М.В. Яшина, А.С. Зинченко, А.В. Марк

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: ЗАДАЧИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие



Москва 2026

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

М.В. Яшина, А.С. Зинченко, А.В. Марк

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: ЗАДАЧИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Рекомендовано Редакционно-издательским советом
Московского авиационного института
(национального исследовательского университета)
в качестве учебного пособия

Москва
Издательство «Перо»
2026

УДК 517.91
ББК 22.161.617
Я96

Авторский коллектив:

М.В. Яшина, А.С. Зинченко, А.В. Марк

Яшина Марина Викторовна, д.т.н.
Профессор Центра математики и механики МАИ;
Заведующий кафедрой «Инженерия и математика прикладных систем искусственного интеллекта» МАДИ

Зинченко Александр Сергеевич, к.э.н.,
Доцент кафедры «Математика» Института общеинженерной подготовки МАИ

Марк Александр Викторович, к.ф.-м.н.,
Доцент «Инженерия и математика прикладных систем искусственного интеллекта» МАДИ

Рецензенты:

Сергей Петрович Дегтярев, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры «Интеллектуальный анализ данных», Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ)».

Кафедра «Инженерия и математика прикладных систем искусственного интеллекта» института транспортных технологий и логистики федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)».

М.В. Яшина, А.С. Зинченко, А.В. Марк
Я96 **Обыкновенные дифференциальные уравнения: задачи и приложения**/ М.В. Яшина [и др.]. — М.: Издательство «Перо», 2026. — 78 с.

ISBN 978-5-00270-741-6

Учебное пособие раскрывает основные понятия и методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Также в пособии представлены методы исследования систем дифференциальных уравнений, имеющие важное значение при математическом моделировании характеристик динамических объектов, в том числе, транспортных потоков. Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 прикладная математика и информатика, 01.03.04 прикладная математика; а также 09.03.02 информационные системы и технологии, 09.03.03 прикладная информатика, 09.03.04 программная инженерия, изучающих дисциплину «Математический анализ».

ISBN 978-5-00270-741-6

© М.В. Яшина, А.С. Зинченко, А.В. Марк, 2026
© ФГАОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА 4

1.1 Уравнения с разделяющимися переменными 5

1.2 Однородные уравнения 10

1.3 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли и Рикатти 15

1.4 Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель 21

1.5 Уравнения, не разрешенные относительно производной. Особые решения 27

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ 32

2.1 Методы понижения порядка 32

2.2 Линейные дифференциальные уравнения высших порядков 43

3 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 57

3.1 Метод исключения 58

3.2 Метод Эйлера (векторно-матричный) 63

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК..... 78

1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В математике и физике часто встречаются задачи, при решения которых составляются соотношения и требуется решить уравнение, содержащее не только неизвестную функцию и ее аргумент, но и производную неизвестной функции. Со времен И. Ньютона (1642 - 1727 гг.) методы дифференциального и интегрального исчисления достигли такого уровня, что созданы компьютерные программы и нейросети (инстументы искусственного интеллекта) для быстрого получения результата. Но для того, чтобы оценить выдаваемый машиной результат и правильно его использовать (или отбросить, как ошибочный), нужно представлять основные подходы к решению дифференциальных уравнений.

Соотношения вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

в котором x независимая переменная, $y = y(x)$ неизвестная функция, а y', y'', $y^{(n-1)}$, y^n ее производные называется **дифференциальным уравнением.**

Порядок дифференциального уравнения определяется степенью входящей в него старшей производной y^n.

Функция $y = \varphi(x)$ называется **решением дифференциального уравнения** (1) на некотором интервале (a, b), если при ее подстановке в это уравнение получается тождество, справедливое для всех x из этого интервала. График решения дифференциального уравнения называетея **интегральной кривой.** Начальными условиями называются условия, определяющее значения неизвестной функции $y(x)$ и ее производных до $n-1$ порядка:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{2}$$

Практика показывает, что дифференциальные уравнения имеют множества решений. Например функция $y = C\cos x$ будет решением дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ при любом значении постоянной C. Поэтому различают общее и частное решение.

Общим решением дифференциального уравнения (1) называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_n)$ зависящая от x и n произвольных постоянных , которая удовлетворяет следующим условиям:

1) при любых допустимых значении постоянных C_i, $i = 1, 2, \ldots n$ она удовлетворяет уравнению (1);

2) каково бы ни было начальное условие (2) можно найти единственный

набор значений $C_{01}, C_{02}, \ldots C_{0n}$ такой, что функция будет удовлетворять этим условиям.

Частное решение дифференциального уравнения — это решение, которое получается из общего решения при определённых значениях произвольных постоянных.

Соотношения $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots C_n)$, задающее общее решение в неявном виде, называется общим интегралом уравнения (1).

Задача Коши решения дифференциального уравнения состоит в том, чтобы найти частное решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям (2).

1.1 Уравнения с разделяющимися переменными

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0, \tag{3}$$

где x — независимая переменная, $y = y(x)$ — неизвестная искомая функция, F — заданная функция трех переменных. В первую очередь мы будем рассматривать дифференциальные уравнения первого порядка, которые можно записать в виде

$$y' = f(x, y). \tag{4}$$

Уравнение (4) называется уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной. Для него справедлива следующая теорема.

Пусть в уравнении (4) функция $f(x, y)$ удовлетворяет двум условиям:

1. $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D плоскости xOy;

2. ее частная производная f'_y в области D ограничена.

Тогда для через любую точку $M_0(x_0, y_0) \in D$ проходит единственная интегральная кривая $y = \varphi(x)$.

Заметим, что уравнение (4) можно записать еще в двух формах:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \; x'_y(y) = \frac{1}{f(x, y)}$$

Рассмотрение дифференциальных уравнений первого порядка начнем с простейшего случая — уравнения с разделяющимися переменными.

1. Уравнениями с разделяющимися переменными называются уравнения первого порядка вида

$$y'(x) = f(x)g(y) \tag{5}$$

или

$$M(x)N(y)dx = P(x)Q(y)dy \tag{6}$$

Учитывая, что $y'(x) = dy/dx$, умножим обе части (5) на dx, а потом разделим на $g(y)$, будем иметь

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx,$$

уравнения вида (6).

Для решения уравнения уравнения вида (6) умножим или разделим его обе части на такое выражение, чтобы в одну часть входило только от x, а в другую только y:

$$M(x)N(y)dx = P(x)Q(y)dy \mid : N(y)P(x)$$

$$\frac{M(x)N(y)}{N(y)P(x)}dx = \frac{P(x)Q(y)}{N(y)P(x)}dy$$

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx = \frac{Q(y)}{N(y)}dy$$

а затем проинтегрируем обе части, т.е.

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx = \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy + C,\ C = \text{const}$$

Мы получили общий интеграл уравнения (6). Если требуется найти все решения этого уравнения, то нужно проверить будут решениями функции вида $y = c_0$ и $x = c_1$, которые есть корни уравнений $N(y) = 0$, $P(x) = 0$. Если $y = c_0$ и $x = c_1$ не входят в общее решение, то они будут особыми решениями.

П р и м е р 1. Найти все решения уравнения

$$xydx + (x+1)dy = 0 \tag{7}$$

Имеем

$$xydx = -(x+1)dy$$

Поделим обе части на $(x+1)y$:

$$\frac{x}{x+1}dx = -\frac{1}{y}dy = 0$$

и проинтегрируем:

$$\int \frac{x}{x+1}dx = -\int \frac{1}{y}dy = 0,\ x - \ln(x+1) = -\ln(y) + C$$

При делении на $(x+1)y$ могли быть потеряны решения $y = 0$ и $x = -1$. Чтобы проверить будет ли $y = 0$ решением исходного уравнения, перепишем его, считая $y = y(x)$ и $dy = y'(x)dx$:

$$xy(x)dx + (x+1)y'(x)dx = 0$$

и сократим на dx:

$$xy(x) + (x+1)y'(x) = 0$$

Так как $y = 0$ обращает последнее уравнение в тождество, то оно будет решение (7).

Проверим теперь будет ли $x = -1$ решением исходного уравнения (7). Перепишем это уравнение считая $x = x(y)$, $dx = x'(y)dy$ и после сокращения на dy имеем

$$x(y)x'(y)y + x + 1 = 0$$

Функция $x = -1$ тождественно удовлетворяет уравнению, поэтому она будет также решением исходного уравнения (7).

З а м е ч а н и е. Если бы уравнение (7) имело бы вид

$$xy + (x+1)\frac{dy}{dx} = 0,$$

то $y = 0$ также было бы решением, а $x = -1$ нет, т.к с учетом того, что

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

в правой части возникает неопределенность $0/0$.

2. Уравнения вида $y' = f(ax + by + c)$, $b \neq 0$ сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными подстановкой $z = ax + by + c$. В самом деле $y = (z - ax - c)/b$, $y' = z'/b - a/b$, тогда уравение принимает вид (7):

$$\frac{z'}{b} = f(z) + \frac{a}{b}$$

П р и м е р 2. Найти все решения уравнения

$$y' = \sin(2y - 2x) + 1 \tag{8}$$

Обозначим $z = 2y - 2x$, тогда $y = \frac{1}{2}z + x$, $y' = \frac{1}{2}z' + 1$. Тогда

$$\frac{1}{2}z' + 1 = \sin z + 1, \ \frac{dz}{dx} = 2\sin z$$

$$dz = 2\sin z dx$$

Поделим обе части на $\sin z$

$$\frac{dz}{\sin z} = 2dx$$

и проинтегрируем

$$\int \frac{dz}{\sin z} = 2\int dx$$

Так как

$$\int \frac{dz}{\sin z} = \int \frac{\sin z\, dz}{\sin^2 z} = \int \frac{\sin z\, dz}{1-\cos^2 z} = -\int \frac{d\cos z}{1-\cos^2 z} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos z}{1-\cos z}\right|,$$

$$\int dx = x + C,$$

то

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos z}{1-\cos z}\right| = 2x + C$$

С учетом того, что $z = 2y - 2x$, будем иметь общий интеграл уравнения (8):

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos(2y-2x)}{1-\cos(2y-2x)}\right| = 2x + C$$

Проверим, будут ли решениями(8) корни уравнения $\sin z = 0$, т.е. $z = \pi k$. Тогда $y = \frac{1}{2}\pi k + x$. При подстановке этого выражения в (8), убеждаемся, что оно также будет решением.

З а д а н и е 1. Найти все решения уравнения:

1. $6x\,dx - 6y\,dy = 2x^2y\,dy - 3xy^2\,dx$
2. $y'\sin^2 x = y\ln y$
3. $2x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\,dy = 0$
4. $y(4+e^x)\,dy - e^x\,dx = 0$
5. $(2x-y)\,dx + (4x-2y+3)\,dy = 0$
6. $e^x(1+y') = 1$
7. $y' - xy^2 = 2xy$
8. $y'y\cos x = -(1-y)\sin x$
9. $x\sqrt{3+y^3}\,dx + y\sqrt{2+x^2}\,dy = 0$
10. $(2x+y+2)\,dx = (4x+2y+9)\,dy$
11. $y'\sqrt{1-x^4} + x(1+e^y) = 0$
12. $xy(1+x^2)y' = 1+y^2$
13. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$
14. $\sqrt{4-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$
15. $3y^2y' + 16x = 2xy^3$
16. $(1+2y)x\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$
17. $y'\tan x - y = 1$
18. $y(4+e^x)\,dy - e^x\,dx = 0$
19. $y' = (x+y)^2$
20. $y\ln y + xy' = 0$
21. $y' = \tan(y-x)$
22. $2x^2yy' + y^2 = 2$
23. $y'\cos x + y(1+y)\sin x = 0$
24. $y\arctan x = (x^2+1)(\ln^2 y + 1)y'$
25. $y'\tan^2 x = \dfrac{1}{\tan y}$
26. $y'y\cos x = (1-y)\sin x$
27. $y' = \sqrt{4x+2y-1}$
28. $xy^2\,dx = \cos^2 x(\ln^2 y - 1)\,dy$
29. $2x\,dx - 2y\,dy = x^2y\,dy - 2xy^2\,dx$
30. $ye^x\,dy + xe^{y^2}\,dx = 0$

1.2 Однородные уравнения

Функция $f(x,y)$ называется однородной степени n, если для произвольного $t>0$ выполнено $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$

1. Однородные уравнения могут быть записаны в виде:

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{9}$$

или

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \tag{10}$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ однородные функции одинаковой степени n.

С помощью подстановки $y=u(x)x$ такие уравнения сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными. Имеем

$$y=u(x)x,\ \frac{dy}{dx}=x\frac{du(x)}{dx}+u(x),\ dy=xdu+udx \tag{11}$$

Подставим эти выражения в (9):

$$x\frac{du}{dx}+u=f(u),\ \frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x} \tag{12}$$

и в (10):

$$M(x,xu)dx+N(x,ux)(xdu+udx)=0,$$

с учетом однородности функцций $M(x,y$ и $N(x,y)$:

$$x^nM(1,u)dx+x^nN(1,u)(xdu+udx)=0,$$

$$\widehat{M}(u)dx+\widehat{N}(u)xdu+u\widehat{N}(u)dx=0,\ \widehat{M}(u)=M(1,u),\ \widehat{N}(u)=N(1,u)$$

$$\left(\widehat{M}(u)+u\widehat{N}(u)\right)dx+x\widehat{N}(u)du=0 \tag{13}$$

После решений уравнений с разделяющимися переменными (12) и (13) необходимо сделать обратную замену $u(x)=y(x)/x$.

П р и м е р 1. Решить задачу Коши:

$$(y^2-2xy)dx+x^2dy=0,\ y(1)=2$$

Найдем сначала общее решение дифференциального уравнения. Имеем $M=y^2-2xy$, $N=x^2$. Так как $M(tx,ty)=(ty)^2-2txty=t^2(y^2-2xy)$, $N(tx,ty)=t^2x^2$ однородные функции второй степени, то перед нами однородное дифференциальное уравнение. Сделаем замену $y(x)=u(x)x$, $dy=xdu+udx$ и подставим в уравнение:

$$(u^2x^2-2x^2u)dx+x^2(xdu+udx)=0$$

После сокращения на x^2 имеем уравнение с разделяющимися переменными:

$$(u^2 - 2u)dx + xdu + udx = 0$$

$$(u^2 - u)dx = -xdu$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{du}{u^2 - 1},$$

Проинтегрируем обе части уравения:

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{du}{u^2 - 1},$$

$$\ln x = \ln u - \ln(u - 1) + C$$

Осуществим теперь обратную замену $u(x) = y(x)/x$ и получим общий интеграл исходного уравнения:

$$\ln x = \ln \frac{y}{x} - \ln\left(\frac{y}{x} - 1\right) + C$$

Для нахождения частного решения, удовлетворяющего начальному условию $y(1) = 2$, положим в последнем выражении $x = 1$, а $y = 2$ и найдем постоянную интегрирования C:

$$\ln 1 = \ln 2 - \ln 1 + C,\ C = -\ln 2$$

Таким образом имеем решение задачи Коши:

$$\ln x = \ln \frac{y}{x} - \ln\left(\frac{y}{x} - 1\right) - \ln 2$$

2. Уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \tag{14}$$

сводятся к однородным путем замены переменных: $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, где α и β определяется из системы уравнений:

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0,\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$$

Т.е. в результате замены переменных начало координат переносится в точку пересечения прямых $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ и $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$. Тогда $dy = dv$, $dx = du$ и уравнение (14) преобретает вид:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1(v/u)}{a_2 + b_2(v/u)}\right)$$

Если же прямые не пересекаются, то $a_2x+b_2y = k(a_1x+b_1y)$, уравнение (14) сводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $u = a_1x+b_1y$. Тогда

$$y' = \frac{u'}{b_1} - \frac{a_1}{b_1},\ \frac{u'}{b_1} = f\left(\frac{u+c_1}{ku+c_2}\right) + \frac{a_1}{b_1}$$

П р и м е р 2. Найти общее решение уравнения

$$y' = \left(\frac{y-x+1}{x+y+2}\right)$$

Заменим переменные по формулам $x = u+\alpha$, $y = v+\beta$, где α и β находятся из системы уравнений:

$$-\alpha+\beta+1=0,\ \alpha+\beta+2=0$$

Подставим решение этой системы $\alpha = -1/2$, $\beta = -3/2$ с учетом того, что $dx = du$, $dy = dv$, $y' = dv/du$ в исходное уравнение:

$$\frac{dv}{du} = \left(\frac{v-u}{v+u}\right)$$

Имеем однородное уравнение, решать его будем с помощью замены $v(u) = w(u)u$, $v' = uw' + w$:

$$uw' + w = \left(\frac{uw-u}{uw+u}\right)$$

$$uw' = -\left(\frac{w^2+1}{w+1}\right)$$

$$\frac{(w+1)dw}{w^2+1} = -\frac{du}{u}$$

Проинтегрируем обе части последнего выражения:

$$\int \frac{(w+1)dw}{w^2+1} = -\int \frac{du}{u}$$

и получим общее решение однородного уравнения:

$$-\ln||u = \frac{1}{2}\ln(w^2+1) + \arctan w + C,$$

и возвращаясь к старым переменным: $u = x-\alpha$, $w = v/u$, $v = y-\beta$ будем иметь общее решение исходного уравнения:

$$-\ln|x+1/2| = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{2y+3}{2x+1}\right)^2+1\right) + \arctan\frac{2y+3}{2x+1} + C$$

3. С помощью замены $y = z^m$ некоторые дифференциальные уравения сводятся к однородным, причем m заранее неизвестно. Чтобы его найти подставляем $y = z^m$ в уравнение и требуем чтобы оно было однородным, если это возможно. Если этого сделать нельзя, то уравнение не приводится к однородному этим способом.

Например уравнение $xyy' + y^2 = x^4$ с помощью указанной замены приводится к однородному следующим образом:

$$y = z^m,\ y' = mz^{m-1}z',\ mxz^{2m-1}z' + z^{2m} = x^4$$

Потребуем, чтобы степени z, x, xz были одинаковыми:

$$1 + (2m-1) = 2m = 4$$

Это возможно при $m = 2$. Исходное уравнение преобретает вид:

$$2xz^3z' + z^4 = x^4,\ z' = \frac{x^4 - z^4}{2xz^3}$$

Так как в числителе и знаменателе правой части стоят однородные функции четвертой степени, то полученное уравнение однородно.

З а д а н и е 2. Решить задачу Коши:

1. $(4x^2+y^4)dy = 2xydx,\ y(1)=2$
2. $2y+(x^2y+1)xy'=0,\ y(1)=1$
3. $(y+\sqrt{xy})dx = xdy,\ y(2)=1$
4. $xy' = 2(y+\sqrt{y^2-x^4}),$ $y(\sqrt{3})=5$
5. $(x-1)y'+3x+2y+3=0,$ $y(-2)=1$
6. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x},\ y(1)=1$
7. $y' = x+\frac{x^3}{y},\ y(1)=1$
8. $(y'+1)\ln\frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3},\ y(1)=2$
9. $xydx = (x^2-y^2)dy,\ y(1)=2$
10. $x^2y' = y^2+2xy,\ y(2)=1$
11. $(x+y+1)dx+(x-y+3)dy=0,$ $y(1)=1$
12. $y' = \frac{2x+y}{x-2y},\ y(1)=3$
13. $xy'-y = \sqrt{x^2-y^2}+y,\ y(2)=1$
14. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2,\ y(1)=1$
15. $(y+2)dx = (2x-y-4)dy,$ $y(0)=-1$
16. $y' = \frac{4x^2-y^2}{x^2},\ y(2)=1$
17. $y' = \frac{y+2}{x+1}+\tan\frac{y-2x}{x+1},\ y(0)=0$
18. $(x+2y)y'+2x+5y-1=0,$ $y(0)=1$
19. $y' = y^2-\frac{2}{x^2},\ y(1)=1$
20. $xy' = (x+y)\ln\frac{x+y}{x},\ y(2)=2$
21. $x^2y' = y^2+2xy,\ y(1)=1$
22. $ydx+(2x+1)xdy=0,\ y(\frac{1}{2})=1$
23. $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}-\frac{y}{x},\ y(1)=1$
24. $(xy+y^2)y' = y^2,\ y(0)=1$
25. $x^2y' = 2y^2-xy,\ y(1)=1$
26. $(x^3+y^3)y' = x^2y,\ y(0)=1$
27. $xy'-y = x\tan\frac{x}{y},\ y(\frac{\pi}{4})=1$
28. $xy' = y-xe^{y/x},\ y(1)=1$
29. $(2x+y+1)dx = (4x+2y-3)dy,$ $y(1)=1$
30. $2xy'+y = y^2\sqrt{x-(xy)^2},$ $y(1)=\frac{1}{4}$

1.3 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли и Рикатти

1. Дифференциальное уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{15}$$

называется линейным, если $Q(x) \equiv 0$ то линейным однородным. Решать такие уравнения можно методом вариации произвольной постоянной. Сначала решается соответствующее однородное уравнение $y' + P(x)y = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y,\ \frac{dy}{y} = -P(x)dx,\ y \neq 0$$

Посли интегрирования обоих частей:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx,\ \ln|y| = -\int P(x)dx + c,\ c \in (-\infty, \infty)$$

Положим $c = \ln C_0$, $C_0 > 0$ (это возможно т.к. область значения логарифма $(-\infty, \infty)$) и пропотенциируем обе части:

$$|y| = Ce^{-\int P(x)dx},\ y = \pm C_0 e^{-\int P(x)dx}$$

Так как при $C_0 = 0$ $y = 0$ будет решением однородного уравнинии, а также $\pm C_0$ принимает любые действительные значения, то общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx},\ C = \pm C_0,\ C \in (-\infty, \infty)$$

Решение не однородного уравнения будем искать, положив вместо $C = C(x)$, т.е.

$$\widehat{y} = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

Подставим это выражение в (15):

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)e^{-\int P(x)dx}P(x) + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

откуда

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c_0$$

Тогда имеем решение линейного дифференциального уравнения (15):

$$y = c_0 e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

П р и м е р 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} + y\tan x = \cot x \tag{16}$$

Перед нами линейное дифференциальное уравнени 1-го порядка. Решаем сначала соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} + y\tan x = 0,\ \frac{dy}{y} = -\tan x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \tan x dx,\ \ln|y| = \ln\cos x + c$$

Положим $c = \ln C_0$ и пропотенциируем обе части последнего равенства:

$$|y| = C_0\cos x,\ y = \pm C_0\cos x,\ y = C\cos x,\ C = \pm C_0$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y = C(x)\cos x \tag{17}$$

Тогда

$$y' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x \tag{18}$$

Подставим (17), (18) в(16):

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\cos x\tan x = \cot x$$

$$C(x) = \int \frac{cotx}{\sin x}dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + c_0$$

Тогда имеем общее решение исходного уравнения:

$$y = c_0\cos x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right|\cos x$$

2. Уравнения вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \tag{19}$$

называются уравнениями Бернулли. Очевидно, что при $n = 0, 1$ это линейные уравнения. Для $n \neq 1$ такие уравнения можно решать с помощью замены $y(x) = u(x)v(x)$. Подставим это выражение в (19):

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x)u^n v^n$$

$$v(u' + P(x)u) + v'u = Q(x)u^n v^n$$

Функцию $u(x)$ выберем так, чтобы $u' + P(x)u = 0$. Решив это уравнение, найдем $v(x)$ из соотношения:

$$v'u = Q(x)u^n v^n$$

П р и м е р 2. Решить задачу Коши:

$$2(xy' + y) = y^2 \ln x,\ y(1) = 2$$

Перепищем уравнение в виде (19):

$$y' + \frac{y}{2x} = y^2 \frac{\ln x}{2x},\ y(0) = 2$$

Перед нами уравнение Бернулли с $P(x) = 1/(2x)$, $Q(x) = \ln x/(2x)$, $n = 2$. Решение будем искать в виде $y(x) = u(x)v(x)$. Имеем:

$$y' = u'v + v'u,\ u'v + v'u + \frac{uv}{2x} = (uv)^2 \frac{\ln x}{2x}$$

$$v\left(u' + \frac{u}{2x}\right) + v'u = (uv)^2 \frac{\ln x}{2x} \tag{20}$$

Функцию u найдем из условия $u' + u/(2x) = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{2x},\ \frac{du}{u} = -\frac{dx}{2x}$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{2x},\ \ln|u| = -\ln|2x| + C$$

Константу C можно принять равной нулю, т.к. от нее не зависит общее решение. Пропотенциировав обе части последнего равенства, получим:

$$u = \frac{1}{2x}$$

Функцию v подставив u в (20):

$$\frac{v'}{2x} = \left(\frac{v}{2x}\right)^2 \frac{\ln x}{2x},\ \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 \ln x}{4x^2}$$

Разделим переменные:

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{\ln x dx}{4x^2}$$

и проинтегрируем:

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{\ln x dx}{4x^2},\ \frac{-1}{v} = -\frac{\ln(x) + x}{4x} + C_0$$

Откуда

$$v(x) = \frac{4x}{\ln x + Cx}, C = 1 - 4C$$

Тогда общее решение уравнения принимает вид:

$$y = uv = \frac{2}{\ln x + Cx}$$

Для нахождения частного решения, удовлетворяющего условию $y(1) = 2$ подставим в последнее выражение вместо y число 2, а вместо x число 1 и найдем C:

$$2 = \frac{2}{\ln 1 + C},\ C = 1$$

и получим частное решение:

$$y = \frac{2}{\ln x + x}$$

Уравнения Бернулли можно привести к линейным уравнениям первого порядка, поделив обе части на y^n и сделав замену $z = y^{1-n}$. Полученые уравнения можно решать методом вариации произвольной постоянной либо с помощью замены $y = uv$. Приведем уравнение из примера 2 к линейному:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{2xy} = \frac{\ln x}{2x},$$

$$y = 1/z,\ y' = -z'/z^2,\ -z' + \frac{z}{2x} = \frac{\ln x}{2x}$$

3. Уравнение Рикатти, т.е. уравнение

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x) \tag{21}$$

в общем случае не решается в квадратурах. Однако, если удалось найти частное решение $y_1(x)$, то заменой $z = y + y_1$ уравнения Рикатти сводятся к уравненим Бернулли и решаютс в квадратурах. Иногда частное решение можно подобрать по виду свободного члена $R(x)$. Например для уравнения $y' + y^2 = x^2 - 2x$ в левой части будут члены, подобные членам в правой части, если взять $y = ax + b$. Подставим это выражение в уравнение и найдем a и b, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x. В уравнении $y' + y^2 = 6/x^2$ члены y' и y^2 будут пропорциональны, если положить $y = a/x$. Подставляя $y = a/x$ в уравнение, найдем параметр a.

З а д а н и е 3. Найти общее решение уравнения:

1. $y' + \tan x\, y = \ln x \cos x$
2. $(x^2+1)y' + 2xy = (x^3+x)\cos x$
3. $(2+\sin x)y' + \cos x\, y = (\sin x + 2)x^2$
4. $y' + (x^2+1)y = e^{-x^3/3}\sin x$
5. $y' + x\cos x\, y - \sin x\, e^{-x\sin x} = 0$
6. $(x+1)y' + (x-1)y - (x-1)e^{-x} = 0$
7. $(x^2+1)y' + y = \arctan x$
8. $y' + \frac{x^2}{x^2+1}y = (x^2+1)e^{\arctan x}$
9. $y'\sqrt{x+1} + y - 1 = 0$
10. $y' + \frac{xy}{\sqrt{x^2+1}} = \cos x\, e^{-\sqrt{x^2+1}}$
11. $4xy' + (4x+1)y^2 - 4y = 0$
12. $2xy' + 2y = (xy)^2$
13. $y' = y^2 x + \frac{y}{x}$
14. $xy' - y + 2xy^2 \ln x = 0$
15. $2xy' = 3y - 4xy^3$
16. $2x^2y' + xy = 2y^3$
17. $y' - \frac{y}{x} = y^2$
18. $y' - y + 2xy^3 = 0$
19. $xy' - y + 4y^3 = 0$
20. $xy' + 3y = 4x^2y^2$
21. $2x^2y' + x^2y^2 + 4 = 2xy$
22. $4y' = y^2 + \frac{4}{x^2}$
23. $x^2y' = (yx)^2 + 3xy + 3$
24. $y' = y^2 - 2xy + x^2$
25. $y' + e^x y^2 + y = 3e^x$
26. $y' = y^2 - 2y\sin x + \cos x + \sin^2 x$
27. $y' + y^2 - 2y\cos x + \sin x + \cos^2 x$
28. $x^2y' - 5xy + x^2y^2 + 3 = 0$
29. $x^2y' + (yx)^2 + 2xy = 2$
30. $xy' = y^2 + 2(x+1)y + x^2 + x$

З а д а н и е 4. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию:

1. $x^2y' = y^2 + 2xy - 2x^2,\ y(1) = 0$
2. $y' = y^2 - 2xy + x^2 - 3,\ y(0) = 0$
3. $y' + 3y^2x^3 + \frac{1}{x^5} = 0,\ y(1) = 0$
4. $y' - e^xy^2 + 3y = e^{-x},\ y(0) = 1$
5. $x^2y' + xy + (xy)^2 = 4,\ y(1) = 0$
6. $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0,\ y(1) = 0$
7. $xy' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2,$ $y(1) = 1$
8. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2,\ y(0) = 0$
9. $y' + 2ye^x - y^2 = e^x + e^{2x},\ y(0) = 0$
10. $y' + 2y^2x^2 - \frac{5}{x^4} = 0,\ y(1) = 1$
11. $(1 + \sin^2 x)y' + y \sin 2x = x(1 +$ $+ \sin^2 x),\ y(\frac{\pi}{2}) = 0$
12. $(1 + e^x)y' + e^xy = \sin x(1 + e^x),$ $y(0) = 1$
13. $y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \cos x\, e^{\cos x},$ $y(0) = 0$
14. $y' + \frac{3x^2y}{x^3+1} - \frac{1}{x-1} = 0,$ $y(0) = 0$
15. $y'(x + 1) + x^2y = (x^2 + x)e^{-x^2/2},$ $y(0) = 1$
16. $(x - 1)y' + (x^2 - 2)y = (x - 1)^2,$ $y(0) = 0$
17. $(\cos x + 2)y' + y \sin x = \frac{x(\cos x+2)^2}{\sin^2 x},$ $y(\frac{\pi}{4}) = 0$
18. $y' + y \tan^2 x = \frac{e^x}{\cos^2 x},\ y(0) = 1$
19. $y' + \frac{e^xy}{e^{2x}-1} = e^{2x} - e^x,\ y(0) = 0$
20. $y' + (\tan x + \cot x)y - e^x \cos x = 0,$ $y(\frac{\pi}{4}) = 0$
21. $y^3dx + (x^3 \ln y - xy^2)dy = 0,$ $y(1) = 1$
22. $8y' + 3x^2y(y^2 - 4) = 0,\ y(0) = 0$
23. $y' + y \tan x + 4y^2 \sin x = 0,$ $y(0) = 1$
24. $xy' + 2xy^2 = 3y,\ y(1) = 1$
25. $y' \cos x + y \sin x + 3y^2 \cos x = 0,$ $y(0) = 0$
26. $5xy^4y' = y^5 + 4,\ y(1) = 1$
27. $ydx + (4x^3 - x)dy = 0,$ $y(1) = 1$
28. $3x^2dx - (x^3 + y + 1)dy = 0,$ $y(1) = 0$
29. $y(y + 1)dx + x(x + 1)dy = 0,$ $y(1) = 1$
30. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4,\ y(1) = 2$

З а м е ч а н и е. В вариантах, где уравнение записано в виде $S(x, y)dx + T(x, y)dy = 0$ необходимо выяснить относительно какой функции $y(x)$ или обратной $x(y)$ уравнение будет уравнением Бернулли.

1.4 Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

1. Уравнения вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{22}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если левая его часть есть дифференциал некоторой функции $U(x,y)$. Это имеет место, если $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Для решения уравнения надо найти функцию $U(x,y)$, от которой полный дифференциал равен левой части уравнения (34):

$$dU(x,y) = U'_x(x,y)dx + U'_y(x,y)dy \equiv M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

В этом случае общее решение можно записать в виде $U(x,y) = C$, где C произвольная постоянная.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$3x^2(1+\ln y)dx - \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy = 0$$

Имеем $M = 3x^2(1 = \ln y)$, $N = -(2y - x^3/y)$. Так как

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{3x^2}{y},\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{3x^2}{y},$$

то перед нами уравнение в полных дифференциалах. Найдем такую функцию $U(x,y)$, полный дифференциал которой был бы левой частью уравнения, т.е. такую функцию, что

$$U'_x = M(x,y) = 3x^2(1+\ln y),\ U'_y = N(x,y) = -2y + \frac{x^3}{y} \tag{23}$$

Для этого проинтегрируем первое уравнение по x, считая y постоянной:

$$U = \int 3x^2(1+\ln y)dx = x^3 + x^3\ln y + \varphi(y)$$

Вместо постоянной интегрирования поставлена функция от y, т.к. при при дифференцировании по x производная от нее равна нулю. Подставим эту функцию во второе уравнение (35) для нахождение $\varphi(y)$:

$$U'_y = \left(x^3 + x^3\ln y + \varphi(y)\right)'_y = \frac{x^3}{y} + \varphi'(y) \equiv -2y + \frac{x^3}{y}$$

Откуда

$$\varphi'(y) = -2y,\ \varphi(y) = -\int 2ydy = -y^2 + \text{const}$$

В этом случае $U(x,y) = x^3 + x^3 \ln y - y^2 + \text{const}$ и общий интеграл уравнения имеет вид:

$$x^3 + x^3 \ln y - y^2 = C$$

При решении уравнения возможно было сначала проинтегрировать второе уравнение (35) по y, а затем результат подставить в первое.

2. Если левая часть уравнения

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

не является полным дифференциалом некоторой функции, но при домножении на $m(x,y)$ становится им, то функция $m(x,y)$ называется интегрирующим множителем. Интегрирующий множитель существует, если $M(x,y)$, $N(x,y)$ непрерывны и не обращаются в нуль одновременно. В общем случае отсутствуют медоды для его отыскания, однако для некоторых уравнений можно воспользоваться методом выделения полных дифференциалов используя известные формулы:

$$d(xy) = xdy + ydx,\ d(y^2) = 2ydy,\ d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{xdy - ydx}{y^2},\ d\ln y = \frac{dy}{y}$$

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$(y^2 + y)dx + (y^2 - x)dy = 0$$

Имеем $M = y^2 + y$, $N = y^2 - x$. Мы видим, что $M'_x \neq N'_y$, поэтому левая часть уравнения не будет полным дифференциалом функции. Так как $M(x,y)$, $N(x,y)$ непрерывны и не обращаются в нуль одновременно, то существует интегрирующий множитель. Для его нахождение выделим в левой части уравнения полные дифференциалы:

$$(ydx - xdy) + y^2dy + y^2dx = 0$$

С учетом формулы

$$ydx - xdy = y^2 d\left(\frac{x}{y}\right)$$

имеем

$$y^2 d\left(\frac{x}{y}\right) + y^2dy + y^2dx = 0$$

Поделим обе части на $y^2 \neq 0$:

$$d\left(\frac{x}{y}\right) + dy + dx = 0$$

и увидим, что левая часть есть дифференциал функции, т.е.

$$d\left(\frac{x}{y}+y+x\right)=0$$

Интегрурующий множитель для этого уравнения будет $m(x,y)=1/y^2$. Общий интеграл имеет вид:

$$\frac{x}{y}+y+x=C$$

При делении на y^2 было потеряно решение $y=0$.

3. Иногда при решениии уравнения (34) полезна замена переменных (x,y) на (x,z) или (z,y), где $z=\varphi(x,y)$

П р и м е р 3. Решить уравнение

$$ydx-(x^3\ln y+x)dy=0$$

Имеем:

$$ydx-xdy-x^3\ln ydy=0$$

Так как $ydx-xdy=-x^2d(y/x)$:

$$-x^2d(y/x)-x^3\ln ydy=0 \tag{24}$$

Поделим обе части на $x^2\neq 0$:

$$d(y/x)+x\ln ydy=0$$

Перейдем от переменных (x,y) к переменным z,y, где $z=y/x$. Имеем

$$x=\frac{y}{z},\ dz+\frac{y}{z}\ln ydy=0=0$$

Перед нами уравнение с разделяющимися переменными. Домножим обе части на z и проинтегрируем:

$$\int zdz=\int y\ln ydy,\ \frac{z^2}{2}=\frac{y^2\ln y}{2}-\frac{y^2}{4}+C,$$

Возвращаясь к старым переменным, получим общий интеграл уравнения:

$$\frac{y^2}{2x^2}=\frac{y^2\ln y}{2}-\frac{y^2}{4}+C,$$

При делении (36) на x^2 было упущено решение $x=0$.

П р и м е р 4. Решить уравнение

$$(xy+y^2)dx+(x^2-xy)dy=0 \tag{25}$$

Сгруппируем члены так, чтобы выделить полные дифференциалы:

$$x(ydx + xdy) + y(ydx - xdy) = 0$$

С учетом того, что $ydx + xdy = d(xy)$, $ydx - xdy = y^2 d(x/y)$ имеем

$$xd(xy) + y^3 d(x/y) = 0$$

Поделим обе части уравнения на x и сделаем замену $u = xy$, $v = x/y$ и получим уравнение с разделяющимися переменными

$$du + \frac{u}{v^2} dv = 0,$$

которое имеет общий интеграл

$$-\ln u = -\frac{1}{v} + C,$$

Фунция $u = 0$ также будет решением. Возвращаясь к старым переменным, имеем решение уравнения (37):

$$-\ln(xy) = -\frac{y}{x} + C, \ x = 0, \ y = 0$$

З а д а н и е 5. Найти все решения дифференциального уравнения:

1. $\left(x^{-2}+3y^2x^{-4}\right)dx+(x^2y-$
$-x^2y^{-3})dy=0$

2. $(y-\sin x)dx+(x+e^y)dy=0$

3. $(x+y)dy=(2e^{2x}-y)dx$

4. $(y+\sin x)dx+(x+\cos y)dy=0$

5. $(2x+y^3)dx+3xy^2dy=0$

6. $(y^2-2x)dx+(2xy-\sin y)dy=0$

7. $(y^2-3x^2+1)dx+(x+\ln y)dy=0$

8. $(y^2+\ln x)dx+(2xy-\ln y)dy=0$

9. $(e^x+y)dx+(x+2y\cos y^2)dy=0$

10. $(1+3x^2\ln y)dx+$
$+\left(3y^2+\frac{x^3}{y}\right)dy=0$

11. $\left(2x-\frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx+$
$+\left(2y+\frac{\sin 2y}{x}\right)dy=0$

12. $\left(\frac{y}{x^2}+\frac{1}{y}\right)dx-$
$-\left(\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}+2y\right)dy=0$

13. $\exp(y/x)(1-y/x)dx+$
$+(1+\exp(y/x))dy=0$

14. $\frac{y}{x}dx+[1+\ln(xy)]dy=0,$
$(x>0,y>0)$

15. $(1+2xy^{-3})dx+(y^{-2}-$
$-3x^2y^{-4})dy=0$

16. $2xydx+(y^2-x^2)dy=0$

17. $2xydx=(x^2-2y^3)dy$

18. $(2x^3y+x^2y^4)dx+(x^4+x^3y^3)dy=0$

19. $y^2(ydx-2xdy)=x^3(xdy-2ydx)$

20. $(y-3x^2y^3)dx-(x+x^3y^2)dy=0$

21. $(2xy^2+y)dx-(x^2y+2x)dy=0$

22. $ydx=(x-2y^3)dy$

23. $x^3dy+2(y-x^2)ydx=0$

24. $y^2dx=(2y-e^x)dy$

25. $xdy=y(1-ye^x)dx$

26. $x^2dy=(xy-2(xy)^2)dx$

27. $xdy=y(2+3xy)dx$

28. $(x^{-1}-y)dx=y^{-1}dy$

29. $(2y-x^2y^2)dx=(x^3y-x)dy$

30. $(3x^2y+7y^2)dx-(2x^3+5xy)dy=0$

З а д а н и е 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $\frac{1+xy}{x^2y}dx + \frac{1-xy}{xy^2}dy = 0$
2. $(2y - x^2y^2)dx = (x^3y - x)dy$
3. $(4x^3y + 3y^2)dx - (2x^4 + xy)dy = 0$
4. $(x^2 + y^2)(3xdy - ydx) + x^2ydy - $ $- xy^2dx = 0$
5. $(xy^3 + 2y)dx + (x - x^2y^2)dy = 0$
6. $3xdy + ydx + xy^3(xdy + ydx) = 0$
7. $xy^2dx + (x^2y - x)dy = 0$
8. $x(x^2 + y^2)dy + y(ydx - xdy) = 0$
9. $(xy^3 + y)dx + (2x + x^2y^2)dy = 0$
10. $(y^2 - 3x^2)dy + yxdx = 0$
11. $y(x + y^2)dx + x^2(y - 1)dy = 0$
12. $(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin(2y)dy = 0$
13. $x(\ln y + 2\ln x - 1)dy = 2ydx$
14. $(x^2 + 1)(2xdx + \cos ydy) = $ $= 2x\sin ydy$
15. $x^3y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0$
16. $\frac{y}{x^2}dx - \frac{xy+1}{x}dy = 0$
17. $(xe^x + yx^{-2})dx - x^{-1}dy = 0$
18. $\left(\frac{y}{x^2+y^2} + e^x\right)dx - \frac{xdy}{x^2+y^2} = 0$
19. $e^ydx + (\cos y + xe^y)dy = 0$
20. $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0$
21. $x\exp(y^2)dx + (x^2y\exp(y^2) + $ $+ \tan^2 y)dy = 0$
22. $(5xy^2 - x^3)dx + (5x^2y - y)dy = 0$
23. $(\cos(x+y^2) + \sin x)dx + 2y\cos(x + $ $+ y^2)dy = 0$
24. $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - $ $- 2x^2)dy = 0$
25. $(\sin y + y\sin x + x^{-1})dx + (x\cos y - $ $- \cos x + x^{-1})dy = 0$
26. $(6xy^2 + 4x^3)dx + (6x^2y + $ $+ 3y^3)dy = 0$
27. $xy^2dx + y(x^2 + y^2)dy = 0$
28. $\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2} = 0$
29. $\frac{xdx+ydy+xdy-ydx}{x^2+y^2} = 0$
30. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$

1.5 Уравнения, не разрешенные относительно производной. Особые решения

1. Уравнением, не разрешенным относительно проихводной называется уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{26}$$

Для этого уравнения сраведлва следующая теорема.

Пусть в уравнении (26) функция $F(x, y, y')$ удовлетворяет двум условиям:

1. $F(x, y, y')$ непрерывна в некоторой трехмерной области D

2. ее частная производная $F'_{y'}$ отлична от нуля в D.

Тогда через каждую точку $M_0(x_0, y_0, y'_0) \in D$, такую, что $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ проходит единственная интегральная кривая $y = \varphi(x)$, удолветворяющее условиям

$$\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi'(x_0) = y'_0$$

Уравнения (4), можно решать следующими методами:

1) Разрешить относительно производной y'. В этом случае имеем одно или несколько уравнений вида $y' = f(x, y)$, которые необходимо решить.

2) Часто уравнение (26) затруднительно или невозможно разрешить относительно производной и в этом случае применяют метод введения параметра. Допустим, что уравнение (26) возможно разрешть относительно y, т.е. $y = f(y', x)$. Введем параметр $p = y'$ и получим $y = f(x, p)$. Возьмем от последнего равенства полный дифференциал:

$$dy = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}dp$$

Воспользуемся тем, что $dy = pdx$:

$$pdx = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}dp,\ M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

$$M(x,y) = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x} - p,\ N(x,y) = \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}$$

Если получилось отыскать решение последнего уравнения в виде $x = \varphi(p)$, то имеем решение исходного уравнения в параметрической форме:

$$x = \varphi(p),\ y = f(\varphi(p), p) \tag{27}$$

Неединственность решения возникает вследствии того, что кривые семейства (27) могут пересекаться в отличае от крвывых семейства общего решения или общего интеграла.

(26).

Если уравнение (26) имеет вид

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

то оно называется уравнением Лагранжа, при $\varphi(y') \equiv y'$ уравнением Клеро.

З а м е ч а н и е. Уравнения вида $x = g(y', y)$ решаются аналогичным методом.

2. Решение $y = \varphi(x)$ уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется особым, если через каждую его точку проходит другое решение, имеющее ту же касательную, что и $y = \varphi(x)$, но не совпадающее с ним (нарушаются условия существования и единственности решения). Особое решение можно находится из системы уравнений

$$F(x, y, y') = 0, \ \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0 \tag{28}$$

путем исключения y'. Полученное уравнение $\psi(x, y) = 0$ называется дискриминантной кривой. Для каждой ыетви дискриминантной кривой нужно проверить, является ли она решением уравнения (26), если является, то будет ли это решение особым, т.е. касаются ли его в каждой точке другие решения.

П р и м е р 1. Методом введения параметра решить уравнение

$$2xy' - y = y' \ln(yy') \tag{29}$$

Разрешим это уравнение относительно x:

$$x = \frac{y + y' \ln(yy')}{2y'}$$

и введем параметр $p = y' = dy/dx$:

$$x = \frac{y + p \ln(yp)}{2p} \tag{30}$$

Найдем полный дифференциал:

$$dx = \frac{y + p}{2py} dy + \frac{p - y}{2p^2} dp$$

Так как $p = dy/dx$, то $dx = dy/p$, тогда имеем:

$$\frac{dy}{p} = \frac{y + p}{2py} dy + \frac{p - y}{2p^2} dp, \ \frac{p - y}{2yp} dy + \frac{p - y}{2p^2} dp = 0$$

1) Поделим обе части уравнения на $(p - y)/(2p) \neq 0$ и получим:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = 0$$

уравнение с разделенными переменными, общее решение которого есть

$$y = Cp$$

В этом случае решение имеем исходного уравнения:

$$x = \frac{C + \ln(Cp^2)}{2},\ y = Cp \tag{31}$$

2) Пусь $(p - y)/(2p) = 0$. Отсюда $p = y$, и подставляя в (30) получим

$$x = \frac{1 + \ln y^2}{2} \tag{32}$$

Очевидно, что полученое решение получается из (31), если положить $C = 1$. Тогда (30) будет общим решением исходного уравнения. Попробуем найти теперь особое решение. Запишем систему (28):

$$F(x, y, y') = 2xy' - y - y' \ln(y'y) = 0,\ \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 2x - 1 - \ln(y'y) = 0$$

Выразим из второго уравнения y';

$$y' = \frac{e^{2x-1}}{y}$$

и подставим в первое и получим уравнение дискриминанты:

$$y^2 = e^{2x-1}$$

Это уравнение совпадаеет с (32), поэтому входит в семейсто кривых (31) и не может пересекаться с другими кривыми этого семейства. Следовательно, особые решения исхлдного дифференциального уравнения отсутствуют.

П р и м е р 2. Найти все решения уравнения

$$y = y'^2 + 2y'^3$$

Обозначим $p = y' = dy/dx$:

$$y = p^2 + 2p^3$$

и найдем полный дифференциал от y:

$$dy = 0dx + (2p + 6p^2)dp$$

и с учетом того, что $dy = pdx$ имеем:

$$pdx = (2p + 6p^2)dp$$

1) Поделим обе части на $p \neq 0$:

$$dx = (2 + 6p^2)dp$$

и после иинетегрирования получим:

$$x = 2p + 3p^3 + C$$

2) При $p = 0$ имеем $y = 0$.

Тогда решениями исходного уравнения будут:

$$x = 2p + 3p^3 + C,\ y = p^2 + 2p^3, \tag{33}$$

а также

$$y = 0$$

, которое не входит в семейство кривых (33). Особое решение найдем из системы (28):

$$F(x, y, y') = y'^2 + 2y'^3 - y = 0,\ \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 2y' + 6y'^2 = 0$$

Из вторго уравнения имеем $y' = 0$ и $y' = -1/3$. Тогда $y = 0$, $y = 1/27$. Очевидно, что $y = 1/27$ не будет решением исходного уравнения.

Проверим теперь является ли $y = 0$ особым решеним, т.е. будет ли касаться кривых (33) в каждой точке. Из второго уравнения (33) видим, что $y = 0$ для кривых (33) при $p = 0$ или $p = -1/2$. Вычислим производную y' по формуле:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dp}{dx/dp}$$

Имеем:

$$\frac{dy}{dt} = 2p + 6p^2,\ \frac{dx}{dt} = 2 + 6p,\ \frac{dy}{dx} = p$$

Получаем, что $\frac{dy}{dx} = 0$ в при $p = 0$, поэтому $y = 0$ есть особое решение.

З а д а н и е 7. Найти все решение дифференциального уравнения:

1. $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$
2. $8xy'^3 = y(12y'^2 - 9)$
3. $x^3y'^2 + x^2yy' + 1 = 0$
4. $y'^3 - 3x^2y' + 4xy = 0$
5. $y' = \ln \frac{y}{y'-1}$
6. $5xy'^2 + 1 = yy'(1 + yy')$
7. $\frac{1}{4}y'^2 - y' + y = 2x - 3$
8. $y'^2 + xy^2y' + y^3 = 0$
9. $y'^2 - 2yy' + 4e^{2x} = 0$
10. $2y = 2y' + x - \ln y'$
11. $y'^2 + 2x^3y' - 4x^2y = 0$
12. $xy'^2 - 2yy' + 2y = 0$
13. $y'^2 - 8xy' + 8x^2 - 4y = 0$
14. $x^4y'^2 - xy' - y = 0$
15. $yy'(yy' - 1) = x - y^2$
16. $4(xy' - 2y) = 4x^2 - y'^2$
17. $y' = y^2 \exp\left(-\frac{xy'}{y}\right)$
18. $yy'^2 - 2xy' + y = 0$
19. $4y^3y'^2 - 4xy' + y = 0$
20. $xy'^3 - yy'^2 + 4 = 0$
21. $x^5y'^3 + x^4yy' - 1 = 0$
22. $y'^2 + 4e^{-3x}y' + 64e^{-3x}y = 0$
23. $4yy' = xy'^2 + x^3$
24. $6yy'^2 = 2xy'^3 + 3x^4$
25. $y' - \ln y' = y - x$
26. $4y'^3 - 3x^2y' + 4xy = 0$
27. $2yy' + 2y - 3x = xy'^2$
28. $\frac{y}{xy'} + \ln y' = 1$
29. $\frac{4}{9}y'^3 - 3x^4y' + 5x^3y = 0$
30. $xy'^3 + 3yy'^2 + 27y^4 = 0$

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Дифференциальное уравнение порядка n

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \tag{34}$$

называется разрешенным относительно страшей производной, если оно может быть записано в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}), \tag{35}$$

В этом случае также справедлива теорема Коши.

Пусть в уравнении (35) функция $f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)})$ удовлетворяет условиям:

1) непрерывна как функция $n+1$-ой переменной $x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ в некоторой области D $n+1$-мерного пространства;

2) ее частные производные по переменным $y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ в области D ограничены.

Тогда для любой точки $x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots y_0^{(n-1)}$ существует един ственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (35), определенное в некотором интервале (a, b), содержащем точку x_0, и удовлетворяющее началь ным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{36}$$

2.1 Методы понижения порядка

Рассмотрим простейшие типы уравнений, допускающие понижение порядка:

1. Уравнения вида:

$$y^{(n)} = f(x), \tag{37}$$

где $y^{(n)}$- производная n-го порядка искомой функции $y(x)$, называются простейиими. Способ решения уравнения этого типа состоит в n-кратном интегрировании обеих частей уравнения.

$$y^{(n)} = f(x), y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 = f_1(x) + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int [f_1(x) + C_1]\, dx + C_2 = f_2(x) + C_1 x + C_2$$

$$\ldots$$

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

где

$$f_n(x) = \int\int\int ... \int f(x)dx^n,$$

интегрирование производится n-раз.

П р и м е р 1. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y''' = x \sin x$.

Данное дифференциальное уравнение - простейшее, третьего порядка, допускающее понижение порядка. Проведём последовательно 3 -х кратное интегрирование.

Интегрируя первый раз обе части уравнения (правую часть - по частям), получим

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int x \sin x dx = \sin x - x \cos x + C_1$$

Ещё раз интегрируя полученное выражение, получим

$$\frac{dy}{dx} = \int (\sin x - x \cos x + C_1)\, dx = -2 \cos x - x \sin x + C_1 x + C_2$$

Интегрируя третий раз, получим общее решение данного уравнения

$$y(x) = -3 \sin x + x \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Следует учесть, что $C_1/2 = \text{const}$, а поскольку она произвольная, то можно положить её равной $\vec{C_1}$.

З а д а н и е 8. Найти все решения дифференциального уравнения

1. $y'' = x + \frac{1}{x^3},\ y(1) = 0,\ y'(1) = -1$
2. $y'' = e^x,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2$
3. $y'' = \cos x,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 5$
4. $y'' = \frac{1}{1+x^2},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$
5. $y'' = \sin x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$
6. $y'' = 0,\ y(-1) = 4,\ y'(-1) = 3$
7. $y'' = e^{-2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$
8. $y'' = \frac{x^2}{1+x^2},\ y(0) = -2,\ y'(0) = -4$
9. $y'' = 3\cos^2 x,\ y(0) = -1,$ $y'(0) = 1$
10. $y'' = \sqrt[3]{(x+1)^2},\ y(0) = 0,$ $y'(0) = -\frac{2}{3}$
11. $y'' = 1 - \cos 3x,\ y(0) = 0,$ $y'(0) = -4$
12. $(1 + x^2)y'' = 3,\ y(0) = 0,$ $y'(0) = -3$
13. $y'' + 2\sin^2 x = 0,\ y(0) = 2,$ $y'(0) = -1$
14. $y'' + 1 = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = -2$
15. $y'' = \frac{x}{1+x^2},\ y(0) = 2,\ y'(0) = -4$
16. $y'' = e^{x/2},\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1$
17. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1$
18. $y'' + 1 = x^2,\ y(-1) = 0,$ $y'(-1) = 1$
19. $y'' = \frac{2x^2}{3},\ y(0) = 1,$ $y'(0) = -1$
20. $y'' = 2\sin 3x,\ y(0) = -1,$ $y'(0) = 4$
21. $y'' = 2\cos 3x,\ y(0) = -1,$ $y'(0) = 0$
22. $y'' = 3 - x,\ y(0) = 0,$ $y'(0) = 7$
23. $y'' = 3^x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1$
24. $y'' = 98x^3,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 7$
25. $y'' = 3x,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 3$
26. $y'' = e^{2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = -0.5$
27. $xy'' = 1,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 1$
28. $y'' = \sin 2x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
29. $x^2y'' = 1,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 1$
30. $xy'' = 1 + x^2,\ y(1) = 0,$ $y'(1) = 0.5$

2. Дифференциальные уравнения, не содержащие в явном виде искомой функции y и её производных до ($k-1$)-го порядка включительно. Дифференциальные уравнения вида

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{38}$$

могут быть представлены различными частными случаями с соответствующими особенностями решения

Общий способ решения такого типа уравнений состоит в понижении его порядка на k единиц с помощью замены $y^{(k)} = z$. Тогда уравнение примет вид:

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0$$

Таким образом, порядок уравнения понижается на k единиц. Решая это уравнение относительно z будем иметь $z = \varphi(x)$, Вспоминая, что $z = y^{(k)}$, получим простейшее уравнение вида (37), допускающее понижение порядка.

П р и м е р 2. Найти общее решение (ДУ):

$$x^5 y''' + x^4 y'' = 1$$

Общий вид данного уравнения соответствует виду (38), т. е. его решение состоит в понижении порядка. Порядок этого уравнения — третий ($n = 3$).

Замена $y'' = z$, $y''' = dz/dx$ приводит к линейному уравнению первого порядка $x^5 z' + + x^2 z = 1$. Решим полученное уравнение с помощью замены:

$$z = uv \quad , \qquad z' = u'v + uv'$$

Получим:

$$x^5 u'v + x^5 uv' + x^4 uv = 1,\ x^5 u'v + x^4 u\,(xv' + v)\,v = 1$$

Первое уравнение используем для выбора функции v :

$$xv' + v = 0,\ x\frac{dv}{dx} = -v,\ \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},\ \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x},\ \ln v = -\ln x,\ v = \frac{1}{x}$$

Второе уравнение — для нахождения u :

$$x^5 u'\frac{1}{x} = 1,\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^4},\ du = \frac{dx}{x^4},\ \int du = \int\frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + C_1$$

Таким образом:

$$z = uv = \frac{1}{x}\left(C_1 - \frac{1}{3x^3}\right) = \frac{C_1}{x} - \frac{1}{3x^4}$$

Подставим $z = y''$ в найденное решение z: $y'' = \frac{C_4}{x} - \frac{1}{3x^4}$. Решим полученное (ДУ) двукратным интегрированием:

$$y' = \int \left(\frac{C_1}{x} - \frac{1}{3x^4} \right) dx = C_1 \ln x + \frac{1}{9x^3} + C_2$$

$$y = C_1 \int \ln x dx + \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x^3} + C_2 \int dx$$

Далее, взяв первый интеграл по частям, найдём общее решение:

$$y = C_1(x \ln x - x) - \frac{1}{18x^2} + C_2 x + C_3$$

3. Дифференциальные уравнения, не содержащие в явном виде переменной x. Способ решения дифференциального уравнени вида:

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{39}$$

состоит в понижении порядка на единицу с помощью замены $y' = p$. В этом случае за независимую переменную примем y. При этом $y'', y''', \ldots$ находятся по формулам дифференцирования сложной функции и произведения функций:

$$y'' = p\frac{dp}{dy}, \quad y''' = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}, \quad \ldots$$

Рассмотрим частный случай дифференциального данного типа при $n = 2$:

$$F\left(y, y', y''\right) = 0 \tag{40}$$

Полагая $y' = p$, $y'' = pdp/dy$, получим диффернециальное уравнение первого порядка:

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0,$$

которо решается известными методами (если это возможно). Общее его решение имеет вид:

$$p = \varphi(y, C_1)$$

С учетом того, что $p = y' = dy/dx$ вновь получим диффернециальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \varphi(y(x), C_1),$$

общее решение которого

$$y = \psi(x, C_1, C_2)$$

будет общим решением уравнения (40).

П р и м е р 3. Найти общее решение (ДУ)

$$(y')^2 + 1 = yy''$$

Замена $y' = p$ приводит к уравнению первого порядка

$$1 + p^2 = yp\frac{dp}{dy}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными относительно функции «$p = p(y)$» Решим полученное его путём разделения переменных и интегрирования. Получим:

$$\int \frac{pdp}{1+p^2} = \int \frac{dy}{y}; \ln\left(1+p^2\right) = 2\ln y + 2\ln C_1$$

$$1 + p^2 = C_1^2 y^2 \Rightarrow p = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}$$

Обратная замена $p = y'$ в найденном решении приводит к уравнению нервого порядка:

$$y' = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

Решим полученное его, вновь разделяя переменные и интегрируя. Получим:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = \pm \int dx \frac{1}{C_1} \ln\left(C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}\right) = \pm\left(x + C_2\right)$$

$$C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1} = e^{\pm C_1 (x + C_2)} \tag{41}$$

$$\frac{\left(C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}\right)\left(C_1 y - \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}\right)}{C_1 y - \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = e^{\pm C_1 (x + C_2)}$$

$$\frac{1}{C_2 y - \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = e^{\pm C_3 (x + C_2)}$$

$$C_1 y - \sqrt{C_1^2 y^2 - 1} = e^{\mp C_1 (x + C_2)} \tag{42}$$

Складывая (41) и (42) получим:

$$y = \frac{1}{2C_1}\left(e^{\pm (x + C_2) C_1} + e^{\mp (x + C_2) C_1}\right) = \frac{1}{C_1} \operatorname{ch} C_1 \left(x + C_2\right).$$

Обратим внимание, что в преобразовании найденного общего решения y использована формула $\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$

П р и м е р 4. Решить задачу Коши:

$$y^2y'' = (y')^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

Замена $y' = p(y)$ (т. е. y - независимая переменная), $y'' = p\frac{dp}{dy}$ приводит к уравнению первого порядка:

$$y^2p\frac{dp}{dy} = p^3$$

Т.к. $p \neq 0$ (в соответствии с начальным условием $y'(0) = 1$), то

$$y^2\frac{dp}{dy} = p^2 \tag{43}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными относительно p. Решим полученное (ДУ) путём разделения перемепных. Получим:

$$\frac{dp}{p^2} = \frac{dy}{y^2}, \quad \int\frac{dp}{p^2} = \int\frac{dy}{y^2}, \quad -\frac{1}{p} = -\frac{1}{y} + C_1$$

$$\frac{1}{p} = -C_1 + \frac{1}{y}; \quad p = \frac{y}{1 - C_1y}$$

общее решение. Получим частное решение этого уравнения. Для этого найдём C_1, используя начальное условие: при $y = 1, y' = p = 1$. Получим $1 = \frac{1}{1-C_1}$ откуда $C_1 = 0$. Подставим C_1 в общее решение, получим частное решение (43)

$$p = y$$

Обратная замена $p = y'$ в найденном частном решении приводит к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{44}$$

Решим полученное (ДУ) вновь разделяя переменные и интегрируя

$$\int\frac{dy}{y} = \int dx, \quad \ln y = x + \ln C_2, \quad y = C_2e^x$$

общее решение (44). Найдём искомое частное решение исходного уравнения. Для этого найдём C_2, используя начальное условие: при $x = 0, y = 1$. Получим: $1 = C_2e^0$, откуда $C_2 = 1$. Подставим C_2 в общее решение, получим частное решение: $y = e^x$.

З а д а н и е 9. Найти общее решение дифференциального уравнения

1. $y'''x\ln x = y''$.
2. $xy''' + y'' = 1$.
3. $2xy''' = y''$.
4. $xy''' + y'' = x + 1$.
5. $\tan x \cdot y''' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$.
6. $x^2y'' + xy' = 1$.
7. $y''' \cot 2x + 2y'' = 0$.
8. $x^3y''' + x^2y'' = 1$.
9. $\tan x \cdot y''' = 2y''$.
10. $y''' \coth 2x = 2y''$.
11. $x^4y'' + x^3y' = 1$.
12. $xy''' + 2y'' = 0$.
13. $(1 + x^2)y''' + 2xy' = x^3$.
14. $x^5y''' + x^4y'' = 1$.
15. $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0$.
16. $xy''' + y'' + x = 0$.
17. $\tanh x \cdot y'''' = y'''$.
18. $xy''' + y'' = \sqrt{x}$.
19. $y''' \tan x = y'' + 1$.
20. $y''' \tan 5x = 5y''$.
21. $y''' \tanh 7x = 7y''$.
22. $x^3y''' + x^2y'' = \sqrt{x}$.
23. $\coth x \cdot y''' - y' + \frac{1}{\operatorname{csc} x} = 0$.
24. $(x + 1)y''' + y'' = (x + 1)$.
25. $(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y''$.
26. $xy''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
27. $-xy''' + 2y'' = \frac{2}{x^2}$.
28. $c\ln x \cdot y'' + y' = c\ln x$.
29. $x^4y'' + x^3y' = 4$.
30. $y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' = 2x$.

З а д а н и е 10. Решить задачу Коши.

1. $4y^2y'' = y^4 - 1$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
2. $y'' = 128y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$.
3. $y''y^3 + 64 = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$.
4. $y'' + 2\sin y \cos y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
5. $y'' = 32\sin y \cos y$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 4$.
6. $y'' = 98y^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 7$.
7. $y''y^3 + 49 = 0$, $y(3) = -7$, $y'(3) = -1$.
8. $4y^2y'' = 16y^4 - 1$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$, $y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
9. $y'' + 8\sin y \cos y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
10. $y'' = 72y^2$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 6$.
11. $y''y^3 + 36 = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.
12. $y'' = 18\sin y \cos y$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 3$.
13. $4y^2y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \frac{\pi}{2}$.
14. $y'' = 50y^3$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 5$.
15. $y''y^3 + 25 = 0$, $y(2) = -5$, $y'(2) = -1$.
16. $y'' + 18\sin y \cos y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
17. $y'' = 8\sin y \cos y$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 2$.
18. $y'' = 32y^2$, $y(4) = 1$, $y'(4) = 4$.
19. $y''y^3 + 16 = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 2$.
20. $y'' + 32\sin y \cos y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
21. $y'' + 50\sin y \cos y = 0$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 5$.
22. $y'' = 18y^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.
23. $y''y^3 + 9 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.
24. $y''y^4 = 4(y^4 - 1)$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
25. $y'' + 50\sin y \cos y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.
26. $y'' = 8y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
27. $y''y^3 + 4 = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$.
28. $y'' = 2\sin^3 y \cos y$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 1$.

29. $y'' = 2y^3$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$.

30. $y''y^3 + 1 = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = -1$.

З а д а н и е 11. Найти общее решение уравнения.

1. $y'''x\ln x = y''$
2. $xy''' + y'' = 1$
3. $2xy''' = y''$
4. $xy''' + y'' = x + 1$
5. $xy''' + 2y'' = 1$
6. $xy''' = 2y''$
7. $x^3y''' + x^2y'' = 1$
8. $y'''\cot 2x + 2y'' = 0$
9. $\tan x \cdot y''' = 2y''$
10. $(1 + x^2)y''' + 2xy'' = 0$
11. $xy''' + 2y'' = 0$
12. $(1 + \cos x)y''' + \sin x \cdot y'' = 0$
13. $x^5y''' + x^4y'' = 1$
14. $x^5y''' - x^4y'' = 1$
15. $xy''' - y'' + \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
16. $xy''' + y'' + x = 0$
17. $(2 - \cos x)y''' = \sin x \cdot y''$
18. $xy''' + y'' = \sqrt{x}$
19. $y'''\tan x = y'' + 1$
20. $y'''\tan 5x = 5y''$
21. $(4 + x^2)y''' = -2xy''$
22. $x^3y''' + x^2y'' = \sqrt{x}$
23. $y'''\cos^2 x + y''\sin 2x = 0$
24. $(1 + x)y''' + y'' = 1 + x$
25. $(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y''$
26. $xy''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}$
27. $x^3y''' - 2x^2y'' = -2$
28. $(1 - x^2)y''' = xy''$
29. $x(1 + x^2)y''' = (x^2 - 1)y''$
30. $y'''\sin^2 x - y''\sin 2x = 0$

2.2 Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

1. Дифференциальное уравнение n-го порядка вида:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \qquad (45)$$

где $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ и $f(x)$ заданные на (a, b) функции, называется линейным дифференциальным уравнением n-го порядка.

Пусть в уравнении (45) функции $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ и $f(x)$ - непрерывны на интервале (a, b), причём $a_0(x) \neq 0$, то, каковы бы ни были начальные условия

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

то существует единственное решение $y(x)$, удовлетворяющее этим условиям.

При $f(x) \equiv 0$ на (a, b) т.е.,

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = 0, \qquad (46)$$

уравнение называется линейным однородниым (ЛОДУ).

Рассмотрим сначала линейные однородные дифференциальные уравнения. Функции $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots, u_n(x)$ называются линейно зависимыми на (a, b), если существуют такие действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не равные нулю одновременно, что выполняется равенство

$$\alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + \ldots + \alpha_n u_n(x) = 0 \qquad (47)$$

для любого $x \in (a, b)$. Если же равенство (47) выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то функции $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots, u_n(x)-$ называются линейно независимыми на (a, b).

Если $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ - линейно независимые частнье решения (ЛОДУ), то

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n,$$

где $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ - произволыные постоянные, есть общее решение этого уравнения. Совокупность линейно независимъх решений (47) называется фундаментальиой системой решений.

Рассмотрим тепрь линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ). Имеет место теорема о структуре его общего решения:

общее решение y уравнения (45) есть сумма общего решения y_0 соответствующего однородного уравнения и любого частного решения $\bar{y}$ неоднородного уравнения, т.е.

$$y = y_0 + \bar{y} \qquad (48)$$

Таким образом, чтобы найти общее решение (ЛНДУ), нужно найти общее решение соответствующего (ЛОДУ) и какое-нибудь частное решение (ЛНДУ). В общем случае задача отыскания частного решения является сложной. Частное решение (ЛНДУ) можно найти методом вариации произвольных постоянных или методом подбора (метод неопределённых коэффициентов).

2. Рассмотрим (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами вида (46):

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0 \tag{49}$$

Будем искать частные решения этого уравнения в виде $y = e^{kx}$, где $k = \text{const}$, тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ и т.д. Подставляя значения $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ в (49), находим $e^{kx}(a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_n) = 0$. Так как $e^{kx} \neq 0$, то получим следующее алгебраическое уравнение

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_n = 0, \tag{50}$$

которое называется *характеристическим уравнением* и является уравнением n-й степени. Оно имеет n корней $k_1, k_2, \ldots, k_n$ (действительных или комплексных, среди них могут быть и равные).

Частные линейно независимые решения дифференциального уравнения(49) определяются в зависимости от характера корней характеристического уравнения (50) следующим образом:

1. каждому действительному простому (т. е. не кратному) корню k в общем решении соответствует слагаемое вида Ce^{kx};

2. каждому действительному корню кратности m в общем решении соответствует слагаемое вида

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_m x^{m-1}) e^{kx};$$

3. каждой паре комплексных сопряжённых простых корней $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$ в общем решении соответствует слагаемое вида $(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$;

4. каждой паре комплексных сопряжённых корней $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$ кратности m в общем решении соответствует

$$e^{\alpha x}\left[\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1}\right)\cos \beta x + \left(C_1' + C_2' x + \ldots + C_m' x^{m-1}\right)\sin \beta x\right]$$

Совокупность частных линейно независимых решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, составляет фундаментальную систему решений (ЛОДУ) (49). Общее его решение имеет вид:

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

П р и м е р 1. Найти фундаментальную систему решений уравнения:

$$3y'' - 2y' - y = 0$$

Составим характеристическое характеристическое уравнение, заменив производные y на соответствующие степени k:

$$3k^2 - 2k - 1 = 0$$

Это квадратное уравнение имеет корни: $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{1}{3}$. Так как корни действительные различные, то фундаментальная система решений имеет вид:

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-\frac{1}{3}x}$$

П р и м е р 2. Решить уравнение:

$$y''' + 4y'' + 46y' - 116y = 0$$

Имеем характеристическое уравнение:

$$k^3 + 4k^2 + 46k - 116 = 0$$

Число $k_1 = 2$ будет корнем этого уравнения, т.к. является делителем свободного члена. Тогда характеристическое уравнени запишется в виде:

$$(k-2)(k^2 + 6k + 58) = 0$$

Решая уравнение $k^2 + 6k + 58 = 0$, получим $k_2 = -3 + 7i$, $k_3 = -3 - 7i$. Напишем теперь фундаментальную систему решений. Действительному простому корню $k_1 = 2$ соответствует частное решение $y_1 = e^{2x}$, паре комплексных сопряжённых корней $k_{2,3} = -3 \pm 7i$ соответствует решения $y_2 = e^{-3x}\cos 7x$, $y_3 = e^{-3x}\sin 7x$. Тогда общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}\cos 7x + C_3 e^{-3x}\sin 7x$$

3. Рассмотрим (ЛНДУ) с постоянными коэффициентами вида (45):

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f(x) \tag{51}$$

Уравнение (45) решается методом неопределенных коэффициентов в случае, когда правая часть $f(x)$ представима в одном из следующих видов:

1) Если линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет правую часть в виде многочлена степени s, т.е. $f(x) = P_s(x)$, то частное решение такого уравнения имеет вид:

а) $\overline{y} = Q_s(x)$, если число $k = 0$ не является корнем характеристического уравнения;

б) $\overline{y} = x^r Q_s(x)$, если число $k = 0$ является корнем кратности r характеристического уравнения.

$Q_s(x)$ многочлен степени s с неопределенными коэффициентами.

2). Если $f(x) = e^{\alpha x} P_s(x)$, то частное решение имеет вид:

а) $\overline{y} = e^{\alpha x} Q_s(x)$, если число $k = \alpha$ не является корнем характеристического уравнения;

б) $\overline{y} = x^r e^{\alpha x} Q_s(x)$, если число $k = \alpha$ является корнем кратности r характеристического уравнения.

3). Если $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + R_n(x)\sin\beta x$, где $P_m(x)$, $R_n(x)$ многочлены степеней m и n соответственно (один из многочленов может быть равен нулю), то частное решение имеет вид:

а) $\overline{y} = T_j(x)\cos\beta x + Q_j(x)\sin\beta x$, если число $\pm i\beta$ не является корнем характеристического уравнения;

б) $\overline{y} = x^r(T_j(x)\cos\beta x + Q_j(x)\sin\beta x)$, если число $\pm i\beta$ является корнем кратности r характеристического уравнения.

$T_j(x)$, $Q_j(x)$ многочлены степени $j = \max(m, n)$ с неопределенными коэффициентами.

4). Если $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + R_n(x)\sin\beta x)$, , то частное решение имеет вид:

а) $\overline{y} = e^{\alpha x}(T_j(x)\cos\beta x + Q_j(x)\sin\beta x)$, если число $\alpha \pm i\beta$ не является корнем характеристического уравнения;

б) $\overline{y} = e^{\alpha x} x^r (T_j(x)\cos\beta x + Q_j(x)\sin\beta x)$, если число $\alpha \pm i\beta$ является корнем кратности r характеристического уравнения.

Чтобы найти неопределенные коэффициенты многочленов необходимо подставить часное решение в дифференциальное уравнение и приравнять члены при одинаковых степеных x в обеих частях.

П р и м е р 3. Найти общее решение (ЛНДУ):

$$y'' + 4y' + 4y = (1 - 4x)e^{-2x}.$$

Находим общее решение y_0 соответствующего (ЛОДУ):

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Имеем характеристическое уравнение: $k^2 + 4k + 4 = 0$. Его корни: $k_1 = k_2 = -2$.

В этом случае общее решение (ЛОДУ): $y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$.

Так как правая часть имеет вид: $f(x) = (1-4x)e^{-2x} = P_1(x)e^{\alpha x}$, то частное решение (ЛНДУ) ищем в виде:

$$\overline{y} = e^{-2x} Q_1(x) x^r = e^{-2x}(Ax + B)x^2,$$

Так как $\alpha = -2$ совпадает с корнем характеристического уравнения, то $r = 2$. Итак,

$$\overline{y} = e^{-2x}(Ax + B)x^2 = e^{-2x}(Ax^3 + Bx^2).$$

Найдём неизвестные коэффициенты A и B. Для этого подставим в заданое дифференциальное уравнение $\overline{y}$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$. Предварительно найдём их:

$$\overline{y} = e^{-2x}(Ax^3 + Bx^2)$$
$$\overline{y}' = e^{-2x}(-2Ax^3 - 2Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx)$$
$$\overline{y}'' = e^{-2x}(4Ax^3 + 4Bx^2 - 12Ax^2 - 8Bx + 6Ax + 2B)$$

Подставив последние выражения в исходное дифференциальное уравнение, получим алгебраическое уравнение. Разделим обе части полученного уравнения на $e^{-2x} \neq 0$ и приравниваем коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях x:

$$\begin{aligned} x^3: &\quad 4A - 8A + 4A = 0 \\ x^2: &\quad 4B - 8B + 12A + 4B - 12A = 0 \\ x^1: &\quad 8B - 8B + 6A = -4 \\ x^0: &\quad 2B = 1 \end{aligned}$$

Решение системы:

$$A = -\frac{2}{3}, \quad B = \frac{1}{2}$$

Подставим A и B в частное решение $\bar{y} = e^{-2x}(Ax + B)x^2$, получим

$$\bar{y} = e^{-2x}\left(-\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right)x^2 = e^{-2x}\left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right).$$

Найдём общее решение (ЛНДУ):

$$y = y_0 + \bar{y} = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + e^{-2x}\left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right).$$

П р и м е р 4. Найти общее решение (ЛНДУ):

$$y'' + 3y' = 9x,$$

а также выделить решение соответствующее начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Сначала находим общее решение y_0 соответствующего (ЛОДУ):

$$y'' + 3y' = 0.$$

Имеем характеристическое уравнение $k^2 + 3k = 0$, корни которого $k_1 = 0$, $k_2 = -3$.

Общее решение (ЛОДУ):

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{-3x}.$$

Найдем теперь частное решение неоднородного уравнения с правой частью $f(x) = 9x = P_1(x)$. Общий вид частного решения (ЛНДУ):

$$\bar{y} = Q_1(x)x^r = (Ax + B)x,$$

Т.к. один корень характеристического уравнения равен 0, то $r = 1$

Найдём неизвестные коэффициенты A и B. Для этого подставим в данное уравнение $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$:

$$\bar{y} = Ax^2 + Bx, \quad \bar{y}' = 2Ax + B, \quad \bar{y}'' = 2A.$$

Тогда:

$$2A + 3(2Ax + B) = 9x.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$x^1 : \quad 6A = 9$$

$$x^0 : \quad 2A + 3B = 0$$

откуда получим $A = \frac{3}{2}$, $\quad B = -1$.

Подставим A и B в общий вид $\bar{y} = (Ax + B)x$, получим:

$$\bar{y} = \left(\frac{3}{2}x - 1\right)x = \frac{3}{2}x^2 - x.$$

Найдём общее решение (ЛНДУ):

$$y = y_0 + \bar{y} = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x.$$

Для нахождения частного решения, соответствующего начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ найдем производную y':

$$y' = -3C_2 e^{-3x} + 3x - 1.$$

Подставим в выражения для y и y' их значения:

$$C_1 + C_2 = 0, \quad -3C_2 - 1 = 0,$$

следовательно $C_1 = 1/3$, $C_2 = -1/3$. Тогда имеем частное решение:

$$y = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$$

П р и м е р 5. Найти общее решение (ЛНДУ):

$$y^V + 2y''' + y' = \cos x.$$

Сначала находим общее решение y_0 соответствующего (ЛОДУ):

$$y^V + 2y''' + y' = 0$$

Имеем характеристическое уравнение $k^5+2k^3+k = k(k^2+1)^2 = 0$, которое имеет корни: $k_1 = 0$; $k_{2,3} = \pm i$ кратности 2.

Общее решение (ЛОДУ):

$$y_0 = C_1 + (C_2 + C_3x)\cos x + (C_4 + C_5x)\sin x.$$

Найдем теперь частное решение неоднородного уравнения с правой частью $f(x) = \cos x = P_0(x)\cos x + R_0(x)\sin x$. Общий вид частного решения (ЛНДУ):

$$\bar{y} = x^r(P_0(x)\cos x + R_0(x)\sin x) = x^2(A\cos x + B\sin x)$$

Т.к. $\pm i$ один корень характеристического уравнения равен 2, то $r = 2$.

Вычислим производные $\bar{y}'$, $\bar{y}''$, $\bar{y}'''$, $\bar{y}^{IV}$, $\bar{y}^V$:

$$\begin{aligned}
\bar{y}' &= \left(-x^2A + 2\,xB\right)\sin\ x + \left(x^2B + 2\,xA\right)\cos x,\\
\bar{y}'' &= \left(-x^2B - 4\,xA + 2\,B\right)\sin x + \left(-x^2A + 4\,xB + 2\,A\right)\cos x,\\
\bar{y}''' &= \left(x^2A - 6\,xB - 6\,A\right)\sin x + \left(-x^2B - 6\,xA + 6\,B\right)\cos x,\\
\bar{y}^{IV} &= \left(x^2B + 8\,xA - 12\,B\right)\sin x + \left(x^2A - 8\,xB - 12\,A\right)\cos x,\\
\bar{y}^V &= \left(-x^2A + 10\,xB + 20\,A\right)\sin x + \left(x^2B + 10\,xA - 20\,B\right)\cos x,
\end{aligned}$$

После подстановки их в исходное дифференциальное имеем:

$$8\,A\sin(x) - 8\,B\cos(x) \equiv \cos x$$

Это равенство выполняется для всех x, если положить $A = 0$, $B = -1/8$ Тогда $\bar{y} = -\frac{1}{8}\sin x$, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = y_0 + \bar{y} = C_1 + (C_2 + C_3x)\cos x + (C_4 + C_5x)\sin x - \frac{1}{8}\sin x$$

4. Частное решение $\overline{y}(x)$ неоднородного уравнения

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \qquad (52)$$

где $f(x)$ произвольная функция, можно искать методом вариации произвольной постоянной.

Пусть известна фундаментальная система решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ соответствующего однородного уравнения. Тогда частное решение ищем в виде:

$$\overline{y}(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \quad \ldots \quad + C_n(x)y_n(x),$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ неизвестные функции, определяемые из системы уравнений:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \quad \ldots \quad + C_n'(x)y_n(x) = 0 \qquad (53)$$

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \quad \ldots \quad + C_n'(x)y_n'(x) = 0 \qquad (54)$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad (55)$$

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \quad \ldots \quad + C_n^{(n-1)}(x)y_n'(x) = f(x) \qquad (56)$$

Эта система всегда имеет решение, т.к. ее определитель, который называется определителем Вронского (вронскианом) всега отличен от нуля, т.к. $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ фундаментальная система решений.

П р и м е р 6. Найти общее решение уравнения:

$$y'' - y' = \frac{e^x}{1+e^x}$$

Находим общее решение (ЛОДУ): $y'' - y' = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - k = 0$. Его корни $k_1 = 0$, $k_2 = 1$.

Общее решение (ЛОДУ): $y_0 = C_1 + C_2e^x$.

Общее решение (ЛНДУ) ищем в виде

$$y = C_1(x) + C_2(x)e^x \qquad (57)$$

Составим и решим систему уравнений вида для определения неизвестных функций $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$:

$$C_1'(x) + C_2'(x)e^x = 0 C_2'(x)e^x = f(x)$$

т. к. $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$, то: $y_1' = 0$, $y_2' = e^x$

Найдём определитель этой системы, т.е вронскиан:

$$W(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix} = e^x \neq 0$$

Откуда

$$C_1'(x) = -\frac{e^x}{1+e^x}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

Интегрируя $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = -\int \frac{e^x\,dx}{1+e^x} = -\ln(1+e^x) + A$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}\,dx}{e^{-x}(1+e^x)} = \int \frac{-d(e^{-x})}{1+e^{-x}} =$$

$$= -\ln(1+e^{-x}) + B = -\ln(1+e^x) + x + B.$$

Подставим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (57), найдём общее решение (ЛНДУ):

$$y = (-\ln(1+e^x) + A) + (-\ln(1+e^x) + x + B)\,e^x.$$

Пример 7. Решить задачу Коши:

$$y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Находим общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$y'' + 9y = 0$$

Характеристическое уравнение $k^2+9 = 0$. Его корни $k_{1,2} = \pm 3i$, следовательно, имеем общее решение (ЛОДУ):

$$y_0 = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

ЗаменяемC_1 и C_2 на функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ) ищем в виде:

$$y = C_1(x)\cos 3x + C_2(x)\sin 3x. \tag{58}$$

Составляем и решаем систему уравнений вида (56):

$$C_1'(x)\cos 3x + C_2'(x)\sin 3x = 0$$

$$-3C_1'(x)\sin 3x + 3C_2'(x)\cos 3x = \frac{9}{\cos 3x},$$

т.к $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \sin 3x$, то $y_1' = -3\sin 3x$, $y_2' = 3\cos 3x$, Имеем

$$C_1'(x)\cos 3x + C_2'(x)\sin 3x = 0$$

$$-3C_1'(x)\sin 3x + 3C_2'(x)\cos 3x = \frac{9}{\cos 3x},$$

Находим определитель Вронского:

$$W(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{pmatrix} = 1$$

Отсюда:

$$C_1'(x) = \frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}, \quad C_2'(x) = 3$$

Интегрируя $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \ln|\cos 3x| + A$$

$$C_2(x) == 3x + B$$

Подставим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (58), найдём общее решение (ЛНДУ):

$$y = (\ln|\cos 3x| + A)\cos 3x + (3x + B)\sin 3x.$$

Найдём частное решение данного (ДУ). Для этого определим A и B, используя начальные условия: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

1) Найдём сначала y' :

$$y' = \frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}\cos 3x - 3(\ln|\cos 3x| + A)\sin 3x + 3\sin 3x + 3(3x + B)\cos 3x =$$

$$= -3(\ln|\cos 3x| + A)\sin 3x + 3(3x + B)\cos 3x$$

Подставив $y'(0) = 0$:

$$0 = -3(\ln\cos 0 + A)\sin 0 + 3B\cos 0$$

Подставив $y(0) = 1$ в общее решение:

$$1 = [\ln(\cos 0) + A]\cos 0 + B\sin 0$$

Таким образом,

$$A = 1, \quad B = 0.$$

Подставив эти значения в общее решение, получим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = (\ln|\cos 3x| + 1)\cos 3x + 3x\sin 3x$$

5. Принцип наложения решений. Если функции $y_i(x)$ суть решения уравнений $L[y_i] = f_i(x)$, $i = 1...m$, где

$$L[y_i] = a_0(x)y_i^{(n)} + a_1(x)y_i^{(n-1)} + a_2(x)y_i^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y_i,$$

то $y = y_1 + y_2 + \quad ... \quad + y_m$ будет решением уравнения

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x) + \quad ... \quad + f_m(x)$$

.

П р и м е р 7. Найти общее решение (ДУ):

$$y'' + 3y' + 2y = (1 + x)e^x - 2x$$

Найдём общее решение соответствующего (ЛОДУ):

$$y'' + 3y + 2y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 3k + 2 = 0$. Его корни $k_1 = -2$, $k_2 = -1$. Общее решение (ЛОДУ):

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Правая часть (ЛНДУ)

$$f(x) = (1 + x)e^x - 2x = f_1(x) + f_2(x), \quad f_1(x) = (1 + x)e^x, \quad f_2(x) = -2x$$

сумма 2-х функций. Тогда структура частного решения неоднородного уравнения: $\overline{y} = \overline{y_1} + \overline{y_2}$. Рассмотрим отдельно $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Частное решение уравнений

$$y'' + 3y' + 2y = f_i(x)$$

будем искать методом неопределенных коэффициентов:

$$\overline{y_1} = (Ax + B)e^x).$$

$$\overline{y_2} = Cx + D$$

Частное решение $\overline{y}$ по своему общему виду такое же, как и правая часть $f(x)$, но с неопределёнными коэффициентами:

$$\overline{y} = \overline{y_1} + \overline{y_2} = e^x(Ax + B) + Cx + D.$$

Найдём неизвестные коэффициенты A, B, C, D. Для этого подставим в данное уравнение $\overline{y}$, $\overline{y'}$, $\overline{y''}$. Предварительно найдём их:

$$\overline{y} = e^x(Ax + B) + Cx + D$$
$$\overline{y'} = e^x(Ax + B + A) + C$$
$$\overline{y''} = e^x(Ax + B + 2A)$$

и подставив их в исходное уравнение, получим алгебраическое уравнение с неизвестными A, B, C, D.

$$6Axe^x + (5A + 6B)e^x + 2Cx + 3C + D = xe^x + e^x - 2x$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях соответственно левой и правой частей уравнения:

$$\begin{aligned} 6A &= 1 \\ 5A + 6B &= 1 \\ 2C &= -2 \\ 2D + 3C &= 0 \end{aligned}$$

Решая эту систему имеем:

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{36}, \quad C = -1, \quad D = \frac{3}{2}$$

Подставим A, B, C, D в общий вид $\overline{y}$:

$$\overline{y} = \frac{6x+1}{36}e^x - x + \frac{3}{2}.$$

Тогда общее решение (ЛНДУ):

$$y = y_0 + \overline{y} = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + \frac{6x+1}{36}e^x - x + \frac{3}{2}$$

З а д а н и е 12.

1. $y''' - 2y'' + 2y' = 5\cos x + 2x$
2. $y''' + 4y' = \operatorname{ch}^2 x$
3. $y''' - 4y' = \cos^2 x$
4. $y''' + 16y' = \operatorname{sh}^2 2x$
5. $y''' - 16y' = \sin^2 2x$
6. $y''' + y' = 1 + \sin x$
7. $y''' + y' = 4 + 10e^{2x}$
8. $y''' - 2y'' + 5y' = 5x + 4e^x$
9. $y''' + y' = -2e^x(\cos x + + 3\sin x) - 2\cos x$
10. $y''' - 2y'' + 5y' = 5x + 4e^x$
11. $y''' - y'' - 6y' = \cos x + 7\sin x - 6$
12. $y''' + y'' - 2y' = 3e^x$
13. $y''' + 4y' = 8\cos 2x$
14. $y''' + 2y'' + y' = 4\cos x + 1$
15. $y''' + y'' = e^{-x} + 2\cos x$
16. $y''' - 16y' = 48x^2 + 2\cos^2 2x$
17. $y'' - 2y' + 2y = 20\sin^2 \frac{\pi}{2}$
18. $y'' + 4y' = e^{2x} - 8\sin 2x$
19. $y'' + y' + 4y' + 4y = 40\sin^2 x$
20. $y'' + 2y' = 2e^{-2x}$
21. $y'' - 4y' + 5y' = 15x^2 - 4x + + 8\sin x$
22. $y'' - 2y' + 2y = 6x^2 + 2 + + 20\cos 2x$
23. $y'' - 6y' + 10y' = 13\cos x + + 10x$
24. $y'' + 2y' + 5y' = 2x - 17\sin 2x$
25. $y'' - 2y' + y' = 2x + 2\cos x$
26. $y'' - 2y' = 16\sin 2x - 12x$
27. $y'' - y' + y' - y = 4xe^x + 4$
28. $y'' + y' + y' + y = 4xe^x + 4$
29. $y'' - y' + 4y' - 4y = 40\cos^2 x$

З а д а н и е 13.

1. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$
2. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$
3. $y'' + y = \frac{2}{\cos^3 x}$
4. $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$
5. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$
6. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{e^x-1}$
7. $y'' + y = \operatorname{ctg}^2 x$
8. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-x}}{x}$
9. $y'' + 2y' + y = \frac{2e^{-x}}{x}$
10. $y'' + 9y = \operatorname{tg}^2 3x$
11. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$
12. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x}$
13. $y'' + y' = \frac{e^x}{1+e^x}$
14. $y'' - y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}}$
15. $y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}$
16. $y'' - 8y' + 16y = \frac{e^x}{x}$
17. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$
18. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$
19. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$
20. $y'' + 4y = \operatorname{ctg}^2 2x$
21. $y'' + y' = \frac{1}{e^x-1}$
22. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$
23. $y'' + 2y' = \frac{1}{1+e^{2x}}$
24. $y'' + y = 2\operatorname{ctg} x$
25. $y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x$
26. $y'' + 2y' + y = \frac{3e^{-x}}{x}$
27. $y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}$
28. $y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}$
29. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1+e^{-2x}}$
30. $y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}$

3 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений наряду с дифференциальными уравнениями одной неизвестной функции рассматриваются системы дифференциальных уравнений нескольких неизвестных функций. Общий вид системы, состоящей из n дифференциальных уравнений следующий:

$$\begin{aligned}
&\Phi_1\left(x, y_1, y_1', \ldots, y^{(m_1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y^{(m_n)}\right) = 0\\
&\Phi_2\left(x, y_1, y_1', \ldots, y^{(m_1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y^{(m_n)}\right) = 0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&\Phi_n\left(x, y_1, y_1', \ldots, y^{(m_1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y^{(m_n)}\right) = 0
\end{aligned}$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка, разрешённых относительно производных. Напомним, что порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Система уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\\
&\vdots\\
\frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned} \tag{59}$$

где $y_1,\ y_2,\ \ldots, y_n$ — искомые функции; x — независимая переменная; $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — заданные функции в некоторой области G $(n+1)$-мерного пространства, левые части уравнений являются производными первого порядка и правые части не содержат производных, называется нормальной.

Нормальная система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\
\frac{dy_2}{dx} &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\
&\vdots \\
\frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x)
\end{aligned} \tag{60}$$

называется линейной. Если у линейной системы $f_j(x) = 0$ при $j = 1, ..., n$, то такая система называется однородной. Решением системы дифференциальных уравнений называется набор функций, обращающий каждое уравнение в тождество.

Рассматрим два способа решения системы дифференциальных первого порядка. Первый из них — метод исключения, а второй — метод Эйлера (векторно-матричный).

3.1 Метод исключения

При решении нормальной системы из n дифференциальных уравнений иногда удаётся свести ее к одному уравнению n-го порядка, содержащему одну неизвестную функцию. Сведение нормальной системы к одному уравнению может быть достигнуто дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных, кроме одного.

Рассмотрим систему (60). Способ её решения состоит в следующем:

1) Дифференцируя по x первое уравнение этой системы, получим

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

2) Заменяя производные $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ их выражениями $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из уравнений (22), получим уравнение второго порядка

$$\frac{d^2y_1}{dy^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

3) Дифференцируя полученное уравнение и поступая аналогично предыдущему, найдём

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

4) Продолжая далее таким же образом, получим уравнение

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Итак, получена следующая система:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
\frac{d^2y_1}{dx^2} &= F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
\frac{d^3y_1}{dx^3} &= F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\ldots \\
\frac{d^ny_1}{dx^n} &= F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned} \tag{61}$$

5) Из первых $(n-1)$ уравнений определим $y_2, y_3, \ldots, y_n$, выразив их через x и y_1 и производные $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$:

$$\begin{aligned}
y_2 &= \varphi_2\left(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}\right) \\
y_3 &= \varphi_3\left(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}\right) \\
&\ldots \\
y_n &= \varphi_n\left(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}\right)
\end{aligned} \tag{62}$$

6) Подставляя эти выражения в последнее уравнение системы (62), получим дифференциальное уравнение n-го порядка для определения y_1:

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right).$$

Решая это уравнение, определим y_1:

$$y_1 = \theta_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

7) Дифференцируя последнее выражение $(n-1)$ раз, найдём производные $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ как функции $x, C_1, C_2, \ldots, C_n$.
Подставляя эти функции в (63), определим $y_2, y_3, \ldots, y_n$:

$$\begin{aligned}
y_2 &= \theta_2(x, C_1, \ldots, C_n), \\
y_3 &= \theta_3(x, C_1, \ldots, C_n), \\
&\ldots \\
y_n &= \theta_n(x, C_1, \ldots, C_n),
\end{aligned}$$

которые являются решением системы (61).

П р и м е р 1. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2y,\\ \frac{dy}{dt} &= 2z,\\ \frac{dz}{dt} &= 2x.\end{aligned}$$

Дифференцируя по t первое уравнение, получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dy}{dt}.$$

Исключая из полученного уравнения $\frac{dy}{dt}$, имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4z.$$

Ещё раз дифференцируя по t полученное (ДУ) второго порядка, получим:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 4\frac{dz}{dt},$$

т. е. (ДУ) 3-го порядка. Итак, система 3-х (ДУ) 1-го порядка сводится к одному (ДУ) 3-го порядка, но с разными переменными функциями $x(t)$ и $z(t)$.

Далее, исключая $\frac{dz}{dt}$ (т. е. подставляя $\frac{dz}{dt} = 3x$ из третьего уравнения), получим (ДУ) третьего порядка (однородное) с одной переменной:

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 8x = 0 \tag{63}$$

Теперь решим полученное (ДУ) 3-го порядка. Для этого составим характеристическое уравнение:

$$k^3 - 8 = 0 \iff (k-2)(k^2+2k+4) = 0.$$

Корни характеристического уравнения $k_1 = 2$, $k_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$.

Следовательно, общее решение однородного уравнения (63) имеет вид:

$$x = C_1e^{2t} + e^{-t}\left[C_2\cos(t\sqrt{3}) + C_3\sin(t\sqrt{3})\right]$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Из первого уравнения исходной системы получим решение y:

$$y = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\Big\{2C_1e^{2t} - e^{-t}\left[C_2\cos(t\sqrt{3}) + C_3\sin(t\sqrt{3})\right] + e^{-t}\sqrt{3}\left[C_3\cos(t\sqrt{3}) - C_2\sin(t\sqrt{3})\right]\Big\} \quad (64)$$

или

$$y = C_1e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-t}\left[(-C_3\sqrt{3} + C_2)\cos(t\sqrt{3}) - (C_2\sqrt{3} - C_3)\sin(t\sqrt{3})\right].$$

Из второго уравнения системы найдём z:

$$z = \frac{1}{2}\frac{dy}{dt} = C_1e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-t}\left[(-C_3\sqrt{3} + C_2)\cos(t\sqrt{3}) - (C_2\sqrt{3} - C_3)\sin(t\sqrt{3})\right]$$

З а д а н и е 14.

1) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^t \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = x - 5\sin t \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = -y + 2x + 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dot{y} = y - 2x + 18t \\ \dot{x} = 2y - x - 2\cos t \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + e^{-2t} \\ \dot{y} = x - 2y - 3e^{-2t} \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dot{y} = 4y - 3x + \sin t \\ \dot{x} = 5y - x \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t \\ \dot{x} = 2x + 3y + 5t \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dot{y} = y - x + 8t \\ \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t} \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dot{y} = 3x + 2y + 8e^t \\ \dot{x} = 4x - 3y + \sin t \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dot{y} = x + 2y \\ \dot{x} = x + y + 1 + e^t \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dot{y} = 2x - 3y + 4\sin t + 2\cos t \\ \dot{x} = x - 2y + 2\sin t \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dot{y} = 3x - y \\ \dot{x} = 2x - 3y + 4\sin t + 2\cos t \end{cases}$

15) $\begin{cases} \dot{y} = x + y + 1 + e^t \\ \dot{x} = 4x + y - e^{2t} \end{cases}$

16) $\begin{cases} \dot{y} = x - 2y + 2\sin t \\ \dot{x} = x - y + 8t \end{cases}$

17) $\begin{cases} \dot{y} = y - 2x \\ \dot{x} = y + 2e^t \end{cases}$

18) $\begin{cases} \dot{y} = 5x - y \\ \dot{x} = 2x - y \end{cases}$

19) $\begin{cases} \dot{y} = -x + 2y \\ \dot{x} = 2x - 3y \end{cases}$

20) $\begin{cases} \dot{y} = x + 2e^t \\ \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t} \end{cases}$

21) $\begin{cases} \dot{y} = x - 2y + 2\sin t \\ \dot{x} = 2y - x + 1 \end{cases}$

22) $\begin{cases} \dot{y} = x + y + 5e^{-t} \\ \dot{x} = -3x + y + 3e^t \end{cases}$

23) $\begin{cases} \dot{y} = 3y - 2x \\ \dot{x} = 2x + 4y - 8 \end{cases}$

24) $\begin{cases} \dot{y} = -4x + 2y \\ \dot{x} = -3x + 4y + 4e^t \end{cases}$

25) $\begin{cases} \dot{y} = 3x + 6y \\ \dot{x} = y + 2e^t \end{cases}$

26) $\begin{cases} \dot{y} = 3x - 4y + 6e^t \\ \dot{x} = 6x + 3y \end{cases}$

27) $\begin{cases} \dot{y} = x + t^2 \\ \dot{x} = -2x + 2y \end{cases}$

28) $\begin{cases} \dot{y} = 4x + 2y - 8 \\ \dot{x} = x + 2y + 16te^t \end{cases}$

29) $\begin{cases} \dot{y} = 2x + y + 16te^t \end{cases}$

30) $\begin{cases} \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$

3.2 Метод Эйлера (векторно-матричный)

Этот метод применяется для решения линейных однородных систем ДУ с постоянными коэффициентами и основан на матричной записи системы и её решения.

Пусть дана система n линейных однородных дифференциальных уравнений n с неизвестными функциями, коэффициенты которой постоянные.

Ограничимся рассмотрением *частных случаев* системы (62) при $n = 2$ и $n = 3$.

1) Если $n = 2$, то система линейных однородных ДУ с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ...a_{2n}y_n \\ &\dots \\ \frac{dy_n}{dt} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ...a_{nn}y_n \end{aligned} \tag{65}$$

или в матричной форме

$$Y' = AY \tag{66}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} dy_1/dt \\ dy_2/dt \\ \dots \\ dy_2/dt \end{pmatrix}$$

Записи системы ДУ в различных формах: (65) и (66) идентичны и равноправны.

Пусть размерность системы n равна 3. Запишем систему в матричной форме

$$Y' = AY \tag{67}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & c_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} dy_1/dt \\ dy_2/dt \\ dy_2/dt \end{pmatrix}$$

Ищем решение системы в виде

$$y_1 = \alpha e^{\lambda t},\ y_2 = \beta e^{\lambda t},\ y_3 = \gamma e^{\lambda t},$$

где λ, α, β и γ — постоянные числа.

Подставив y_1, y_2, y_3 в систему уравнений (66), получим систему алгебраических уравнений относительно α, β и γ:

$$\begin{aligned} &(a_1 - \lambda)\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = 0 \\ &a_2\alpha + (b_2 - \lambda)\beta + c_2\gamma = 0 \\ &a_3\alpha + b_3\beta + (c_3 - \lambda)\gamma = 0 \end{aligned} \tag{68}$$

Решим однородную систему алгебраических уравнений (69). Как известно, однородная система имеет ненулевые решения, если определитель системы равен нулю: $\Delta = 0$. Тогда получаем характеристическое уравнение 3-й степени:

$$\begin{vmatrix} (a_1 - \lambda) & b_1 & c_1 \\ a_2 & (b_2 - \lambda) & c_2 \\ a_3 & b_3 & (c_3 - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{69}$$

Уравнение (69), соответствующее системе (67), называется характеристическим ее уравнением.

Корни характеристического уравнения могут быть как действительными (простыми или кратными), так и комплексными. Рассмотрим, как находится общее решение системы в зависимости от характера корней.

1. Корни характеристического уравнения действительные различные: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Они называются характеристическими числами матрицы A. Каждому характеристическому числу $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ соответствует свой собственный вектор $\bar{u}(\alpha, \beta, \gamma)^T$. Тогда система дифференциальных уравнений имеет 3 решения соответственно для каждого из корней.

Подставив $\lambda = \lambda_1$ в систему (69) и решая её, найдём $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и соответствующее частное решение системы (67):

$$y_{11} = \alpha_1 e^{\lambda_1 t},\ y_{21} = \beta_1 e^{\lambda_1 t},\ y_{31} = \gamma_1 e^{\lambda_1 t}$$

Таким образом, характеристическому числу λ_1 соответствует собственный вектор $\bar{u}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)^T$.

Подставив $\lambda = \lambda_2$ в систему (69), аналогично находим:

$$y_{12} = \alpha_2 e^{\lambda_2 t},\ y_{22} = \beta_2 e^{\lambda_2 t},\ y_{32} = \gamma_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Таким образом, характеристическому числу λ_2 соответствует собственный вектор $\bar{u}_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)^T$.

Подставив $\lambda = \lambda_3$ в систему (69), аналогично находим:

$$y_{13} = \alpha_3 e^{\lambda_3 t},\ y_{23} = \beta_3 e^{\lambda_3 t},\ y_{33} = \gamma_3 e^{\lambda_3 t}.$$

Таким образом, характеристическому числу λ_3 соответствует собственный вектор $\bar{u}_3(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)^T$.

Совокупность линейно независимых решений

$$\begin{gathered} y_{11},\ y_{21},\ y_{31}; \\ y_{12},\ y_{22},\ y_{32}; \\ y_{13},\ y_{23},\ y_{33} \end{gathered}$$

называется *фундаментальной системой* решений системы (67)

Общее решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + C_3 y_{31} \\ y_2 &= C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + C_3 y_{32} \\ y_3 &= C_1 y_{13} + C_2 y_{23} + C_3 y_{33} \end{aligned}$$

В векторно-матричной форме:

$$y = C_1 \bar{y}_1 + C_2 \bar{y}_2 + C_3 \bar{y}_3,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \{y_{11},\ y_{21},\ y_{31}\}^T \\ \bar{y}_2 &= \{y_{12},\ y_{22},\ y_{32};\}^T \\ \bar{y}_3 &= \{y_{13},\ y_{23},\ y_{33}\}^T \end{aligned}$$

П р и м е р 2. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= 7x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} &= 6x + 4y. \end{aligned}$$

Составим характеристическое уравнение системы:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 7 & 3 \\ 6 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

откуда $\lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0$.

Его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 10$ (действительные различные) характеристические числа матрицы системы.

Найдём собственные векторы для каждого из характеристических чисел.

а) $\lambda_1 = 1$. Система уравнений для определения собственного вектора имеет вид:

$$\begin{aligned} 6\alpha + 3\beta &= 0 \\ 6\alpha + 3\beta &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, она имеет бесконечное множество решений и сводится к одному уравнению: $2\alpha + \beta = 0$. Положим $\alpha = l \Rightarrow \beta = -2l$. Таким образом, собственный вектор $\bar{u}_1 = (l; -2l)^T$, где l произвольное число.

b) $\lambda_2 = 10$. Система уравнений для определения собственного вектора имеет вид:

$$\begin{aligned} -3\alpha + 3\beta &= 0 \\ 6\alpha - 6\beta &= 0. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, эта система имеет бесконечное множество решений и сводится к одному уравнению: $\alpha - \beta = 0$. Положим $\alpha = l \Rightarrow \beta = l$. Таким образом, собственный вектор $\bar{u}_2 = (l; l)^T$.

Фундаментальная система решений:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1 : x_1 = e^t, \quad y_1 = -2e^t; \\ \lambda_2 = 10 : z_2 = e^{10t}, \quad y_2 = e^{10t}. \end{aligned}$$

Тогда общее решение системы имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{10t}, \\ y(t) = -2C_1 e^t + C_2 e^{10t}. \end{aligned}$$

П р и м е р 2. Найти общее решение системы: $\dot{x} = Ax$ (*), где

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad x^T = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix} = 0 \tag{70}$$

1). Запишем систему в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= 6x_1 - 6x_2 + 5x_3 \end{aligned} \tag{71}$$

Будем искать частное решение системы дифференциальных уравнений в форме:

$$x_1 = \alpha e^{\lambda t}, \quad x_2 = \beta e^{\lambda t}, \quad x_3 = \gamma e^{\lambda t},$$

где $\lambda = \text{const}$, а α, β, γ — постоянные коэффициенты.

Подставим выражения для x_1, x_2, x_3 в систему уравнений и получим систему алгебраических уравнений относительно α, β, γ:

$$\begin{aligned} (-3-\lambda)\alpha + 4\beta - 2\gamma &= 0 \\ \alpha - \lambda\beta + \gamma &= 0 \\ 6\alpha - 6\beta + (5-\lambda)\gamma &= 0 \end{aligned} \tag{72}$$

Для нахождения нетривиальных решений этой системы приравняем её определитель к нулю ($\Delta = 0$). Это даёт характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 6 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{73}$$

отсюда $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$.

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -1.$$

Эти значения λ являются действительными и различными характеристическими числами матрицы системы (70).

Найдём собственные векторы для каждого из характеристических чисел.

а) $\lambda_1 = 1$. Система уравнений для определения собственного вектора имеет вид:

$$\begin{aligned} -2\alpha + 2\beta - \gamma &= 0 \\ \alpha - \beta + \gamma &= 0 \\ 3\alpha - 3\beta + 2\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Очевидно, что 3-е уравнение является алгебраической суммой двух первых. Эта система имеет бесконечное множество решений. Положим $\alpha = l$, следовательно $\beta = l$, $\gamma = 0$. Таким образом, собственный вектор $\overline{u}_l = (l; l; 0)^T$, где l — произвольное число.

б) $\lambda_2 = 2$. Система уравнений для определения собственного вектора имеет вид:

$$\begin{aligned} 5\alpha - 4\beta + 2\gamma &= 0 \\ \alpha - 2\beta + \gamma &= 0 \\ 6\alpha - 6\beta + 3\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Очевидно, что 3-е уравнение является суммой двух первых. Эта система также имеет бесконечное множество решений. Положим $\beta = l$, следовательно $\gamma = 2l$, $\alpha = 0$. Таким образом, собственный вектор $\overline{u}_3 = (0; l; 2l)^T$.

в) $\lambda_3 = -1$. Система уравнений для определения собственного вектора имеет вид:

$$\begin{aligned} -2\alpha + 4\beta - 2\gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ 3\alpha - 3\beta + 3\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Очевидно, что второе уравнение является суммой первого и третьего. Система имеет бесконечное множество решений. Положим $\alpha = l$ $\beta = 0$, $\gamma = -l$. Таким образом, собственный вектор $\overline{u}_3 = (l; 0; -l)^T$.

Фундаментальная система решений:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1 &: x_{11} = e^t,\ x_{21} = e^t,\ x_{31} = 0; \\ \lambda_2 = 2 &: x_{12} = 0,\ x_{22} = e^{2t},\ x_{32} = 2e^{2t}; \\ \lambda_3 = -1 &: x_{13} = e^{-t},\ x_{23} = 0,\ x_{33} = -e^{-t}. \end{aligned}$$

Тогда общее решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^t + C_3 e^{-t}, \\ x_2(t) &= C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \\ x_3(t) &= 2C_2 e^{2t} - C_3 e^{-t} \end{aligned}$$

2. Если среди действительных корней характеристического уравнения имеются кратные, то корню λ кратности $r > 1$ ($r = 2$ или $r = 3$) соответствует частное решение системы (67), имеющее вид

$$y_{11} = \alpha_1(t)e^{\lambda t},\ y_{21} = \beta_1(t)e^{\lambda t},\ x_{31} = \gamma_1(t)e^{\lambda t},$$

где $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$, $\gamma_1(t)$ многочлены степени не выше $r-1$, т. е. вида $a_1t^2 + a_2t + a_3$ или $a_1t + a_2$, причём среди коэффициентов всех этих многочленов r коэффициентов являются произвольными, а остальные выражаются через них.

П р и м е р 3. Найти общее решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 5x - y, \\ \frac{dy}{dt} &= x + 3y. \end{aligned}$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

Его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ (т. е. кратность $r = 2$).

Двукратному корню $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ соответствует собственный вектор $\overline{u} = (a_1t + a_2, b_1t + b_2)$. Соответствующие решения имеют вид

$$x = e^{4t}(a_1t + a_2),\ y = e^{4t}(b_1t + b_2).$$

Дифференцируя x и y, получим

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1e^{4t} + 4(a_1t + a_2)e^{4t} \\ \frac{dy}{dt} &= b_1e^{4t} + 4(b_1t + b_2)e^{4t} \end{aligned}$$

Подставив значения x, y, dx/dt, dy/dt в данную систему и сократив обе части её уравнений на e^{4t}, получим:

$$\begin{aligned} a_1 + 4(a_1t + a_2) &= 5(a_1t + a_2) - (b_1t + b_2) \\ b_1 + 4(b_1t + b_2) &= a_1t + a_2 + 3(b_1t + b_2) \end{aligned}$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при t и свободные члены в каждом из уравнений, получим систему:

$$
\begin{aligned}
4a_1 &= 5a_2 - b_1 \\
4b_1 &= a_1 + 3b_1 \\
a_1 + 4a_2 &= 5a_2 - b_2 \\
b_1 + 4b_2 &= a_2 + 3b_2
\end{aligned}
$$

следовательно

$$
\begin{aligned}
a_1 &= b_1 \\
a_1 &= a_2 - b_2
\end{aligned}
$$

Полагая $a_1 = C_1$, $a_2 = C_2$ (C_1 и C_2 — произвольные постоянные), находим $b_1 = C_1$, $b_2 = C_2 - C_1$. Итак, решение этой системы имеет вид

$$
\begin{aligned}
a_1 &= C_1, \\
a_2 &= C_2, \\
b_1 &= C_1, \\
b_2 &= C_2 - 3.
\end{aligned}
$$

Следовательно

$$
\begin{aligned}
x &= e^{4t}(C_1 t + C_2), \\
y &= e^{4t}(C_1 t + C_2 - C_1).
\end{aligned}
$$

Эта система решается проще методом исключения.

Пример 4. Найти общее решение системы: $\dot{x} = Ax$, где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}, x^T = (x_1, x_2, x_3)$,

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 \\
-6 & 2 & 6 \\
4 & -1 & -4
\end{pmatrix}
$$

Раскроем матричную запись системы в виде:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 - x_2, \\
\dot{x}_2 &= -6x_1 + 2x_2 + 6x_3, \\
\dot{x}_3 &= 4x_1 - x_2 - 4x_3.
\end{aligned}
$$

Ищем частное решение системы в виде

$$x_1 = \alpha e^{\lambda t}, \quad x_2 = \beta e^{\lambda t}, \quad x_3 = \gamma e^{\lambda t},$$

где $\lambda = const, \alpha, \beta$ и γ — постоянные числа.

Подставим x_1, x_2, x_3 в систему уравнений, получим систему алгебраических уравнений относительно α, β, γ:

$$\begin{aligned} (1-\lambda)\alpha \qquad & -\gamma = 0 \\ -6\alpha \quad & +(2-\lambda)\beta + 6\gamma = 0 \\ 4\alpha \quad & -\beta + (-4-\lambda)\gamma = 0 \end{aligned}$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ -6 & 2-\lambda & 6 \\ 4 & -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 = 0$$

Его корни $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ — характеристические числа матрицы A.

Найдём собственные векторы для каждого из характеристических чисел.

а) $\lambda_1 = -1$ — простой корень. Система уравнений для определения собственного вектора имеет вид:

$$\begin{aligned} 2\alpha - \gamma &= 0 \\ -6\alpha + 3\beta + 6\gamma &= 0 \\ 4\alpha - \beta + 3\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, т. к. $\Delta = 0$. Положим $\alpha = 1$, следовательно $\beta = -2$, $\gamma = 2$. Таким образом, собственный вектор $\bar{u}_1 = (l; -2l; 2l)^T$.

б) Найдём собственный вектор, соответствующий двукратному корню $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (кратность $r = 2$).

Коэффициенты $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — многочлены первой степени, т. е.

$$\alpha_2(t) = A_1 t + A_2, \quad \beta_2(t) = B_1 t + B_2, \quad \gamma_2(t) = C_1 t + C_2.$$

Частные решения, соответствующие кратному корню $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ имеют вид:

$$x_1 = A_1 t + A_2, \quad x_2 = B_1 t + B_2, \quad x_3 = C_1 t + C_2, \tag{74}$$

т.к. $e^{\lambda t} = e^{0t} = 1$. Для определения коэффициентов $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ подставим решения (75) в исходную систему (ДУ). Получим:

$$\begin{aligned} A_1 &= (A_1 - C_1)t + A_2 - C_2 \\ B_1 &= (-6A_1 + 2B_1 + 6C_1)t - 6A_2 + 2B_2 + 6C_2 \\ C_1 &= (4A_1 - B_1 - 4C_1)t + 4A_2 - B_2 - 4C_2 \end{aligned}$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при t и свободные члены в каждом из уравнений получим систему:

$$\begin{aligned} A_1 - C_1 &= 0 \\ -6A_1 + 2B_1 + 6C_1 &= 0 \\ 4A_1 - B_1 - 4C_1 &= 0 \\ A_2 - C_2 - A_1 &= 0 \\ -6A_2 + 2B_2 + 6C_2 - B_1 &= 0 \\ 4A_2 - B_2 - 4C_2 - C_1 &= 0 \end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 \\ A_2 &= C_2 + C_1 \\ B_1 &= 0 \\ B_2 &= 3C_1 \end{aligned}$$

В этом случае

$$x_1 = C_1(t+1) + C_2, \quad x_2 = 3C_1, \quad x_3 = C_1 t + C_2, \tag{75}$$

Тогда общее решение системы:

$$x_1(t) = C_1^1 e^{-t} + C_1(t+1) + C_2$$

$$x_2(t) = -2C_1^1 e^{-t} + 3C_1$$

$$x_3(t) = 2C_1^1 e^{-t} + C_1 t + C_2$$

3. Корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ различные, но среди них есть комплексные.

Пусть среди корней характеристического уравнения есть комплексные: $\lambda_1 = \theta + i\mu, \lambda_2 = \theta - i\mu, \lambda_3 = \lambda$ действительный.

Каждому характеристическому числу $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ соответствует свой собственный вектор (α, β, γ). Тогда система дифференциальных имеет 3 частных решения:

а) решение, соответствующее корню $\lambda_1 = \theta + i\mu$. Подставим этот корень в систему (67) и решая её, найдём частное решение этой системы в виде:

$$y_{11} = \alpha_1 e^{(\theta+i\mu)}, \quad y_{21} = \beta_1 e^{(\theta+i\mu)}, \quad y_{31} = \gamma_1 e^{(\theta+i\mu)}.$$

Таким образом, характеристическому числу λ_1 соответствует вектор $u_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$;

б) частное решение, соответствующее корню $\lambda_2 = \theta - i\mu$:

$$y_{12} = \alpha_2 e^{(\theta-i\mu)t}; \quad y_{22} = \beta_2 e^{(\theta-i\mu)t}; \quad y_{32} = \gamma_2 e^{(\theta-i\mu)t}.$$

Таким образом, находится собственный вектор $\bar{u}_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$;

в) частное решение, соответствующее корню $\lambda_3 = \lambda$:

$$y_{13} = \alpha_3 e^{\lambda t}; \quad y_{23} = \beta_3 e^{\lambda t}; \quad y_{33} = \gamma_3 e^{\lambda t}.$$

Соответствующий собственный вектор $\bar{u}_3(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$.

Фундаментальная система решений данной системы (ДУ):

$$\begin{matrix} y_{11}, & y_{21}, & y_{31} \\ y_{12}, & y_{22}, & y_{32} \\ y_{13}, & y_{23}, & y_{33} \end{matrix}$$

Общее решение системы (ДУ) имеет вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + C_3 y_{31}, \\ y_1 &= C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + C_3 y_{32}, \\ y_2 &= C_1 y_{13} + C_2 y_{23} + C_3 y_{33}. \end{aligned}$$

П р и м е р 5. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений: $\dot{x} = Ax$, где $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial y}$, $x^T = (x_1, x_2, x_3)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Запишем систему в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + 2x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 &= 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 \end{aligned} \tag{76}$$

- Ищем частное решение системы в виде

$$x_1 = \alpha e^{\lambda t}, \quad x_2 = \beta e^{\lambda t}, \quad x_3 = \gamma e^{\lambda t},$$

где $\lambda = const$, α, β и γ — постоянные числа.

- Подставив x_1, x_2, x_3 в систему дифференциальных уравнений, получим систему алгебраических уравнений относительно α, β, γ :

$$\begin{aligned} (1-\lambda)\alpha - 2\beta &= 0 \\ \alpha + (2-\lambda)\beta - \gamma &= 0 \\ 3\alpha + 4\beta + (-4-\lambda)\gamma &= 0 \end{aligned} \tag{77}$$

Решим однородную систему алгебраических уравнений (78). Для этого составим и решим характеристическое уравнение исходной системы (ДУ):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 3 & 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - \lambda^2 + 4\lambda - 6 = 0$$

Его корни $\lambda_1 = -3$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$ — характеристические числа матрицы A

- Найдём собственные векторы для каждого из характеристических чисел.

а) $\lambda_1 = -3$. Система уравнений для определения собственного вектора $\bar{u}_1$ имеет вид:

$$\begin{aligned} 4\alpha - 2\beta &= 0 \\ \alpha + 5\beta - \gamma &= 0 \\ 3\alpha + 4\beta - \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Эта система алгебраических уравнений имеет бесконечное множество решений, т. к. её определитель $\Delta = 0$. Положим $\alpha = 1$, следовательно $\beta = 2$, $\gamma = 11$ю Таким образом, собственный вектор $\bar{u}_1 = (1; 2; 11)$.

б) $\lambda_2 = 1 + i$. Система уравнений для определения собственного вектора имеет вид:

$$\begin{aligned} i\alpha - 2\beta &= 0 \\ \alpha + (1-i)\beta - \gamma &= 0 \\ 3\alpha + 4\beta &= -(5+i)\gamma \end{aligned}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, т.к. $\Delta = 0$. Положим $\gamma = 2$, следовательно $\beta = 1 - i$, $\alpha = 2 + 2i$. Таким образом, собственный вектор $\vec{u}_2 = (2 + 2i; 1 - i; 2)^T$.

Если среди простых корней характеристического уравнения есть комплексные, то и решение получится в виде комплексных функций действительного переменного. Известно, что, если комплексные функции $(x_1)_1 + i(x_1)_2$, $(x_2)_1 + i(x_2)_2$, $(x_3)_1 + i(x_3)_2$ являются решениями системы с действительными коэффициентами, то их действительные $(x_1)_1$, $(x_2)_1$, $(x_3)_1$ и мнимые $(x_1)_2$, $(x_2)_2$, $(x_3)_2$ части, взятые в отдельности, сами являются решениями. При этом комплексно сопряжённым корням характеристического уравнения соответствуют одни и те же действительные решения.

Фундаментальная система решений:

$$\lambda_1 = -3: \quad x_{11} = e^{-3t}, \quad x_{21} = 2e^{-3t}, \quad x_{31} = 11e^{-3t};$$

$$\lambda_2 = 1 + i: \quad x_{12} = 2(1+i)e^{(1+i)t} = 2e^t \cos t - 2e^t \sin t + i(2e^t \cos t + 2e^t \sin t),$$

$$x_{22} = (1-i)e^{(1+i)t} = e^t \cos t + e^t \sin t + i(-e^t \cos t + e^t \sin t),$$

$$x_{32} = 2e^{(1+i)t} = 2e^t \cos t + 2ie^t \sin t;$$

Тогда общее решение системы имеет вид

$$x_1(t) = C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^t(\cos t - \sin t) + 2C_3 e^t(\cos t + \sin t),$$

$$x_2(t) = 2C_1 e^{-3t} + C_2 e^t(\cos t + \sin t) + C_3 e^t(-\cos t + \sin t),$$

$$x_3(t) = 11C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^t \cos t + 2C_3 e^t \cos t.$$

З а д а н и е 15.

Найти общее решение системы уравнений $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, где $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$,

$$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3).$$

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

11. $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

14. $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 6 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

15. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 12 & -4 & -12 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

17. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

18. $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

20. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

21. $A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}$

22. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

23. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

24. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

25. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

26. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

27. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

28. $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 12 & 3 & -4 \\ -12 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

29. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

30. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -6 & 5 & 6 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / Краснов М. Л. М.: Высшая школа, 1983. 128 с.

2. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). СПб: Издательство «Лань», 2005. -240 с.

3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учебник / Матвеев Н. М. 3-е изд., испр. и доп. М.: Высшая школа, 1967. 564 с.

4. Петровский И.Г. Лекции по теории дифференциальных уравнений./ Под ред. А.Д. Мышкиса, О. Д. Олейник. - М.: Изд. МГУ, 1984. -296 с.

5. Расчетно-графические работы по математике для студентов второго курса (третий семестр): учебно-методическое пособие / Ю.С. Солиев [и др.]. М.: МАДИ, 2023. 193 с.

6. Романко В.К. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В.К. Романко, Н.Х. Агаханов, В.В. Власов, Л.И. Коваленко. - М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ 2002. 256 с.: ил.

7. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений: учебник для вузов/ Степанов В. В. 9-е изд., стер. М.: Едиториал УРСС, 2004. 472 с.

8. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям : учебное пособие / Филиппов А. Ф. 2-е изд. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 240 с.

9. Мышкис А. Д. Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы. 3-е изд., перер. и доп. М.: Физматлит, 2006. 688 с.

10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения.Учебник для ВУЗов. - М.: ЛКИ, 2019. - 312 с.

М.В. Яшина, А.С. Зинченко, А.В. Марк

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: ЗАДАЧИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издательство «Перо»
109052, Москва, Нижегородская ул., д. 29–33, стр. 27, ком. 105
Тел.: (495) 973–72–28, 665–34–36
www.pero-print.ru e-mail: info@pero-print.ru
Подписано в печать 11.03.2026. Формат 60x90/16.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 5. Тираж 500 экз. Заказ 223.
Отпечатано в ООО «Издательство «Перо»

ISBN 978-5-00270-741-6