2)} + w_{(3)}. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Здесь функции $u_{\vartheta(i)}, u_{z(i)}, w_{(i)}, \chi_i$ ($i = 1, 2, 3$) соответствуют следующим нагрузкам:

$$\begin{aligned} i = 1 \\ p_1 \neq 0, \quad p_2 = p = 0; \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

$$\begin{aligned} i = 2 \\ p_2 \neq 0, \quad p_1 = p = 0; \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

$$\begin{aligned} i = 3 \\ p \neq 0, \quad p_1 = p_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Прежде всего, рассмотрим вариант (2.2.18). Перемещения в данном случае представим в виде (дополнительный индекс для краткости опустим):

$$u_{\vartheta(3)} = a_1 \frac{\partial^3 \chi_3}{\partial \vartheta^3} + a_2 \frac{\partial^3 \chi_3}{\partial \vartheta \partial z^2}, \quad u_{z(3)} = b_1 \frac{\partial^3 \chi_3}{\partial \vartheta^2 \partial z} + b_2 \frac{\partial^3 \chi_3}{\partial z^3}, \quad w_3 = \Delta \Delta \chi_3, \quad (2.2.19)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — подлежащие определению постоянные.

Подставляя (2.2.19) в первые два уравнения в (2.2.13), приходим к равенствам:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda + 2\mu}{R^2} \left(a_1 \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial \vartheta^5} + a_2 \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial \vartheta^3 \partial z^2} \right) + \mu \left(a_1 \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial \vartheta^3 \partial z^2} + a_2 \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial \vartheta \partial z^4} \right) + \frac{\lambda + \mu}{R} \times \\ & \times \left(b_1 \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial \vartheta^3 \partial z^2} + b_2 \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial \vartheta \partial z^4} \right) + \frac{\lambda + 2\mu}{R^2} \left(\frac{1}{R^4} \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial \vartheta^5} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial \vartheta^3 \partial z^2} + \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial \vartheta \partial z^4} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \left(b_1 \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial \vartheta^2 \partial z^3} + b_2 \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial z^5} \right) + \frac{\mu}{R^2} \left(b_1 \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial \vartheta^4 \partial z} + b_2 \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial z^3 \partial \vartheta^2} \right) + \frac{\lambda + \mu}{R} \times \\
& \times \left(a_1 \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial \vartheta^4 \partial z} + a_2 \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial \vartheta^2 \partial z^3} \right) + \frac{\lambda}{R} \left(\frac{1}{R^4} \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial z \partial \vartheta^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial \vartheta^2 \partial z^3} + \frac{\partial^5 \chi_3}{\partial z^5} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Для их тождественного удовлетворения должны быть равны нулю коэффициенты при одинаковых производных, что приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
R^4 a_1 + 1 &= 0, \\
\mu R^4 a_1 + (\lambda + 2\mu) R^2 a_2 + (\lambda + \mu) R^3 b_1 + 2(\lambda + 2\mu) &= 0, \\
\mu R^2 a_2 + (\lambda + \mu) R b_2 + \lambda + 2\mu &= 0, \\
(\lambda + \mu) R^2 a_2 + (\lambda + 2\mu) R^3 b_1 + \mu R b_2 + 2\lambda &= 0, \\
(\lambda + 2\mu) R b_2 + \lambda &= 0, \\
(\lambda + \mu) R^4 a_1 + \mu R^3 b_1 + \lambda &= 0.
\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Ее решение имеет вид (второе и четвертое уравнение удовлетворяются тождественно):

$$a_1 = -\frac{1}{R^4}, \quad a_2 = -\frac{3\lambda + 4\mu}{R^2(\lambda + 2\mu)}, \quad b_1 = \frac{1}{R^3}, \quad b_2 = -\frac{\lambda}{R(\lambda + 2\mu)}. \tag{2.2.21}$$

Следовательно, представление (2.2.19) имеет вид:

$$\begin{aligned}
u_{\vartheta(3)} &= -\frac{1}{R^2} M_1(\chi_3), \quad u_{z(3)} = \frac{1}{R} M_2(\chi_3), \quad w_3 = \Delta \chi_3, \\
M_1(\chi_3) &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial \vartheta^2} + \frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z^2} \right), \\
M_2(\chi_3) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial \vartheta^2} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z^2} \right).
\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Подстановка этих равенств в третье соотношение в (2.2.13) дает такое уравнение относительно функции χ_3 :

$$D\Delta\Delta\Delta\Delta\chi_3 + \frac{B}{R^2} \frac{\partial^4 \chi_3}{\partial z^4} = p, \quad B = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} h. \quad (2.2.23)$$

Используя связь λ и μ с коэффициентом Пуассона ν и модулем Юнга E , коэффициент B можно выразить через технические постоянные:

$$B = \frac{Eh}{1 - \nu^2}. \quad (2.2.24)$$

В случае принятия статической гипотезы об отсутствии нормальных напряжений в (2.2.23), как показано в [6], упругую постоянную Ламе λ заменим величиной

$$\lambda' = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \lambda = \frac{E\nu}{1 - \nu^2}. \quad (2.2.25)$$

Тогда коэффициент B превращается в *жесткость на растяжение-сжатие*:

$$B = Eh. \quad (2.2.26)$$

В этом случае (2.2.22) и (2.2.23) совпадают с соответствующими формулами Власова [2].

Аналогичным образом находятся представления перемещений и разрешающие уравнения для нагрузок (2.2.16) и (2.2.17) (соответствующие выкладки предоставляем читателю):

$$u_{\vartheta(1)} = M_3(\chi_1),$$

$$u_{z(1)} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z^2} + \frac{4D}{hR^2} \frac{\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu R^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \Delta\Delta\chi_1,$$

$$w_1 = M_2(\chi_1), \quad D\Delta\Delta\Delta\Delta\chi_1 + \frac{B}{R^2} \frac{\partial^4 \chi_1}{\partial z^4} = -p_1, \quad (2.2.27)$$

$$M_3(\chi_1) = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\frac{\partial \chi_1}{\partial z} - \frac{4D}{hR^2} \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right)^2 \frac{\partial \Delta\Delta\chi_1}{\partial z} \right];$$

$$u_{\vartheta(2)} = 4 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \vartheta^2} + \frac{4D\mu(\lambda + \mu)}{hR^2(\lambda + 2\mu)^2} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Delta \Delta \chi_2, \quad (2.2.28)$$

$$u_{z(2)} = M_3(\chi_2), \quad w_2 = -\frac{1}{R} M_1(\chi_3), \quad D\Delta\Delta\Delta\chi_2 + \frac{B}{R^2} \frac{\partial^4 \chi_2}{\partial z^4} = -p_2.$$

Функции χ_1, χ_2, χ_3 называют *функциями перемещений*.

2.3. Круговая цилиндрическая оболочка открытого профиля под действием нормального давления

В качестве примера применения результатов предыдущего пункта рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку открытого профиля радиуса R и длины a с углом раствора α (рис. 2.3.1) под действием нормального давления:

$$p_1 = p_2 = 0, \quad p = p(\vartheta, z). \quad (2.3.1)$$

Полагаем, что на всех краях оболочки имеет место подвижное шарнирное опирание, т.е. отсутствуют перемещения по нормали и

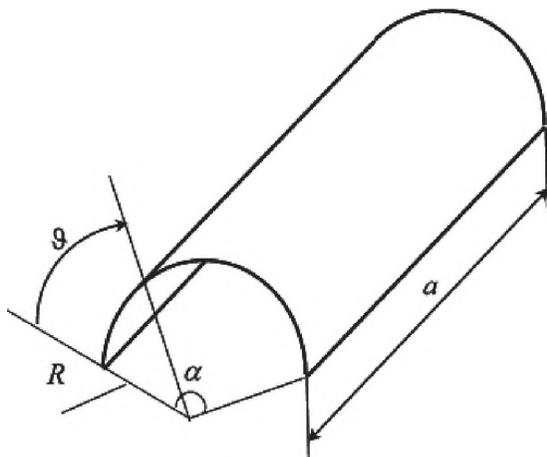


Рис. 2.3.1

по касательной к краю, равны нулю моменты и тангенциальные усилия по нормали к краю (элемент срединной поверхности оболочки, ограниченный координатными линиями, изображен на рис. 2.3.2):

$$\begin{aligned} w|_{z=0,a} = u_{\vartheta}|_{z=0,a} = 0, \quad T_{zz}|_{z=0,a} = 0, \quad M_{zz}|_{z=0,a} = 0, \\ w|_{\vartheta=0,\alpha} = u_z|_{\vartheta=0,\alpha} = 0, \quad T_{\vartheta\vartheta}|_{\vartheta=0,\alpha} = 0, \quad M_{\vartheta\vartheta}|_{\vartheta=0,\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

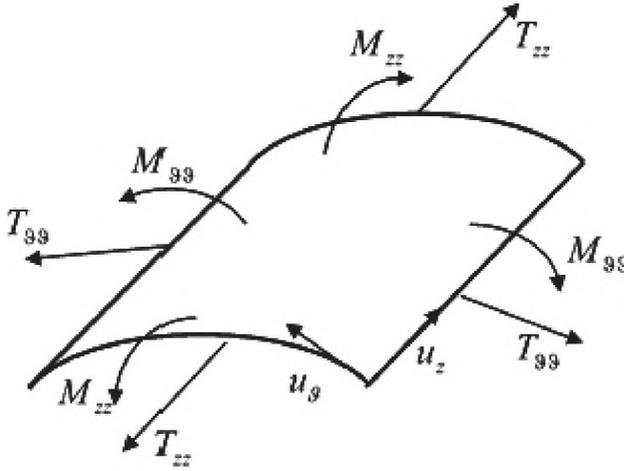


Рис. 2.3.2

Как следует из (2.2.8)—(2.2.11) и (2.2.27), (2.2.28), функции перемещений χ_1 и χ_2 есть решения однородных краевых задач. Поэтому $\chi_1 = \chi_2 = 0$. Функция $\chi_3 = \chi$ в соответствии с (2.2.23) удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta\Delta\Delta\chi + c^2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial z^4} = \frac{q}{D}, \quad c^2 = \frac{B}{DR^2}. \quad (2.3.3)$$

При этом перемещения срединной поверхности оболочки имеют вид (2.2.22). С помощью формул (2.2.8)—(2.2.11) легко проверить, что граничные условия (2.3.2) будут выполняться, если положить

$$\begin{aligned} \chi|_{z=0,a} = 0, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \Big|_{z=0,a} = 0, \quad \frac{\partial^4 \chi}{\partial z^4} \Big|_{z=0,a} = 0, \quad \frac{\partial^6 \chi}{\partial z^6} \Big|_{z=0,a} = 0, \\ \chi|_{\vartheta=0,\alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial \vartheta^2} \Big|_{\vartheta=0,\alpha} = 0, \quad \frac{\partial^4 \chi}{\partial \vartheta^4} \Big|_{\vartheta=0,\alpha} = 0, \quad \frac{\partial^6 \chi}{\partial \vartheta^6} \Big|_{\vartheta=0,\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Решение краевой задачи (2.3.3), (2.3.4) представим в виде ряда:

$$\chi = \sum_{m,n=1}^{\infty} \chi_{mn} S_{mn}(\vartheta, z), \quad S_{mn}(\vartheta, z) = \sin \frac{\pi n z}{a} \sin \frac{\pi m \vartheta}{\alpha}. \quad (2.3.5)$$

Отметим, что функции $S_{mn}(\vartheta, z)$ удовлетворяют граничным условиям (2.3.4) и являются собственными для операторов Δ и $\partial^2/\partial z^2$:

$$\frac{\partial^2 S_{mn}}{\partial z^2} = -\frac{\pi^2 n^2}{a^2} S_{mn}, \quad \Delta S_{mn} = -\pi^2 \mu_{mn} S_{mn}, \quad \mu_{mn} = \frac{1}{R^2} \frac{m^2}{\alpha^2} + \frac{n^2}{a^2}. \quad (2.3.6)$$

Следовательно, функции являются собственными и для левой части уравнения (2.3.3):

$$\Delta \Delta \Delta S_{mn} + c^2 \frac{\partial^4 S_{mn}}{\partial z^4} = \pi^4 \lambda_{mn} S_{mn}, \quad \lambda_{mn} = \pi^4 \mu_{mn}^4 + c^2 \frac{n^4}{a^4}. \quad (2.3.7)$$

Можно показать, что система функций $\{S_{mn}\}$ полна в евклидовом пространстве $C([0, \alpha] \times [0, a])$ со скалярным произведением:

$$(f(\vartheta, z), g(\vartheta, z)) = \int_0^{\alpha} d\vartheta \int_0^a dz f(\vartheta, z) g(\vartheta, z). \quad (2.3.8)$$

При этом имеют место равенства:

$$(S_{mn}, S_{kl}) = \frac{\alpha a}{4} \delta_{km} \delta_{ln}, \quad \|S_{mn}\|^2 = \frac{\alpha a}{4}. \quad (2.3.9)$$

Таким образом, эта система функций ортогональна.

Нормальную нагрузку $p(\vartheta, z)$ также представляем в виде ряда

$$p(\vartheta, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} p_{mn} S_{mn}(\vartheta, z), \quad p_{mn} = \frac{4}{\alpha a} (p, S_{mn}). \quad (2.3.10)$$

Подставляя (2.3.5) в (2.3.3), с учетом (2.3.7), (2.3.10) и полноты системы $\{S_{mn}\}$, находим коэффициенты χ_{mn} :

$$\chi_{mn} = \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \lambda_{mn}}. \quad (2.3.11)$$

Следовательно, функция χ имеет вид:

$$\chi(\vartheta, z) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} S_{mn}(\vartheta, z)}{\lambda_{mn}}. \quad (2.3.12)$$

Это формула носит название *решения Навье*⁶.

По известной функции χ и формулам (2.2.22) можно найти перемещения оболочки. Их дальнейшая подстановка в (2.2.8)—(2.2.11) позволит определить усилия и моменты. Например, нормальное перемещение с учетом (2.3.6) определяется так:

$$w = \Delta \Delta \chi = \sum_{m,n=1}^{\infty} \chi_{mn} \Delta \Delta S_{mn} = \frac{1}{D} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} \mu_{mn}^2}{\lambda_{mn}} S_{mn}(\vartheta, z). \quad (2.3.13)$$

Поскольку, как легко проверяется, из технической теории оболочек при $R_1, R_2 \rightarrow \infty$ следуют уравнения изгиба пластин (см. гл. 1), для сравнения рассмотрим шарнирно-опертую прямоугольную длины a и ширины $b = R\alpha$ пластину Кирхгофа, полученную разворачивани-

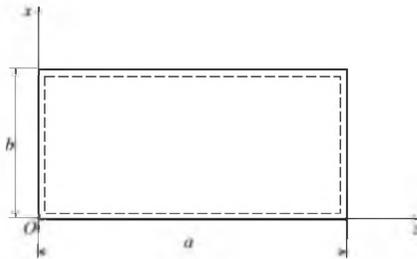


Рис. 2.3.3

ем на плоскость исследуемой оболочки. При этом действующее на эту пластину нормальное давление имеет вид:

$$\bar{q}(x, z) = q(x/R), \quad x = R\vartheta. \quad (2.3.14)$$

Здесь Oxz — прямоугольная декартова система координат с началом в угловой точке (рис. 2.3.3).

⁶ Навье (Navier, 1785—1836) — французский инженер и ученый.

Нормальные перемещения пластины w_p находим из (2.3.13), выполняя предельный переход при $R \rightarrow \infty$. При этом, как следует из (2.3.3), (2.3.6), (2.3.7) и (2.3.14), имеют место соотношения:

$$c^2 \rightarrow \vartheta, \mu_{mn} = \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}, \lambda_{mn} \rightarrow \pi^4 \mu_{mn}^4. \quad (2.3.15)$$

В результате приходим к следующему результату:

$$w_p = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}}{\mu_{mn}^2} \sin \frac{\pi m x}{b} \sin \frac{\pi n z}{a}. \quad (2.3.16)$$

Отметим, что влияние кривизны оболочки характеризует разность

$$w_k = w - w_p = -\frac{c^2}{\pi^4 a^4 D} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{n^4 p_{mn}}{\lambda_{mn} \mu_{mn}^2} S_{mn}(\vartheta, z). \quad (2.3.17)$$

Пример. Рассмотрим частный случай: оболочка нагружена сосредоточенной силой P , приложенной в точке $\vartheta = \vartheta_0, z = z_0$ ($0 < \vartheta_0 < \alpha, 0 < z_0 < a$). Этой нагрузке соответствует нормальное давление

$$p(\vartheta, z) = P \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(z - z_0), \quad (2.3.18)$$

где $\delta(z)$ — дельта функция Дирака [10, 11].

Тогда для коэффициентов p_{mn} из (2.3.10) получим:

$$\begin{aligned} p_{mn} &= \frac{4P}{\alpha a} \int_0^\alpha \delta(\vartheta - \vartheta_0) \sin \frac{\pi m \vartheta}{\alpha} d\vartheta \int_0^a \delta(z - z_0) \sin \frac{\pi n z}{a} dz = \\ &= \frac{4P}{\alpha a} \sin \frac{\pi m \vartheta_0}{\alpha} \sin \frac{\pi n z_0}{a}. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Если сила приложена в центральной точке оболочки

$$\vartheta_0 = \alpha/2, \quad z_0 = a/2, \quad (2.3.20)$$

то равенство (2.3.19) принимает вид

$$p_{2m-1, 2n-1} = (-1)^{m+n} \frac{4P}{\alpha a}, \quad p_{2m, n} = p_{m, 2n} = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N}). \quad (2.3.21)$$

Приведенные в [2] в рамках статической гипотезы об отсутствии нормальных напряжений (жесткости D и B вычисляются по формулам (1.4.12) и (2.2.26)) результаты расчетов в случае давления (2.3.18), (2.3.20) при $a = b = R/2$, $R = 6$ м, $h = 0,1$ м и $\nu = 0,3$ в центральной точке показали, что ряды (2.3.13), (2.3.16) и (2.3.17) сходятся быстро. Соответствующие результаты имеют вид:

$$w_{p0} = w_p \Big|_{\substack{\vartheta = \alpha/2 \\ z = a/2}} = 0,0116 \frac{a^2 P}{D}, \quad w_{k0} = w_k \Big|_{\substack{\vartheta = \alpha/2 \\ z = a/2}} = -0,00626 \frac{a^2 P}{D}.$$

$$w_0 = w \Big|_{\substack{\vartheta = \alpha/2 \\ z = a/2}} = w_{p0} + w_{k0} \approx 0,00534 \frac{a^2 P}{D}.$$

Отсюда следует, что $w_0/w_{p0} \approx 0,460$, т.е. перемещение оболочки более чем в два раза меньше, чем перемещение пластины. Этот факт объясняется тем, что за счет кривизны жесткость оболочки на изгиб значительно больше, чем у пластины. ■

Из простых геометрических соображений находится стрела подъема f рассмотренной в примере оболочки (рис. 2.3.4): $f = 2R \sin^2 \alpha/4$, где $\sin \alpha/4 \approx 1/8$. Следовательно, $f/b \approx 1/16 < 1/5$, откуда вытекает, что это так называемая «пологая» оболочка, к рассмотрению которой перейдем в следующем разделе.

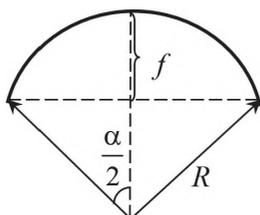


Рис. 2.3.4

2.4. Пологие оболочки

Дальнейшие по сравнению с п. 2.1 упрощения проводятся для оболочек со специальной геометрией срединной поверхности. Зафиксируем некоторую плоскость

$$\Pi_0 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2), \quad (\xi^1, \xi^2) \in D_\xi. \quad (2.4.1)$$

Введем специальную обобщенную цилиндрическую систему координат $M_0 \xi^1 \xi^2 \zeta$ с началом в точке $M_0 \in \Pi_0$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2) + \zeta \mathbf{n}_0, \quad (2.4.2)$$

где \mathbf{n}_0 — единичный нормальный вектор к плоскости Π_0 .

Сразу отметим, что, как показано в [6], имеют место равенства:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_0}{\partial \xi^i} = 0, \quad b_{0ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2), \quad (2.4.3)$$

где b_{0ij} — компоненты тензора кривизны этой плоскости.

Кроме того, для ее ковариантного $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ и контравариантного $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2$ базисов справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^i}, \quad \mathbf{p}^1 = \frac{[\mathbf{p}_2, \mathbf{n}_0]}{\sqrt{g^*}}, \quad \mathbf{p}^2 = \frac{[\mathbf{n}_0, \mathbf{p}_1]}{\sqrt{g^*}}, \quad g_0 = \det(g_{0ij})_{2 \times 2}, \\ g_{0ij} = (\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j), \quad \sqrt{g_0} = |\mathbf{N}_0|, \quad \mathbf{N}_0 = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] = \mathbf{n}_0 \sqrt{g_0}. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Срединную поверхность оболочки зададим так (см. (2.4.1)):

$$\Pi: \mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2) = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2) + f(\xi^1, \xi^2) \mathbf{n}_0, \quad (\xi^1, \xi^2) \in D_\xi. \quad (2.4.5)$$

Ее базис находится следующим образом:

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^i} + \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \mathbf{n}_0 = \mathbf{p}_i + \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \mathbf{n}_0. \quad (2.4.6)$$

Используя (2.4.4)–(2.4.6), находим нормальный к поверхности Π вектор:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] &= [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] + \frac{\partial f}{\partial \xi^1} [\mathbf{n}_0, \mathbf{p}_2] + \frac{\partial f}{\partial \xi^2} [\mathbf{p}_1, \mathbf{n}_0] + \frac{\partial f}{\partial \xi^1} \frac{\partial f}{\partial \xi^2} [\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_0] = \\ &= \mathbf{N}_0 - \mathbf{p}_1 \sqrt{g_0} \frac{\partial f}{\partial \xi^1} - \mathbf{p}_2 \sqrt{g_0} \frac{\partial f}{\partial \xi^2} = \sqrt{g_0} \left(\mathbf{n}_0 - \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \mathbf{p}^i \right). \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Для его модуля имеет место равенство:

$$\begin{aligned} |\mathbf{N}|^2 = g = (\mathbf{N}, \mathbf{N}) &= g_0 \left[(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_0) - 2 \frac{\partial f}{\partial \xi^i} (\mathbf{n}_0, \mathbf{p}^i) + \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \frac{\partial f}{\partial \xi^j} (\mathbf{p}^i, \mathbf{p}^j) \right] = \\ &= g_0 \left(1 + g_0^{ij} \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \frac{\partial f}{\partial \xi^j} \right), \quad g_0^{ij} = (\mathbf{p}^i, \mathbf{p}^j). \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Следовательно, единичный нормальный к поверхности Π вектор определяется так:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \sqrt{\frac{g_0}{g}} \left(\mathbf{n}_0 - \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \mathbf{p}^i \right) = \left(1 + g_0^{ij} \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \frac{\partial f}{\partial \xi^j} \right)^{-1/2} \left(\mathbf{n}_0 - \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \mathbf{p}^i \right) \quad (2.4.9)$$

Отсюда видно, что если положить

$$\max_{(\xi^1, \xi^2) \in D_\xi, \alpha=1,2} \left| \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} \sqrt{g_0^{\alpha\alpha}} \right| = \delta \ll 1, \quad (2.4.10)$$

то векторы \mathbf{n} и \mathbf{n}_0 будут мало отличаться, т.е. поверхность Π будет в этом смысле близка к плоскости Π_0 .

Также будут мало отличаться компоненты метрических тензоров и их инварианты:

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{0ij} + \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \frac{\partial f}{\partial \xi^j} = g_{0ij} + O(\delta^2), \quad g = g_0 + O(\delta^2), \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.4.11)$$

Найдем теперь компоненты тензора кривизны поверхности Π [6]:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \left(\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \xi^j}, \mathbf{n} \right) = \frac{\sqrt{g_0}}{|\mathbf{N}|} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \xi^j} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \mathbf{n}_0, \mathbf{n}_0 - \frac{\partial f}{\partial \xi^k} \mathbf{p}^k \right) = \\ &= \sqrt{\frac{g_0}{g}} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \xi^j}, \mathbf{n}_0 \right) - \frac{\partial f}{\partial \xi^k} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \xi^j}, \mathbf{p}^k \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^i \partial \xi^j} (\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^i \partial \xi^j} (\mathbf{n}_0, \mathbf{p}^k) \frac{\partial f}{\partial \xi^k} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{g_0}{g}} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \xi^j}, \mathbf{n}_0 \right) - \frac{\partial f}{\partial \xi^k} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \xi^j}, \mathbf{p}^k \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \right]. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Для преобразования этой формулы используем деривационные уравнения [6] для плоскости Π_0 и учитываем (2.4.3) (Γ_{0ij}^m — соответствующие символы Кристоффеля):

$$\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \xi^j} = \Gamma_{0ij}^m \mathbf{p}_m + b_{0ij} \mathbf{n}_0 = \Gamma_{0ij}^m \mathbf{p}_m. \quad (2.4.13)$$

В результате при дополнительном учете (2.4.10), (2.4.11) и равенства $(\mathbf{p}_m, \mathbf{p}^k) = \delta_m^k$ получаем

$$b_{ij} = \sqrt{\frac{g_0}{g}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^i \partial \xi^j} - \frac{\partial f}{\partial \xi^k} \Gamma_{0ij}^k \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.4.14)$$

Далее, применяя формулу Кодацци, приходим к следующему результату для ненулевой компоненты $R = R_{1212}$ тензора Римана—Кристоффеля и гауссовой кривизны K поверхности Π [6]:

$$\begin{aligned} -R = gK = b_{12}^2 - b_{11}b_{22} &= \frac{g_0}{g} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial (\xi^1)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial (\xi^2)^2} + O(\delta) \right] = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial (\xi^1)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial (\xi^2)^2} + O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Если первое слагаемое в правой части близко к нулю, то имеет место малость гауссовой кривизны:

$$|K| = \delta_1 \ll 1. \quad (2.4.16)$$

Определение 2.4.1. Оболочка называется полой, если существует такая плоскость Π_0 , что ее срединная поверхность, задаваемая уравнением (2.4.5), удовлетворяет условиям (2.4.10) и (2.4.16). ■

Отметим, что оболочек нулевой кривизны (цилиндрические, конические) допущение (2.4.16) выполняется точно.

Выясним теперь, насколько отличаются координаты вектора \mathbf{u} в базисах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ и $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{n}_0$. С помощью формул (2.4.6) и (2.4.9) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u^i \mathbf{e}_i + w \mathbf{n} = u^i \left(\mathbf{p}_i + \mathbf{n}_0 \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \right) + w \sqrt{\frac{g_0}{g}} \left(\mathbf{n}_* - \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \mathbf{p}^i \right) = \\ &= \left(u^i \delta_i^k - w \sqrt{\frac{g_0}{g}} \frac{\partial f}{\partial \xi^i} g_0^{ik} \right) \mathbf{p}_k + \left(u^i \frac{\partial f}{\partial \xi^i} + w \sqrt{\frac{g_0}{g}} \right) \mathbf{n}_0 = u_0^k \mathbf{p}_k + w_0 \mathbf{n}_0, \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

откуда вытекают равенства:

$$\begin{aligned} u_0^k &= u^k - w \sqrt{\frac{g_0}{g}} \frac{\partial f}{\partial \xi^i} g_0^{ik} = u^k + O(\delta), \\ w_0 &= w \sqrt{\frac{g_0}{g}} + u^i \frac{\partial f}{\partial \xi^i} = w + O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Легко доказывается, что аналогичная ситуация имеет место и для компонент тензоров.

Такой же вопрос поставим для ковариантных производных [6, 9]. Для ответа на него достаточно сравнить символы Кристоффеля. Сначала, используя (2.4.11), найдем символы Кристоффеля I рода для поверхности Π [6, 9]

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij,k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} \right) = \Gamma_{0ij,k} + \frac{\partial f}{\partial \xi^k} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^i \partial \xi^j} = \\ &= \Gamma_{0ij,k} + O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

где $\Gamma_{0ij,k}$ — символы Кристоффеля I рода для плоскости Π_0 .

Контравариантные компоненты метрического тензора для поверхности Π согласно (2.4.11) выражаются через соответствующие величины $g_0^{\bar{ij}}$ для плоскости Π_0 так:

$$\begin{aligned} g^{11} &= \frac{g_{22}}{g} = \frac{g_{022} + O(\delta^2)}{g_0 + O(\delta^2)} = g_0^{11} + O(\delta^2), \\ g^{22} &= g_0^{22} + O(\delta^2), \quad g^{12} = g_0^{12} + O(\delta^2), \quad \delta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

Из последних двух формул вытекают равенства для символов Кристоффеля II рода для поверхности Π :

$$\Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ij,k} g^{km} = [\Gamma_{0ij,k} + O(\delta)] [g_0^{km} + O(\delta^2)] = \Gamma_{0ij}^m + O(\delta), \delta \rightarrow 0. \quad (2.4.21)$$

Полученные выше результаты позволяют сделать следующий **вывод**.

Для пологих оболочек имеют место следующие положения.

1. Риманово пространство $V_2 = \Pi$ приближенно совпадает с евклидовым пространством Π_* . При этом можно положить (приближенные равенства здесь заменены точными)

$$g_{ij} = g_{0ij}, \quad b_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^i \partial \xi^j}. \quad (2.4.22)$$

2. Как следует из [6] и п. П.3, согласно (2.4.16) вторые ковариантные производные от компонент векторов и тензоров второго ранга можно считать не зависящими от порядка дифференцирования.

3. Из (2.4.16) вытекает, что в первых двух формулах Гаусса—Петерсона—Кодацци в главных ортогональных координатах [6] можно пренебречь произведением главных кривизн $k_1 k_2 = K$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right) = 0. \quad (2.4.23)$$

4. Ковариантные производные ∇_i на поверхности Π можно заменить аналогичными операторами ∇_{0i} в метрике плоскости Π_0 . ■

Близость срединной поверхности к плоскости и независимость тензора изменения кривизны для пластин (см. гл. 1) делает естественным принятие для пологих оболочек аксиомы 5. Тогда для них остаются в силе все соотношения модели п. 2.1, за исключением уравнений движения (2.1.26), в которых необходимо учесть равенства (2.4.22):

$$\rho h \ddot{u}^i = \nabla_j T^{ij} + p^i, \quad \rho h \ddot{w} = T^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^i \partial \xi^j} - D \Delta \Delta w + p. \quad (2.4.24)$$

В заключение этого раздела отметим, что модель полой оболочки накладывает на область применения более жесткие ограничения, чем техническая теория.

2.5. Функция усилий для пологих оболочек

Модель полой оболочки позволяет, аналогично плоской задаче теории упругости [8, 11] для однородного изотропного материала, свести уравнения движения к более простым уравнениям. Соответствующие выкладки проще провести в ортогональных координатах ξ^1, ξ^2 на плоскости Π_* .

В соответствии с разделом 2.1 связанные с изгибными деформациями кинематические и физические соотношения имеют вид (2.1.31) и (2.1.33), поскольку при их построении использовано только условие ортогональности координат. Напомним, что все величины в этих равенствах относятся к плоскости Π_0 . Связанные с деформациями срединной поверхности оболочки соотношения типа (2.1.32) и (2.1.34), как предложено В.З. Власовым⁷, заменяются одним из уравнений совместности деформаций [6].

Несколько модифицируются уравнения движения (2.1.30). Они строятся также из системы (2.1.26), но при этом учитывается, что, в общем, координаты не являются главными. Практически очевидно, что первые два уравнения совпадают с приведенными в (2.1.30) равенствами, а в третьем уравнении вытекающие из соотношений (2.4.23) изменения касаются только слагаемых, соответствующих свертке $b_{ij}T^{ij}$ (см. также (2.4.25)):

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{u}_1 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(H_2 T_{11})}{\partial \xi^1} + \frac{\partial(H_1 T_{12})}{\partial \xi^2} + T_{12} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} - T_{22} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right] + p_1, \\ \rho h \ddot{u}_2 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(H_1 T_{22})}{\partial \xi^2} + \frac{\partial(H_2 T_{12})}{\partial \xi^1} + T_{12} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} - T_{11} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right] + p_2, \\ \rho h \dot{w} &= \sum_{i,j=1}^2 H_i^{-1} H_j^{-1} b_{ij} T_{ij} - D \Delta \Delta w + p, \quad b_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^i \partial \xi^j}. \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

⁷ Власов В.З. (1906—1958) — советский учёный-механик, специалист в области сопротивления материалов, строительной механики и теории упругости, член-корреспондент АН СССР.

Во многих случаях для пологих оболочек аналогично пластинам можно положить

$$p_1 = p_2 = 0 \quad (2.5.2)$$

и пренебречь инерцией в тангенциальном направлении

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0. \quad (2.5.3)$$

Тогда первые два уравнения из системы (2.5.1) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H_2 T_{11})}{\partial \xi^1} + \frac{\partial(H_1 T_{12})}{\partial \xi^2} + T_{12} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} - T_{22} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} &= 0, \\ \frac{\partial(H_1 T_{22})}{\partial \xi^2} + \frac{\partial(H_2 T_{12})}{\partial \xi^1} + T_{12} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} - T_{11} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Попробуем удовлетворить этим уравнениям, вводя функцию усилий Φ по формулам, аналогичным (2.1.32):

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^2} \right) + \frac{1}{H_2 H_1^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1}, \\ T_{22} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} \right) + \frac{1}{H_1 H_2^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2}, \\ T_{12} &= \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \right). \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

При этом используются следующие подстановки:

$$-T_{11} \rightarrow \kappa_{22}, \quad -T_{22} \rightarrow \kappa_{11}, \quad T_{12} \rightarrow \kappa_{12}, \quad \Phi \rightarrow w. \quad (2.5.6)$$

Определение 2.5.1. Соответствия вида (2.5.6) называются *статико-геометрической аналогией*. ■

Эта аналогия также просматривается при сопоставлении (2.5.4) с двумя уравнениями совместности деформаций в главных координатах

натах для оболочки Кирхгофа—Лява, если в них отбросить слагаемые, связанные с тангенциальными деформациями [6]:

$$\begin{aligned} K_{1*}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) &= \frac{\partial(H_1 \kappa_{12})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial(H_2 \kappa_{22})}{\partial \xi^1} + \kappa_{11} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} + \kappa_{12} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} = 0, \\ K_{2*}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) &= \frac{\partial(H_2 \kappa_{12})}{\partial \xi^1} - \frac{\partial(H_1 \kappa_{11})}{\partial \xi^2} + \kappa_{22} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} + \kappa_{12} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} = 0. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Достаточно простые, но громоздкие преобразования после подстановки (2.5.5) с учетом (2.4.24) в уравнения (2.5.4) приводят последние к тождествам.

Подстановка же (2.5.5) в третье уравнение в (2.5.1) дает следующий результат:

$$\rho h \ddot{w} = -L(\Phi) - D \Delta \Delta w + p, \quad (2.5.8)$$

где

$$\begin{aligned} -L(\Phi) &= \frac{b_{11}}{H_1^2 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^2} \right) + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} \right] + \\ &+ \frac{2b_{12}}{H_1^2 H_2^2} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \right) + \\ &+ \frac{b_{22}}{H_1 H_2^2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} \right) + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Отметим, что если в задающем срединную поверхность уравнении (2.4.5) положить $f(\xi^1, \xi^2) \equiv 0$, то Π становится плоскостью, и из (2.5.8) должно следовать уравнение изгиба пластины (1.4.10). Это действительно так, поскольку в этом случае, согласно (2.4.22) $b_{ij} = 0$, и, соответственно, $L(\Phi) \equiv 0$.

Оператор (2.5.9) можно упростить, если приближенно (в общем случае ξ^1 и ξ^2 не являются главными координатами для поверхности Π) положить (см. [6])

$$b_{11} = k_1 H_1^2, \quad b_{22} = k_2 H_2^2, \quad b_{12} = 0. \quad (2.5.10)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} -L(\Phi) = & \frac{k_1}{H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^2} \right) + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} \right] + \\ & + \frac{k_2}{H_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} \right) + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Этот оператор можно привести к симметричному виду, если использовать уравнения Кодацци в главных координатах [6]:

$$H_2 \frac{\partial k_2}{\partial \xi^1} = (k_1 - k_2) \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1}, \quad H_1 \frac{\partial k_1}{\partial \xi^2} = (k_2 - k_1) \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2}. \quad (2.5.12)$$

Тогда формула (2.5.10) трансформируется так:

$$-L(\Phi) = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(k_2 \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(k_1 \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^2} \right) \right]. \quad (2.5.13)$$

Кроме того, с учетом (2.1.39) оператор L можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} L(\Phi) = & -\frac{k_1 + k_2}{2} \Delta \Phi + \frac{k_1 - k_2}{2} L_2(\Phi), \\ L_2(\Phi) = & \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} \right) - \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^2} \right) \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

Как известно, оператор Лапласа является эллиптическим [11], а L_2 , как можно показать, имеет гиперболический тип. Поэтому при $k_1 = k_2$ оператор L — эллиптический, а при $k_1 = -k_2$ — гиперболический. При $K = k_1 k_2 = 0$ ($k_1 = 0$ или $k_2 = 0$) также доказывается, что L параболический оператор.

В уравнение (2.5.8) входят две неизвестные скалярные функции Φ и w . Недостающее уравнение получается из дополняющего (2.5.7) третьего уравнения совместности деформаций для оболочки Кирхгофа—Лява, записанное в рамках приближения (2.5.10) в главных координатах [6] с учетом (2.4.16):

$$K_{0*}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) \approx -k_2 \kappa_{11} - k_1 \kappa_{22} + E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0, \quad (2.5.15)$$

где

$$\begin{aligned} H_1 H_2 E(\boldsymbol{\varepsilon}) = & \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left\{ \frac{1}{H_1} \left[\frac{\partial(H_2 \varepsilon_{22})}{\partial \xi^1} - H_1 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi^2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} - 2\varepsilon_{12} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} \right] \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{1}{H_2} \left[\frac{\partial(H_1 \varepsilon_{11})}{\partial \xi^2} - H_2 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi^1} - \varepsilon_{22} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} - 2\varepsilon_{12} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

Входящие сюда изгибные и тангенциальные деформации необходимо выразить через нормальное перемещение и функцию усилий. Сначала, используя (2.1.32) и (2.5.11), убеждаемся, что имеет место равенство:

$$k_2 \kappa_{11} + k_1 \kappa_{22} = L(w). \quad (2.5.17)$$

Для преобразования оператора в (2.5.16) используем обратный закон Гука для оболочки Кирхгофа—Лява с учетом связи λ и μ с техническими постоянными [6] (напомним, что для рассматриваемой модели $\hat{T}_{ij} = T_{ij}$)

$$2\mu \varepsilon_{ij} = T_{ij} - \nu T g_{ij}, \quad T = T_1^1 + T_2^2. \quad (2.5.18)$$

Его аналог относительно физических компонент тензоров (для них сохраняем те же обозначения) получаем с помощью (2.1.28) и (2.1.30):

$$2\mu \varepsilon_{11} = T_{11} - \nu(T_{11} + T_{22}), \quad 2\mu \varepsilon_{22} = T_{22} - \nu(T_{11} + T_{22}), \quad 2\mu \varepsilon_{12} = T_{12}. \quad (2.5.19)$$

Прежде всего отметим, что с помощью (2.5.5) легко проверяется равенство

$$T_{11} + T_{22} = \Delta\Phi. \quad (2.5.20)$$

Подставляя теперь (2.5.19) в (2.5.16), с учетом (2.5.4), приходим к следующему результату:

$$BE(\varepsilon) = \Delta\Phi, \quad B = 4\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} h. \quad (2.5.21)$$

Отметим, что B есть определенная в п. 2.2 жесткость на растяжение.

Это равенство совместно с формулой (2.5.17) позволяют привести уравнение (2.5.15) к следующему виду:

$$\Delta\Delta\Phi - BL(w) = 0, \quad (2.5.22)$$

которое совместно с уравнением (2.5.8) образует замкнутую систему.

2.6. Пологие оболочки вращения

В качестве примера применения теории пологих оболочек рассмотрим часто встречающуюся на практике *оболочку вращения*, т.е. оболочку со срединной поверхностью Π в виде поверхности вращения [14].

Положим, что ее осью симметрии является ось Oz цилиндрической системы координат r, ϑ, z ($r \geq 0, -\pi < \vartheta \leq \pi, z \in \mathbb{R}$), связанной обычным образом с прямоугольной декартовой системой $Oxyz$ формулами (П.2.2). Полагаем, что плоскостью Π_0 в (2.4.1) является координатная плоскость Oxy , а криволинейные координаты задаем равенствами (П.2.1). При этом в (2.4.2) $\zeta = z$, и для срединной поверхности как поверхности вращения $z = g(r)$ формула (2.4.5) модифицируется так:

$$\Pi: \mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \vartheta) = \mathbf{r}_0(r, \vartheta) + g(r)\mathbf{k} \quad (r \leq a, -\pi < \vartheta \leq \pi), \quad (2.6.1)$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{n}_0$ — орт оси Oz .

То есть проекция срединной поверхности на плоскость Π_0 есть круг некоторого радиуса a .

Условие пологости оболочки (2.4.10) в этом варианте преобразуется так:

$$\max_{r \leq a} |g'(r)| = \delta \ll 1. \quad (2.6.2)$$

Учитываем, что параметры Ламе в этом случае определяются соответствующими равенствами в (П.2.3). Тогда кинематические, физические соотношения и уравнения движения (2.1.31), (2.1.33) и (2.5.1) приобретают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} - k_1 w, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r} - k_2 w, \quad 2\varepsilon_{r\vartheta} = \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - \frac{u_\vartheta}{r}, \\ \kappa_{rr} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \kappa_{\vartheta\vartheta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \kappa_{r\vartheta} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} - \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \vartheta} \right), \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

$$T_{rr} = h[(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta}],$$

$$T_{\vartheta\vartheta} = h[(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \varepsilon_{rr}], \quad T_{r\vartheta} = h2\mu\varepsilon_{r\vartheta},$$

$$M_{rr} = -I \left(\lambda \Delta w + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right), \quad M_{\vartheta\vartheta} = -I \left[\lambda \Delta w + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right], \quad (2.6.4)$$

$$M_{r\vartheta} = -\frac{2\mu I}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \vartheta}, \quad Q_r = -D \frac{\partial \Delta w}{\partial r}, \quad Q_\vartheta = -\frac{D}{r} \frac{\partial \Delta w}{\partial \vartheta};$$

$$\rho h \ddot{u}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial (r T_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} - T_{\vartheta\vartheta} + p_r,$$

$$\rho h \ddot{u}_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r T_{r\vartheta})}{\partial r} + p_\vartheta, \quad (2.6.5)$$

$$\rho h \ddot{w} = -k_1 T_{rr} - k_2 T_{\vartheta\vartheta} - D \Delta \Delta w + p.$$

Оператор Лапласа в этих формулах определяется равенством (П.2.17).

При $\ddot{u}_r \equiv 0$, $\ddot{u}_\theta \equiv 0$ и $p_r = p_\theta = 0$ разрешающими являются уравнения (2.5.8) и (2.5.22), где в соответствии с (2.5.13) и (П.2.3) следует положить

$$-L(w) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k_2 \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k_1 \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (2.6.6)$$

В качестве примера рассмотрим отсеченный от сферы радиуса R плоскостью $z = H$ сферический купол (рис. 2.6.1).

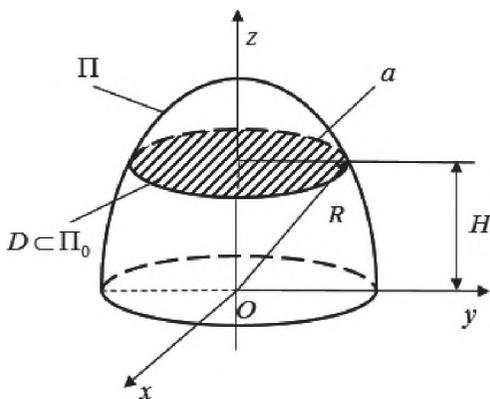


Рис. 2.6.1

В этом случае в (2.6.1) следует положить

$$g(r) = \sqrt{R^2 - r^2}. \quad (2.6.7)$$

При этом условие (2.6.2) переходит в неравенство

$$\max_{r \leq a} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}} \ll 1. \quad (2.6.8)$$

Простые геометрические соображения показывают, что имеет место равенство $R^2 - H^2 = a^2$, с учетом которого (2.6.8) переходит в

следующее условие малости стрелы подъема оболочки $f = R - H$ (см. п. 2.3):

$$\frac{f}{R} \ll \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}. \quad (2.6.9)$$

Равенства (2.6.3)—(2.6.6) для такой оболочки существенно упрощаются, поскольку в этом случае имеют место равенства (см. пример П.6.1 в [6]):

$$k_1 = k_2 = -1/R. \quad (2.6.10)$$

Кроме того, отсюда следует, что оператор L в (2.6.6) пропорционален оператору Лапласа:

$$L = R^{-1}\Delta. \quad (2.6.11)$$

При этом система уравнений (2.5.8), (2.5.22) принимает следующий вид:

$$\rho h \ddot{w} = -R^{-1}\Delta\Phi - D\Delta\Delta w + p, \quad B\Delta w - R\Delta\Delta\Phi = 0. \quad (2.6.12)$$

Очевидно, второе уравнение в (2.6.12) будет удовлетворено, если положить:

$$Bw = R\Delta\Phi. \quad (2.6.13)$$

Подставляя это равенство в первое уравнение в (2.6.12), приходим к такому уравнению изгиба пологой сферической оболочки:

$$\rho h \ddot{w} = -BR^{-2}w - D\Delta\Delta w + p. \quad (2.6.14)$$

Оно отличается от уравнения изгиба пластины Кирхгофа (1.4.10) только первым слагаемым в правой части. Для его интерпретации рассмотрим пластину на упругом основании, которое моделируется

⁸ Винклер Э. (Winkler E., 1835—1888) — немецкий инженер, профессор кафедры мостов и железных дорог в Пражской высшей технической школе.

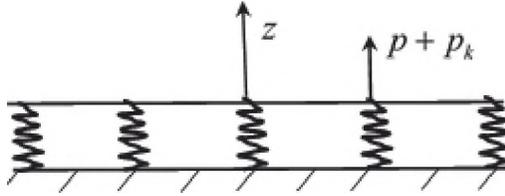


Рис. 2.6.2

непрерывной системой линейных пружин с отнесенной к единице площади жесткостью k (основанием Винклера⁸) [12] (рис. 2.6.2).

При этом давление на пластину есть сумма

$$p + p_k, \quad p_k = -kw, \quad (2.6.15)$$

где p — внешняя нормальная нагрузка; p_k — давление основания, уравнение (1.4.10) приобретает вид:

$$\rho h \bar{w} = -D \Delta \Delta \bar{w} - kw + p. \quad (2.6.16)$$

Сравнивая (2.6.16) и (2.6.14), находим, что они совпадают, если положить:

$$k = BR^{-2}. \quad (2.6.17)$$

Таким образом, за счёт кривизны пологая оболочка более жёсткая, чем пластина.

Глава 3. БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК

3.1. Безмоментное приближение

Еще одним подходом к построению приближенных моделей оболочек является разделение напряженно-деформируемого состояния на некоторые две составляющие: «простую» и «дополнительную». Естественно, это имеет смысл только в том случае, если, во-первых, задачи для каждой из них являются проще в смысле их решения, а во-вторых, если «простое» состояние может быть реализовано хотя бы приближенно.

Этот вопрос рассмотрим на примере статической краевой задачи для модели оболочки Кирхгофа—Лява [6] (все обозначения соответствуют этому пособию и поэтому здесь не расшифровываются):

$$\nabla_j T^{ji} - b_j^i \nabla_k M^{jk} + p^i = 0, \nabla_i \nabla_j M^{ij} + h_{ij} T^{ij} + p = 0; \quad (3.1.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \alpha_{ij} = \nabla_i u_j - b_{ij} w, \quad (3.1.2)$$

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i \vartheta_j + \nabla_j \vartheta_i) + \frac{1}{2}(b_i^k \alpha_{kj} + b_j^k \alpha_{ki}), -\vartheta_i = \nabla_i w + b_i^k u_k;$$

$$\hat{T}^{ij} = h C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, T^{ij} = \hat{T}^{ij} + b_k^i M^{kj}, M^{ij} = IC^{ijkl} \kappa_{kl}; \quad (3.1.3)$$

$$u_i|_{\Gamma_u} = u_{(0)i}, w|_{\Gamma_w} = w_{(0)}, \vartheta_i|_{\Gamma_u} = \vartheta_{(0)i}, \quad (3.1.4)$$

$$T^{ji} \nu_j|_{\Gamma_\sigma} = T_{(0)}^i, M^{ij} \nu_j|_{\Gamma_\sigma} = M_{(0)}^i, Q^j|_{\Gamma_\sigma} = Q_{(0)}.$$

Полученные далее результаты распространяются и на динамику оболочек, если считать, что внешняя нагрузка в (3.1.1) включает в себя инерционные силы: $p^i \rightarrow p^i - \rho h \ddot{u}^i$, $p \rightarrow p - \rho h \ddot{w}$.

Конкретно под «простым» напряженно-деформированным состоянием будем понимать следующее.

Определение 3.1.1. Решение задачи (3.1.1)—(3.1.4), удовлетворяющее условию

$$M^{ij} \equiv 0, \quad (3.1.5)$$

что в (3.1.3) силу эквивалентно равенствам

$$\kappa_{ij} \equiv 0, \quad (3.1.6)$$

называется *безмоментным или безызгибным*. ■

При этом для него краевая задача (3.1.1)—(3.1.4) модифицируется так:

$$\nabla_j T^{ji} + p^i = 0, \quad b_{ij} T^{ij} + p = 0; \quad (3.1.7)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) - b_{ij} w; \quad (3.1.8)$$

$$T^{ij} = h C^{ijkl} \varepsilon_{kl}; \quad (3.1.9)$$

$$u_i \Big|_{\Gamma_u} = u_{(0)i}, \quad T^{ji} \nu_j \Big|_{\Gamma_\sigma} = T_{(0)}^i. \quad (3.1.10)$$

Определение 3.1.2. Задача (3.1.2)—(3.1.10) называется *безмоментной теорией* оболочек, а её решение — *безмоментным решением* (*безмоментным напряженно-деформированным состоянием*). ■

Очевидно, порядок системы уравнений в этом случае меньше, чем для общего варианта (второе уравнение в (3.1.7) вообще не является дифференциальным). Более того, система (3.1.7) является замкнутой. И соотношения (3.1.8) и (3.1.9) необходимы только для определения тензора деформаций и поля перемещений. По аналогии с сопротивлением материалов [12] такие задачи называются *статически определимыми*.

Если тангенциальные усилия T^{ji} определены, то из обратной формы закона можно найти тангенциальные деформации ε_{ij} . Например, для изотропной среды соответствующие формулы имеют вид (2.5.18). Тогда задача об определении перемещений сводится к интегрированию системы трех уравнений в частных производных (3.1.8) относительно трех функций u_1, u_2 и w :

$$\nabla_1 u_1 - b_{11} w = \varepsilon_{11}, \quad \nabla_2 u_2 - b_{22} w = \varepsilon_{22}, \quad \frac{1}{2} (\nabla_1 u_2 + \nabla_2 u_1) - b_{12} w = \varepsilon_{12}. \quad (3.1.11)$$

Возникает вопрос, возможна ли точная реализация безмоментного напряженно-деформированного состояния? Строго обоснованного ответа на него в настоящий момент не существует. Однако опыт решения задач для оболочек позволяет сформулировать следующие условия существования безмоментного состояния.

1. Геометрия оболочки плавная (срединная поверхность гладкая, кривизна поверхности изменяется медленно).
2. Срединная поверхность не содержит особых точек.
3. Внешняя нагрузка (p^i и p) меняется медленно.
4. Боковая поверхность свободна от перерезывающих сил и моментов, а нормальные смещение и углы поворота не стеснены.
5. Граничные условия (3.1.4) таковы, что они ограничивают перемещения *чистого изгиба*.

Дадим некоторые пояснения этих условий.

В условии 2 под особыми точками понимаются:

- а) *плоскостные точки*, т. е. точки, в окрестности которых главные кривизны (компоненты тензора кривизны) равны нулю: $k_i = 0$ ($b_{ij} = 0$);
- б) *переходные точки* — точки, лежащие на асимптотических линиях [13];
- в) бесконечно удаленные точки.

Наличие плоскостных точек связано с сильной пологостью оболочки. Требование их отсутствия хорошо иллюстрируется пластиной, все точки которой плоскостные. Уравнение ее равновесия в соответствии с (1.4.3) имеет вид:

$$\nabla_j \nabla_k M^{jk} + p = 0. \quad (3.1.12)$$

откуда следует, при $M^{\bar{j}} = 0$ поперечная нагрузка не может быть уравновешена.

В условии 5 под чистым изгибом напряженно-деформированное состояние, для которого

$$T^{\bar{ij}} = 0, \quad (3.1.13)$$

что в силу (3.1.3) эквивалентно отсутствию тангенциальных деформаций

$$\varepsilon_{kl} = 0. \quad (3.1.14)$$

В заключение этого раздела выясним закон распределения тангенциальных напряжений в безмоментной оболочке. Из общего закона изменения напряжений по толщине оболочки (см. п. 2.3 пособия [6]) с учетом (3.1.6) при отсутствии обжатия получаем:

$$\hat{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (3.1.15)$$

Сравнение этого равенства с (3.1.9) показывает, что имеет место равномерное распределение напряжений по толщине:

$$\hat{\sigma}^{ij} = T^{ij}/h. \quad (3.1.16)$$

3.2. Понятие о краевом эффекте

Возникает также вопрос, можно ли приближенно заменить решение задачи (3.1.1)—(3.1.4) безмоментным решением? Прежде всего заметим, что в силу (3.1.10) необходимым условием реализации безмоментного напряженно-деформированного состояния является отсутствие на границе оболочки перерезывающих сил и моментов, что соответствует следующим правым частям равенств в (3.1.4):

$$Q_{(0)} = 0, M_{(0)}^i = 0. \quad (3.2.1)$$

Кроме того, представим компоненты общего напряженно-деформированного состояния (решения задачи (3.1.1)—(3.1.4)) в виде сумм:

$$u_i = u_{0i} + u_{1i}, w = w_0 + w_1, \dots, T^{ij} = T_0^{ij} + T_1^{ij}, \dots, \quad (3.2.2)$$

где величины с нижним индексом «0» соответствуют безмоментному решению, а с нижним индексом «1» — «дополнительному» состоянию.

Подставляя (3.2.2) в (3.1.1)—(3.1.4) и учитывая (3.1.2) и (3.1.10), получаем, что компоненты «дополнительного» состояния должны удовлетворять краевой задаче (индекс «1» здесь опущен), включающей уравнения

$$\nabla_j T^{ji} - b_j^i \nabla_k M^{jk} = 0, \nabla_i \nabla_j M^{ij} + b_{ij} T^{ij} = 0, \quad (3.2.3)$$

краевые условия

$$\begin{aligned} T^{ij} \nu_j \Big|_{\Gamma_\sigma} &= 0, \mathcal{Q}^i \nu_i \Big|_{\Gamma_\sigma} = \mathcal{Q}_{(0)}, M_{ij} \nu_j \Big|_{\Gamma_\sigma} = M_{(0)}^i, \\ u_i \Big|_{\Gamma_u} &= 0, w \Big|_{\Gamma_u} = w_{(0)} - w_0 \Big|_{\Gamma_u}, \vartheta_i \Big|_{\Gamma_u} = \vartheta_{(0)i} - \vartheta_{i0} \Big|_{\Gamma_u} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

и соотношения (3.1.2), (3.1.3).

Используется следующая терминология.

Определение 3.2.1. Пусть для компонент напряженно-деформированного состояния оболочки имеют место приближенные равенства

$$u_i \Big|_{\Pi_0} \approx u_{0i}, w \Big|_{\Pi_0} \approx w_0, \dots, T^{ij} \Big|_{\Pi_0} \approx T_0^{ij}, \dots; \quad (3.2.5)$$

$$u_i \Big|_{\Pi_1} \approx u_{1i}, w \Big|_{\Pi_1} \approx w_1, \dots, T^{ij} \Big|_{\Pi_1} \approx T_1^{ij}, \dots \quad (3.2.6)$$

Причем срединная поверхность оболочки есть объединение $\Pi = \Pi_0 \cup \Pi_1$, где площадь поверхности Π_1 значительно меньше площади поверхности Π_0 .

Если множество Π_1 не пусто, то «дополнительное» состояние называется *краевым эффектом*. ■

Использованные в (3.1.15) и (3.1.16) приближенные равенства можно формализовать в терминах норм соответствующих пространств. Однако оставим их смысл на интуитивном уровне.

Решения краевого эффекта находят методом асимптотического анализа в окрестностях Π_1 особых линий (точек). При этом предполагается, что оно быстро затухает. Используется следующая классификация.

Определение 3.2.2. Пусть поверхность Π_1 является окрестностью кривой Γ . Тогда

а) если Γ — граница срединной поверхности оболочки или линия резкого изменения геометрии и она не соприкасается с асимптотическими линиями, то имеет место *простой краевой эффект*;

б) если Γ — асимптотическая линия, то краевой эффект называется *обобщённым*. ■

Более подробно о краевых эффектах можно прочитать, например, в [1].

3.3. Уравнения равновесия безмоментных оболочек вращения

Сначала выпишем уравнения равновесия в произвольных ортогональных координатах. Для этого необходимо перейти к физическим компонентам векторов и тензоров в соотношениях (3.1.2). Соответствующий результат проще получить из (2.1.30), отбросив инерционные члены и положив в третьем уравнении равной нулю цилиндрическую жесткость:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H_2 T_{11})}{\partial \xi^1} + \frac{\partial(H_1 T_{12})}{\partial \xi^2} + T_{12} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} - T_{22} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} + H_1 H_2 p_1 &= 0, \\ \frac{\partial(H_1 T_{22})}{\partial \xi^2} + \frac{\partial(H_2 T_{12})}{\partial \xi^1} + T_{12} \frac{\partial H_2}{\partial \xi^1} - T_{11} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^2} + H_1 H_2 p_2 &= 0, \\ k_1 T_{11} + k_2 T_{22} + p &= 0. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

В качестве примера рассмотрим оболочку вращения со срединной поверхностью (2.6.1). Здесь удобнее вместо (2.6.1) использовать следующую форму ее задания (полагая, что существует обратная к $g(r)$ функция):

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = (\varphi(z) \sin \vartheta, \varphi(z) \cos \vartheta, z), \quad \varphi(z) = g^{-1}(r). \quad (3.3.2)$$

При этом *меридиан* срединной поверхности (кривая, лежащая в ее пересечении с плоскостью сечения $\vartheta = \text{const}$) определяется так (рис. 3.3.1):

$$r = \varphi(z) \geq 0, \quad \varphi'(z) < 0, \quad \varphi''(z) < 0, \quad (3.3.3)$$

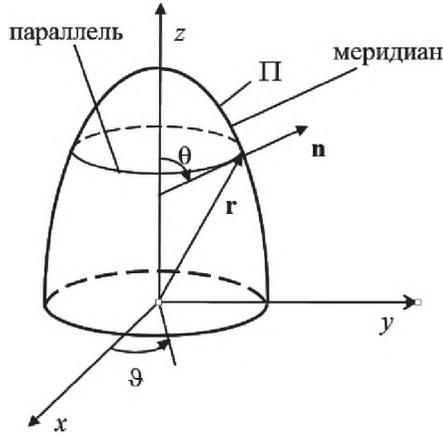


Рис. 3.3.1

а кривая

$$\Pi \cap \{z = \text{const}\} \quad (3.3.4)$$

есть *параллель* этой поверхности.

Из (3.3.2) следует, что в качестве криволинейных координат можно выбрать ϑ и z . Тогда, вычисляя производные

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = (-\varphi \sin \vartheta, \varphi \cos \vartheta, 0), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (\varphi' \cos \vartheta, \varphi' \sin \vartheta, 1), \quad (3.3.5)$$

находим нормальный \mathbf{N} и единичный нормальный \mathbf{n} векторы к срединной поверхности:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right] = (\varphi \cos \vartheta, \varphi \sin \vartheta, -\varphi \varphi'), \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2}} (\cos \vartheta, \sin \vartheta, -\varphi'). \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Как будет видно из дальнейшего изложения, более рационально с точки зрения интегрирования системы уравнений (3.3.1) криволинейные координаты выбрать так:

$$\xi^1 = \theta, \quad \xi^2 = \vartheta. \quad (3.3.7)$$

Здесь θ — угол между вектором \mathbf{n} и положительным направлением оси Oz (рис. 3.3.1). Для него имеют место вытекающие из (3.3.3) и (3.3.6) соотношения:

$$0 \leq \theta < \pi/2; \quad (3.3.8)$$

$$\cos \theta = -\frac{\varphi'}{\sqrt{1 + \varphi'^2}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2}}, \quad \operatorname{ctg} \theta = -\varphi'. \quad (3.3.9)$$

Отсюда следует, что $z = z(\theta)$, и единичный нормальный вектор можно представить так:

$$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \vartheta, \sin \theta \sin \vartheta, \cos \theta). \quad (3.3.10)$$

Для дальнейших выкладок понадобятся вытекающие из (3.3.9) производные

$$-\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d\theta}{dz} = -\varphi'', \quad \frac{dz}{d\theta} = \frac{1}{d\theta/dz} = \frac{1}{\varphi'' \sin^2 \theta}. \quad (3.3.11)$$

Используя теперь (3.3.2), (3.3.5), (3.3.9) и (3.3.11), получаем соответствующие координатам (3.3.7) базисные векторы $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ и компоненты метрического тензора g_{ij} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \frac{dz}{d\theta} = \frac{1}{\varphi'' \sin^2 \theta} (\varphi' \cos \vartheta, \varphi' \sin \vartheta, 1) = \\ &= -\frac{1}{\varphi'' \sin^3 \theta} (\cos \theta \cos \vartheta, \cos \theta \sin \vartheta, -\sin \theta), \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

$$\mathfrak{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = \varphi (-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0);$$

$$g_{11} = \frac{1}{(\varphi'')^2 \sin^6 \theta}, \quad g_{22} = \varphi^2, \quad g_{12} = 0. \quad (3.3.13)$$

Таким образом, координаты (3.3.7) являются ортогональными. Соответствующие параметры Ламе с учетом неравенств в (3.3.3) определяются так:

$$H_1 = -\frac{1}{\varphi'' \sin^3 \theta} = H_1(\theta), \quad H_2 = \varphi = H_2(\theta). \quad (3.3.14)$$

Далее, предварительно вычисляя производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} &= (\cos \theta \cos \vartheta, \cos \theta \sin \vartheta, -\sin \theta), \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \vartheta} &= (-\sin \theta \sin \vartheta, \sin \theta \cos \vartheta, 0), \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

находим компоненты тензора кривизны [6]:

$$b_{11} = -\left(\mathfrak{e}_1, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\varphi'' \sin^3 \theta}, \quad b_{22} = -\left(\mathfrak{e}_2, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \vartheta} \right) = -\varphi \sin \theta, \quad b_{12} = 0. \quad (3.3.16)$$

Следовательно, координаты (3.3.7) главные. Соответствующие главные кривизны определяем как решение уравнения

$$\left| (b_{ij}) - k(g_{ij}) \right| = 0:$$

$$k_1 = \frac{b_{11}}{g_{11}} = \varphi'' \sin^3 \theta, \quad k_2 = \frac{b_{22}}{g_{22}} = -\frac{\sin \theta}{\varphi}. \quad (3.3.17)$$

Отсюда с учетом неравенств в (3.3.3) и равенств в (3.3.14) находим главные радиусы кривизны срединной поверхности:

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{\varphi'' \sin^3 \theta} = R_1(\theta) = H_1, \\ R_2 &= -\frac{1}{k_2} = \frac{\varphi}{\sin \theta} = R_2(\theta) = \frac{H_2}{\sin \theta}. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Учитывая теперь (3.3.14) и (3.3.18), из (3.3.1) получаем уравнения равновесия в координатах (3.3.7):

$$H_2 \frac{\partial T_{11}}{\partial \theta} + H_1 \frac{\partial T_{12}}{\partial \vartheta} + (T_{11} - T_{22}) \frac{\partial H_2}{\partial \theta} + H_1 H_2 p_1 = 0,$$

$$H_1 \frac{\partial T_{22}}{\partial \vartheta} + H_2 \frac{\partial T_{12}}{\partial \vartheta} + 2T_{12} \frac{\partial H_2}{\partial \vartheta} + H_1 H_2 p_2 = 0, \quad (3.3.19)$$

$$\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} = p.$$

Отметим, что последнее уравнение в этой системе является выводимым в сопротивлении материалов другим способом уравнением Лапласа [12].

Для преобразования (3.3.19) с использованием (3.3.9), (3.3.11), (3.3.14) и (3.3.18) находим необходимые производные от параметров Ламе:

$$\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta} = \frac{\partial H_2}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial H_2}{\partial \theta} = \varphi' \frac{dz}{d\theta} = -\frac{\text{ctg}\theta}{\varphi'' \sin^2 \theta} = R_1 \cos \theta. \quad (3.3.20)$$

Вводим новые функции и исключаем из последнего уравнения усилие T_{22} :

$$N = T_{11} H_2 \sin \theta = T_{11} R_2 \sin^2 \theta, \quad S = T_{12} H_2^2 = T_{12} R_2^2 \sin^2 \theta,$$

$$T_{22} = R_2 \left(p - \frac{T_{11}}{R_1} \right) = R_2 p - \frac{N}{R_1 \sin^2 \theta}. \quad (3.3.21)$$

В результате получаем

$$\frac{R_2^2 \sin \theta}{R_1} \frac{\partial N}{\partial \theta} + \frac{\partial S}{\partial \vartheta} = \bar{p}_1, \quad \frac{R_2}{\sin \theta} \frac{\partial N}{\partial \vartheta} - \frac{\partial S}{\partial \theta} = \bar{p}_2, \quad (3.3.22)$$

где

$$\bar{p}_1 = (p \cos \theta - p_1 \sin \theta) R_2^2 \sin^2 \theta, \quad \bar{p}_2 = \left(p_2 \sin \theta + \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right) R_1 R_2^2 \sin \theta. \quad (3.3.23)$$

Система уравнений (3.3.22) очевидным образом сводится к одному уравнению относительно функции $N(\theta, \vartheta)$:

$$B(N) = F(\bar{p}_1, \bar{p}_2), \quad (3.3.24)$$

где

$$B(N) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{R_2^2 \sin \theta}{R_1} \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) + \frac{R_2}{\sin \theta} \frac{\partial^2 N}{\partial \vartheta^2}, \quad F(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \vartheta}. \quad (3.3.25)$$

После построения решения этого уравнения функция находится интегрированием второго равенства в (3.3.22). Затем с помощью соотношений (3.3.21) могут быть получены сами усилия T_{11}, T_{22}, T_{12} .

Естественно, к уравнению (3.3.24) должны быть добавлены граничные условия, соответствующие (3.1.10). Более подробно о них будет сказано в следующем разделе.

В заключение этого раздела запишем вытекающий из (3.1.16) закон распределения по толщине физических компонент σ_{ij} тензора тангенциальных напряжений:

$$\sigma_{ij} = T_{ij} / h. \quad (3.3.26)$$

3.4. Перемещения в безмоментных оболочках вращения

Как отмечено в п. 3.1, для безмоментных оболочек вращения по результатам решения краевой задачи относительно усилий с помощью обратной формы закона Гука (2.5.19) находятся деформации ε_{ij} . Тогда определение перемещений в ортогональной системе координат ξ^1, ξ^2 сводится к интегрированию системы трех уравнений в частных производных (2.1.31) относительно трех функций u_1, u_2 и w . В соответствии с (3.3.18) и (3.3.20) она имеет вид:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + w = R_1 \varepsilon_{11}, \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \vartheta} + u_1 \operatorname{ctg} \theta + w = R_2 \varepsilon_{22}; \quad (3.4.1)$$

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} - u_2 \operatorname{ctg} \theta \right) = 2\varepsilon_{12}. \quad (3.4.2)$$

Эту систему, аналогично уравнениям равновесия в предыдущем пункте, можно записать в более компактном виде. Для этого сначала исключаем из нее нормальное перемещение, находя его из второго уравнения:

$$w = R_2 \varepsilon_{22} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \vartheta} - u_1 \operatorname{ctg} \theta. \quad (3.4.3)$$

После подстановки этого выражения в первое уравнение приходим к такому равенству:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - u_1 \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \vartheta} = R_1 \varepsilon_{11} - R_2 \varepsilon_{22}. \quad (3.4.4)$$

Равенства (3.4.2) и (3.4.4) являются системой из двух уравнений относительно перемещений u_1 и u_2 . Для ее преобразования вводим новые неизвестные функции:

$$U = \frac{u_1}{\sin \theta}, \quad V = \frac{u_2}{R_2 \sin \theta}. \quad (3.4.5)$$

В результате с учетом равенств (3.3.20) приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{R_2^2 \sin \theta}{R_1} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = e_1, \quad \frac{R_2}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} - \frac{\partial U}{\partial \theta} = e_2, \quad (3.4.6)$$

где

$$e_1 = 2R_2 \varepsilon_{12}, \quad e_2 = \frac{R_2 \varepsilon_{22} - R_1 \varepsilon_{11}}{\sin \theta}. \quad (3.4.7)$$

Очевидно, с точностью до обозначений они совпадут с системой уравнений (3.3.22), если положить $V = N$, $U = S$, $e_k = \bar{p}_k$ ($k=1,2$). Следовательно, система (3.4.6) сводится к одному уравнению относительно функции $V(\theta, \vartheta)$:

$$B(V) = F(e_1, e_2), \quad (3.4.8)$$

где операторы B и F определяются равенствами в (3.3.25).

После построения решения этого уравнения функция $U(\theta, \vartheta)$ находится интегрированием второго равенства в (3.4.6). Затем с помощью соотношений (3.4.5) и (3.4.3) последовательно определяются перемещения u_1, u_2 и w .

Уравнения (3.3.24) и (3.4.8) независимые. К ним необходимо добавить граничные условия, соответствующие (3.1.10). Для определенности рассмотрим оболочку вращения с боковой поверхностью в виде двух сечений, проходящих через параллели:

$$\Pi_b = \Pi_{b1} \cup \Pi_{b2}, \Pi_{bk}: \theta = \theta_k \quad (k=1,2), \theta_1 < \theta_2. \quad (3.4.9)$$

При этом граница срединной поверхности состоит из двух координатных линий:

$$\partial\Pi = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Gamma_k: \theta = \theta_k \quad (k=1,2), \quad (3.4.10)$$

входящий в граничные условия вектор \mathbf{v} (см. разделы 2.4 и П.8 пособия [6]), очевидно, коллинеарен базисному вектору \mathfrak{a}_1 в (3.3.12), и граничные условия (3.1.10) в физических компонентах записываются так:

$$u_i|_{\Gamma_{ku}} = u_{(0k)i}, T_{i1}|_{\Gamma_{k\sigma}} = (-1)^k T_{(0k)i}, \Gamma_k = \Gamma_{ku} \cup \Gamma_{k\sigma}. \quad (3.4.11)$$

В этом общем варианте уравнения (3.3.24) и (3.4.8) связаны между собой граничными условиями. Однако возможны допускаемые вариацией функционала Лагранжа [6] смешанные условия

$$u_1|_{\Gamma_k} = u_{(0k)1}, T_{12}|_{\Gamma_k} = (-1)^k T_{(0k)2}, \quad (3.4.12)$$

или

$$u_2|_{\Gamma_k} = u_{(0k)2}, T_{11}|_{\Gamma_k} = (-1)^k T_{(0k)1}, \quad (3.4.13)$$

при которых краевые задачи для уравнений (3.3.24) и (3.4.8) становятся независимыми.

Если $\theta_1 = 0$, то поверхность Π_{b_1} вырождается в точку — полюс оболочки. В нем равенства (3.4.11), (3.4.12) или (3.4.13) должны быть заменены требованием ограниченности усилий.

К уравнению (3.3.24) необходимо добавить граничные условия, соответствующие (3.1.10). После построения решения этой краевой задачи функция $U(\theta, \vartheta)$ находится интегрированием второго равенства в (3.4.6). Затем с помощью соотношений (3.4.5) и (3.4.3) последовательно определяются перемещения u_1, u_2 и w .

3.5. Представление решений уравнений безмоментной теории рядами Фурье

Все уравнения п.п. 3.3, 3.4 относительно функций, определяющих усилия и перемещения, являются уравнениями в частных производных относительно функций двух аргументов. Для решения этих задач с учетом периодичности с периодом $T = 2\pi$ искомых функций по углу ϑ удобно использовать разложения в экспоненциальные ряды Фурье:

$$T_{ij}(\theta, \vartheta) = \sum_{-\infty}^{\infty} T_{ijn}(\theta) e^{in\vartheta}, \quad \varepsilon_{ij}(\theta, \vartheta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{ijn}(\theta) e^{in\vartheta} \quad (i, j = 1, 2); \quad (3.5.1)$$

$$u(\theta, \vartheta) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n(\theta) e^{in\vartheta}, \quad v(\theta, \vartheta) = \sum_{-\infty}^{\infty} v_n(\theta) e^{in\vartheta}, \quad w(\theta, \vartheta) = \sum_{-\infty}^{\infty} w_n(\theta) e^{in\vartheta}. \quad (3.5.2)$$

При этом аналогичными разложениями представляется внешняя нагрузка:

$$p_i(\theta, \vartheta) = \sum_{-\infty}^{\infty} p_{in}(\theta) e^{in\vartheta} \quad (i = 1, 2), \quad p(\theta, \vartheta) = \sum_{-\infty}^{\infty} p_n(\theta) e^{in\vartheta}, \quad (3.5.3)$$

где

$$p_{in}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_i(\theta, \vartheta) e^{in\vartheta} d\vartheta, \quad p_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(\theta, \vartheta) e^{in\vartheta} d\vartheta. \quad (3.5.4)$$

Подставляя (3.5.1) в (3.3.21), находим ряды для функций $N(\theta, \vartheta)$ и $S(\theta, \vartheta)$:

$$N(\theta, \vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_n(\theta) e^{in\vartheta}, \quad S(\theta, \vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n(\theta) e^{in\vartheta}, \quad (3.5.5)$$

где

$$N_n = T_{11n} R_2 \sin^2 \theta, \quad S_n = T_{12n} R_2^2 \sin^2 \theta. \quad (3.5.6)$$

Аналогичную процедуру проводим в правой части уравнения (3.3.24):

$$F(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(\bar{p}_{1n}, \bar{p}_{2n}) e^{in\vartheta}, \quad (3.5.7)$$

где

$$F_n(\bar{p}_{1n}, \bar{p}_{2n}) = \frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \bar{p}_{1n}}{\partial \theta} + in \bar{p}_{2n} \right),$$

$$\bar{p}_{1n} = (p_n \cos \theta - p_{1n} \sin \theta) R_2^3 \sin^2 \theta, \quad (3.5.8)$$

$$\bar{p}_{2n} = R_1 R_2^2 (in p_n + p_{2n} \sin \theta) \sin \theta.$$

Подставляя теперь (3.5.5) и (3.5.7) в (3.3.25), для каждого $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ получаем уравнение

$$B_n(N_n) = F_n(\bar{p}_{1n}, \bar{p}_{2n}), \quad (3.5.9)$$

где

$$B_n(N_n) = \frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \left(\frac{R_2^2 \sin \theta}{R_1} N_n' \right)' - \frac{n^2}{R_1 \sin^2 \theta}. \quad (3.5.10)$$

К уравнению (3.5.10) необходимо добавить граничные условия, полученные разложением в ряды, соответствующие (3.1.10).

Коэффициенты ряда в (3.5.5) для определяются по формулам, полученным с помощью разложения в ряды равенств (3.3.22):

$$S_n = \frac{i}{n} \left(\frac{R_2^2}{R_1} N_n \sin \theta - \bar{p}_{1n} \right) (n \neq 0), \quad S'_0 = -\bar{p}_{20}. \quad (3.5.11)$$

Функции $T_{11n}(\theta)$ и $T_{12n}(\theta)$ находятся с помощью соотношений (3.5.6), а $T_{22n}(\theta)$ — из вытекающих из (3.3.21) равенств

$$T_{22n} = R_2 \left(p_n - \frac{T_{11n}}{R_1} \right). \quad (3.5.12)$$

Коэффициенты рядов (3.5.2) для перемещений определяются подобным образом на основе материала п. 3.4. При этом аналоги равенств (3.5.5) и (3.5.6) вытекают из (3.4.5):

$$U(\theta, \vartheta) = \sum_{-\infty}^{\infty} U_n(\theta) e^{in\vartheta}, \quad V(\theta, \vartheta) = \sum_{-\infty}^{\infty} V_n(\theta) e^{in\vartheta}; \quad (3.5.13)$$

$$u_{1n} = U_n \sin \theta, \quad u_{2n} = V_n R_2 \sin \theta. \quad (3.5.14)$$

Функции являются решением уравнения

$$B_n(V_n) = F_n(e_{1n}, e_{2n}). \quad (3.5.15)$$

Здесь e_{1n}, e_{2n} — коэффициенты разложений функций в (3.4.7):

$$e_i(\theta, \vartheta) = \sum_{-\infty}^{\infty} e_{in}(\theta) e^{im\vartheta} \quad (i=1,2), \quad (3.5.16)$$

где

$$e_{1n} = 2R_2 \varepsilon_{12n}, \quad e_{2n} = \frac{R_2 \varepsilon_{22n} - R_1 \varepsilon_{11n}}{\sin \theta}. \quad (3.5.17)$$

Коэффициенты же рядов для деформаций находятся с помощью полученных из обратной формы закона Гука (2.5.19) соотношений:

$$\begin{aligned} 2\mu h \varepsilon_{11n} &= T_{11n} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (T_{11n} + T_{22n}), \\ 2\mu h \varepsilon_{22n} &= T_{22n} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (T_{11n} + T_{22n}), \quad 2\mu h \varepsilon_{12n} = T_{12n}. \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

К уравнению (3.5.15) необходимо добавить граничные условия, полученные разложением в ряды, соответствующие (3.1.10).

Коэффициенты ряда в (3.5.13) определяются по формулам, полученным из (3.4.6), аналогично (3.5.11):

$$U_n = \frac{i}{n} \left(\frac{R_2^2}{R_1} V_n \sin \theta - e_{1n} \right) (n \neq 0), U_0' = -e_{20}. \quad (3.5.19)$$

Функции $u_{1n}(\theta)$ и $u_{2n}(\theta)$ находятся с помощью соотношений (3.5.14), а $w_n(\theta)$ — из вытекающих из (3.3.21) равенств

$$w_n = R_2 \varepsilon_{22n} - \frac{inu_{2n}}{\sin \theta} - u_{1n} \operatorname{ctg} \theta. \quad (3.5.20)$$

3.6. Осесимметричное деформирование безмоментных оболочек

Частным случаем рассмотренного выше деформирования безмоментных оболочек является его симметрия относительно оси Oz , что эквивалентно независимости перемещений от угла ϑ :

$$u = u(\theta), v = v(\theta), w = w(\theta). \quad (3.6.1)$$

Тогда из кинематических соотношений (3.4.1), (3.4.2) и обратной формы закона Гука (2.5.19) получаем, что деформации и усилия также зависят только от угла θ :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\theta), T_{ij} = T_{ij}(\theta). \quad (3.6.2)$$

Последние равенства, как следует из уравнений равновесия (3.3.19), могут выполняться только в случае аналогичной функциональной зависимости для внешней нагрузки:

$$p_i = p_i(\theta), p = p(\theta). \quad (3.6.3)$$

Очевидно, решение такой задачи можно получить из результатов предыдущего пункта, учитывая, что этому случаю соответству-

ют нулевые ($n=0$) члены рядов (3.5.1) и (3.5.2). Однако проще непосредственно использовать системы уравнений (3.3.22) и (3.4.6), которые переходят в следующие системы из независимых обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$N' = (p \cos \theta - p_1 \sin \theta) R_1 R_2 \sin \theta, S' = -p_2 R_1 R_2^2 \sin^2 \theta; \quad (3.6.4)$$

$$V' = \frac{2R_1 \varepsilon_{12}}{R_2 \sin \theta}, U' = \frac{R_1 \varepsilon_{11} - R_2 \varepsilon_{22}}{\sin \theta}. \quad (3.6.5)$$

Входящие сюда функции $N(\theta)$, $S(\theta)$ и $V(\theta)$, $U(\theta)$ связаны с усилиями T_{ij} и тангенциальными перемещениями u_i соотношениями (3.3.21) и (3.4.5) соответственно, а нормальные перемещения w определяются формулой (3.4.3).

Отметим вытекающие из (3.3.21) и (3.6.4) выводы:

- нагрузки p и p_1 порождают только нормальные усилия;
- нагрузка p_2 порождает только касательные усилия.

Структура уравнений (3.6.4) и (3.6.5) позволяет записать их общие интегралы:

$$N(\theta) = \int (p \cos \theta - p_1 \sin \theta) R_1 R_2 \sin \theta d\theta, S(\theta) = -\int p_2 R_1 R_2^2 \sin^2 \theta d\theta; \quad (3.6.6)$$

$$V(\theta) = 2 \int \frac{R_1 \varepsilon_{12}}{R_2 \sin \theta} d\theta, U(\theta) = \int \frac{R_1 \varepsilon_{11} - R_2 \varepsilon_{22}}{\sin \theta} d\theta. \quad (3.6.7)$$

Входящие неявно в эти равенства произвольные постоянные определяются из граничных условий в конкретных задачах.

Усилия и тангенциальные перемещения находятся с помощью формул (3.3.21) и (3.4.5), нормальные перемещения с учетом осевой симметрии определяются частным случаем формулы (3.4.3):

$$w = R_2 \varepsilon_{22} - u_1 \operatorname{ctg} \theta. \quad (3.6.8)$$

Пример 3.6.1. Оболочка вращения нагружена на торцах $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_1$ ($\theta_1 < \theta_0$) равномерно распределенными касательными танген-

циальными усилиями, эквивалентными результирующим крутящим моментам M , векторы которых коллинеарны оси Oz и противоположно направлены (рис. 3.6.1).

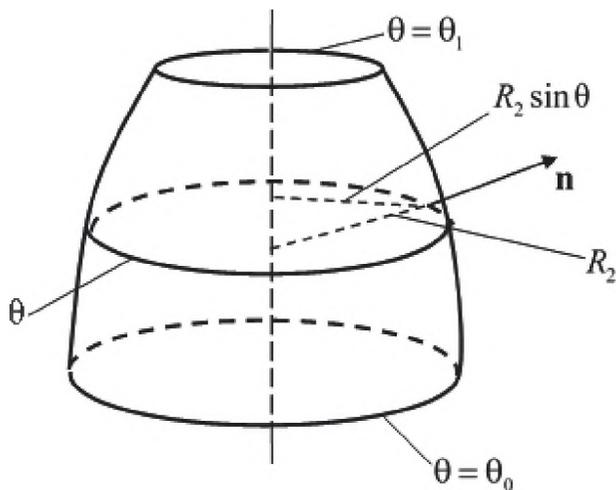


Рис. 3.6.1

Найти усилия и напряжения в оболочке при отсутствии распределенной нагрузки: $p = p_1 = p_2 = 0$.

Решение. Используем безмоментную теорию для осесимметричного деформирования (см. разделы 3.3—3.6). Из (3.6.6) получаем, что $N = \text{const}$ и $S = C = \text{const}$. Отсюда, учитывая, что на торцах имеют место только касательные тангенциальные усилия, с использованием (3.3.21) получаем

$$T_{11} = T_{22} = 0, T_{12} = \frac{C}{R_2^2(\theta) \sin^2 \theta}.$$

Постоянную интегрирования C находим из (3.3.21) при $\theta = \theta_0$ с учетом обозначений в (3.6.8): $C = T_0 R_2^2(\theta_0) \sin^2 \theta_0$, где $T_0 = T_{12}|_{\theta=\theta_0}$.

Таким образом, усилие T_{12} имеет вид:

$$T_{12} = T_0 \frac{R_2^2(\theta_0) \sin^2 \theta_0}{R_2^2(\theta) \sin^2 \theta}. \quad (3.6.9)$$

Результирующий крутящий момент выражается через усилие T_0 так:

$$M = 2\pi R_2(\theta_0) \sin \theta_0 \cdot T_0 R_2(\theta_0) \sin \theta_0 = 2\pi T_0 R_2^2(\theta_0) \sin^2 \theta_0.$$

Отсюда находим T_0 :

$$T_0 = \frac{M}{2\pi R_2^2(\theta_0) \sin^2 \theta_0}.$$

Подставляя этот результат в (3.6.9), получаем

$$T_{12}(\theta) = \frac{M}{2\pi R_2^2(\theta) \sin^2 \theta}.$$

Напряжения определяются формулой (3.3.26):

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12}(\theta) = \frac{M}{2\pi h R_2^2(\theta) \sin^2 \theta}. \quad \blacksquare$$

Пример 3.6.2. Выполненная из материала плотности ρ оболочка вращения толщины h в виде купола ($0 \leq \theta \leq \theta_0$) нагружена силой тяжести (собственным весом), направленной противоположно оси Oz . На торце $\theta = \theta_0$ оболочка закреплена катком, исключая нормальные границы перемещения u_1 и касательные усилия (рис. 3.6.2).

Найти усилия, напряжения и перемещения. Рассмотреть частный случай сферического купола радиуса R .

Решение. В принятых выше обозначениях на оболочку действует следующая распределенная нагрузка:

$$p = -q \cos \theta, \quad p_1 = q \sin \theta, \quad p_2 \equiv 0,$$

где $q = \rho gh$; g — ускорение свободного падения.

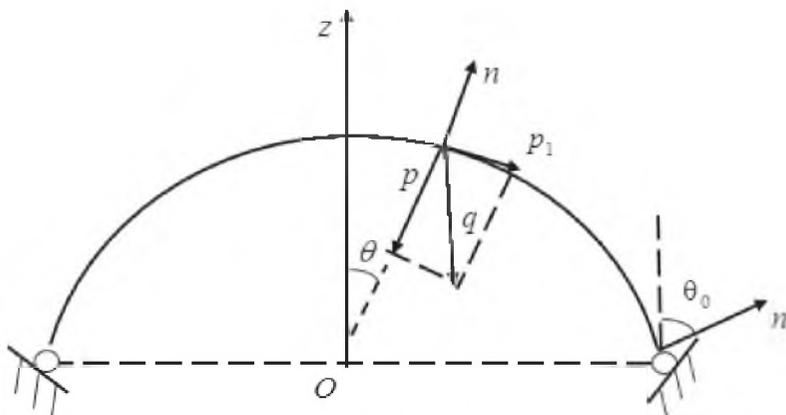


Рис. 3.6.2

Из (3.6.6) получаем

$$N(\theta) = -q[\Phi(\theta) + C_1], \quad \Phi(\theta) = \int_0^\theta R_1 R_2 \sin \theta d\theta, \quad S(\theta) = C_2, \quad (3.6.10)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Отсюда с использованием (3.3.21) определяем усилия T_{11} и T_{12} :

$$T_{11} = -q \frac{\Phi(\theta) + C_1}{R_2(\theta) \sin^2 \theta}, \quad T_{12} = \frac{C_2}{R_2^2(\theta) \sin^2 \theta},$$

$$T_{22} = -R_2(\theta) \left(q \cos \theta + \frac{T_{11}}{R_1} \right). \quad (3.6.11)$$

По условию задачи $T_{12}|_{\theta=\theta_0} = 0$. Следовательно, $C_2 = 0$. Кроме того, используем ограниченность усилия T_{11} . С этой целью к функции $\Phi(\theta)$ применяем теорему о среднем:

$$\Phi(\theta) = R_1(\theta_*) R_2(\theta_*) \int_0^\theta \sin \theta d\theta = 2R_1(\theta_*) R_2(\theta_*) \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta_* \leq \theta.$$

Отсюда вытекает следующая асимптотика при $\theta \rightarrow 0$:

$$\Phi(\theta) \sim 2R_1(0)R_2(0)\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Следовательно, в (3.6.9) необходимо также положить $C_1 = 0$. Таким образом, усилия имеют вид:

$$T_{11} = -q \frac{\Phi(\theta)}{R_2(\theta)\sin^2\theta}, T_{22} = q \left[\frac{\Phi(\theta)}{R_1(\theta)\sin^2\theta} - R_2(\theta)\cos\theta \right], T_{12} = 0. \quad (3.6.12)$$

При этом в полюсе оболочки имеют место равенства:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} T_{11} = -2qR_1(0) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2\theta/2}{\sin^2\theta} = -\frac{1}{2}qR_1(0),$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} T_{22} = q \left[\frac{1}{2}R_2(0) - R_2(\theta) \right] = -\frac{1}{2}qR_2(0).$$

Напряжения определяются формулой (3.3.26):

$$\sigma_{11} = \frac{T_{11}}{h}, \sigma_{22} = \frac{T_{22}}{h}, \sigma_{12} = 0.$$

Для вычисления перемещений сначала, применяя обратный закон Гука (2.5.19), находим деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2\mu h} [T_{11} - \nu(T_{11} + T_{22})], \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2\mu h} [T_{22} - \nu(T_{11} + T_{22})], \varepsilon_{12} = 0. \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

Затем с помощью (3.6.7) получаем

$$V(\theta) = C_3, U(\theta) = \Psi(\theta) + C_4, \Psi(\theta) = \int_0^\theta \frac{R_1\varepsilon_{11} - R_2\varepsilon_{22}}{\sin\theta} d\theta. \quad (3.6.14)$$

Здесь C_3 и C_4 — постоянные интегрирования; первую из них можно положить равной нулю, чтобы исключить поворот оболочки вокруг оси Oz как абсолютно твердого тела, вторая находится из условия

$$u_1|_{\theta=\theta_0} = 0.$$

Сами перемещения вычисляются с помощью формул (3.4.5) и (3.6.8).

Далее ограничимся сферическим куполом, для которого $R_1 = R_2 = R$. В этом случае функция $\Phi(\theta)$ в (3.6.9) имеет вид $\Phi(\theta) = 2R^2 \sin^2 \theta/2$, и усилия в соответствии с (3.6.11) записываются так:

$$T_{11} = -\frac{qR}{2 \cos^2 \theta/2}, T_{22} = qR \left(\frac{1}{2 \cos^2 \theta/2} - \cos \theta \right), T_{12} = 0.$$

Подставляя эти равенства в (3.6.12), получаем ненулевые деформации:

$$\varepsilon_{11} = \frac{qR}{2\mu h} \left(\nu \cos \theta - \frac{1}{2 \cos^2 \theta/2} \right), \varepsilon_{22} = \frac{qR}{2\mu h} \left[\frac{1}{2 \cos^2 \theta/2} - (1-\nu) \cos \theta \right].$$

С их помощью определяем функцию $\Psi(\theta)$ в (3.6.13):

$$\Psi(\theta) = \frac{qR^2}{\mu h} \left(\ln \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

Следовательно, перемещения u_1 вычисляются так:

$$u_1 = U \sin \theta = \left[\frac{qR^2}{\mu h} \left(\ln \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right) + C_4 \right] \sin \theta.$$

Уравнение относительно C_4 имеет вид:

$$\left[\frac{qR^2}{\mu h} \left(\ln \cos \frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_0}{2} \right) + C_4 \right] \sin \theta_0 = 0,$$

откуда получаем

$$C_4 = -\frac{qR^2}{\mu h} \left(\ln \cos \frac{\theta_0}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_0}{2} \right)$$

Следовательно, перемещение u_1 вычисляется следующим образом:

$$u_1 = \frac{qR^2}{\mu h} \left[\ln \frac{\cos \theta/2}{\cos \theta_0/2} + \frac{1}{4} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\theta_0}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \sin \theta.$$

В завершение примера находим прогиб купола:

$$\begin{aligned} w &= R\epsilon_{22} - u_1 \operatorname{ctg} \theta = \\ &= \frac{qR^2}{2\mu h} \left[\frac{1}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - \left(1 - \nu + 2 \ln \frac{\cos \theta/2}{\cos \theta_0/2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_0}{2} \right) \cos \theta \right]. \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1. Соотношения теории пластин в прямоугольных декартовых координатах

Полагаем, что

$$\xi^1 = x, \quad \xi^2 = y \quad (\text{П.1.1})$$

— прямоугольные декартовы координаты. Им соответствуют следующие компоненты метрического тензора и параметры Ламе [9]:

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad H_1 = H_2 = 1. \quad (\text{П.1.2})$$

В этом случае оператор ковариантного дифференцирования совпадает с соответствующей частной производной:

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (\text{П.1.3})$$

1. *Пластина типа Тимошенко.* Учитывая эти равенства из (1.6.1), (1.6.2) и (1.6.5), получаем уравнения движения, кинематические соотношения и уравнения совместности деформаций:

$$\rho h \ddot{w} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + q,$$

$$\rho I \ddot{\psi}_1 = \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} - Q_1 + m_1, \quad \rho I \ddot{\psi}_2 = \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} - Q_2 + m_2; \quad (\text{П.1.4})$$

$$\kappa_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \quad \kappa_{22} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \quad \kappa_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right), \quad (\text{П.1.5})$$

$$-\vartheta_1 = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad -\vartheta_2 = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \theta_i = \psi_i - \vartheta_i;$$

$$\frac{\partial \kappa_{12}}{\partial y} - \frac{\partial \kappa_{22}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} - \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \kappa_{12}}{\partial x} - \frac{\partial \kappa_{11}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y} - \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) = 0. \quad (\text{П.1.6})$$

Три формы физического закона и граничные условия имеют вид (1.6.3), (1.6.6), (1.6.7) и (1.6.4).

Уравнения движения относительно перемещений достаточно просто записываются для изотропной среды с помощью (1.3.13), где необходимо учесть (П.1.3), частный случай равенства из [6] для оператора дивергенции, известную формулу Лапласа в прямоугольной декартовой системе координат:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\Psi} = \kappa = \frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y}, \quad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (\text{П.1.7})$$

2. *Пластина Кирхгофа.* Уравнение движения, кинематические соотношения и формулы для перерезывающих сил вытекают из (1.6.8), (1.6.9) и (1.6.1):

$$\rho h \ddot{w} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + p; \quad (\text{П.1.8})$$

$$\kappa_{11} = \frac{\partial\vartheta_1}{\partial x}, \quad \kappa_{22} = \frac{\partial\vartheta_2}{\partial y}, \quad \kappa_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta_1}{\partial y} \right), \quad \vartheta_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \vartheta_2 = -\frac{\partial w}{\partial y}; \quad (\text{П.1.9})$$

$$Q_1 = \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} + m_1, \quad Q_2 = \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} + m_2. \quad (\text{П.1.10})$$

Три формы физического закона и граничные условия имеют вид (1.6.11), (1.6.13), (1.6.14) и (1.6.4) с учетом (1.6.10).

Уравнения совместности деформаций следуют из (П.1.6) при $\theta_1 = \theta_2 = 0$:

$$\frac{\partial\kappa_{12}}{\partial y} - \frac{\partial\kappa_{22}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\kappa_{12}}{\partial x} - \frac{\partial\kappa_{11}}{\partial y} = 0. \quad (\text{П.1.11})$$

Уравнение движения относительно перемещений для изотропной среды имеет вид (1.4.10), где нужно учесть формулу для оператора Лапласа в (П.1.7).

П.2. Соотношения теории пластин в полярных координатах

Полагаем, что

$$\xi^1 = r, \xi^2 = \vartheta \quad (r \geq 0, -\pi < \vartheta \leq \pi) \quad (\text{П.2.1})$$

— полярные координаты, которые, как известно, связаны с прямоугольными декартовыми координатами (П.1.1) так:

$$x = r \cos \vartheta, y = r \sin \vartheta. \quad (\text{П.2.2})$$

Полярным координатам соответствуют следующие компоненты метрического тензора и параметры Ламе [9]:

$$g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g_{12} = 0, g^{11} = 1, g^{22} = r^{-2}, g_{12} = 0, H_1 = 1, H_2 = r. \quad (\text{П.2.3})$$

Далее при переходе к физическим компонентам векторов и тензоров индекс «1» заменяем индексом «r», а индекс «2» — индексом « ϑ ».

1. *Пластина типа Тимошенко.* Учитывая эти равенства из (1.6.1), (1.6.2) и (1.6.5), получаем уравнения движения, кинематические соотношения и уравнения совместности деформаций:

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{w} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rQ_r)}{\partial r} + \frac{\partial Q_\vartheta}{\partial \vartheta} \right] + q, \\ \rho I \ddot{\Psi}_r &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rM_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} - M_{22} \right] - Q_r + m_r, \\ \rho I \ddot{\Psi}_\vartheta &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rM_{r\vartheta})}{\partial r} + \frac{\partial M_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + M_{r\vartheta} \right] - Q_\vartheta + m_\vartheta; \end{aligned} \quad (\text{П.2.4})$$

$$\begin{aligned} \kappa_{rr} &= \frac{\partial \psi_r}{\partial r}, \kappa_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_\vartheta}{\partial \vartheta} + \psi_r \right), 2\kappa_{r\vartheta} = \frac{\partial \psi_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial \vartheta} - \psi_\vartheta \right), \\ -\vartheta_r &= \frac{\partial w}{\partial r}, -\vartheta_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta}, \theta_r = \psi_r - \vartheta_r, \theta_\vartheta = \psi_\vartheta - \vartheta_\vartheta; \end{aligned} \quad (\text{П.2.5})$$

$$\frac{\partial \kappa_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (r\kappa_{\vartheta\vartheta})}{\partial r} + \kappa_{rr} + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\frac{\partial (r\theta_{\vartheta})}{\partial r} - \frac{\partial \theta_r}{\partial \vartheta} \right] = 0, \quad (П.2.6)$$

$$\frac{\partial (r\kappa_{r\vartheta})}{\partial r} - \frac{\partial \kappa_{rr}}{\partial \vartheta} + \kappa_{r\vartheta} + \frac{r^2}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \theta_r}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (r\theta_{\vartheta})}{\partial r} \right] \right\} = 0.$$

Три формы физического закона (1.6.3), (1.6.6), (1.6.7) записываются так:

— для моментов

$$\begin{aligned} M_{rr} &= I(C_{rrr}\kappa_{rr} + 2C_{rr\vartheta}\kappa_{r\vartheta} + C_{r\vartheta\vartheta}\kappa_{\vartheta\vartheta}), \\ M_{r\vartheta} &= I(C_{r\vartheta r}\kappa_{rr} + 2C_{r\vartheta r\vartheta}\kappa_{r\vartheta} + C_{r\vartheta\vartheta\vartheta}\kappa_{\vartheta\vartheta}), \\ M_{\vartheta\vartheta} &= I(C_{\vartheta\vartheta r}\kappa_{rr} + 2C_{\vartheta\vartheta r\vartheta}\kappa_{r\vartheta} + C_{\vartheta\vartheta\vartheta\vartheta}\kappa_{\vartheta\vartheta}); \end{aligned} \quad (П.2.7)$$

$$\begin{aligned} M_{rr} &= I(\lambda\kappa + 2\mu\kappa_{rr}), \quad M_{\vartheta\vartheta} = I(\lambda\kappa + 2\mu\kappa_{\vartheta\vartheta}), \\ M_{r\vartheta} &= 2I\mu\kappa_{r\vartheta}, \quad \kappa = \kappa_{\vartheta\vartheta} + \kappa_{rr}; \end{aligned} \quad (П.2.8)$$

$$\begin{aligned} M_{rr} &= \frac{EI}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\kappa_{rr} + \nu\kappa_{\vartheta\vartheta}], \quad M_{r\vartheta} = \frac{EI}{1+\nu} \kappa_{r\vartheta}, \\ M_{\vartheta\vartheta} &= \frac{EI}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\kappa_{\vartheta\vartheta} + \nu\kappa_{rr}]; \end{aligned} \quad (П.2.9)$$

— для перерезывающих сил

$$Q_r = hk^2(C_{r3r3}\theta_r + C_{r3\vartheta3}\theta_{\vartheta}), \quad Q_{\vartheta} = hk^2(C_{\vartheta3r3}\theta_r + C_{\vartheta3\vartheta3}\theta_{\vartheta}); \quad (П.2.10)$$

$$Q_r = hk^2\mu\theta_r, \quad Q_{\vartheta} = hk^2\mu\theta_{\vartheta}; \quad (П.2.11)$$

$$Q_r = \frac{Ehk^2}{2(1+\nu)}\theta_r, \quad Q_{\vartheta} = \frac{Ehk^2}{2(1+\nu)}\theta_{\vartheta}. \quad (П.2.12)$$

Граничные условия (1.6.4) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} w|_{\Gamma_u} &= w_{(0)}, \Psi_r|_{\Gamma_u} = \Psi_{(0)r}, \Psi_\vartheta|_{\Gamma_u} = \Psi_{(0)\vartheta}, \\ (M_{rr}v_r + M_{r\vartheta}v_\vartheta)|_{\Gamma_\sigma} &= M_{(0)r}, (M_{r\vartheta}v_r + M_{\vartheta\vartheta}v_\vartheta)|_{\Gamma_\sigma} = M_{(0)\vartheta}, \\ (Q_rv_r + Q_\vartheta v_\vartheta)|_{\Gamma_\sigma} &= Q_{(0)}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.13})$$

Для построения уравнений движения для изотропной пластины относительно физических компонент вектора перемещений сначала записываем формулу для оператора Лапласа от координат вектора в полярных координатах [9]:

$$\begin{aligned} \Delta\Psi_i &= g^{kl}\nabla_k\nabla_l\Psi_i = g^{11}\nabla_1\nabla_1\Psi_i + g^{22}\nabla_2\nabla_2\Psi_i = \\ &= \nabla_1\nabla_1\Psi_i + \frac{1}{r^2}\nabla_2\nabla_2\Psi_i. \end{aligned} \quad (\text{П.2.14})$$

Для ее использования с помощью соответствующих равенств для производных вектора и тензора в [6] находим выражения вторых производных:

$$\begin{aligned} \nabla_1\nabla_1\Psi_1 &= \frac{\partial^2\Psi_r}{\partial r^2}, \nabla_2\nabla_2\Psi_1 = \frac{\partial^2\Psi_r}{\partial\vartheta^2} - 2\frac{\partial\Psi_\vartheta}{\partial\vartheta} + r\frac{\partial\Psi_r}{\partial r} - \Psi_r, \\ \nabla_1\nabla_1\Psi_2 &= r\frac{\partial^2\Psi_\vartheta}{\partial r^2}, \nabla_2\nabla_2\Psi_2 = r^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi_\vartheta}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial\Psi_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(2\frac{\partial\Psi_r}{\partial\vartheta} - \Psi_\vartheta\right)\right]. \end{aligned} \quad (\text{П.2.15})$$

Подставляя эти равенства в (П.2.14), приходим к следующим результатам:

$$\Delta\Psi_1 = \Delta\Psi_r - \frac{1}{r^2}\left(\Psi_r + 2\frac{\partial\Psi_\vartheta}{\partial\vartheta}\right), \Delta\Psi_2 = r\Delta\Psi_\vartheta + \frac{1}{r}\left(2\frac{\partial\Psi_r}{\partial\vartheta} - \Psi_\vartheta\right). \quad (\text{П.2.16})$$

Здесь использована вытекающая из (П.2.3) и соответствующего равенства для оператора Лапласа от скаляра в главных координатах в [6] формула:

$$\Delta w = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} \right], \quad (\text{П.2.17})$$

Подставляя теперь (П.2.16) в (1.3.13) и учитывая (П.2.3), получаем уравнения движения в физических компонентах:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{w} &= k^2 \mu (\kappa + \Delta w) + q/h, \\ \rho \ddot{\psi}_r &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \kappa}{\partial r} + \\ &+ \mu \left\{ \left[\Delta \psi_r - \frac{1}{r^2} \left(\psi_r + 2 \frac{\partial \psi_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) \right] - \frac{k^2 h}{I} \left(\psi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right\} + \frac{m_r}{I}; \\ \rho \ddot{\psi}_\vartheta &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \kappa}{\partial \vartheta} + \\ &+ \mu \left\{ \left[\Delta \psi_\vartheta + \frac{1}{r^2} \left(2 \frac{\partial \psi_r}{\partial \vartheta} - \psi_\vartheta \right) \right] - \frac{k^2 h}{I} \left(\psi_\vartheta + \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right) \right\} + \frac{m_\vartheta}{I}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.18})$$

Здесь

$$\operatorname{div} \psi = \kappa = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r \psi_r)}{\partial r} + \frac{\partial \psi_\vartheta}{\partial \vartheta} \right]. \quad (\text{П.2.19})$$

2. *Пластина Кирхгофа.* Уравнение движения и кинематические соотношения следуют из (1.6.8) и (1.6.9) при учете (П.2.3):

$$\rho h \ddot{w} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r Q_r)}{\partial r} + \frac{\partial Q_\vartheta}{\partial \vartheta} \right] + p; \quad (\text{П.2.20})$$

$$\begin{aligned} \kappa_{rr} &= \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r}, \quad \kappa_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \vartheta_\vartheta}{\partial \vartheta} + \vartheta_r \right), \quad 2\kappa_{r\vartheta} = \frac{\partial \vartheta_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \vartheta_r}{\partial \vartheta} - \vartheta_\vartheta \right), \\ -\vartheta_r &= \frac{\partial w}{\partial r}, \quad -\vartheta_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.21})$$

В граничных условиях (П.2.13) согласно (1.6.10) изменяются только второе и третье равенства:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{\Gamma_u} = -\Psi_{(0)r}, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right|_{\Gamma_u} = -\Psi_{(0)\varepsilon}. \quad (\text{П.2.22})$$

Три формы физических соотношений (П.2.7) — (П.2.9) сохраняются, а формулы (1.6.12) для перерезывающих сил записываются так:

$$\begin{aligned} Q_r &= \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial M_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + M_r - M_{\vartheta\vartheta} \right) + m_r, \\ Q_\vartheta &= \frac{\partial M_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial M_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + 2M_{r\vartheta} \right) + m_\vartheta. \end{aligned} \quad (\text{П.2.23})$$

Уравнения совместности деформаций для пластины Кирхгофа легко получаются из (П.2.6), если в них положить $\theta_1 = \theta_2 = 0$:

$$\frac{\partial \kappa_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (r\kappa_{\vartheta\vartheta})}{\partial r} + \kappa_r = 0, \quad \frac{\partial (r\kappa_{r\vartheta})}{\partial r} - \frac{\partial \kappa_r}{\partial \vartheta} + \kappa_{r\vartheta} = 0. \quad (\text{П.2.24})$$

Уравнения движения относительно перемещений для изотропной среды имеет вид (1.4.10), где нужно учесть формулу для оператора Лапласа (П.2.17).

П.3. Повторное ковариантное дифференцирование тензоров второго ранга на поверхности в трехмерном евклидовом пространстве

В дополнение к рассмотренным в [6] вопросам о повторном ковариантном дифференцировании получим соответствующие результаты для тензорных полей второго ранга.

Теорема П.3.1. Пусть Π — поверхность в R^3 класса C^1 , задаваемая в виде

$$\Pi: \mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2) \quad (\xi^1, \xi^2) \in D_\xi \subset R^2. \quad (\text{П.3.1})$$

На этой поверхности определено дважды дифференцируемое тензорное поле $\mathbf{b}(M) = \mathbf{b}(\xi^1, \xi^2) = b_{ij} \mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2$. Тогда имеют место равенства

$$\nabla_1 \nabla_2 b_{ij} - \nabla_2 \nabla_1 b_{ij} = R_{12in} b_{ij}^n + R_{12jn} b_{in}^n, \quad (\text{П.3.2})$$

где R_{ijkl} — компоненты тензора Римана—Кристоффеля поверхности Π .

Доказательство. Сначала с использованием правила ковариантного дифференцирования

$$\nabla_k b_{ij} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial \xi^k} - \Gamma_{ik}^n b_{nj} - \Gamma_{jk}^n b_{in} \quad (\text{П.3.3})$$

находим вторую производную

$$\begin{aligned} \nabla_1 \nabla_2 b_{ij} &= \frac{\partial \nabla_2 b_{ij}}{\partial \xi^1} - \Gamma_{12}^m \nabla_m b_{ij} - \Gamma_{1i}^m \nabla_2 b_{mj} - \Gamma_{1j}^m \nabla_2 b_{im} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial \xi^2} - \Gamma_{i2}^n b_{nj} - \Gamma_{j2}^n b_{in} \right) - \Gamma_{12}^m \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial \xi^m} - \Gamma_{im}^n b_{nj} - \Gamma_{jm}^n b_{in} \right) - \\ &- \Gamma_{1i}^m \left(\frac{\partial b_{mj}}{\partial \xi^2} - \Gamma_{m2}^n b_{nj} - \Gamma_{j2}^n b_{mn} \right) - \Gamma_{1j}^m \left(\frac{\partial b_{im}}{\partial \xi^2} - \Gamma_{i2}^n b_{nm} - \Gamma_{m2}^n b_{in} \right) \end{aligned} \quad (\text{П.3.4})$$

Формула для производной $\nabla_2 \nabla_1 b_{ij}$ следует из (П.3.4) при перестановке индексов 1 и 2. Тогда для разности (П.3.3) при использовании уравнений Кодацци и выражений компонент тензора Римана—Кристоффеля через символы Кристоффеля [6] получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \nabla_1 \nabla_2 b_{ij} - \nabla_2 \nabla_1 b_{ij} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial \xi^2} - \Gamma_{i2}^n b_{nj} - \Gamma_{j2}^n b_{in} \right) - \Gamma_{12}^m \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial \xi^m} - \Gamma_{im}^n b_{nj} - \Gamma_{jm}^n b_{in} \right) - \\ &- \Gamma_{1i}^m \left(\frac{\partial b_{mj}}{\partial \xi^2} - \Gamma_{m2}^n b_{nj} - \Gamma_{j2}^n b_{mn} \right) - \Gamma_{1j}^m \left(\frac{\partial b_{im}}{\partial \xi^2} - \Gamma_{i2}^n b_{nm} - \Gamma_{m2}^n b_{in} \right) - \\ &- \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial \xi^1} - \Gamma_{i1}^n b_{nj} - \Gamma_{j1}^n b_{in} \right) + \Gamma_{12}^m \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial \xi^m} - \Gamma_{im}^n b_{nj} - \Gamma_{jm}^n b_{in} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\Gamma_{2i}^m \left(\frac{\partial b_{mj}}{\partial \xi^1} - \Gamma_{m1}^n b_{nj} - \Gamma_{j1}^n b_{mn} \right) + \Gamma_{2j}^m \left(\frac{\partial b_{im}}{\partial \xi^1} - \Gamma_{i1}^n b_{nm} - \Gamma_{m1}^n b_{in} \right) = \\
& = b_{nj} \left(\frac{\partial \Gamma_{i1}^n}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \Gamma_{i2}^n}{\partial \xi^1} + \Gamma_{li}^m \Gamma_{m2}^n - \Gamma_{2i}^m \Gamma_{m1}^n \right) + \\
& + b_{in} \left(\frac{\partial \Gamma_{j1}^n}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \Gamma_{j2}^n}{\partial \xi^1} + \Gamma_{1j}^m \Gamma_{m2}^n - \Gamma_{2j}^m \Gamma_{m1}^n \right) = \\
& = R_{12i.}^{\dots n} b_{nj} + R_{12j.}^{\dots n} b_{in} = R_{12in} b_{.j}^n + R_{12jn} b_{.i}^n,
\end{aligned}$$

что и завершает доказательство. ■

Следствие П.3.1. В условиях теоремы П.3.1 имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\nabla_1 \nabla_2 b_{11} - \nabla_2 \nabla_1 b_{11} &= R(b_{.1}^2 + b_{.1}^2), \quad \nabla_1 \nabla_2 b_{22} - \nabla_2 \nabla_1 b_{22} = -R(b_{.2}^1 + b_{.2}^1), \\
\nabla_1 \nabla_2 b_{12} - \nabla_2 \nabla_1 b_{12} &= R(b_{.2}^2 - b_{.1}^1), \quad \nabla_1 \nabla_2 b_{21} - \nabla_2 \nabla_1 b_{21} = R(b_{.1}^1 - b_{.2}^2), \quad (\text{П.3.5})
\end{aligned}$$

где $R = R_{1212}$.

Доказательство вытекает из (П.3.2) при учете свойств компонент тензора Римана—Кристоффеля. ■

Из этих двух утверждений очевидным образом получаем следующие результаты.

Следствие П.3.2. Если в условиях теоремы П.3.1 тензор \mathbf{b} симметричный, то равенства (П.3.2) и (П.3.5) приобретают следующий вид:

$$\nabla_1 \nabla_2 b_{ij} - \nabla_2 \nabla_1 b_{ij} = R_{12in} b_j^n + R_{12jn} b_i^n; \quad (\text{П.3.6})$$

$$\begin{aligned}
\nabla_1 \nabla_2 b_{11} - \nabla_2 \nabla_1 b_{11} &= 2Rb_1^2, \quad \nabla_1 \nabla_2 b_{22} - \nabla_2 \nabla_1 b_{22} = -2Rb_2^1, \\
\nabla_1 \nabla_2 b_{12} - \nabla_2 \nabla_1 b_{12} &= R(b_2^2 - b_1^1). \quad \blacksquare \quad (\text{П.3.7})
\end{aligned}$$

Следствие П.3.3. Если в условиях теоремы П.3.1 тензор \mathbf{b} кососимметричный, то равенства (П.3.2) и (П.3.5) приобретают следующий вид:

$$\nabla_1 \nabla_2 b_{12} - \nabla_2 \nabla_1 b_{12} = 0. \blacksquare \quad (\text{П.3.8})$$

При построении формул (П.3.6)—(П.3.9) учтены следующие равенства для смешанных компонент симметричного

$$b_{i \cdot}^j = b_{\cdot i}^j = b_i^j$$

и кососимметричного тензоров

$$b_{\cdot 1}^1 = -b_{1 \cdot}^1 = b_{\cdot 2}^2 = -b_{2 \cdot}^2.$$

Отметим, что равенство (П.3.8) обосновано в пособии [6] аналогично доказательству теоремы П.3.1.

Библиографический список

1. *Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.* Линейная теория тонких оболочек. — Л.: Политехника, 1991. — 656 с.
2. *Власов В.З.* Общая теория оболочек. — М.;Л.: Гостехиздат, 1949. — 784 с.
3. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. — М.: Наука, 1966. — 635 с.
4. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. — М.: Наука, 1976. — 512 с.
5. *Огибалов П.М., Колтунов М.А.* Оболочки и пластины. — М.: Из-во МГУ, 1969. — 695 с.
6. *Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Общая теория упругих оболочек: Учебное пособие. — М.: Изд-во МАИ, 2018. — 112 с.
7. *Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Общие соотношения и вариационные принципы математической теории упругости: Учебное пособие. — М.: Изд-во МАИ, 2009. — 112 с.
8. *Локтева Н.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Плоские задачи теории упругости: Учебное пособие. — М.: Изд-во МАИ, 2011. — 84 с.
9. *Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Основы тензорного анализа и механика сплошной среды. — М.: Наука, 2000. — 214 с.
10. *Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В.* Теория упругости и пластичности. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 416 с.
11. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — 512 с.
12. Сборник задач по сопротивлению материалов с теорией и примерами: Учебное пособие для вузов / Под ред. А.Г. Горшкова, Д.В. Тарлаковского. — 2-е изд., перераб. и допол. — М.: Физматлит, 2003. — 632 с.
13. *Позняк Э.Г., Шикин Е.В.* Дифференциальная геометрия: первое знакомство. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 384 с.
14. *Вестяк А.В., Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Алгебра и аналитическая геометрия. Ч. 1. — М.: Изд-во МАИ, 2002. — 460 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. ПЛАСТИНЫ	4
1.1. Начально-краевые задачи для пластин	4
1.2. Уравнения движения пластины в перемещениях	9
1.3. Пластина типа Тимошенко	10
1.4. Пластина Кирхгофа	13
1.5. Уравнения совместности деформаций для пластин	16
1.6. Соотношения теории пластин в ортогональных координатах	17
Глава 2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК	21
2.1. Уравнения Муштари—Донелла	21
2.2. Уравнения технической теории для круговой цилиндрической оболочки	27
2.3. Круговая цилиндрическая оболочка открытого профиля под действием нормального давления	33
2.4. Пологие оболочки	38
2.5. Функция усилий для пологих оболочек	44
2.6. Пологие оболочки вращения	49
Глава 3. БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК	54
3.1. Безмоментное приближение	54
3.2. Понятие о краевом эффекте	57
3.3. Уравнения равновесия безмоментных оболочек вращения	59
3.4. Перемещения в безмоментных оболочках вращения	64
3.5. Представление решений уравнений безмоментной теории рядами Фурье	67
3.6. Осесимметричное деформирование безмоментных оболочек	70

Приложения	78
П.1. Соотношения теории пластин в прямоугольных декартовых координатах	78
П.2. Соотношения теории пластин в полярных координатах	80
П.3. Повторное ковариантное дифференцирование тензоров второго ранга на поверхности в трехмерном евклидовом пространстве	84
Библиографический список	88

Тем. план 2018, поз. 22

**Михайлова Елена Юрьевна
Тарлаковский Дмитрий Валентинович
Федотенков Григорий Валерьевич**

УПРУГИЕ ПЛАСТИНЫ И ПОЛОГИЕ ОБОЛОЧКИ

Редактор *Е.В. Дмитриева*
Компьютерная верстка *О.Г. Лавровой*

Сдано в набор 14.03.18. Подписано в печать 15.06.18.
Бумага писчая. Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,35. Уч.-изд. л. 5,75. Тираж 150 экз.
Зак. 889/568.

Издательство МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993
Типография Издательства МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993

