ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ
И ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА

А. М. Попов, В. Н. Сотников

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

УЧЕБНИК ДЛЯ ПРИКЛАДНОГО БАКАЛАВРИАТА

3-е издание, исправленное и дополненное

Под общей редакцией **А. М. Попова**

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям

Книга доступна в электронной библиотечной системе biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2015

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
П58

***Автор*:**

Попов Александр Михайлович — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и математических методов в экономике Института экономики и предпринимательства;

Сотников Валерий Николаевич — кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры математики и математических методов в экономике Института экономики и предпринимательства.

***Рецензенты*:**

Гатаулин А. М. — доктор экономических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии сельскохозяйственных наук;

Струнков С. П. — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института системных исследований Российской академиии наук.

Попов, А. М.

П58 Экономико-математические методы и модели : учебник для прикладного бакалавриата / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под общ. ред. А. М. Попова. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2015. — 345 с. — Серия : Бакалавр. Прикладной курс.

ISBN 978-5-9916-4440-2

Данный учебник является частью обучающего комплекса, в который также входят книги А. М. Попова и В. Н. Сотникова «Высшая математика для экономистов» и «Теория вероятностей и математическая статистика».

Издание состоит из трех разделов: «Экономико-математические методы», «Экономико-математические модели» и «Тесты». Книга содержит также справочный материал в виде приложений и список литературы для углубленного изучения отдельных тем. После каждой главы приводятся вопросы для самоконтроля, а также задачи для самостоятельного решения с ответами в конце книги.

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования четвертого поколения.

Для студентов бакалавриата, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям, а также магистрантов, аспирантов и преподавателей вузов.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-9916-4440-2

Оглавление

Предисловие

Учебник подготовлен в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) для бакалавров по дисциплинам математического и естественно-научного цикла.

Учебник может быть рекомендован для студентов и аспирантов экономических специальностей и направлений как часть обучающего комплекса по дисциплинам «Математика», «Методы моделирования и прогнозирования экономики», «Методы оптимальных решений», «Методы принятия управленческих решений», «Экономико-математическое моделирование и прогнозирование».

Учебник состоит из двух разделов, которые включают одиннадцать глав.

В первом разделе «Экономико-математические методы» рассматриваются элементы математического программирования и математической теории оптимального управления. Даются основные понятия математических игр, теории массового обслуживания, сетевого планирования и управления, теории нечетких множеств, изучаются численные методы решения задач.

Во втором разделе «Экономико-математические модели» раскрыты модели поведения потребителя, производственные модели, общие модели экономики и управления и модели управления запасами.

Главы 6, 7 ориентированы в основном на студентов для специальности «Прикладная информатика (в экономике)».

В конце каждой главы приводятся вопросы для самоконтроля, а также задачи для самостоятельного решения с ответами в конце книги. В заключительной части учебника приводятся тесты по курсу, которые составлены на основе рекомендаций Национального аккредитационного агентства в сфере образования.

Нумерация примеров, рисунков и таблиц произведена отдельно по главам учебника: первая цифра означает номер главы, вторая — номер примера, рисунка или таблицы в главе. Окончание примера отмечено значком ■. Для удобства работы примеры и пояснения выделены шрифтом.

Для углубленного изучения отдельных тем содержания книги приводится список литературы. В конце книги оформлен в виде приложений справочный материал по математическим формулам и физическим величинам.

Авторы считают приятным долгом поблагодарить рецензентов: доктора экономических наук, профессора, члена-корреспондента Российской академии сельскохозяйственных наук А. М. Гатаулина (кафедра экономической кибернетики Российского государственного аграрного университета — МСХА им. К. А. Тимирязева); доктора физико-математических наук, профессора С. П. Стрункова (Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук), взявших на себя нелегкий труд рецензирования рукописи книги.

В третьем издании каждая глава оформлена компетенциями, которым должно удовлетворять содержание глав. Для более качественной оценки остаточных знаний увеличено количество тестов. Учебник дополнен новой главой 11 «Модели управления запасами». Переработана глава 4. Расширен учебный материал глав 1, 2, позволяющий более понятно изложить содержание этих глав. Исправлены замеченные опечатки и неточности.

В совокупности с другими дисциплинами базовой части математического цикла ФГОС ВО дисциплина «Экономико-математические методы и модели» обеспечивает инструментарий формирования профессиональных компетенций бакалавра.

Изучив дисциплину «Экономико-математические методы и модели», бакалавр должен:

знать

• основные понятия и инструменты математического моделирования;

• основные математические модели экономических процессов;

• схемы построения экономических процессов;

уметь

• использовать типовые схемы решения экономических задач;

• пользоваться математическим языком и математической символикой при построении экономических моделей;

• решать задачи экономического и управленческого характера, использовать различные методы при анализе конкретных ситуаций;

владеть

• математическими, статистическими и количественными методами решения типовых экономических задач;

• методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.

Введение

Современная математика характеризуется интенсивным использованием ее в различных науках. Во многом этот процесс происходит благодаря разделению последней на ряд самостоятельных областей. Математика стала для многих отраслей знаний не только инструментом количественного расчета, но также и методом точного исследования и средством формулировки задач исследования.

Экономика как наука об объективных причинах функционирования и развития общества пользуется разнообразными количественными характеристиками и математическими методами. В исследованиях современной экономики применяются различные оптимизационные методы, которые опираются на математическое программирование, теорию игр, сетевое планирование, теорию массового обслуживания и ряд других прикладных наук.

Современная экономическая теория включает как естественный, необходимый элемент математические модели и методы. Использование математики в экономике позволяет, во-первых, выделить и формально описать наиболее важные, существенные связи. Во-вторых, из четко сформулированных исходных данных и соотношений можно сделать выводы, адекватные изучаемому объекту в той же мере, что и выбранные предпосылки. В-третьих, методы математики позволяют индуктивным путем получать новые знания об объекте: оценить форму и параметры зависимостей его переменных, в наибольшей степени соответствующие имеющимся наблюдениям. В-четвертых, использование языка математики позволяет точно и компактно излагать положения экономической теории, формулировать ее понятия.

Математические методы и модели использовались еще в XVIII в. Основными работами в этот период явились «Экономическая таблица» (Ф. Кене), макроэкономическая модель экономики (А. Смит), модель международной торговли (Д. Риккардо).

В XIX в. большой вклад в моделирование рыночной экономики внесли математики Л. Вальрас, О. Курно, В. Парето и др. В XX в. математические методы моделирования применялись очень широко, с их использованием связаны практически все работы, удостоенные Нобелевской премии по экономике (Р. Солоу, В. Леонтьев, Л. Канторович и др.).

В России в начале XX в. большой вклад в математическое моделирование экономики внесли В. К. Дмитриев и Е. Е. Слуцкий. В 80-е гг. прошлого столетия экономико-математическое направление было связано в основном с попытками формально описать «систему оптимального функционирования социалистической экономики» (Н. П. Федоренко, С. С. Шаталин). В этот период были построены многоуровневые системы моделей народнохозяйственного планирования, оптимизационные модели областей и предприятий.

Математическая модель экономического объекта — это условный образ объекта, построенный для упрощения его исследования. Предполагается, что изучение модели дает новые решения в той или иной ситуации.

Можно выделить три этапа проведения математического моделирования в экономике.

1. Постановка цели и задачи исследования, качественное описание объекта в виде экономической модели.

2. Формулировка математической модели изучаемого объекта, выбор методов исследования. Исследование модели с помощью этих методов.

3. Обработка и анализ полученных результатов.

Математические модели, используемые в экономике, можно подразделить на классы по ряду признаков, относящихся к особенностям моделируемого объекта, цели моделирования и используемого инструментария: модели макро- и микроэкономические, теоретические и прикладные, оптимизационные и равновесные, статические и динамические.

Раздел I

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Глава 1
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

После изучения главы 1 бакалавр должен:

знать

• основные понятия, категории и инструменты математического программирования;

• содержания графического и аналитического методов решения задач программирования;

• условия применения разнообразных видов программирования;

уметь

• решать задачи экономического и управленческого характера, использовать различные методы при анализе конкретных ситуаций;

владеть

• понятийным аппаратом в области моделирования в экономике.

1.1. Постановка задачи линейного программирования

Математическое программирование изучает задачи поиска экстремума функции нескольких переменных при наличии ограничений, наложенных на эти переменные. Сущность экстремальных задач состоит в том, чтобы из множества допустимых наборов значений выбрать оптимальный с данной точки зрения.

Если функция нескольких переменных и все ограничения являются *линейными* относительно этих переменных, то математическое программирование называется *линейным*.

Математическая модель задачи линейного программирования (ЗЛП) включает следующее.

1. Совокупность переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, каждый набор значений которых называется *планом* ЗЛП.

Очевидно, что план ЗЛП можно рассматривать как n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

2. Целевую функцию

$$Q(x_1, x_2, ..., x_n) = Q(x) \to \text{extr},$$

которая позволяет выбирать оптимальный, т.е. наилучший план из множества возможных планов ЗЛП.

Наилучший план должен давать целевой функции экстремальное значение. В экономике целевая функция может представлять собой прибыль, издержки производства, объем реализации и т.п.

3. Систему ограничений на план ЗЛП, представленную в виде уравнений или неравенств. В экономике эти ограничения следуют, например, из имеющихся ресурсов, потенциальных возможностей оборудования и т.д.

Система ограничений дополняется требованием неотрицательности значений всех переменных.

Решения системы ограничений образуют *область допустимых решений (планов) ЗЛП*.

Допустимый план x^*, дающий целевой функции экстремальное (заданное в виде максимума или минимума) значение, называется *оптимальным планом* и является *решением ЗЛП*.

Выше указывалось, что в ЗЛП как целевая функция, так и ограничения являются линейными относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Стандартной формой ЗЛП называют ее следующую математическую форму:

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leqslant b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leqslant b_2;\\
&...\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leqslant b_m;\\
&x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ ...\ x_n \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Если в равенстве (1.1) нужно искать не максимум, а минимум целевой функции $Q(x)$, то для записи ЗЛП в стандартной форме достаточно умножить это равенство на (-1) и искать $\max\,(-Q(x))$.

Действительно, план ЗЛП, придающий функции $(-Q(x))$ максимальное значение, дает $Q(x)$ минимальное значение. Если какие-то неравенства в системе ограничений имеют знак $\geqslant$, то их также нужно умножить на (-1), чтобы получить знак $\leqslant$.

В свернутом виде с использованием символа суммирования стандартная форма ЗЛП имеет вид

$$Q = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i,\ i = 1, ..., m;$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1, ..., n.$$

Во многих случаях удобнее оказывается форма записи ЗЛП, в которой система ограничений представляет собой систему уравнений. Тогда можно использовать методы решения систем линейных алгебраических уравнений, известные из линейной алгебры.

Такую форму ЗЛП называют *канонической формой*. Она имеет вид

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2;\\
&\qquad\qquad ...\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m;\\
&x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0; ...\ x_n \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Чтобы перейти от стандартной формы ЗЛП к канонической, по количеству неравенств m вводят m дополнительных неотрицательных переменных

$$x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}.$$

Действительно, поскольку левые части неравенств из системы ограничений в стандартной форме (1.2) не больше правых, то добавление к левой части неравенства неотрицательной переменной позволяет перевести неравенство в уравнение.

Заметим, что количество введенных дополнительных переменных должно соответствовать количеству неравенств в системе ограничений.

Тогда ЗЛП, переведенная из стандартной формы в каноническую, принимает вид

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + ...+ 0x_{n+m} \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2;\\
&\qquad\qquad ...\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m;\\
&x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0; ...\ x_n \geqslant 0; x_{n+1} \geqslant 0; ...\ x_{n+m} \geqslant 0,
\end{aligned}$$

или в свернутой форме с использованием символов суммирования

$$Q = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} 0 \cdot x_{n+1} \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i,\ i = 1, ..., m;$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, ..., n + m.$$

В качестве примеров экономических задач, сводящихся к ЗЛП, рассмотрим следующие задачи.

Пример 1.1. Задача планирования производства. Пусть предприятие может производить n различных изделий (продуктов). Пронумеруем эти продукты от 1 до n. Количество выпускаемого j-го продукта в плановую единицу времени обозначим x_j.

Тогда вектор количества продуктов, выпускаемых предприятием,

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ — план производства.}$$

Ясно, что все x_j должны быть неотрицательными.

Пусть для выпуска изделий необходимы m видов различных ресурсов (сырье, электроэнергия, рабочая сила и т.п.). Пронумеруем их от 1 до m. Предельное количество i-го ресурса, находящегося в распоряжении предприятия, обозначим b_i.

Пусть a_{ij} — количество i-го ресурса, расходуемое на производство единицы j-го продукта. Прибыль, которую предприятие получит при продаже единицы j-го продукта, обозначим c_j.

Принятые обозначения для наглядности сведены в табл. 1.

Тогда затраты ресурса i-го вида при выполнении плана производства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n .$$

Таблица 1

Номер ресурса	Номер продукта	1	2	...	n
	Выпускаемое количество продукта x_j	x_1	x_2	...	x_n
	Предельное количество (запас) ресурса b_i	Количество ресурса на изготовление единицы продукта a_{ij}			
1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...
m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Естественно, эти затраты не должны превышать предельное количество i-го ресурса b_i.

Прибыль предприятия, получаемая при выполнении плана

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

равна

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n .$$

Основная задача планирования — выбор плана x, обеспечивающего получение максимальной прибыли при имеющихся ресурсах.

Математически это выглядит так:

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leqslant b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leqslant b_2;\\
&\qquad\qquad ...\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leqslant b_m;\\
&x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0; ... x_n \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, задача планирования производства сводится к ЗЛП в ее стандартной форме. ■

Пример 1.2. Задача диеты. Пусть необходимо определить рацион откорма скота. Будем считать, что в рацион должны входить m биологически необходимых питательных веществ (белки, жиры, углеводы, витамины и т.д.).

Известно, что i-го питательного вещества в дневном рационе должно быть не менее b_i единиц.

Предположим, что имеется n различных кормов, из которых можно составлять дневной рацион. Содержание i-го питательного вещества в j-м виде корма обозначим a_{ij} (считаем, что эти данные научно обоснованы). Цену единицы j-го вида корма примем равной c_j.

Задача заключается в том, чтобы выбрать наиболее дешевый пищевой рацион

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

где x_j – дневное количество j-го корма; $j = 1, 2, 3, ..., n$, но так, чтобы животные получали достаточное количество всех питательных веществ.

Математическая формулировка задачи:

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geqslant b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geqslant b_2;\\
&\qquad\qquad ...\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geqslant b_m;\\
&x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0; ... x_n \geqslant 0.
\end{aligned}$$ ■

1.2. Графический метод решения задач линейного программирования

Этот метод может применяться в случае двух переменных x_1 и x_2. Пусть математическая формулировка ЗЛП имеет вид

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max\ (\min) \qquad (1.3)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2\ (\geqslant \text{ или } \leqslant)\ b_1; \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2\ (\geqslant \text{ или } \leqslant)\ b_2; \\ & \qquad\qquad \ldots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2\ (\geqslant \text{ или } \leqslant)\ b_m; \\ & x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \qquad (1.4)$$

Графический метод решения ЗЛП состоит в следующем.

1. На координатной плоскости x_1x_2 строится множество X (рис. 1.1), которое образует *область допустимых решений* (или область допустимых планов) ЗЛП.

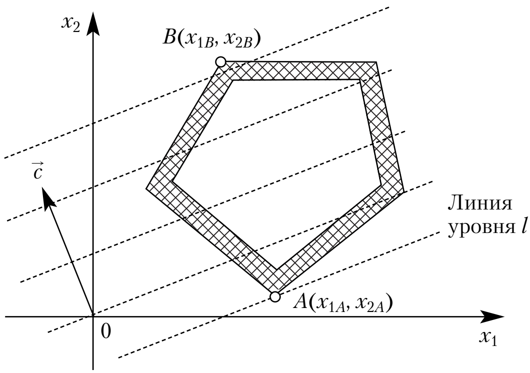


Рис. 1.1. **Графический метод решения ЗЛП**

Эта область представляет собой пересечение всех полуплоскостей, которые по отдельности являются решениями неравенств, входящих в систему ограничений (1.4).

Если $X = \varnothing$, то ЗЛП не имеет решений.

Заметим, что областью решений линейного неравенства $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqslant b_i$ является одна из двух полуплоскостей, на которые прямая $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, соответствующая данному неравенству, делит всю координатную плоскость.

Для того чтобы определить, какая из двух координатных полуплоскостей является областью решений, достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство.

Если оно удовлетворяется, то областью решений является полуплоскость, содержащая данную точку; в противном случае областью решений является полуплоскость, не содержащая данную точку.

2. Строится вектор градиента целевой функции (1.3)

$$\vec{c} = \nabla Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}, \frac{\partial Q}{\partial x_2}\right) = (c_1, c_2)$$

и ее линия уровня l — прямая, перпендикулярная вектору градиента и проходящая, например, через начало координат.

3. Строится семейство линий уровня целевой функции, представляющих собой прямые, параллельные l.

Очевидно, что значение Q постоянно на линии уровня и возрастает при перемещении линии уровня в направлении градиента $\boldsymbol{c}$ целевой функции Q.

Если при таком движении точка A (см. рис. 1.1) является первой единственной точкой встречи линии уровня с областью допустимых решений X, то она будет точкой решения ЗЛП при $Q \to \min$, а если B — последняя общая точка при таком перемещении, то это точка решения ЗЛП при $Q \to \max$.

Данное обстоятельство запишем в виде

$$x^* = (x_{1A}, x_{2A}), \text{ если } Q \to \min;$$
$$x^* = (x_{1B}, x_{2B}), \text{ если } Q \to \max.$$

Если при таком перемещении окажется, что линия уровня совпадет с одной из сторон области допустимых решений, то ЗЛП имеет *бесконечное* множество решений.

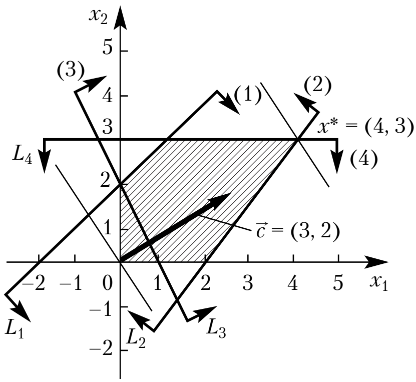
Если же вдруг окажется, что первой (последней) точки не существует, то задача отыскания min (max) целевой функции Q является *неразрешимой*.

Пример 1.3. Решить ЗЛП

$$Q(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant -2, & (1) \\ 3x_1 - 2x_2 \leqslant 6, & (2) \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 2, & (3) \\ x_2 \leqslant 3, & (4) \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$



Решение. Строим область допустимых решений задачи. Для этого пронумеруем ограничения задачи.

В прямоугольной декартовой системе координат, изображенной на рисунке, строим прямую $x_1 - x_2 = -2$ (L_1), соответствующую ограничению (1). Находим, какая из двух полуплоскостей, на которые эта прямая делит всю координатную плоскость, является областью решений неравенства (1).

Для этого достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство (1).

Так как прямая L_1 не проходит через начало координат, подставляем координаты точки O (0, 0) в первое ограничение $1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \geqslant -2$ и получаем верное неравенство $0 \geqslant -2$.

Следовательно, точка O лежит в полуплоскости решений.

Таким образом, стрелки на концах прямой L_1 должны быть направлены в полуплоскость, содержащую точку O.

Аналогично строим прямые $3x_1 - 2x_2 = 6$ (L_2), $2x_1 + x_2 = 2$ (L_3), $x_2 = 3$ (L_4) и области решений ограничений (2), (3) и (4). Находим общую часть полуплоскостей решений, учитывая при этом условия неотрицательности переменных; полученную область допустимых решений отметим на рисунке штриховкой.

По коэффициентам целевой функции строим вектор градиента целевой функции $\vec{c} = (3, 2)$ и одну из линий уровня, перпендикулярную градиенту и проходящую, например, через начало координат.

Так как решается задача на отыскание максимума целевой функции, то линию уровня параллельно перемещаем в направлении градиента до точки выхода ее из области допустимых решений.

Эта точка x^* является точкой пересечения прямых, ограничивающих область допустимых решений и соответствующих неравенствам (2) и (4). Поэтому ее координаты можно найти, решая систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 6 = 0, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Получаем $x^* = (4, 3)$. Вычисляем $Q(x^*) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18$.

Ответ: $\max Q(x) = 18$ при $x^* = (4, 3)$.

Легко убедиться, что любая другая точка из области допустимых решений ЗЛП дает значение целевой функции Q меньшее, чем полученное значение. ■

Пример 1.4. Решить ЗЛП

$$Q(x) = 4x_1 + 2x_2 \to \min,$$

при ограничениях

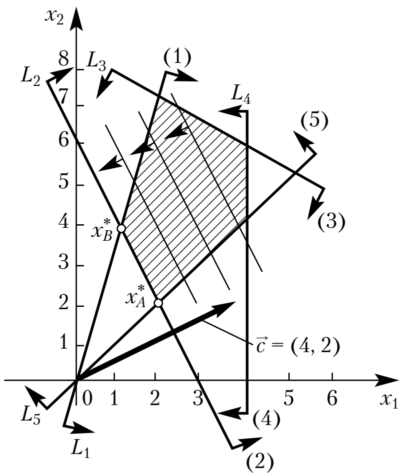
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geqslant 0, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 6, & (2) \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 16, & (3) \\ x_1 \leqslant 4, & (4) \\ x_1 - x_2 \leqslant 0, & (5) \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Строим область допустимых решений, градиент целевой функции $\vec{c} = (4, 2)$ и одну из линий уровня, перпендикулярную градиенту и имеющую общие точки с этой областью.

Перемещаем линию уровня в направлении, противоположном направлению градиента $\vec{c}$, так как решается задача на отыскание минимума функции.

Градиент $\vec{c} = (4, 2)$ и нормаль $\vec{n} = (2, 1)$ граничной прямой L_2, в направлении которой перемещаются линии уровня, лежат на одной прямой, так как их координаты пропорциональны $4 : 2 = 2 : 1$.

Следовательно, линия уровня целевой функции параллельна граничной прямой L_2 области допустимых решений и выходит из этой области при движении против градиента (т.е. в направлении



уменьшения целевой функции) через две угловые точки этой области x_A^* и x_B^*.

Таким образом, задача имеет бесконечное множество решений, являющихся точками отрезка $[x_A^*, x_B^*]$.

Эти точки $x_A^* = L_2 \cap L_5$, $x_B^* = L_1 \cap L_2$ находим, решая соответствующие системы уравнений

$$+\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, & (L_2) \\ x_1 - x_2 = 0 & (L_5) \end{cases} \quad + \begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0, & (L_1) \\ 2x_1 + x_2 = 6 & (L_2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 3x_1 = 6; & 6x_1 = 6; \\ x_{1A}^* = 2,\ x_{2A}^* = 2; & x_{1B}^* = 1,\ x_{2B}^* = 4; \\ x_A^* = (2, 2); & x_{1B}^* = (1, 4). \end{array}$$

Вычисляем $Q(x_A^*) = Q(x_B^*) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 12$.

Ответ: $\min Q(x) = 12$ при $x^* = (1 - t)x_A^* + tx_B^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. ■

Пример 1.5. Решить ЗЛП

$$Q(x) = 3x_1 + 7x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \geqslant 0, & (1) \\ x_1 + x_2 \geqslant 5, & (2) \\ x_2 \geqslant 3, & (3) \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 0, & (4) \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Строим область допустимых решений, вектор градиента целевой функции $\vec{c} = (3, 7)$ и одну из линий уровня.