

*Где высоко стоит наука,  
стоит высоко человек.*

**А.И. Полежаев**

**А.В. ПАНТЕЛЕЕВ, Е.А. РУДЕНКО,  
А.С. БОРТАКОВСКИЙ**

# **НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ**

**ОПИСАНИЕ, АНАЛИЗ И СИНТЕЗ**

**А.В. ПАНТЕЛЕЕВ, Е.А. РУДЕНКО,  
А.С. БОРТАКОВСКИЙ**

**НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ  
УПРАВЛЕНИЯ  
ОПИСАНИЕ, АНАЛИЗ И СИНТЕЗ**

*Рекомендовано в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений*



Москва  
«Вузовская книга»  
2008

УДК 62.50:517.97:519.21

ББК 32.965.5

П16

*Рекомендовано Редакционным советом факультета  
прикладной математики и физики МАИ в качестве учебного пособия*

Рецензенты:

кафедра «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана;  
д-р техн. наук *И.Б. Ядыкин*

**Пантелеев А.В. и др.**

П16 Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез /  
А.В. Пантелеев, Е.А. Руденко, А.С. Бортаковский. — М.: Вузовская  
книга, 2008. — 312 с.: ил.

ISBN 978-5-9502-0339-8

Изложены математические методы описания и анализа нелинейных детерминированных и стохастических систем, а также алгоритмы синтеза оптимальных систем управления и наблюдения. В частности, впервые в учебной литературе приведены алгоритмы анализа стохастических систем с применением спектрального преобразования, синтеза оптимального управления при неполной информации и конечномерных фильтров оптимальной структуры.

Предназначено для студентов и аспирантов инженерно-технических и авиационных специальностей вузов.

Предыдущее издание выходило под названием «Методы описания, анализа и синтеза нелинейных систем управления» в 1993 г.

УДК 62.50:517.97:519.21

ББК 32.965.5

*Научное издание*

**Пантелеев Андрей Владимирович  
Руденко Евгений Александрович  
Бортаковский Александр Сергеевич**

**НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ:  
описание, анализ и синтез**

---

Подписано в печать 15.11.2007. Формат 60x84/16.

Печать офсетная. Бумага газетная.

Усл. печ. л. 18,13. Тираж 100 экз.

---

ЗАО «Издательское предприятие «Вузовская книга»  
125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4,  
МАИ, Главный административный корпус, к. 301а.  
Т/ф (499) 158-02-35. E-mail: vbook@mail.ru; vbook@mai.ru  
www.vuzkniga.ru

ISBN 978-5-9502-0339-8

© Пантелеев А.В., 2008

© ЗАО «Издательское предприятие  
«Вузовская книга», 2008

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга написана на основе курсов лекций, читаемых авторами на факультете прикладной математики Московского авиационного института им. Серго Орджоникидзе.

В книге изложены современные математические методы описания нелинейных непрерывных детерминированных и стохастических систем различных классов, а также базирующиеся на них методы анализа и синтеза систем управления.

Раздел 1 посвящен анализу поведения нелинейных детерминированных систем методами фазовой плоскости и гармонической линеаризации. Здесь также рассмотрены задачи анализа выходных процессов для систем управления, описываемых дифференциальными уравнениями, и абсолютной устойчивости динамических систем с одной нелинейностью.

В разделе 2 изучаются методы прямого и косвенного математического описания различных классов нелинейных стохастических систем. Сначала изложены способы описания негауссовских марковских и немарковских случайных процессов как многоточечными плотностями распределения, так и различными числовыми характеристиками: моментными, кумулянтными и квазимоментными функциями. Затем дано описание марковских стохастических дифференциальных систем уравнениями Ито и Стратоновича, показана их связь с уравнениями Колмогорова для плотностей распределения. Раздел завершается рассмотрением немарковских стохастических интегральных систем, задаваемых уравнениями типа Гаммерштейна—Вольтерра.

Раздел 3 посвящен решению задачи анализа выходных процессов нелинейных стохастических систем, рассмотренных в разделе 2. Обсуждаются методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито и Стратоновича, а также метод статистических испытаний Монте-Карло. Особое внимание уделено проблеме решения уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова.

В разделах 4 — 6 нашел отражение новый подход к синтезу оптимального управления детерминированными и стохастическими системами при неполной информации о состоянии на основе достаточных условий оптимальности.

Изложенная методология позволяет с единых позиций рассматривать решение трех задач: оптимального управления стохастическими системами, оптимального управления ансамблем (пучком) тра-

екторий детерминированных систем и оптимального управления детерминированными системами. Особенностью приводимых постановок задач является требование зависимости законов управления от части координат вектора состояния системы.

В отличие от других учебников сначала рассматривается общий случай неполной информированности, а затем частные случаи, в которых получаются классические результаты: уравнение Беллмана и с соотношения принципа максимума для детерминированных и стохастических систем.

Приведенный в разделе 6 метод нахождения оптимального в среднем управления пучком траекторий отражает связь между задачами синтеза оптимальных детерминированных (раздел 4) и стохастических (раздел 5) систем. Оригинальный подход к синтезу оптимального гарантирующего управления позволяет расширить возможности проектировщиков систем управления.

В разделе 7 подробно обсуждаются основы теории оптимальной нелинейной фильтрации, постановка и решение классической задачи синтеза абсолютно оптимальных фильтров, а также уравнения наиболее распространенных субоптимальных и условно-оптимальных нелинейных фильтров. Кроме того, дано решение новой задачи синтеза оптимальной структуры конечномерных фильтров.

Теоретический материал пособия иллюстрируется разнообразными примерами, в том числе задачами управления летательными аппаратами.

При изложении использовались научные результаты, полученные авторами.

Авторы выражают глубокую благодарность редактору Е.В.Лисовцу, тщательная работа которой над рукописью позволила существенно улучшить структуру и содержание книги, а также О.И.Бакулиной, Т.А.Андреевой, Е.Э.Фроловой, Д.Е.Кирпичниковой, М.В.Кузнецову, О.Е.Ильиной, Е.А.Козлову, А.И.Никаноровой за помощь, оказанную при подготовке оригинала-макета.

# 1. ОПИСАНИЕ И АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ

## 1.1. ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ

### 1.1.1. Описание нелинейных систем дифференциальными уравнениями

Для решения задачи анализа и синтеза системы управления прежде всего необходимо построить ее математическую модель, которая характеризует связь выходных сигналов, описывающих поведение системы, с входными сигналами, отражающими приложенные к ней воздействия. В системах управления движением, как правило, выходными сигналами являются изменяющиеся во времени координаты пространственного положения объекта управления (обобщенные координаты), а также компоненты вектора скорости движения (обобщенные скорости). Входные сигналы порождаются действующими на объект управляющими и возмущающими силами.

Для описания поведения нелинейных систем используются общие теоремы динамики или уравнения Лагранжа второго рода. Преобразовав эти дифференциальные уравнения второго порядка к системе уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных обобщенных координат и обобщенных скоростей, получим *уравнения движения* системы управления:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t), g_1(t), \dots, g_m(t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

где  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  — выходные сигналы;  $g_1(t), \dots, g_m(t)$  — входные сигналы системы управления.

Вектор-функцию  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ , удовлетворяющую уравнениям (1.1), называют *траекторией движения*, а ее мгновенное значение при фиксированном времени  $t$  — *состоянием системы* управления в данный момент времени. Вектор-функцию  $g(t) = (g_1(t), \dots, g_m(t))^T$  называют *внешним воздействием* (возмущением, управлением). Поскольку система уравнений (1.1) описывает эволюцию состояния системы управления, то уравнения (1.1) или их векторную запись

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), g(t)) \quad (1.2)$$

называют также *уравнениями состояния* системы управления.

Пример 1.1. Составить систему уравнений, описывающую процесс торможения летательного аппарата (ЛА) в атмосфере планеты.

□ Составим уравнения движения центра масс летательного аппарата, совершающего пассивный полет в атмосфере Марса. В качестве координат состояния аппарата примем скорость  $v$  и высоту  $h$  полета, а также угол  $\theta$  наклона траектории к линии местного горизонта (рис.1.1).

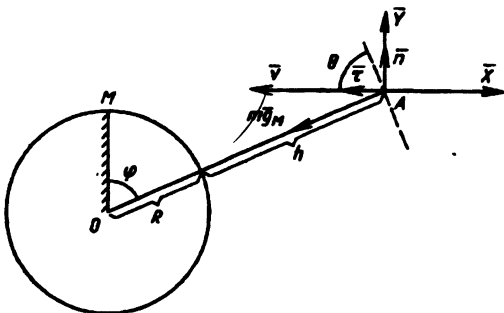


Рис.1.1.

На аппарат действуют следующие силы:  $X$  — аэродинамическое сопротивление,  $X = \frac{1}{2} c_x \rho v^2 S_{\text{ЛА}}$ ;  $Y$  — подъемная сила,  $Y = \frac{1}{2} c_y \rho v^2 S_{\text{ЛА}}$ ;  $mg_M$  — сила гравитационного притяжения планеты. Здесь  $\rho$  — плотность атмосферы;  $c_x$ ,  $c_y$  — аэродинамические коэффициенты;  $S_{\text{ЛА}}$  — характерная площадь ЛА;  $m$  — масса ЛА;  $g_M$  — ускорение свободного падения на Марсе.

Согласно второму закону Ньютона

$$m\bar{a} = \bar{X} + \bar{Y} + m\bar{g}_M .$$

Проектируя части этого уравнения на оси  $\bar{\tau}$  и  $\bar{n}$  скоростной системы координат, получаем касательное  $a_\tau$  и нормальное  $a_n$  ускорения:

$$a_\tau = \dot{v} = -\frac{X}{m} - g_M \sin \theta, \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{Y}{m} - g_M \sin \theta,$$

где  $r$  — радиус кривизны траектории в точке А.

Учитывая, что угол поворота вектора скорости  $\bar{v}$  относительно фиксированного направления  $OM$  (рис.1.1) равен разности  $\theta - \varphi$ , а скорость  $\dot{\varphi}$  вращения отрезка  $OA$  равна  $\frac{v}{R+h} \cos \theta$ , преобразо-

вываем отношение  $v/r$ , выражая скорость и радиус кривизны через дифференциал дуги  $ds$ :

$$\frac{v}{r} = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} (\theta - \varphi) = \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\theta} - \frac{v}{R+h} \cos \theta .$$

Следовательно, для нормального ускорения будем иметь

$$a_n = v\dot{\theta} - \frac{v^2}{R+h} \cos \theta = \frac{Y}{m} - g_n \cos \theta .$$

Подставляя теперь в уравнения выражения для аэродинамических сил, разрешаем их относительно  $\dot{v}$  и  $\dot{\theta}$ . Добавляя к двум уравнениям кинематическую связь для  $\dot{h}$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{2} \rho v^2 \sigma_x - g_n \sin \theta , \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{2} \rho v \sigma_x k_{\phi} - \frac{g_n \cos \theta}{v} + \frac{v \cos \theta}{R+h} , \\ \frac{dh}{dt} &= v \sin \theta . \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\sigma_x$  — баллистический параметр аппарата,  $\sigma_x = \frac{c_x S_{\text{ЛЛ}}}{m}$ ;  $k_{\phi}$  — эффективное аэродинамическое качество аппарата,  $k_{\phi} = -k_c \cos \gamma_c$ ;  $k_c$  — балансировочное качество аппарата,  $k_c = c_y/c_x$ ;  $\gamma_c$  — угол крена.

Ускорение свободного падения  $g_n$  зависит от высоты полета:

$$g_n(h) = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} ,$$

где  $g_0$  — ускорение свободного падения на поверхности планеты (при  $h=0$ ), а  $R$  — радиус планеты.

Плотность атмосферы  $\rho$  также зависит от высоты. Однако в отличие от ускорения  $g_n(h)$  вид функции  $\rho = \rho(h)$  можно выбрать на основе имеющейся информации об атмосфере по-разному [9]. Для атмосферы Земли можно использовать модель стандартной атмосферы. Для менее изученных планет можно принять экспоненциальную модель:  $\rho(h) = \rho_0 e^{-\beta h}$ , в которой плотность  $\rho_0$  атмосферы на поверхности планеты и показатель  $\beta$  уменьшения плотности с ростом высоты выбираются исследователем.

Управлением (входным сигналом) в системе (1.3) служит эффективное аэродинамическое качество  $k_{\phi}(t)$ , которое можно изме-



нять, разворачивая аппарат вдоль продольной оси (т.е. меняя угол крена  $\gamma_c$ ), что, конечно, влияет на траекторию полета.

Отметим в заключение, что в данной модели плоского движения летательного аппарата планета считается сферической, вращение планеты и ее атмосферы не учитываются.■

Принятая для систем управления движением терминология переносится и на другие системы управления. Уравнения состояния систем управления электротехническими, технологическими, химическими, биологическими процессами составляются на основе соответствующих законов. Обычно систему управления разбивают на блоки, каждый из которых описывают дифференциальными уравнениями. Совокупность этих уравнений служит описанием системы в целом. Напомним, что линейная система [23,35] с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0}$$

описывается дифференциальным уравнением

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_0 x(t) = b_m g^{(m)}(t) + \dots + b_0 g(t),$$

связывающим входной  $g(t)$  и выходной  $x(t)$  сигналы системы.

**Пример 1.2.** Составить уравнения состояния системы управления, структурная схема которой изображена на рис.1.2, где  $k, T, \zeta$  — параметры колебательного звена [23].

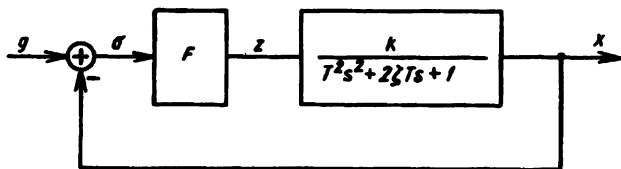


Рис.1.2.

□ В прямой цепи системы управления последовательно включены колебательное звено и нелинейное безынерционное звено с характеристикой  $z = F(\sigma)$ . Сигналы  $g, \sigma, z, x$  связаны уравнениями

$$\begin{aligned} T^2 \ddot{x} + 2\zeta T \dot{x} + x &= kz, \\ z &= F(\sigma), \\ \sigma &= g - x. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений промежуточные переменные  $\sigma$  и  $z$ , получаем

$$T^2 \ddot{x} + 2\zeta T \dot{x} + x = kF(g - x) . \quad (1.4)$$

Обозначив выходной сигнал  $x$  и скорость  $\dot{x}$  его изменения через  $x_1$  и  $x_2$ , приведем уравнение (1.4) к системе дифференциальных уравнений первого порядка вида (1.1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{2\zeta}{T} x_2 - \frac{1}{T^2} x_1 + \frac{k}{T^2} F(g - x_1), \end{aligned}$$

которые являются уравнениями состояния системы, представленной на рис.1.2.■

### 1.1.2. Описание систем с одним нелинейным элементом

Для исследования линейных систем управления были разработаны удобные формы математического описания и эффективные методы анализа [23,35]. Применение этих методов для нелинейных систем общего вида невозможно. Однако среди нелинейных систем можно выделить такой класс систем управления, для которых разработанный аппарат применим с незначительными изменениями. Это класс систем управления с одним нелинейным элементом.

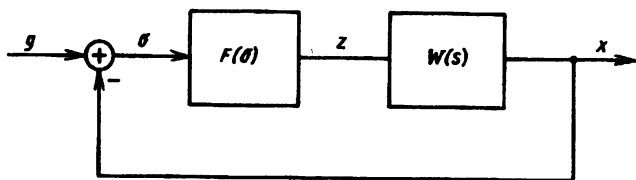


Рис.1.3.

Структурная схема системы с одним нелинейным элементом (звеном) изображена на рис.1.3, где  $W(s)$  — передаточная функция линейной части разомкнутой системы, а  $F(\sigma)$  — функция, устанавливающая связь вход-выход нелинейного элемента.

Наличие нелинейного звена придает системе управления свойства, присущие только нелинейным системам (например, автоколебания). С другой стороны, поскольку нелинейный элемент один, то для упрощения анализа той или иной особенности поведения системы его можно заменить тем или иным эквивалентным линейным звеном. При этом необходимо использовать различные методы линеаризации (например, гармоническую, статистическую).

Нелинейный элемент задается функцией  $z = F(\sigma)$ , которая зна-

чению  $\sigma(t)$  входного сигнала ставит в соответствие значение  $z(t)$  выходного сигнала звена:  $z(t) = F(\sigma(t))$ . Встречаются также звенья, в которых значение  $z(t)$  выходного сигнала зависит не только от значения  $\sigma(t)$  входного сигнала, но и от скорости  $\dot{\sigma}(t)$  его изменения. В этом случае нелинейный элемент задается функцией  $z = F(\sigma, \dot{\sigma})$ .

Широкое применение на практике получили нелинейные элементы с негладкой характеристикой  $F(\sigma)$ . Приведем примеры типовых нелинейных звеньев.

1. Релейный элемент (рис.1.4).

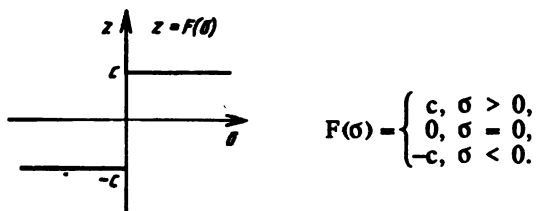


Рис.1.4.

2. Релейный элемент с зоной нечувствительности (рис.1.5).

3. Элемент с люфтом (рис.1.6).

4. Элемент с петлей гистерезиса (рис.1.7). Имеет зону неоднозначности, т.е. выходной сигнал  $z(t)$  зависит при  $\sigma(t) \in [-b; b]$  от знака скорости (возрастания или убывания) входного сигнала.

5. Элемент с зонами нечувствительности и неоднозначности (рис.1.8).

Другие типовые нелинейные элементы приведены в [23] (см. также приложение в [8]).

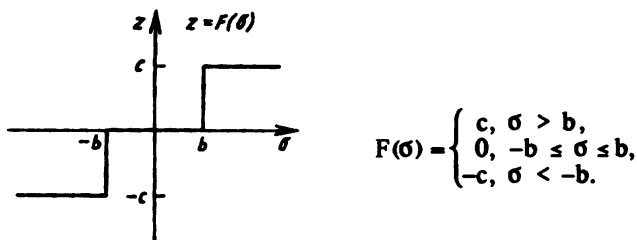
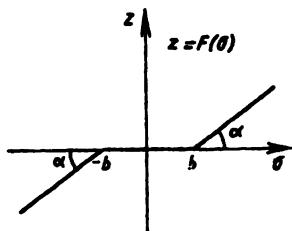


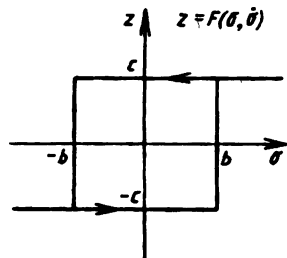
Рис.1.5.



$$F(\sigma) = \begin{cases} c(\sigma - b), & \sigma > b, \\ 0, & -b \leq \sigma \leq b, \\ c(\sigma + b), & \sigma < -b; \end{cases}$$

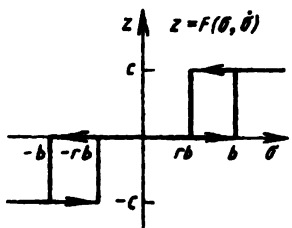
$$\operatorname{tg} \alpha = c.$$

Рис.1.6.



$$F(\sigma, \dot{\sigma}) = \begin{cases} c, & \sigma \geq b \text{ или } \begin{cases} -b < \sigma \leq b, \\ \dot{\sigma} < 0, \end{cases} \\ -c, & \sigma \leq -b \text{ или } \begin{cases} -b \leq \sigma < b, \\ \dot{\sigma} > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Рис.1.7.



$$F(\sigma, \dot{\sigma}) = \begin{cases} c, & \sigma \geq b \text{ или } \begin{cases} rb < \sigma < b, \\ \dot{\sigma} < 0, \end{cases} \\ 0, & -rb \leq \sigma \leq rb \text{ или } \begin{cases} rb < \sigma < b, \\ \dot{\sigma} > 0, \end{cases} \\ \text{или } \begin{cases} -b < \sigma < -rb, \\ \dot{\sigma} < 0, \end{cases} \\ -c, & \sigma \leq -b \text{ или } \begin{cases} -b < \sigma < -rb, \\ \dot{\sigma} > 0, \end{cases} \end{cases}$$

$$0 < r < 1.$$

Рис.1.8.

Для негладких характеристик  $z = F(\sigma)$  обычно отмечают наличие следующих характерных зон:

**зоны нечувствительности**, если имеется промежуток значений входного сигнала  $\sigma$ , при которых выходной сигнал  $z = F(\sigma)$  равен нулю;

**участков насыщения**, если имеются промежутки (конечные или бесконечные) значений  $\sigma$ , на которых функция  $F(\sigma)$  постоянна;

зоны неоднозначности, если имеются промежутки значений  $\delta$ , на которых выходной сигнал может принимать различные значения в зависимости от некоторых параметров или от знака скорости  $\dot{\delta}$  изменения входного сигнала;

участков линейности, если на некоторых промежутках функция  $F(\delta)$  является линейной.

## 1.2. АНАЛИЗ ВЫХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Основная задача анализа выходных процессов нелинейной детерминированной системы управления (1.1) состоит в нахождении выходного сигнала  $x(t)$  (траектории движения) на отрезке времени  $t \in [t_0, t_1]$  по заданному на этом отрезке входному сигналу  $g(t)$  и начальному состоянию  $x(t_0) = x_0$ . Как и в случае линейных систем, движение системы при отсутствии внешних воздействий ( $g(t) \equiv 0$ ) называют *свободным движением*, а при наличии ненулевых воздействий ( $g(t) \neq 0$ ) — *вынужденным*. Однако, в отличие от линейных систем, в которых выполняется принцип суперпозиции, движение нелинейных систем нельзя представить в виде суммы свободного и вынужденного движений.

Для решения задачи анализа обычно используются численные [32] или численно-аналитические [12] методы решения систем дифференциальных уравнений, поскольку аналитическое решение этих нелинейных уравнений удается найти крайне редко.

Теория линейных систем управления используется при исследовании поведения нелинейной системы для двух классов задач.

1. Если для нелинейной системы (1.1) найдена опорная траектория  $x^*(t)$  при воздействии  $g^*(t)$ , то поведение  $x(t)$  нелинейной системы в окрестности опорной траектории может быть представлено с помощью отклонений (вариаций)  $\delta x(t)$  от опорной траектории:  $x(t) = x^*(t) + \delta x(t)$ . Вариации  $\delta x(t)$  описываются уже системой линейных уравнений:

$$\dot{\delta x}(t) = f_x(t, x^*(t), g^*(t)) \delta x(t) + f_g(t, x^*(t), g^*(t)) \delta g(t), \quad (1.5)$$

где  $\delta g(t)$  — вариация внешних воздействий,  $\delta g(t) = g(t) - g^*(t)$ ;  $f_x$ ,  $f_g$  — матрицы частных производных вектор-функции  $f(t, x, g)$  по соответствующим аргументам,  $f_x = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$ ,  $f_g = \left| \frac{\partial f_i}{\partial g_k} \right|$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, n$ ;  $k = 1, \dots, m$ .

Поэтому дальнейший анализ нелинейной системы (1.1) в окрестности опорного режима проводится методами анализа линейных систем, применяемыми к уравнениям в вариациях (1.5). Такой прием называется *линеаризацией* уравнений движения (1.1) относительно опорной траектории [21, 43].

2. При рассмотрении специального класса систем управления, содержащих один нелинейный элемент (см.рис.1.3), исследование проводится путем линеаризации нелинейного элемента и анализа полученной линейной системы (см.разд.1.4–1.5). Если нелинейных элементов несколько, то линеаризуется каждый из них.

**Пример 1.3.** Для летательного аппарата, совершающего спуск на поверхность Луны:

а) составить систему уравнений, описывающих вертикальное движение ЛА на этапе реактивной мягкой посадки;

б) определить траекторию движения на отрезке времени  $[0, t_1]$ , если реактивный двигатель включается на полную тягу в момент времени  $t_e \in [0, t_1]$ ;

в) линеаризовать уравнения движения относительно найденной траектории.

□ а) Рассмотрим движение летательного аппарата на заключительном этапе спуска на поверхность Луны — этапе реактивной мягкой посадки. Вертикальное движение аппарата происходит под действием двух сил: гравитационного притяжения и тяги реактивного двигателя. Записывая второй закон Ньютона, получаем уравнение

$$m\dot{v} = -mg_x + k_T u,$$

где  $m$  — масса аппарата;  $v$  — вертикальная скорость;  $g_x$  — ускорение свободного падения на Луне;  $k_T u$  — сила тяги реактивного двигателя, которая пропорциональна секунднему расходу топлива  $u(t)$  ( $k_T$  — коэффициент пропорциональности).

Выражая из этого уравнения ускорение  $\dot{v}$  и добавляя уравнения изменения высоты полета  $h$  и массы аппарата  $m$ , получаем систему уравнений движения ЛА:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= -u, \\ \dot{v} &= -g_x + \frac{k_T}{m} u, \\ \dot{h} &= v. \end{aligned}$$

Начальными условиями для данной системы являются масса  $m_0$ , скорость  $v_0$  и высота  $h_0$  в момент времени  $t=0$  начала вертикального спуска. Входным сигналом (управлением) служит закон  $u(t)$  изменения секундного расхода топлива. Функция  $u(t)$  ограничена:  $0 \leq u(t) \leq u_{\max}$ , где  $u_{\max}$  — максимальный (для реактивного двигателя) секундный расход топлива. Выходными сигналами системы считаем зависимости массы, скорости и высоты полета от времени.

б) Найдем выходные сигналы  $m(t)$ ,  $v(t)$ ,  $h(t)$ , если заданы начальные условия:

$$m(0) = m_0, \quad v(0) = v_0, \quad h(0) = h_0$$

и релейный закон управления:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_p, \\ u_{\max}, & t_p \leq t \leq t_1, \end{cases}$$

где  $t_p$  — момент включения двигателя;  $t_1$  — момент окончания процесса управления.

Рассмотрим два участка траектории движения. На первом участке — до включения двигателя — происходит свободное падение аппарата, масса которого не меняется. Интегрируя уравнения движения при  $u(t) = 0$ , находим

$$m_1(t) = m_0, \quad v_1(t) = v_0 - g_x t, \quad h_1(t) = h_0 + v_0 t - \frac{g_x t^2}{2}, \quad 0 \leq t < t_p.$$

На втором участке — после включения двигателя — на аппарат действует постоянная сила тяги, а масса аппарата изменяется. Обозначим:  $\tau = t - t_p$  — время работы двигателя;  $\tilde{v}(\tau) = v(t) - v_1(t)$ ,  $\tilde{h}(\tau) = h(t) - h_1(t)$  — отклонения скорости и высоты полета при включенном двигателе от соответствующих величин при свободном падении. Тогда с помощью уравнений движения получим уравнения для введенных переменных:

$$\frac{d\tilde{v}}{d\tau} = \frac{dv}{dt} - \frac{dv_1}{dt} = \frac{d}{dt}(v - v_1) = \frac{k_T}{m} u_{\max} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tilde{v}}{d\tau} = \frac{k_T}{m} u_{\max},$$

$$\frac{d\tilde{h}}{d\tau} = \frac{dh}{dt} - \frac{dh_1}{dt} = \frac{d}{dt}(h - h_1) = v - v_1 = \tilde{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tilde{h}}{d\tau} = \tilde{v}.$$

Начальные условия при  $\tau = 0$  (что соответствует моменту времени  $t = t_p$ ) для отклонений  $\tilde{v}$  и  $\tilde{h}$  — нулевые:

$$\tilde{v}(0) = v(t_p) - v_1(t_p) = 0, \quad \tilde{h}(0) = h(t_p) - h_1(t_p) = 0.$$

Интегрируя полученные уравнения при нулевых начальных условиях, находим

$$\tilde{v} = \int_0^{\tau} \frac{k_T u_{\max}}{m} d\tau = -k_T \ln \left( \frac{m}{m_0} \right),$$

$$\tilde{h} = \int_0^{\tau} \tilde{v} d\tau = - \int_0^{\tau} k_T \ln \left( \frac{m}{m_0} \right) d\tau = k_T \tau + \frac{k_T m}{u_{\max}} \ln \left( \frac{m}{m_0} \right).$$

Следовательно, после включения двигателя выходные сигналы системы имеют вид

$$m(t) = m_0 - (t - t_0)u_{\max},$$

$$v(t) = v_0 - g_x t - k_T \ln \left( \frac{m(t)}{m_0} \right),$$

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{g_x t^2}{2} + k_T (t - t_0) + \frac{k_T m(t)}{m_0} \ln \left( \frac{m(t)}{m_0} \right).$$

Найденная траектория движения является решением поставленной задачи анализа.

в) Теперь обсудим вопрос линеаризации уравнений движения ЛА. Полученную траекторию и заданное релейное управление примем в качестве опорного режима. Обозначим через  $\delta u$ ,  $\delta m$ ,  $\delta v$ ,  $\delta h$  отклонения (вариации) входного и выходных сигналов относительно опорного режима. Система уравнений в вариациях (1.5) для рассматриваемого объекта управления имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta m &= -\delta u, \\ \frac{d}{dt} \delta v &= \frac{k_T}{m} \delta u - \frac{k_T}{m^2} u \delta m, \\ \frac{d}{dt} \delta h &= \delta v. \end{aligned}$$

Заметим, что малые вариации управления  $\delta u$  для рассматриваемой модели должны удовлетворять ограничениям:  $\delta u(t) \geq 0$  при  $t < t_1$ , и  $\delta u(t) \leq 0$  при  $t \geq t_1$ , что отвечает выбранному опорному режиму и имеющимся ограничениям на управление.■

**Пример 1.4.** Получить траекторию спуска ЛА на этапе аэродинамического торможения в атмосфере Марса (см. пример 1.1) при релейном законе изменения эффективного аэродинамического качества.

□ Рассмотрим модель движения ЛА на этапе аэродинамического торможения в атмосфере Марса (см. пример 1.1). Входным сигналом (управлением) в данной модели является закон изменения  $k_{\text{эф}}(t)$  эффективного аэродинамического качества аппарата, выходными сигналами — скорость  $v(t)$ , угол  $\theta(t)$  наклона траектории и высота полета  $h(t)$ . Уравнения, описывающие движение ЛА, нельзя решить аналитически. Однако численное решение можно легко получить с помощью различных схем решения начальных задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [32]. На рис.4.5. приведены графики выходных сигналов системы, полученные для начальных условий.  $v(t_0) = 6000$  м/с,  $\theta(t_0) = -0,314$  рад,  $h(t_0) = -10^6$  м при релейном законе управления



$$k_{\text{эф}} = \begin{cases} -k_6, & t_0 \leq t < t_n, \\ k_6, & t_n \leq t \leq t_1, \end{cases}$$

где  $t_n$  — момент переключения эффективного аэродинамического качества. Расчеты проводились методом Рунге-Кутты на сетке с переменным шагом. Узлы сетки располагались гуще на тех промежутках времени, где скорость изменения выходных сигналов выше. Значения параметров модели следующие:

$$t_0 = 0 \text{ с}; \quad t_1 = 180 \text{ с}; \quad \rho_0 = 0,013 \text{ кг/м}^3; \quad \beta = 9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}; \\ R = 3,4 \cdot 10^6 \text{ м}; \quad g_n = 3,72 \text{ м/с}^2; \quad \sigma_x = \frac{1}{150} \text{ м}^2/\text{кг}; \quad k_6 = 0,3. \quad \blacksquare$$

### 1.3. АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

#### 1.3.1. Построение фазовых траекторий

Для исследования свободного движения автономных систем, описываемых дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t)), \quad (1.6)$$

где  $f(x, \dot{x})$  — кусочно-непрерывная функция, применяется метод фазовой плоскости.

Перепишем уравнение (1.6) в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= f(x(t), y(t)). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Поскольку время  $t$  входит неявно в уравнение движения (рассматриваемая система *автономна*), то его легко исключить, поделив второе уравнение системы (1.7) на первое. Получим *уравнение фазовых траекторий* системы (1.6):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}, \quad (1.8)$$

которое связывает положение  $x$  и скорость движения  $y = \dot{x}$  системы (1.6). Решение  $y = y(x)$  уравнения (1.8) называется *фазовой траекторией*, а производная  $dy/dx$  — *фазовой скоростью*.

Заметим, что для нахождения свободного движения  $x(t)$  нужно решать уравнение (1.6) второго порядка с начальными условиями

$x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$ . Фазовая траектория  $y = y(x)$  определяется как решение уравнения (1.8) первого порядка при начальном условии  $y(x_0) = \dot{x}_0$ .

Графики фазовых траекторий строятся на фазовой плоскости в координатах  $x$  и  $y = \dot{x}$ . Изменению положения системы (1.6) с течением времени соответствует движение изображающей точки  $(x(t), \dot{x}(t))$  по фазовой траектории. Тем самым анализ свободного движения сводится к построению фазовых траекторий системы (1.6), которые показывают ее поведение на фазовой плоскости.

Для построения фазовой траектории автономной системы второго порядка при начальных условиях  $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$  нужно проделать следующие операции.

1. Составить дифференциальное уравнение свободного движения системы:

$$\ddot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t)),$$

если система управления задана структурной схемой или описана каким-либо другим способом [35].

2. Записать уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}$$

и начальное условие в виде  $y(x_0) = \dot{x}_0$ .

3. Получить фазовую траекторию  $y = y(x)$ , решая задачу Коши, поставленную в п.2.

4. Построить график зависимости  $y = y(x)$  на фазовой плоскости (в координатах  $x$  и  $y$ ). Указать (стрелкой) направление движения по фазовой траектории, которое происходит в сторону увеличения координаты  $x$  при  $y > 0$  и в сторону уменьшения абсциссы при  $y < 0$ . Отметим, что ось абсцисс фазовые траектории пересекают вертикально.

Пример 1.5. Для системы управления, структурная схема которой изображена на рис.1.9, при начальных условиях  $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$  построить фазовую траекторию.

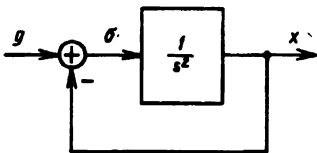


Рис.1.9.

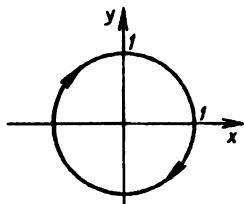


Рис.1.10.

□ 1. По структурной схеме (рис.1.9) составляем дифференци-

альное уравнение [35]. Сигналы  $g$ ,  $b$ ,  $x$  связаны соотношениями  $\ddot{x} = b$ ,  $b = g - x$ . Следовательно, свободное движение (при  $g(t) = 0$ ) описывается уравнением  $\ddot{x} = -x$ .

2. Записываем уравнение фазовых траекторий и начальное условие

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(1) = 0. \quad (1.9)$$

3. Разделяя переменные в уравнении (1.9) и интегрируя, получаем  $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{c^2}{2}$ . Из общего интеграла  $x^2 + y^2 = c^2$  уравнения (1.9) выделяем частный интеграл  $x^2 + y^2 = 1$ , удовлетворяющий начальному условию.

4. Частный интеграл в неявном виде задает фазовую траекторию, график которой является окружностью. На рис.1.10 изображена искомая фазовая траектория и указано направление движения по ней, соответствующее изменению положения  $x(t)$  и скорости  $\dot{x}(t)$  рассматриваемой системы с течением времени. Как видим, данная система управления при отсутствии внешних воздействий совершает незатухающие (так как фазовая траектория — замкнутая линия) колебания. ■

Если в системе присутствуют нелинейные элементы, имеющие релейный характер, или элементы с зоной нечувствительности либо с зоной неоднозначности (см. разд.1.1), то фазовую плоскость следует разбить на области и для каждой области записать соответствующее уравнение фазовых траекторий. Затем необходимо построить фазовую траекторию в области, содержащей начальную точку  $(x_0, \dot{x}_0)$ . Если фазовая траектория, исходящая из точки  $(x_0, \dot{x}_0)$ , достигает границы, отделяющей начальную область от соседней, то следует найти координаты  $(x_1, \dot{x}_1)$  точки ее пересечения с границей. Эти координаты используются в качестве начальных условий для решения уравнения фазовых траекторий, соответствующего соседней области.

Таким образом, построение фазовой траектории для рассматриваемых систем начинается с области, содержащей начальную точку  $(x_0, \dot{x}_0)$ , и продолжается последовательно с переходами от области к области. Отметим, что на границе областей фазовая траектория непрерывна, а фазовая скорость  $dy/dx$  может терпеть разрыв.

Пример 1.6. Для системы управления, структурная схема которой изображена на рис.1.11, при начальных условиях  $x(0) = 3$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  построить фазовую траекторию.

□ По структурной схеме (рис.1.11) составляем дифференциальное уравнение свободного движения ( $g(t) = 0$ ):

$$\begin{cases} \ddot{x} = z \\ z = F(\sigma, \dot{\sigma}) \\ \sigma = -x \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} = F(-x, -\dot{x}).$$

Поскольку функция  $F$  нечетная, то уравнение движения можно записать так:  $\ddot{x} = -F(x, \dot{x})$ . Тогда уравнение фазовых траекторий будет иметь вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F(x, y)}{y}.$$

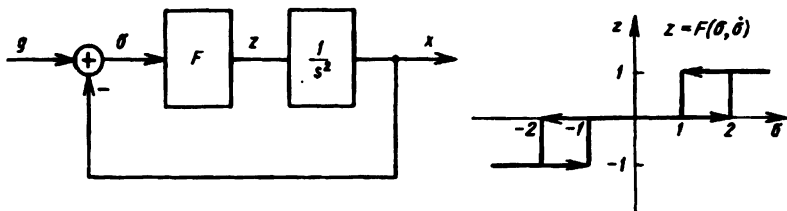


Рис.1.11.

Данная система содержит релейный элемент  $F$  с зоной нечувствительности и с зоной неоднозначности. Разобьем фазовую плоскость на три области  $A$ ,  $B$  и  $B$  (рис.1.12), в каждой из которых функция  $F(x, y)$  принимает одно значение.

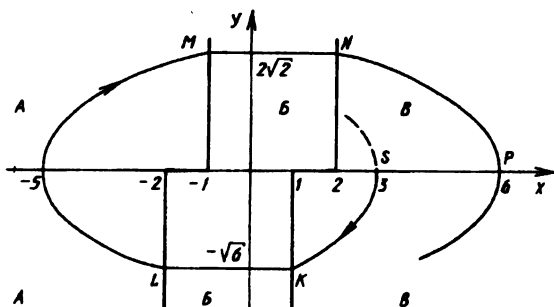


Рис.1.12.

Запишем уравнения фазовых траекторий: для области  $A$ :  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$ ;

для области  $B$ :  $\frac{dy}{dx} = 0$ ; для области  $B$ :  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y}$ .

Начальная точка  $S(3;0)$  лежит в области  $B$ , поэтому сначала решаем задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y}, \quad y(3) = 0$$

для этой области. Интегрируя уравнение, получаем семейство парабол  $y^2/2 = -x + c$ , из которого выбираем параболу  $x = 3 - y^2/2$ , проходящую через начальную точку  $S(3;0)$ . Устанавливаем направление движения изображающей точки по данной параболе и отбрасываем одну из ее ветвей (ветвь при  $y > 0$ ), так как движение по этой ветви могло быть только до начального момента времени. Оставшаяся ветвь параболы достигает границы ( $x = 1$ ;  $y < 0$ ) области  $B$  в точке  $K(1; -\sqrt{6})$  и попадает в область  $B$ . Составляем задачу Коши для области  $B$ :

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad y(1) = -\sqrt{6}.$$

Как видим, в области  $B$  фазовая скорость не меняется и фазовая траектория является прямой:  $y(x) = -\sqrt{6}$ . Границу ( $x = -2$ ;  $y < 0$ ) области  $B$  эта прямая пересекает в точке  $L(-2; -\sqrt{6})$ .

Далее последовательно получаем:

$$\text{дуга LM: } x = \frac{y^2}{2} - 5; \quad M(-1; 2\sqrt{2});$$

$$\text{дуга MN: } y = 2\sqrt{2}; \quad N(2; 2\sqrt{2});$$

$$\text{дуга NP: } x = 6 - \frac{y^2}{2}; \quad P(6; 0).$$

Фазовая траектория системы изображена на рис.1.12.■

### 1.3.2. Построение фазового портрета методом изоклин

Для получения полного представления о поведении автономной системы второго порядка, в частности для анализа устойчивости, необходимо изобразить на фазовой плоскости все характерные фазовые траектории системы, т.е. построить *фазовый портрет* системы управления. Для приближенного построения фазового портрета удобно использовать *метод изоклин*, не требующий интегрирования уравнения (1.8) фазовых траекторий.

Метод состоит из двух этапов:

1. На фазовой плоскости строим систему изоклин — линий с

одинаковым наклоном фазовых траекторий. Уравнение изоклин имеет следующий вид:

$$\frac{f(x, y)}{y} = c, \quad (1.10)$$

где параметр  $c$  равен тангенсу угла наклона фазовой траектории и может принимать любые действительные значения. На каждой изоклине (при конкретном значении  $c$ ) штрихами наносим направление ( $dy/dx = c$ ) прохождения фазовой траектории.

2. По изоклинам строим (приближенно) фазовые траектории. Например, на рис.1.13 имеются две изоклины с нанесенными на них направлениями фазовой скорости. Из точки  $A$  проводим две прямые:  $AB$  с наклоном  $c_1$  и  $AD$  с наклоном  $c_2$ . Выбираем на отрезке  $BD$  середину — точку  $E$ . Проводим прямую  $AE$ , считая, что отрезок  $AE$  приближенно совпадает с фазовой траекторией, проходящей через точку  $A$ .

При наличии в системе управления нелинейных элементов с разрывными характеристиками фазовая плоскость разбивается на части, в каждой из которых строится свой портрет, при этом учитывается, что на границе областей фазовые траектории непрерывны, а фазовые скорости могут иметь разрыв.

Пример 1.7. Для системы управления, структурная схема которой изображена на рис.1.9, построить фазовый портрет.

□ Уравнение изоклин для этой системы имеет вид  $-x/y = c$  или  $y = -x/c$ , что следует из уравнения (1.9). Таким образом, семейство изоклин представляет собой пучок прямых, проходящих через начало координат.

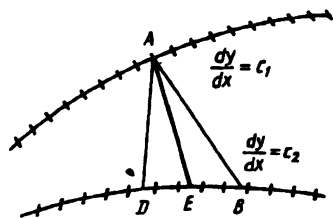


Рис.1.13.

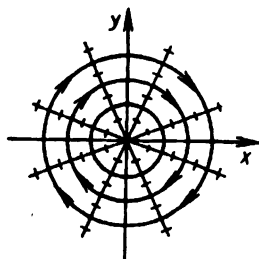


Рис.1.14

Заметим, что направление фазовой траектории  $dy/dx = c$  перпендикулярно изоклине  $y = -x/c$ . Поэтому фазовые траектории являются окружностями. Фазовый портрет рассматриваемой системы изображен на рис.1.14.■

Пример 1.8. Для системы управления, структурная схема кото-

рой изображена на рис.1.15, построить фазовый портрет.

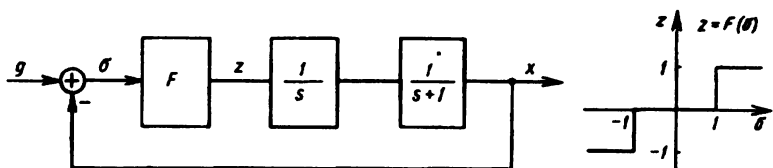


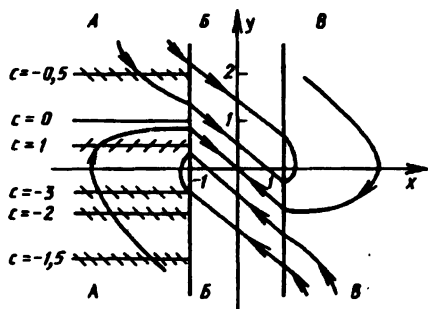
Рис.1.15.

□ Составляем уравнение фазовых траекторий:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} = F(\sigma) \\ \sigma = g - x \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} = -\dot{x} - F(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1 - \frac{F(x)}{y}$$

Уравнение изоклин имеет вид  $-1 - \frac{F(x)}{y} = c$ . Поскольку система управления содержит релейный элемент  $F$  с зоной нечувствительности, то фазовую плоскость разбиваем на три области  $A$ ,  $B$  и  $B$  (рис.1.16), в которых функция  $F(x,y)$  принимает постоянные значения. Запишем уравнение изоклин:

для области  $A$ :  $y = \frac{1}{c+1}$ ; для области  $B$ :  $y = -\frac{1}{c+1}$ .



$c$	$y = \frac{1}{c+1}$
0	$y = 1$
1	$y = 0,5$
-0,5	$y = 2$
-1,5	$y = -2$
-2	$y = -1$
-3	$y = -0,5$

Рис.1.16.

В области  $B$  уравнение изоклин имеет вид  $c = -1$ , что свидетельствует о том, что все фазовые траектории в этой полосе являются прямыми линиями с наклоном  $dy/dx = -1$ . В области  $A$  строим семейство изоклин, выбирая значения параметра  $c$  так, чтобы изоклины "равномерно заполняли" эту область. Наносим штрихами направления прохождения фазовых траекторий и затем строим приближенно фазовые траектории, указывая на них направление движения

изображающей точки. В области  $B$  картина фазовых траекторий симметрична построенной в области  $A$ . Фазовый портрет системы изображен на рис.1.16.■

### 1.3.3. Анализ устойчивости систем управления на фазовой плоскости

Анализ устойчивости автономной системы второго порядка сводится к построению ее фазового портрета, по которому можно проследить эволюцию свободного движения системы из любого положения. Фазовые траектории системы (1.6) могут быть трех типов:

а) точка  $(x_0, 0)$ , если уравнение (1.6) имеет постоянное решение  $x(t) \equiv x_0$  ( $y(t) = \dot{x}(t) \equiv 0$ ). Такая точка на фазовой плоскости называется *положением равновесия* системы. Если в любой окрестности положения равновесия имеется хотя бы одна фазовая траектория, уходящая от него при  $t \rightarrow +\infty$ , то точка равновесия является неустойчивой. Если же все фазовые траектории в окрестности точки равновесия неограниченно приближаются к ней при  $t \rightarrow +\infty$ , то данное положение равновесия называется *асимптотически устойчивым*;

б) замкнутая кривая (траектория); если уравнение (1.6) имеет периодическое решение;

в) незамкнутая кривая, которая соответствует неперiodическому решению уравнения (1.6).

Для анализа устойчивости системы достаточно выяснить качественную картину разбиения фазовой плоскости на характерные области с однотипными траекториями. Поэтому нужно выяснить расположение не всех фазовых кривых, а лишь некоторых особых траекторий.

Приведем имеющуюся классификацию *особых точек* и *особых линий* фазового портрета. Особые точки — это точки равновесия системы, которые определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ y &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

В особых точках скорость  $\dot{x}(t)$  и ускорение  $\ddot{x}(t)$  системы равны нулю, а фазовая скорость  $dy/dx$  системы не определена.

Если функция  $f(x, y)$  гладкая в окрестности особой точки, то поведение системы в этой окрестности положений равновесия совпадает с поведением линеаризованной системы [23]. Линеаризуем уравнение (1.6) около опорного режима  $x(t) \equiv x_0 = \text{const}$ . Получим

$$\delta \ddot{x} - f_x(x_0, 0) \delta \dot{x} - f_x(x_0, 0) \delta x = 0.$$

Корни  $\lambda_1, \lambda_2$  характеристического уравнения



$$\lambda^2 - f_x(x_0, 0)\lambda - f_x(x_0, 0) = 0$$

определяют поведение фазовых траекторий линеаризованной системы в окрестности особой точки. Имеются четыре типа особых точек: фокус, узел, седло и центр.

1. Особая точка называется *фокусом*, если корни  $\lambda_1, \lambda_2$  комплексно-сопряженные. Фокус является устойчивой точкой равновесия (рис.1.17,*а*), если корни имеют отрицательные вещественные части, и неустойчивой (рис.1.17,*б*) в противном случае.

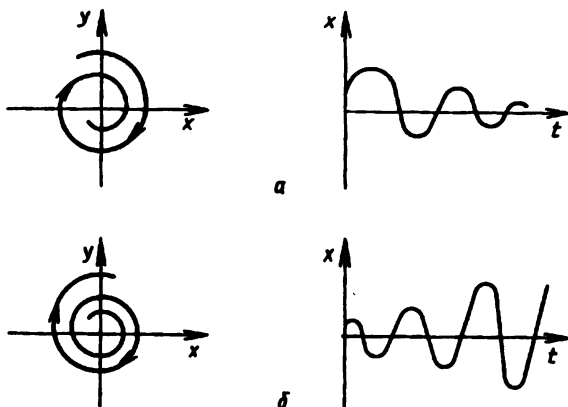


Рис.1.17.

2. Особая точка называется *узлом*, если корни  $\lambda_1, \lambda_2$  действительные одного знака. Причем узел является устойчивым (рис. 1.18,*б*), если оба корня отрицательны, и неустойчивым (рис. 1.18,*а*), если оба корня неотрицательны.

3. Особая точка называется *седлом*, если корни  $\lambda_1, \lambda_2$  действительные разных знаков. Седло — неустойчивая точка равновесия (рис.1.19).

4. Особая точка называется *центром* (рис.1.20), если корни  $\lambda_1, \lambda_2$  чисто мнимые.

На рис.1.17 — 1.20 изображены фазовые траектории (оси координат  $x, y$ ) и соответствующие им траектории движения (оси координат  $t, x$ ), характеризующие поведение системы в окрестности особой точки. На рис.1.18,1.19 соответствующие траектории обозначены одинаковыми цифрами.

Для систем, содержащих нелинейный элемент с зоной нечувствительности, на фазовом портрете возникает *особый отрезок*

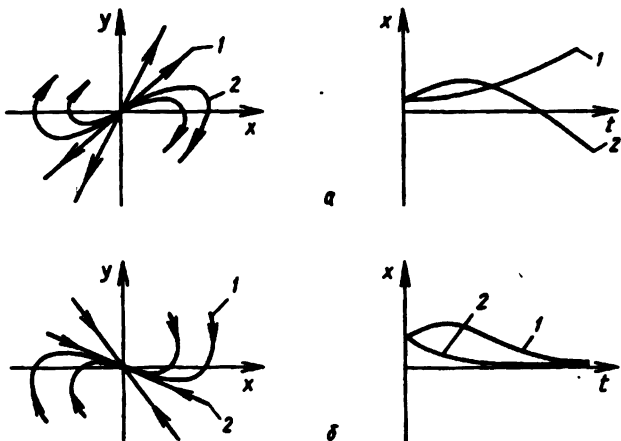


Рис.1.18.

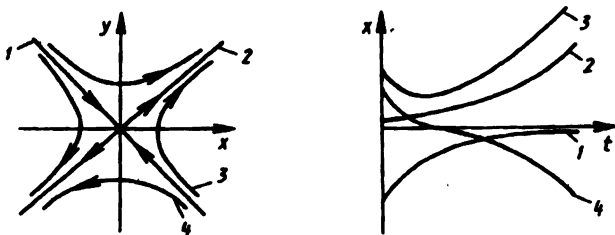


Рис.1.19.

(рис.1.21), состоящий из точек равновесия. Если все эти точки равновесия устойчивы, то особый отрезок называют *отрезком покоя* рассматриваемой системы.

Кроме особых точек, следует указать особые линии фазового портрета: предельные циклы и сепаратрисы.

*Предельным циклом* называется замкнутая фазовая кривая, в окрестности которой все фазовые траектории неограниченно приближаются к этой замкнутой кривой при  $t \rightarrow +\infty$  или при  $t \rightarrow -\infty$ . Цикл может быть *устойчивым* (рис.1.22,а), если любая изображающая точка  $(x(t); y(t))$  в его окрестности приближается к циклу

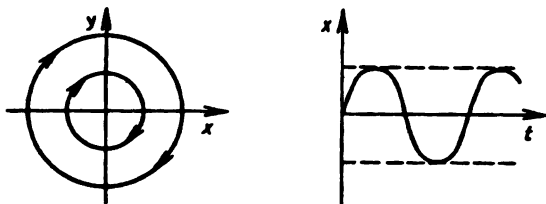


Рис.1.20.

при  $t \rightarrow +\infty$ ; *неустойчивым* (рис.1.22,б), если все изображающие точки в окрестности цикла приближаются к нему при  $t \rightarrow -\infty$ , и *полуустойчивым* (рис.1.22,в).

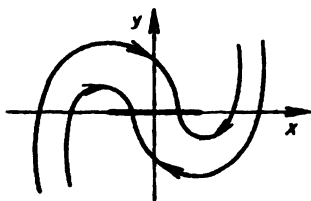


Рис.1.21.

*Сепаратрисой* называют фазовую траекторию, стремящуюся (при  $t \rightarrow \pm\infty$ ) к некоторому положению равновесия, в любой окрестности которой имеются траектории, вначале приближающиеся к этому положению равновесия, а затем удаляющиеся от него. Например, сепаратрисами являются четыре луча, пересекающиеся в особой точке типа седло (см. рис.1.19)

и служащие асимптотами для других фазовых траекторий.

Точки равновесия, предельные циклы и сепаратрисы определяют качественную картину поведения остальных фазовых траекторий. Например, на рис.1.23 особые точки типа центр разделяются сепаратрисами.

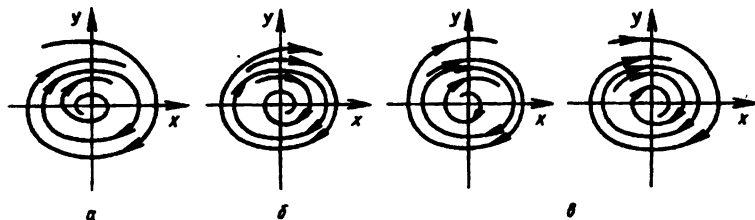


Рис.1.22.

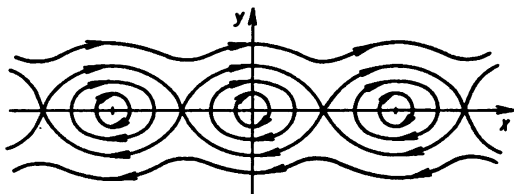


Рис.1.23.

Для системы управления, рассмотренной в примере 1.5, было получено уравнение (1.9) фазовых траекторий. Единственная особая точка  $x=0, y=0$  на фазовой плоскости для этой системы является центром, что сразу же можно определить по фазовому портрету на рис.1.14. Поэтому положение равновесия  $(0; 0)$  не является асимптотически устойчивым.

Для системы, рассмотренной в примере 1.8, был построен фазовый портрет (см.рис.1.16), по которому заключаем, что отрезок оси абсцисс  $-1 \leq x \leq 1$  является отрезком покоя, так как любая фазовая траектория системы оканчивается в некоторой точке этого отрезка.

Пример 1.9. Для системы управления, изображенной на рис.1.24, где параметры нелинейности:  $a=1, b=5\pi/2$ , построить фазовый портрет.

□ Составляем дифференциальное уравнение, описывающее свободное движение (при  $g(t) = 0$ ) системы:

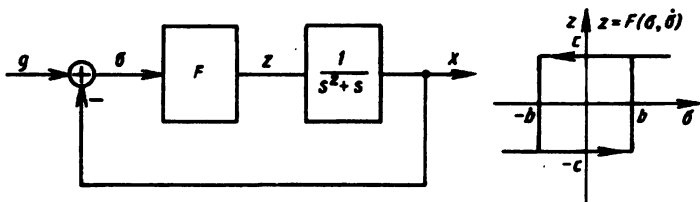


Рис.1.24.

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} = z \\ z = F(\sigma, \dot{\sigma}) \\ \sigma = -x \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} + \dot{x} = -F(x, \dot{x}),$$

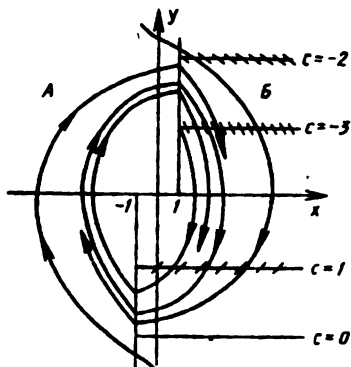
уравнение фазовых траекторий:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y + F(x, y)}{y}$  и уравнение

изоклин:  $\frac{y + F(x, y)}{y} = -c$  или  $y = -\frac{F(x, y)}{c + 1}$ .

Разделим фазовую плоскость на две области:  $A$  и  $B$ , в которых функция  $F(x, y)$  принимает постоянные значения (рис.1.25). Запишем уравнение изоклин:

для области  $A$ :  $y = \frac{5\pi}{2(c+1)}$ ; для области  $B$ :  $y = -\frac{5\pi}{2(c+1)}$ .

Построим изоклины и фазовые траектории в области  $B$ , а затем симметрично относительно начала координат в области  $A$ .



$c = \frac{dy}{dx}$	$y = \frac{-5\pi}{2(c+1)}$
0	$y = -5\pi/2$
1	$y = -5\pi/4$
-2	$y = 5\pi/2$
-3	$y = 5\pi/4$
$\infty$	$y = 0$

Рис.1.25.

Приближенное построение фазового портрета позволяет обнаружить особую линию — предельный цикл, которому соответствует замкнутая фазовая траектория. Найдем время, за которое изображающая точка проходит предельный цикл один раз. Для этого проинтегрируем уравнение  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y+b}{y}$  фазовых траекторий в области  $B$  и получим общее решение:  $x = b \ln(y+b) - y + \alpha$ , где  $\alpha$  — произвольная постоянная. Найдем значение произвольной постоянной, предполагая, что фазовая траектория начинается в точке  $(1; y_0)$ :

$$1 = b \ln(y_0+b) - y_0 + \alpha \Rightarrow \alpha = y_0 + 1 - b \ln(y_0+b).$$

Следовательно, фазовая траектория определяется равенством:

$$x = b \ln \frac{y+b}{y_0+b} + y_0 - y + 1.$$

Найденная фазовая траектория выходит из области  $B$ , пересекая

прямую  $x = -1$  в точке  $(-1; y_1)$ . Так как траектории в области  $A$  симметричны относительно начала координат траекториям в области  $B$ , то для того чтобы траектория, начинающаяся в точке  $(1; y_0)$ , была замкнутой, достаточно, чтобы она оканчивалась в области  $B$  в точке  $(-1; -y_0)$ . Поэтому значение  $y_0$  должно удовлетворять уравнению

$$b \ln \frac{b - y_0}{b + y_0} + 2y_0 + 2 = 0.$$

Решая приближенно это уравнение при  $b = 5\pi/2$ , получаем  $y_0 \approx 5,13$ .

Определим теперь время  $\vartheta$  прохождения изображающей точки от положения  $(1; y_0)$  до положения  $(-1; -y_0)$ . Для этого проинтегрируем уравнение  $\dot{y} + y = -b$  при начальном условии  $y(0) = y_0$ . Получим  $y = (y_0 + b)e^{-t} - b$ . В момент  $t = \vartheta$  должно выполняться равенство

$$y(\vartheta) = -y_0 \Rightarrow \vartheta = -\ln \frac{b - y_0}{b + y_0}.$$

Подставляя найденное выше значение  $y_0 \approx 5,13$ , определяем  $\vartheta \approx 1,56$ . Следовательно, весь предельный цикл изображающая точка проходит за время  $2\vartheta \approx 3,12$ . По фазовому портрету заключаем, что предельный цикл является устойчивым. ■

Заметим, что предельные циклы и сепаратрисы могут не быть фазовыми траекториями, но в любой окрестности этих линий обязательно проходят интегральные кривые уравнения фазовых траекторий. Рассмотрим теперь пример, который показывает существование особых движений системы, не подчиняющихся уравнению фазовых траекторий.

**Пример 1.10.** Для системы управления, изображенной на рис.1.26, построить фазовый портрет.

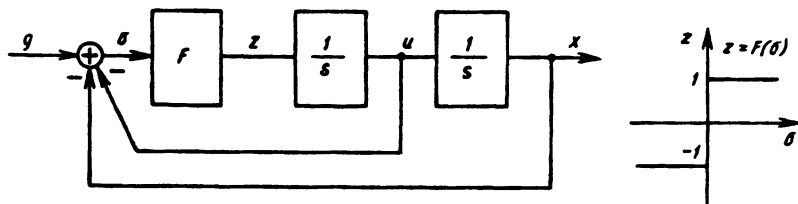


Рис.1.26.

□ Составим уравнение свободного движения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = z \\ z = F(\sigma) \\ \sigma = g - x - v \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} = -F(x + \dot{x})$$

и уравнение фазовых траекторий:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{F(x + y)}{y}$ . Разобьем

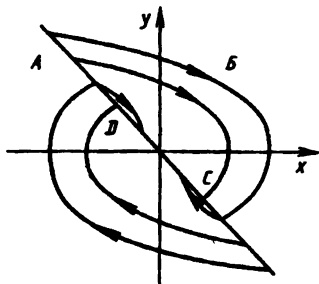


Рис.1.27.

фазовую плоскость на две области: А и В, в которых функция  $F$  принимает постоянные значения (рис.1.27). Запишем уравнения фазовых траекторий:

$$\text{для области А: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y};$$

$$\text{для области В: } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y}.$$

Следовательно, фазовые траектории системы представляют собой параболы:

$$\text{для области А: } x = \frac{y^2}{2} + \alpha;$$

$$\text{для области В: } x = \alpha - \frac{y^2}{2},$$

где  $\alpha$  — произвольная постоянная.

На линии  $y = -x$  переключений релейного звена отметим две точки:  $C(1; -1)$  и  $D(-1; 1)$ , которые разбивают ее на три части. В точках, лежащих на прямой переключения вне отрезка  $CD$ , происходит переход изображающей точки с параболы одного семейства (например, соответствующей области А) на параболу другого семейства (соответствующую области В). При этом фазовая траектория остается непрерывной, хотя фазовая скорость терпит разрыв. В каждой точке отрезка  $CD$  встречаются две фазовые траектории, поэтому, попав на отрезок  $CD$ , изображающая точка не может его покинуть и будет скользить по нему к началу координат. С другой стороны, точное движение по линии переключения невозможно, так как оно может иметь место лишь при мгновенном срабатывании релейного элемента. Из-за немгновенного действия реле возникает высокочастотный режим следующих друг за другом переключений, которому соответствуют высокочастотные колебания изображающей точки вокруг линии переключения. Такое движение нелинейных систем называется *скользящим режимом*.■

## 1.4. АНАЛИЗ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Анализ устойчивости (по начальным данным) системы (см. рис.1.3) с одним нелинейным элементом заключается в исследовании устойчивости ее свободного движения  $x(t) \equiv 0$  (при  $g(t) \equiv 0$ ) и проводится на основе следующего критерия.

Утверждение 1.1. (Критерий абсолютной устойчивости В.М.Попова). Пусть выполняются условия:

1) все полюсы передаточной функции  $W(s)$  линейной части системы имеют отрицательные вещественные части (т.е. линейная часть разомкнутой системы устойчива);

2) характеристика нелинейного элемента принадлежит сектору  $[0; k]$ , т.е.

$$F(0) = 0, \quad 0 \leq \frac{F(\sigma)}{\sigma} \leq k \quad \text{при всех } \sigma \neq 0; \quad (1.12)$$

3) существует действительное число  $q$  такое, что при всех  $\omega \in [0; \infty)$  выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}[(1 + i\omega q)W(i\omega)] + \frac{1}{k} > 0. \quad (1.13)$$

Тогда при любых ограниченных начальных отклонениях от нулевого значения функция  $b(t)$  остается ограниченной при  $t > 0$  и  $b(t) > 0$  при  $t \rightarrow \infty$  (т.е. система будет асимптотически устойчивой, так как из ограниченности  $b(t)$  следует ограниченность  $x(t)$ , а из стремления  $b(t)$  к нулю следует, что  $x(t) > 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ). Доказательство этого утверждения приведено в [30].

Для решения задач удобно использовать геометрическую интерпретацию данного критерия:

1. Построить годограф модифицированной частотной характеристики  $\tilde{W}(i\omega)$  линейной части системы

$$\tilde{W}(i\omega) = \operatorname{Re} W(i\omega) + i \operatorname{Im} W(i\omega) \quad (1.14)$$

при  $\omega \in [0; \infty)$ .

2. Провести прямую (Попова), проходящую через точку  $(-1/k; i0)$  и лежащую слева от годографа  $\tilde{W}(i\omega)$ . Если это удастся, то выполняется условие (1.13), и, следовательно, нулевое положение равновесия асимптотически устойчиво. Если прямой Попова не существует, то условие (1.13) не выполняется и заключение об устойчивости сделать нельзя.

Заметим, что условие (1.12) принадлежности характеристики  $F(\sigma)$  сектору  $[0; k]$  означает, что график функции  $z = F(\sigma)$  лежит между осью абсцисс  $z = 0$  и прямой  $z = k\sigma$  (рис.1.28). При этом конкретный вид функции  $z = F(\sigma)$  в формулировке критерия не играет никакой роли. Можно сказать, что рассматривается сразу целый класс систем с различными нелинейными элементами, характеристики которых принадлежат сектору  $[0; k]$ , и критерий определяет абсолютную устойчивость указанного класса. В частности, в



данный класс входят и линейные системы, получающиеся заменой нелинейного элемента усилительным звеном с коэффициентом усиления не большим  $k$ .

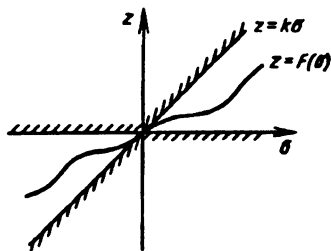


Рис.1.28.

Применение критерия Попова имеет много общего с применением критерия Найквиста [23] для анализа устойчивости линейных систем. Однако в отличие от критерия Найквиста критерий Попова является лишь достаточным условием абсолютной устойчивости.

Приведем необходимое условие абсолютной устойчивости. Если система (см.рис.1.3) с нелинейной характеристикой  $F(\sigma)$ , принадлежащей сектору  $[0;k]$ , асимптотически устойчива,

то линейная часть разомкнутой системы — устойчива (т.е. полюсы передаточной функции  $W(s)$  лежат в левой полуплоскости  $\text{Re } s < 0$ ) и годограф модифицированной частотной характеристики  $\tilde{W}(i\omega)$  при  $\omega \in (0; \infty)$  не пересекает луч  $(-\infty; -1/k]$  вещественной оси.

Таким образом, построив годограф модифицированной частотной характеристики (1.14), получим одну из трех возможных ситуаций:

а) годограф  $\tilde{W}(i\omega)$  пересекает луч  $(-\infty; -1/k]$  вещественной оси (рис.1.29,а) — в этом случае абсолютной устойчивости нет;

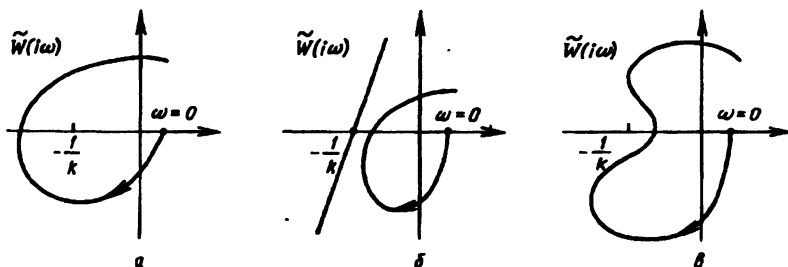


Рис.1.29.

б) годограф  $\tilde{W}(i\omega)$  не пересекает луч  $(-\infty; -1/k]$ , и можно провести прямую Попова, лежащую левее годографа (рис.1.29,б), — в этом случае система абсолютно устойчива;

в) годограф  $\tilde{W}(i\omega)$  не пересекает луча  $(-\infty; -1/k]$  вещественной оси, и провести прямую Попова нельзя (рис.1.29,в) — в этом случае никакого заключения об абсолютной устойчивости мы сделать не можем.

Пример 1.11. Исследовать устойчивость нелинейной системы, структурная схема которой изображена на рис.1.30, если нелинейная характеристика  $z = F(\sigma)$  имеет вид: а)  $z = \frac{1}{2}(\sigma + \sin\sigma)$ ;

б)  $z = \begin{cases} \sigma - 2, & \sigma > 2, \\ 0, & -2 \leq \sigma \leq 2, \\ \sigma + 2, & \sigma < -2 \end{cases}$  (см.рис.1.6); в)  $z = \begin{cases} 1, & \sigma > 0, \\ 0, & \sigma = 0, \\ -1, & \sigma < 0 \end{cases}$  (см.рис.1.4).

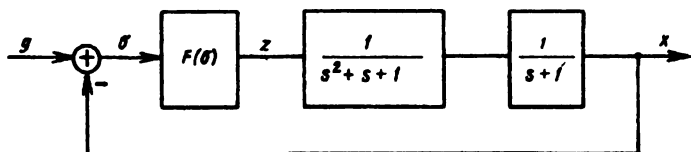


Рис.1.30.

□ Находим передаточную функцию  $W(s)$  линейной части разомкнутой системы, которая представляет собой последовательное соединение колебательного и апериодического звеньев:

$$W(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s + 1)}$$

Как видим, линейная часть системы устойчива, так как корни знаменателя передаточной функции  $W(s)$  имеют отрицательные вещественные части. Частотную характеристику

$$W(i\omega) = W(s) \Big|_{s=i\omega} = \frac{1}{(1 - \omega^2 + i\omega)(1 + i\omega)} = \frac{1 - 2\omega^2 - i\omega(2 - \omega^2)}{(1 - \omega^2 + \omega^4)(1 + \omega^2)}$$

подставим в неравенство (1.13):

$$\operatorname{Re} \frac{(1 + i\omega q) [1 - 2\omega^2 - i\omega(2 - \omega^2)]}{(1 - \omega^2 + \omega^4)(1 + \omega^2)} + \frac{1}{k} > 0$$

Выделяя вещественную часть и домножая на положительный знаменатель дроби, получаем

$$1 - 2\omega^2 + q\omega^2(2 - \omega^2) + \frac{1}{k}(1 + \omega^6) > 0$$

Для неотрицательной переменной  $\lambda = \omega^2$  полученное неравенство имеет вид

$$\frac{1}{k}\lambda^3 - q\lambda^2 + 2\lambda(q-1) + 1 + \frac{1}{k} > 0. \quad (1.15)$$

Критерий Попова будет выполняться, если найдется число  $q$ , для которого неравенство (1.15) окажется справедливым при всех  $\lambda \geq 0$ .

Определим теперь сектор  $[0; k]$ , которому принадлежат характеристики рассматриваемых нелинейных элементов. Для нечетной функции  $z = \frac{1}{2}(\sigma + \sin \sigma)$  имеем при  $\sigma \geq 0$  оценку  $\frac{1}{2}(\sigma + \sin \sigma) \leq \sigma$ ,

поэтому (в случае а) можно взять  $k=1$ . Для элемента с люфтом (случай б) величина  $k$  также равна 1. Для релейного элемента (случай в) следует положить  $k=\infty$ .

Запишем неравенство (1.15) при  $k=1$  (случай а и б):

$$\lambda^3 - q\lambda^2 + 2\lambda(q-1) + 2 > 0.$$

При  $q=2$  многочлен, стоящий в левой части неравенства будет монотонно возрастать для всех  $\lambda \in (-\infty; \infty)$ . Поскольку при  $\lambda=0$  многочлен положителен, то при  $\lambda \geq 0$  он будет принимать только положительные значения. Таким образом, системы с нелинейностями а и б будут устойчивыми.

Для  $k=\infty$  неравенство (1.15) примет вид

$$-q\lambda^2 + 2\lambda(q-1) + 1 > 0. \quad (1.16)$$

Для положительных значений  $q$  неравенство не будет выполняться при больших значениях  $\lambda$ . Если же  $q < 0$ , то минимальное значение квадратного трехчлена в (1.16) достигается при  $\lambda = \frac{q-1}{q} > 0$  и это значение отрицательно:

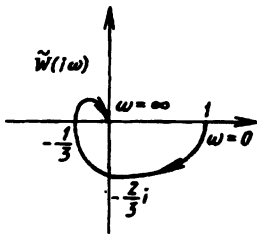
$$-q \frac{(q-1)^2}{q^2} + \frac{2(q-1)^2}{q} + 1 = \frac{(q-1)^2}{q} + 1 = \frac{q^2 - q + 1}{q} < 0.$$

Таким образом, ни при каких значениях  $q$  неравенство (1.16) не будет справедливым при всех  $\lambda \geq 0$ , т.е. критерий Попова для рассматриваемой системы с релейным элементом (случай в) не выполняется.

Покажем, что в данном случае система неустойчива. Действительно, необходимое условие устойчивости выполняется, если годограф модифицированной частотной характеристики (1.14)

$$\tilde{W}(i\omega) = \frac{1-2\omega^2}{1+\omega^6} - i \frac{\omega^2(2-\omega^2)}{1+\omega^6} \quad (1.17)$$

при  $\omega \in (0; \infty)$  не пересекает луча  $(-\infty; -1/k]$  вещественной оси.



$\omega$	$\tilde{W}(i\omega)$
0	1
$\sqrt{2}/2$	$-2i/3$
$\sqrt{2}$	$-1/3$
$\infty$	0

Рис.1.31.

Годограф функции (1.17) пересекает вещественную ось в точке 1 при  $\omega=0$  и в точке  $-1/3$  при  $\omega=\sqrt{2}$  (рис.1.31). Поэтому рассматриваемая система неустойчива для всех нелинейных элементов, характеристики которых не принадлежат сектору  $[0;3]$ . В частности, система с релейным элементом (случай в), характеристика которого принадлежит сектору  $[0; \infty)$ , будет неустойчивой. ■

В заключение приведем критерий абсолютной устойчивости для часто встречающегося случая, когда передаточная функция  $W(s)$  имеет один нулевой полюс, а нелинейный элемент  $F(\sigma)$  имеет зону нечувствительности.

**Утверждение 1.2 [27].** Пусть все полюсы передаточной функции  $W(s)$  линейной части системы (см.рис.1.3) лежат в левой полуплоскости ( $\text{Re } s < 0$ ), за исключением одного, равного нулю, причем  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma W(s) > 0$ . Пусть, кроме того, характеристика

$F(\sigma)$  нелинейного элемента удовлетворяет условиям

$$F(\sigma) = 0 \quad \text{при} \quad \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2;$$

$$0 < F(\sigma) \leq k(\sigma - \sigma_2) \quad \text{при} \quad \sigma > \sigma_2;$$

$$k(\sigma - \sigma_1) \leq F(\sigma) < 0 \quad \text{при} \quad \sigma < \sigma_1;$$

$$\text{причем} \quad \int_0^{\infty} [k\sigma - F(\sigma)] d\sigma = \infty,$$

$$\int_{-\infty}^0 [F(\sigma) - k\sigma] d\sigma = \infty \quad (\text{т.е. гра-}$$

фик функции  $z = F(\sigma)$  не приближается "плотно" к границе секторов, изображенных на рис.1.32).

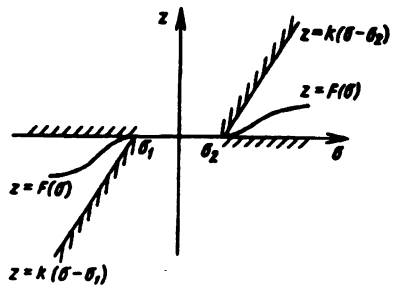


Рис.1.32.

Тогда, если существует такое действительное число  $q \geq 0$ ,

что  $-1/q$  не является полюсом  $W(s)$ , и для всех  $\omega \in [0; \infty)$  выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}[(1 + i\omega q)W(i\omega)] + \frac{1}{k} > 0, \quad (1.18)$$

то при любых ограниченных начальных условиях процессы в системе останутся ограниченными и  $\sigma(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  стремится к одной из точек отрезка покоя  $[\sigma_1; \sigma_2]$ . ■

**Пример 1.12.** Исследовать устойчивость системы, структурная схема (рис.1.33,а) которой включает релейный элемент (рис. 1.33,б) или элемент с люфтом (рис.1.33,в).

□ Передаточная функция

$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

линейной части системы удовлетворяет условиям утверждения. Сравнивая характеристики нелинейных элементов с характери-

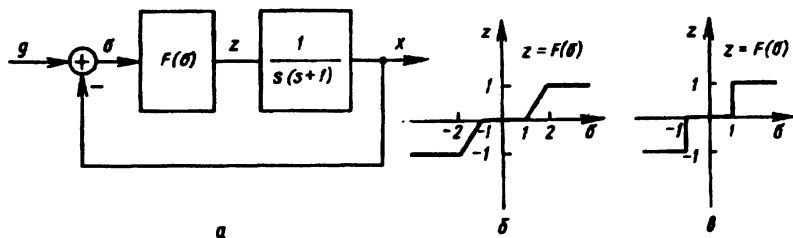


Рис.1.33.

кой, изображенной на рис.1.32, определяем значения величин:  $\sigma_1 = -1$ ,  $\sigma_2 = 1$  и  $k=1$  (для элемента рис.1.33,б) или  $k = \infty$  (для элемента рис.1.33,в).

Запишем неравенство (1.18) для рассматриваемой системы:

$$\operatorname{Re} \frac{1 + i\omega q}{i\omega(1 + i\omega)} + \frac{1}{k} > 0.$$

Выделяя действительную часть, получаем

$$\frac{q - 1}{1 + \omega^2} + \frac{1}{k} > 0. \quad (1.19)$$

Очевидно, что при  $q > 1$  неравенство (1.19) выполняется при всех  $\omega$  и любых  $k > 0$ . Таким образом, точки отрезка покоя  $[-1; 1]$  являются устойчивыми положениями равновесия для системы (рис. 1.33,а) с любым из рассматриваемых (рис.1.33,б или в) нелинейных элементов. ■

## 1.5. АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

### 1.5.1. Гармоническая линеаризация нелинейных элементов

При отсутствии внешних воздействий свободное движение линейной системы может быть периодическим, если корни характеристического уравнения чисто мнимые [23]. Однако практически такие движения не реализуются, так как малейшее изменение параметров системы приводит к тому, что колебания становятся либо затухающими, либо расходящимися, поскольку появляется вещественная часть у корней характеристического уравнения.

В отличие от линейных систем в нелинейных системах управления при отсутствии внешних воздействий возможны устойчивые периодические движения, которые принято называть *автоколебаниями*. На фазовой плоскости автоколебаниям соответствует устойчивый предельный цикл. Анализ периодических движений систем управления с одним нелинейным элементом будем проводить методом гармонической линеаризации ее единственного нелинейного звена.

Рассмотрим нелинейный элемент с характеристикой  $z = F(\sigma)$ , на вход которого подается гармонический сигнал  $\sigma(t) = a \sin \omega t$ . Выходной сигнал  $z(t) = F(a \sin \omega t)$  нелинейного звена будет периодическим, но не гармоническим. Разложение в ряд Фурье этого сигнала имеет вид

$$z(t) = q_0(a) + q_1(a) a \sin \omega t + q_2(a) a^2 \sin^2 \omega t + \dots,$$

где

$$q_0(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \quad (1.20)$$
$$q_1(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi \, d\psi.$$

Предположим, что:

постоянная составляющая  $q_0(a)$  сигнала отсутствует (для нечетной характеристики  $F(\sigma)$  это всегда выполняется);

линейная часть системы (устойчивая или на границе устойчивости) обладает свойствами фильтра низких частот [27]:  $|W(i\omega)| > |W(ik\omega)|$  при  $k > 1$ , поэтому учет высших гармоник в разложении в ряд Фурье выходного сигнала не является существенным (*гипотеза фильтра*).

Тогда приближенное выражение выходного сигнала будет

$$z(t) = q(a) a \sin \omega t + q_1(a) a \cos \omega t .$$

Такой же выходной сигнал можно получить, подав гармонический сигнал  $\sigma(t) = a \sin \omega t$  на вход линейного звена с передаточной функцией  $W_H(a, s) = q(a) + \frac{q_1(a)}{\omega} s$ . Частотная характеристика  $W_H(a, i\omega)$  этого эквивалентного звена зависит только от амплитуды  $a$  и не зависит от частоты  $\omega$ :

$$W_H(a) = W_H(a, s) \Big|_{s = i\omega} = q(a) + i q_1(a) . \quad (1.21)$$

Функцию  $W_H(a)$  называют *комплексным коэффициентом усиления* нелинейного элемента, а коэффициенты  $q(a)$  и  $q_1(a)$  — *коэффициентами гармонической линеаризации*.

Таким образом, нелинейный элемент  $z = F(\sigma)$  может быть заменен линейным, частотная характеристика которого зависит от амплитуды входного сигнала. Этот прием получил название *гармонической линеаризации* нелинейностей.

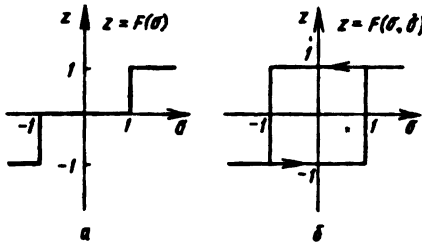


Рис.1.34.

чувствительности (рис.1.34,а). Поскольку выходной сигнал  $z(\psi)$  является нечетной функцией, то коэффициент  $q_1(a)$  равен нулю. Коэффициент  $q(a)$  находим по формуле (1.20):

$$q(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{2}{\pi a} \int_{\psi_0}^{\pi - \psi_0} \sin \psi d\psi =$$

$$= \frac{4}{\pi a} \cos \psi_0 = \frac{4}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \quad \text{при } a > 1, \quad \psi_0 = \arcsin \frac{1}{a} .$$

Таким образом, комплексный коэффициент усиления для данного элемента

$$W_H(a) = \begin{cases} \frac{4}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} & \text{при } a > 1, \\ 0 & \text{при } a \leq 1. \end{cases}$$

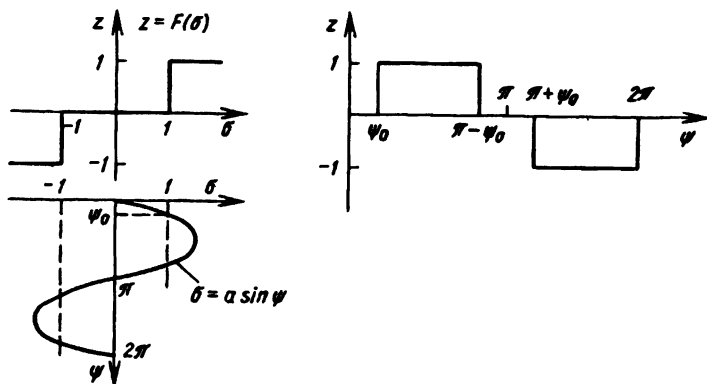


Рис.1.35.

Построим диаграмму (рис.1.36) преобразования сигналов для элемента (рис.1.34,б) с петлей гистерезиса. По формулам (1.20), в которых отрезок интегрирования можно взять любым, лишь бы его длина была равна  $2\pi$ , находим коэффициенты гармонической линеаризации:

$$q(a) = \frac{1}{\pi a} \int_{\psi_0}^{\psi_0+2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{1}{\pi a} \left[ \int_{\psi_0}^{\psi_0+\pi} \sin \psi d\psi - \int_{\psi_0+\pi}^{\psi_0+2\pi} \sin \psi d\psi \right] =$$

$$= -\frac{4}{\pi a} \cos \psi_0 = \frac{4}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} \quad \text{при } a > 1; \quad \psi_0 = \arcsin \frac{1}{a};$$

$$q_1(a) = \frac{1}{\pi a} \int_{\psi_0}^{\psi_0+2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{1}{\pi a} \left[ \int_{\psi_0}^{\psi_0+\pi} \cos \psi d\psi - \int_{\psi_0+\pi}^{\psi_0+2\pi} \cos \psi d\psi \right] =$$

$$= -\frac{4}{\pi a} \sin \psi_0 = -\frac{4}{\pi a^2} \quad \text{при } a \geq 1.$$



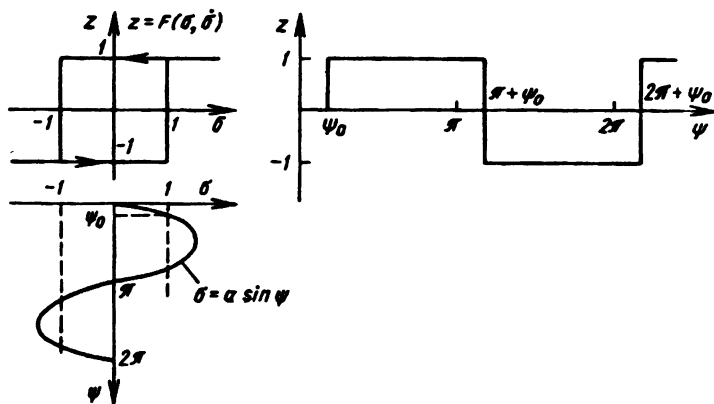


Рис.1.36.

Подставляя эти коэффициенты в (1.21), находим комплексный коэффициент усиления

$$W_H(a) = \begin{cases} \frac{4}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} - \frac{1}{\pi a^2} & \text{при } a > 1, \\ 0 & \text{при } a \leq 1. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Для типовых нелинейных элементов комплексные коэффициенты усиления приведены в [23].

### 1.5.2. Анализ наличия автоколебаний

С помощью гармонической линеаризации нелинейного элемента система (см.рис.1.3) приводится к виду, изображенному на рис.1.37.

Линеаризованная система (рис.1.37) описывается с помощью преобразования Фурье соотношениями [23,35]

$$\begin{aligned} X(\omega) &= W_H(a)W(i\omega)\Sigma(\omega), \\ \Sigma(\omega) &= G(\omega) - X(\omega), \end{aligned}$$

связывающими изображения  $X$ ,  $\Sigma$ ,  $G$  сигналов  $x$ ,  $\sigma$ ,  $g$  и частотные характеристики  $W_H$  и  $W$  звеньев системы. При отсутствии внешних воздействий ( $g(t) \equiv 0$ ) получим соотношение

$$[1 + W_H(a)W(i\omega)] \Sigma(\omega) = 0,$$

которое выполняется для периодического (не равного нулю) сигнала

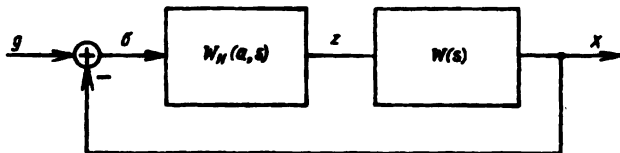


Рис.1.37.

ла  $\sigma(t)$  ( $\Sigma(\omega) \neq 0$ ) только тогда, когда амплитуда  $a$  и частота  $\omega$  удовлетворяют уравнению гармонического баланса:

$$W_N(a)W(i\omega) = -1. \quad (1.22)$$

Это уравнение можно рассматривать как условие наличия чисто мнимого корня  $i\omega$  характеристического уравнения линеаризованной системы, что связано, как отмечалось выше, с существованием периодических движений линейных систем.

Уравнение (1.22) гармонического баланса можно записать с учетом (1.21) в виде системы двух уравнений относительно двух неизвестных  $a$  и  $\omega$ :

$$\begin{cases} q(a) \operatorname{Re} W(i\omega) - q_1(a) \operatorname{Im} W(i\omega) = -1, \\ q_1(a) \operatorname{Re} W(i\omega) + q(a) \operatorname{Im} W(i\omega) = 0, \end{cases} \quad (1.23)$$

где  $q(a)$  и  $q_1(a)$  — коэффициенты гармонической линеаризации нелинейного элемента.

При решении задач удобно пользоваться следующей графоаналитической схемой (диаграммой Гольдфарба).

1. Построить годограф  $W(i\omega)$  при  $\omega \in [0; \infty)$ .

2. Построить годограф  $M_N(a) = \frac{-1}{W_N(a)}$  при  $a \in [0; \infty)$ .

3. Найти значения частоты  $\omega_n$  и амплитуды  $a_n$  периодического движения, соответствующие точкам пересечения годографов (решить уравнение (1.22) или систему (1.23)).

4. Если при движении по годографу  $M_N(a) = \frac{-1}{W_N(a)}$ , соответствующем увеличению амплитуды  $a$  от значения  $a_n$ , окажемся в точке, которая не будет охватываться годографом  $W(i\omega)$  (рис.1.38, точка 1), то амплиту-

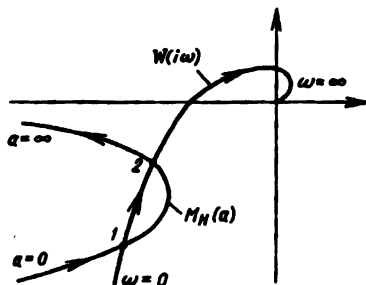


Рис.1.38.

де  $a_n$  будут соответствовать устойчивые автоколебания, а в противном случае (рис.1.38, точка 2) — неустойчивые.

**З а м е ч а н и я.** 1. Метод гармонической линеаризации является приближенным методом. Поэтому отсутствие решений уравнения (1.22) гармонического баланса означает, что используемый метод не позволяет выделить периодических движений у исследуемой системы.

2. После нахождения частоты  $\omega_n$  периодического движения следует проверить выполнение гипотезы фильтра:

$$|W(i\omega_n)| \gg |W(ik\omega_n)| \quad \text{при } k > 1.$$

**Пример 1.14.** Исследовать систему (рис.1.39) на наличие автоколебаний.

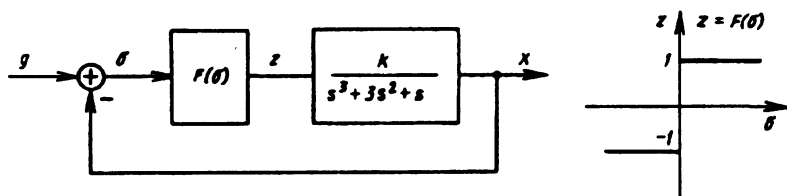


Рис.1.39.

□ Строим годограф частотной характеристики линейной части разомкнутой системы:

$$W(i\omega) = \frac{3}{(i\omega)^3 + 3(i\omega)^2 + i\omega} = \frac{-9\omega - 3i(1 - \omega^2)}{\omega [9\omega^2 + (1 - \omega^2)^2]}$$

при  $\omega \in [0; \infty)$  (рис.1.40). Коэффициенты гармонической линеаризации релейного звена имеют вид [23]

$$q(a) = \frac{4}{\pi a}, \quad q_1(a) = 0.$$

Строим годограф функции

$$M_H(a) = \frac{-1}{q(a) + iq_1(a)} = -\frac{\pi a}{4}$$

при  $a \in [0; \infty)$  (рис.1.40). Находим амплитуду  $a_n$  и частоту  $\omega_n$ , соответствующие точке пересечения годографов  $M_H(a)$  и  $W(i\omega)$ , решая уравнение (1.22) гармонического баланса

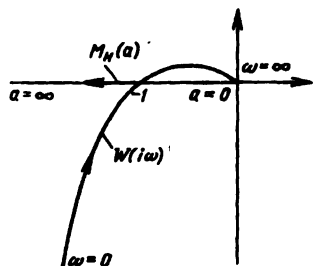


Рис.1.40.

$$\frac{4[-9\omega - 3i(1 - \omega^2)]}{\pi a \omega [9\omega^2 + (1 - \omega^2)^2]} = -1 \Rightarrow \omega_n = 1, \quad a_n = \frac{4}{\pi}.$$

По диаграмме Гольдфарба (рис.1.40) определяем, что найденным значениям параметров соответствуют устойчивые автоколебания. ■

**Пример 1.15.** Исследовать систему (см.рис.1.33,а) на наличие автоколебаний, где параметры нелинейности (см.рис.1.7):  $b=1$ ;  $c=5\pi/2$ .

□ Находим комплексный коэффициент усиления нелинейного элемента с петлей гистерезиса (см. пример 1.13):

$$W_H(a) = \frac{4c}{\pi a^2} \left( \sqrt{a^2 - 1} - i \right) = \frac{10}{a^2} \left( \sqrt{a^2 - 1} - i \right)$$

и обратную характеристику  $M_H(a) = -1/W_H(a)$ :

$$M_H(a) = -\frac{1}{10} \left( \sqrt{a^2 - 1} + i \right).$$

Частотная характеристика линейной части системы имеет вид

$$W(i\omega) = \frac{1}{i\omega - \omega^2} = \frac{-1}{1 + \omega^2} - \frac{i}{\omega(1 + \omega^2)}.$$

Построим годографы  $M_H(a)$  при  $a \in [0; \infty)$  и  $W(i\omega)$  при  $\omega \in [0; \infty)$ . Как видим (рис.1.41), годографы пересекаются в одной точке, которой соответствуют устойчивые автоколебания.

Найдем параметры автоколебаний. Для этого составим уравнение гармонического баланса  $M_H(a) = -W(i\omega)$ :

$$\frac{1}{10} \left( \sqrt{a^2 - 1} + i \right) = \frac{1}{1 + \omega^2} + \frac{i}{\omega(1 + \omega^2)}.$$

Приравнявая действительные и мнимые части, получаем систему уравнений

$$\frac{1}{10} \left( \sqrt{a^2 - 1} + i \right) = \frac{1}{1 + \omega^2}, \quad \frac{1}{10} = \frac{i}{\omega(1 + \omega^2)}.$$

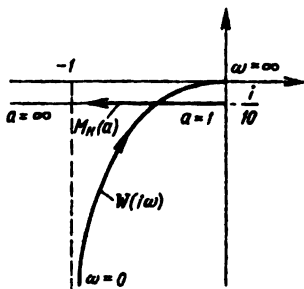


Рис.1.41.

Из второго уравнения системы определяем частоту  $\omega = 2$  автоколебаний. Заметим, что других действительных корней это уравнение не имеет. Подставляя найденную частоту в первое уравнение системы, определяем амплитуду автоколебаний:  $a = \sqrt{5}$ . При частоте  $\omega = 2$  период колебаний  $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$ , что примерно совпадает со временем  $2\theta \approx 3,12$  одного прохождения изображающей точкой предельного цикла, которое было найдено в примере 1.7. ■

---

## 2. ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 2.1. КОНСТРУКТИВНЫЕ СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

#### 2.1.1. Постановка задачи

В математической теории систем *стохастической* называется система, реакция которой даже на детерминированное внешнее воздействие является случайной. *Детерминированная* система на детерминированное воздействие имеет по определению обязательно детерминированную реакцию.

*Математическая модель* стохастической системы определяется *стохастическим оператором*  $S$ , отображающим пространство входов системы в пространство ее выходов. Внешнее воздействие на систему также может быть случайным, поэтому в общем случае связь вход-выход стохастической системы (разомкнутой) имеет вид  $Y = S[Q]$ , где  $Q$ ,  $Y$  — случайные векторы внешних воздействий и выхода соответственно. Они могут быть параметрами (постоянными величинами), сигналами (функциями одной переменной, обычно времени) или полями (функциями многих переменных).

*Конструктивным способом задания* стохастического оператора  $S$  является его определение в виде *детерминированного оператора*  $S$  с вектором внутренних случайных воздействий  $R$ :  $S[Q] = S[Q, R]$ . Объединяя векторы внутренних и внешних воздействий в общий вектор входа  $G = (Q, R)$ , получаем связь вход-выход (рис. 2.1):

$$Y = S[G], \quad (2.1)$$

определяющую реакцию *детерминированной* системы на *случайное* (обязательно) воздействие  $G$ . Если при этом оператор  $S$  динамической системы задается дифференциальными или интегральными уравнениями, связывающими реализации случайных воздействий  $G$  и  $Y$ , то такие стохастические системы называют *дифференциальными* или *интегральными* соответственно.

На практике наибольший интерес представляют замкнутые системы (системы с обратной связью). В отличие от формулы (2.1) замкнутая стохастическая система определяется операторным уравнением

$$Y = H[Y, G], \quad (2.2)$$

где  $H$  — детерминированный оператор разомкнутой части замкнутой системы (рис. 2.2).

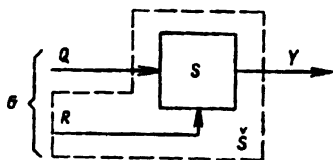


Рис. 2.1.

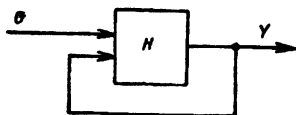


Рис. 2.2.

Задача полного описания стохастической системы (2.1) или (2.2) состоит в установлении связи закона распределения (вероятностной меры) ее входа  $\mu_x$  с совместным законом распределения входа и выхода  $\mu_{xy}$ . Нахождение же распределения  $\mu_{xy}$ , а следовательно, и собственного распределения выхода  $\mu_y$ , по заданному распределению  $\mu_x$  с помощью этой связи составляет содержание задачи полного анализа выходных процессов стохастической системы. Кроме того, полное описание стохастических систем позволяет решать задачи синтеза управления такими системами.

Рассмотрим способы задания полной информации о непрерывнозначном случайном процессе [17, 28, 38].

### 2.1.2. Характеристический функционал

Многомерным случайным процессом называется  $n$ -мерная вектор-функция  $\xi(t, \omega)$  вещественного параметра  $t$  (времени) из некоторого множества  $T$  (области определения процесса) и элементарного события  $\omega$  (эксперимента) из вероятностного пространства  $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ , т.е. из множества экспериментов  $\Omega$  с выделенным в нем классом ( $\sigma$ -алгеброй)  $\mathcal{F}$  всех наблюдаемых событий и вероятностной мерой  $P$ , заданной на  $\mathcal{F}$ . То пространство, в котором  $\xi(t, \omega)$  принимает свои значения, называется фазовым пространством процесса. В качестве последнего будем рассматривать  $n$ -мерное евклидово пространство  $R^n$ .

В дальнейшем для компактности записи будем использовать обозначение  $X(t) = \xi(t, \omega)$ , подчеркивая тем самым, что случайный процесс является семейством случайных величин  $X(t)$ , зависящих от параметра  $t$ .

Распределением случайного процесса  $X(t)$  называется соответствующая ему вероятностная мера  $\mu$ , определяемая для любого цилиндрического множества  $A$  следующим образом:

$$\mu(A) = P\left\{\omega: \xi(t, \omega) = X(t) \in A, t \in T' \subseteq T\right\}$$

и имеющая смысл вероятности принадлежности значений случайного процесса  $X(t)$  при всех  $t \in T'$  области  $A$ . Однако в общем случае мера не может быть задана, например, в виде формулы для каждого множества  $A$ .

Конструктивно вероятностная мера задается своим *характеристическим функционалом*  $\Phi[\lambda(\cdot)]$ , где  $\lambda(t)$  — детерминированная  $n$ -мерная вектор-функция. Он определяется как бесконечномерное преобразование Фурье меры  $\mu$ , или, что то же самое, как математическое ожидание комплексной интегральной экспоненты:

$$\Phi[\lambda] = \int_X \exp\left\{i \int_T \lambda^T(t) X(t) dt\right\} \mu(dx) = M \exp\left\{i \int_T \lambda^T(t) X(t) dt\right\}, \quad (2.3)$$

где  $X$  — пространство всех функций  $X(t)$ .

Например, *нормальным*, или *гауссовским*, называется случайный процесс, характеристический функционал которого имеет вид

$$\Phi_N[\lambda] = \exp\left\{i \int_T \lambda^T(t) m(t) dt - \frac{1}{2} \iint_{T \times T} \lambda^T(\theta) R(\theta, \tau) \lambda(\tau) d\theta d\tau\right\}, \quad (2.4)$$

где  $m(t)$  —  $n$ -мерный вектор математического ожидания случайного процесса,  $m(t) = M[X(t)]$ ;  $R(\theta, \tau)$  — матрица его корреляционной функции,  $R(\theta, \tau) = M\{[X(\theta) - m(\theta)][X(\tau) - m(\tau)]^T\}$ .

Характеристический функционал позволяет найти совместный закон распределения любого числа  $k \geq 1$  сечений случайного процесса  $\epsilon X(t_1), \dots, X(t_k)$ ,  $(t_1, \dots, t_k) \in T$ . Действительно, взяв в качестве его аргумента  $\lambda(t)$  линейную комбинацию дельта-функций Дирака с точками приложения  $t_1, \dots, t_k$ :

$$\lambda^*(t) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \delta(t - t_j), \quad \lambda_j \in \mathbb{R}^n, \quad (2.5)$$

получим  $k$ -точечную характеристическую функцию

$$\varphi_k(t_1^k, \lambda_1^k) = \Phi[\lambda^*] = M \exp\left\{i \sum_{j=1}^k \lambda_j^T X(t_j)\right\}, \quad (2.6)$$

где  $t_1^k = (t_1, \dots, t_k)$ ,  $\lambda_1^k = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ . Соответствующую ей плотность распределения найдем с помощью многомерного обратного преобразования Фурье

$$p_k(t_1^k, x_1^k) = \frac{1}{(2\pi)^{nk}} \int_{\mathbb{R}^n} d\lambda_1 \dots \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(t_1^k, \lambda_1^k) \exp\left\{-i \sum_{j=1}^k \lambda_j^T x_j\right\} d\lambda_k, \quad (2.7)$$

где также  $x_1^k = (x_1, \dots, x_k)$ ,  $x_j \in \mathbb{R}^n$ .



**Пример 2.1.** Найти  $k$ -точечную характеристическую функцию многомерного гауссовского процесса.

□ Согласно (2.6) из (2.4) получим

$$\varphi_k^N(t_1^k, \lambda_1^k) = \Phi_N[\lambda^*] = \exp \left\{ i \sum_{j=1}^k \lambda_j^T m(t_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{h=1}^k \lambda_j^T R(t_j, t_h) \lambda_h \right\}.$$

В частности, одноточечная характеристическая функция имеет вид

$$\varphi_1^N(t, \lambda) = \exp \left\{ i \lambda^T m(t) - \frac{1}{2} \lambda^T D(t) \lambda \right\},$$

где  $D(t)$  — ковариационная матрица процесса,  $D(t) = R(t, t)$ . ■

Однако функционал — слишком громоздкая характеристика. Поэтому вместо  $\Phi[\lambda]$  используют последовательности некоторых функций многих переменных, такие, что первые члены этих последовательностей дают приближенное описание случайного процесса.

### 2.1.3. Многоточечные плотности распределения

“Тонкую структуру” случайного процесса задает *последовательность многоточечных плотностей распределения*  $\{p_k(t_1^k, x_1^k)\}_{k \geq 1}$ , удовлетворяющих следующим четырем условиям:

1) неотрицательности — для любых  $t_i \in T$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = \overline{1, k}$  :

$$p_k(t_1^k, x_1^k) \geq 0; \quad (2.8)$$

2) нормировки — для любых  $t_1, \dots, t_k \in T$  :

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx_1 \dots \int_{\mathbb{R}^n} p_k(t_1^k, x_1^k) dx_k = 1;$$

3) симметрии — для любой перестановки  $i_1, \dots, i_k$  чисел  $1, \dots, k$  :

$$p_k(t_{i_1}, \dots, t_{i_k}; x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = p_k(t_1, \dots, t_k; x_1, \dots, x_k);$$

4) согласованности — для любых  $t_1, \dots, t_{k+l} \in T$ ,  $l \geq 1$  :

$$p_k(t_1^k, x_1^k) = \int_{\mathbb{R}^n} dx_{k+1} \dots \int_{\mathbb{R}^n} p_{k+l}(t_1^{k+l}, x_1^{k+l}) dx_{k+l}. \quad (2.9)$$

Последнее свойство означает, что каждая старшая плотность распределения содержит в себе информацию о всех младших плотностях. Необходимость и достаточность знания последовательности таких плотностей (или соответствующих им функций распределения) для полного описания случайного процесса (построения вероятностной меры) гарантируется известной теоремой Колмогорова [38].

Однако оперировать с бесконечной совокупностью многоточечных плотностей практически невозможно, а их конечное число описывает случайный процесс лишь приближенно. Поэтому большое распространение получили следующие классы случайных процессов, для полного описания которых достаточно знать один или два первых элемента этой последовательности.

*Процессы с независимыми значениями* — процессы, у которых значения в различных точках  $t_i \in T$  независимы в вероятностном смысле. Тогда

$$p_k(t_1^k, x_1^k) = p(t_1, x_1) \dots p(t_k, x_k), \quad k \geq 1,$$

т.е. для задания такого процесса достаточно знать одноточечную плотность  $p(t, x)$ .

Так как независимость значений процесса в сколь угодно близкие моменты времени физически бессмысленна, то такие процессы надо понимать в обобщенном смысле [17, 28]. Примером обобщенного случайного процесса с независимыми значениями является *стандартный белый шум*  $U(t)$  — процесс с нулевым математическим ожиданием и дельтаобразной корреляционной функцией:

$$m_u(t) = M[U(t)] = 0,$$

$$R_u(\theta, \tau) = \tilde{R}_u(\theta - \tau) = M[U(\theta)U^T(\tau)] = \delta(\theta - \tau)E,$$

где  $E$  — единичная матрица интенсивности шума.

Спектральная плотность этого стационарного случайного процесса с  $T = (-\infty, +\infty)$  постоянна на всех частотах

$$S_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}_u(\eta) e^{-i\omega\eta} d\eta = E,$$

что и дало повод для названия его белым шумом по аналогии с белым светом. Белый шум может быть как гауссовским, так и негауссовским.

*Процессы с независимыми приращениями* — процессы, у которых приращения за любые неперекрывающиеся интервалы времени независимы. Для задания такого процесса достаточно указать две характеристики: плотность значения  $p(t, x)$ ,  $t \in T$ , и плотность  $q(\theta, \tau, \Delta x)$  приращения  $\Delta X_{\theta, \tau} = X(\tau) - X(\theta)$  на интервале  $[\theta, \tau]$ ,  $\theta < \tau$ ,  $(\theta, \tau) \in T$ . Тогда для любой упорядоченной последовательности  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ ,  $t_i \in T$  справедливо представление

$$p_k(t_1^k, x_1^k) = p(t_1, x_1) q(t_1, t_2, x_2 - x_1) \dots q(t_{k-1}, t_k, x_k - x_{k-1}).$$

При этом плотности  $p$  и  $q$  связаны между собой соотношением

$$p(\tau, x) = \int_{R^n} q(\theta, \tau, x - u) p(\theta, u) du, \quad \tau > \theta,$$

тогда как плотность  $q$  удовлетворяет уравнению

$$q(\theta, \tau, z) = \int_{\mathbb{R}^n} q(\theta, \eta, z-u) q(\eta, \tau, u) du, \quad \theta < \eta < \tau.$$

Согласно разложению Леви [17, 38] каждый процесс с независимыми приращениями может быть представлен в виде суммы трех независимых процессов: 1) *детерминированного* (центрирующего); 2) *стохастически непрерывного* с независимыми приращениями; 3) *дискретного* (ступенчатого) с независимыми приращениями, имеющего скачки в фиксированные (неслучайные) моменты времени. Непрерывная же часть этого процесса (без дискретной составляющей) есть сумма независимых *гауссовского* и *пуассоновского* процессов с независимыми приращениями.

Еще более простое описание имеют *однородные* процессы с независимыми приращениями, т.е. такие процессы на  $T = [0, \infty)$ , у которых  $X(0) = 0$  и распределение приращения  $\Delta X_{t, t+h}$  совпадает с распределением значения  $X(h)$  для всех  $t > 0, h > 0$ :

$$q(t, t+h, z) = p(h, z). \quad (2.10)$$

Любой такой процесс является стохастически непрерывным, т.е. в отличие от общего случая не содержит дискретной составляющей со скачками в фиксированные моменты времени.

Важным примером *непрерывного* однородного процесса с независимыми приращениями служит *стандартный винеровский процесс*  $W(t)$ , значение которого имеет гауссовское распределение с плотностью

$$p(t, w) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{w^T w}{2t} \right\}, \quad w \in \mathbb{R}^n. \quad (2.11)$$

Математическое ожидание этого процесса тождественно равно нулю, а его корреляционная матрица имеет вид  $R_w(\theta, \tau) = \min(\theta, \tau)E$ . Реализации винеровского процесса являются непрерывными с вероятностью единица, однако они не дифференцируемы почти всюду.

**Пример 2.2.** Найти моменты приращения одномерного стандартного винеровского процесса  $\Delta W_{t, t+h} = W(t+h) - W(t)$ .

□ Из (2.10), (2.11) следует, что

$$q(t, t+h, \Delta w) = p(h, \Delta w) = (2\pi h)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\Delta w^2}{2h}},$$

т.е. приращение винеровского процесса является гауссовской случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$D(\Delta W_{t, t+h}) = M(\Delta W_{t, t+h}^2) = h.$$

Поэтому все его моменты нечетного порядка равны нулю:  $M(\Delta W_{t, t+h}^{2l+1}) = 0$ , тогда как моменты четного порядка определяются формулой

$$M(\Delta W_{t,t+h}^{2l}) = (2l-1)!! h^l, \quad l=1,2,\dots$$

В частности, отсюда имеем

$$M(\Delta W_{t,t+h}^4) = 3h^2, \quad M(\Delta W_{t,t+h}^6) = 15h^3. \quad \blacksquare$$

Производной винеровского процесса является обобщенный случайный процесс с независимыми значениями — *гауссовский белый шум*:  $V(t) = \dot{W}(t)$ . Действительно, его корреляционная матрица имеет вид

$$R_v(\theta, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \tau} R_w(\theta, \tau) = \delta(\theta - \tau) E.$$

Дисперсия каждой составляющей вектора  $V(t)$  бесконечна, а значения этих составляющих на любом сколь угодно малом конечном интервале времени могут изменяться бесчисленное число раз в неограниченном диапазоне.

Примером *скачкообразного* (но стохастически непрерывного) однородного процесса с независимыми приращениями служит *простой пуассоновский процесс*  $L(t)$  — одномерный ступенчатый случайный процесс, у которого вероятность появления  $i$  скачков на отрезке времени длиной  $h$  определяется формулой Пуассона с параметром  $\mu > 0$ :

$$P[L(t+h) - L(t) = i] = P[L(h) = i] = \frac{(\mu h)^i}{i!} e^{-\mu h}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Математическое ожидание этого процесса  $M[L(t)] = \mu t$ , т.е. параметр  $\mu$  имеет смысл среднего числа скачков, приходящихся на единицу времени, и поэтому  $\mu$  называется *интенсивностью* процесса. Корреляционная функция процесса  $L(t)$  имеет вид  $R_L(\theta, \tau) = \mu \min(\theta, \tau)$ .

Реализации простого пуассоновского процесса возрастают скачком на единицу в *случайные моменты времени*  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , называемые *пуассоновским потоком точек*:

$$L(t) = \sum_{j=1}^{\infty} 1(t - \tau_j).$$

Здесь  $1(\sigma)$  — единичная ступенчатая функция,  $1(\sigma) = 1$  при  $\sigma > 0$ ,  $1(\sigma) = 0$  при  $\sigma < 0$ .

Производная простого пуассоновского процесса имеет вид

$$\dot{L}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta(t - \tau_j)$$

и называется *дробовым шумом*. Этот шум, как и производная винеровского процесса  $\dot{W}(t)$ , является *белым*, но закон его распределения негауссовский.

*Марковские процессы* — процессы, у которых распределение значений в будущие моменты времени зависит только от наблюдаемого значения в настоящий момент и не зависит от наблюдавшихся значений в прошлом, т.е. для любых  $t_1 < t_2 < \dots < t_{k+1}$  ( $t_i \in T$ ) справедливо

$$\sigma_{k+1}(t_{k+1}, x_{k+1} | t_1^k, x_1^k) = \pi(t_{k+1}, x_{k+1} | t_k, x_k),$$

где  $\sigma_{k+1}$  — многоточечная условная плотность распределения значения  $X(t_{k+1})$  при условиях  $X(t_i) = x_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ ;  $\pi$  — плотность вероятности перехода из состояния  $X(t_k) = x_k$  в состояние  $X(t_{k+1}) = x_{k+1}$ .

Так как тогда для любого  $k \geq 1$  справедливо представление

$$p_k(t_1^k, x_1^k) = \pi(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}) \dots \pi(t_2, x_2 | t_1, x_1) p_k(t_1, x_1), \quad (2.12)$$

то марковский процесс полностью определяется одноточечной плотностью  $p(t, x)$  и плотностью вероятности перехода  $\pi(t, x | \theta, y)$ ,  $t > \theta$ , или эквивалентной им двуточечной плотностью  $p_2(\theta, t, y, x)$ . Согласно представлению (2.12) и условию согласованности (2.9), плотности  $p$ ,  $\pi$ ,  $p_2$  связаны между собой:

$$p(t, x) = \int_{R^n} p_2(\theta, t, y, x) dy = \int_{R^n} \pi(t, x | \theta, y) p(\theta, y) dy, \quad t > \theta, \quad (2.13)$$

а плотность перехода удовлетворяет уравнению Смолуховского-Чепмена (обобщенному уравнению Маркова):

$$\pi(t, x | \theta, y) = \int_{R^n} \pi(t, x | \tau, z) \pi(\tau, z | \theta, y) dz, \quad \theta < \tau < t. \quad (2.14)$$

Однако использовать нелинейное интегральное уравнение (2.14) трудно, поэтому более широко распространено получаемое из него линейное эволюционное уравнение для плотности  $\pi$ . Его вид зависит от типа марковского процесса.

Для диффузионного процесса, т.е. марковского процесса с почти наверное непрерывными реализациями, при любых  $t \geq t_0$ ,  $x \in R^n$  справедливо параболическое уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК-уравнение):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \pi(t, x | t_0, x_0) &= K_x [\pi(t, x | t_0, x_0)] = \\ &= -\frac{\partial^T}{\partial x} [a(t, x) \pi(t, x | t_0, x_0)] + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^T}{\partial x} [B(t, x) \pi(t, x | t_0, x_0)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь  $K_x$  — прямой производящий оператор диффузионного процесса;  $\partial/\partial x = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)^T$  — оператор градиента;  $\text{tr}$  — оператор следа матрицы.

В скалярной форме это уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi(t, x | t_0, x_0) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i(t, x) \pi(t, x | t_0, x_0)] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [B_{ij}(t, x) \pi(t, x | t_0, x_0)].$$

Оператор  $K_x$  определяется двумя функциями: *вектором сноса*

$$a(t, x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} M \left\{ [X(t+\tau) - X(t)] | X(t) = x \right\}, \quad (2.16)$$

который характеризует среднее значение скорости исхода пучка реализаций процесса из точки  $X(t) = x$ , и *матрицей диффузии*

$$B(t, x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} M \left\{ [X(t+\tau) - X(t)] [X(t+\tau) - X(t)]^T | X(t) = x \right\}, \quad (2.17)$$

которая характеризует скорость расширения этого пучка реализаций. При этом, конечно, предполагается существование непрерывных частных производных в уравнении (2.15).

Для скачкообразного марковского процесса, реализациями которого являются ступенчатые функции со случайными величинами скачков в случайные моменты времени, справедливо интегродифференциальное уравнение Колмогорова-Феллера:

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi(t, x | t_0, x_0) = L_x [\pi(t, x | t_0, x_0)] = \\ = - \mu(t, x) \pi(t, x | t_0, x_0) + \int_{\mathbb{R}^n} \mu(t, z) g(x | t, z) \pi(t, z | t_0, x_0) dz. \quad (2.18)$$

Здесь  $L_x$  — прямой производящий оператор скачкообразного марковского процесса, который также определяется двумя функциями, характеризующими поведение этого процесса при условии  $X(t) = x$ : *интенсивностью пуассоновского потока* моментов времени скачков  $\mu(t, x)$  и *плотностью распределения амплитуды скачка*

$$g(y | t, x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \pi(t + \tau, x | t, x).$$

В общем же случае кусочно-непрерывного марковского процесса его плотность перехода удовлетворяет уравнению Колмогорова:

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi(t, x | t_0, x_0) = K_x [\pi(t, x | t_0, x_0)] + L_x [\pi(t, x | t_0, x_0)]. \quad (2.19)$$

Очевидно, что уравнения (2.15), (2.18) являются частными случаями уравнения (2.19).

Начальным условием для уравнений (2.15), (2.18) и (2.19) является

$$\pi(t_0, x | t_0, x_0) = \delta(x - x_0). \quad (2.20)$$

Кроме того, для уравнений (2.15), (2.19) необходимо учитывать также граничные условия, которые в случае неограниченного фазового пространства  $\mathbb{R}^n$  сводятся к требованию асимптотического убывания плотности  $\pi$  по переменной  $x$ :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \pi(t, x | t_0, x_0) = 0, \quad t \geq t_0. \quad (2.21)$$

Уравнения (2.15), (2.18), (2.19) и условия (2.20), (2.21) однозначно определяют плотность перехода  $\pi(t, x | t_0, x_0)$  как функцию переменных  $t, x$ , тогда как переменные  $t_0, x_0$  являются их параметрами. Поэтому, умножая эти выражения на начальную плотность  $p(t_0, x_0) = p_0(x_0)$  и учитывая (2.12), получаем такие же уравнения для двуточечной плотности, например:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_2(t_0, t, x_0, x) = K_x [p_2(t_0, t, x_0, x)] + L_x [p_2(t_0, t, x_0, x)], \quad t \geq t_0, \quad (2.22)$$

а из (2.20), (2.21) — начальное и граничное условия:

$$p_2(t_0, t_0, x_0, x) = p_0(x_0) \delta(x - x_0), \quad (2.23)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} p_2(t_0, t, x_0, x) = 0, \quad t \geq t_0. \quad (2.24)$$

Интегрируя же три последних выражения по  $x_0$  и учитывая условие согласованности (2.13), получаем, что и одноточечная плотность удовлетворяет уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x) = K_x [p(t, x)] + L_x [p(t, x)], \quad t \geq t_0, \quad (2.25)$$

при следующих начальном и граничном условиях:

$$p(t_0, x) = p_0(x), \quad (2.26)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} p(t, x) = 0, \quad t \geq t_0. \quad (2.27)$$

В случае, когда вектор сноса  $a(t, x)$  или матрица диффузии  $V(t, x)$  не являются достаточно гладкими по  $x$ , что возможно на практике, решения приведенных начально-краевых задач для уравнений Колмогорова (или соответствующих ФПК-уравнений) следует рассматривать в обобщенном смысле — как функции, удовлетворяющие некоторым интегральным тождествам.

Одно из них — для одноточечной плотности  $p(t, x)$  — найдем из равенства

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(t, x) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} p(t, x) - K_x [p(t, x)] - L_x [p(t, x)] \right\} dx = 0, \quad (2.28)$$

требуя его справедливости при любых скалярных функциях  $\psi(t, x)$ , дифференцируемых один раз по  $t$  и дважды по  $x$  и асимптотически стремящихся к нулю по  $x$ :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(t, x) = 0, \quad t \geq t_0. \quad (2.29)$$

Выполняя в (2.28) интегрирование по частям с учетом (2.27), (2.29), получаем интегральное тождество

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M \left\{ \psi(t, X(t)) \right\} = M \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, X(t)) + K_x^* [\psi(t, X(t))] + \right. \\ \left. + L_x^* [\psi(t, X(t))] \right\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Здесь  $K_x^*$ ,  $L_x^*$  — обратные производящие операторы диффузионного и скачкообразного марковских процессов, которые сопряжены с прямыми операторами

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi K_x [p] dx = \int_{\mathbb{R}^n} K_x^* [\psi] p dx, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \psi L_x [p] dx = \int_{\mathbb{R}^n} L_x^* [\psi] p dx \quad (2.31)$$

и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} K_x^* [\psi(t, x)] = a^T(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \psi(t, x) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ B(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}^T \psi(t, x) \right], \\ L_x^* [\psi(t, x)] = -\mu(t, x) \left[ \psi(t, x) - \int_{\mathbb{R}^n} g(z | t, x) \psi(t, z) dz \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Отметим, что для функций  $\psi(t, x)$ , не обладающих свойством (2.29), интегральное тождество (2.30) справедливо при дополнительном граничном условии

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} q(t, x) = 0, \quad t \geq t_0, \quad (2.33)$$

на вектор  $q(t, x)$  потока одноточечной вероятности

$$q(t, x) = a(t, x) p(t, x) - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x}^T B(t, x) p(t, x) \right]^T. \quad (2.34)$$

Подобное (2.30) интегральное тождество для решения  $\pi(t, x | t_0, x_0)$  задачи (2.19) — (2.21) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M [\psi(t, X(t)) | X(t_0) = x_0] = M \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, X(t)) + K_x^* [\psi(t, X(t))] + \right. \\ \left. + L_x^* [\psi(t, X(t))] \right\} \Big| X(t_0) = x_0, \end{aligned}$$

а для решения  $p_2(t_0, t, x_0, x)$  задачи (2.22) — (2.24) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M \left\{ \xi(t, X(t), t_0, X(t_0)) \right\} = M \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \xi(t, X(t), t_0, X(t_0)) + \right. \\ \left. + K_x^* [\xi(t, X(t), t_0, X(t_0))] + L_x^* [\xi(t, X(t), t_0, X(t_0))] \right\}, \quad t \geq t_0, \end{aligned}$$

где функция  $\xi(t, x, t_0, x_0)$  по аргументам  $t, x$  обладает свойствами, аналогичными свойствам функции  $\psi(t, x)$ .



### 2.1.4. Числовые характеристики

Более "грубым", но и более простым для немарковских процессов способом их конструктивного описания является задание последовательностей моментных, кумулянтных (семиинвариантных) или квазимоментных функций. Для простоты рассмотрим их определения и свойства на примере одномерного случайного процесса ( $n=1$ ). Обобщение на многомерный случай обсуждается в конце данного раздела.

А. Моментные функции  $\{A_l(t_l^l)\}_{l \geq 1}$  — хорошо известны как математические ожидания произведений различных сечений скалярного процесса  $X(t)$ :

$$A_l(t_l^l) = M[X(t_1) \dots X(t_l)] = \int_{\mathbb{R}^l} x_1 \dots x_l p_l(t_1^l, x_1^l) dx_1 \dots dx_l. \quad (2.35)$$

Они являются интегральными ядрами разложения характеристического функционала этого процесса в ряд Вольтерра (ряд Маклорена для функционала)

$$\Phi[\lambda] = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^l}{l!} \int_{\mathbb{T}} dt_1 \dots \int_{\mathbb{T}} A_l(t_l^l) \lambda(t_1) \dots \lambda(t_l) dt_l, \quad (2.36)$$

т.е. определяются по характеристическому функционалу через значения его вариационных производных (см. приложение 1):

$$A_l(t_l^l) = i^{-l} \frac{\delta^l \Phi[0]}{\delta \lambda(t_1) \dots \delta \lambda(t_l)}, \quad l=1,2,\dots$$

В справедливости (2.36) нетрудно убедиться, разложив в (2.3) экспоненту в ряд Маклорена (обычный).

Подставляя (2.5) в (2.36) и учитывая (2.6), находим представление многоточечной характеристической функции процесса  $X(t)$  через его моментные функции:

$$\varphi_k(t_1^k, \lambda_1^k) = \Phi[\lambda^*] = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^l}{l!} \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^k A_l(t_{i_1}, \dots, t_{i_l}) \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_l}.$$

Группируя слагаемые с одинаковыми степенями переменных  $\lambda_j \in \mathbb{R}^1$ , можем записать

$$\varphi_k(t_1^k, \lambda_1^k) = \Phi[\lambda^*] = 1 + \sum_{|\nu|=1}^{\infty} \frac{i^{|\nu|}}{|\nu|!} \alpha_{\nu}(t_1^k) \lambda^{\nu}. \quad (2.37)$$

Здесь  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$  — мультииндекс,

$$|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_k, \quad \nu! = \nu_1! \dots \nu_k!, \quad \lambda^{\nu} = (\lambda_1)^{\nu_1} \dots (\lambda_k)^{\nu_k},$$

а величина

$$\alpha_{\nu}(t_1^k) = A_{|\nu|}(t_1^{|\nu|}, \dots, t_k^{|\nu|}) = \int_{\mathbb{R}^k} x^{\nu} p_k(t_1^k, x_1^k) dx, \quad (2.38)$$

где  $t^{(i)} = (\overbrace{t, \dots, t}^i)$ , является смешанным моментом порядка  $|\nu|$  системы из  $k$  сечений  $X(t_1), \dots, X(t_k)$  случайного процесса  $X(t)$  ( $k$ -точечный момент). Например,

$$\alpha_{1321}(t_1^4) = A_7(t_1, t_2, t_2, t_2, t_3, t_3, t_4).$$

Подставляя теперь (2.37) в (2.7) и используя известные свойства преобразования Фурье, получаем представление через моменты многоточечной плотности распределения:

$$p_k(t_1^k, x_1^k) = \delta(x_1) \dots \delta(x_k) + \sum_{|\nu| \geq 1} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} \alpha_{\nu}(t_1^k) \delta^{(\nu_1)}(x_1) \dots \delta^{(\nu_k)}(x_k), \quad (2.39)$$

где  $\delta^{(j)}(x)$  —  $j$ -я производная функции Дирака.

Данный ряд является формальным, и его сходимость нужно понимать в обобщенном смысле. Однако из этого представления следует важный вывод: *не существует случайного процесса, имеющего конечное число ненулевых моментных функций*. Действительно, если в (2.39) положить  $\alpha_{\nu} \neq 0$ ,  $|\nu| > L$ , то получим сумму конечного числа производных  $\delta$ -функции:

$$\delta(x_1) \dots \delta(x_k) + \sum_{|\nu| \geq 1} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} \alpha_{\nu}(t_1^k) \delta^{(\nu_1)}(x_1) \dots \delta^{(\nu_k)}(x_k),$$

которая, очевидно, ни при каком конечном  $L \geq 1$  даже приближенно не похожа на плотность распределения. В частности, у гауссовского центрированного случайного процесса все моментные функции нечетного порядка равны нулю, тогда как бесконечное количество моментных функций четного порядка представляет собой сумму произведений соответствующего числа корреляционных функций, например:

$$A_4^0(t_1^4) = R(t_1, t_2)R(t_3, t_4) + R(t_1, t_3)R(t_2, t_4) + R(t_1, t_4)R(t_2, t_3).$$

Следовательно, бесконечную совокупность моментных функций нельзя "урезать", т.е. полагать равными нулю все старшие элементы после некоторого номера  $L$ . Это послужило причиной широкого распространения кумулянтных функций, допускающих "урезание" с целью приближенного описания случайных процессов.

В. Кумулянтные (семиинвариантные) функции  $\{K_i(t_1^i)\}_{i \geq 1}$  — определяются как ядра разложения в ряд Вольтерра логарифма характеристического функционала, т.е.

$$\Phi[\lambda] = \exp \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^l}{l!} \int_{\Gamma} dt_1 \dots \int_{\Gamma} K_l(t_1) \lambda(t_1) \dots \lambda(t_l) dt_l \right\}. \quad (2.40)$$

Справедливы также связи

$$K_l(t_1) = i^{-l} \frac{\delta^l \ln \Phi[0]}{\delta \lambda(t_1) \dots \delta \lambda(t_1)}, \quad l=1,2,\dots$$

Сравнение (2.40) с (2.4) показывает, что существует класс случайных процессов — гауссовские процессы — полностью определяемый кумулянтными функциями только первого и второго порядков:  $K_1(t) = m(t)$ ,  $K_2(t_1, t_2) = R(t_1, t_2)$ , тогда как его старшие кумулянтные функции равны нулю:  $K_j(t_i) = 0$ ,  $j \geq 3$ .

В общем, негауссовском, случае первые кумулянтные функции также имеют четкий вероятностный смысл (как и первые кумулянты случайной величины):  $K_1(t)$  является математическим ожиданием процесса,  $K_2(t_1, t_2)$  — его корреляционной функцией,  $K_3(t_1, t_2, t_3)$  характеризует асимметрию негауссовского процесса,  $K_4(t_1, t_2, t_3, t_4)$  — его эксцесс. Остальные кумулянтные функции отвечают за более тонкие эффекты отличия закона распределения процесса от гауссовского.

Используя подстановку (2.5), из (2.40) нетрудно получить представление через кумулянтные функции любой многоточечной характеристической функции аналогично ее представлению (2.37) через моментные функции:

$$\varphi_k(t_1^k, \lambda_1^k) = \Phi[\lambda^*] = \exp \left\{ \sum_{|\nu| \geq 1} \frac{i^{|\nu|}}{\nu!} \alpha_{\nu}(t_1^k) \lambda^{\nu} \right\}. \quad (2.41)$$

Здесь  $\alpha_{\nu}(t_1^k)$  — смешанный кумулянт порядка  $|\nu|$  системы случайных величин  $X(t_1), \dots, X(t_k)$ ,  $\alpha_{\nu}(t_1^k) = K_{|\nu|}(t_1^{\nu_1}, \dots, t_1^{\nu_k})$ . Приравнявая (2.41) и (2.37), а также раскладывая либо экспоненту, либо логарифм в степенной ряд, можно получить следующие формулы взаимной связи смешанных моментов и кумулянтов [46]:

$$\alpha_{\nu}(t_1^k) = \nu! \sum_{i=1}^{|\nu|} \frac{1}{i!} \sum_{\substack{\mu^{(1)} + \dots + \mu^{(i)} = \nu \\ |\mu^{(j)}| \geq 1}} \prod_{j=1}^i \frac{1}{\mu^{(j)}!} \alpha_{\mu^{(j)}}(t_1^k), \quad (2.42)$$

$$\alpha_{\nu}(t_1^k) = \nu! \sum_{i=1}^{|\nu|} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \sum_{\substack{\mu^{(1)} + \dots + \mu^{(i)} = \nu \\ |\mu^{(j)}| \geq 1}} \prod_{j=1}^i \frac{1}{\mu^{(j)}!} \alpha_{\mu^{(j)}}(t_1^k). \quad (2.43)$$

Здесь второе суммирование производится по всем разбиениям  $k$ -мерного вектора  $\nu$  на такие наборы целых неотрицательных векторов  $\mu^{(0)}$ , которые отличаются хотя бы порядком следования векторов в наборе. Последнее приводит к наличию в (2.42), (2.43) подобных членов.

**Пример 2.3.** Установить связи между кумулянтными и моментными функциями  $K_l(t_i)$ ,  $\Lambda_l(t_i)$ .

□ Полагая в (2.43)  $\nu_1 = \dots = \nu_k = 1$ , получаем

$$K_1(t) = \kappa_1(t) = \alpha_1(t) = \Lambda_1(t),$$

$$K_2(t_1, t_2) = \kappa_{11}(t_1, t_2) = \alpha_{11}(t_1, t_2) - \frac{1}{2} [\alpha_{10}(t_1) \alpha_{01}(t_2) - \alpha_{01}(t_2) \alpha_{10}(t_1)] = \Lambda_2(t_1, t_2) - \Lambda_1(t_1) \Lambda_1(t_2).$$

Последнее равенство доказывает, что  $K_2(t_1, t_2)$  есть не что иное, как корреляционная функция процесса, т.е.  $K_2(t_1, t_2) = R(t_1, t_2)$ . Аналогичным образом, сразу приводя подобные члены, находим

$$K_3(t_1, t_2, t_3) = \kappa_{111}(t_1, t_2, t_3) = \alpha_{111}(t_1, t_2, t_3) - \frac{1}{2} [2\alpha_{100}(t_1) \times \alpha_{011}(t_2, t_3) + 2\alpha_{010}(t_2) \alpha_{101}(t_1, t_3) + 2\alpha_{001}(t_3) \alpha_{110}(t_1, t_2)] + \frac{1}{3!} 6\alpha_{100}(t_1) \alpha_{010}(t_2) \alpha_{001}(t_3) = \Lambda_3(t_1, t_2, t_3) - \Lambda_1(t_1) \Lambda_2(t_2, t_3) - \Lambda_1(t_2) \Lambda_2(t_1, t_3) - \Lambda_1(t_3) \Lambda_2(t_1, t_2) + 2\Lambda_1(t_1) \Lambda_1(t_2) \Lambda_1(t_3).$$

Наоборот, из (2.42) получим

$$\Lambda_3(t_1, t_2, t_3) = \alpha_{111}(t_1, t_2, t_3) = \kappa_{111}(t_1, t_2, t_3) + \frac{1}{2!} \times [2\kappa_{100}(t_1) \kappa_{011}(t_2, t_3) + 2\kappa_{010}(t_2) \kappa_{101}(t_1, t_3) + 2\kappa_{001}(t_3) \kappa_{110}(t_1, t_2)] + \frac{1}{3!} 6\kappa_{100}(t_1) \kappa_{010}(t_2) \kappa_{001}(t_3) = K_3(t_1, t_2, t_3) + K_1(t_1) K_2(t_2, t_3) + K_1(t_2) K_2(t_1, t_3) + K_1(t_3) K_2(t_1, t_2) + 2K_1(t_1) K_1(t_2) K_1(t_3).$$

Формулы для моментных и кумулянтных функций четвертого и пятого порядков приведены в [19]. ■

**Пример 2.4.** Установить связи между одноточечными моментами и кумулянтами.

□ Полагая в (2.43)  $k=1$ , получаем

$$\begin{aligned}
x_3(t) &= 3! \left[ \frac{\alpha_3(t)}{3!} - \frac{1}{2} 2\alpha_1(t) \frac{\alpha_2(t)}{2!} + \frac{1}{3} \alpha_1^3(t) \right] = \\
&= \alpha_3(t) - 3\alpha_1(t)\alpha_2(t) + 2\alpha_1^3(t), \\
x_4(t) &= 4! \left[ \frac{\alpha_4(t)}{4!} - \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_2(t)\alpha_2(t)}{2!2!} + 2\alpha_1(t) \frac{\alpha_3(t)}{3!} \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{3} 3\alpha_1^2(t) \frac{\alpha_2(t)}{2!} - \frac{1}{4} \alpha_1^4(t) \right] = \alpha_4(t) - 3\alpha_2^2(t) - 4\alpha_1(t)\alpha_3(t) + \\
&+ 12\alpha_1^2(t)\alpha_2(t) - 6\alpha_1^4(t).
\end{aligned}$$

Аналогичным образом из (2.42) найдем

$$\begin{aligned}
\alpha_3(t) &= 3! \left[ \frac{x_3(t)}{3!} + \frac{1}{2!} 2x_1(t) \frac{x_2(t)}{2!} + \frac{1}{3!} x_1^3(t) \right] = \\
&= x_3(t) + 3x_1(t)x_2(t) + x_1^3(t), \\
\alpha_4(t) &= 4! \left[ \frac{x_4(t)}{4!} + \frac{1}{2!} \left( \frac{x_2(t)x_2(t)}{2!2!} + 2x_1(t) \frac{x_3(t)}{3!} \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{3!} 3x_1^2(t) \frac{x_2(t)}{2!} + \frac{1}{4!} x_1^4(t) \right] = x_4(t) + 3x_2^2(t) + 4x_1(t)x_3(t) + \\
&+ 6x_1^2(t)x_2(t) + x_1^4(t).
\end{aligned}$$

Полагая в последних двух равенствах  $x_1(t) = 0$ , получаем кумулянтное представление для одноточечных центральных моментов  $\mu_l(t) = M[(X(t) - x_1(t))^l]$  третьего и четвертого порядков:

$$\mu_3(t) = x_3(t), \quad \mu_4(t) = x_4(t) + 3x_2^2(t).$$

Формулы взаимосвязи моментов и кумулянтов пятого и шестого порядков приведены в [19]. ■

Известная теорема Марцинкевича [46] утверждает, что не существует закона распределения с конечным числом  $L > 2$  первых кумулянтов. Тем не менее процедура "урезания" бесконечной совокупности кумулянтных функций, состоящая в приравнении нулю всех ее элементов порядка больше заданного

$$K_l(t_l^i) = 0, \quad l > L,$$

позволяет при  $L \geq 2$  получать приближенное представление много-

точечных плотностей распределения [19]. Такое L-е кумулянтное приближение, правда, при  $L \geq 3$  уже не является плотностью в обычном смысле, так как нарушается условие ее неотрицательности (2.8), и, следовательно, при вычислении вероятности попадания в малую область можно получить отрицательную величину. Однако, увеличивая точность приближения путем увеличения числа L, этот недостаток можно преодолеть.

Отметим также важное свойство производной от среднего значения не обязательно гладкой скалярной функции  $f$  многих негауссовских переменных  $X(t_1), \dots, X(t_k)$  по смешанному кумулянту порядка  $|\mu|$  этих переменных [19]:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu} (t_1^k)} M \left\{ f[X(t_1), \dots, X(t_k)] \right\} = \frac{1}{\mu!} M \left\{ f^{(\mu)} [X(t_1), \dots, X(t_k)] \right\}. \quad (2.44)$$

Действительно, из (2.41) легко найдем

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu} (t_1^k)} \varphi_k (t_1^k, \lambda_1^k) = \frac{i^{|\mu|}}{\mu!} \lambda^{\mu} \varphi_k (t_1^k, \lambda_1^k).$$

Учитывая это при дифференцировании (2.7) и используя известное свойство дифференцирования оригинала преобразования Фурье, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu} (t_1^k)} P_k (t_1^k, x_1^k) = \frac{(-1)^{|\mu|}}{\mu!} \frac{\partial^{|\mu|} P_k (t_1^k, x_1^k)}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_k^{\mu_k}}.$$

Последнее выражение и позволяет записать (2.44) с помощью многократного интегрирования по частям.

Наконец, представление многоточечной плотности  $P_k (t_1^k, x_1^k)$  через кумулянтные функции получим, подставив (2.41) в (2.7):

$$P_k (t_1^k, x_1^k) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \sum_{|\nu|=1}^{\infty} \frac{i^{|\nu|}}{\nu!} x_{\nu} (t_1^k) \lambda^{\nu} - i \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \right\} d\lambda_k.$$

Однако это представление *интегральное*, что является недостатком данного способа описания случайных процессов. *Алгебраическая* же связь плотности распределения с кумулянтными функциями устанавливается с помощью рядов Грама-Шарлье или Эджворта, имеющих в качестве коэффициентов квазимоментные функции, которые можно выразить через кумулянтные.

С. *Квазимоментные функции*  $\{B_i(t_i^k)\}_{i \geq 1}$  — определяются как ядра разложения в ряд Вольтерра отношения характеристических функционалов данного и гауссовского случайных процессов, т.е.

$$\Phi[\lambda] = \Phi_N[\lambda] \left\{ 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^l}{l!} \int_{\Gamma} dt_1 \dots \int_{\Gamma} B_l(t_1) \lambda(t_1) \dots \lambda(t_l) dt_l \right\}, \quad (2.45)$$

где

$$B_l(t_1) = i^{-l} \left( \frac{\delta(\Phi[\lambda]/\Phi_N[\lambda])}{\delta\lambda(t_1) \dots \delta\lambda(t_l)} \right)_{\lambda(t) \equiv 0}, \quad l=1,2,\dots$$

Здесь функционал  $\Phi_N[\lambda]$ , задаваемый формулой (2.4) с учетом  $n=1$ , определяется теми же параметрами  $m(t)$ ,  $R(\theta, \tau)$ , что и данный процесс  $X(t)$ :

$$m(t) = M[X(t)], \quad R(\theta, \tau) = M\{[X(\theta) - m(\theta)][X(\tau) - m(\tau)]\}.$$

Последнее является причиной того, что две первые квазимоментные функции тождественно равны нулю:

$$B_1(t_1) = 0, \quad B_2(t_1, t_2) = 0, \quad t_1, t_2 \in \Gamma.$$

Поэтому случайный процесс полностью задается параметрами  $m(t)$ ,  $R(\theta, \tau)$ ,  $\{B_l(t_1)\}_{l \geq 3}$ , причем квазимоментные функции, как и старшие кумулянтные функции, характеризуют отличия закона распределения процесса от гауссовского.

Из (2.45) легко получим квазимоментное представление характеристической функции

$$\varphi_k(t_1^k, \lambda_1^k) = \Phi[\lambda^*] = \varphi_k^N(t_1^k, \lambda_1^k) \left\{ 1 + \sum_{|\nu|=3}^{\infty} \frac{i^{|\nu|}}{\nu!} \beta_{\nu}(t_1^k) \lambda^{\nu} \right\}, \quad (2.46)$$

где  $\varphi_k^N(t_1^k, \lambda_1^k)$  — характеристическая функция одномерного гауссовского процесса (см. пример 2.1):

$$\varphi_k^N(t_1^k, \lambda_1^k) = \Phi[\lambda^*] = \exp \left\{ i \sum_{j=1}^k m(t_j) \lambda_j - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^k R(t_l, t_j) \lambda_l \lambda_j \right\}, \quad (2.47)$$

а  $\beta_{\nu}(t_1^k)$  — смешанный квази момент порядка  $|\nu|$  системы случайных величин  $X(t_1), \dots, X(t_k)$ ,  $\beta_{\nu}(t_1^k) = B_{|\nu|}(t_1^{|\nu|}, \dots, t_k^{|\nu|})$ .

Наконец, подставляя (2.46) в (2.7) и используя свойства преобразования Фурье, находим квазимоментное представление многоочечной плотности вероятности в виде ряда Грама — Шарлье:

$$p_k(t_1^k, x_1^k) = N_k(t_1^k, x_1^k) + \sum_{|\nu|=3}^{\infty} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!} \beta_{\nu}(t_1^k) \frac{\partial^{|\nu|} N_k(t_1^k, x_1^k)}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_k^{\nu_k}}. \quad (2.48)$$

Здесь  $N_k(t_1^k, x_1^k)$  — многоточечная плотность распределения одномерного гауссовского процесса с параметрами  $m(t)$ ,  $R(\theta, \tau)$ :

$$N_k(t_1^k, x_1^k) = N_k(x-m, R) = [(2\pi)^k \det R]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x-m)^T R^{-1} (x-m) \right\},$$

где  $x = (x_1, \dots, x_k)^T$ ,  $m = [m(t_1), \dots, m(t_k)]^T$ ,  $R = \|R(t_i, t_j)\|_{i,j=1, \dots, k}$ .

Используя известное свойство гауссовской плотности [28]

$$\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_k^{\nu_k}} N_k(t_1^k, x_1^k) = (-1)^{|\nu|} H_{\nu_1 - \nu_k}(t_1^k, x_1^k) N_k(t_1^k, x_1^k), \quad (2.49)$$

где  $H_\nu(t_1^k, x_1^k) = H_\nu(x-m, R)$  — *многомерный полином Эрмита первого рода*, ряд Грама—Шарлье (2.48) можно переписать в виде ряда Фурье разложения отношения плотностей  $p_k$  и  $N_k$  по полиномам Эрмита:

$$p_k(t_1^k, x_1^k) = N_k(t_1^k, x_1^k) \left\{ 1 + \sum_{|\nu| \geq 1} \frac{1}{\nu!} \beta_\nu(t_1^k) H_\nu(t_1^k, x_1^k) \right\}. \quad (2.50)$$

Существуют также *полиномы Эрмита второго рода* [28]

$$G_\mu(t_1^k, x_1^k) = G_\mu(x-m, R) = H_\mu[R^{-1}(x-m), R^{-1}], \quad (2.51)$$

которые можно определить и как коэффициенты разложения в ряд Маклорена производящей функции

$$\psi_k(t_1^k, u_1^k) = \exp \left[ (x-m)^T u - \frac{1}{2} u^T R u \right] = 1 + \sum_{|\mu| \geq 1} \frac{u^\mu}{\mu!} G_\mu(x-m, R). \quad (2.52)$$

Полиномы  $G_\mu$  образуют с полиномами  $H_\nu$  систему функций, биортонормальных с весом  $N_k$ :

$$\int_{R^k} H_\nu(t_1^k, x_1^k) G_\mu(t_1^k, x_1^k) N_k(t_1^k, x_1^k) dx_1 \dots dx_k = \nu! \delta_{\mu\nu}, \quad |\mu|, |\nu| \geq 1.$$

Поэтому, умножая (2.50) на  $G_\mu$  и интегрируя по  $x_1, \dots, x_k$ , легко получить, что смешанные квазиоменты являются средними значениями полиномов  $G$ :

$$\beta_\nu(t_1^k) = M[G_\nu(t_1^k; X(t_1), \dots, X(t_k))]. \quad (2.53)$$

Отсюда, в частности, следует подобное равенство и для квазиоментных функций:

$$B_i(t_1^i) = M[G_{\underline{1, \dots, 1}}(t_1^i; X(t_1), \dots, X(t_i))].$$



Используя в качестве определения полиномов Эрмита соотношения (2.49), (2.51), для них можно получить удобные рекуррентные формулы:

$$H_{\nu+e_i}(z, R) = (R^{-1}z)_i H_{\nu}(z, R) - \sum_{j=1}^k \nu_j (R^{-1})_{ij} H_{\nu-e_j}(z, R), \quad (2.54)$$

$$G_{\nu+e_i}(z, R) = z_i G_{\nu}(z, R) - \sum_{j=1}^k \nu_j R(t_i, t_j) G_{\nu-e_j}(z, R), \quad (2.55)$$

где  $|\nu| \geq 0$ ;  $z = x - m$ ;  $e_i$  —  $i$ -й единичный вектор  $k$ -мерного евклидова пространства,  $e_i = \|\delta_{ij}\|_{j=1, \dots, k}$ , а полиномы нулевого порядка равны единице:  $H_0(z, R) = G_0(z, R) = 1$ .

**Пример 2.5.** Найти явные выражения для многомерных  $G$ -полиномов первого, второго и третьего порядков.

□ Из (2.55) последовательно получаем:

$$\nu = 0: \quad G_{e_i}(z, R) = z_i,$$

$$\nu = e_j: \quad G_{e_i+e_j}(z, R) = z_i z_j - R(t_i, t_j),$$

$$\nu = e_j + e_h: \quad G_{e_i+e_j+e_h}(z, R) = z_i [z_j z_h - R(t_j, t_h)] - R(t_i, t_j) z_h - R(t_i, t_h) z_j = z_i z_j z_h - z_i R(t_j, t_h) - z_j R(t_i, t_h) - z_h R(t_i, t_j). \quad \blacksquare$$

**Пример 2.6.** Найти явные выражения для одномерных  $H$ - и  $G$ -полиномов первого, второго и третьего порядков.

□ При  $k=1$  формулы (2.54), (2.55) принимают следующий вид:

$$H_{l+1}(z, D) = \frac{z}{D} H_l(z, D) - \frac{l}{D} H_{l-1}(z, D),$$

$$G_{l+1}(z, D) = z G_l(z, D) - l D G_{l-1}(z, D),$$

где  $l \geq 0$ ;  $z = x - m(t)$ ;  $D = D(t)$  — дисперсия случайной величины  $X(t)$ .

Из них последовательно находим:

$$H_1(z, D) = \frac{z}{D}, \quad H_2(z, D) = \frac{z^2}{D^2} - \frac{1}{D}, \quad H_3(z, D) = \frac{z^3}{D^3} - 3 \frac{z}{D},$$

$$G_1(z, D) = z, \quad G_2(z, D) = z^2 - D, \quad G_3(z, D) = z^3 - 3zD. \quad \blacksquare$$

Представление смешанных квазимоментов через моменты получим на основании вытекающего из определения (2.52) свойства  $G$ -полиномов Эрмита:

$$G_{\nu}(x - m, R) = \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^{|\mu|} C_{\nu}^{\mu} G_{\mu}(m, R) x^{\nu-\mu},$$

где  $C_{\nu}^{\mu} = \frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!} = C_{\nu_1}^{\mu_1} \dots C_{\nu_k}^{\mu_k}$  — произведение биномиальных коэффициентов.

Тогда из (2.53), учитывая обозначение (2.51), находим

$$\beta_{\nu}(t_1^k) = \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^{|\mu|} C_{\nu}^{\mu} G_{\mu}(m, R) \alpha_{\nu-\mu}(t_1^k). \quad (2.56)$$

**Пример 2.7.** Найти представление односточечных квазимоментов третьего и четвертого порядков через моменты.

□ По (2.56) определяем:

$$\beta_3(t) = \alpha_3(t) - 3G_1[m(t), D(t)] \alpha_2(t) + 3G_2[m(t), D(t)] \alpha_1(t) - G_3[m(t), D(t)],$$

$$\beta_4(t) = \alpha_4(t) - 4G_1[m(t), D(t)] \alpha_3(t) + 6G_2[m(t), D(t)] \alpha_2(t) - 4G_3[m(t), D(t)] \alpha_1(t) + G_4[m(t), D(t)].$$

Здесь следует учесть, что  $\alpha_1(t) = m(t)$ . ■

Представление же моментов через квазимоменты получим, подставив ряд Грама—Шарлье (2.48) в (2.38). Выполняя интегрирование по частям и учитывая, что

$$\frac{\partial^{|\mu|}}{\partial x^{\mu}} x^{\nu} = \begin{cases} \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!} x^{\nu-\mu}, & \mu \leq \nu, \\ 0, & \mu > \nu, \end{cases}$$

находим

$$\alpha_{\nu}(t_1^k) = \alpha_{\nu}^N(t_1^k) + \sum_{\substack{\mu=0 \\ |\mu| \geq 3}}^{\nu} C_{\nu}^{\mu} \alpha_{\nu-\mu}^N(t_1^k) \beta_{\mu}(t_1^k), \quad (2.57)$$

где  $\alpha_{\nu}^N(t_1^k)$  — момент гауссовского (нормального) процесса.

Удобное выражение последнего через математическое ожидание  $m(t)$  и корреляционную функцию  $R(\theta, \tau)$  получим, сравнив разложение (2.52) с представлением  $N$  гауссовской характеристической функции (2.47) через моменты  $\alpha_{\mu}^N$  по формуле (2.37):

$$\alpha_{\mu}^N(t_1^k) = M_N[X^{\mu_1}(t_1) \dots X^{\mu_k}(t_k)] = G_{\mu}(m, -R).$$

Отметим, что последняя связь и формула (2.55) позволяют записать рекуррентную формулу для гауссовских моментов:

$$\alpha_{\nu+\epsilon_i}^N(t_1^k) = m(t_1)\alpha_{\nu}^N(t_1^k) + \sum_{j=1}^k \nu_j R(t_1, t_j) \alpha_{\nu-\epsilon_j}^N(t_1^k). \quad (2.58)$$

Кроме того, из (2.57) следует, что при  $|\nu| \leq 2$   $\alpha_{\nu}^N(t_1^k) = \alpha_{\nu}^N(t_1^k)$ , т.е. негауссовские и гауссовские моменты первого и второго порядков совпадают. Используя результаты примера 2.5, можно записать

$$\alpha_{\epsilon_i}(t_i) = G_{\epsilon_i}(m, -R) = m(t_i),$$

$$\alpha_{\epsilon_i+\epsilon_j}(t_i, t_j) = G_{\epsilon_i+\epsilon_j}(m, -R) = m(t_i)m(t_j) + R(t_i, t_j).$$

**Пример 2.8.** Найти выражение для старших одноточечных гауссовских моментов.

□ При  $k=1$  рекуррентная формула (2.58) принимает вид

$$\alpha_{l+1}^N(t) = m(t)\alpha_l^N(t) + lD(t)\alpha_{l-1}^N(t).$$

Учитывая, что  $\alpha_1^N(t) = m(t)$ ,  $\alpha_2^N(t) = m^2(t) + D(t)$ , последовательно находим

$$\alpha_3^N(t) = m^3(t) + 3m(t)D(t),$$

$$\alpha_4^N(t) = m^4(t) + 6m^2(t)D(t) + 3D^2(t), \dots \blacksquare$$

**Пример 2.9.** Представить одноточечные моменты через квазимоменты.

□ При  $k=1$  формула (2.57) принимает следующий вид:

$$\alpha_l(t) = \alpha_l^N(t) + \sum_{i=3}^l C_l^i \alpha_{l-i}^N(t) \beta_i(t),$$

откуда

$$\alpha_3(t) = \alpha_3^N(t) + \beta_3(t), \quad \alpha_4(t) = \alpha_4^N(t) + 4\alpha_1^N(t)\beta_3(t) + \beta_4(t), \dots \blacksquare$$

Наконец, формулы связи квазимоментов с кумулянтами можно получить, подставив (2.41) в (2.46). Учитывая при этом, что  $\alpha_1(t) = m(t)$ ,  $\alpha_{11}(t_1, t_2) = R(t_1, t_2)$  и раскладывая экспоненту в ряд Маклорена, находим

$$\beta_{\nu}(t_1^k) = \sum_{i=1}^{\left[ \frac{|\nu|}{3} \right]} \frac{\nu!}{i!} \sum_{\substack{\mu^{(1)} + \dots + \mu^{(i)} = \nu \\ |\mu^{(j)}| \geq 3}} \prod_{j=1}^i \frac{x_{\mu^{(j)}}(t_1^k)}{\mu^{(j)}!}. \quad (2.59)$$

Отсюда, в частности, следует, что смешанные квазимоменты и кумулянты третьего, четвертого и пятого порядков совпадают:

$$\beta_{\nu}(t_1^k) = x_{\nu}(t_1^k), \quad |\nu| = 3, 4, 5.$$

Поэтому совпадают также квазимоментные и кумулянтные функции этих порядков:

$$B_3(t_1^3) = K_3(t_1^3), \quad B_4(t_1^4) = K_4(t_1^4), \quad B_5(t_1^5) = K_5(t_1^5).$$

Представление более старших квазимоментных функций через кумулянтные следуют из (2.59) при  $\nu_1 = \dots = \nu_k = 1$ .

**Пример 2.10.** Найти выражения одноточечных квазимоментов шестого, седьмого и восьмого порядков через кумулянты.

□ Полагая в (2.59)  $k=1$  и производя действия аналогично примеру 2.4, получаем

$$\beta_6(t) = x_6(t) + 10x_3^2(t), \quad \beta_7(t) = x_7(t) + 35x_3(t)x_4(t),$$

$$\beta_8(t) = x_8(t) + 56x_3(t)x_5(t) + 35x_4^2(t). \quad \blacksquare$$

Алгебраическое представление многоточечной плотности через кумулянты находим, подставляя (2.59) в ряд Грама-Шарлье (2.50):

$$\begin{aligned} p_k(t_1^k, x_1^k) &= N_k(t_1^k, x_1^k) \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \times \right. \\ &\times \left. \sum_{|\mu^{(1)}|, \dots, |\mu^{(i)}| \geq 3} H_{\mu^{(1)} + \dots + \mu^{(i)}} \prod_{j=1}^i \frac{x_{\mu^{(j)}}}{\mu^{(j)}!} \right\}. \quad (2.60) \end{aligned}$$

Здесь для краткости записи опущены аргументы многомерных полиномов Эрмита  $H_{\nu}(t_1^k, x_1^k)$  и смешанных кумулянтов  $x_{\nu}(t_1^k)$ . С целью увеличения точности каждого отрезка ряда (2.60) его слагаемые можно сгруппировать в порядке убывания их значимости (в определенном смысле), в результате чего получим ряд Эджворта [28]. Его первые три члена имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 p_k(t_1^k, x_1^k) = N_k(t_1^k, x_1^k) & \left\{ 1 + \sum_{|\lambda| \geq 3} H_\lambda \frac{x_\lambda}{\lambda!} + \left[ \sum_{|\lambda| \geq 4} H_\lambda \frac{x_\lambda}{\lambda!} + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{|\lambda|, |\mu| \geq 3} H_{\lambda+\mu} \frac{x_\lambda x_\mu}{\lambda! \mu!} \left. \right] + \left[ \sum_{|\lambda| \geq 5} H_\lambda \frac{x_\lambda}{\lambda!} + \sum_{|\lambda| \geq 3} \sum_{|\lambda| \geq 4} H_{\lambda+\mu} \frac{x_\lambda x_\mu}{\lambda! \mu!} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{6} \sum_{|\lambda|, |\mu|, |\nu| \geq 3} H_{\lambda+\mu+\nu} \frac{x_\lambda x_\mu x_\nu}{\lambda! \mu! \nu!} \right] + \dots \right\}, \quad (2.61)
 \end{aligned}$$

где  $\lambda, \mu, \nu$  -  $k$ -мерные мультииндексы.

Взаимосвязь между статистическими характеристиками случайных процессов изображена на рис. 2.3.

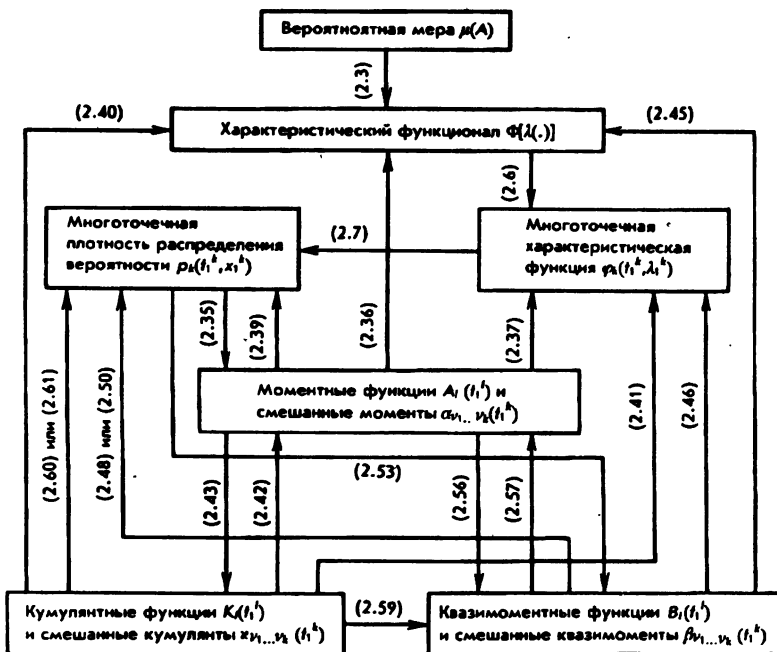


Рис. 2.3.

*D. Обобщение на многомерный случай.* Многомерный случайный процесс, т.е. система из нескольких случайных процессов  $X(t) =$

$= [X_1(t), \dots, X_n(t)]$ , описывается последовательностями *взаимных числовых характеристик*: моментных  $A_{l_1, \dots, l_n}^{x_1, \dots, x_n}(\theta_1^l, \dots, \eta_1^n)$ , кумулянтных  $K_{l_1, \dots, l_n}^{x_1, \dots, x_n}(\theta_1^l, \dots, \eta_1^n)$  и квазимоментных  $B_{l_1, \dots, l_n}^{x_1, \dots, x_n}(\theta_1^l, \dots, \eta_1^n)$  функций порядка  $l_1 + \dots + l_n$ , где  $l_1, \dots, l_n \geq 0$ . Все они определяют соответствующими разложениями характеристического функционала (2.3). Так, взаимные моментные функции

$$A_{l_1, \dots, l_n}^{x_1, \dots, x_n}(\theta_1^l, \dots, \eta_1^n) = M[X_1(\theta_1) \dots X_1(\theta_1) \dots X_n(\eta_1) \dots X_n(\eta_1)]$$

являются ядрами его разложения в  $n$ -кратный ряд Вольтерра:

$$\begin{aligned} \Phi[\lambda] = 1 + \sum_{l_1 + \dots + l_n = 1}^{\infty} \frac{i^{l_1 + \dots + l_n}}{l_1! \dots l_n!} \int_{\Gamma} \lambda_1(\theta_1) d\theta_1 \dots \times \\ \times \int_{\Gamma} \lambda_1(\theta_1) d\theta_1 \dots \int_{\Gamma} \lambda_n(\eta_1) d\eta_1 \dots \int_{\Gamma} A_{l_1, \dots, l_n}^{x_1, \dots, x_n}(\theta_1^l, \dots, \eta_1^n) \lambda_n(\eta_1) d\eta_n, \end{aligned}$$

представляющий собой обобщение ряда (2.36). Аналогично обобщаются на многомерный случай и все другие соотношения, приведенные в данном разделе. При этом их запись становится более громоздкой.

Тем не менее многие из этих соотношений и в многомерном случае сохраняют свой вид. Это те, которые записаны через *смешанные моменты*  $\alpha_{\nu}^k(t)$ , *кумулянты*  $\chi_{\nu}^k(t)$  и *квазимоменты*  $\beta_{\nu}^k(t)$ .

Таковы, например, представления многоточечной характеристической функции (2.37), (2.41), (2.46) и плотности распределения (2.39), свойство смешанного кумулянта (2.44) и другие выражения. Однако теперь уже *мультииндекс*  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$  из простого  $k$ -мерного становится *блочным*  $kn$ -мерным, т.е. каждый блок  $\nu_j$ ,  $j = \overline{1, k}$ , в свою очередь, является  $n$ -мерным мультииндексом:

$$\nu_j = (\nu_{1j}, \dots, \nu_{nj}), \quad |\nu_j| = \nu_{1j} + \dots + \nu_{nj}, \quad |\nu| = |\nu_1| + \dots + |\nu_k|,$$

В результате, например,  $\alpha_{\nu}^k(t)$  по-прежнему имеет смысл смешанного момента порядка  $|\nu|$  системы из  $k$  сечений случайного, но уже многомерного процесса  $X(t)$ :

$$\alpha_{\nu}^k(t) \equiv \alpha_{\nu_1, \dots, \nu_k}^k(t) = M[X^{\nu_1}(t_1) \dots X^{\nu_k}(t_k)],$$

где  $X^{\nu_j}(t_j) = X_1^{\nu_{1j}}(t_j) \dots X_n^{\nu_{nj}}(t_j)$  — произведение соответствующих степеней  $n$  компонент вектора  $X(t_j)$ , и является, аналогично (2.38), сечением моментной функции:

$$\alpha_{\nu_1, \dots, \nu_k}^k(t) = A_{|\nu_1|, \dots, |\nu_k|}^{x_1, \dots, x_n}(t_1^{|\nu_{11}|}, \dots, t_k^{|\nu_{1k}|}, \dots; t_1^{|\nu_{n1}|}, \dots, t_k^{|\nu_{nk}|}),$$

где  $|\nu^j| = \nu_{1j} + \dots + \nu_{kj}$ .

В частности,

$$\alpha_{21,10,01}^3(t_1^3) = M[X_1^2(t_1)X_2(t_1)X_1(t_2)X_2(t_3)] = A_{3,2}^{X_1^2}(t_1, t_1, t_2; t_1, t_3).$$

Блочность мультииндекса  $\nu$  распространяется также и на полиномы Эрмита  $H_{\nu}(x - m, R)$ ,  $G_{\nu}(x - m, R)$ , где теперь  $x \in R^{kn}$ ;  $m$  — блочный  $kn$ -мерный вектор из  $k$  значений  $n$ -мерного вектора математического ожидания  $m(t)$ ;  $R$  — блочная  $kn \times kn$ -матрица значений корреляционной  $n \times n$ -матрицы  $R(\theta, \tau)$ :

$$m = \begin{bmatrix} m(t_1) \\ \dots \\ m(t_k) \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R(t_1, t_1) & \dots & R(t_1, t_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ R(t_k, t_1) & \dots & R(t_k, t_k) \end{bmatrix}.$$

В результате незначительно изменяются лишь рекуррентные формулы для полиномов Эрмита. Например, вместо (2.55) получаем

$$G_{\nu + e_{ij}}(z, R) = z_{ij} G_{\nu}(z, R) - \sum_{h=1}^n \sum_{l=1}^k \nu_{hl} R_{hi}(t_l, t_j) G_{\nu - e_{hl}}(z, R),$$

где  $e_{ij}$  — единичный вектор  $kn$ -мерного евклидова пространства,  $e_{ij} = \|\delta_{hi} \delta_{lj}\|_{l=1, k}^{h=1, n}$ .

Все это позволяет использовать в многомерном случае (также без изменений) как приведенные выше представления через числовые характеристики многоточечной плотности распределения (2.48), (2.50), (2.60), (2.61), так и связи между этими характеристиками (2.42), (2.43), (2.56), (2.57), (2.59). И только рекуррентную формулу для гауссовских моментов (2.58) нужно заменить чуть более сложным выражением:

$$\alpha_{\nu + e_{ij}}^N(t_1^k) = m_i(t_j) \alpha_{\nu}^N(t_1^k) + \sum_{h=1}^n \sum_{l=1}^k \nu_{hl} R_{hi}(t_l, t_j) \alpha_{\nu - e_{hl}}^N(t_1^k).$$

**Пример 2.11.** Найти явное представление гауссовского момента  $\alpha_{30,01}^N(t_1, t_2) = M_N[X_1^3(t_1)X_2(t_2)]$  через элементы вектора  $m(t)$  и матрицы  $R(\theta, \tau)$ .

□ Имеем случай с  $n=2$ ,  $k=2$ . Выберем  $e_{ij} = e_{22} = (00, 01)$ ,  $\nu = (30, 00)$ . Тогда

$$\alpha_{30,01}^N(t_1, t_2) = m_2(t_2) \alpha_{30,00}^N(t_1, t_2) + 3R_{12}(t_1, t_2) \alpha_{20,00}^N(t_1, t_2).$$

Здесь  $\alpha_{30,00}^N(t_1, t_2) = \alpha_{30}^N(t_1)$ ,  $\alpha_{20,00}^N(t_1, t_2) = \alpha_{20}^N(t_1)$  — собственные гауссовские моменты случайной величины  $X_1(t_1)$ . Используя результаты примера 2.8, получаем

$$\alpha_{30}^N(t_1) = m_1^3(t_1) + 3m_1(t_1)D_1(t_1), \quad \alpha_{20}^N(t_1) = m_1^2(t_1) + D_1(t_1),$$

где  $D_1(t_1) = R_{11}(t_1, t_1)$ .

В результате находим

$$\alpha_{30,01}^N(t_1, t_2) = m_1^3(t_1)m_2(t_2) + 3m_1(t_1)m_2(t_1)D_1(t_1) + 3[m_1^2(t_1) + D_1(t_1)]R_{12}(t_1, t_2). \quad \blacksquare$$

## 2.2. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

### 2.2.1. Описание стохастических систем дифференциальными уравнениями

Пусть оператор динамической системы (2.1) описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, которое путем введения дополнительных переменных состояния можно представить в нормальной форме Коши. Тогда, обозначая через  $X(t)$  вектор состояния системы, связь вход-выход (2.1) можно записать в виде уравнения состояния

$$\dot{X}(t) = \varphi(t, X(t), G(t)), \quad t \geq t_0, \quad X(t_0) = X_0, \quad (2.62)$$

и формулы выхода

$$Y(t) = \psi(t, X(t)), \quad (2.63)$$

где  $\varphi(t, x, g)$ ,  $\psi(t, x)$  — детерминированные вектор-функции.

Наиболее просто связь между вероятностными мерами входа  $\mu_g$  и выхода  $\mu_y$  такой системы устанавливается в случае, когда состояние  $X(t)$  является марковским вектором, т.е. однозначно определяется двучечной плотностью  $p_2(t_0, t, x_0, x)$ ,  $t \geq t_0$ . Последняя удовлетворяет уравнению Колмогорова (2.22) при начальном условии (2.23), где  $p_0(x_0)$  — плотность распределения начального состояния  $X_0$ , и граничном условии (2.24). Тогда нахождение любых требуемых вероятностных характеристик выхода  $Y(t)$  сводится к сравнительно простой задаче анализа нелинейного безынерционного преобразования (2.63) марковского вектора  $X(t)$ . В этом случае проблема полного описания стохастической дифференциальной системы (2.62), (2.63) в основном состоит в определении ограничений на функцию  $\varphi(t, x, g)$  и меру  $\mu_g$ , при которых решение уравнения (2.62) является марковским процессом, и в нахождении коэффициентов уравнения Колмогорова по таким  $\varphi(t, x, g)$  и  $\mu_g$ .

Согласно *теореме Дуба* [41], достаточными условиями марковости состояния  $X(t)$  являются следующие.

1. *Представление уравнения (2.62) в форме Ланжевена:*



$$\dot{X}(t) = f(t, X(t)) + \Phi(t, X(t)) G(t),$$

где  $f(t, x)$ ,  $\Phi(t, x)$  — соответственно векторная и матричная функции, удовлетворяющие по  $x$  условию Липшица:

$$|f(t, x) - f(t, y)|^2 + |\Phi(t, x) - \Phi(t, y)|^2 \leq c|x - y|^2 \quad (2.64)$$

и имеющие ограниченную скорость роста при  $|x| \rightarrow \infty$ :

$$|f(t, x)|^2 + |\Phi(t, x)|^2 \leq c(1 + |x|)^2. \quad (2.65)$$

Здесь  $|x|^2 = x^T x$ ,  $|\Phi|^2 = \sum_{i,j} \Phi_{ij}^2$ ;  $c$  — положительная константа.

2. Действие на вход системы белого шума (не обязательно гауссовского) — обобщенного случайного процесса с независимыми значениями, пропорционального производной стандартного (с единичной интенсивностью) процесса  $Z(t)$  с независимыми приращениями:

$$G(t) = \Psi(t) \dot{Z}(t).$$

Здесь матрица  $\Psi(t)$  характеризует интенсивность в общем случае нестационарного белого шума  $G(t)$ , так как его корреляционная функция имеет вид  $R_g(t, \tau) = \Psi(t)\Psi^T(\tau)\delta(t - \tau)$ .

3. Независимость начального условия  $X_0$  от будущих значений белого шума  $G(\tau)$ ,  $\tau > t_0$ .

В результате выполнения условий 1 и 2 уравнение состояния (2.62) принимает вид

$$\dot{X}(t) = f(t, X(t)) + F(t, X(t))\dot{Z}(t), \quad (2.66)$$

где  $F(t, x) = \Phi(t, x)\Psi(t)$ .

Структурная схема системы с марковским состоянием приведена на рис. 2.4.

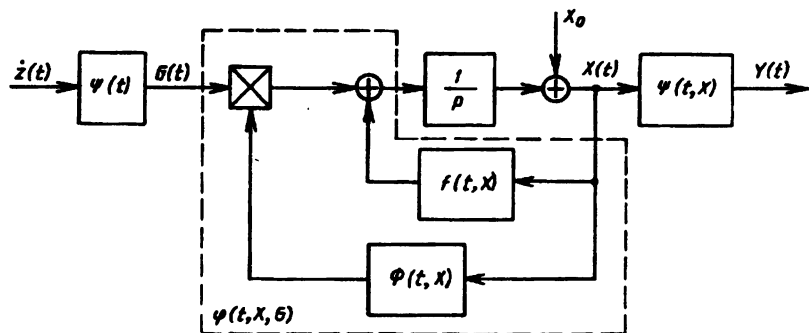


Рис. 2.4.

Из этих условий следует также возможность описания стохастической дифференциальной системы уравнением Ланжевена (2.66) и

формулой выхода (2.63) и в более общем случае, когда вход  $G(t)$  представляет собой результат нелинейного безынерционного преобразования некоторого марковского вектора  $U(t)$ . Тогда можно записать уравнения так называемого *формирующего фильтра* — системы, формирующей случайный процесс  $G(t)$  из стандартного белого шума  $dZ(t)/dt$ :

$$\dot{U}(t) = h(t, U(t)) + H(t, U(t))\dot{Z}(t), \quad U(t_0) = U_0, \quad (2.67)$$

$$G(t) = \chi(t, U(t)). \quad (2.68)$$

Структурная схема формирующего фильтра представлена на рис. 2.5.

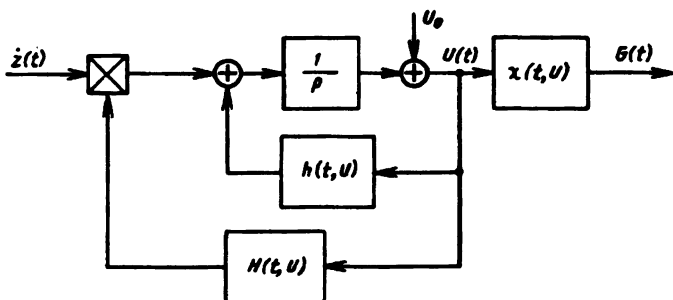


Рис. 2.5.

Подставляя теперь (2.68) в (2.62), получаем уравнение

$$\dot{X}(t) = \varphi[t, X(t), \chi(t, U(t))], \quad X(t_0) = X_0,$$

которое вместе с (2.67) образует систему дифференциальных уравнений Ланжевена типа (2.66) с белым шумом, но для *расширенного вектора состояния*  $\tilde{X}(t)$ :

$$\dot{\tilde{X}}(t) = f(t, \tilde{X}(t)) + F(t, \tilde{X}(t))\dot{Z}(t), \quad \tilde{X}(t_0) = \tilde{X}_0,$$

где

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} X \\ U \end{bmatrix}, \quad f(t, \tilde{X}) = \begin{bmatrix} \varphi(t, X, \chi(t, U)) \\ h(t, U) \end{bmatrix}, \quad F(t, \tilde{X}) = \begin{bmatrix} 0 \\ H(t, U) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, расширение вектора состояния системы путем добавления переменных состояния формирующего фильтра позволяет и в этом случае описать систему уравнением (2.66) и формулой (2.63).

Дифференциальное уравнение Ланжевена (2.66), содержащее белый шум, принято называть *стохастическим*. Оно является символической записью эквивалентного интегрального уравнения

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, X(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t F(\tau, X(\tau)) \dot{Z}(\tau) d\tau. \quad (2.69)$$

Здесь последний интеграл также называется стохастическим и может быть записан в виде

$$\int_{t_0}^t F(\tau, X(\tau)) \dot{Z}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t F(\tau, X(\tau)) dZ(\tau). \quad (2.70)$$

Его нельзя понимать ни как обычный интеграл Римана, ни как интеграл Стильтьеса, поскольку процесс  $Z(t)$  с вероятностью единица имеет неограниченную вариацию на любом интервале. Приведем способы определения и основные свойства стохастических интегралов и соответствующих им дифференциалов [13, 28].

### 2.2.2. Стохастические интегралы и дифференциалы

Пусть  $Z(t)$  — стандартный среднеквадратически непрерывный векторный процесс с независимыми приращениями с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией:

$$R_z(t_1, t_2) = C(t_0) + [\min(t_1, t_2) - t_0] E, \quad t_1, t_2 \geq t_0,$$

где  $C(t)$  — ковариационная матрица процесса  $Z(t)$ .

Пусть также  $S(t)$  — среднеквадратически непрерывная случайная матрица-функция с конечным моментом второго порядка, такая, что система случайных величин  $(S(t_1), S(t_2), Z(\tau))$  не зависит от приращения  $Z_\beta - Z_\alpha$  при любых  $t_1 < t_2 \leq \alpha$ ,  $\tau \leq \alpha < \beta$ .

Стохастическим  $\theta$ -интегралом от случайной функции  $S(t)$  по процессу  $Z(t)$

$$I_\theta(t) = \int_{t_0}^t S(\tau) d_\theta Z(\tau), \quad (2.71)$$

где  $\theta \in [0, 1]$  — числовой параметр, называется среднеквадратический предел последовательности интегральных сумм:

$$I_\theta(t) = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N S(\eta_i^\theta) \Delta Z_{\tau_{i-1}, \tau_i}. \quad (2.72)$$

Здесь  $\tau_0 = t_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = t$  — последовательность точек разбиения отрезка интегрирования  $[t_0, t]$  на  $N$  частей такая, что

$\Delta = \max_{i=1, N} (\tau_i - \tau_{i-1}) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ ;  $\eta_i^\theta = (1 - \theta)\tau_{i-1} + \theta\tau_i$  — точка внутри

$i$ -го отрезка разбиения  $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ ;  $\Delta Z_{\tau_{i-1}, \tau_i} = Z(\tau_i) - Z(\tau_{i-1})$  —

приращение процесса  $Z(t)$  на этом отрезке, а среднеквадратический предел  $\xi = \lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N$  определяется равенством  $\lim_{N \rightarrow \infty} M(\xi - \xi_N)^2 = 0$ .

Отметим, что вследствие непрерывности функции  $S(t)$  ее можно на отрезке  $[\tau_{i-1}, \tau_i]$  интерполировать линейной функцией

$$S(t) = S(\tau_{i-1}) + \frac{S(\tau_i) - S(\tau_{i-1})}{\tau_i - \tau_{i-1}} (t - \tau_{i-1}) + o(\tau_i - \tau_{i-1}),$$

где  $o(h)$  — бесконечно малая величина по отношению к  $h$ :  $\lim_{h \rightarrow 0} o(h) = 0$ .

Подставляя это выражение в (1.72), получаем другой вид той же интегральной суммы:

$$I_{\theta}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N [(1-\theta)S(\tau_{i-1}) + \theta S(\tau_i)] \Delta Z_{\tau_{i-1}, \tau_i}. \quad (2.72a)$$

Свойства стохастического интеграла зависят от расположения точки  $\eta_i$  на отрезке разбиения, которое определяется значением параметра  $\theta$ . При этом наибольшее распространение получили два следующих частных случая.

При  $\theta = 0$ , когда значения случайной функции  $S(\tau)$  берутся на левом конце отрезка разбиения, так как  $\eta_i = \tau_{i-1}$ , равенства (2.72), (2.72a) определяют *интеграл Ито*

$$I_0(t) = \int_{t_0}^t S(\tau) d_0 Z(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N S(\tau_{i-1}) \Delta Z_{\tau_{i-1}, \tau_i}. \quad (2.72б)$$

При  $\theta = 1/2$ , когда значения функции  $S(\tau)$  берутся в середине каждого отрезка разбиения, так как  $\eta_i = (\tau_{i-1} + \tau_i)/2$ , равенство (2.72) определяет *симметризованный интеграл Стратоновича*

$$I_{1/2}(t) = \int_{t_0}^t S(\tau) d_{1/2} Z(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N S\left(\frac{\tau_i + \tau_{i-1}}{2}\right) \Delta Z_{\tau_{i-1}, \tau_i}, \quad (2.72в)$$

тогда как равенство (2.72a) дает эквивалентное определение

$$I_{1/2}(t) = \int_{t_0}^t S(\tau) d_{1/2} Z(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{S(\tau_i) + S(\tau_{i-1})}{2} \Delta Z_{\tau_{i-1}, \tau_i}, \quad (2.72г)$$

Преимущество интеграла Ито перед остальными  $\theta$ -интегралами состоит в простоте вычисления математического ожидания и ковариации этого интеграла [28]:

$$M[I_0(t)] = 0, \quad M[I_0(t)I_0^T(t)] = \int_{t_0}^t M[S(\tau)S^T(\tau)] d\tau. \quad (2.73)$$

Недостатком интеграла Ито является *несправедливость* для него *обычных правил интегрирования* (интегрирования по частям, замены переменных и т.д.).

**Пример 2.12.** Вычислить интеграл Ито  $\int_{t_0}^t W(\tau) dW_0(\tau)$ , где  $W(\tau)$  — одномерный стандартный винеровский процесс.

□ По определению (2.726) имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t W(\tau) d_0 W(\tau) &= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N W(\tau_{i-1}) [W(\tau_i) - W(\tau_{i-1})] = \\ &= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \left\{ W^2(\tau_i) - W^2(\tau_{i-1}) - [W(\tau_i) - W(\tau_{i-1})]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} [W^2(t) - W^2(t_0)] - \frac{1}{2} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N [W(\tau_i) - W(\tau_{i-1})]^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим случайную величину  $\Lambda_N = \sum_{i=1}^N [W(\tau_i) - W(\tau_{i-1})]^2$ .

Найдем ее математическое ожидание и дисперсию. Используя значения второго и четвертого моментов приращения винеровского процесса  $\Delta W_{\tau_{i-1}, \tau_i} = W(\tau_i) - W(\tau_{i-1})$  (см. пример 2.2), получаем

$$\begin{aligned} M(\Lambda_N) &= \sum_{i=1}^N M(\Delta W^2_{\tau_{i-1}, \tau_i}) = \sum_{i=1}^N (\tau_i - \tau_{i-1}) = t - t_0, \\ D(\Lambda_N) &= \sum_{i=1}^N D(\Delta W^2_{\tau_{i-1}, \tau_i}) = \sum_{i=1}^N M(\Delta W^4_{\tau_{i-1}, \tau_i}) = \\ &= 3 \sum_{i=1}^N (\tau_i - \tau_{i-1})^2 \leq 3 \max_{i=1, N} (\tau_i - \tau_{i-1}) \sum_{i=1}^N (\tau_i - \tau_{i-1}) = 3(t - t_0)\Delta. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что дисперсия суммы независимых случайных величин  $\Delta W^2_{\tau_{i-1}, \tau_i}$  равна сумме их дисперсий.

Переходя к пределу при  $N \rightarrow \infty$ ,  $\Delta \rightarrow 0$ , находим  $M(\Lambda_N) \rightarrow (t - t_0)$ ,  $D(\Lambda_N) \rightarrow 0$ . Следовательно, величина  $\Lambda = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \Lambda_N$  является детерминированной и равна  $t - t_0$ , т.е.

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N [W(\tau_i) - W(\tau_{i-1})]^2 = t - t_0.$$

Учитывая это в выражении для интеграла Ито, окончательно получаем

$$\int_{t_0}^t W(\tau) d_0 W(\tau) = \frac{W^2(t) - W^2(t_0)}{2} - \frac{1}{2}(t - t_0).$$

Последнее подтверждает несправедливость для интеграла Ито обычной формулы интегрирования степенной функции. ■

Достоинством же интеграла Стратоновича является возможность использовать при вычислении обычные правила интегрирования. Следовательно, это определение соответствует физическим процессам преобразования случайных сигналов динамическими системами, что особенно важно для моделирования стохастических дифференциальных уравнений. Вычислить же математическое ожидание и ковариацию интеграла Стратоновича для невинеровского  $Z(t)$  очень трудно вследствие вероятностной зависимости  $S((\tau_i + \tau_{i-1})/2)$  или  $S(\tau_i)$  от  $Z(\tau_i) - Z(\tau_{i-1})$ .

**Пример 2.13.** Вычислить интеграл Стратоновича  $\int_{t_0}^t W(\tau) \times d_{1/2} W(\tau)$ , аналогичный рассмотренному в примере 2.12 интегралу Ито.

□ По определению (2.72г) имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t W(\tau) d_{1/2} W(\tau) &= \text{l.i.m.} \sum_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{W(\tau_i) + W(\tau_{i-1})}{2} [W(\tau_i) - W(\tau_{i-1})] = \\ &= \frac{1}{2} \text{l.i.m.} \sum_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N [W^2(\tau_i) - W^2(\tau_{i-1})] = \frac{1}{2} [W^2(t) - W^2(t_0)]. \end{aligned}$$

Это подтверждает справедливость для интеграла Стратоновича обычной формулы интегрирования степенной функции. ■

*Стохастическим  $\theta$ -дифференциалом* векторного случайного процесса  $P(t)$ , определенного следующим интегральным соотношением:

$$P(t) = P_0 + \int_{t_0}^t R(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t S(\tau) d_{\theta} Z(\tau), \quad (2.74)$$

называется сокращенная запись этого выражения:

$$d_{\theta} P(t) = R(t) dt + S(t) d_{\theta} Z(t), \quad P(t_0) = P_0. \quad (2.75)$$

Так как процесс с независимыми приращениями  $Z(t)$  не дифференцируем в обычном смысле, то  $d_{\theta} Z(t)$ , а следовательно, и  $d_{\theta} P(t)$  не являются привычными дифференциалами. В частности, порядки малости первого и второго слагаемых в (2.75) различны и составля-

ют  $dt$  и  $\sqrt{dt}$  соответственно. Тем не менее оба слагаемых играют одинаковую роль в формировании процесса  $P(t)$ , как это показывает интегральная формула (2.74).

При описании нелинейных систем появляются, как видно из (2.69), (2.70), интегралы типа  $\int_0^t \varphi(\tau, P(\tau)) d_0 Z(\tau)$  от нелинейных функций процесса  $P(t)$ , определенного выражением (2.74) или (2.75). Связь между различными стохастическими интегралами такого типа установлена только в частном случае, когда процесс  $Z(t)$  заменен на стандартный винеровский процесс  $W(t)$ . Для получения этой связи используем формулу дифференцирования сложной функции  $\varphi(t, P(t))$ , которая при  $\theta \neq 1/2$  отличается от обычной формулы математического анализа.

Пусть  $\varphi(t, y)$  — скалярная функция времени  $t$  и вектора  $y$ , непрерывная вместе со своими частными производными  $\partial\varphi/\partial t$ ,  $\partial\varphi/\partial y$ ,  $\partial^2\varphi/\partial y^2$ . Тогда стохастический  $\theta$ -дифференциал процесса  $U(t) = -\varphi(t, Y(t))$ , где вектор  $Y(t)$  определяется дифференциалом

$$d_0 Y(t) = R(t)dt + S(t)d_0 W(t), \quad (2.76)$$

находится по следующей формуле  $\theta$ -дифференцирования [28]:

$$d_0 \varphi(t, Y) = \frac{\partial\varphi(t, Y)}{\partial t} dt + \left( \frac{\partial\varphi(t, Y)}{\partial y} \right)^T d_0 Y + \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \text{tr} \left[ S S^T \frac{\partial^2 \varphi(t, Y)}{\partial y^2} \right] dt, \quad (2.77)$$

где  $\text{tr}$  — след матрицы.

Эта формула отличается от обычной формулы дифференцирования наличием дополнительного третьего слагаемого, которое пропадает только при  $\theta = 1/2$ , т.е. при использовании симметризованных интеграла и дифференциала Стратоновича:

$$d_{1/2} \varphi(t, Y) = \frac{\partial\varphi(t, Y)}{\partial t} dt + \left( \frac{\partial\varphi(t, Y)}{\partial y} \right)^T d_{1/2} Y.$$

При  $\theta = 0$  формула (2.77) называется формулой дифференцирования Ито и имеет вид

$$d_0 \varphi(t, Y) = \frac{\partial\varphi(t, Y)}{\partial t} dt + \left( \frac{\partial\varphi(t, Y)}{\partial y} \right)^T d_0 Y + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ S S^T \frac{\partial^2 \varphi(t, Y)}{\partial y^2} \right] dt. \quad (2.78)$$

В частном случае при  $R(t) = 0$ ,  $S(t) = E$  из (2.76) получаем  $Y(t) = W(t)$ , и тогда формула Ито упрощается:

$$d_0 \varphi(t, W) = \left( \frac{\partial\varphi(t, W)}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{tr} \frac{\partial^2 \varphi(t, W)}{\partial w^2} \right) dt + \left( \frac{\partial\varphi(t, W)}{\partial w} \right)^T d_0 W.$$

**Пример 2.14.** Найти стохастические дифференциалы Ито функций  $\exp[W(t)]$ ,  $W^2(t)$ , где  $W(t)$  — одномерный стандартный винеровский процесс.

□ Используя формулу Ито (2.78), запишем

$$d_0 e^{W(t)} = \frac{1}{2} e^{W(t)} dt + e^{W(t)} d_0 W(t), \quad d_0 W^2(t) = dt + 2W(t) d_0 W(t).$$

Отметим, что, интегрируя последнее равенство в пределах от  $t_0$  до  $t$ :

$$\int_{t_0}^t d_0 (W^2(\tau)) = \int_{t_0}^t dt + 2 \int_{t_0}^t W(\tau) d_0 W(\tau),$$

получаем

$$W^2(t) - W^2(t_0) = t - t_0 + 2 \int_{t_0}^t W(\tau) d_0 W(\tau).$$

Отсюда находим выражение для интеграла Ито:

$$\int_{t_0}^t W(\tau) d_0 W(\tau) = \frac{W^2(t) - W^2(t_0)}{2} - \frac{t - t_0}{2},$$

что совпадает с результатом примера 2.12. ■

Формулы для стохастических дифференциалов Ито типовых нелинейных функций стандартного винеровского процесса приведены в [28].

Формулы дифференцирования (2.77), (2.78) позволяют в случае интегрирования по винеровскому процессу установить *связь между  $\theta$ -интегралом и интегралом Ито* от произвольной нелинейной функции  $\psi(t, Y(t))$  процесса  $Y(t)$ , определяемого дифференциалом (2.76). Действительно, вычитая (2.77) из (2.78) и используя (2.76), находим

$$d_0 \varphi(t, Y) - d_\theta \varphi(t, Y) = \left( \frac{\partial \varphi(t, Y)}{\partial y} \right)^T S (d_0 W - d_\theta W) + \\ + \theta \operatorname{tr} \left[ S S^T \frac{\partial^2 \varphi(t, Y)}{\partial y^2} \right] dt.$$

Интегрируя это равенство в пределах от  $t_0$  до  $t$ , учитывая, что  $\int_{t_0}^t d_0 \varphi(t, Y(\tau)) = \varphi(t, Y(t)) - \varphi(t_0, Y(t_0))$  при любых  $\theta \in [0, 1]$ , и обозначая  $\psi(t, Y(t)) = \left( \partial \varphi(t, Y(t)) / \partial y \right)^T S(t)$ , получаем искомую

связь:

$$\int_{t_0}^t \psi(\tau, Y(\tau)) d_0 W(\tau) = \int_{t_0}^t \psi(\tau, Y(\tau)) d_\theta W(\tau) +$$



$$+ \theta \int_{t_0}^t \text{tr} \left[ S^T(\tau) \frac{\partial}{\partial y} \psi(\tau, Y(\tau)) \right] d\tau. \quad (2.79)$$

Здесь  $\psi(\tau, Y(\tau))$  — произвольная матрица-строка той же размерности, что и вектор  $W(t)$ .

В частности, интегралы Стратоновича и Ито по винеровскому процессу

$$I_{1/2}(t) = \int_{t_0}^t \psi(\tau, Y(\tau)) d_{1/2} W(\tau), \quad I_0(t) = \int_{t_0}^t \psi(\tau, Y(\tau)) d_0 W(\tau),$$

связаны простой формулой

$$I_{1/2}(t) = I_0(t) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \text{tr} \left[ S^T(\tau) \frac{\partial}{\partial y} \psi(\tau, Y(\tau)) \right] d\tau.$$

### 2.2.3. Стохастические дифференциальные уравнения и их связь с уравнениями Колмогорова

Теперь можно придать строгий смысл дифференциальному уравнению Ланжевена (2.66) с негауссовским, в общем случае, белым шумом  $Z(t)$ . Для этого в эквивалентном ему интегральному уравнению (2.69) последнее слагаемое будем понимать как стохастический  $\theta$ -интеграл:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, X(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t F(\tau, X(\tau)) d_\theta Z(\tau).$$

Этому выражению соответствует следующее уравнение, содержащее стохастический  $\theta$ -дифференциал:

$$d_\theta X(t) = f(t, X(t)) dt + F(t, X(t)) d_\theta Z(t), \quad X(t_0) = X_0. \quad (2.80)$$

Последнее выражение можно формально переписать в виде

$$\dot{X}(t) = f(t, X(t)) + F(t, X(t)) \dot{Z}(t), \quad X(t_0) = X_0. \quad (2.81)$$

Здесь  $\dot{X}(t) = d_\theta X(t)/dt$ ,  $\dot{Z}(t) = d_\theta Z(t)/dt$ , так как при любом  $\theta \in [0, 1]$  справедливо  $U(t) = U(t_0) + \int_{t_0}^t d_\theta U(\tau)$ .

В соответствии с теоремой Дуба (см. разд. 2.2.1) решение  $X(t)$ ,  $t \geq t_0$ , уравнения (2.80) или эквивалентного ему уравнения (2.81) является марковским случайным процессом, если начальное условие  $X_0$  не зависит от будущих значений белого шума  $Z(\tau)$ ,  $\tau > t_0$  (или от будущих приращений  $Z(\beta) - Z(\alpha) = \int_\alpha^\beta \dot{Z}(\tau) d\tau$ ,  $\beta > \alpha \geq t_0$ , процесса  $Z(t)$ ).

Вследствие несовпадения стохастических интегралов разных видов уравнения (2.80) или (2.81) при разных  $\theta$ , но при одних и

тех же функциях  $f(t, x)$  и  $F(t, x)$ , определяют разные случайные процессы. Поэтому *надо всегда указывать, в каком смысле понимается стохастическое дифференциальное уравнение*, особенно, если оно записано в виде (2.81), не содержащем параметра  $\theta$ .

Если белый шум является *гауссовским*, т.е.  $Z(t) = \dot{W}(t)$ , то стохастическое уравнение системы с любым  $\theta$ -дифференциалом

$$d_{\theta} X(t) = f(t, X(t))dt + F(t, X(t))d_{\theta} W(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (2.82)$$

можно заменить определяющим тот же процесс уравнением Ито:

$$d_0 X(t) = g(t, X(t))dt + G(t, X(t))d_0 W(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (2.83)$$

и наоборот. Для такой замены нужно установить связь между функциями  $f(t, x)$ ,  $F(t, x)$ , с одной стороны, и функциями  $g(t, x)$ ,  $G(t, x)$  — с другой. С этой целью запишем  $\theta$ -уравнение (2.82) в интегральной форме:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, X(\tau))d\tau + \int_{t_0}^t F(\tau, X(\tau))d_{\theta} W(\tau)$$

и для каждой строки  $\psi(t, x)$  матрицы  $F(t, x)$  используем формулу связи стохастических интегралов (2.79), которая в данном случае имеет вид

$$\int_{t_0}^t \psi(\tau, X(\tau))d_{\theta} W(\tau) = \int_{t_0}^t \psi(\tau, X(\tau))d_0 W(\tau) + \\ + \theta \int_{t_0}^t \text{tr} \left[ F^T(\tau, X(\tau)) \frac{\partial \psi(\tau, X(\tau))}{\partial x} \right] d\tau.$$

В результате получим эквивалентное уравнение с интегралом Ито:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t \left[ f(\tau, X(\tau)) + \theta \sum_{i=1}^l \frac{\partial F^i}{\partial x}(\tau, X(\tau)) F^i(\tau, X(\tau)) \right] d\tau + \\ + \int_{t_0}^t F(\tau, X(\tau))d_0 W(\tau),$$

где  $l$  — размерность вектора  $W(t)$ ;  $F^i$  —  $i$ -й столбец матрицы  $F$ ;  
 $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \xi^T \right)^T$ .

Сравнив последнее выражение с интегральной формой уравнения Ито (2.83), находим искомые связи:

$$g(t, x) = f(t, x) + \theta \sum_{i=1}^l \frac{\partial F^i(t, x)}{\partial x} F^i(t, x), \quad (2.84)$$

$$G(t, x) = F(t, x). \quad (2.85)$$

Из (2.84) следует, что если в уравнении Ланжевена (2.66) коэффициент  $F(t, X(t))$  при гауссовском белом шуме не зависит от состояния  $X(t)$ , т.е.  $F(t, x) = F(t)$ , то  $g(t, x) = f(t, x)$ . Поэтому все виды таких стохастических дифференциальных уравнений определяют один и тот же процесс  $X(t)$ .

**Пример 2.15.** Преобразовать скалярное уравнение Ито

$$d_0 X(t) = cX(t)dt + \gamma X(t)d_0 W(t)$$

в эквивалентное уравнение с  $\theta$ -дифференциалом.

□ Имеем  $g(t, x) = cx$ ,  $G(t, x) = \gamma x$ ,  $l = 1$ . Тогда по (2.84), (2.85) находим  $F(t, x) = \gamma x$ ,  $f(t, x) = cx - \theta\gamma^2 x$ . В результате получаем

$$d_\theta X(t) = (c - \theta\gamma^2)X(t)dt + \gamma X(t)d_\theta W(t).$$

В частности, эквивалентное уравнение Стратоновича имеет вид

$$d_{1/2} X(t) = (c - \gamma^2/2)X(t)dt + \gamma X(t)d_{1/2} W(t). \blacksquare$$

Для полного описания системы, заданной стохастическим дифференциальным уравнением (2.80), остается выразить коэффициенты производящих операторов (2.15), (2.18) марковского процесса  $X(t)$  через функции  $f(t, x)$ ,  $F(t, x)$  и характеристики белого шума  $Z(t)$ . Для простоты ограничимся случаем гауссовского белого шума  $W(t)$ .

В теории случайных процессов доказано [38], что если система задается уравнением Ито с винеровским процессом (2.83), а функции  $g(t, x)$ ,  $G(t, x)$  удовлетворяют условиям теоремы Дуба (2.64), (2.65) и непрерывны по  $t$ ,  $x$ , то состояние  $X(t)$  будет диффузионным процессом со следующими коэффициентами сноса (2.16) и диффузии (2.17):

$$a(t, x) = g(t, x), \quad B(t, x) = G(t, x)G^T(t, x). \quad (2.86)$$

Следовательно, если функция  $g(t, x)$  один раз дифференцируема по  $x$ , а функция  $G(t, x)$  — дважды, то плотности распределения процесса  $X(t)$  удовлетворяют ФПК-уравнению типа (2.15). Например, для одноточечной плотности это уравнение с учетом (2.86) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [g(t, x)p(t, x)] + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^T}{\partial x} \times [G(t, x)G^T(t, x)p(t, x)] \right\}, \quad (2.87)$$

а начальные и граничные условия для него определяются выражениями (2.26), (2.27).

В случае негладких функций  $g(t, x)$ ,  $G(t, x)$  решение этого уравнения необходимо понимать в смысле удовлетворения интег-

ральному тождеству (2.30) с  $L_x^* = 0$ . При этом анализ показывает [26], что если на некоторой поверхности  $D$  пространства  $K^l$  функция  $g(t, x)$  терпит разрыв первого рода или  $G(t, x)$  имеет излом, то плотность  $p(t, x)$  имеет на  $D$  излом. Если же разрыв первого рода на  $D$  имеет функция  $G(t, x)$ , то плотность  $p(t, x)$  также терпит на  $D$  разрыв.

Если же система задается уравнением в  $\theta$ -дифференциалах (2.82), то учитывая связи (2.84), (2.85), получаем

$$a(t, x) = f(t, x) + \theta \sum_{i=1}^l \frac{\partial F^i(t, x)}{\partial x} F^i(t, x), \quad B(t, x) = F(t, x) F^T(t, x). \quad (2.88)$$

В частности, если уравнение (2.82) понимается в смысле Стратоновича, т.е.  $\theta = 1/2$ , то соответствующее ФПК-уравнение для одноточечной плотности можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = & -\frac{\partial^T}{\partial x} [f(t, x)p(t, x)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^T}{\partial x} \left\{ F(t, x) \times \right. \\ & \left. \times \left[ \frac{\partial^T}{\partial x} [F(t, x)p(t, x)] \right]^T \right\}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

**Пример 2.16.** Найти вектор сноса и матрицу диффузии двумерного марковского процесса  $X(t) = [X_1(t), X_2(t)]$ , заданного следующей системой стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича:

$$\begin{aligned} d_{1/2} X_1 &= X_1 \sin X_2 dt + X_1 X_2 d_{1/2} W_1 - X_2^2 d_{1/2} W_2, \\ d_{1/2} X_2 &= \cos X_2 dt + X_1^3 d_{1/2} W_2 + (X_1 - X_2) d_{1/2} W_3. \end{aligned}$$

□ В данном случае имеем:  $\theta = 1/2$ ,  $l = 3$ ,

$$f(t, x) = \begin{bmatrix} x_1 \sin x_2 \\ \cos x_2 \end{bmatrix}, \quad F(t, x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 & -x_2^2 & 0 \\ 0 & x_1^3 & x_1 - x_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F^1}{\partial x} = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial F^2}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & -2x_2 \\ 3x_1^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial F^3}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

и тогда по (2.84), (2.85) найдем

$$f(t, x) = \begin{bmatrix} x_1 \sin x_2 + \frac{1}{2} (x_1 x_2^2 - 2x_1^3 x_2) \\ \cos x_2 + \frac{1}{2} (x_2 - x_1 - 3x_1^2 x_2^2) \end{bmatrix},$$

$$B(t, x) = \begin{bmatrix} x_1^2 x_2^2 + x_2^4 & -x_1^3 x_2^2 \\ -x_1^3 x_2^2 & x_1^6 + (x_1 - x_2)^2 \end{bmatrix} \cdot \blacksquare$$

Таким образом, нахождение полных вероятностных характеристик состояния системы, заданной стохастическим дифференциальным уравнением, сводится в случае гауссовского белого шума на входе к нахождению обычного или обобщенного решения начально-краевой задачи для уравнения в частных производных параболического типа при заданных начальном и граничном условиях (2.26), (2.27).

Если же белый шум на входе системы не является гауссовским, то его всегда можно представить в виде суммы гауссовской и пуассоновской составляющих (разложение Леви). Тогда по коэффициентам стохастического дифференциального уравнения системы можно получить коэффициенты более общего, чем ФПК-уравнение, уравнения Колмогорова (2.22) [26].

## 2.3. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

### 2.3.1. Описание стохастических систем интегральными уравнениями Гаммерштейна–Вольтерра

Стохастической системой с нелинейностями назовем в общем случае замкнутую динамическую систему (2.2), оператор разомкнутой части которой может быть представлен в виде суперпозиции линейных операторов и нелинейных функций (нелинейностей). Структурная схема такой системы представляет собой соединение линейных инерционных и нелинейных безинерционных звеньев. Среди воздействий на нее будем различать аддитивные (прибавляющиеся к промежуточным сигналам системы) и неаддитивные (поступающие непосредственно на нелинейности).

Объединяя все нелинейные звенья такой системы в один блок — многомерную нелинейность, выделяя охватывающие ее обратные связи и приводя с помощью структурных преобразований все аддитивные воздействия к ее входу, можно получить стандартную структурную схему системы данного класса (рис. 2.6). Последней соответствуют следующие операторные уравнения:

$$E(t) = U(t) + AZ(t), \quad Z(t) = f[t, E(t), V(t)], \quad Y(t) = BZ(t), \quad (2.90)$$

где  $f(t, e, v)$  — вектор-функция многомерной нелинейности;  $U(t)$ ,  $V(t)$  — случайные векторы приведенных к входу нелинейности аддитивных и неаддитивных воздействий соответственно;  $E(t)$  — вектор ошибки;  $Y(t)$  — вектор выхода системы;  $Z(t)$  — вектор выхода

нелинейности;  $A$ ,  $B$  — матричные операторы многомерных линейных звеньев обратной связи и прямой цепи стандартной схемы системы.

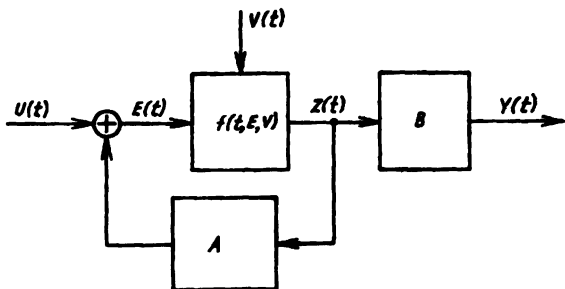


Рис. 2.6.

Исключая из уравнения (2.90) переменную  $Z(t)$  и переходя к интегральному представлению линейных операторов физически реальных звеньев с помощью импульсных переходных функций [35], можно записать два выражения:

уравнение ошибки:

$$E(t) = U(t) + \int_{t_0}^t W_A(t, \tau) f[\tau, E(\tau), V(\tau)] d\tau; \quad (2.91)$$

формулу выхода:

$$Y(t) = \int_{t_0}^t W_B(t, \tau) f[\tau, E(\tau), V(\tau)] d\tau. \quad (2.92)$$

Здесь  $t_0$  — момент времени начала работы системы;  $W_A(t, \tau)$ ,  $W_B(t, \tau)$  — матрицы импульсных переходных функций многомерных линейных звеньев  $A$  и  $B$  соответственно. При этом (2.91) представляет собой неоднородное нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейна–Вольтерра второго рода [5] относительно ошибки системы  $E(t)$ , которое содержит параметр  $V(t)$  (при  $U(t) = 0$  оно становится однородным уравнением), тогда как (2.92) просто определяет выход  $Y(t)$  по входам нелинейности  $E(t)$ ,  $V(t)$  с помощью нелинейного оператора Гаммерштейна–Вольтерра.

**Пример 2.17.** Преобразовать к стандартному виду структурную схему системы, приведенную на рис. 2.7, где  $f_1$ ,  $f_2$  — нелинейности;  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  — импульсные переходные функции одномерных линейных звеньев;  $G_1$ ,  $G_2$  — входные воздействия.

□ Переносим сумматор через звено  $w_1$ , а точку разветвления через звено  $w_2$  и объединяя нелинейности в один блок  $f$ , получаем аналогичную рис. 2.6 эквивалентную структурную схему (рис. 2.8).

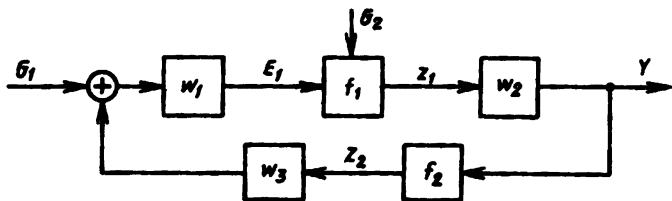


Рис. 2.7.

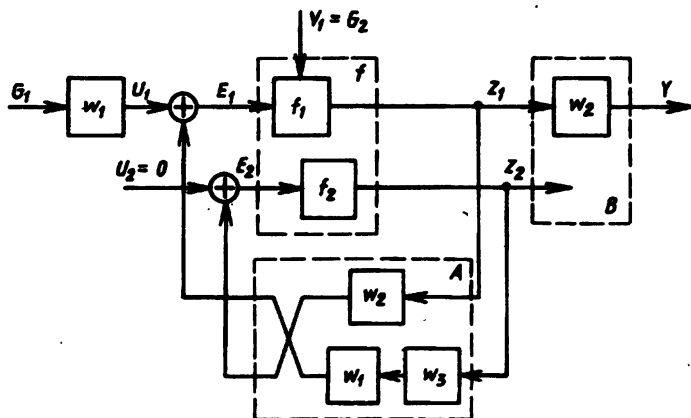


Рис. 2.8.

По ней найдем исходные данные для уравнений (2.91), (2.92):

$$U_1(t) = \int_0^t w_1(t, \tau) G_1(\tau) d\tau, \quad U_2(t) = 0, \quad V(t) = G_2(t),$$

$$f(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \vartheta) = \begin{bmatrix} f_1(\varepsilon_1, \vartheta) \\ f_2(\varepsilon_2) \end{bmatrix}, \quad W_A(t, \tau) = \begin{bmatrix} 0 & w_{31}(t, \tau) \\ w_2(t, \tau) & 0 \end{bmatrix},$$

$$W_B(t, \tau) = [w_2(t, \tau) \ 0],$$

где  $w_{31}$  — импульсная переходная функция последовательного соединения звеньев  $w_3, w_1$ , которая находится по формуле [5]:

$$w_{31}(t, \tau) = \int_{\tau}^t w_1(t, \eta) w_3(\eta, \tau) d\eta. \quad \blacksquare$$

Задачу полного описания стохастической системы (2.91), (2.92) удобно решать в два этапа: сначала связать вероятностную меру входов системы  $\mu_{uv}$  с мерой входов и ошибки  $\mu_{uve}$ , а затем последнюю — с мерой входов, ошибки и выхода  $\mu_{uvey}$ , из которой уже легко можно выделить искомую меру входов и выхода системы  $\mu_{uvy}$ . При этом в качестве конструктивного способа задания вероятностных мер можно использовать допускающие "урезания" последовательности кумулянтных или квазимоментных функций.

Вследствие сложности этой задачи в теории управления сначала возник эвристический способ приближенного описания таких систем — *метод статистической линеаризации* Казакова–Бутона [10, 11]. Он основан на предположении о гауссовости совместного распределения входов нелинейности  $E(t)$ ,  $V(t)$ . Условиями применимости метода являются: 1) *совместная гауссовость* входов системы  $U(t)$ ,  $V(t)$ ; 2) *большая инерционность* (память) многомерного линейного звена  $A$ , достаточная для нормализации всех компонент принципиально негауссовского сигнала  $Z(t)$  выхода нелинейности. При выполнении этих условий метод позволяет осуществить приближенное *корреляционное описание* стохастических систем с нелинейностями. Он использует статистическую аппроксимацию нелинейного безынерционного преобразования случайных процессов определенной квазилинейной зависимостью.

### 2.3.2. Статистическая линеаризация нелинейностей

Рассмотрим преобразование случайного  $n$ -мерного процесса  $X(t)$  нелинейной  $l$ -мерной вектор-функцией  $f(t, x)$ . Аппроксимируем его функцией, линейной по центрированной составляющей  $\tilde{X}(t)$  входного сигнала  $X(t)$ :

$$f(t, X(t)) \approx \varphi_0 + K\tilde{X}(t). \quad (2.93)$$

Здесь  $l$ -мерный вектор  $\varphi_0$  называют *статистической характеристикой нелинейности*  $f$ , а  $l \times n$ -матрицу  $K$  — *статистическим коэффициентом усиления* центрированной составляющей входа нелинейности  $X(t)$ . Параметры  $\varphi_0$ ,  $K$  обычно определяются из условия минимума среднего квадрата ошибки аппроксимации (*первый способ*):

$$I(\varphi_0, K) = M \left\{ |f[t, X(t)] - \varphi_0 - K\tilde{X}(t)|^2 \right\} \rightarrow \min_{\varphi_0, K}, \quad (2.94)$$

где  $|y|^2 = y^T y$ .

Используя необходимые и достаточные условия экстремума функции многих переменных, легко получаем

$$\varphi_0 = M[f(t, X(t))] = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x) p(t, x) dx,$$



$$D(t)K^T = M \left[ \hat{X}(t) f^T(t, X(t)) \right] = \int_{\mathbb{R}^n} (x - m(t)) f^T(t, x) p(t, x) dx,$$

где  $m(t)$ ,  $D(t)$  — вектор математического ожидания и матрица ковариаций процесса  $X(t)$ ;  $p(t, x)$  — его одноточечная плотность распределения.

Полагая, что процесс  $X(t)$  является гауссовским, имеем

$$p(t, x) = N(x - m(t), D(t)) = \\ = \left[ (2\pi)^n \det D(t) \right]^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x - m(t))^T D^{-1}(t) (x - m(t)) \right].$$

В результате параметры  $\varphi_0$ ,  $K$  оказываются функциями переменных  $m(t), D(t)$ :

$$\varphi_0(t, m, D) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x) N(x - m, D) dx, \quad (2.95)$$

$$DK^T(t, m, D) = \int_{\mathbb{R}^n} (x - m) f^T(t, x) N(x - m, D) dx. \quad (2.96)$$

Последнее выражение можно упростить, если использовать очевидное свойство гауссовской плотности

$$\frac{\partial}{\partial m} N(x - m, D) = D^{-1}(x - m) N(x - m, D).$$

Учитывая это в (2.96) и сравнивая результат с (2.95), получаем простое представление  $K$  через  $\varphi_0$ :

$$K(t, m, D) = -\frac{\partial \varphi_0(t, m, D)}{\partial m}. \quad (2.97)$$

Таким образом, статистическая линеаризация нелинейности (2.93) сводится к вычислению интегралов (2.95), (2.96), а потому применима и к негладким нелинейностям. Этим она отличается от обычной линеаризации функции  $f(t, X(t))$  в окрестности точки  $X(t) = m(t)$ , которая основана на учете первых членов разложения в ряд Тейлора:

$$f(t, X(t)) \approx f(t, m(t)) + \left( \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right)_{m(t)} \hat{X}(t),$$

т.е. сводится к вычислению частных производных и применима только к непрерывно дифференцируемым функциям.

Отметим также редко используемый *второй способ* определения параметров статистической линеаризации  $\varphi$ ,  $K$ , когда вместо оптимизации по критерию (2.94) используются условия равенства математических ожиданий и ковариаций выхода самой нелинейности  $f$  и ее аппроксимации  $\varphi_2 + K_2 \hat{X}$ :

$$M[f(t, X(t))] = M[\varphi_2 + K_2 \hat{X}(t)] = \varphi_2,$$

$$M\left\{[f(t, X(t)) - \varphi_2][f(t, X(t)) - \varphi_2]^T\right\} = M[K_2 \dot{X}(t) \dot{X}^T(t) K_2^T].$$

Тогда  $\varphi_2 = \varphi_0$ , т.е. статистическая характеристика нелинейности все равно находится по (2.95), а для статистического коэффициента усиления вместо (2.96) легко получаем нелинейное матричное уравнение

$$K_2(t, m, D) D K_2^T(t, m, D) = \int_{R^n} f(t, x) f^T(t, x) N(x - m, D) dx - \varphi_0(t, m, D) \varphi_0^T(t, m, D). \quad (2.98)$$

**Пример 2.18.** Найти коэффициенты статистической линейризации  $\varphi_0$ ,  $K$ ,  $K_2$  идеального двухпозиционного реле:

$$f(x) = a \operatorname{sign} x = \begin{cases} a, & x > 0, \\ -a, & x < 0. \end{cases}$$

□ Подставляя эту функцию в (2.95), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_0(m, D) &= a \int_0^{\infty} N(x - m, D) dx - a \int_{-\infty}^0 N(x - m, D) dx = \\ &= a \int_{-m/\sqrt{D}}^{\infty} N(t, 1) dt - a \int_{-\infty}^{-m/\sqrt{D}} N(t, 1) dt = -2a\Phi\left(\frac{-m}{\sqrt{D}}\right) = 2a\Phi\left(\frac{m}{\sqrt{D}}\right), \end{aligned}$$

где  $\Phi(z)$  — известный интеграл Лапласа,

$$\Phi(z) = \int_0^z N(t, 1) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2} dt.$$

Тогда по (2.97) находим

$$K(m, D) = \frac{\partial \varphi_0(m, D)}{\partial m} = \frac{2a}{\sqrt{D}} \Phi'\left(\frac{m}{\sqrt{D}}\right) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi D}} e^{-m^2/2D}.$$

В отличие от этого (2.98) дает

$$\begin{aligned} K_2^2(m, D) &= \frac{1}{D} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} a^2 N(x - m, D) dx - \varphi_0^2(m, D) \right] = \\ &= \frac{1}{D} [a^2 - \varphi_0^2(m, D)] = \frac{a^2}{D} \left[ 1 - 4\Phi^2\left(\frac{m}{\sqrt{D}}\right) \right], \end{aligned}$$

откуда

$$K_2(m, D) = \pm \frac{a}{\sqrt{D}} \sqrt{1 - 4\Phi^2 \left( \frac{m}{\sqrt{D}} \right)}. \quad \blacksquare$$

Выражения для статистических характеристик  $\varphi_0$  других типовых нелинейностей приведены, например, в [28].

### 2.3.3. Корреляционное описание систем

Получим связи между математическими ожиданиями и корреляционными функциями входов и выходов стохастической системы с нелинейностями (2.91), (2.92), используя метод статистической линеаризации. Для простоты ограничимся случаем отсутствия неаддитивных входов ( $V(t) = 0$ ). Тогда уравнения (2.91), (2.92) принимают вид

$$E(t) = U(t) + \int_0^t W_A(t, \tau) f[\tau, E(\tau)] d\tau, \quad (2.99)$$

$$Y(t) = \int_0^t W_B(t, \tau) f[\tau, E(\tau)] d\tau. \quad (2.100)$$

Пусть входной сигнал  $U(t)$  является гауссовским, а импульсная переходная функция  $W_A(t, \tau)$  характеризует звено с достаточно большой памятью. Тогда ошибку системы  $E(t)$  тоже можно считать гауссовской. Поэтому, осуществляя статистическую линеаризацию нелинейности  $f(t, \varepsilon)$ , можем записать

$$f[t, E(t)] \approx \varphi_0 [t, m_\varepsilon(t), D_\varepsilon(t)] + K [t, m_\varepsilon(t), D_\varepsilon(t)] \dot{E}(t), \quad (2.101)$$

где  $m_\varepsilon(t)$ ,  $D_\varepsilon(t)$  — вектор математического ожидания и матрица ковариации ошибки соответственно.

Сначала рассмотрим уравнение ошибки (2.99). Подставляя в него (2.101), получаем

$$E(t) \approx U(t) + \int_0^t W_A(t, \tau) \left\{ \varphi_0 [\tau, m_\varepsilon(\tau), D_\varepsilon(\tau)] + K [\tau, m_\varepsilon(\tau), D_\varepsilon(\tau)] \dot{E}(\tau) \right\} d\tau. \quad (2.102)$$

Усредняя левую и правую части этого выражения, находим уравнение для математического ожидания ошибки системы:

$$m_\varepsilon(t) \approx m_u(t) + \int_0^t W_A(t, \tau) \varphi_0 [\tau, m_\varepsilon(\tau), D_\varepsilon(\tau)] d\tau. \quad (2.103)$$

Оно является нелинейным интегральным уравнением Урысона–Вольterra и содержит неизвестную ковариацию  $D_\varepsilon(t)$ . Вычитая (2.103)

из (2.102), получаем уравнение для центрированной составляющей ошибки:

$$\dot{\hat{E}}(t) \approx \dot{U}(t) + \int_{t_0}^t W_A(t, \tau) K[\tau, m_\epsilon(\tau), D_\epsilon(\tau)] \hat{E}(\tau) d\tau.$$

Умножив его справа сначала на  $\hat{E}^T(\theta)$ , а затем на  $\hat{U}^T(\theta)$ , и усреднив, найдем уравнения для собственной корреляционной функции  $R_\epsilon(t, \theta)$  и взаимной корреляционной функции  $R_{\epsilon u}(t, \theta)$ :

$$R_\epsilon(t, \theta) \approx R_{u\epsilon}(t, \theta) + \int_{t_0}^t W_A(t, \tau) K[\tau, m_\epsilon(\tau), D_\epsilon(\tau)] R_\epsilon(\tau, \theta) d\tau, \quad (2.104)$$

$$R_{\epsilon u}(t, \theta) \approx R_u(t, \theta) + \int_{t_0}^t W_A(t, \tau) K[\tau, m_\epsilon(\tau), D_\epsilon(\tau)] R_{\epsilon u}(\tau, \theta) d\tau,$$

Учитывая связи  $D_\epsilon(t) = R_\epsilon(t, t)$ ,  $R_{u\epsilon}(t, \theta) = R_{\epsilon u}^T(\theta, t)$ , приходим к выводу, что приближенные уравнения (2.103), (2.104) образуют замкнутую систему нелинейных интегральных уравнений Урысона-Вольтерра относительно  $m_\epsilon(t)$ ,  $R_\epsilon(t, \theta)$  и  $R_{\epsilon u}(t, \theta)$ .

Рассмотрим теперь формулу выхода (2.100). Подставив в нее аппроксимацию (2.101), подобным образом получим последовательность приближенных формул для вычисления математического ожидания и собственной корреляционной функции выхода системы:

$$m_y(t) \approx \int_{t_0}^t W_B(t, \tau) \varphi_0[\tau, m_\epsilon(\tau), D_\epsilon(\tau)] d\tau,$$

$$R_{y\epsilon}(t, \theta) \approx \int_{t_0}^t W_B(t, \tau) K[\tau, m_\epsilon(\tau), D_\epsilon(\tau)] R_\epsilon(\tau, \theta) d\tau, \quad (2.105)$$

$$R_y(t, \theta) \approx \int_{t_0}^t W_B(t, \tau) K[\tau, m_\epsilon(\tau), D_\epsilon(\tau)] R_{\epsilon y}(\tau, \theta) d\tau,$$

где необходимо учесть связь  $R_{\epsilon y}(\tau, \theta) = R_{y\epsilon}^T(\theta, \tau)$ . Формулу для взаимной корреляционной функции входа и выхода системы найдем аналогично:

$$R_{y u}(t, \theta) \approx \int_{t_0}^t W_B(t, \tau) K[\tau, m_\epsilon(\tau), D_\epsilon(\tau)] R_{\epsilon u}(\tau, \theta) d\tau. \quad (2.106)$$

Отметим, что, поскольку выход системы  $Y(t)$ , в отличие от ошибки  $E(t)$ , в общем случае является негауссовским, то для оценки этой негауссовости нетрудно подобным же образом получить выражения для старших взаимных моментных функций  $\Lambda_{ijk}^{uey}$ , пред-

ставляющие их через взаимные моментные функции того же порядка гауссовской, по предположению, пары  $U(t)$ ,  $E(t)$ . Последние же можно найти по известным  $m_\epsilon$ ,  $R_{u\epsilon}$ ,  $R_\epsilon$  с помощью свойства гауссовских моментов (2.58), используя рекуррентную формулу (2.55).

Однако изложенный метод статистической линейаризации стохастических систем обладает существенным недостатком — он не позволяет уточнить получаемое приближенное решение и тем самым проверить сделанное предположение о гауссовости входа нелинейности.

**Пример 2.19.** Получить уравнения корреляционного описания системы, схема которой изображена на рис. 2.9.

□ Сравнивая эту структурную схему со стандартной (см. рис. 2.1), находим:  $W_A(t, \tau) = w(t, \tau)$ ,  $W_B(t, \tau) = \delta(t - \tau)$ ,  $f(\epsilon) = -a \operatorname{sign} \epsilon$ . Коэффициенты статистической линейаризации данной нелинейности были получены в примере 2.18:

$$\varphi_0(m_\epsilon, D_\epsilon) = 2a\Phi\left[\frac{m_\epsilon}{\sqrt{D_\epsilon}}\right], \quad K(m_\epsilon, D_\epsilon) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi D_\epsilon}} \exp\left[-\frac{m_\epsilon^2}{2D_\epsilon}\right].$$

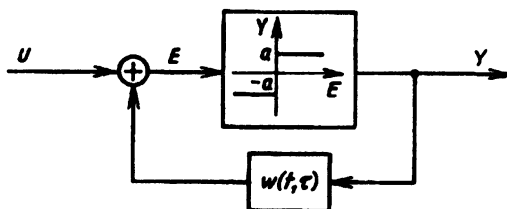


Рис. 2.9.

Поэтому система интегральных уравнений (2.103), (2.104) принимает вид

$$m_\epsilon(t) \approx m_u(t) + 2a \int_0^t w(t, \tau) \Phi\left[\frac{m_\epsilon(\tau)}{\sqrt{R_\epsilon(\tau, \tau)}}\right] d\tau,$$

$$R_{\epsilon u}(t, \theta) \approx R_u(t, \theta) + a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{w(t, \tau)}{\sqrt{R_\epsilon(\tau, \tau)}} \exp\left[\frac{-m_\epsilon^2(\tau)}{2R_\epsilon(\tau, \tau)}\right] R_{\epsilon u}(\tau, \theta) d\tau,$$

$$R_\epsilon(t, \theta) \approx R_{\epsilon u}(\theta, t) + a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{w(t, \tau)}{\sqrt{R_\epsilon(\tau, \tau)}} \exp\left[\frac{-m_\epsilon^2(\tau)}{2R_\epsilon(\tau, \tau)}\right] R_\epsilon(\tau, \theta) d\tau,$$

тогда как формулы (2.105) становятся алгебраическими:

$$m_y(t) \approx 2a\Phi \left[ \frac{m_\varepsilon(t)}{\sqrt{R_\varepsilon(t,t)}} \right],$$

$$R_{y\varepsilon}(t,\theta) \approx a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{R_\varepsilon(t,\theta)}{\sqrt{R_\varepsilon(t,t)}} \exp \left[ \frac{-m_\varepsilon^2(t)}{2R_\varepsilon(t,t)} \right],$$

$$R_y(t,\theta) \approx a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{R_{\varepsilon y}(t,\theta)}{\sqrt{R_\varepsilon(t,t)}} \exp \left[ \frac{-m_\varepsilon^2(t)}{2R_\varepsilon(t,t)} \right].$$

Если из двух последних выражений исключить промежуточную переменную  $R_{y\varepsilon}$ , то получим симметричную относительно  $t, \theta$  формулу:

$$R_y(t,\theta) \approx \frac{2a^2}{\pi} \frac{R_\varepsilon(t,\theta)}{\sqrt{R_\varepsilon(t,t)R_\varepsilon(\theta,\theta)}} \exp \left[ -\frac{m_\varepsilon^2(t)}{2R_\varepsilon(t,t)} - \frac{m_\varepsilon^2(\theta)}{2R_\varepsilon(\theta,\theta)} \right]. \quad \blacksquare$$

### 2.3.4. Уравнения для кумулянтных функций

Получим полное описание стохастической системы с нелинейностью (2.99), (2.100), используя кумулянтные функции и ограничиваясь для простоты случаем скалярных сигналов  $U(t)$ ,  $E(t)$ ,  $Y(t)$  и функции  $f(t,\varepsilon)$ .

На первом этапе по уравнению ошибки (2.99) найдем систему уравнений для взаимных кумулянтных функций  $K_{i,j+1}^{u\varepsilon}(\eta_i, \theta_{j+1}, t)$ ,  $i, j \geq 0$ .

Прежде всего, усреднив (2.99), получим точное уравнение для математического ожидания ошибки:

$$K_1^{\varepsilon} = K_1^u + \int_{t_0}^t w_A(t,\tau) F_0[\tau, x_\varepsilon(\tau)] d\tau. \quad (2.107)$$

Здесь среднее значение выхода нелинейности

$$F_0[t, x_\varepsilon(t)] = M \left\{ f[t, E(t)] \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,\varepsilon) p(t,\varepsilon) d\varepsilon \quad (2.108)$$

зависит в общем случае от всех одноточечных кумулянтов ошибки системы  $x_\varepsilon(t) = \{x_i^\varepsilon(t)\}_{i \geq 1}$ , где

$$x_1^\varepsilon(t) = m_\varepsilon(t), \quad x_2^\varepsilon(t) = K_2^\varepsilon(t,t) = D_\varepsilon(t), \quad x_i^\varepsilon(t) = K_i^\varepsilon(t^{[i]}), \quad i \geq 3. \quad (2.109)$$

Удобное для вычислений алгебраическое представление функции  $F_0$  через эти кумулянты найдем с помощью ряда Эджворта (2.61). Подставляя его в (2.108), будем иметь

$$F_0(t, x_\varepsilon) = \varphi_0 + \frac{x_\varepsilon^3}{3!} \varphi_3 + \left[ \frac{x_\varepsilon^4}{4!} \varphi_4 + \frac{1}{2} \left( \frac{x_\varepsilon^3}{3!} \right)^2 \varphi_6 \right] + \\ + \left[ \frac{x_\varepsilon^5}{5!} \varphi_5 + \frac{x_\varepsilon^3 x_\varepsilon^4}{3! 4!} \varphi_7 + \frac{1}{6} \left( \frac{x_\varepsilon^3}{3!} \right) \varphi_9 \right] + \dots \quad (2.110)$$

Здесь функция

$$\varphi_0 = \varphi_0(t, m_\varepsilon, D_\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \varepsilon) N(\varepsilon - m_\varepsilon, D_\varepsilon) d\varepsilon$$

представляет собой статистическую характеристику нелинейности (см. (2.95)), тогда как функции

$$\varphi_i = \varphi_i(t, m_\varepsilon, D_\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \varepsilon) H_i(\varepsilon - m_\varepsilon, D_\varepsilon) N(\varepsilon - m_\varepsilon, D_\varepsilon) d\varepsilon, \quad i = 3, 4, \dots,$$

используя свойства полиномов Эрмита (2.49), можно представить как статистические характеристики  $i$ -х производных нелинейности  $f(t, \varepsilon)$ :

$$\varphi_i(t, m_\varepsilon, D_\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^i f(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^i} N(\varepsilon - m_\varepsilon, D_\varepsilon) d\varepsilon. \quad (2.111)$$

**Пример 2.20.** Найти среднее значение выхода двухпозиционного реле  $f(\varepsilon) = a \operatorname{sign} \varepsilon$ .

□ Статистическая характеристика этой нелинейности определена в примере 2.19:  $\varphi_0(m_\varepsilon, D_\varepsilon) = 2a\Phi(m_\varepsilon/\sqrt{D_\varepsilon})$ . Определим статистические характеристики производных нелинейности. Так как  $f^{(i)}(\varepsilon) = 2a\delta^{(i-1)}(\varepsilon)$ , то по (2.111) получаем

$$\varphi_{i+1}(m_\varepsilon, D_\varepsilon) = 2a \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(i)}(\varepsilon) N(\varepsilon - m_\varepsilon, D_\varepsilon) d\varepsilon = (-1)^i 2a \frac{\partial^i N(m_\varepsilon, D_\varepsilon)}{\partial m_\varepsilon^i},$$

или, используя (2.49),

$$\varphi_{i+1}(m_\varepsilon, D_\varepsilon) = 2a H_i(m_\varepsilon, D_\varepsilon) N(m_\varepsilon, D_\varepsilon).$$

Подставляя полученное выражение в (2.110), находим

$$F_0(x_\varepsilon) = 2a \left\{ \Phi\left(\frac{m_\varepsilon}{\sqrt{D_\varepsilon}}\right) + N(m_\varepsilon, D_\varepsilon) \left[ \frac{x_\varepsilon^3}{3!} H_2(m_\varepsilon, D_\varepsilon) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{x_\varepsilon^4}{4!} H_3(m_\varepsilon, D_\varepsilon) + \left( \frac{x_\varepsilon^3}{3!} \right)^2 H_5(m_\varepsilon, D_\varepsilon) \right) + \dots \right] \right\}.$$

Выражения для входящих сюда одномерных полиномов Эрмита были найдены в примере 2.6. ■

Уравнения для остальных собственных и взаимных со входом системы кумулянтных функций ее ошибки  $K_{u\varepsilon}$  получим в два приема.

Сначала выразим их через кумулянтные функции входа, ошибки и выхода нелинейности  $K_{u\varepsilon f(\varepsilon)}$ . Для этого используем *свойство линейности взаимной кумулянтной функции*

$$K_{i_1, i_1}^{x, u + \int w \psi(\varepsilon) d\tau}(\xi_1^i, t) = K_{i_1, i_1}^{x, u}(\xi_1^i, t) + \int w(t, \tau) K_{i_1, i_1}^{x, \psi(\varepsilon)}(\xi_1^i, \tau) d\tau. \quad (2.112)$$

Это свойство является следствием очевидной линейности моментной функции  $A_{i_1, i_1}^{x, u + \int w \psi(\varepsilon) d\tau}(\xi_1^i, t)$  и вытекающей из общего представления смешанных кумулянтов через моменты (2.43) частной формулы

$$x_{\nu_1 \dots \nu_k}^{x_1 \dots x_k} = \sum_{r+s=\nu} \frac{1}{r!} \alpha_{r_1 \dots r_k}^{x_1 \dots x_k} Q_{s_1 \dots s_k}^{x_1 \dots x_k},$$

$|r_1| + \dots + |r_k| \geq 0$

где  $Q_{s_1 \dots s_k}^{x_1 \dots x_k} = \sum_{i=1}^{i+s} (-1)^i \sum_{\mu^{(1)} + \dots + \mu^{(i)} = s} \prod_{j=1}^i \frac{1}{\mu^{(j)}!} \alpha_{\mu_1^{(j)} \dots \mu_k^{(j)}}^{x_1 \dots x_k}$ .

Тогда на основании (2.99), (2.112) можно записать

$$\begin{aligned} K_{i_1, j+1}^{u, \varepsilon}(\eta_1^i, \theta_1^j, t) &= K_{i_1, j+1}^{u, \varepsilon, u + \int w_A(t, \tau) f(\tau, \varepsilon(\tau)) d\tau}(\eta_1^i, \theta_1^j, t) = \\ &= K_{i+1, j}^{u, \varepsilon}(t, \eta_1^i, \theta_1^j) + \int_0^t w_A(t, \tau) K_{i, j+1}^{u, \varepsilon, f(\tau, \varepsilon)}(\eta_1^i, \theta_1^j, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Затем выразим  $K_{u\varepsilon f(\tau, \varepsilon)}$  через  $K_{u\varepsilon}$ , для чего используем *формулы размыкания Малахова* [19]. Для кумулянтов второго и третьего порядков они имеют следующий вид:

$$x_{11}^{x\psi(\varepsilon)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \Psi_i(x_\varepsilon) x_{11}^{x\varepsilon}, \quad (2.114)$$

$$x_{111}^{xy\psi(\varepsilon)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \Psi_i(x_\varepsilon) x_{111}^{xy\varepsilon} + \sum_{i, j=1}^{\infty} \frac{1}{i! j!} \Psi_{i+j}(x_\varepsilon) x_{11}^{x\varepsilon} x_{1j}^{y\varepsilon}, \quad (2.115)$$

где коэффициенты  $\Psi_i$  определяются как математические ожидания производных функции  $\psi(\varepsilon)$ :



$$\Psi_i(x_\epsilon) = M[\psi^{(i)}(E)].$$

Из (2.113) с помощью (2.114) получим незамкнутые уравнения для кумулянтных функций второго порядка:

$$K_2^c(\theta, t) = K_{11}^{uc}(t, \theta) + \int_0^t w_\Lambda(t, \tau) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} F_i(\tau, x_\epsilon(\tau)) K_{i+1}^c(\theta, \tau^{[i]}) d\tau, \quad (2.116)$$

$$K_{11}^{uc}(\eta, t) = K_2^u(t, \eta) + \int_0^t w_\Lambda(t, \tau) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} F_i(\tau, x_\epsilon(\tau)) K_{1i}^{uc}(\eta, \tau^{[i]}) d\tau,$$

с помощью (2.115) — для функций третьего порядка, например,

$$K_3^c(\theta_1, \theta_2, t) = K_{12}^{uc}(t, \theta_1, \theta_2) + \int_0^t w_\Lambda(t, \tau) \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} F_i(\tau, x_\epsilon(\tau)) \times \right. \\ \left. \times K_{i+2}^c(\theta_1, \theta_2, \tau^{[i]}) + \sum_{i, j=1}^{\infty} \frac{1}{i! j!} F_{i+j}(\tau, x_\epsilon(\tau)) K_{i+1}^c(\theta_1, \tau^{[i]}) \times \right. \\ \left. \times K_{j+1}^c(\theta_2, \tau^{[j]}) \right] d\tau, \quad (2.117)$$

и т.д.

Здесь функции  $F_k(t, x_\epsilon) = M\left[\frac{\partial^k f}{\partial \epsilon^k}(t, E)\right]$ ,  $k \geq 1$ , с помощью свойства кумулянтов (2.44) можно выразить через среднее значение выхода нелинейности (2.108):

$$F_k(t, x_\epsilon) = k! \frac{\partial}{\partial x_\epsilon^k} F_0(t, x_\epsilon), \quad k \geq 1. \quad (2.118)$$

В частности, продифференцируем явное представление функции  $F_0$  (2.100) по  $m_\epsilon, D_\epsilon$ . Учитывая, что из (2.111) следуют равенства  $\partial \varphi_i / \partial m_\epsilon = \varphi_{i+1}$ ,  $\partial \varphi_i / \partial D_\epsilon = \varphi_{i+2}/2$ , поскольку для гауссовской плотности  $N(\epsilon - m_\epsilon, D_\epsilon)$  справедливы связи  $\partial N / \partial m_\epsilon = \partial N / \partial \epsilon$ ,  $\partial N / \partial D_\epsilon = (1/2) \partial^2 N / \partial \epsilon^2$ , в итоге получаем для  $F_1, F_2$  выражения, отличающиеся от (2.110) только тем, что функции  $\varphi_i$  заменены на  $\varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}$  соответственно:

$$F_1 = F_0 \Big|_{\varphi_i := \varphi_{i+1}}, \quad F_2 = F_0 \Big|_{\varphi_i := \varphi_{i+2}}.$$

Дифференцируя же (2.110) по  $x_k^e$ ,  $k \geq 3$ , непосредственно находим аналогичные соотношения и для остальных  $F_k$ . Следовательно, для любых  $k$  справедливы удобные формулы

$$F_k(t, x_\epsilon) = F_0(t, x_\epsilon) \Big|_{\varphi_i = -\varphi_{i+k}}, \quad k \geq 1. \quad (2.119)$$

В результате, учитывая (2.109), приходим к выводу о том, что полученные уравнения (2.107), (2.116), (2.117) и т.д. образуют точную систему из бесконечного числа нелинейных интегральных уравнений Урысона-Вольтерра относительно функций многих переменных  $K_{i,j+1}^{ue}(\eta_i^i, \theta_1^j, t)$ ,  $i, j \geq 0$ , — собственных и взаимных со входом системы кумулянтных функций ее ошибки. Полагая в ней  $K_{k,l}^{ue} = 0$ ,  $k+l > L$ , получаем "урезанную" систему из  $L(L+1)/2$  уравнений  $L$ -го кумулянтного приближения.

Нетрудно убедиться, что при  $L=2$  уравнения (2.107), (2.116), образующие в этом случае замкнутую систему относительно математического ожидания ошибки  $K_1^e(t)$  и ее корреляционных функций  $K_2^e(\theta, t)$ ,  $K_{11}^{ue}(\eta, t)$ , совпадают с уравнениями (2.103), (2.104) метода статистической линейризации. Действительно, в этом случае из (2.110) имеем  $F_0 = \varphi_0$ , вследствие чего уравнение (2.107) совпадает с (2.103). Кроме того, в уравнениях (2.116) остаются слагаемые только с коэффициентом  $F_1$ , который согласно (2.118) имеет вид  $F_1 = \partial F_0 / \partial x_\epsilon = \partial \varphi_0 / \partial x_\epsilon$ . Сравнивая его с (2.97), имеем  $F_1 = K$ , откуда следует, что уравнения (2.116) совпадают с (2.104) при условии определения коэффициента статистической линейризации  $K$  по первому способу (см. разд. 2.3.2.).

На втором этапе описания стохастической системы с нелинейностью по формуле выхода (2.100) аналогичным образом, используя свойство линейности (2.112) и формулы размыкания типа (2.114), (2.115), можно получить выражения для собственных и взаимных со входом  $U(t)$  кумулянтных функций выхода  $Y(t)$ :  $K_{i,j+1}^{uy}(\eta_i^i, \xi_1^j, t)$ ,  $i, j \geq 0$ . Например,

$$K_1^y(t) = \int_0^t w_B(t, \tau) F_0(\tau, x_\epsilon(\tau)) d\tau, \quad (2.120)$$

$$K_2^y(\xi, t) = \int_0^t w_B(t, \tau) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} F_i(\tau, x_\epsilon(\tau)) K_{11}^{ye}(\eta, \tau^{[i]}) d\tau,$$

и т.д. Однако последнее выражение содержит неизвестные функции  $K_{11}^{ey}$ , для вычисления которых требуются дополнительные формулы, например,

$$K_{11}^{\varepsilon y}(\theta, t) = \int_0^t w_B(t, \tau) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} F_i(\tau, x_\varepsilon(\tau)) K_{i+1}^{\varepsilon}(\theta, \tau^{(i)}) d\tau. \quad (2.121)$$

Это выражение уже не содержит неизвестных функций.

Следовательно, необходимо искать формулы для более широкой совокупности кумулянтных функций  $K_{u\varepsilon y}$ . В результате можно получить замкнутую бесконечную последовательность нелинейных интегральных формул типа (2.120), (2.121), правые части которых в общем случае содержат бесконечное число слагаемых. Полагая же в них  $K_{ijk}^{\varepsilon y} = 0$ ,  $i+j+k > L_1$ , получаем конечное число последовательно разрешаемых формул для функций  $L_1$ -го кумулянтного приближения. При  $L_1 = 2$  они также совпадают с соответствующими им выражениями (2.105), (2.106) метода статистической линеаризации.

Таким образом, изложенный здесь кумулянтный метод полного описания стохастических интегральных систем с нелинейностями является обобщением метода статистической линеаризации этих систем на случай негауссовских входов как системы, так и нелинейностей. При этом получение уравнений старших кумулянтных приближений ( $L \geq 3$ ) и их решение позволяют судить о точности предыдущих кумулянтных приближений, в частности о точности метода статистической линеаризации.

---

## 3. АНАЛИЗ ВЫХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 3.1. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

#### 3.1.1. Метод статистических испытаний

Перейдем к решению задачи нахождения требуемых вероятностных характеристик выхода нелинейной системы по ее математической модели и закону распределения входа. При этом ограничимся рассмотрением двух классов систем, описанных выше, — стохастических дифференциальных систем и стохастических интегральных систем с нелинейностями.

Цель полного анализа выходных процессов системы состоит в определении совместного закона распределения ее входа и выхода, так как тогда можно найти вероятность любого интересующего нас события, связанного с функционированием исследуемой нелинейной системы. Однако решить эту задачу в полном объеме и точно, как правило, не удается. Поэтому на практике приходится ограничиваться приближенным решением задачи анализа, определяя, например, лишь одноточечные плотности распределения или несколько первых кумулянтных функций с возможно большей точностью.

*Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)* состоит в многократном непосредственном моделировании действия на систему реализаций случайного входа и в обработке полученных реализаций выхода. Он имеет широкое распространение благодаря своей простоте и наглядности и позволяет проводить моделирование: математическое, физическое (реальной аппаратуры) и комбинированное (полунатурное). При этом для получения независимых реализаций случайных возмущений используют аналоговые или цифровые (программные) генераторы белого шума, а также формирующие фильтры, преобразующие белый шум в процесс с заданными вероятностными характеристиками.

Теоретическую основу метода статистических испытаний составляют закон больших чисел и центральная предельная теорема [38]. Обработка результатов проведенных экспериментов осуществляется с помощью методов математической статистики. Например, несмещенные оценки математического ожидания и ковариации вектора выхода вычисляются по формулам

$$\hat{m}_y(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i(t), \quad \hat{D}_y(t) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [Y_i(t) - \hat{m}_y(t)] [Y_i(t) - \hat{m}_y(t)]^T,$$

где  $Y_i(t)$  —  $i$ -я реализация случайного процесса  $Y(t)$ ;  $N$  — количество независимых экспериментов.

Значения  $N_m$  ( $N_D$ ) числа  $N$ , необходимые для получения с достаточно большой доверительной вероятностью  $\alpha_m$  оценки  $\hat{m}$  ( $\alpha_D$  для  $\hat{D}$ ) с малым отклонением  $\varepsilon_m = \nu_m D^{1/2}$  (соответственно  $\varepsilon_D = \nu_D D$ ) от истинного значения оцениваемой величины, где  $\nu$  — относительный доверительный интервал, могут быть найдены по формулам

$$\alpha_m = 2\Phi(\nu_m N_m^{1/2}), \quad \alpha_D = 2\Phi(\nu_D [(N_D - 1)/2]^{1/2}),$$

где  $\Phi(z)$  — функция Лапласа.

Представление о порядке чисел  $N_m$  (или  $N_D$ ) дает табл. 3.1.

Таблица 3.1.

$\alpha$	$N_m$ ( $N_D$ ) для различных $\nu$			
	$\nu = 0,20$	$\nu = 0,10$	$\nu = 0,03$	$\nu = 0,01$
0,70	27 (55)	108 (217)	1225 (2450)	10800 (21600)
0,90	68 (137)	272 (545)	3025 (6050)	27200 (54400)
0,96	122 (245)	420 (841)	4785 (9570)	42000 (84000)

Получение же достоверных и точных оценок старших моментов, а также определение плотностей распределения путем построения гистограмм требуют еще большего числа экспериментов, каждый из которых может быть достаточно продолжителен по времени.

Основным недостатком метода статистических испытаний является низкая точность результатов при небольшом числе опытов, что делает его применимым лишь для прикидочных расчетов, точность которых 10–20%. Вторым недостатком метода является необходимость использования генератора случайных функций, имеющих заданные вероятностные характеристики. Достоинством метода является его универсальность.

При математическом моделировании стохастических интегральных систем применяют обычные методы решения нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна–Вольтерра [5]. Моделирование же стохастических дифференциальных систем рассмотрим особо.

### 3.1.2. Методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений

Для получения на ЦВМ реализаций вектора состояния стохастической дифференциальной системы нужны разностные схемы решения стохастических дифференциальных уравнений. Однако наличие в правых частях этих уравнений белого шума, имеющего бесконечную дисперсию, и неоднозначность их определения (по Ито, Стратоновичу и др.) делают необоснованным применение обычных методов типа Эйлера и Рунге-Кутты.

Рассмотрим уравнение Ито:

$$d_0 X(t) = a(t, X(t)) + G(t, X(t)) d_0 W(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (3.1)$$

и будем искать значения вектора состояния  $X(t)$  в дискретные моменты времени  $t_k = t_0 + kh$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $h$  — достаточно малый шаг интегрирования. Для промежутка  $(t_k, t_{k+1})$  можем записать

$$X(t_{k+1}) = X(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(t, X(t)) dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} G(t, X(t)) d_0 W(t).$$

Вычисляя приближенно первый интеграл по формуле прямоугольников, а второй — по определению интеграла Ито (2.726), получаем явную разностную схему стохастического метода Эйлера:

$$X_{k+1} = X_k + ha(t_k, X_k) + G(t_k, X_k) \Delta W_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

Здесь  $X_k$  — приближенное значение вектора  $X(t)$  в момент  $t = t_k$ ;  $\Delta W_k$  — вектор приращения винеровского процесса  $W(t)$  на отрезке  $[t_k, t_{k+1}]$ , по определению независимый от  $X_0$ ,  $\Delta W_0, \dots, \Delta W_{k-1}$ :  $\Delta W_k = W(t_{k+1}) - W(t_k)$ .

Согласно (2.10), (2.11) имеем (см. пример 2.3)

$$\Delta W_k \sim N(\Delta w_k, hE),$$

т.е. элементы вектора  $\Delta W_k$  представляют собой систему независимых гауссовских случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, равными шагу интегрирования  $h$ .

Решение же методом Эйлера уравнения Стратоновича

$$d_{1/2} X(t) = f(t, X(t)) dt + F(t, X(t)) d_{1/2} W(t), \quad X(t) = X_0, \quad (3.3)$$

требует предварительного преобразования последнего в эквивалентное уравнение Ито (3.1), т.е. нахождения соответствующих функций  $a(t, x)$ ,  $G(t, x)$ . Для этого используются связи (2.84), (2.85), в которых  $\theta = 1/2$ :

$$a(t, x) = f(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \frac{\partial F^i(t, x)}{\partial x} F^i(t, x), \quad G(t, x) = F(t, x). \quad (3.4)$$

Метод Эйлера (3.2) при решении стохастических дифференциальных уравнений с зависящей от переменной  $x$  функцией  $G(t, x)$  является методом первого порядка в среднеквадратическом смысле: его глобальная погрешность имеет вид [33]

$$\delta_{\text{СК}}^2 = \max_k M |X(t_k) - X_k|^2 = O(h),$$

так что среднеквадратическая погрешность  $\delta_{\text{СК}} = O(h^{1/2})$ . Если же функция  $G(t, x)$  не зависит от  $x$ , то среднеквадратическая погрешность метода Эйлера равна  $O(h)$ , что совпадает с обычной погрешностью метода Эйлера для детерминированных уравнений (при  $G(t, x) \equiv 0$ ).

Для получения численных методов с меньшей погрешностью нужно применять более точные методы приближенного интегрирования — формулу прямоугольников со средней точкой или формулу трапеций. В стохастическом случае им соответствуют определения симметризованного интеграла Стратоновича (2.72в) или (2.72г). Поэтому эквивалентное дифференциальному уравнению (3.3) интегральное уравнение

$$X(t_{k+1}) = X(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, X(t)) dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} G(t, X(t)) d_{1/2}W(t)$$

аппроксимируется одной из следующих неявных разностных схем:

$$X_{k+1} = X_k + hf(t_k + h/2, X_k + \varphi_k/2) + G(t_k + h/2, X_k + \varphi_k/2)\Delta W_k, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} X_{k+1} = X_k + h [f(t_k, X_k) + f(t_k + h, X_k + \varphi_k)]/2 + \\ + [G(t_k, X_k) + G(t_k + h, X_k + \varphi_k)]\Delta W_k/2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $\varphi_k = X_{k+1} - X_k$ . Чтобы сделать их явными, подставим сюда грубое приближение к  $\varphi_k$ , найденное методом Эйлера (3.2):

$$\varphi_k = ha(t_k, X_k) + G(t_k, X_k)\Delta W_k. \quad (3.7)$$

Здесь функция  $a(t, x)$  находится по (3.4).

В результате получаем *стохастические двухэтапные методы: модифицированный метод Эйлера* (3.5), (3.7) и *метод Хьюна* (Эйлера—Коши) (3.6), (3.7). Оба они являются методами второго порядка в среднеквадратическом смысле, т.е.  $\delta_{\text{СК}} = O(h)$  [33]. При этом для наглядности формулу (3.6) можно с помощью (3.4), (3.7) переписать в следующем виде:

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{2}(\varphi_k + \psi_k) - \frac{h}{4} \sum_{i=1}^I \frac{\partial G^i}{\partial x}(t_k, X_k) G^i(t_k, X_k),$$

где  $\psi_k = hf(t_k + h, X_k + \varphi_k) + G(t_k + h, X_k + \varphi_k)\Delta W_k$ .

Подчеркнем, что последнее соотношение принципиально отличается от двухэтапного метода Рунге—Кутты [33]:

$$\begin{aligned}
 X_{k+1} &= X_k + 1/2(\lambda_k + \mu_k), \\
 \lambda_k &= hf(t_k, X_k) + G(t_k, X_k)\Delta W_k, \\
 \mu_k &= hf(t_k+h, X_k+\lambda_k) + G(t_k+h, X_k+\lambda_k)\Delta W_k.
 \end{aligned}$$

Здесь грубое приближение  $\lambda_k$ , в отличие от (3.7), находится с помощью функции  $f(t, x)$ , а не  $a(t, x)$ , и отсутствует слагаемое  $-hG_x G/4$ . Поэтому двухэтапный метод Рунге-Кутты обеспечивает точность лишь первого порядка. Его применение, так же как и применение аналогичного стохастического варианта хорошо известного четырехэтапного метода Рунге-Кутты, дает выигрыш по точности лишь при малой интенсивности действующего на систему белого шума, когда влияние слагаемых типа  $G\Delta W$  мало по сравнению с  $hf$ .

Одноэтапный метод второго порядка можно получить, раскладывая в (3.5) функции  $f(t, x)$ ,  $G(t, x)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(t_k, X_k)$ , используя (3.7) и оставляя, с учетом  $\Delta W_k = O(h^{1/2})$ , члены порядка малости не выше первого. В результате находим алгоритм *метода Рунге*:

$$\begin{aligned}
 X_{k+1} &= X_k + hf(t_k, X_k) + G(t_k, X_k)\Delta W_k + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \frac{\partial G^i}{\partial x}(t_k, X_k) G(t_k, X_k) \Delta W_k \Delta W_k^i.
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Использование же приведенных методов второго порядка для решения уравнения Ито (3.1) требует предварительного преобразования последнего в эквивалентное уравнение Стратоновича (3.3). Для этого следует подставить в указанные алгоритмы выражение

$$f(t, x) = a(t, x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \frac{\partial G^i(t, x)}{\partial x} G^i(t, x).$$

**Пример 3.1.** Найти разностные схемы для решения уравнения Ито

$$d_0 X(t) = \frac{1}{2} X(t) dt + X(t) d_0 W(t), \quad X_0 = 1.$$

□ Уравнение Стратоновича, эквивалентное данному, имеет вид (см. пример 2.14)

$$d_{1/2} X(t) = X(t) d_{1/2} W(t), \quad X_0 = 1.$$

Поэтому  $a(t, x) = x/2$ ,  $f(t, x) = 0$ ,  $G(t, x) = x$ , вследствие чего по (3.2), (3.5) – (3.8) получаем следующие разностные схемы:

а) метод Эйлера:

$$X_{k+1} = X_k(1 + h/2 + \Delta W_k);$$

б) модифицированный метод Эйлера и метод Хьюна:

$$X_{k+1} = X_k(1 + \Delta W_k + \Delta W_k^2/2 + h\Delta W_k/4);$$



в) метод Райта:

$$X_{k+1} = X_k(1 + \Delta W_k + \Delta W_k / 2).$$

В отличие от них формальный метод Рунге–Кутты дает

$$X_{k+1} = X_k(1 + h/2 + h^2/8 + \Delta W_k). \quad \blacksquare$$

## 3.2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГорова

### 3.2.1. Метод квази моментов

Как показано в разд. 2.2, анализ выходных процессов стохастической дифференциальной системы в случае действия на нее гауссовского белого шума сводится к решению начально-краевой задачи для ФПК-уравнения (2.87). Особенности последней являются многомерность этого уравнения в частных производных параболического типа и неограниченность области пространства состояний, в которой должно быть найдено решение.

Эти особенности обусловили появление специфических проекционных (аппроксимационных) методов решения ФПК-уравнения. Они основаны на приближении искомой плотности распределения некоторыми известными функциями переменных состояния и неопределенных параметров, зависящих от времени. В результате ФПК-уравнение заменяется системой обыкновенных уравнений для этих параметров, которые уже интегрируются обычными численными методами.

Рассмотрим основные из этих методов применительно к нахождению одноточечной плотности распределения  $p(t, x)$  путем решения ФПК-уравнения (2.15) при начальном условии (2.26) и граничных условиях (2.27), (2.33). При этом будем искать обобщенное решение этого уравнения, удовлетворяющее интегральному тождеству (2.30), которое с учетом (2.32) имеет в данном случае следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M[\psi(t, X(t))] = & M \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, X(t)) + a^T(t, X(t)) \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, X(t)) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ B(t, X(t)) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(t, X(t)) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В качестве функции, аппроксимирующей одноточечную плотность распределения  $n$ -мерного диффузионного марковского вектора  $X(t)$ , выберем отрезок ряда Грама–Шарлье (2.50):

$$p(t, x) \approx N(x - m(t), D(t)) \left[ 1 + \sum_{|k| \geq 3}^L \frac{\beta_k(t)}{k!} H_k(x - m(t), D(t)) \right], \quad (3.10)$$

где  $k = (k_1, \dots, k_n)$ . Его параметры  $m(t)$ ,  $D(t)$ ,  $\beta(t)$  положим равными вектору математического ожидания, матрице ковариаций и односторонним квази моментам процесса  $X(t)$  соответственно:

$$m(t) = M[X(t)], \quad D(t) = M[(X(t) - m(t))(X(t) - m(t))^T], \\ \beta_k(t) = M[G_k(X(t) - m(t), D(t))], \quad 3 \leq |k| \leq L.$$

Дифференциальные уравнения для определения этих параметров найдем с помощью интегрального тождества (3.9). Полагая в нем  $\psi(t, x) = x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , легко получаем уравнение для математического ожидания:

$$\dot{m} = M[a(t, X(t))]. \quad (3.11)$$

Выбирая  $\psi(t, x) = [x_j - m_j(t)] [x_j - m_j(t)]$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , получаем уравнение для матрицы ковариаций:

$$\dot{D} = M[(X(t) - m(t))a^T(t, X(t)) + a(t, X(t))(X(t) - m(t))^T + B(t, X(t))]. \quad (3.12)$$

Чтобы найти уравнение для квази момента  $\beta_k(t)$ , положим в (3.9)  $\psi(t, x) = G_k(x - m(t), D(t))$ . Для определения возникающих при этом производных  $\partial G_k / \partial t$ ,  $\partial G_k / \partial x$ ,  $\partial^2 G_k / \partial x^2$  продифференцируем производящую функцию  $G$ -полиномов Эрмита (2.52) по  $x_i$  и по  $D_{ij}$ . Получим следующие свойства этих полиномов [28]:

$$\frac{\partial G_k(x - m, D)}{\partial x_i} = k_i G_{k - e_i}(x - m, D), \\ \frac{\partial G_k(x - m, D)}{\partial D_{ij}} = \begin{cases} -k_i k_j G_{k - e_i - e_j}(x - m, D), & i \neq j, \\ -k_i(k_i - 1) G_{k - 2e_i}(x - m, D) / 2, & i = j. \end{cases}$$

где  $e_i$  —  $i$ -й орт пространства  $R^n$ ,  
Тогда найдем

$$M \left[ \frac{\partial}{\partial t} G_k(X(t) - m(t), D(t)) \right] = - \sum_{i=1}^n k_i \left[ \dot{m}_i(t) \beta_{k - e_i}(t) + \right. \\ \left. + \frac{k_i - 1}{2} \dot{D}_{ii}(t) \beta_{k - 2e_i}(t) \right] - \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} k_i k_j \dot{D}_{ij}(t) \beta_{k - e_i - e_j}(t).$$

В результате из (3.9) получим уравнения для квази моментов:

$$\beta_k = \sum_{i=1}^n k_i \left[ \Gamma_{ik} - \dot{m}_i \beta_{k - e_i}(t) + \frac{k_i - 1}{2} (\Delta_{ik} - \dot{D}_{ii}(t) \beta_{k - 2e_i}(t)) \right] +$$

$$+ \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} k_i k_j (\Delta_{ijk} - \dot{D}_{ij}(t) \beta_{k-e_i-e_j}(t)), \quad 3 \leq |k| \leq L, \quad (3.13)$$

где для краткости введены обозначения:

$$\Gamma_{ik} = \Gamma_{ik}(t, m, D, \beta) = M[a_i(t, X) G_{k-e_i}(X-m, D)],$$

$$\Delta_{ijk} = \Delta_{ijk}(t, m, D, \beta) = M[B_{ij}(t, X) G_{k-e_i-e_j}(X-m, D)].$$

**Пример 3.2.** Составить уравнения метода квази моментов для анализа многомерной линейной системы

$$\dot{X} = A(t)X + G(t)\dot{W} + c(t),$$

где  $X$  —  $n$ -мерный вектор состояния;  $\dot{W}$  —  $l$ -мерный вектор стандартного гауссовского белого шума;  $A(t), G(t)$  —  $n \times n$ - и  $n \times l$ -матрицы параметров системы соответственно;  $c(t)$  —  $n$ -мерный вектор детерминированного воздействия.

□ Сравнивая данное уравнение с (2.83) и учитывая (2.86), можно записать  $a(t, x) = A(t)x + i(t)$ ,  $B(t, x) = G(t)G^T(t)$ . Подставляя это в (3.11), (3.12), легко получаем уравнения метода моментов (метода Дункана) [10, 28, 35]:

$$\dot{m} = A(t)m + c(t), \quad \dot{D} = A(t)D + DA^T(t) + G(t)G^T(t).$$

Перейдем к составлению уравнений для квази моментов (3.13). В данном случае имеем

$$\Gamma_{ik} = \sum_{j=1}^n A_{ij} M[X_j G_{k-e_i}] + c_i \beta_{k-e_i},$$

$$\Delta_{ijk} = M[(GG^T)_{ij} G_{k-e_i-e_j}] = (GG^T)_{ij} \beta_{k-e_i-e_j}.$$

Отсюда, используя рекуррентную формулу для  $G$ -полиномов Эрмита (2.55), находим

$$M[X_j G_{k-e_i}] = \beta_{k-e_i+e_j} + m_j \beta_{k-e_i} + \sum_{p=1}^n (k_p - \delta_{pi}) D_{jp} \beta_{k-e_i-e_p}.$$

Учитывая уже полученные уравнения для  $m(t), D(t)$ , можно записать:

$$\Gamma_{ik} - \dot{m}_i \beta_{k-e_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \left[ \beta_{k-e_i+e_j} + \sum_{p=1}^n (k_p - \delta_{pi}) D_{jp} \beta_{k-e_i-e_p} \right],$$

$$\Delta_{ijk} - \dot{D}_{ij} \beta_{k-e_i-e_j} = -\beta_{k-e_i-e_j} \sum_{p=1}^n (A_{ip} D_{pj} + D_{ip} A_{jp}).$$

Подставляя последние выражения в (3.13), после приведения подобных членов окончательно получаем

$$\dot{\beta}_k = \sum_{j=1}^n k_j A_{ij}(t) \beta_{k-e_i+e_j}$$

Отметим, что в правую часть этого уравнения входят квазиимоменты одного и того же порядка  $|k-e_i+e_j|=|k|$ . Таким образом, в случае линейного вектора сноса и не зависящей от состояния матрицы диффузии система уравнений метода квазиимоментов (3.11)–(3.13) распадается на *независимые подсистемы уравнений* для математических ожиданий  $m_i$  переменных состояний  $X_i$ , их дисперсий  $D_{ij}$ , а также квазиимоментов  $\beta_k$  одинакового порядка  $|k|$ . ■

В правые части уравнений (3.11)–(3.13) входят математические ожидания различных функций. Учитывая, что  $G_0(x-m, D) = 1$ ,  $G_{e_i}(x-m, D) = x_i - m_i$  (см. пример 2.4), все они могут быть записаны в стандартном виде как  $M[f_r(t, X(t))]$ , где

$$f_r(t, x) = \xi(t, x) G_r(x-m, D). \quad (3.14)$$

Здесь  $\xi(t, x)$  – элемент вектора сноса  $a(t, x)$  или матрицы диффузии  $B(t, x)$ ;  $r = (r_1, \dots, r_n)$ .

Остается выразить эти математические ожидания через искомые параметры  $m, D, \beta$ . При этом будем различать два случая.

Если функция  $\xi(t, x)$  является полиномом по  $x$  степени  $l$ , то  $M[\xi G_r]$  легко найти путем  $l$ -кратного применения рекуррентной формулы для  $G$ -полиномов Эрмита (2.55).

**Пример 3.3.** Найти  $M[X^l G_r(X-m, D)]$ , где  $X$  – скаляр, для  $l=1, 2$ .

□ Используя одномерный вариант рекуррентной формулы (2.55) (см. пример 2.6), последовательно получаем

$$x G_r = G_{r+1} + m G_r + r D G_{r-1},$$

$$x^2 G_r = G_{r+2} + 2m G_{r+1} + [m^2 + (2r+1)D] G_r + 2r m D G_{r-1} + r(r-1) D^2 G_{r-2}.$$

Усредняя каждое из этих выражений, окончательно имеем

$$M[X G_r(X-m, D)] = \beta_{r+1} + m \beta_r + r \beta_{r-1},$$

$$M[X^2 G_r(X-m, D)] = \beta_{r+2} + 2m \beta_{r+1} + [m^2 + (2r+1)D] \beta_r + 2r m D \beta_{r-1} + r(r-1) D^2 \beta_{r-2}. \quad \blacksquare$$

В общем случае величина  $M[f_r(t, X(t))]$  выражается через плотность  $p(t, x)$  и используется аппроксимация последней в виде (3.10). Тогда, учитывая свойства гауссовской плотности (2.49) и

производя интегрирование по частям, получаем следующее приближенное представление:

$$M[\xi(t, X)G_r(x-m, D)] \approx \varphi_0^r(t, m, D) + \sum_{|k| \leq L} \frac{1}{k!} \beta_k \varphi_k^r(t, m, D). \quad (3.15)$$

Здесь функции

$$\varphi_k^r(t, m, D) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^{|k|} f_r(t, x)}{\partial x^k} N(x-m, D) dx \quad (3.16)$$

являются статистическими характеристиками  $k$ -х производных функции (3.14). Чтобы выразить их через коэффициент сноса или диффузии  $\xi(t, x)$ , воспользуемся формулой Лейбница дифференцирования произведения двух функций:

$$\frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k} [\xi(t, x)G_r(x-m, D)] = \sum_{\mu+\nu=k} C_k^\nu \frac{\partial^{|\mu|} \xi(t, x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x^\nu} G_r(x-m, D).$$

Учитывая здесь выражение для старшей производной  $G$ -полинома Эрмита

$$\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x^\nu} G_r(x-m, D) = \begin{cases} \frac{r!}{(r-\nu)!} G_{r-\nu}(x-m, D), & \nu \leq r, \\ 0, & \nu > r, \end{cases}$$

вместо (3.16) получаем удобную формулу

$$\varphi_k^r(t, m, D) = \sum_{\nu=0}^{\min(k, r)} \frac{C_r^\nu}{(k-\nu)!} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^{|k-\nu|} \xi(t, x)}{\partial x^{k-\nu}} G_{k-\nu}(x-m, D) N(x-m, D) dx. \quad (3.17)$$

Таким образом, определение одноточечной плотности распределения диффузионного марковского процесса в  $L$ -м квазиомментном приближении (3.10) сводится к решению задачи Коши для замкнутой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.11)–(3.13) с начальными условиями в виде параметров  $m_0$ ,  $D_0$ ,  $\beta_{k0}$ , ( $3 \leq |k| \leq L$ ) заданной плотности  $p_0(x)$ . При этом для вычисления правых частей уравнений в общем случае необходимо предварительно для всех элементов вектора сноса и матрицы диффузии  $\xi(t, x)$  найти функции (3.17), осуществляя статистическую линейаризацию произведений  $\xi^{(p)} G_q$ , а затем применить приближенную формулу (3.15). Если же элемент  $\xi(t, x)$  является полиномом, то проще воспользоваться рекуррентной формулой (2.55). Общее число уравнений в системе (3.11)–(3.13) с учетом симметрии матрицы ковариаций равно  $C_{n+L-1}^j$ , где  $C_i^j = i! / [j!(i-j)!]$  – биномиальный коэффициент. Представление об этом числе для различных  $n, L$  дает табл. 3.2.

Таблица 3.2

L	Число уравнений для различных n						
	n=2	n=3	n=4	n=6	n=8	n=10	n=20
2	5	9	14	27	44	65	230
3	9	19	34	83	164	285	1770
4	14	34	69	209	494	1000	10695
6	27	83	209	923	3002	8007	53129

**Пример 3.4.** Составить уравнения метода квазимоментов для анализа выходных процессов одномерной стохастической системы, заданной уравнением Ито

$$d_0 X(t) = cX(t)dt + \gamma X(t)d_0 W(t).$$

□ По этому уравнению находим:  $a(t,x) = cx$ ,  $B(t,x) = \gamma^2 x^2$ . В одномерном случае ( $n=1$ ) уравнения (3.11)–(3.13) имеют более простой вид:

$$\dot{m} = M[a(t, X(t))],$$

$$\dot{D} = 2M[(X(t)-m)a(t, X(t))] + M[B(t, X(t))],$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_k = & k \left\{ M[a(t, X(t))G_{k-1}(X(t)-m, D)] - \dot{m}\beta_{k-1} \right\} + \\ & + \frac{k(k-1)}{2} \left\{ M[B(t, X(t))G_{k-2}(X(t)-m, D)] - \dot{D}\beta_{k-2} \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя в них выражения для функций  $a$ ,  $B$ , легко находим

$$\dot{m} = cm, \quad \dot{D} = 2cD + \gamma^2(m^2 + D),$$

а также, используя результаты примера 3.2, имеем

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_k = & k \left\{ c[\beta_k + m\beta_{k-1} + (k-1)D\beta_{k-2}] - \dot{m}\beta_{k-1} \right\} + \\ & + \frac{k(k-1)}{2} \left\{ \gamma^2 [\beta_k + 2m\beta_{k-1} + (m^2 + (2k-3)D)\beta_{k-2} + \right. \\ & \left. + 2(k-2)mD\beta_{k-3} + (k-2)(k-3)D^2\beta_{k-4}] - \dot{D}\beta_{k-2} \right\}. \end{aligned}$$

Исключая из последнего выражения производные  $\dot{m}$ ,  $\dot{D}$ , окончательно получаем систему уравнений:

$$\dot{m} = cm,$$

$$\dot{D} = (2c + \gamma^2)D + \gamma^2 m^2,$$

$$\dot{\beta}_k = k[c + (k-1)\gamma^2/2]\beta_k + k(k-1)\gamma^2[m\beta_{k-1} + (k-2)D[\beta_{k-2} + m\beta_{k-3} + (k-3)D\beta_{k-4}/2]], \quad k=3,4,\dots,$$

где следует учитывать, что  $\beta_0=1$ ,  $\beta_1=\beta_2=0$ . Поэтому, в частности, имеем

$$\dot{\beta}_3 = 3(c+\gamma^2)\beta_3 + 6\gamma^2 mD,$$

$$\dot{\beta}_4 = 2(2c+3\gamma^2)\beta_4 + 6\gamma^2(2m\beta_3 + D^2).$$

Таким образом, в данном примере показано, что в случае линейного коэффициента сноса и квадратичного коэффициента диффузии точная система уравнений квази моментов (при  $L=\infty$ ) распадается на цепочку последовательно решаемых линейных неоднородных дифференциальных уравнений для  $m(t)$ ,  $D(t)$ ,  $\beta_3(t)$ ,  $\beta_4(t)$  и т.д. Если при этом коэффициенты  $c$ ,  $\gamma$  постоянны, то решения этих уравнений легко находим аналитически, например

$$m(t) = m_0 \exp(ct), \quad D(t) = (D_0 + m_0^2) \exp[(2c + \gamma^2)t] - m_0^2 \exp(2ct),$$

где  $m_0, D_0$  — начальные значения этих параметров. ■

### 3.2.2. Метод гауссовского приближения

Быстрый рост числа уравнений метода квази моментов при увеличении номера приближения  $L$  заставляет в ряде случаев ограничиваться простейшим приближением с  $L=2$ , при котором решение ФПК-уравнения аппроксимируется гауссовской плотностью  $N(x-m(t), D(t))$ , зависящей от  $n(n+3)/2$  параметров. Уравнения этих параметров (3.11), (3.12) с помощью свойства гауссовской плотности (2.96) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{m} &\approx \varphi_0(t, m, D), \\ \dot{D} &\approx K(t, m, D)D + DK^T(t, m, D) + \Psi_0(t, m, D), \end{aligned} \quad (3.18)$$

причем знаки  $\approx$  подчеркивают приближенный характер этой системы. Здесь  $\varphi_0, K$  — вектор статистических характеристик и матрица статистических коэффициентов усиления элементов вектора сноса соответственно:

$$\varphi_0(t, m, D) = \int_{\mathbb{R}^n} a(t, x) N(x-m, D) dx, \quad K(t, m, D) = \frac{\partial \varphi_0(t, m, D)}{\partial m};$$

$\Psi_0$  — матрица статистических характеристик элементов матрицы диффузии:

$$\Psi_0(t, m, D) = \int_{\mathbb{R}^n} B(t, x) N(x-m, D) dx.$$

Однако получаемое в результате решение иногда оказывается весьма грубым. Его точность может быть оценена путем получения параметров четвертого квазимоментного приближения, дающего также ориентировочное представление об асимметрии и эксцессе искомой плотности  $p(t, x)$ .

**Пример 3.5.** Найти уравнения гауссовского приближения для определения математического ожидания и дисперсии одномерного процесса  $Y(t)$ , описываемого следующим стохастическим дифференциальным уравнением Ито второго порядка:

$$\dot{Y} - c\dot{Y} - Y^2 = \gamma Y^2 V.$$

□ Обозначив  $X_1 = Y$ ,  $X_2 = \dot{Y}$ , получим систему уравнений первого порядка:

$$d_0 X_1 = X_2 dt, \quad d_0 X_2 = (cX_2 + X_1^2) dt + \gamma X_1^2 d_0 W,$$

для двумерного марковского процесса  $(X_1(t), X_2(t))$ , согласно которой определяемые по (2.86) вектор сноса и матрица диффузии имеют в данном случае вид

$$a(t, x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 + cx_2 \end{bmatrix}, \quad B(t, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma x_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \gamma x_1^2 \end{bmatrix}.$$

Тогда, используя результаты примера 2.8, найдем коэффициенты статистической линеаризации:

$$\varphi_0 = \begin{bmatrix} m_2 \\ m_1^2 + D_{11} + cm_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2m_1 & c \end{bmatrix},$$

$$\Psi_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2(m_1^4 + 6m_1^2 D_{11} + 3D_{11}^2) \end{bmatrix},$$

Подставив их в (3.18), получим следующую систему из пяти уравнений гауссовского приближения:

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &\approx m_2, & \dot{m}_2 &\approx m_1^2 + D_{11} + cm_2, \\ \dot{D}_{11} &\approx D_{12}, & \dot{D}_{12} &\approx 2m_1 D_{11} + cD_{12} + D_{22}, \\ \dot{D}_{22} &\approx 4m_1 D_{12} + 2cD_{22} + \gamma^2(m_1^4 + 6m_1^2 D_{11} + 3D_{11}^2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 3.2.3. Проекционно-сеточный метод

В качестве другого способа сведения начально-краевой задачи для ФПК-уравнения к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений рассмотрим нестационарную кусочно-полилинейную аппроксимацию плотности  $p(t, x)$  и воспользуемся методикой [20].



С этой целью для каждой фазовой переменной  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , введем нестационарный отрезок аппроксимации  $\Omega_i(t) = [a_i(t), b_i(t)]$ , определив его границы формулами

$$a_i(t) = m_i(t) - c_i D_{ii}^{1/2}(t), \quad b_i(t) = m_i(t) + c_i D_{ii}^{1/2}(t),$$

где  $m_i(t)$ ,  $D_{ii}(t)$  — математическое ожидание и дисперсия случайной компоненты  $X_i(t)$  соответственно;  $c_i$  — коэффициент предпологаемого разброса ее значений.

На отрезке  $\Omega_i(t)$  введем равномерную сетку  $x_{ij}(t) = a_i(t) + j h_i(t)$ ,  $j = \overline{0, L+1}$ , с шагом

$$h_i(t) = \frac{b_i(t) - a_i(t)}{L+1} = \frac{2c_i}{L+1} D_{ii}^{1/2}(t),$$

и определим на ней систему координатных функций-крышек

$$\varphi_{r_i}(t, x_i) = \frac{1}{\sqrt{h_i(t)}} B \left[ \frac{x_i - a_i(t)}{h_i(t)} - r_i \right], \quad r_i = \overline{1, L}, \quad (3.19)$$

где  $B(\sigma)$  — базисный сплайн первой степени [20]:

$$B(\sigma) = \begin{cases} 1 + \sigma, & -1 \leq \sigma \leq 0, \\ 1 - \sigma, & 0 \leq \sigma \leq 1, \\ 0, & |\sigma| \geq 1. \end{cases}$$

Заданные таким образом базисные функции являются *финитными*, а потому удовлетворяют нулевым краевым условиям ФПК-уравнения. Матрица их скалярных произведений является трехдиагональной и не зависит от  $t$ :

$$C_{r_i, s_i} = \int_{\Omega_i(t)} \varphi_{r_i}(t, x_i) \varphi_{s_i}(t, x_i) dx_i = \begin{cases} 2/3, & r_i = s_i, \\ 1/6, & r_i - s_i = \pm 1, \\ 0, & |r_i - s_i| \geq 2. \end{cases}$$

Выберем коэффициенты разброса  $c_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , так, чтобы область рассеивания случайного вектора состояния  $X(t)$  в каждый момент времени  $t \geq t_0$  находилась внутри гиперпараллелепипеда  $\Omega(t) = \Omega_1(t) \times \dots \times \Omega_n(t)$ . Определим в  $\Omega(t)$  систему базисных функций  $\varphi_s(t, x)$ ,  $s = (s_1, \dots, s_n)$ , как прямое (тензорное) произведение функций-крышек (3.19):

$$\varphi_{s_1 \dots s_n}(t, x_1, \dots, x_n) = \varphi_{s_1}(t, x_1) \dots \varphi_{s_n}(t, x_n), \quad s = \overline{1, L}, \quad (3.20)$$

и будем аппроксимировать плотность  $p(t, x)$  линейной комбинацией этих функций:

$$p(t, x) \approx \sum_{s=1}^L q_s(t) \varphi_s(t, x), \quad t \geq t_0, \quad x \in \Omega(t). \quad (3.21)$$

Для определения коэффициентов  $q(t)$  положим в интегральном тождестве (3.9)  $\psi(t, x) = \varphi_r(t, x)$ ,  $r = (r_1, \dots, r_n)$ . Тогда получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \varphi_r(t, x) p(t, x) dx = \int_{\Omega(t)} \left\{ \frac{\partial \varphi_r(t, x)}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial \varphi_r(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[ B(t, x) \frac{\partial^2 \varphi_r(t, x)}{\partial x^2} \right] \right\} p(t, x) dx.$$

Подставив в это выражение аппроксимацию (3.21), проинтегрируем последнее слагаемое в правой части один раз по частям и обозначим

$$F_n = \int_{\Omega(t)} \left( \frac{\partial \varphi_r(t, x)}{\partial x} \right)^T \left\{ a(t, x) \varphi_r(t, x) - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^T}{\partial x} (B(t, x) \varphi_r(t, x)) \right]^T \right\} dx - \int_{\Omega(t)} \varphi_r(t, x) \frac{\partial \varphi_r(t, x)}{\partial t} dx. \quad (3.22)$$

В результате найдем приближенную систему уравнений для коэффициентов  $q_r(t)$ :

$$\sum_{s=1}^L C_n \dot{q}_s \approx \sum_{s=1}^L F_n [t, m, \bar{D}, \dot{m}, \dot{\bar{D}}] q_s, \quad r = \overline{1, L}, \quad (3.23)$$

где  $C_n = C_{r_1 s_1} \dots C_{r_n s_n}$ .

Подчеркнем, что интегралы (3.22) через формулы (3.19), (3.20) зависят от векторов математического ожидания  $m(t) = (m_1(t), \dots, m_n(t))$  и дисперсии  $\bar{D}(t) = (D_{11}(t), \dots, D_{nn}(t))$  переменных состояния, а также от производных этих параметров.

Параметры  $m(t)$ ,  $\bar{D}(t)$  найдем с помощью уравнений (3.11), (3.12). Учитывая в них (3.21), получаем

$$\dot{m}_i \approx \sum_{s=1}^L \Phi_{is}(t, m, \bar{D}) q_s, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.24)$$

$$\dot{D}_{ii} \approx \sum_{s=1}^L \Psi_{is}(t, m, \bar{D}) q_s - 2m_i \dot{m}_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.25)$$

где

$$\Phi_{is} = \int_{\Omega(t)} a_i(t, x) \varphi_s(t, x) dx, \quad (3.26)$$

$$\Psi_{is} = \int_{\Omega(t)} [2x_i a_i(t, x) + B_{ii}(t, x)] \varphi_s(t, x) dx.$$

Уравнения (3.23)–(3.25) образуют замкнутую систему из  $L^2 + 2n$  нелинейных дифференциальных уравнений. Начальными условиями для

них являются параметры  $m_0, \bar{D}_0, q_\alpha(t_0)$  плотности  $p_0(x)$ , причем последние находятся из системы алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^L C_{rs} q_\alpha(t_0) = \int_{\Omega(t_0)} p_0(x) \varphi(t_0, x) dx, \quad r = \overline{1, L},$$

путем  $n$ -кратного применения эффективного алгоритма трехдиагональной прогонки. Этот же алгоритм используется и для разрешения уравнений (3.23) относительно производных  $q_\alpha$  перед решением системы (3.23)–(3.25) численным методом.

Вычисление элементов матриц  $F, \Phi, \Psi$ , определяющих правые части полученных дифференциальных уравнений, упрощается, если элементы вектора сноса  $a(t, x)$  и матрицы диффузии  $B(t, x)$  представляют собой суммы произведений функций времени и одной из переменных состояния

$$\xi(t, x) = \sum_{j=1}^k \eta_{1j}(t, x_1) \dots \eta_{nj}(t, x_n).$$

В этом случае согласно (3.20) многомерные интегралы (3.22), (3.26) вырождаются в сумму произведений однократных интегралов двух типов:

$$\lambda_i^\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t, y) \varphi_i(t, y) dy, \quad \mu_{ij}^\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t, y) \frac{\partial \varphi_i(t, y)}{\partial y} \varphi_j(t, y) dy,$$

где  $i, j = \overline{1, L}$ ;  $y$  — одна из фазовых переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Здесь отрезок интегрирования расширен за пределы отрезка аппроксимации благодаря финитности базисных функций.

Учитывая конкретный вид координатных функций (3.19), эти интегралы можно с помощью интегрирования по частям выразить через первую и вторую первообразные функции  $\eta(t, y)$ :

$$\Xi(t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t, y) dy, \quad \Theta(t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Xi(t, y) dy.$$

В результате получаем следующие удобные формулы:

$$\lambda_i^\eta(t) = [\Theta(t, y_{i+1}) - 2\Theta(t, y_i) + \Theta(t, y_{i-1})] / h^{3/2}(t),$$

$$\mu_{ij}^\eta(t) = \begin{cases} 2\Xi(t, y_i) / h^2(t) - [\Theta(t, y_{i+1}) - \Theta(t, y_{i-1})] / h^3(t), & j=i, \\ -\Xi(t, y_{i+1}) / h^2(t) + [\Theta(t, y_{i+1}) - \Theta(t, y_i)] / h^3(t), & j=i+1, \\ -\Xi(t, y_{i-1}) / h^2(t) + [\Theta(t, y_i) - \Theta(t, y_{i-1})] / h^3(t), & j=i-1, \\ 0, & |j-i| \geq 2, \end{cases}$$

где  $y_i = y_i(t)$  ( $i = \overline{0, L-1}$ ) — значения сетки по данной фазовой переменной  $y$ .

В частности, найденные функции  $\mu_{ij}^\eta$  с  $\eta(t, y) = 1$ ,  $\eta(t, y) = y$  позволяют легко определить последнее слагаемое в (3.22), так как из (3.19) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_i(t, y)}{\partial t} \varphi_j(t, y) dy = \tau(t) \mu_{ij}^1(t) - \zeta(t) \left[ \frac{1}{2} C_{ij} + \mu_{ij}^y(t) \right],$$

где  $\zeta(t) = \dot{h}(t)/h(t) = \dot{D}(t)/2D(t)$ ,  $\tau(t) = m(t)\zeta(t) - \dot{m}(t)$ .

### 3.2.4. Спектральный метод

Альтернативой методам сведения ФПК-уравнения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений является применение спектрального метода [35,36]. Последний позволяет использовать линейность ФПК-уравнения и приводит к системе линейных алгебраических уравнений для неизвестных параметров аппроксимирующей функции.

Рассмотрим для простоты одномерное ФПК-уравнение ( $n=1$ ), которое запишем в дивергентной форме:

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = - \frac{\partial q(t, x)}{\partial t}, \quad p(t_0, x) = p_0(x), \quad (3.27)$$

где поток вероятности

$$q(t, x) = a(t, x)p(t, x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [b(t, x)p(t, x)]. \quad (3.28)$$

Выберем отрезок  $\alpha \leq x \leq \beta$  аппроксимации плотности  $p(t, x)$  такой, что выполняются условия

$$p(t, x) \Big|_{x \leq \alpha} = 0, \quad q(t, x) \Big|_{x \leq \alpha} = 0, \quad (3.29)$$

и определим на нем столбец ортонормированных функций  $\psi(x) = - \|\psi(h, x)\|_{h=0,1,\dots}$ . Решение уравнения (3.27) будем искать в виде обобщенного ряда Фурье

$$p(t, x) = \Phi^T(t) \psi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \Phi(h, t) \psi(h, x), \quad x \in [\alpha, \beta].$$

Здесь  $\Phi(t) = \|\Phi(h, t)\|_{h=0,1,\dots}$  — столбец обобщенной характеристической функции, ординатами которой являются спектральные характеристики плотности  $p(t, x)$  по переменной  $x$ :

$$\Phi(t) = \underset{\psi}{S} [p(t, x)] = \left\| \int_{\alpha}^{\beta} p(t, x) \psi(h, x) dx \right\|_{h=0,1,\dots}.$$

Для определения бесконечной матрицы-столбца  $\Phi(t)$  осуществим спектральное преобразование по переменной  $x$  уравнения (3.27). Получаем

$$\dot{\Phi}(t) = -\int_{\Psi} \left[ \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} \right],$$

или, используя известное свойство дифференцирования оригинала спектрального преобразования [35, 36] и учитывая второе нулевое граничное условие из (3.29), находим

$$\dot{\Phi}(t) = -P_x Q(t). \quad (3.30)$$

Здесь  $P_x$  — матрица двумерной спектральной характеристики оператора дифференцирования  $\partial/\partial x$ :

$$P_x = \int_{\Psi} \left[ \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial x} \right] = \left\| \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial x} \psi(h, x) \psi(j, y) dy \right\|_{h, j = \alpha, 1, \dots},$$

$Q(t)$  — спектральная характеристика по  $x$  потока вероятности  $q(t, x)$ , которая согласно (3.28) имеет вид

$$Q(t) = \int_{\Psi} [a(t, x)p(t, x)] - \frac{1}{2} \int_{\Psi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [b(t, x)p(t, x)] \right\}.$$

Теперь, используя свойство умножения оригиналов и еще раз свойство дифференцирования оригинала, а также учитывая первое нулевое граничное условие из (3.29), находим

$$Q(t) = A(t)\Phi(t) - \frac{1}{2} P_x B(t)\Phi(t), \quad (3.31)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$  — матрицы двумерных спектральных характеристик по переменным  $x, y$  функций  $a(t, x)\delta(x-y)$  и  $b(t, x)\delta(x-y)$  соответственно, например

$$A(t) = \int_{\Psi} [a(t, x)\delta(x-y)] = \left\| \int_{\alpha}^{\beta} a(t, x)\psi(h, x)\psi(j, x) dx \right\|_{h, j = \alpha, 1, \dots}.$$

В результате, подставляя (3.31) в (3.30), получаем линейное дифференциальное уравнение для бесконечного столбца  $\Phi(t)$ :

$$\dot{\Phi}(t) = \left[ -P_x A(t) + \frac{1}{2} P_x^2 B(t) \right] \Phi(t), \quad \Phi(t_0) = \Phi_0, \quad (3.32)$$

начальным условием для которого служит обобщенная характеристическая функция начальной плотности  $p_0(x)$ :

$$\Phi_0 = \int_{\Psi} [p_0(x)] = \left\| \int_{\alpha}^{\beta} p_0(x)\psi(h, x) dx \right\|_{h = \alpha, 1, \dots}.$$

Однако из (3.32) нельзя получить конечную систему уравнений для первых  $L$  ординат обобщенной характеристической функции  $\Phi(t)$ , так как элементы бесконечных матриц  $P_x$ ,  $P_x^2$  не убывают с ростом их дискретных аргументов, вследствие чего эти матрицы "урезать" нельзя. Выход состоит в получении *алгебраических уравнений*, что позволяет перейти к действиям с матрицей  $P_x^{-1}$  оператора интегрирования, которую "урезать" уже можно.

Для наглядности сначала рассмотрим случай, когда коэффициенты сноса  $a(t, x)$  и диффузии  $b(t, x)$  не зависят от  $t$ , т.е. исследуемая стохастическая дифференциальная система является *стационарной*. Тогда в уравнении (3.32) матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$  также не зависят от  $t$  и можно без ограничения общности положить  $t_0 = 0$ . Применяя к такому уравнению преобразование Лапласа, легко получаем

$$s\tilde{\Phi}(s) - \Phi_0 = \left[ -P_x A + \frac{1}{2} P_x^2 B \right] \tilde{\Phi}(s), \quad (3.33)$$

где  $\tilde{\Phi}(s)$  — изображение по Лапласу функции  $\Phi(t)$ :  $\tilde{\Phi}(s) = \int_0^{\infty} \Phi(t) e^{-st} dt$ .

Переписав (3.33) в виде

$$\left[ sE + P_x A - \frac{1}{2} P_x^2 B \right] \tilde{\Phi}(s) = \Phi_0, \quad (3.34)$$

где  $E$  — бесконечная единичная матрица, и умножив последнее равенство слева на матрицу  $P_x^{-2}$ , окончательно получим линейное *алгебраическое матричное уравнение*

$$\left[ sP_x^{-2} + P_x^{-1} A - \frac{1}{2} B \right] \tilde{\Phi}(s) = P_x^{-2} \Phi_0,$$

которое уже допускает "урезание" бесконечных матриц спектральных характеристик до желаемого порядка  $L$ . После его решения плотность  $p(t, x)$  находится по формуле обращения

$$p(t, x) \approx \sum_{h=0}^{L-1} \frac{\psi(h, x)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{\Phi}(h, s) e^{st} ds, \quad x \in [\alpha, \beta].$$

В общем же случае к уравнению (3.32) необходимо еще раз применить спектральное преобразование — теперь уже по переменной  $t$ . Определяя отрезок аппроксимации  $t_0 \leq t \leq T$  и вводя на нем систему ортонормированных базисных функций  $\{\chi(i, t)\}_{i=0,1,\dots}$ , в результате получаем алгебраическое матричное уравнение, аналогичное (3.34):

$$\left[ (P_x \circ E) + (E \circ P_x) \circ A - \frac{1}{2} (E \circ P_x^2) \circ B \right] \circ \Phi = \chi(t_0) \circ \Phi_0 \quad (3.35)$$

относительно  $\Phi$  — бесконечной плоской матрицы двумерной спектральной характеристики плотности  $p(t, x)$ :

$$\Phi = \left\| \int_{t_0}^T dt \int_{\alpha}^{\beta} p(t,x) \chi(h,t) \psi(i,x) dx \right\|_{h,i=0,1,\dots}$$

В уравнении (3.35)  $P_t$  — матрица двумерной спектральной характеристики оператора дифференцирования  $\partial/\partial t$ :

$$P_t = S_{\chi\chi} \left[ \frac{\partial \delta(t-\tau)}{\partial t} \right] = \left\| \int_{t_0}^T dt \int_{t_0}^T \frac{\partial \delta(t-\tau)}{\partial t} \chi(h,t) \chi(i,\tau) d\tau \right\|_{h,i=0,1,\dots};$$

$A, B$  — четырехмерные матрицы спектральных характеристик коэффициентов сноса  $a(t,x)$  и диффузии  $b(t,x)$  соответственно, например,

$$A = \left\| \int_{t_0}^T dt \int_{t_0}^T a(t,x) \chi(h,t) \chi(i,t) \psi(j,x) \psi(k,x) dx \right\|_{h,i,j,k=0,1,\dots};$$

$\chi(t_0) = \|\chi(i,t_0)\|$  — столбец начальных значений базисных функций;  
 $\odot$  — символ прямого (тензорного) произведения плоских матриц;  
 $*$  — символ умножения многомерных матриц, например,

$$A * \Phi = \left\| \sum_{i,k=0}^{\infty} A(h,i,j,k) \Phi(i,k) \right\|_{h,j=0,1,\dots}$$

Умножая (3.35) слева на четырехмерную матрицу  $P_t^{-1} \odot P_x^{-2}$  и используя свойство

$$(Q \odot R) * (S \odot T) = QS * RT,$$

находим искомое матричное уравнение, допускающее "урезание":

$$\left[ (E \odot P_x^{-2}) + (P_t^{-1} \odot P_x^{-1}) * A - \frac{1}{2} (P_t^{-1} \odot E) * B \right] * \Phi = P_t^{-1} \chi(t_0) \odot P_x^{-2} \Phi_0.$$

Ограничиваясь здесь матрицами порядка  $L$ , получим приближенную систему из  $L^2$  линейных алгебраических уравнений для неизвестных элементов матрицы  $\Phi$ . В результате решения этой системы найдем приближенное представление плотности  $p(t,x)$ :

$$p(t,x) \approx \sum_{h,i=0}^{L-1} \Phi(h,i) \chi(h,t) \psi(i,x), \quad t \in [t_0, T], \quad x \in [\alpha, \beta].$$

Изложенный метод достаточно просто обобщается на случай  $n$ -мерного ФПК-уравнения [37]. Тогда он приводит к системе из  $L^{n+1}$  линейных алгебраических уравнений.

### 3.3. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

#### 3.3.1. Применение преобразования Фурье

В разд. 2.3.3 показано, что приближенное определение математического ожидания и корреляционной функции вектора выхода  $Y(t)$  стохастической интегральной системы с нелинейностями в предположении о гауссовости за она распределения объединенного вектора входа нелинейностей  $E(t)$  сводится к решению системы нелинейных интегральных уравнений типа Урысона-Вольтерра (2.103), (2.104) относительно математического ожидания  $m_{\epsilon}(t)$  и корреляционных функций  $R_{\epsilon_u}(t, \theta)$ ,  $R_{\epsilon}(t, \theta)$ . Применяя к этой системе уравнений интегральное преобразование Фурье или спектральное преобразование, можно получить соответствующие алгебраические уравнения для спектральных плотностей. Эти уравнения, подобные связям вход-выход линейных стохастических систем [35], позволяют оперировать не с импульсными переходными функциями линейных звеньев интегральной системы, а с их частотными характеристиками или передаточными функциями.

Рассмотрим определения характеристик *установившейся реакции*  $E(t)$  системы (2.99). Условиями ее появления являются:

1) стационарность системы, т.е.  $f(t, \epsilon) = f(\epsilon)$ ,  $W_{\Lambda}(t, \tau) = W_{\Lambda}(t - \tau)$ ;

2) стационарность случайного воздействия, т.е.  $m_u(t) = m_u$ ,  $R_{u}(t, \theta) = R_u(t - \theta)$ ;

3) достаточно большое время работы системы, т.е.  $t_0 = -\infty$ .

Тогда коэффициенты статистической линеаризации (2.95), (2.97) явно от  $t$  не зависят и, выполнив в уравнениях (2.103), (2.104) замену переменных  $\eta = t - \theta$ ,  $\sigma = t - \tau$ , получим более простую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
 m_{\epsilon} &\approx m_u + \int_0^{\infty} W_{\Lambda}(\sigma) d\sigma \varphi_0(m_{\epsilon}, D_{\epsilon}), \\
 R_{\epsilon_u}(\eta) &\approx R_u(\eta) + \int_0^{\infty} W_{\Lambda}(\sigma) K(m_{\epsilon}, D_{\epsilon}) R_{\epsilon_u}(\eta - \sigma) d\sigma, \\
 R_{\epsilon}(\eta) &\approx R_{u\epsilon}(\eta) + \int_0^{\infty} W_{\Lambda}(\sigma) K(m_{\epsilon}, D_{\epsilon}') R_{\epsilon}(\eta - \sigma) d\sigma,
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

где  $R_{u\epsilon}(\eta) = R_{\epsilon_u}^T(\eta)$ ,  $D_{\epsilon} = R_{\epsilon}(0)$ .



Применяя теперь к двум последним уравнениям этой системы преобразование Фурье, для матриц спектральных плотностей

$$S_{\epsilon u}(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\epsilon u}(\eta) e^{-i\omega\eta} d\eta, \quad S_{\epsilon}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\epsilon}(\eta) e^{-i\omega\eta} d\eta$$

получаем алгебраические уравнения в частотной области:

$$[E - \tilde{W}_A(i\omega)K(m_{\epsilon}, D_{\epsilon})]S_{\epsilon u}(i\omega) \approx S_{\epsilon}(\omega), \quad (3.37)$$

$$[E - \tilde{W}_A(i\omega)K(m_{\epsilon}, D_{\epsilon})]S_{\epsilon}(\omega) \approx S_{u\epsilon}^T(i\omega) = S_{\epsilon u}^T(-i\omega),$$

где  $\tilde{W}_A(i\omega)$  — матрица частотных характеристик многомерного линейного звена  $A$  (см рис. 2.6):

$$\tilde{W}_A(i\omega) = \int_0^{\infty} W_A(\lambda) e^{-i\omega\lambda} d\lambda.$$

Первое же уравнение системы (3.36) с учетом последнего выражения принимает следующий вид:

$$m_{\epsilon} \approx m_u + \tilde{W}_A(0)\varphi_0(m_{\epsilon}, D_{\epsilon}). \quad (3.38)$$

В этих уравнениях матрица ковариаций  $D_{\epsilon}$ , согласно формуле обратного преобразования Фурье

$$R_{\epsilon}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\epsilon}(\omega) e^{i\omega\eta} d\omega, \quad (3.39)$$

выражается через спектральную плотность  $S_{\epsilon}(\omega)$ :

$$D_{\epsilon} = R_{\epsilon}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\epsilon}(\omega) d\omega.$$

Разрешая уравнения (3.37) относительно спектральных плотностей входа нелинейности, получаем

$$\begin{aligned} S_{\epsilon u}(i\omega) &\approx \Phi(i\omega, m_{\epsilon}, D_{\epsilon})S_u(\omega), \\ S_{\epsilon}(\omega) &\approx \Phi(i\omega, m_{\epsilon}, D_{\epsilon})S_{\epsilon u}^T(-i\omega), \end{aligned} \quad (3.40)$$

где  $\Phi$  — матрица частотной характеристики замкнутой статистически линеаризованной системы, связывающей центрированные процессы  $\tilde{U}(t)$  и  $\tilde{E}(t)$ :

$$\Phi(i\omega, m_{\epsilon}, D_{\epsilon}) = [E - \tilde{W}_A(i\omega)K(m_{\epsilon}, D_{\epsilon})]^{-1}.$$

Исключая теперь промежуточную переменную  $S_{\epsilon u}(i\omega)$ , находим

$$S_{\epsilon}(\omega) \approx \Phi(i\omega, m_{\epsilon}, D_{\epsilon})S_u(\omega)\Phi^T(-i\omega, m_{\epsilon}, D_{\epsilon}).$$

В результате получаем уравнение для ковариации

$$D_\varepsilon \approx \Psi(m_\varepsilon, D_\varepsilon), \quad (3.41)$$

правая часть которого есть интеграл в частотной области

$$\Psi(m_\varepsilon, D_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(i\omega, m_\varepsilon, D_\varepsilon) S_u(\omega) \Phi^T(-i\omega, m_\varepsilon, D_\varepsilon) d\omega. \quad (3.42)$$

В одномерном случае это уравнение можно записать в виде

$$D_\varepsilon \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(i\omega, m_\varepsilon, D_\varepsilon)|^2 S_u(\omega) d\omega.$$

Отметим, что обычно элементы подынтегральной матрицы в (3.42) являются дробно-рациональными функциями частоты  $\omega$ . В этом случае, как известно из теории линейных систем [28], такие интегралы вычисляются аналитически.

Уравнения (3.38), (3.41) образуют замкнутую систему нелинейных алгебраических уравнений относительно вектора  $m_\varepsilon$  и матрицы  $D_\varepsilon$ . Количество уравнений в этой системе равно  $q(q+3)/2$ , где  $q$  — размерность вектора  $E(t)$ . Ее можно решить каким-либо численным методом, например методом итераций. После этого матрицы спектральных плотностей  $S_{u\varepsilon}(i\omega)$ ,  $S_\varepsilon(\omega)$  легко найти по формулам (3.40). Наконец, корреляционные функции  $R_{u\varepsilon}(\eta)$ ,  $R_\varepsilon(\eta)$  определяются по формулам обратного преобразования Фурье типа (3.39).

### 3.3.2. Применение спектрального преобразования

Для нахождения вероятностных характеристик *переходных процессов* как в стационарной, так и в нестационарной стохастической интегральной системе с нелинейностями, в общем случае на нестационарном отрезке времени  $[t_0, T]$ , определим на нем систему ортонормированных базисных функций  $\{p(h, t)\}$ . Осуществляя по ним спектральное преобразование [35, 36] уравнений (2.103), (2.104), получаем

$${}^1S_\varepsilon \approx {}^1S_u + \hat{W}_\Lambda \Phi_0({}^1S_\varepsilon, S_\varepsilon), \quad (3.43)$$

$$S_\varepsilon \approx S_u + \hat{W}_\Lambda \hat{K}({}^1S_\varepsilon, S_\varepsilon) S_{\varepsilon u}, \quad (3.44)$$

$$S_\varepsilon \approx S_{u\varepsilon} + \hat{W}_\Lambda \hat{K}({}^1S_\varepsilon, S_\varepsilon) S_\varepsilon. \quad (3.45)$$

В уравнениях (3.43)–(3.45)  ${}^1S_\varepsilon$ ,  ${}^1S_u$  — столбцы первых нестационарных спектральных плотностей многомерных сигналов  $E(t)$ ,  $U(t)$ :

$${}^1S_{\epsilon} = S_p [m_{\epsilon}(t)], \quad {}^1S_u = S_p [m_u(t)];$$

$S_{\epsilon}$ ,  $S_u$ ,  $S_{\epsilon u}$  — блочные матрицы собственных и взаимной нестационарных спектральных плотностей этих сигналов:

$$S_{\epsilon} = S_{pp} [R_{\epsilon}(t, \theta)], \quad S_u = S_{pp} [R_u(t, \theta)], \quad S_{\epsilon u} = S_{\epsilon u}^T = S_{pp} [R_{\epsilon u}(t, \theta)];$$

$\hat{W}_A$  — матрица двумерной нестационарной передаточной функции многомерного линейного инерционного звена  $A$  (см. рис. 2.6):

$$\hat{W}_A = S_{pp} [W_A(t, \tau)];$$

$\Phi_0$  — столбец нестационарной спектральной характеристики статистической характеристики нелинейности  $\varphi_0$ :

$$\Phi_0({}^1S_{\epsilon}, S_{\epsilon}) = S_p [\varphi_0(t, m_{\epsilon}(t), D_{\epsilon}(t))];$$

$\hat{K}$  — матрица двумерной нестационарной передаточной функции многомерного усилительного звена с коэффициентом передачи в виде статистического коэффициента усиления  $K$ :

$$\hat{K}({}^1S_{\epsilon}, S_{\epsilon}) = S_{pp} [K(t, m_{\epsilon}(t), D_{\epsilon}(t)) \delta(t-\tau)].$$

Исключая из уравнений (3.44), (3.45) матрицу  $S_{\epsilon u}$ , получаем

$$S_{\epsilon} \approx \Xi({}^1S_{\epsilon}, S_{\epsilon}) S_u \Xi^T({}^1S_{\epsilon}, S_{\epsilon}), \quad (3.46)$$

где  $\Xi$  — матрица двумерной нестационарной передаточной функции многомерной замкнутой статистически линеаризованной системы

$$\Xi({}^1S_{\epsilon}, S_{\epsilon}) = [E - \hat{W}_A \hat{K}({}^1S_{\epsilon}, S_{\epsilon})]^{-1}.$$

В результате уравнения (3.43), (3.46) образуют замкнутую систему нелинейных алгебраических уравнений относительно элементов бесконечных блочных матриц  ${}^1S_{\epsilon}$ ,  $S_{\epsilon}$ . "Урезав" же все матрицы в этих уравнениях до желаемого порядка  $L$ , получим приближенную систему из  $Lq[L(q+1)+2]/2$  нелинейных уравнений, которую можно решить, например, методом итераций. После этого значения математического ожидания  $m_{\epsilon}(t)$  и корреляционной функции  $R_{\epsilon}(t, \theta)$  при  $t, \theta \in [t_0, T]$  найдем по формулам обратного спектрального преобразования [35, 36].

## 4. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ

### 4.1. ПРИНЦИПЫ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

#### 4.1.1. Функциональная схема оптимальных систем

Типовая схема оптимальной системы, отражающая информационное взаимодействие ее составляющих, изображена на рис. 4.1. Каждая постановка задачи синтеза оптимального управления должна включать математическое описание всех блоков, входящих в *систему управления*.

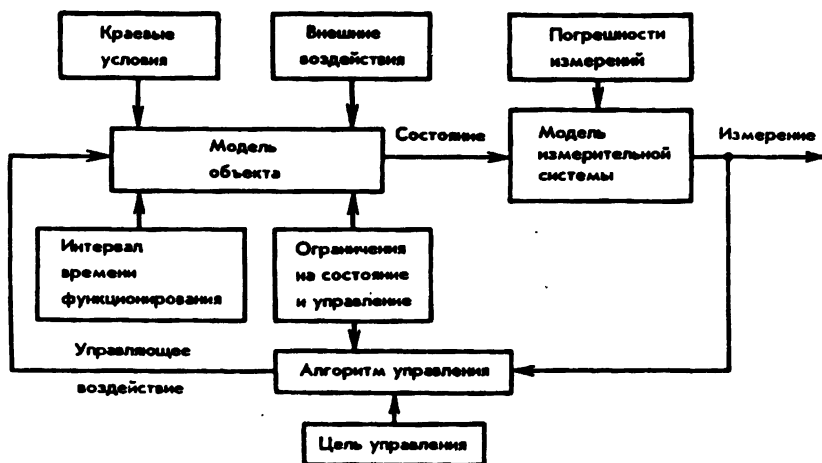


Рис. 4.1

Основные элементы постановки задачи синтеза оптимальной системы:

1. Модель непрерывного управляемого объекта. Описывается, например, с помощью стохастических и обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными. Параметры модели обычно задаются либо статистическими характеристиками,

либо множествами возможных значений. *Состояние* модели может задаваться, например, вектором, объединяющим характерные изменяющиеся параметры объекта, или функцией, описывающей поведение модели в пространстве и времени.

2. Краевые (начальные и конечные) условия. Они могут быть детерминированными, определяться своими статистическими характеристиками или описываться множествами возможных значений.

3. Внешние воздействия. Как правило, описываются статистическими характеристиками или множествами возможных значений.

4. Интервал времени функционирования системы. Может быть заданным конечным или заданным полубесконечным, случайным, подлежащим наилучшему выбору и т.д.

5. Ограничения на состояние и управление. Задаются с помощью описания множеств их допустимых значений.

6. Модель измерительной системы. Описывается функциями или операторами состояния, стохастическими дифференциальными уравнениями. Входом модели является состояние, выходом — значения измерений.

7. Погрешности измерения. Как правило, описываются статистическими характеристиками или множествами возможных значений.

8. Алгоритм управления (определение характера использования информации об измерениях, способа выработки и приложения управляющих воздействий). Задается обычно с помощью описания множества допустимых управлений. Алгоритм управления вырабатывает управляющие воздействия по получаемой информации об измерениях. Таким образом, при построении оптимальной системы управления предполагается применение принципа обратной связи.

9. Цель управления. Как правило, цель управления математически описывается некоторым критерием качества и отражает требования, предъявляемые проектировщиком к *оптимальной системе* (наилучшей с точки зрения выбранного критерия).

Схема, изображенная на рис. 4.1, отражает процесс управления непрерывным объектом *при неполной информации*, так как оптимальное управление строится на основе информации об измерениях состояния при наличии погрешностей. Оптимальные непрерывные системы управления по способу получения и обработки информации делятся на две группы.

1. *Непрерывные системы при неполной непрерывно поступающей информации*, в которых управляющее воздействие формируется на основе всей накапливаемой информации об измерениях. В этих системах обычно решается задача определения характеристик состояния, в частности оценок состояния, по поступающей информации об измерениях. Далее они используются непосредственно при выработке управляющего воздействия. Последнее, в свою очередь, влияет на процедуру обработки измерений. Разновидностью данной задачи является задача, в которой обрабатывается информация на ограни-

ченном интервале времени, предшествующем моменту выработки управляющего воздействия.

Частным случаем систем в этой группе являются *оптимальные системы без накопления информации*, где при выработке управляющего воздействия используются только текущие значения измерений, а информация о предыдущих измерениях не учитывается. В общем случае в системах без накопления информации оптимальное управляющее воздействие формируется по результатам измерения части координат вектора состояния, т.е. по *неполному вектору состояния*. В предельных случаях информированности о векторе состояния оптимальное управление вырабатывается либо *при полной информации о векторе состояния*, либо *при отсутствии текущей информации* (здесь может учитываться априорная информация об элементах задачи).

2. *Непрерывные системы при неполной дискретно поступающей информации*, в которых измерения производятся в дискретные моменты времени на интервале функционирования. Причем могут использоваться все данные или только полученные в  $N$  последних точках, где  $N$  — заданное число. Этот класс систем рассмотрен, например, в [24].

#### 4.1.2. Принцип расширения

При формулировке и доказательстве достаточных условий оптимальности используется принцип расширения. Поясним его, следуя [6,15], на примере решения общей задачи оптимизации.

Пусть на множестве  $\mathcal{D}$  допустимых элементов  $d$  задан функционал качества процесса управления  $I(d)$ .

Требуется найти минимум функционала  $I(d)$  на множестве  $\mathcal{D}$ :

$$I(d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}} I(d).$$

Предполагается, что минимум существует.

*Идея принципа расширения* заключается в переходе к более простой, чем исходная, задаче, решение которой при определенных условиях является решением исходной задачи. Функционал  $I(d)$  определяется на некотором более широком множестве  $V$  так, что его наименьшее значение лежит по-прежнему в  $\mathcal{D}$ . При выполнении этого условия далее решается задача поиска минимума функционала  $I(d)$  на множестве  $V$ .

**Теорема 4.1.** Пусть имеется функционал  $I(d)$ , определенный на множестве  $\mathcal{D}$ , а на множестве  $V$ ,  $\mathcal{D} \subset V$ , задан функционал  $L(d)$ , причем  $\forall d \in \mathcal{D}$  справедливо равенство  $L(d) = I(d)$ . Для того чтобы на элементе  $d^* \in \mathcal{D}$  достигался минимум функционала  $I(d)$ , достаточно, чтобы на элементе  $d^*$  достигался минимум функционала  $L(d)$  на множестве  $V$ .

Доказательство. Пусть на элементе  $d^* \in \mathcal{D}$  достигается минимум функционала  $L(d)$  на  $V$ , т.е.  $L(d^*) \leq L(d) \forall d \in V$ . Так как  $\mathcal{D} \subset V$  и  $d^* \in \mathcal{D}$ , то  $L(d^*) \leq L(d) \forall d \in \mathcal{D}$ . Но согласно условию на множестве  $\mathcal{D}$  справедливо равенство  $L(d) = I(d)$ . Поэтому  $I(d^*) \leq I(d) \forall d \in \mathcal{D}$ . Последнее неравенство соответствует определению минимума функционала  $I(d)$  на множестве  $\mathcal{D}$ .

Замечание. Применение принципа расширения связано с поиском двух элементов новой задачи: множества  $V$  и функционала  $L(d)$ . При этом существуют три возможности:

- 1) задать множество  $V$  и искать функционал  $L(d)$ ;
- 2) задать функционал  $L(d)$  и искать множество  $V$ ;
- 3) искать множество  $V$  и функционал  $L(d)$  вместе.

С применением всех трех способов к решению различных задач оптимального управления можно ознакомиться в [6,15,24]. Далее будем использовать только первый способ.

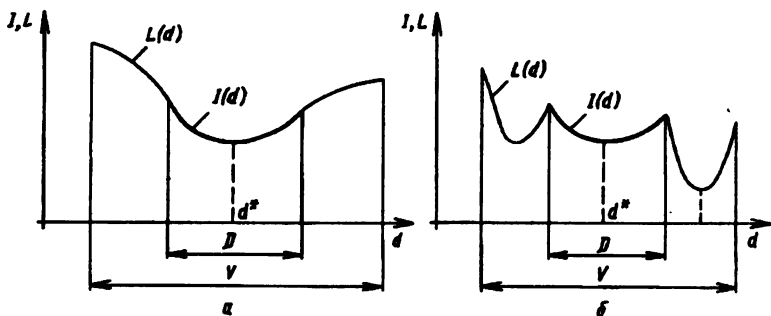


Рис. 4.2

На рис. 4.2,а изображен удачный вариант доопределения, а на рис. 4.2,б — неудачный, где минимум функционала  $L(d)$  не лежит в множестве  $\mathcal{D}$  и потому не является решением исходной задачи.

## 4.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть поведение модели объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (4.1)$$

где  $x$  — вектор состояния системы,  $x = (x^1, x^2)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^1 = (x_1, \dots, x_m)^T$ ,  $x^2 = (x_{m+1}, \dots, x_n)^T$ ,  $0 \leq m \leq n$  (предположим, что о компонентах векто-

ра  $x^1 \in \mathbb{R}^m$  известна текущая информация, а о компонентах вектора  $x^2 \in \mathbb{R}^{n-m}$  она отсутствует);  $u$  — вектор управления,  $u \in U \subseteq \mathbb{R}^q$ ,  $U$  — некоторое заданное множество;  $t$  — время,  $t \in T' = [t_0, t_1] = T \cup \{t_0\} \cup \{t_1\}$ ,  $T'$  — интервал времени функционирования системы, моменты времени  $t_0$  и  $t_1$  заданы, внешние воздействия на объект управления отсутствуют, функция  $f(t, x, u) : T' \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Обозначим:  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $V_1 = \mathbb{R}^m$ ,  $V_2 = \mathbb{R}^{n-m}$ ;  $Q = (t_0, t_1) \times \mathbb{R}^n$ ,  $Q' = [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$ .

Начальные условия  $x(t_0)$  заданы множеством  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , размерность которого равна  $m$ , т.е.

$$x(t_0) \in \Omega = \left\{ x \mid x^2 = y_0(x^1), x^1 \in \mathbb{R}^m = V_1 \right\}, \quad (4.2)$$

где  $y_0(x^1)$ ,  $j = m+1, \dots, n$ , — заданные непрерывно дифференцируемые функции;  $0 \leq m \leq n$ .

При  $m=0$  множество  $\Omega$  является точкой, а при  $m=n$  совпадает с множеством  $\mathbb{R}^n$ . Условия на вектор состояния на правом конце интервала времени  $T'$  не заданы.

Предполагается, что при управлении используется информация только о времени и о текущей величине вектора  $x^1$ , т.е. управление  $u(t)$ , применяемое в каждый момент времени  $t \in T'$ , имеет вид управления  $u(t) = u(t, x^1(t))$  с неполной обратной связью по вектору состояния (рис. 4.3).

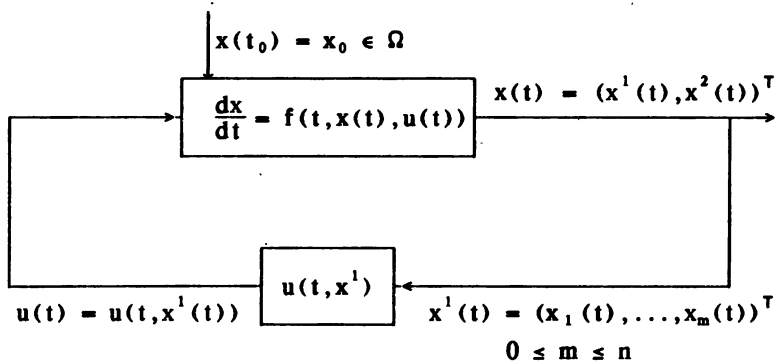


Рис. 4.3.

Множество допустимых управлений  $\gamma_m$  образуют функции  $u(t, x^1) : T' \times V_1 \rightarrow U$  такие, что функции  $f_i(t, x, u(t, x^1))$ ,  $i = 1, \dots, n$ , определены на  $Q'$ , непрерывны вместе с частными производными по  $x$ , кусочно-непрерывны по  $t$ . При этом управление  $u(t) = u(t, x^1(t))$  кусочно-непрерывно по  $t$ , а в точках разрыва значение управления определяется как предел справа.



Определим множество допустимых процессов  $\mathcal{D}$  как множество пар  $d = (x(\cdot), u(\cdot))$ , удовлетворяющих уравнению (4.1) с начальным условием (4.2) почти всюду на  $T'$ , где  $\forall t \in T' \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in U$ ; функции  $x(\cdot)$  непрерывны и кусочно-дифференцируемы, а  $u(\cdot)$  кусочно-непрерывны.

На множестве  $\mathcal{D}$  определим функционал качества управления

$$I(x_0, d) = \int_0^1 f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(x(t_1)), \quad (4.3)$$

где  $f^0(t, x, u)$ ,  $F(x)$  — заданные непрерывно дифференцируемые функции.

**Задача 1.** Требуется найти такую пару  $d^* = (x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathcal{D}$ , что

$$I(x_0, d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}} I(x_0, d). \quad (4.4)$$

Задача 1 в общем случае называется *задачей Больца*, в случае, когда в функционале (4.3)  $F(x(t_1)) \equiv 0$  (отсутствует так называемый терминальный член) — *задачей Лагранжа*, а если  $f^0(t, x(t), u(t)) \equiv 0$  (отсутствует интегральный член) — *задачей Майера*. Искомые функции  $x^*(\cdot)$  и  $u^*(\cdot)$  называются соответственно *оптимальной траекторией* и *оптимальным управлением*.

**Задача 2.** Требуется найти такую функцию  $u^*(t, x^1) \in \gamma_m$ , что

$$I(x_0, d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}} I(x_0, d) \quad \forall x_0 \in \Omega, \quad (4.5)$$

где  $d^* = (x^*(\cdot), u^*(\cdot) = u^*(\cdot, x^1(\cdot)))$ .

В задаче 2 множество  $\mathcal{D}$  зависит от начального условия  $x_0$ . С целью сокращения обозначений этот факт явно не указан, но везде далее учитывается.

Функция  $u^*(t, x^1) \in \gamma_m$  называется *оптимальной синтезирующей функцией на множестве  $\Omega$* . Для каждого начального условия из множества  $\Omega$  она порождает оптимальную пару в задаче 1, т.е. оптимальную траекторию  $x^*(\cdot)$  и оптимальное программное управление  $u^*(\cdot)$ . Предполагается, что минимум в (4.4), (4.5) и функция  $u^*(t, x^1)$  существуют.

Подчеркнем, что число используемых в управлении координат вектора состояния совпадает с размерностью множества начальных условий  $\Omega$ . При  $m=0$  множество  $\Omega$  является точкой  $x_0$ , для которой ищется оптимальное программное управление  $u^*(t)$ , а при  $m=n$  множество  $\Omega$  совпадает с  $n$ -мерным евклидовым пространством и ищется оптимальное управление с полной обратной связью по вектору состояния  $u^*(t, x)$ .

### 4.3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Поведение траекторий уравнения (4.1), исходящих из множества  $\Omega$ , предлагается описывать с помощью вектор-функции  $y(t, x^1): T' \times V_1 \rightarrow V_2$ , удовлетворяющей системе уравнений:

$$\frac{\partial y_i(t, x^1)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial y_i(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x^1, y(t, x^1), u(t, x^1)) +$$

$$+ f_j(t, x^1, y(t, x^1), u(t, x^1)), \quad j = m+1, \dots, n, \quad (4.6)$$

$$y_j(t_0, x^1) = y_0(x^1), \quad j = m+1, \dots, n. \quad (4.7)$$

Уравнениями характеристик этой системы являются уравнения для координат вектора состояния, образующие (4.1):

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x^1(t), y(t), u(t, x^1(t))), \quad i = 1, \dots, m, \quad x^1(t_0) = x_0^1 \in R^m,$$

$$\dot{y}_j(t) = f_j(t, x^1(t), y(t), u(t, x^1(t))), \quad j = m+1, \dots, n, \quad y(t_0) = y_0(x_0^1).$$

Решение системы (4.6), (4.7) устанавливает связь:  $x^2 = -y(t, x^1) \quad \forall (t, x^1) \in T' \times V_1$ . Предполагается, что размерность множества, описываемого соотношением  $x^2 = -y(t, x^1)$ , равна  $m \quad \forall t \in T'$ . Для получения траекторий, исходящих из множества  $\Omega$ , требуется решить систему (4.6), (4.7) при известном управлении  $u(t, x^1)$ , а затем систему

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x^1(t), y(t, x^1(t)), u(t, x^1(t))), \quad i = 1, \dots, m, \quad \forall x^1(t_0) \in V_1.$$

Если значение вектора  $x^1(t)$  известно, то можно найти текущее значение вектора состояния  $x: x(t) = (x^1(t), y(t, x^1(t)))^T$ .

Введем в рассмотрение множество функций  $\varphi(t, x): T' \times V \rightarrow R^1$ , непрерывно дифференцируемых всюду, за исключением конечного числа сечений  $T' \times V$  при фиксированных  $t$ , и конструкции [6,15]:

$$R(t, x, u) = \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u),$$

$$G(t, x) = \varphi(t, x) + F(x). \quad (4.8)$$

Применим принцип расширения (см. разд. 4.1) с заданием множества  $V$  и поиском удачного доопределения функционала  $I$  на этом множестве.

Определим множество  $V$  пар  $d = (x(\cdot), u(\cdot))$ , где элементы пар по сравнению с входящими в  $\mathcal{D}$  необязательно связаны дифференциальным уравнением (4.1);  $x(t_0) = x_0 \in \Omega$ ; допускаются разрывы первого рода функций  $x(\cdot)$  на  $T'$ . Таким образом, множество

$\mathcal{D} \subset V$  — расширение построено. Доопределение функционала  $I$  на множестве  $V$  производится с помощью задания функции  $\varphi(t, x)$ .

На множестве  $V$  определим функционал

$$L(x_0, d) = G(t_1, x(t_1)) - \int_{t_0}^{t_1} R(t, x(t), u(t)) dt - \varphi(t_0, x_0). \quad (4.9)$$

На множестве  $\mathcal{D} \subset V$ , где между функциями  $x(\cdot)$ ,  $u(\cdot)$  существует дифференциальная связь, с учетом (4.1), (4.8) и равенства  $x(t_0) = x_0$  справедливо

$$R(t, x(t), u(t)) = \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial x_i} f_i(t, x(t), u(t)) - \\ - f^0(t, x(t), u(t)) = \frac{d\varphi(t, x(t))}{dt} - f^0(t, x(t), u(t)),$$

и поэтому

$$L(x_0, d) = \varphi(t_1, x(t_1)) + F(x(t_1)) - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{d\varphi(t, x(t))}{dt} - f^0(t, x(t), u(t)) \right] dt - \varphi(t_0, x_0) = I(x_0, d).$$

Таким образом, на множестве  $V$  функционалы  $I(x_0, d)$  и  $L(x_0, d)$  совпадают.

Поведение функционала  $L(x_0, d)$  на множестве  $V \setminus \mathcal{D}$  полностью определяется выбором функции  $\varphi(t, x)$ . Перейдем к формулировке и доказательству достаточных условий оптимальности.

Предположим, что существует множество  $\Phi$  функций  $\varphi(t, x)$ , для которых конструкции (4.8) достигают экстремальных значений:

$$r(t) = \max_{x^2 \in B_2} \max_{u \in U} R(t, x, u) \quad \forall (t, x^1) \in T \times B_1, \quad (4.10)$$

$$g = \min_{x^2 \in B_2} G(t, x) \quad \forall x^1 \in B_1, \quad (4.11)$$

где  $r(t)$  — кусочно-непрерывная функция на множестве  $T$ .

Пусть имеется управление  $u^*(t, x^1) \in \mathcal{U}_m$  и соответствующее решение  $y^*(t, x^1)$  системы (4.6), (4.7).

**Теорема 4.2** (достаточные условия оптимальности в задаче 2). Если существует такая функция  $\varphi(t, x) \in \Phi$ , что

$$1) R(t, x^1, y^*(t, x^1), u^*(t, x^1)) = r(t) \text{ почти всюду на } T, \quad \forall x^1 \in B_1;$$

$$2) G(t_1, x^1, y^*(t_1, x^1)) = g \quad \forall x^1 \in B_1,$$

то управление  $u^*(t, x^1)$  является оптимальной синтезирующей функцией на множестве  $\Omega$ .

**Замечание.** Функцию  $\gamma(t)$  и величину  $g$  можно без ограничения общности положить равными нулю. Тогда минимальное значение функционала определяется формулой

$$\min_{d \in \mathcal{D}} L(x_0, d) = -\varphi(t_0, x_0) \quad \forall x_0 \in \Omega. \quad (4.12)$$

**Доказательство.** Воспользуемся принципом расширения. Пусть имеется функция  $\varphi(t, x) \in \Phi$ . Найдем минимум функционала (4.9) на множестве  $V$ . Его третий член при заданной функции  $\varphi(t, x)$  и известном начальном условии  $x_0$  вычисляется и в плане минимизации не рассматривается. Операции нахождения экстремума в первых двух слагаемых могут быть выполнены по отдельности благодаря свойствам функций  $x(\cdot)$ ,  $u(\cdot)$ , образующих пары  $d \in V$ .

Так как для функции  $\varphi(t, x) \in \Phi$  равенства (4.10), (4.11) выполняются, они могут быть переписаны в виде

$$\gamma(t) = \max_{x \in B} \max_{u \in U} R(t, x, u), \quad g = \min_{x \in B} G(t_1, x),$$

поскольку правые части в (4.10), (4.11) не зависят от  $x^1$ . Тогда

$$\min_{d \in V} L(x_0, d) = g - \int_{t_0}^{t_1} \gamma(t) dt - \varphi(t_0, x_0). \quad (4.13)$$

Рассмотрим произвольное начальное условие  $x_0^* \in \Omega$ . Решая уравнение (4.1) с начальным условием  $x(t_0) = x_0^*$  и управлением  $u^*(t, x)$ , можно получить пару  $d^* = (x^*(\cdot), u^*(\cdot) = u^*(\cdot, x^*(\cdot))) \in \mathcal{D}$ .

Та же пара может быть получена по имеющимся функциям  $u^*(t, x^1)$ ,  $u^*(t, x)$  при решении системы

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x^1(t), y^*(t, x^1(t)), u^*(t, x^1(t))), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_i(t_0) = x_{0i}^*, \quad i = 1, \dots, m.$$

В результате имеем  $x^{1*}(\cdot)$  и пару  $d^* = (x^*(\cdot) = (x^{1*}(\cdot), x^{2*}(\cdot) = -y^*(\cdot, x^{1*}(\cdot)))^T, u^*(\cdot) = u^*(\cdot, x^{1*}(\cdot))) \in \mathcal{D}$ . Так как условия 1, 2 теоремы выполняются  $\forall x^1 \in B_1$ , то они справедливы и для  $x^{1*}(t)$ , т.е.

$$R(t, x^*(t), u^*(t)) = \gamma(t), \quad t \in T; \quad G(t_1, x^*(t_1)) = g.$$

Из этих равенств и из (4.9), (4.13) следует, что

$$L(x_0^*, d^*) = \min_{d \in V} L(x_0^*, d), \quad \text{т.е. } L(x_0^*, d^*) \leq L(x_0^*, d) \quad \forall d \in V.$$

Поскольку  $d^* \in \mathcal{D} \subset V$ , то  $L(x_0^*, d^*) \leq L(x_0^*, d) \quad \forall d \in \mathcal{D}$ . Но на множестве  $\mathcal{D}$  справедливо равенство  $L(x_0^*, d) = I(x_0^*, d)$ . Поэтому

$I(x_0^*, d^*) \leq I(x_0^*, d) \quad \forall d \in \mathcal{D}$ , что соответствует определению минимума функционала (4.3). Доказательство теоремы следует из произвольности начального условия  $x_0^* \in \Omega$ .

Поясним замечание к теореме 4.2. Если существует функция  $\varphi(t, x) \in \Phi$ , удовлетворяющая условиям 1,2 теоремы с  $r(t) \equiv 0$ ,  $g \neq 0$ , то, применяя прямую подстановку в (4.10), (4.11), можно найти, что функция

$$\varphi'(t, x) = \varphi(t, x) + \int_t^{t_1} r(\tau) d\tau - g$$

также удовлетворяет этим условиям при  $r'(t) \equiv 0$ ,  $g' = 0$ . При этом из выражения для определения минимума функционала  $L(x_0, d)$  и из доказанной теоремы следует

$$\min_{d \in \mathcal{V}} L(x_0, d) = \min_{d \in \mathcal{D}} I(x_0, d) = -\varphi'(t_0, x_0) \quad \forall x_0 \in \Omega.$$

#### 4.4. СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Будем искать функцию  $\varphi(t, x)$  в виде

$$\varphi(t, x) = W(t, x^1) + \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t, x^1) x_j, \quad (4.14)$$

где  $W(t, x^1)$ ,  $\psi_j(t, x^1)$ ,  $j = m+1, \dots, n$ , — неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставляя (4.14) в (4.8), получаем

$$\begin{aligned} R(t, x, u) &= \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial t} + \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial \psi_j(t, x^1)}{\partial t} x_j + \sum_{i=1}^m \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + \\ &+ \sum_{j=m+1}^n x_j \sum_{i=1}^m \frac{\partial \psi_j(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t, x^1) f_j(t, x, u) - f^0(t, x, u) = \\ &= \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial t} + \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial \psi_j(t, x^1)}{\partial t} x_j + H(t, x, u), \quad (4.15) \end{aligned}$$

$$G(t, x) = W(t, x^1) + \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t, x^1) x_j + F(x).$$

Здесь функция

$$H(t, x, u) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + \sum_{j=m+1}^n x_j \sum_{i=1}^m \frac{\partial \psi_i(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t, x^1) f_j(t, x, u) - f^0(t, x, u).$$

Определяя максимум в (4.10) с учетом условия 1 теоремы 4.2 и (4.15), находим

$$H'(t, x^1, y^*(t, x^1)) = \max_{u \in U} H(t, x^1, y^*(t, x^1), u). \quad (4.16)$$

Предположим, что функции в (4.15) непрерывно дифференцируемы относительно  $x^2$ . Поэтому можно применить необходимые условия безусловного экстремума для определения максимума и минимума в (4.10), (4.11) по  $x^2$  с учетом условий 1, 2 теоремы 4.2:

$$\frac{\partial R(t, x^1, y^*(t, x^1), u^*(t, x^1))}{\partial x_j} = 0, \quad j = m+1, \dots, n,$$

$$\frac{\partial G(x^1, y^*(t_1, x^1))}{\partial x_j} = 0, \quad j = m+1, \dots, n.$$

Отсюда с учетом (4.15) имеем

$$\frac{\partial \psi_i(t, x^1)}{\partial t} = - \frac{\partial H'(t, x^1, y^*(t, x^1))}{\partial x_j}, \quad j = m+1, \dots, n, \quad \forall (t, x^1) \in T \times B_1,$$

$$\psi_j(t_1, x^1) = - \frac{\partial F(x^1, y^*(t_1, x^1))}{\partial x_j}, \quad j = m+1, \dots, n, \quad \forall x^1 \in B_1.$$

Положив в (4.10), (4.11)  $r(t) \equiv 0$ ,  $g = 0$ , с учетом (4.15) и последних соотношений получим

$$\max_{u \in U} \left\{ \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial t} - \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial H'(t, x^1, y^*(t, x^1))}{\partial x_j} y_j^*(t, x^1) + H(t, x^1, y^*(t, x^1), u) \right\} = 0 \quad \forall (t, x^1) \in T \times B_1,$$

$$W(t_1, x^1) = \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial F(x^1, y^*(t_1, x^1))}{\partial x_j} y_j^*(t_1, x^1) - F(x^1, y^*(t_1, x^1)) \quad \forall x^1 \in B_1,$$

где  $H'(t, x^1, y^*(t, x^1))$  определяется выражением (4.16), а функция  $y^*(t, x^1)$  является решением системы (4.6), (4.7) с управлением  $u^*(t, x^1)$ , структура которого находится из условия

$$u^*(t, x^1) = u^*(t, x^1, y^*(t, x^1)) = \arg \max_{u \in U} H(t, x^1, y^*(t, x^1), u).$$

Таким образом, для определения оптимальной синтезирующей функции на множестве  $\Omega$  требуется решить систему из  $2(n-m)+1$  уравнений в частных производных первого порядка с  $2(n-m)+1$  краевыми условиями на концах интервала  $T'$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^*_j(t, x^1)}{\partial t} &= - \sum_{i=1}^m \frac{\partial y^*_j(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x^1, y^*(t, x^1), u(t, x^1)) + \\ &+ f_j(t, x^1, y^*(t, x^1), u(t, x^1)), \quad j = m+1, \dots, n, \\ y^*_j(t_0, x^1) &= y_{0j}(x^1), \quad j = m+1, \dots, n, \\ \max_{u \in U} \left\{ \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial t} - \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial H'(t, x^1, y^*(t, x^1))}{\partial x_j} y^*_j(t, x^1) + \right. \\ &\left. + H(t, x^1, y^*(t, x^1), u) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \psi_j(t, x^1)}{\partial t} = - \frac{\partial H'(t, x^1, y^*(t, x^1))}{\partial x_j}, \quad j = m+1, \dots, n,$$

$$\psi_j(t_1, x^1) = - \frac{\partial F(x^1, y^*(t_1, x^1))}{\partial x_j}, \quad j = m+1, \dots, n,$$

$$W(t, x^1) = \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial F(x^1, y^*(t_1, x^1))}{\partial x_j} y^*_j(t, x^1) - F(x^1, y^*(t, x^1)),$$

где

$$H'(t, x^1, y^*(t, x^1)) = \max_{u \in U} H(t, x^1, y^*(t, x^1), u).$$

Минимальное значение функционала (4.3) можно вычислить по формуле (4.12) с учетом (4.14):

$$\min_{d \in \mathcal{D}} I(x, d) = -W(t_0, x^1) - \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t_0, x^1) x_j \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.18)$$

**Замечание.** Четвертое и пятое соотношения в (4.17) — следствия применения необходимых условий экстремума соответствующих функций. Поэтому, если найдено решение полученной системы, то это еще не означает, что управление  $u^*(t, x^1)$  оптимальное. Однако уравнения системы еще не задают до конца функцию  $\varphi(t, x)$ , используемую в формулировке теоремы 4.2, определяя лишь ее первую производную по координатам вектора  $x^1$  и оставляя произвол для ее доопределения.

*Методика применения оптимальных синтезирующих функций* состоит из двух этапов.

Первый этап — *нахождение оптимальной синтезирующей функции*  $u^*(t, x^1)$ .

1. Для рассматриваемой постановки задачи записать систему (4.17).

2. Найти максимум функции  $H(t, x^1, u^*(t, x^1), u)$  по управлению.

В результате определяется структура оптимальной синтезирующей функции  $u^*(t, x^1)$ , включающая в себя функции  $W(t, x^1)$ ,  $\psi_j(t, x^1)$  и их производные.

3. Полученные выражения подставить в систему (4.17).

4. В результате решения системы определить явный вид функций  $u(t, x^1)$ ,  $W(t, x^1)$ ,  $\psi_j(t, x^1)$  и оптимальной синтезирующей функции  $u^*(t, x^1)$ , структура которой найдена в п.2. Получено решение задачи 2.

5. Определить минимальное значение функционала качества управления по формуле (4.18).

Второй этап — *применение оптимальной синтезирующей функции*  $u^*(t, x^1)$  для управления детерминированной системой (4.1) (нахождение решения задачи 1 для фиксированного начального условия из множества  $\Omega$ ).

1. Задать начальное условие  $x(t_0) \in \Omega$ .

2. Решить уравнение (4.1) совместно с найденной на предыдущем этапе оптимальной синтезирующей функцией  $u^*(t, x^1)$  для начального условия  $x(t_0) \in \Omega$ . В результате определяется пара  $d^* = (x^*(\cdot), u^*(\cdot) = u^*(\cdot, x^{1*}(\cdot)))$ , т.е. оптимальная траектория и оптимальное управление — решение задачи 1. Этот процесс функционирования оптимальной системы с неполной обратной связью отражается структурной схемой, изображенной на рис. 4.3.

3. Перейти к п.1 данного этапа для задания нового начального условия.



## 4.5. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ИНФОРМИРОВАННОСТИ О ВЕКТОРЕ СОСТОЯНИЯ

### 4.5.1. Принцип максимума

Рассмотрим различные способы задания множества начальных условий  $\Omega$ , а следовательно, методы синтеза оптимального управления в предельных случаях информированности. При этом по-прежнему рассматриваются задачи с заданным временем окончания процесса и свободным правым концом траектории.

При  $m=0$  множество  $\Omega$  является точкой  $x(t_0) = x_0$ . Ищется оптимальное программное управление  $u^*(t)$ . Соотношения (4.17) для общего случая преобразуются к соответствующим *принципу максимума* [6,15,21,30] :

$$\dot{x}_j^*(t) = f_j(t, x^*(t), u(t)), \quad x_j^*(t_0) = x_{0j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.19)$$

$$\dot{\psi}_j(t) = - \frac{\partial H'(t, x^*(t))}{\partial x_j}, \quad \psi_j(t_1) = - \frac{\partial F(x^*(t_1))}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

где

$$H(t, x, u) = \sum_{j=1}^n \psi_j(t) f_j(t, x, u) - f^0(t, x, u);$$

$$H'(t, x^*(t)) = \max_{u \in U} H(t, x^*(t), u) = H(t, x^*(t), u^*(t));$$

$\psi_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , — вспомогательные переменные.

Функция  $W(t)$  определяется решением уравнения

$$\frac{dW(t)}{dt} = -H'(t, x^*(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H'(t, x^*(t))}{\partial x_j} x_j^*(t)$$

с конечным условием

$$W(t_1) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(x^*(t_1))}{\partial x_j} x_j^*(t_1) - F(x^*(t_1)).$$

Система (4.19) представляет собой *двухточечную краевую задачу* для  $2n$  обыкновенных дифференциальных уравнений с  $2n$  крайевыми условиями. Здесь  $n$  крайевых условий задано на левом конце интервала  $T'$ , а остальные определены на правом конце, т.е. в двух точках. Функция  $H(t, x, u)$  называется *гамильтонианом*. После решения системы (4.19) можно проинтегрировать уравнение для функции  $W(\cdot)$  и вычислить *минимальное значение функционала* (4.3) по формуле (4.12) :

$$\min_{d \in \mathcal{D}} I(x_0, d) = -W(t_0) - \sum_{j=1}^n \psi_j(t_0) x_{0j}.$$

Известно [21], что в общем случае принцип максимума является необходимым условием экстремума в задаче 1, а для линейных систем управления (4.1) с квадратичным критерием качества одновременно необходимым и достаточным.

Искомое оптимальное программное управление  $u^*(\cdot)$  в общем случае обеспечивает минимум функционала качества управления только для заданного начального условия  $x_0$ . Для другого начального условия требуется выполнить процедуру принципа максимума заново.

**Пример 4.1.** Даны модель объекта управления

$$\dot{x} = x(t) + u(t), \quad x(0) = 0,$$

где  $x \in \mathbb{R}$ ;  $u \in \mathbb{R}$ ;  $t \in [0, 1]$ , и функционал

$$I = \int_0^1 u^2(t) dt - x(1).$$

Требуется найти оптимальную пару  $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ , на которой достигается минимум функционала.

□ Рассмотрим порядок применения принципа максимума. Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем:  $f(t, x, u) = x + u$ ;  $f'(t, x, u) = u^2$ ,  $F(x) = -x$ . Решается задача *Больца*.

1. Составим гамильтониан:  $H(t, x, u) = \psi(t) [x + u] - u^2$ .

2. Найдем максимум гамильтониана по управлению. Так как ограничения на управление отсутствуют, можно применить необходимые условия безусловного экстремума:  $\frac{\partial H(t, x, u)}{\partial u} = \psi(t) - 2u = 0$ .

Отсюда  $u^*(t) = \psi(t)/2$ .

Найденное управление обеспечивает максимум функции  $H(t, x, u)$  по управлению, так как удовлетворяются достаточные условия экстремума

$$\frac{\partial^2 H(t, x, u)}{\partial u^2} = -2 < 0.$$

3. Выпишем уравнения системы (4.19) с учетом результата п.2.:

$$\dot{x} = x(t) + u^*(t) = x(t) + \psi(t)/2, \quad x(0) = 0,$$

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u^*(t))}{\partial x} = -\psi(t), \quad \psi(1) = -\frac{\partial F(x(1))}{\partial x} = 1.$$

4. Решим полученную двухточечную краевую задачу. Из второго

уравнения с конечным условием имеем  $\psi(t) = e^{(1-t)}$ . Поэтому оптимальное управление  $u^*(t) = e^{(1-t)}/2$ . Решая первое уравнение системы с начальным условием, находим оптимальную траекторию  $x^*(t) = [e^{1-t} - e^{-t}]/4$ . ■

#### 4.5.2. Уравнение Беллмана

Если  $m = n$ , то множество  $\Omega = \mathbb{R}^n$  и ищется оптимальное управление с полной обратной связью  $u^*(t, x)$ .

Система (4.17) для общего случая преобразуется к уравнению Беллмана для детерминированных систем [6,15]:

$$\max_{u \in U} \left\{ \frac{\partial W(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right\} = 0, \quad (4.20)$$

$$W(t, x) = -F(x).$$

При этом минимальное значение функционала (4.3)

$$\min_{d \in \mathcal{D}} I(x_0, d) = -W(t_0, x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Структура оптимальной синтезирующей функции определяется в результате поиска максимума в (4.20) по управлению. Искомое управление  $u^*(t, x)$  обычно выражается через производные функции  $W(t, x)$ . После подстановки найденной структуры оптимальной синтезирующей функции обратно в (4.20) проблема сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка.

Если положить  $S(t, x) = -W(t, x)$ , то, используя равенство  $\max f(x) = -\min [-f(x)]$ , можно переписать уравнение Беллмана и краевое условие (4.20) в эквивалентной форме [1,21,30,44]:

$$\min_{u \in U} \left\{ \frac{\partial S(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + f^0(t, x, u) \right\} = 0,$$

$$S(t, x) = F(x).$$

**Пример 4.2.** Даны модель объекта управления

$$\dot{x} = u(t),$$

где  $x \in \mathbb{R}$ ;  $u \in \mathbb{R}$ ;  $t \in [0, 1]$ , и функционал

$$I(x(0), d) = (1/2) \int_0^1 u^2(t) dt + (1/2)x^2(1).$$

Требуется найти оптимальную синтезирующую функцию  $u^*(t, x)$ .

□ Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем  $f(t, x, u) = u$ ,  $f^0(t, x, u) = (1/2)u^2$ ,  $F(x) = (1/2)x^2$ . Решается задача Больца.

1. Выпишем уравнение Беллмана (4.20):

$$\max_u \left\{ \frac{\partial W(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial W(t, x)}{\partial x} u - (1/2)u^2 \right\} = 0, \quad W(1, x) = - (1/2)x^2.$$

2. Найдем структуру оптимального управления из условия максимума выражения в фигурных скобках. Применяя необходимое условие безусловного экстремума  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial u} = 0$ , получаем  $u^*(t, x) = \frac{\partial W(t, x)}{\partial x}$ .

3. Подставим найденную структуру оптимального управления в уравнение Беллмана:

$$\frac{\partial W(t, x)}{\partial t} + (1/2) \left[ \frac{\partial W(t, x)}{\partial x} \right]^2 = 0, \quad W(1, x) = - (1/2)x^2.$$

4. Решение уравнения будем искать в виде

$$W(t, x) = (1/2)K_2(t)x^2.$$

Подставляя его в п.3 и приравнявая коэффициенты при  $x^2$  нулю, получаем  $K_2(t) = -K_2(t)^2$ ,  $K_2(1) = -1$ . Отсюда  $K_2(t) = 1/(t-2)$ , а исконая оптимальная синтезирующая функция  $u^*(t, x) = K_2(t)x = x/(t-2)$ .

5. Покажем, как оптимальная синтезирующая функция  $u^*(t, x)$  порождает оптимальные пары  $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$  для любого начального условия. Действительно, пусть управление  $u^*(t, x)$  используется в схеме, изображенной на рис. 4.3. Тогда запишем уравнение, описывающее поведение замкнутой системы:

$$\dot{x} = \frac{x}{t-2}, \quad x(0) = x_0.$$

Отсюда

$$x^*(t) = x_0(2-t)/2,$$

$$u^*(t) = u^*(t, x^*(t)) = \frac{1}{2(t-2)} x_0(2-t) = -\frac{x_0}{2}.$$

Таким образом, для любого  $x_0$  можно получить соответствующую пару: оптимальную траекторию и оптимальное управление.

6. Применим принцип максимума для непосредственного определения оптимального программного управления и траектории:

а) составим гамильтониан:  $H(t, x, u) = \psi(t)u - (1/2)u^2$ ;

б) найдем максимум гамильтониана по управлению. Так как ограничения на управление отсутствуют, можно применить необходимые условия безусловного экстремума:

$$\frac{\partial H(t, x, u)}{\partial u} = \psi(t) - u = 0, \text{ откуда } u^*(t) = \psi(t).$$

Найденное управление обеспечивает максимум функции  $H(t, x, u)$  по управлению, так как удовлетворяются достаточные условия экстремума

$$\frac{\partial^2 H(t, x, u)}{\partial u^2} = -1 < 0;$$

в) выпишем уравнения системы (4.19) с учетом результата п.2:

$$\dot{x} = u^*(t) - \psi(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u^*(t))}{\partial x} = 0, \quad \psi(1) = -\frac{\partial F(x(1))}{\partial x} = -x(1);$$

г) решим полученную двухточечную краевую задачу. В результате имеем  $\psi(t) = \text{const} = -x(1) = u^*(t)$ ,  $x(t) = -x(1)t + x_0$ . При  $t=1$   $x(1) = -x(1) + x_0$ , откуда  $x(1) = x_0/2$  и, следовательно,  $x^*(t) = x_0(2-t)/2$ ,  $u^*(t) = -x_0/2$ . Очевидно, для фиксированного начального условия  $x_0$  оба подхода (уравнение Белмана и принцип максимума) дают один и тот же результат. ■

**Синтез оптимальных линейных регуляторов с полной обратной связью.** Пусть уравнение (4.1), описывающее поведение модели объекта управления, имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (4.21)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$  – матрицы размера соответственно  $p \times p$ ,  $p \times q$ , элементы которых непрерывно дифференцируемы по  $t$ ; на управление ограничений не наложено, т.е.  $u \in U = \mathbb{R}^q$ .

Пусть функционал качества управления (4.3) квадратичный:

$$I = (1/2) \int_{t_0}^{t_1} [x^T(t)S(t)x(t) + u^T(t)Q(t)u(t)] dt + (1/2) [x^T(t_1)\Lambda x(t_1)], \quad (4.22)$$

где  $S(t)$ ,  $\Lambda$  – неотрицательно определенные симметрические матрицы размера  $p \times p$ , а  $Q(t)$  – положительно определенная симметрическая матрица размера  $q \times q$ .

Требуется найти оптимальную синтезирующую функцию  $u^*(t, x)$  с полной обратной связью.

Сравнивая (4.21), (4.22) с (4.1), (4.3), имеем

$$f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u; \quad f^0(t, x, u) = (1/2) [x^T S(t)x + u^T Q(t)u];$$

$$F(x) = (1/2) [x^T \Lambda x].$$

Уравнение Беллмана (4.20) для данной задачи имеет вид

$$\max_u \left\{ \frac{\partial W(t, x)}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial W(t, x)}{\partial x} \right\}^T [A(t)x + B(t)u] - \right. \\ \left. - (1/2) [x^T S(t)x + u^T Q(t)u] \right\} = 0, \quad (4.23)$$

$$W(t_1, x) = - (1/2) [x^T \Lambda x].$$

Отсюда

$$u^*(t, x) = \arg \max_u \left[ \left\{ \frac{\partial W(t, x)}{\partial x} \right\}^T B(t)u - (1/2)u^T Q(t)u \right].$$

Найдем максимум в последнем выражении по управлению с использованием необходимых условий экстремума и (П.2.1)–(П.2.3).

Дифференцируя выражение в квадратных скобках по  $u$  и приравнявая результат нулю, получаем структуру оптимального управления:

$$u^*(t, x) = Q^{-1}(t)B(t)^T \frac{\partial W(t, x)}{\partial x}. \quad (4.24)$$

Подставим (4.24) в уравнение (4.23). В результате получим нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка:

$$\frac{\partial W(t, x)}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial W(t, x)}{\partial x} \right\}^T A(t)x + \\ + (1/2) \left\{ \frac{\partial W(t, x)}{\partial x} \right\}^T B(t)Q^{-1}(t)B^T(t) \frac{\partial W(t, x)}{\partial x} - (1/2)x^T S(t)x = 0, \\ W(t_1, x) = - (1/2) [x^T \Lambda x].$$

Решение уравнения ищется в виде

$$W(t, x) = (1/2)x^T K_2(t)x, \quad (4.25)$$

где  $K_2(t)$  – неизвестная симметрическая матрица размера  $n \times n$ .

Подставляя (4.25) в последнее уравнение и краевое условие, приравнявая нулю члены с одинаковыми степенями  $x$ , с помощью (П.2.4) получаем

$$\dot{K}_2 = -A^T K_2 - K_2 A - K_2 B Q^{-1} B^T K_2 + S, \quad K_2(t_1) = -\Lambda. \quad (4.26)$$

Решая уравнение Риккати (4.26), можно определить явный вид оптимального управления (4.24) с полной обратной связью:

$$u^*(t, x) = Q^{-1}(t)B^T(t)K_2(t)x. \quad (4.27)$$

Минимальную величину функционала можно вычислить по формуле

$$\min_{u \in \mathcal{D}} I = -W(t_0, x) = - (1/2)x^T K_2(t_0)x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Синтезированная оптимальная система с полной обратной связью изображена на рис. 4.4.

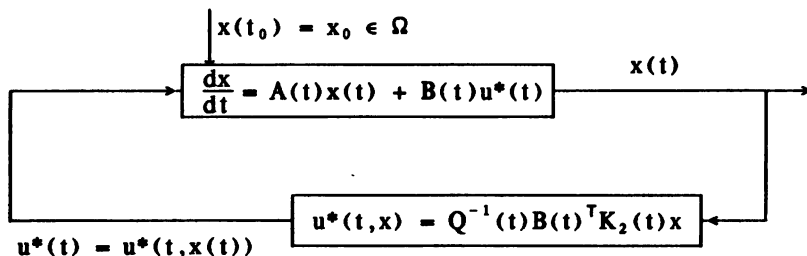


Рис. 4.4

Пример 4.3. Даны модель объекта управления

$$\dot{x} = -x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0,$$

и функционал

$$I = (1/2) \int_0^1 u^2(t) dt + (1/2)x^2(1) \rightarrow \min.$$

Требуется найти оптимальную синтезирующую функцию  $u^*(t, x)$ .

□ Сравнивая постановку задачи с (4.21), (4.22), имеем  $A(t) = -1$   
 $B(t) = 1$ ;  $S(t) = 0$ ;  $Q(t) = 1$ ;  $\Lambda = 1$ ;  $t_0 = 0$ ;  $t_1 = 1$ .

Тогда уравнение (4.26) можно записать в виде

$$\dot{K}_2 = 2K_2 - K_2^2, \quad K_2(1) = -1.$$

Найдем его решение:  $K_2(t) = \frac{2}{1 - 3e^{2-2t}}$ . По формуле (4.27)

получим искомое оптимальное управление  $u^*(t, x) = \frac{2}{1 - 3e^{2-2t}} x$ . ■

Пример 4.4. Даны модель объекта управления

$$\dot{x}_1(t) = u(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t)$$

и функционал

$$I(x(t_0), d) = (1/2) \int_0^2 u^2(t) dt + (1/2) [x_1^2(2) + x_2^2(2)].$$

□ Здесь  $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ;  $u \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, 2]$ ;  $f^0(t, x, u) = (1/2)u^2$ ;  $f_1(t, x, u) = -u$ ;  $f_2(t, x, u) = x_1$ ;  $F(x) = (1/2) [x_1^2 + x_2^2]$ .

Рассмотрим частные случаи задания множества начальных условий.

1.  $m=0$ . Множество начальных условий  $\Omega$  задано точкой  $x(t_0) = x_0$ . Требуется найти оптимальное программное управление  $u^*(t)$ .

Применим уравнения принципа максимума (4.19).

1) Составим гамильтониан:  $H(t, x, u) = \psi_1(t)u + \psi_2(t)x_1 - (1/2)u^2$ .

2) Так как ограничения на управление отсутствуют, можно применить необходимые условия экстремума для нахождения максимума гамильтониана по управлению:

$$\frac{\partial H(t, x, u)}{\partial u} = \psi_1(t) - u = 0.$$

Поэтому  $u^*(t) = \psi_1(t)$  — структура оптимального управления.

3) Выпишем остальные соотношения системы (4.19):

$$\dot{x}_1(t) = u(t) = \psi_1(t), \quad x_1(0) = x_{10},$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t), \quad x_2(0) = x_{20},$$

$$\dot{\psi}_1(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u^*(t))}{\partial x_1} = -\psi_2(t), \quad \psi_1(2) = -\frac{\partial F(x(2))}{\partial x_1} = -x_1(2),$$

$$\dot{\psi}_2(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u^*(t))}{\partial x_2} = 0, \quad \psi_2(2) = -\frac{\partial F(x(2))}{\partial x_2} = -x_2(2).$$

4) Решив эту двухточечную краевую задачу, получим

$$\psi_1(t) = -x_1(2) - x_2(2) [2 - t],$$

$$\psi_2(t) = -x_2(2),$$

$$x_1(t) = x_1(2) [3 - t] + (1/2)x_2(2) [2 - t]^2,$$

$$x_2(t) = x_2(2) - x_1(2) [2 - t] [4 - t]/2 - x_2(2) [2 - t]^3/6.$$

Из последних двух соотношений при  $t=0$  имеем

$$x_1(2) = -[x_{10} + 6x_{20}]/21; \quad x_2(2) = [4x_{10} + 3x_{20}]/7.$$

Тогда оптимальное программное управление имеет вид

$$u^*(t) = [x_{10} + 6x_{20}]/21 - [2 - t] [4x_{10} + 3x_{20}]/7.$$

2.  $m=1$ . Начальные условия заданы множеством  $\Omega$ :

$$x(t_0) \in \Omega = \{x \mid x_2 = -(4/3)x_1, x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Требуется найти оптимальную синтезирующую функцию  $u^*(t, x_1)$  на множестве  $\Omega$ .

1) Выпишем систему (4.17) для данной задачи с учетом того, что



$$x^1 = x_1, \quad x^2 = x_2, \quad y_0(x_1) = - (4/3)x_1,$$

$$H(t, x, u) = \frac{\partial W(t, x_1)}{\partial x_1} u + \frac{\partial \psi(t, x_1)}{\partial x_1} u x_2 + \psi(t, x_1) x_1 - (1/2)u^2,$$

$$H'(t, x_1, y(t, x_1)) = \max_u H(t, x_1, y(t, x_1), u).$$

Она имеет вид

$$\frac{\partial W(t, x_1)}{\partial t} + \frac{\partial W(t, x_1)}{\partial x_1} u^*(t, x_1) + \psi(t, x_1) x_1 - (1/2)u^*(t, x_1)^2 = 0,$$

$$W(2, x_1) = - (1/2)x_1^2 + (1/2)y^2(2, x_1),$$

$$\frac{\partial \psi(t, x_1)}{\partial t} = - \frac{\partial \psi(t, x_1)}{\partial x_1} u^*(t, x_1), \quad \psi(2, x_1) = - y(2, x_1),$$

$$\frac{\partial y(t, x_1)}{\partial t} = - \frac{\partial y(t, x_1)}{\partial x_1} u^*(t, x_1) + x_1, \quad y(0, x_1) = - (4/3)x_1.$$

2) Используя необходимые условия экстремума для нахождения максимума по управлению  $u$ , определим структуру оптимального управления:

$$u^*(t, x_1) = \frac{\partial W(t, x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi(t, x_1)}{\partial x_1} y(t, x_1).$$

3) Будем искать неизвестные функции, входящие в записанную выше систему, в виде

$$y(t, x_1) = y_0(t) + y_1(t)x_1,$$

$$W(t, x_1) = (1/2)K_2(t)x_1^2 + K_1(t)x_1 + K_0(t), \quad (4.28)$$

$$\psi(t, x_1) = \psi(t) + N(t)x_1,$$

где  $y_0(t)$ ,  $y_1(t)$ ,  $K_0(t)$ ,  $K_1(t)$ ,  $K_2(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $N(t)$  — функции подлежащие определению.

Тогда получим

$$H'(t, x_1, y(t, x_1)) = \max_u \left\{ (K_2 x_1 + K_1)u + N(y_0 + y_1 x_1)u + (\psi + N x_1)x_1 - (1/2)u^2 \right\}, \quad (4.29)$$

$$u^*(t, x_1) = K_2 x_1 + K_1 + N(y_0 + y_1 x_1).$$

Здесь и далее аргументы функций для краткости опущены.

Подставляя (4.28), (4.29) в систему и приравнявая члены при одинаковых степенях  $x_1$  нулю, получаем

$$\begin{aligned}
\dot{y}_0 + y_1(K_1 + N y_0) &= 0, & y_0(0) &= 0, \\
\dot{y}_1 + y_1 K_2 - 1 + y_1^2 N &= 0, & y_1(0) &= -4/3, \\
\dot{\psi} &= -N^2 y_0 - N K_1, & \psi(2) &= -y_0(2), \\
\dot{N} &= -K_2 N - y_1 N^2, & N(2) &= -y_1(2), \\
\dot{K}_2 + K_2^2 + 2N - N^2 y_1^2 &= 0, & K_2(2) &= -1 + y_1^2(2), \\
\dot{K}_1 + K_1 K_2 + \psi - y_1 y_0 N^2 &= 0, & K_1(2) &= y_1(2) y_0(2), \\
\dot{K}_0 + (1/2) K_1^2 - (1/2) y_0^2 N^2 &= 0, & K_0(2) &= (1/2) y_0^2(2).
\end{aligned}$$

Решение данной системы имеет вид

$$y_0(t) \equiv K_0(t) \equiv K_1(t) \equiv \psi(t) \equiv N(t) \equiv 0,$$

$$y_1(t) = -\frac{(2-t)(4-t)}{2(3-t)}, \quad K_2(t) = -\frac{1}{(3-t)}.$$

Из (4.28), (4.29) и связи  $x_2 = y(t, x_1)$  определим явный вид искомой оптимальной синтезирующей функции и выражение для вычисления минимального значения функционала качества:

$$u^*(t, x_1) = -\frac{1}{(3-t)} x_1,$$

$$\varphi(t_0, x) = W(t_0, x_1) + \psi(t_0, x_1) x_2 = -(1/6) x_1^2 =$$

$$= -\min_{d \in \mathcal{D}} I(x, d) \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.30)$$

3.  $m=2$ . Начальные условия заданы множеством  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . Требуется найти оптимальную синтезирующую функцию  $u^*(t, x)$  на множестве  $\mathbb{R}^2$ .

Для данной задачи уравнение Беллмана (4.20) имеет вид

$$\max_u \left\{ \frac{\partial W(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial W(t, x)}{\partial x_1} u + \frac{\partial W(t, x)}{\partial x_2} x_1 - (1/2) u^2 \right\} = 0, \quad (4.31)$$

$$W(2, x) = -(1/2) x_1^2 - (1/2) x_2^2.$$

1) Дифференцируя выражение в фигурных скобках по управлению и приравнявая результат нулю, получаем структуру оптимального управления:

$$u^*(t, x) = \partial W(t, x) / \partial x_1. \quad (4.32)$$

2) Подставим (4.32) в (4.31). Тогда

$$\frac{\partial W(t, x)}{\partial t} + (1/2) \left\{ \frac{\partial W(t, x)}{\partial x_1} \right\}^2 + \frac{\partial W(t, x)}{\partial x_2} x_1 = 0 .$$

3) Будем искать решение этого уравнения в виде

$$W(t, x) = K_{11}(t)x_1^2 + 2K_{12}(t)x_1x_2 + K_{22}(t)x_2^2 . \quad (4.33)$$

Подставляя  $W(t, x)$  в уравнение и краевое условие, приравнявая затем члены при одинаковых степенях  $x_1$  и  $x_2$  нулю, получаем

$$\dot{K}_{11} = -2K_{12} - 2K_{11}^2, \quad K_{11}(2) = -1/2,$$

$$\dot{K}_{12} = -K_{22} - 2K_{12}K_{11}, \quad K_{12}(2) = 0,$$

$$\dot{K}_{22} = -2K_{12}^2, \quad K_{22}(2) = -1/2.$$

Заметим, что эту систему можно было получить сразу из (4.26).

Решение системы имеет вид

$$K_{11}(t) = \frac{- [6 + 2(2 - t)^2(5 - t)]}{12(3 - t) + (2 - t)^3(6 - t)},$$

$$K_{12}(t) = \frac{- 3(2 - t)(4 - t)}{12(3 - t) + (2 - t)^3(6 - t)},$$

$$K_{22}(t) = \frac{- 6(3 - t)}{12(3 - t) + (2 - t)^3(6 - t)}.$$

Из (4.32) и (4.33) следует явный вид оптимальной синтезирующей функции:

$$u^*(t, x) = - \frac{6(2 - t)(4 - t)x_2 + [12 + 4(2 - t)^2(5 - t)]x_1}{12(3 - t) + (2 - t)^3(6 - t)}, \quad (4.34)$$

$$W(t_0, x) = - \frac{23x_1^2 + 24x_1x_2 + 9x_2^2}{42}.$$

На множестве  $\Omega$ , где  $x_2 = -(4/3)x_1$ , имеем

$$W(t_0, x_1, y_0(x_1)) = - (1/6)x_1^2 = - \min_{d \in \mathcal{D}} I(x, d) \quad \forall x \in \Omega ,$$

т.е. управления  $u^*(t, x)$  и  $u^*(t, x_1)$  для начальных условий из множества  $\Omega$  обеспечивают одно и то же минимальное значение функционала качества управления. ■

## 4.6. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ СИСТЕМАМИ С ПОДВИЖНЫМ ПРАВЫМ КОНЦОМ ТРАЕКТОРИЙ

### 4.6.1. Постановка задачи

В постановке задачи 1 (см. разд. 4.2) момент  $t_1$  окончания процесса управления считается заданным, а правый конец траектории  $x(t_1)$  – свободным. Рассмотрим, более общий случай, когда время окончания процесса управления определяется первым моментом достижения точкой  $(t, x(t))$  некоторой заданной поверхности  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ :

$$\Gamma = \left\{ (t_1, x) \mid \Gamma_i(t_1, x) = 0, \quad i = 1, \dots, l; \quad t_1 \in (t_0, \infty), \quad x \in \mathbb{R}^n \right\}, \quad (4.35)$$

где  $1 \leq l \leq n+1$ , при  $l = n+1$  множество  $\Gamma$  представлено точкой в  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; функции  $\Gamma_i(t_1, x)$  – непрерывно дифференцируемы; система векторов  $\{\partial \Gamma_i(t_1, x) / \partial x_1, \dots, \partial \Gamma_i(t_1, x) / \partial x_n, \partial \Gamma_i(t_1, x) / \partial t_1\}$ ,  $i = 1, \dots, l$ , линейно независима  $\forall (t_1, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Если число  $l$  используемых в управлении координат задано, то  $l \leq n - m + 1$ , т.е. размерность множества  $\Gamma$  не меньше размерности множества начальных условий в  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Функционал качества управления задается в форме

$$I(x_0, d) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(t_1, x(t_1)), \quad (4.36)$$

где  $F(t_1, x)$  – непрерывно дифференцируемая функция, множество  $\mathcal{D}$  допустимых процессов задачи состоит из троек  $d = (t_1, x(\cdot), u(\cdot))$ , в которых функции  $x(\cdot)$ ,  $u(\cdot)$  удовлетворяют ограничениям (4.35) и условиям, перечисленным в разд. 4.2. В остальном формулировки задач нахождения оптимального программного управления и оптимального управления с неполной обратной связью не отличаются от рассмотренных в разд. 4.2.

### 4.6.2. Достаточные условия оптимальности

Аналогично [44] обозначим:

$Q \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  – множество точек  $(t, x)$ , из которых можно достигнуть терминального множества  $\Gamma$  по некоторой траектории, соответствующей допустимому кусочно-непрерывному управлению. При этом  $\Omega \subset Q(t_0)$ ,  $t \geq t_0$ ,  $Q(t_0)$  – сечение множества  $Q$  при фиксированном  $t = t_0$ ;  $Q_{x_1}(t_0)$  – проекция множества  $Q(t_0)$  на  $V_1$ ;

$Q_{x_1}$  – проекция множества  $Q$  на пространство  $(t_0, \infty) \times V_1$ ;

$\Gamma_{x^1}$  - проекция множества  $\Gamma$  на  $V_1$ ;  $\Gamma_{t_1 x^2}(x^1)$  - проекция множества  $\Gamma$  на  $(t_0, \infty) \times V_2$  при фиксированном  $x^1$ .

Как и ранее, поведение траекторий уравнения (4.1), исходящих из множества  $\Omega$ , будем описывать с помощью вектор-функции  $y(t, x^1)$ , удовлетворяющей системе (4.6), (4.7):

$$\frac{\partial y_j(t, x^1)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial y_j(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x^1, y(t, x^1), u(t, x^1)) +$$

$$+ f_j(t, x^1, y(t, x^1), u(t, x^1)), \quad j = m+1, \dots, n, \quad \forall (t, x^1) \in Q_{\alpha^1},$$

$$y_j(t_0, x^1) = y_{0j}(x^1), \quad j = m+1, \dots, n, \quad \forall x^1 \in Q_{x^1}(t_0).$$

Момент окончания процесса управления каждой траекторией, исходящей из множества  $\Omega$ , определяется условием

$$\Gamma_i(t_1, x^1(t_1), y(t_1, x^1(t_1))) = 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

При решении задачи функция  $G(t_1, x)$  в (4.8) изменяется:

$$G(t_1, x) = \varphi(t_1, x) + F(t_1, x) \quad \forall (t_1, x) \in \Gamma,$$

а величина  $g$  в (4.11) определяется следующим образом:

$$g = \min_{(t_1, x^2) \in \Gamma_{t_1 x^2}(x^1)} G(t_1, x) \quad \forall x^1 \in \Gamma_{x^1}. \quad (4.37)$$

Пусть имеется управление  $u^*(t, x^1)$  и соответствующая функция  $y^*(t, x^1)$ .

**Утверждение 4.1:** Если существует такая функция  $\varphi(t, x) \in \Phi$ , что

$$1) R(t, x^1, y^*(t, x^1), u^*(t, x^1)) = r(t) \quad \forall (t, x^1) \in Q_{\alpha^1};$$

$$2) G(t_1, x^1, y^*(t_1, x^1)) = g \quad \forall (t_1, x^1) \in \left\{ \Gamma_i(t_1, x^1, y^*(t_1, x^1)) = 0, i = 1, \dots, l \right\},$$

то управление  $u^*(t, x^1)$  является оптимальной синтезирующей функцией на множестве  $\Omega$ . Функцию  $r(t)$  и величину  $g$  можно без ограничения общности положить равными нулю.

Доказательство утверждения 4.1 аналогично доказательству теоремы 4.2, где применяется новое определение функции  $G(t_1, x)$  и величины  $g$ , а множество  $V$  состоит из троек  $(t_1, x(\cdot), u(\cdot))$ , в которых элементы пар функций  $(x(\cdot), u(\cdot))$  необязательно связаны уравнением (4.1), а момент  $t_1$  связан с  $x(t_1)$  условием (4.35).

### 4.6.3. Соотношения для определения оптимального управления

Алгоритм получения соотношений для определения оптимального управления в основном совпадает с изложенным в разд. 4.4. Отличие состоит в поиске условного минимума функции  $G(t_1, x)$  в (4.37). Для этого при каждом фиксированном значении  $x \in \Gamma_{x^1}$  потребуем выполнения необходимых условий условного экстремума функции  $G(t_1, x)$  по переменным  $t_1, x^2$ , т.е. равенства нулю вариации этой функции при любых вариациях  $\delta t_1, \delta x^2$ , связанных условиями  $\delta \Gamma_i(t_1, x) = 0, i = 1, \dots, l, \forall x \in \Gamma_{x^1}$ , т.е.:

$$\delta G(t_1, x) = \frac{\partial G(t_1, x)}{\partial t_1} \delta t_1 + \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial G(t_1, x)}{\partial x_j} \delta x_j = 0,$$

$$\delta \Gamma_i(t_1, x) = \frac{\partial \Gamma_i(t_1, x)}{\partial t_1} \delta t_1 + \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial \Gamma_i(t_1, x)}{\partial x_j} \delta x_j = 0, i = 1, \dots, l, \forall x \in \Gamma_{x^1}.$$

Первое соотношение можно записать в форме

$$\begin{aligned} \delta G(t_1, x) = & \frac{\partial \varphi(t_1, x)}{\partial t_1} \delta t_1 + \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial \varphi(t_1, x)}{\partial x_j} \delta x_j + \\ & + \frac{\partial F(t_1, x)}{\partial t_1} \delta t_1 + \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial F(t_1, x)}{\partial x_j} \delta x_j = 0. \end{aligned}$$

С учетом (4.14), условий утверждения 4.1 при  $r(t) \equiv 0, g = 0$  и (4.16), (4.17) имеем

$$\frac{\partial \varphi(t_1, x)}{\partial x_j} = \psi_j(t_1, x^1), \quad \frac{\partial \varphi(t_1, x)}{\partial t_1} = -H(t_1, x^1, y^*(t_1, x^1), u^*(t_1, x^1))$$

и окончательно получаем

$$\begin{aligned} \delta F - H(t_1, x^1) \delta t_1 + \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t_1, x^1) \delta x_j = 0, \\ W(t_1, x^1) + \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t_1, x^1) y_j^*(t_1, x^1) + F(t_1, x^1, y^*(t_1, x^1)) = 0, \\ \Gamma_i(t_1, x^1, y^*(t_1, x^1)) = 0, i = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\delta \Gamma_i(t_1, x^1, y^*(t_1, x^1)) = 0, i = 1, \dots, l,$$

где

$$\delta F = \delta F(t_1, x^1, y^*(t_1, x^1)) = \frac{\partial F(t_1, x^1, y^*(t_1, x^1))}{\partial t_1} \delta t_1 +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial F(t_1, x^1, y^*(t_1, x^1))}{\partial x_j} \delta x_j,$$

$$H(t_1, x^1) = H(t_1, x^1, y^*(t_1, x^1), u^*(t_1, x^1)), \quad (4.39)$$

$$\delta \Gamma_i(t_1, x^1, y^*(t_1, x^1)) = \frac{\partial \Gamma_i(t_1, x^1, y^*(t_1, x^1))}{\partial t_1} \delta t_1 +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial \Gamma_i(t_1, x^1, y^*(t_1, x^1))}{\partial x_j} \delta x_j,$$

$$H(t, x, u) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + \sum_{j=m+1}^n x_j \sum_{i=1}^m \frac{\partial \psi_j(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t, x^1) f_j(t, x, u) - f^0(t, x, u).$$

Эти условия, называемые *условиями трансверсальности*, следует добавить к системе (4.17), полученной в разд. 4.4, вместо условия на функции  $\psi_j(t, x^1)$  и  $W(t, x^1)$ . Еще одна форма условий трансверсальности для данной задачи изложена в [24].

Таким образом, для нахождения оптимального управления с неполной обратной связью требуется решить систему:

$$\frac{\partial y_i(t, x^1)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial y_i(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x^1, y(t, x^1), u(t, x^1)) +$$

$$+ f_j(t, x^1, y(t, x^1), u(t, x^1)), \quad j = m+1, \dots, n, \quad \forall (t, x^1) \in Q_{x^1},$$

$$y_j(t_0, x^1) = y_{j0}(x^1), \quad j = m+1, \dots, n, \quad \forall x^1 \in Q_{x^1}(t_0),$$

$$\max_{u \in U} \left\{ \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial t} - \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial H'(t, x^1, y^*(t, x^1))}{\partial x_j} y_j^*(t, x^1) + \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & + H(t, x^1, y^*(t, x^1), u) \end{aligned} \right\} = 0, \\
 \frac{\partial \psi_j(t_1, x^1)}{\partial t} = - \frac{\partial H'(t, x^1, y^*(t, x^1))}{\partial x_j}, \quad j = m+1, \dots, n, \\
 \delta F - H(t_1, x^1) \delta t_1 + \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t_1, x^1) \delta x_j = 0, \quad (4.40)$$

$$W(t_1, x^1) + \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t_1, x^1) y_j^*(t_1, x^1) + F(t_1, x^1, y^*(t_1, x^1)) = 0,$$

$$\Gamma_i(t_1, x^1, y^*(t_1, x^1)) = 0, \quad i = 1, \dots, l,$$

$$\delta \Gamma_i(t_1, x^1, y^*(t_1, x^1)) = 0, \quad i = 1, \dots, l,$$

где  $H'(t, x^1, y^*(t, x^1)) = \max_{u \in U} H(t, x^1, y^*(t, x^1), u)$ .

В частном случае, когда момент  $t_1$  фиксирован и равен  $T$ , а правый конец траектории свободен, имеем:  $\Gamma = \{t_1 \mid \Gamma_1(t_1, x) = t_1 - T = 0\}$ .

Поэтому условия (4.38) должны выполняться при  $\delta t_1 = 0$  и любых значениях  $\delta x^2$ . Тогда из них следует:

$$\psi_j(t_1, x^1) = - \frac{\partial F(x^1, y^*(t_1, x^1))}{\partial x_j}, \quad j = m+1, \dots, n,$$

$$W(t_1, x^1) = \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial F(x^1, y^*(t_1, x^1))}{\partial x_j} y_j^*(t_1, x^1) - F(x^1, y^*(t_1, x^1)).$$

Последние соотношения входят в систему (4.17).

**Пример 4.5.** Дана модель объекта управления

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= u(t). \end{aligned}$$

Функционал (4.36) определен в квадратичном виде

$$I(x(t_0), d) = (1/2) \int_0^2 u^2(t) dt + (1/2) x_2^2(2).$$



Начальные условия заданы множеством  $\Omega$  размерности  $m = 1$ :

$$x(t_0) \in \Omega = \{x \mid x_2 = -(3/5)x_1, x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Конечные условия определены соотношениями:

$$\Gamma_1(t_1, x(t_1)) = x_1(2) + x_2(2) = 0, \quad \Gamma_2(t_1, x(t_1)) = t_1 - 2 = 0.$$

Здесь  $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, 2]$ ,  $f^0(t, x, u) = (1/2)u^2$ ,  $F(x) = (1/2)x_2^2$ ,  $f_1(t, x, u) = x_2$ ,  $f_2(t, x, u) = -u$ ,  $x^1 = x_1$ ,  $x^2 = x_2$ ,  $y_0(x_1) = -(3/5)x_1$ .

Требуется найти оптимальную синтезирующую функцию  $u^*(t, x_1)$  на множестве  $\Omega$ .

□ Выпишем систему (4.40) для данной задачи с учетом того, что

$$H(t, x, u) = \frac{\partial W(t, x_1)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \psi(t, x_1)}{\partial x_1} x_2^2 + \psi(t, x_1) u - (1/2) u^2.$$

Тогда, используя необходимые условия экстремума для нахождения максимума по управлению  $u$ , найдем структуру оптимального управления:

$$u^*(t, x_1) = \arg \max_u H(t, x_1, u^*(t, x_1), u) = \psi(t, x_1).$$

В результате получим

$$\frac{\partial y(t, x_1)}{\partial t} = - \frac{\partial y(t, x_1)}{\partial x_1} y(t, x_1) + u^*(t, x_1), \quad y(0, x_1) = -(3/5)x_1,$$

$$\frac{\partial W(t, x_1)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(t, x_1)}{\partial x_1} y^2(t, x_1) + \psi(t, x_1) u^*(t, x_1) - (1/2) u^{*2}(t, x_1) = 0,$$

$$\frac{\partial \psi(t, x_1)}{\partial t} = -2 \frac{\partial \psi(t, x_1)}{\partial x_1} y(t, x_1) - \frac{\partial W(t, x_1)}{\partial x_1},$$

$$y(2, x_1) \delta x_2 - H(2, x_1) \delta t_1 + \psi(2, x_1) \delta x_2 = 0,$$

$$W(2, x_1) + \psi(2, x_1) y(2, x_1) + (1/2) y^2(2, x_1) = 0,$$

$$\Gamma_1(t_1, x_1, y(t_1, x_1)) = x_1 + y(2, x_1) = 0, \quad \Gamma_2(t_1, x_1, y(t_1, x_1)) = t_1 - 2 = 0,$$

$$\delta \Gamma_1(t_1, x_1, y(t_1, x_1)) = \delta x_2 = 0, \quad \delta \Gamma_2(t_1, x_1, y(t_1, x_1)) = \delta t_1 = 0.$$

Будем искать неизвестные функции, входящие в эту систему, в виде

$$y(t, x_1) = y_1(t) x_1, \quad W(t, x_1) = (1/2) K_2(t) x_1^2, \quad \psi(t, x_1) = N(t) x_1,$$

где  $y_1(t)$ ,  $K_2(t)$ ,  $N(t)$  — функции, подлежащие определению.

Подставив последние соотношения в выписанную систему и приравняв члены при одинаковых степенях  $x_1$ , получим двухточечную краевую задачу:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1^2 + N, & y_1(0) &= -3/5, & y_1(2) &= -1, \\ \dot{K}_2 &= 2Ny_1^2 - N^2, & K_2(2) &= -y_1^2(2) - 2N(2)y_1(2) = -1 + 2N(2), \\ \dot{N} &= -2Ny_1 - K_2. \end{aligned}$$

Ее решение имеет вид

$$y_1(t) = -\frac{2(3-t)}{10-6t+t^2}, \quad K_2(t) = \frac{4(3-t)}{(10-6t+t^2)^2}, \quad N(t) = \frac{2}{10-6t+t^2},$$

а искомая оптимальная синтезирующая функция

$$u^*(t, x_1) = -\frac{2}{10-6t+t^2} x_1. \quad \blacksquare$$

#### 4.6.4. Предельные случаи информированности о векторе состояния

1. При  $m = n$  из (4.40) следует уравнение Беллмана [44]:

$$\max_{u \in U} \left\{ \frac{\partial W(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right\} = 0 \quad \forall (t, x) \in Q, \quad (4.41)$$

$$W(t_1, x) = -F(t_1, x) \quad \forall (t_1, x) \in \Gamma.$$

2. При  $m = 0$  система (4.40) преобразуется в соотношения принципа максимума [18]:

$$\dot{x}_j^*(t) = f_j(t, x^*(t), u(t)), \quad x_j^*(t_0) = x_{0j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.42)$$

$$\dot{\psi}_j(t) = -\frac{\partial H'(t, x^*(t))}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\delta F - H(t_1) \delta t_1 + \sum_{j=1}^n \psi_j(t_1) \delta x_j = 0,$$

$$W(t_1) + \sum_{j=1}^n \psi_j(t_1) x_j^*(t_1) + F(t_1, x^*(t_1)) = 0, \quad (4.43)$$

$$\delta \Gamma_i(t_1, x^*(t_1)) = 0, \quad i = 1, \dots, l,$$

$$\Gamma_i(t_1, x^*(t_1)) = 0, \quad i = 1, \dots, l,$$

где  $H'(t, x^*(t)) = \max_{u \in U} H(t, x^*(t), u) = H(t, x^*(t), u^*(t))$ ,

$$H(t, x, u) = \sum_{j=1}^n \psi_j(t) f_j(t, x, u) - f^0(t, x, u);$$

$$\delta F = \delta F(t_1, x^*(t_1)) = \frac{\partial F(t_1, x^*(t_1))}{\partial t_1} \delta t_1 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(t_1, x^*(t_1))}{\partial x_j} \delta x_j,$$

$$H(t_1) = H(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1)),$$

$$\delta \Gamma_i(t_1, x^*(t_1)) = \frac{\partial \Gamma_i(t_1, x^*(t_1))}{\partial t_1} \delta t_1 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Gamma_i(t_1, x^*(t_1))}{\partial x_j} \delta x_j.$$

Как и в разд. 4.5.1, функция  $W(t)$  определяется в результате решения уравнения

$$\frac{dW(t)}{dt} = -H'(t, x^*(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H'(t, x^*(t))}{\partial x_j} x_j^*(t)$$

с конечным условием

$$W(t_1) = - \sum_{j=1}^n \psi_j(t_1) x_j^*(t_1) - F(t_1, x^*(t_1)).$$

После решения системы (4.42), (4.43) можно проинтегрировать уравнение для функции  $W(\cdot)$  и вычислить минимальное значение функционала (4.36) по формуле (4.12):

$$\min_{d \in \mathcal{D}} I(x_0, d) = -W(t_0) - \sum_{j=1}^n \psi_j(t_0) x_{0j}.$$

**Замечание.** В частном случае задания множества  $\Gamma$ , когда момент времени  $t_1 = T$  задан и фиксирована часть координат вектора  $x(t_1)$ , т.е.

$$t_1 = T, \quad x_j(t_1) = x_{jl}, \quad j = 1, \dots, k; \quad 0 \leq k \leq n, \quad l = k+1,$$

функции  $\Gamma_j(t_1, x)$  имеют вид

$$\Gamma_j(t_1, x) = x_j - x_{jl} = 0, \quad j = 1, \dots, k; \quad \Gamma_{k+1}(t_1, x) = t_1 - T = 0.$$

Здесь при  $k = n$  правый конец траектории фиксирован, а при  $k = 0$  свободен. Отсюда следует, что  $\delta x_j = 0, j = 1, \dots, k; \delta t_1 = 0$ .

Если момент  $t_1 = T$  задан и  $l=1$ ,  $\Gamma_1(t, x) = t_1 - T = 0$ , то система (4.42), (4.43) совпадает с полученной в разд. 4.5.1.

*Методика применения принципа максимума.*

1. Составить гамильтониан  $H(t, x, u)$ .
2. Найти структуру оптимального управления из условия максимума гамильтониана.
3. Составить систему канонических уравнений (4.42) с заданными в задаче краевыми условиями.
4. Применить условия трансверсальности (4.43). Они дают недостающие краевые условия для уравнений составленной системы.
5. Решить двухточечную краевую задачу для системы канонических уравнений с учетом результатов пп. 2 и 4. В итоге определяется пара  $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$  или тройка  $(t_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ , на которой может достигаться экстремум функционала.

**Пример 4.6.** Даны модель объекта управления

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1/2,$$

где  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ;  $t \in [0, 1]$ , и функционал

$$I = \int_0^1 [u^2(t) + x^2(t)] dt.$$

Требуется найти оптимальную пару  $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ , на которой достигается минимум функционала.

□ Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем:  $f(t, x, u) = u$ ,  $f^0(t, x, u) = u^2 + x^2$ ,  $F(x) = 0$ ,  $\Gamma_1(t_1, x(t_1)) = t_1 - 1 = 0$ ,  $\Gamma_2(t_1, x(t_1)) = x(t_1) - 1/2 = 0$ . Решается задача Лагранжа.

1. Составим гамильтониан:  $H(t, x, u) = \psi(t)u - u^2 - x^2$ .
2. Найдем максимум гамильтониана по управлению. Так как ограничения на управление отсутствуют, можно применить необходимые условия безусловного экстремума:

$$\frac{\partial H(t, x, u)}{\partial u} = \psi(t) - 2u = 0,$$

откуда  $u^*(t) = \psi(t)/2$ .

Найденное управление обеспечивает максимум функции  $H(t, x, u)$  по управлению, так как удовлетворяются достаточные условия экстремума:

$$\frac{\partial^2 H(t, x, u)}{\partial u^2} = -2 < 0.$$

3. Выпишем уравнения системы (4.42):

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1/2,$$

$$\dot{\psi}(t) = - \frac{\partial H(t, x(t), u^*(t))}{\partial x} = 2x(t).$$

4. Применим условия трансверсальности в форме (4.43). Так как  $F(x) = 0$ , то  $\delta F = 0$  и

$$[-H(t_1)\delta t_1 + \psi(t_1)\delta x] \Big|_{t_1=1} = 0.$$

Так как  $t_1 = 1$  и  $x(t_1) = 1/2$  заданы, то  $\delta t_1 = 0$ ,  $\delta x = 0$ . Поэтому условия трансверсальности выполняются.

5. Решим полученную двухточечную краевую задачу:

$$\dot{x} = u^*(t) = \psi(t)/2, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1/2,$$

$$\dot{\psi}(t) = 2x(t).$$

Отсюда находим искомую пару:

$$\text{оптимальное управление } u^*(t) = \frac{e(e^1 + e^{-1})}{2(e^2 - 1)};$$

$$\text{оптимальную траекторию } x^*(t) = \frac{e(e^1 - e^{-1})}{2(e^2 - 1)}.$$

**Пример 4.7.** Даны модель объекта управления

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t)$$

с начальными условиями  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$  и функционал

$$I(x(t_0), d) = x_2(2\pi).$$

Требуется найти оптимальное программное управление  $u^*(\cdot)$  и соответствующую ему траекторию  $x^*(\cdot)$ .

□ Здесь  $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , на управление наложено ограничение  $|u| \leq 1$ ,  $u \in U = [-1, 1]$ ,  $f^0(t, x, u) = 0$ ,  $F(x) = x_2$ , правый конец траектории свободен,  $\Gamma_1(t_1, x(t_1)) = t_1 - 2\pi = 0$ . Решается задача Майера.

1. Составим гамильтониан:  $H(t, x, u) = \psi_1(t)x_2 + \psi_2(t)[-x_1 + u]$ .

2. Так как имеются ограничения на управление, требуется найти условный максимум гамильтониана по управлению. В данной задаче гамильтониан линеен по  $u$  на заданном отрезке изменения управления  $[-1, 1]$ , поэтому структура оптимального управления имеет вид  $u^*(t) = \arg \max_{|u| \leq 1} H(t, x, u) = 1 \operatorname{sign} \psi_2(t)$ , т.е. является

релейной.

Величина управления определяется знаком функции  $\psi_2(t)$ .

3. Выпишем канонические уравнения принципа максимума (4.42):

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 0,$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t), \quad x_2(0) = 0,$$

$$\dot{\psi}_1(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u^*(t))}{\partial x_1} = \psi_2(t),$$

$$\dot{\psi}_2(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u^*(t))}{\partial x_2} = -\psi_1(t).$$

4. Применим условия трансверсальности (4.43):

$$\left[ \delta F - H(t_1) \delta t_1 + \sum_{j=1}^2 \psi_j(t_1) \delta x_j \right] \Big|_{t_1=2\pi} = 0,$$

где  $\delta F = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} \delta x_j = \delta x_2$ . Группируя члены, получаем

$$\left\{ -H(2\pi) \delta t_1 + \psi_1(2\pi) \delta x_1 + [1 + \psi_2(2\pi)] \delta x_2 \right\} = 0.$$

Момент окончания  $t_1$  задан, поэтому  $\delta t_1 = 0$ . Так как правый конец свободен, то вариации  $\delta x_1$ ,  $\delta x_2$  считаются произвольными. Чтобы выражение в фигурных скобках равнялось нулю при любых вариациях, требуется выполнение условий  $\psi_1(2\pi) = 0$ ,  $\psi_2(2\pi) = -1$ .

5. Запишем двухточечную краевую задачу с учетом найденных краевых условий и структуры оптимального управления и решим ее:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 0,$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 1 \operatorname{sign} \psi_2(t), \quad x_2(0) = 0,$$

$$\dot{\psi}_1(t) = \psi_2(t), \quad \psi_1(2\pi) = 0,$$

$$\dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t), \quad \psi_2(2\pi) = -1.$$

Получим:

$$\psi_1(t) = -\sin t, \quad \psi_2(t) = -\cos t,$$

$$u^*(t) = 1 \operatorname{sign} [-\cos t] = -1 \operatorname{sign} [\cos t].$$

Найденное оптимальное управление  $u^*(t)$  на интервале  $[0, 2\pi]$  имеет две точки переключения и, следовательно, три интервала знакопостоянства:



4. Применим условия трансверсальности (4.43) с учетом условия  $\Gamma_1(t_1, x(t_1)) = t_1 - x(t_1) - 1 = 0$ . Имеем

$$\delta F = 4\delta x, \quad \delta \Gamma_1(t_1, x(t_1)) = \delta t_1 - \delta x = 0$$

и, следовательно,

$$4\delta x - H(t_1)\delta t_1 + \psi(t_1)\delta x = 0, \quad t_1 - x(t_1) - 1 = 0, \quad \delta t_1 - \delta x = 0,$$

где  $H(t_1) = H(t_1, x(t_1), u^*(t_1)) = \psi(t_1)\psi(t_1) - (1/2)\psi^2(t_1) = (1/2)\psi^2(t_1)$ .

Отсюда

$$[4 - (1/2)\psi^2(t_1) + \psi(t_1)]\delta x = 0,$$

а для любых  $\delta x$  имеем

$$4 - (1/2)\psi^2(t_1) + \psi(t_1) = 0.$$

5. Решим краевую задачу:

$$\dot{x}(t) = \psi(t), \quad x(0) = 1,$$

$$\dot{\psi}(t) = 0, \quad 4 - (1/2)\psi^2(t_1) + \psi(t_1) = 0, \quad t_1 - x(t_1) - 1 = 0.$$

Получим:  $u(t) = \psi(t) = \text{const} = C$ ,  $x(t) = Ct + 1$ . При  $t = t_1$  решаем систему:  $4 - (1/2)C^2 + C = 0$ ,  $t_1 - Ct_1 - 2 = 0$ .

В итоге  $C = -2$ ,  $t_1 = 2/3$  или  $C = 4$ ,  $t_1 = -2/3$ . Так как  $t_1 \geq 0$ , то искомая тройка имеет вид: оптимальное конечное время  $t_1^* = 2/3$ , оптимальная траектория  $x^*(t) = -2t + 1$ , оптимальное управление  $u^*(t) = -2$ . ■

Пример 4.9. Даны модель объекта управления

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0,$$

где  $x \in \mathbb{R}$ ;  $|u| \leq 1$ ;  $t \in [0, T]$ , и функционал

$$I = \int_0^T [x(t) + u^2(t)] dt \rightarrow \min,$$

$T$  принимает два значения: 1 или 3.

Требуется найти оптимальную пару  $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ , на которой достигается минимум функционала.

□ Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем:  $f(t, x, u) = u$ ,  $f^0(t, x, u) = x + u^2$ ,  $F(x) = 0$ . Решается задача Лагранжа.

1. Составим гамильтониан:  $H(t, x, u) = \psi(t)u - x - u^2$ .

2. Найдем максимум гамильтониана по управлению. При этом решается задача поиска максимума параболы, имеющей вершину в точке  $u(t) = \psi(t)/2$ , на отрезке  $[-1, 1]$  допустимых значений управления. Отсюда получаем структуру оптимального управления:



$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & \psi(t)/2 < -1, \\ \psi(t)/2, & -1 \leq \psi(t)/2 \leq 1, \\ 1, & \psi(t)/2 > 1. \end{cases}$$

3. Выпишем уравнения системы (4.42):

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0,$$

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u^*(t))}{\partial x} = 1.$$

4. Проверим условия трансверсальности (4.43).

Так как  $F=0$ , то  $\delta F=0$  и

$$-H(t_1)\delta t_1 + \psi(t_1)\delta x \Big|_{t_1=T} = 0.$$

Так как  $t_1=T$  задано, то  $\Gamma(t_1, x(t_1)) = t_1 - T = 0$  и  $\delta t_1 = 0$ . Ограничений на  $x(t_1)$  не наложено, поэтому вариация  $\delta x$  произвольна. В результате  $\psi(T)\delta x = 0$  и, следовательно,  $\psi(T) = 0$ .

5. Решим краевую задачу с учетом результатов пп.2, 4:

$$\dot{x}(t) = u^*(t), \quad x(0) = 0,$$

$$\dot{\psi}(t) = 1, \quad \psi(T) = 0 \text{ при } T=1 \text{ и } T=3.$$

Отсюда  $\psi(t) = t + C$ ,  $\psi(T) = T + C = 0$ . Поэтому  $\psi(t) = t - T$ .

Рассмотрим два случая:

а)  $T=1$ . Тогда  $\psi(t) = t - 1$ . Так как  $|\psi(t)/2| = |(t-1)/2| < 1$  на отрезке времени  $[0, 1]$ , то  $u^*(t) = \psi(t)/2 = (t-1)/2$  — оптимальное управление. При этом  $x^*(t) = t^2/4 - t/2$  — оптимальная траектория;

б)  $T=3$ . Тогда  $\psi(t) = t - 3$ . На отрезке времени  $[0, 1)$   $\psi(t)/2 = (t-3)/2 < -1$  и оптимальное управление  $u^*(t) = -1$ , а на отрезке  $[1, 3]$   $|\psi(t)/2| = |(t-3)/2| \leq 1$  и  $u^*(t) = \psi(t)/2 = (t-3)/2$ . Поэтому на первом участке оптимальная траектория  $x^*(t)$  удовлетворяет уравнению  $\dot{x}(t) = -1$ ,  $x(0) = 0$ , т.е.  $x^*(t) = -t$ , а на втором участке  $\dot{x}(t) = (t-3)/2$ ,  $x(1) = -1$ , т.е.  $x^*(t) = t^2/4 - 3t/2 + 1/4$ . ■

Другие примеры синтеза оптимальных детерминированных систем изложены в [1, 2, 4, 18, 21, 25, 43].

#### 4.6.5. Пример определения оптимального программного управления ЛА

Рассматривается проблема торможения ЛА в атмосфере Марса. Поведение модели ЛА в скоростной системе координат описывается системой (см. разд.1.1):

$$\frac{dv}{dt} = - (1/2) \rho_0 e^{-\beta h} v^2 \sigma_x - g_m \sin \theta = f_1(t, x, u),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = (1/2) \rho_0 e^{-\beta h} v \sigma_x k_{\varphi}(t) - \left( \frac{g_m}{v} - \frac{v}{R+h} \right) \cos \theta = f_2(t, x, u),$$

$$\frac{dh}{dt} = v \sin \theta = f_3(t, x, u), \quad (4.44)$$

где  $x$  — вектор состояния,  $x = (v, \theta, h)^T$ ;  $t$  — время;  $\rho_0, \beta$  — параметры модели плотности атмосферы;  $R, g_m$  — параметры планеты;  $u$  — управление;  $u = k_{\varphi}, k_{\varphi} = k_0 \cos \gamma_c$ ;  $k_0, \sigma_x$  — параметры ЛА;  $\gamma_c$  — угол крена.

*Интервал функционирования* системы не фиксирован. Его левый конец задан:  $t_0 = 0$ , а правый конец  $t_1$  определяется моментом достижения заданной высоты  $h_{зад}$ .

*Начальные условия* движения считаются заданными:

$$v(0) = v_0, \theta(0) = \theta_0, h(0) = h_0. \quad (4.45)$$

На управление наложено *ограничение*:  $|k_{\varphi}| \leq k_0$ . Значение  $k_{\varphi} = -k_0$  соответствует случаю, когда подъемная сила, действующая на ЛА, направлена вниз. При  $k_{\varphi} = k_0$  подъемная сила направлена вверх. Предполагается, что изменение  $k_{\varphi}$  может происходить мгновенно, а текущая информация о векторе состояния отсутствует.

*Множество допустимых управлений* образуется кусочно-непрерывными функциями  $k_{\varphi}(\cdot)$ , удовлетворяющими ограничению.

Предполагается, что *внешние возмущения* на ЛА отсутствуют.

Требуется найти управление  $k_{\varphi}^*(\cdot)$ , соответствующие ему траекторию и момент окончания процесса, минимизирующие конечную скорость на заданной высоте:  $I = v(t_1) > \min$ .

Для решения задачи используем методику применения принципа максимума, описанную в разд.4.6.4. Здесь  $f^0(t, x, u) = 0$ ,  $F(x) = v$ . Решается *задача Майера*.

1. Составим гамильтониан:

$$\begin{aligned} H(t, x, u) &= \sum_{i=1}^3 \psi_i(t) f_i(t, x, u) = \\ &= \psi_1(t) [ - (1/2) \rho_0 e^{-\beta h} v^2 \sigma_x - g_m \sin \theta ] + \psi_2(t) [ (1/2) \rho_0 e^{-\beta h} v \sigma_x k_{\varphi} - \end{aligned}$$

$$-\left[\frac{g_m}{v} - \frac{v}{R+h}\right] \cos \theta + \psi_3(t) v \sin \theta.$$

2. Найдем максимум  $H(t, x, u)$  по управлению. Так как  $\rho_0 e^{-\beta h} v \sigma_x > 0$  и функция  $H(t, x, u)$  линейна по ограниченному управлению, то

$$k_{\psi_0}^*(t) = k_{\psi_0} \operatorname{sign} \psi_2(t), \quad (4.46)$$

т.е. оптимальное управление имеет релейную структуру.

3. Составим систему канонических уравнений (4.42). В нее входят уравнения системы (4.44) с начальными условиями (4.45) и конечным условием  $h(t_1) = h_{зад}$ , а также уравнения для вспомогательных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= - \frac{\partial H(t, x(t), u^*(t))}{\partial v} = \psi_1 \rho_0 e^{-\beta h} v \sigma_x - \\ &- \psi_2 \left\{ (1/2) \rho_0 e^{-\beta h} \sigma_x k_{\psi_0}^*(t) + [(g_m/v^2) + 1/(R+h)] \cos \theta \right\} - \psi_3 \sin \theta, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= - \frac{\partial H(t, x(t), u^*(t))}{\partial \theta} = \psi_1 g_m \cos \theta - \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$- \psi_2 [(g_m/v) - v/(R+h)] \sin \theta - \psi_3 v \cos \theta,$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_3}{dt} &= - \frac{\partial H(t, x(t), u^*(t))}{\partial h} = -(1/2) \beta \psi_1 \rho_0 e^{-\beta h} v^2 \sigma_x + \\ &+ \psi_2 [(1/2) \beta \rho_0 e^{-\beta h} v \sigma_x k_{\psi_0}^*(t) + v \cos \theta / (R+h)^2]. \end{aligned}$$

4. Применим условия трансверсальности:

$$\begin{aligned} [\delta v - H(t_1) \delta t_1 + \psi_1(t_1) \delta v + \psi_2(t_1) \delta \theta + \psi_3(t_1) \delta h] = \\ = [(\psi_1(t_1) + 1) \delta v - H(t_1) \delta t_1 + \psi_2(t_1) \delta \theta + \psi_3(t_1) \delta h] = 0. \end{aligned}$$

Так как  $t_1$ ,  $v$ ,  $\theta$  в конце участка торможения свободны, то их вариации  $\delta t_1$ ,  $\delta v$ ,  $\delta \theta$  произвольны, а так как  $h(t_1)$  задано, то  $\delta h = 0$ . Отсюда

$$H(t_1, x(t_1), u(t_1)) = 0, \quad \psi_1(t_1) = -1, \quad \psi_2(t_1) = 0. \quad (4.48)$$

Из условия  $H(t_1, x(t_1), u(t_1)) = 0$  следует недостающее конечное условие, определяющее  $\psi_3(t_1)$ .

5. Решим двухточечную краевую задачу, в которую входят шесть дифференциальных уравнений из систем (4.44), (4.47), выражение (4.46), три начальных условия (4.45), а также конечное условие на высоту полета и следствие условий трансверсальности (4.48):

$$h(t_1) = h_{\text{зад}}, \quad \psi_1(t_1) = -1, \quad \psi_2(t_1) = 0,$$

$$\psi_3(t_1) = - \frac{(1/2)\rho_0 e^{-\beta h(t_1)} v^2(t_1) \sigma_x + g_x \sin \theta(t_1)}{v(t_1) \sin \theta(t_1)}.$$

В результате решения краевой задачи находим траекторию  $(v^*(t), \theta^*(t), h^*(t))_T$ , вспомогательные переменные  $(\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$  и момент окончания процесса  $t_1^*$ . Искомое оптимальное управление, как следует из (4.46), определяется поведением функции  $\psi_2(t)$ .

Графики оптимальной траектории и управления, найденных приближений для следующих значений параметров:  $\rho_0 = 0,013 \text{ кг/м}^3$ ;  $\beta = 9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$ ;  $R = 3,4 \cdot 10^6 \text{ м}$ ;  $g_x = 3,72 \text{ м/с}^2$ ;  $k_6 = 0,3$ ;  $\sigma_x = 1/150 \text{ м}^2/\text{кг}$ ;  $h_{\text{зад}} = 5 \cdot 10^3 \text{ м}$ ;  $v_0 = 6 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ ;  $\theta_0 = -0,314 \text{ рад}$ ;  $h_0 = 10^5 \text{ м}$ , изображены на рис. 4.5.

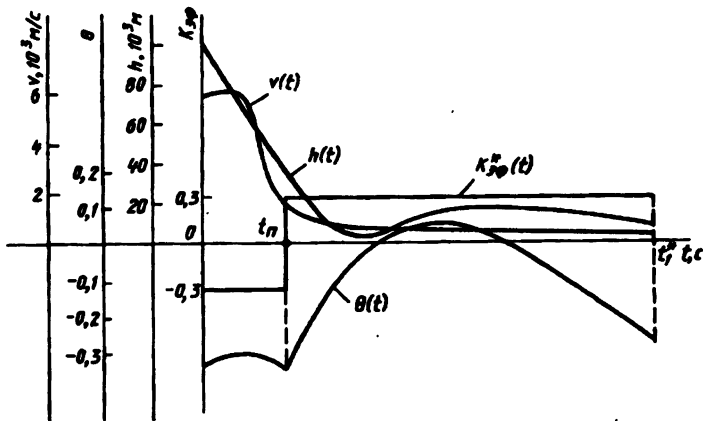


Рис.4.5

Оптимальный закон управления состоит в однократном изменении  $k_{\psi_2}$ , от значения  $-k_6$  до  $k_6$ , т.е. в момент входа в атмосферу подъемная сила должна быть направлена вниз, для того чтобы как можно быстрее достичь плотных слоев атмосферы. Затем в момент  $t_n$  подъемная сила должна быть направлена вверх, чтобы продлить полет в плотных слоях атмосферы и обеспечить эффективное торможение.

## 4.7. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ С НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

### 4.7.1. Постановка задачи

Рассмотрим частный случай задачи, поставленной в разд.4.2.

Пусть модель объекта управления (4.1) линейна:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t), \quad (4.49)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  — матрицы размера  $n \times n$ ,  $n \times q$ ,  $n \times 1$  соответственно. Остальные обозначения совпадают с используемыми в разд.4.

На траекториях системы определим функционал (4.3) в квадратичном виде

$$I(x(t_0), d) = (1/2) \int_{t_0}^{t_1} [x(t)^T S(t)x(t) + u(t)^T Q(t)u(t)] dt + (1/2) [x(t_1)^T \Lambda x(t_1)], \quad (4.50)$$

где  $S(t)$ ,  $\Lambda$  — неотрицательно определенные симметрические матрицы размера  $n \times n$ , а  $Q(t)$  — положительно определенная симметрическая матрица размера  $q \times q$ ;  $f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u + C(t)$ ,  $f^0(t, x, u) = (1/2) [x^T S(t)x + u^T Q(t)u]$ ;  $F(x) = (1/2)x^T \Lambda x$ .

Предполагается, что элементы матриц  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $S(t)$ ,  $Q(t)$  непрерывно дифференцируемы, а на управление ограничений не наложено.

Начальные условия (4.2) заданы множеством  $\Omega$ :

$$x(t_0) \in \Omega = \{x | x^2 = y_0(x^1) = y_{00} + y_{0j}x^j, x^j \in \mathbb{R}^m\}, \quad (4.51)$$

где  $y_{00}$ ,  $y_{0j}$  — неизвестные матрицы размера  $(n-m) \times 1$ ,  $(n-m) \times m$  соответственно.

Требуется найти оптимальную синтезирующую функцию  $u^*(t, x^1)$  на множестве  $\Omega$ .

### 4.7.2. Соотношения для определения оптимального управления

Обозначим в матрице  $A$  и в остальных матрицах соответствующие блоки:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \hat{A} & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \\ a_{m+1,1} \dots a_{m+1,n} \\ & \hat{A} & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ & \bullet & \hat{A} & & & \hat{A} \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \\ a_{m+1,1} \dots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ & \bullet & \hat{A} & & & \hat{A} \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

где матрицы имеют следующие размеры:  $\hat{A} - m \times n$ ;  $\dot{A} - (n-m) \times n$ ;  $\circ A - m \times m$ ;  $A^\circ - m \times (n-m)$ ;  $\bullet A - (n-m) \times m$ ;  $A_\bullet - (n-m) \times (n-m)$ .

Предлагается искать неизвестные функции, входящие в систему (4.17), в виде

$$\begin{aligned} y(t, x^1) &= y_0(t) + y_1(t)x^1, \\ W(t, x^1) &= (1/2)x^{1T}K_2(t)x^1 + K_1(t)^T x^1 + K_0(t), \\ \psi(t, x^1) &= \psi(t) + N(t)^T x^1, \end{aligned} \quad (4.52)$$

где матрицы имеют следующие размеры:  $y_0(t) - (n-m) \times 1$ ;  $y_1(t) - (n-m) \times m$ ;  $K_1(t) - m \times 1$ ;  $K_2(t) - m \times m$ ;  $\psi(t) - (n-m) \times 1$ ;  $N(t) - m \times (n-m)$ ;  $K_0(t)$  - функция.

В результате подстановки в (4.17) получаем систему [24], определяющую структуру оптимального управления:

$$\begin{aligned} u^*(t, x^1) &= Q^{-1} \left\{ \hat{B}^T [K_2 x^1 + K_1 + N(y_0 + y_1 x^1)] + \dot{B}^T [\psi + N^T x^1] \right\} - \\ &= Q^{-1} \dot{B}^T \left\{ \begin{array}{l} [K_2 x^1 + K_1 + N(y_0 + y_1 x^1)] \\ [\psi + N^T x^1] \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

и неизвестные функции, входящие в (4.52):

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= -y_1 A^\circ y_0 - y_1 \hat{B} Q^{-1} [\hat{B}^T (K_1 + N y_0) + \dot{B}^T \psi] - y_1 \hat{C} + A_\bullet y_0 + \\ &+ \dot{B} Q^{-1} [\hat{B}^T (K_1 + N y_0) + \dot{B}^T \psi] + \dot{C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1 A^\circ y_1 - y_1 \hat{B} Q^{-1} [\hat{B}^T (K_2 + N y_1) + \dot{B}^T N^T] - y_1 \circ A + \\ &+ \bullet A + A_\bullet y_1 + \dot{B} Q^{-1} [\hat{B}^T (K_2 + N y_1) + \dot{B}^T N^T], \end{aligned}$$

$$y_0(t_0) = y_{00}, \quad y_1(t_0) = y_{10},$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= S_\bullet y_0 - A_\bullet^T \psi - A^{\circ T} [K_1 + N y_0] - N^T A^\circ y_0 - \\ &- N^T \hat{B} Q^{-1} [\hat{B}^T (K_1 + N y_0) + \dot{B}^T \psi] - N^T \hat{C}, \end{aligned}$$

$$\dot{N} = -\circ A^T N - [y_1^T N^T + K_2] \hat{B} Q^{-1} \hat{B} N - y_1^T A^{\circ T} N - [y_1^T N^T + K_2] A^\circ -$$

$$-NA_{\bullet} + S^{\circ} + y_1^T S_{\bullet} - NBQ^{-1}\hat{B}^T N,$$

$$N(t_1) = -\Lambda^{\circ} - y_1^T(t_1)\Lambda_{\bullet}, \quad \psi(t_1) = -\Lambda_{\bullet}, \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_2 = & -K_2^{\circ} A - K_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T K_2 - K_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T N^T - N_{\bullet}^{\circ} A - A^T K_2 - \\ & - NBQ^{-1} \hat{B}^T K_2 + S^{\circ} S - NBQ^{-1} \hat{B}^T K N^T - y_1^T S_{\bullet} y_1 + y_1^T N^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T N y_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 = & -K_2 \hat{C} - A^T K_1 - K_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T K_1 - K_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T \psi - A^T \psi - \\ & - N \hat{C} - NBQ^{-1} \hat{B}^T \psi - NBQ^{-1} \hat{B}^T K_1 - y_1^T S_{\bullet} y_0 + y_1^T N^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T N y_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_0 = & -(1/2) y_0^T S_{\bullet} y_0 - K_1^T \hat{C} - (1/2) K_1^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T K_1 - (1/2) K_1^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T \psi - \\ & - (1/2) \psi^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T K_1 - (1/2) \psi^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T \psi - \psi^T \hat{C} + (1/2) y_0^T N^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T N y_0, \end{aligned}$$

$$K_2(t_1) = -\Lambda + y_1^T(t_1)\Lambda_{\bullet} y_1(t_1),$$

$$K_1(t_1) = y_1^T(t_1)\Lambda_{\bullet} y_0(t_1),$$

$$K_0(t_1) = (1/2) y_0^T(t_1)\Lambda_{\bullet} y_0(t_1).$$

Решая систему (4.54), можно определить искомое оптимальное управление с неполной информацией (4.53).

Минимальное значение функционала вычисляется по формуле (4.18):

$$\begin{aligned} \min_{d \in \mathcal{D}} I = & -W(t_0, x^1) - \psi^T(t_0, x^1) y(t_0, x^1) = \\ & = -(1/2) x^{1T} K_2(t_0) x^1 - K_1(t_0)^T x^1 - K_0(t_0) - \\ & - \psi(t_0)^T [y_{00} + y_{00} x^1] - x^{1T} N(t_0) [y_{00} + y_{00} x^1] \quad \forall x^1 \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \quad (4.55)$$

#### 4.7.3. Предельные случаи информированности о векторе состояния

1.  $m=0$  (информация о векторе состояния отсутствует). Множество  $\Omega$  задано точкой  $x(t_0) = y_{00}$ . Система уравнений преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= Ay_0 + BQ^{-1}B^T\psi + C, \\ \dot{\psi} &= Sx - A^T\psi, \\ \dot{K}_0 &= -(1/2)y_0^T S y_0 - (1/2)\psi^T BQ^{-1}B^T\psi - \psi^T C. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Краевые условия:

$$\begin{aligned} y_0(t_0) &= y_\infty, \\ \psi(t_1) &= -\Lambda y_0(t_1), \\ K_0(t_1) &= (1/2)y_0^T(t_1)\Lambda y_0(t_1). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Оптимальное управление (4.53) здесь зависит только от времени:

$$u^*(t) = Q^{-1}(t)B(t)^T\psi(t). \quad (4.58)$$

Минимальное значение функционала

$$\min_{d \in \mathcal{D}} I = -K_0(t_0) - \psi^T(t_0)y_\infty.$$

Полученные соотношения совпадают с имеющимися в [15,30].

2.  $m = n$  (имеется полная информация о векторе состояния).

Система (4.54) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{K}_2 &= -K_2A - A^TK_2 - K_2BQ^{-1}B^TK_2 + S, & K_2(t_1) &= -\Lambda, \\ \dot{K}_1 &= -K_2C - A^TK_1 - K_2BQ^{-1}B^TK_1, & K_1(t_1) &= 0, \\ \dot{K}_0 &= -K_1^TC - (1/2)K_1^TBQ^{-1}B^TK_1, & K_0(t_1) &= 0, \end{aligned} \quad (4.59)$$

а оптимальный линейный регулятор с полной обратной связью определяется формулой, следующей из (4.53):

$$u^*(t, x) = Q^{-1}(t)B(t)^T[K_2(t)x + K_1(t)]. \quad (4.60)$$

Минимальное значение функционала вычисляется по формуле

$$\min_{d \in \mathcal{D}} I = -W(t_0, x) = -(1/2)x^TK_2(t_0)x - K_1(t_0)^Tx - K_0(t_0).$$

Если в уравнении (4.49) функция  $C(t) \equiv 0$ , то  $K_1(t)^T \equiv 0$ ,  $K_0(t) \equiv 0$  и оптимальное управление

$$u^*(t, x) = Q^{-1}(t)B(t)^TK_2(t)x$$

определяется только решением уравнения Риккати (4.26) для матрицы  $K_2(t)$ .



**Пример 4.10.** Даны модель объекта управления

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u_2(t),$$

и функционал (4.50):

$$I(x(t_0), d) = (1/2) \int_0^1 [u_1(t)^2 + u_2(t)^2] dt + (1/2)x_2(1)^2.$$

Здесь  $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $u_1 \in \mathbb{R}$ ,  $u_2 \in \mathbb{R}$ ,  $f^0(t, x, u) = (1/2)[u_1^2 + u_2^2]$ ,  $F(x) = (1/2)x_2^2$ .

Начальные условия заданы множеством  $\Omega$  размерности  $m = 1$ :

$$x(0) \in \Omega = \{x \mid x_2 = (10/3)x_1, x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Требуется найти оптимальную синтезирующую функцию  $u^*(t, x_1)$  на множестве  $\Omega$ .

□ В поставленной задаче

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bullet \Lambda = 0, \Lambda^\circ = 0, \bullet \Lambda = -1, \Lambda_\bullet = 0, \hat{B} = [1 \ 0], \hat{B}^\circ = [0 \ 1],$$

$$\bullet \Lambda = 0, \Lambda^\circ = 0, \bullet \Lambda = 0, \Lambda_\bullet = -1, y_\infty = 0, y_\infty = 10/3.$$

Функции, входящие в (4.52), имеют вид

$$y(t, x_1) = y_0(t) + y_1(t)x_1,$$

$$W(t, x_1) = (1/2)K_2(t)x_1^2 + K_1(t)x_1 + K_0(t),$$

$$\psi(t, x_1) = \psi(t) + N(t)x_1,$$

где  $y_0(t)$ ,  $y_1(t)$ ,  $K_0(t)$ ,  $K_1(t)$ ,  $K_2(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $N(t)$  — неизвестные функции.

Тогда из (4.53) получим структуру оптимального управления:

$$u_1^*(t, x_1) = K_2x_1 + K_1 + N(y_0 + y_1x_1), \quad u_2^*(t, x_1) = \psi + Nx_1.$$

Система (4.54) имеет вид

$$\dot{y}_0 + y_1(K_1 + Ny_0) - \psi = 0,$$

$$y_0(0) = 0,$$

$$\dot{y}_1 + y_1K_2 + 1 + y_1^2N - N = 0,$$

$$y_1(0) = 10/3,$$

$$\dot{\psi} = -N^2y_0 - NK_1,$$

$$\psi(1) = -y_0(1),$$

$$\begin{aligned}
 \dot{N} &= -K_2 N - y_1 N^2, & N(1) &= -y_1(1), \\
 \dot{K}_2 + K_2^2 + 2N - N^2 y_1^2 &= 0, & K_2(1) &= y_1^2(1), \\
 \dot{K}_1 + K_1 K_2 - \psi + \psi N - y_1 y_0 N^2 &= 0, & K_1(1) &= y_1(1) y_0(1), \\
 \dot{K}_0 + (1/2) K_1^2 + (1/2) \psi^2 - (1/2) y_0^2 N^2 &= 0, & K_0(1) &= (1/2) y_0^2(1).
 \end{aligned}$$

Ее решение:

$$\begin{aligned}
 y_0(t) = K_0(t) = K_1(t) = \psi(t) = 0, \quad y_1(t) &= \frac{20 - 12t - 3t^2 + t^3}{3(2 + 2t - t^2)}, \\
 K_2(t) &= \frac{52 - 24t - 24t^2 + 8t^3}{3(2 + 2t - t^2)^2}, \quad N(t) = -\frac{2}{(2 + 2t - t^2)}.
 \end{aligned}$$

Искомая оптимальная синтезирующая функция (4.53):

$$u_1^*(t, x_1) = \frac{2x_1(1-t)}{(2+2t-t^2)}, \quad u_2^*(t, x_1) = -\frac{2x_1}{(2+2t-t^2)}.$$

Аналогично примеру 4.4 с помощью прямой подстановки легко показать, что на траекториях, исходящих из множества  $\Omega$ , оптимальная синтезирующая функция  $(u_1^*(t, x_1), u_2^*(t, x_1))$  обеспечивает то же значение функционала, что и оптимальное управление с полной обратной связью  $u^*(t, x) = (u_1^*(t, x), u_2^*(t, x))$ . Оба управления для фиксированного начального условия из множества  $\Omega$  порождают оптимальные программные управления. ■

## 5. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу синтеза оптимальных стохастических дифференциальных систем (см. разд. 2.3).

Начнем с предварительных замечаний, а затем перейдем к строгой формулировке постановки задачи. Следует обратить внимание на математическое описание блоков, входящих в схему, изображенную на рис. 4.1.

Пусть поведение моделей объекта управления и измерений описывается системой стохастических дифференциальных уравнений Ито (2.83) [7, 26, 28, 44]:

$$d_0 \tilde{X} = \tilde{f}(t, \tilde{X}(t), u(t)) dt + \tilde{\sigma}(t, \tilde{X}(t), u(t)) d_0 \tilde{W} \quad , \quad \tilde{X}(t_0) = \tilde{X}_0 \quad ,$$

$$d_0 Y = c(t, \tilde{X}(t), u(t)) dt + \gamma(t, \tilde{X}(t), u(t)) d_0 V \quad , \quad Y(t_0) = Y_0 \quad ,$$

где  $\tilde{X}$  — вектор состояния объекта управления;  $Y$  — вектор измерения;  $\tilde{f}(t, \tilde{x}, u)$ ,  $\tilde{\sigma}(t, \tilde{x}, u)$ ,  $c(t, \tilde{x}, u)$ ,  $\gamma(t, \tilde{x}, u)$  — заданные функции;  $\tilde{W}(t), V(t)$  — независимые стандартные винеровские случайные процессы;  $u$  — вектор управления;  $t$  — время;  $t_0$  — время начала процесса управления;  $\tilde{X}_0, Y_0$  — начальные условия.

Будем считать, что при управлении используется информация только о текущей величине вектора измерения, т.е.  $u(t) = u(t, Y(t))$ . На рис. 5.1 изображена схема рассматриваемой системы управления.

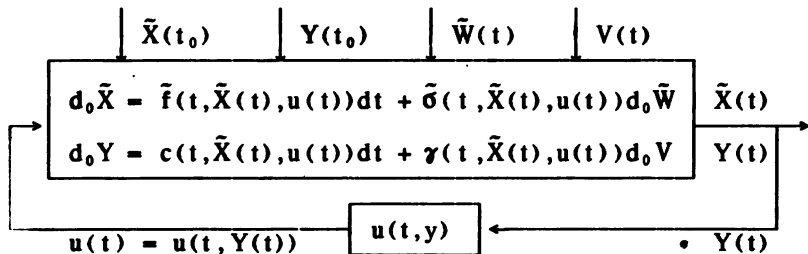


Рис. 5.1

Для упрощения обозначений введем расширенный вектор состояния  $X = (Y, \tilde{X})^T = (X^1, X^2)^T$  и функции

$$f(t, x, u) = \begin{bmatrix} c(t, \tilde{x}, u) \\ \tilde{f}(t, \tilde{x}, u) \end{bmatrix}, \quad \sigma(t, x, u) = \begin{bmatrix} \gamma(t, \tilde{x}, u) & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}(t, \tilde{x}, u) \end{bmatrix},$$

$$W(t) = \begin{bmatrix} V(t) \\ \tilde{W}(t) \end{bmatrix}.$$

Тогда вектор  $X^1$  является *выходом измерительной системы*, который используется далее при управлении, а вектор  $X^2$  описывает *состояние объекта управления*, текущая информация о котором отсутствует. Таким образом, вектор состояния объекта управления  $X^2$  и вектор измерения  $X^1$  образуют некоторый расширенный вектор, называемый *вектором состояния системы*.

Поведение модели системы управления описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито:

$$d_0 X = f(t, X(t), u(t)) dt + \sigma(t, X(t), u(t)) d_0 W, \quad X(t_0) = X_0, \quad (5.1)$$

где  $X$  — вектор состояния системы,  $X = (X^1, X^2)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $X^1 = (X_1, \dots, X_m)^T$ ,  $X^2 = (X_{m+1}, \dots, X_n)^T$ ,  $0 \leq m \leq n$  (предположим, что о компонентах вектора  $X^1 \in \mathbb{R}^m$  известна текущая информация, а о компонентах вектора  $X^2 \in \mathbb{R}^{n-m}$  она отсутствует);  $u$  — вектор управления,  $u \in U \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $U$  — некоторое заданное множество;  $t$  — время,  $t \in T' = [t_0, t_1] = T \cup \{t_0\} \cup \{t_1\}$ ,  $T'$  — интервал времени функционирования системы, моменты времени  $t_0$  и  $t_1$  заданы;  $W(t)$  —  $k$ -мерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от  $X_0$  (второй член в (5.1) характеризует внешние воздействия на объект и погрешности измерений);  $f(t, x, u): T' \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma(t, x, u)$  — матричная функция размера  $n \times k$ ;  $\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство.

Обозначим:

$$B = \mathbb{R}^n, \quad B_1 = \mathbb{R}^m, \quad B_2 = \mathbb{R}^{n-m}, \quad Q = (t_0, t_1) \times \mathbb{R}^n, \quad Q' = [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n.$$

Начальное условие  $X_0$  определяется плотностью вероятности

$$p(t_0, x) = p_0(x) \in P \quad \forall x \in B, \quad (5.2)$$

где  $P = \left\{ p(x) \mid p(x) \in C^2(B), \int_B p(x) dx = 1, p(x) \geq 0 \forall x \in B \right\}$ ,  $C^k(B)$  — множество  $k$  раз непрерывно дифференцируемых функций.

Предполагается, что при управлении используется информация только о времени и о текущей величине вектора  $X^1$ , т.е. управление  $u(t) = u(t, X^1(t))$ , применяемое в каждый момент времени  $t \in T'$ , имеет вид управления с обратной связью по неполному вектору состояния (рис. 5.2).

Число  $m$ ,  $0 \leq m \leq n$ , определяется условиями информированности. При  $m=n$  имеется информация о всех координатах вектора  $X$ : система (рис. 5.2) будет системой с *полной обратной связью*, а при  $m=0$  — системой, *разомкнутой по состоянию*, где применяется так называемое *программное управление*  $u(t)$ .

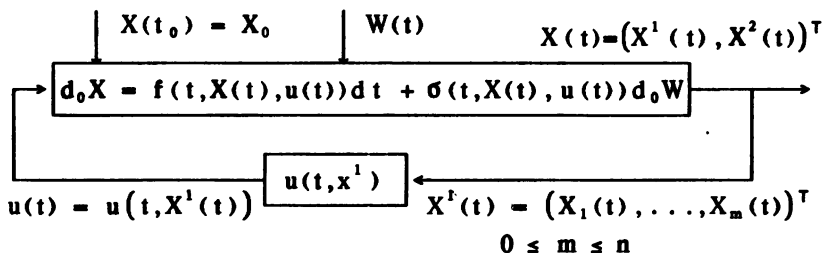


Рис.5.2

Множество допустимых управлений  $\gamma_m$  состоит из функций  $u(t, x^1): T' \times V_1 \rightarrow U$  таких, что для всех  $i=1, \dots, n; j=1, \dots, k$  выполняются следующие условия [7,44].

1. Функции  $f_i^{u(\cdot)}(t, x) = f_i(t, x, u(t, x^1))$ .  $\sigma_{ij}^{u(\cdot)}(t, x) = \sigma_{ij}(t, x, u(t, x^1))$  определены на  $Q'$ , кусочно-непрерывны по  $t$  на  $T' \forall x \in V$ ,  $\forall t \in T' f_i^{u(\cdot)}(t, \cdot) \in C^1(V)$  и имеют ограниченные первые производные по  $x$ ,  $\sigma_{ij}^{u(\cdot)}(t, \cdot) \in C^2(V)$  и имеют ограниченные первые и вторые производные по  $x$ .

2. Существует  $c_1 = \text{const} > 0$  такая, что

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{u(\cdot)}(t, x) z_i z_j \geq c_1 |z|^2 \quad \forall (t, x) \in Q', \forall z \in V,$$

где

$$a_{ij}^{u(\cdot)}(t, x) = a_{ij}(t, x, u(t, x^1)), \quad a_{ij}(t, x, u) = \sum_{l=1}^k \sigma_{il}(t, x, u) \sigma_{jl}(t, x, u).$$

Тогда решение уравнения (5.1) существует, единственно и является непрерывным марковским процессом. Если плотность вероятности этого процесса  $p(t, x) \in C^{1,2}(Q)$ , где  $C^{1,2}(Q)$  — пространство непрерывных на  $Q$  функций вместе с частными производными  $\partial p / \partial t$ ,  $\partial p / \partial x_i$ ,  $\partial^2 p / \partial x_i \partial x_j$  ( $i, j=1, \dots, n$ ), то она удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова (2.87) [7,14,26,44]:

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ f_i(t, x, u(t, x^1)) p(t, x) \right] +$$

$$+ (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[ a_{ij}(t, x, u(t, x^1)) p(t, x) \right] - A^{u(\cdot)} [p(t, x)]$$

$$\forall (t, x) \in Q \quad (5.3)$$

с начальным условием (5.2). Здесь  $A^{u(\cdot)}[\cdot]$  — дифференциальный оператор.

Заметим, что для каждого управления  $u(t, x^1) \in \gamma_m$  и соответствующего решения  $p(t, x)$  уравнения (5.3)  $\forall \varphi(t, x) \in C^{1,2}(Q)$  выполняется соотношение [7,26]:

$$\int_B A^{u(\cdot)} [p(t, x)] \varphi(t, x) dx = \int_B A_*^{u(\cdot)} [\varphi(t, x)] p(t, x) dx, \quad (5.4)$$

где  $A_*^{u(\cdot)} [\varphi(t, x)]$  — сопряженный дифференциальный оператор,

$$A_*^{u(\cdot)} [\varphi(t, x)] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u(t, x^1)) +$$

$$+ (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x, u(t, x^1)).$$

Обозначим через  $\mathcal{D}_m$  множество пар  $d_m = (p(t, x), u(t, x^1))$ , где функции  $p(t, x) \in C^{1,2}(Q)$ ,  $u(t, x^1) \in \gamma_m$  и удовлетворяют уравнению (5.3) с начальным условием (5.2).

Определим на множестве  $\mathcal{D}_m$  функционал качества управления

$$J(p_0(x), d_m) = \int_0^1 \int_B f^0(t, p(t, x), u(t, x^1)) dx dt + F(p(t_1, x)), \quad (5.5)$$

где  $f^0(t, p, u)$ ,  $F(p(x))$  — заданные непрерывная функция и непрерывный функционал,  $f^0(t, p, u): T' \times R_+^1 \times U \rightarrow R^1$ ,  $F(p(x)): P \rightarrow R^1$ ,  $R_+^1 = [0, \infty)$ ;  $p(x) = p(t, x)$  при фиксированном  $t$ . Дополнительные ограничения на функции, входящие в (5.1), (5.5), накладываются далее по мере необходимости.

Примеры функционала (5.5):

1) Если

$$f^0(t, p(t, x), u(t, x^1)) = [p(t, x) - p_{on}(t, x)]^2,$$

$$F(p(t_1, x)) = \int_B [p(t_1, x) - p_{on}(t_1, x)]^2 dx,$$

то функционал описывает отклонение текущей плотности вероятности от опорной  $p_{\text{он}}(t, x)$ .

2) Если

$$f^0(t, p(t, x), u(t, x^1)) = f^0(t, x, u(t, x^1)) p(t, x),$$

$$F(p(t_1, x)) = \int_B F(x) p(t_1, x) dx,$$

то функционал (5.5) характеризует среднее значение функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, X(t), u(t, X^1(t))) dt + F(X(t_1)), \text{ определенного на траекториях}$$

системы (5.1).

3) Если

$$f^0(t, p(t, x), u(t, x^1)) = 0, \quad F(p(t_1, x)) = \left[ \int_B x p(t_1, x) dx - \hat{x}_{\text{он}} \right]^2,$$

то функционал (5.5) характеризует степень отклонения конечного значения математического ожидания от опорного  $\hat{x}_{\text{он}}$ .

Далее рассматриваются две задачи. В первой задаче начальная плотность вероятности считается заданной. Во второй решение ищется сразу для всех допустимых начальных плотностей.

**Задача 1.** Требуется найти такой элемент  $d_m^* = (p^*(t, x), u^*(t, x^1)) \in \mathcal{D}_m$ , что

$$J(p_0(x), d_m^*) = \min_{d_m \in \mathcal{D}_m} J(p_0(x), d_m). \quad (5.6)$$

Одновременно рассмотрим более общую задачу нахождения так называемых оптимальных синтезирующих функций вида  $u^*(t, x; p(x))$ :  $T' \times V_1 \times P \rightarrow U$ , являющихся функциями времени, координат вектора  $x^1$ , информация о которых известна, и функционалами от плотности вероятности  $p(x)$ . Предполагается, что каждая из оптимальных синтезирующих функций (при фиксированном  $m$ ) для заданной начальной плотности вероятности порождает оптимальное управление  $u^*(t, x^1) \in \gamma_m$ , т.е. если имеется решение  $p^*(t, x)$  уравнения (5.3) совместно с  $u = u^*(t, x^1; p(x))$  для произвольной начальной плотности вероятности  $p(t_0, x) \in P$ , то  $u^*(t, x^1; p^*(t, x)) = u^*(t, x^1) \in \gamma_m$ .

Задача 2. Требуется найти такую синтезирующую функцию  $u^*(t, x^1; p(x))$ , что

$$J(p(t_0, x), p^*(t, x), u^*(t, x^1; p^*(t, x))) = \min_{d_m \in \mathcal{D}_m} J(p(t_0, x), d_m) \quad \forall p(t_0, x) \in P. \quad (5.7)$$

Замечания. 1. В задаче 2 считается, что множество  $\mathcal{D}_m$  зависит от начальной плотности вероятности. Эта зависимость с целью уменьшения громоздкости обозначений явно не указана, но везде далее предполагается.

2. Задача 2 охватывает проблему поиска  $n+1$  оптимальных синтезирующих функций, каждая из которых порождает оптимальные управления в соответствующем классе функций, определяемом числом  $m$  ( $0 \leq m \leq n$ ), т.е. числом используемых в управлении компонент вектора состояния.

3. Предполагается, что минимум в (5.6), (5.7) и оптимальные синтезирующие функции вида  $u^*(t, x^1; p(x))$  существуют. При невыполнении этого предположения постановка задачи может быть сформулирована в терминах минимизирующих последовательностей [6, 15].

4. При менее жестких ограничениях на правые части уравнения (5.1) следует использовать понятие слабого решения, а решение уравнения (5.3) понимать в обобщенном смысле.

Таким образом, проведена редукция исходной стохастической задачи к детерминированной проблеме управления решением уравнения в частных производных (5.3).

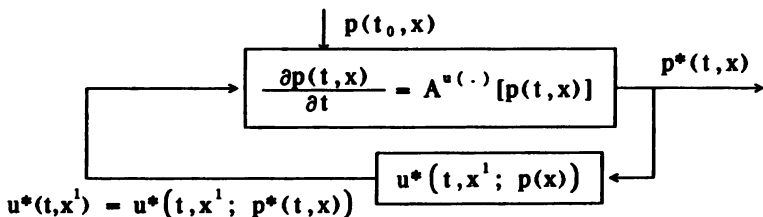


Рис. 5.3

Здесь роль новой модели объекта управления играет уравнение (5.3), а состояние описывается функцией  $p(t, x)$ . При решении задачи 2 следует иметь в виду наличие двух уровней определения управления системой (5.1). Управление, представленное на рис. 5.3, для каждой начальной плотности вероятности  $p(t_0, x)$  порождает оптимальное управление  $u^*(t, x)$  в задаче 1, которое затем используется в схеме, изображенной на рис. 5.2, для управления траекториями исходной системы.



## 5.2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Введем в рассмотрение множество  $\Sigma$  функций  $S(t; p(x)): T' \times P \rightarrow \mathbb{R}^1$ , непрерывных на  $T' \times P$ , непрерывно дифференцируемых по  $t$  и имеющих непрерывную вариационную (функциональную) производную по аргументу  $p(x)$ , причем

$$\frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} \in C^{1,2}(Q) \text{ и непрерывна на } Q', \text{ а также конструкции}$$

$$R(t, p(x), u) = \frac{\delta S(t, p(x))}{\delta t} + \int_B \left\{ A_*^u \left[ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} \right] p(x) - f^0(t, p(x), u) \right\} dx, \quad (5.8)$$

$$G(t_1, p(x)) = S(t_1, p(x)) + F(p(x)),$$

где  $\forall \varphi(t, x) \in C^{1,2}(Q)$

$$A_*^u[\varphi(t, x)] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x, u)$$

и  $A_*^{u^{(1)}}[\varphi(t, x)] = A_*^u[\varphi(t, x)]$  при  $u = u(t, x^1)$ .

Применим принцип расширения с заданием множества  $V$  и поиском доопределения функционала  $J$  на множестве  $V$  (см. разд. 4.2).

Определим множество  $V$  пар  $d_m = (p(t, x), u(t, x^1))$ , где:

а) элементы пар по сравнению с входящими в  $\mathcal{D}_m$  необязательно связаны уравнением (5.3);

б)  $p(t_0, x) = p_0(x) \in P$ ;

в) допускаются разрывы первого рода функций  $p(t, x)$ ,  $u(t, x^1)$  по  $t \forall x \in B$ .

Таким образом, множество  $\mathcal{D}_m \subset V$  и расширение построено. Доопределение функционала  $J$  на множестве  $V$  производится с помощью задания функции  $S(t, p(x)) \in \Sigma$ .

На множестве  $V$  определим функционал

$$L(p_0(x), d_m) = G(t_1, p(t_1, x)) - \int_{t_0}^{t_1} R(t, p(t, x), \dot{u}(t, x^1)) dt - S(t_0, p_0(x)). \quad (5.9)$$

Рассмотрим его на множестве  $\mathcal{D}_m \subset V$ , где между функциями  $p(t, x)$ ,  $u(t, x^1)$  существует дифференциальная связь (5.3).

Подставляя (5.8) в (5.9) с учетом (5.3), (5.4), получаем

$$L(p_0(x), d_m) = S(t_1, p(t_1, x)) + F(p(t_1, x)) - \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial S(t, p(t, x))}{\partial t} + \int_B \left[ \frac{\partial S(t, p(t, x))}{\delta p(x)} \frac{\partial p(t, x)}{\partial t} - f^0(t, p(t, x), u(t, x^1)) \right] dx \right\} dt - S(t_0, p_0(x)).$$

Используя формулу вычисления полной производной функции  $S(t, p(t, x))$  по аргументу  $t$

$$\frac{dS(t, p(t, x))}{dt} = \frac{\partial S(t, p(t, x))}{\partial t} + \int_B \frac{\partial S(t, p(t, x))}{\delta p(x)} \frac{\partial p(t, x)}{\partial t} dx$$

и интегрируя по времени с учетом равенства  $p(t_0, x) = p_0(x)$ , имеем

$$L(p_0(x), d_m) = S(t_1, p(t_1, x)) + F(p(t_1, x)) - \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{dS(t, p(t, x))}{dt} - \int_B f^0(t, p(t, x), u(t, x^1)) dx \right\} dt - S(t_0, p_0(x)) = S(t_1, p(t_1, x)) + F(p(t_1, x)) - S(t_1, p(t_1, x)) + S(t_0, p_0(x)) + \int_{t_0}^{t_1} \int_B f^0(t, p(t, x), u(t, x^1)) dx dt - S(t_0, p_0(x)) \equiv J(p_0(x), d_m).$$

Таким образом, на множестве  $\mathcal{D}_m$  функционалы  $L$  и  $J$  совпадают. Поведение функционала  $L$  на множестве  $V \setminus \mathcal{D}_m$  полностью определяется видом функции  $S(t, p(x))$ , т.е. задача удачного доопределения функционала  $J$  зависит от ее выбора.

Предположим, что при фиксированном  $m$  ( $0 \leq m \leq n$ ) функции в (5.8) достигают экстремальных значений:

$$r_m(t) = \max_{p(x) \in P} \left\{ \frac{\partial S(t, p(x))}{\partial t} + \int_{B_1} \left[ \max_{u \in U} \int_{B_2} \left\{ A_*^u \left[ \frac{\partial S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} \right] \times p(x) - f^0(t, p(x), u) \right\} dx^2 \right] dx^1 \right\}, \quad (5.10)$$

$$g = \min_{p(x) \in P} G(t, p(x)), \quad (5.11)$$

где функция  $r_m(t)$  кусочно-непрерывна на  $T$ .

Пусть имеется пара  $d_m^* = (p^*(t,x), u^*(t,x^1)) \in \mathcal{D}_m$ .

**Теорема 5.1.** (достаточные условия оптимальности в задаче 1).

Если существует такая функция  $S(t, p(x)) \in \Sigma$ , что пара  $d_m^* \in \mathcal{D}_m$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $R(t, p^*(t,x), u^*(t,x^1)) \nabla r_m(t)$  почти всюду на  $T$ ;
- 2)  $G(t_1, p^*(t_1, x)) = g$ ,

то справедливо условие (5.6).

**Замечание.** Функцию  $r_m(t)$  и величину  $g$  можно без ограничения общности положить равными нулю. При этом можно вычислить минимальное значение функционала (5.5) по формуле

$$\min_{d_m \in \mathcal{D}_m} J(p_0(x), d_m) = -S(t_0, p_0(x)). \quad (5.12)$$

**Доказательство.** Пусть имеется функция  $S(t, p(x)) \in \Sigma$ . Рассмотрим задачу поиска минимума функционала (5.9) на множестве  $V$ . Третье слагаемое при имеющихся  $p_0(x)$  и  $S(t, p(x)) \in \Sigma$  может быть вычислено. Экстремум первых двух слагаемых с учетом свойств функций, образующих пары  $d_m \in V$ , может определяться по отдельности. Минимум первого слагаемого определяется выражением (5.11). С учетом свойств пар  $d_m \in V$  имеем

$$\max_{d_m \in V} \int_{t_0}^{t_1} R(t, p(t,x), u(t,x^1)) dt \leq \int_{t_0}^{t_1} r_m(t) dt. \quad (5.13)$$

Отсюда и из (5.11), (5.9) находим

$$\min_{d_m \in V} L(p_0(x), d_m) \geq g - \int_{t_0}^{t_1} r_m(t) dt - S(t_0, p_0(x)). \quad (5.14)$$

Если имеется пара  $d_m^* = (p^*(t,x), u^*(t,x^1)) \in \mathcal{D}_m$ , удовлетворяющая условиям 1,2 теоремы 5.1, то с учетом (5.10), (5.11), (5.13), (5.14)  $L(p_0(x), d_m^*) \leq L(p_0(x), d_m) \forall d_m \in V$ . Так как  $d_m^* \in \mathcal{D}_m \subset V$ , то  $L(p_0(x), d_m^*) \leq L(p_0(x), d_m) \forall d_m \in \mathcal{D}_m$ . Как доказано выше,  $L(p_0(x), d_m) = J(p_0(x), d_m) \forall d_m \in \mathcal{D}_m$  при имеющейся  $S(t, p(x)) \in \Sigma$ . Поэтому  $J(p_0(x), d_m^*) \leq J(p_0(x), d_m) \forall d_m \in \mathcal{D}_m$ , что соответствует определению минимума функционала (5.5). При этом  $L(p_0(x), d_m^*) = -\min_{d_m \in \mathcal{D}_m} J(p_0(x), d_m) = -J(p_0(x), d_m^*)$ .

Теорема доказана.

Поясним замечание. Если существует функция  $S(t, p(x)) \in \Sigma$ ,

удовлетворяющая условиям 1,2 теоремы 5.1 при  $r_m(t) \neq 0$ ,  $g \neq 0$ , то, применяя прямую подстановку в (5.10), (5.11), можно найти, что функция

$$S'(t, p(x)) = S(t, p(x)) + \int_0^t r_m(\tau) d\tau - g$$

также им удовлетворяет при  $r_m'(t) \equiv 0$ ,  $g' = 0$ . При этом с учетом (5.14) минимальное значение функционала (5.5) определяется по формуле

$$\min_{d_m \in \mathcal{D}_m} J(p_0(x), d_m) = -S'(t_0, p_0(x)).$$

Теорема 5.1 дает алгоритм проверки элементов  $d_m \in \mathcal{D}_m$ , "подозрительных" на оптимальность. Если имеется такой элемент  $d_m^*$ , то следует задаться какой-либо функцией  $S(t, p(x))$ . Затем найти  $r_m(t)$  и  $g$  согласно (5.10), (5.11). Фактически, как следует из доказательства теоремы 5.1, при этом находится минимум функционала  $L$  на множестве  $V$ . Эта проблема легче исходной вариационной задачи, так как сводится к нахождению экстремума функций в (5.8). После этого следует проверить справедливость условий теоремы 5.1 на элементе  $d_m^*$ . Таким образом проверяется, достигается ли минимум функционала  $L$  на множестве  $V$  на элементе  $d_m^* \in D_m$ . Если ответ положительный, "подозрительный" элемент является оптимальным, если отрицательный, то следует перейти к выбору другой функции  $S(t, p(x))$ .

Рассмотрим задачу 2 нахождения оптимальных синтезирующих функций, сформулированную в разд. 5.1. Пусть в условиях (5.10), (5.11)  $r_m(t) \equiv 0$ ,  $g = 0$  и отсутствуют операции максимизации и минимизации по  $p(x)$ , а также имеется такая функция  $S(t, p(x))$ , при которой правые части в (5.10), (5.11) при этих предположениях не зависят от  $p(x) \in P$ . Тогда из (5.10), (5.11) следуют уравнение и краевое условие:

$$\frac{\partial S(t, p(x))}{\partial t} + \int_{B_1} \left[ \max_{u \in U} \int_{B_2} \left\{ A_*^u \left[ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} \right] p(x) - f^0(t, p(x), u) \right\} dx^2 \right] dx^1 = 0, \quad \forall (t, p(x)) \in T \times P, \quad (5.15)$$

$$S(t, p(x)) = -F(p(x)), \quad \forall p(x) \in P. \quad (5.16)$$

Соотношения (5.15), (5.16) дают первый способ нахождения оптимального управления в задаче 1,

Теорема 5.2 (достаточные условия оптимальности в задаче 2).

Если существуют функция  $S(t, p(x)) \in \Sigma$  и управление

$u^*(t, x^1; p(x))$ , удовлетворяющие (5.15), (5.16), то выполняется условие (5.7):

$$J(p(t_0, x), p^*(t, x), u^*(t, x^1; p^*(t, x))) = \min_{d_m \in \mathcal{D}_m} J(p(t_0, x), d_m)$$

$$\forall p(t_0, x) \in P.$$

**Доказательство.** Пусть удовлетворяются условия теоремы 5.2 и имеется произвольная начальная плотность вероятности  $p(t_0, x) \in P$ . Решив уравнение (5.3) с данной начальной плотностью вероятности  $p(t_0, x)$  и полученной синтезирующей функцией  $u^*(t, x^1; p(x))$ , можно найти пару  $d_m^* = (p^*(t, x), u^*(t, x^1) = u^*(t, x^1; p^*(t, x))) \in \mathcal{D}_m$ . Для произвольной пары  $d_m' \in \mathcal{D}_m$ , где плотность вероятности  $p'(t, x)$  удовлетворяет тому же начальному условию, с учетом (5.9) и тождества  $L(p(t_0, x), d_m) \equiv J(p(t_0, x), d_m)$  на множестве  $\mathcal{D}_m$  имеем

$$\Delta J = J(p(t_0, x), d_m') - J(p(t_0, x), d_m^*) = G(t_1, p'(t_1, x)) - G(t_1, p^*(t_1, x)) + \int_{t_0}^{t_1} [R(t, p^*(t, x), u^*(t, x^1)) - R(t, p'(t, x), u'(t, x^1))] dt.$$

Из (5.16) и (5.8) следует, что  $G(t_1, p(x)) = 0 \forall p(x) \in P$ . Поэтому  $G(t_1, p'(t_1, x)) = G(t_1, p^*(t_1, x)) = 0$ . Из (5.15) имеем  $R(t, p^*(t, x), u^*(t, x^1)) = 0$ , а так как (5.15) является частным случаем условия (5.10), то  $R(t, p'(t, x), u'(t, x^1)) \leq 0$ . Следовательно,  $\Delta J \geq 0$ . Доказательство теоремы вытекает из произвольности пары  $d_m'$  и функции  $p(t_0, x)$ .

*Методика определения оптимального управления стохастической системой с применением оптимальных синтезирующих функций.*

A. Нахождение оптимального управления в задаче 1.

1. Решить уравнение (5.15) с краевым условием (5.16). В результате получаем функцию  $S(t, p(x))$  и оптимальную синтезирующую функцию  $u^*(t, x^1; p(x))$  — решение задачи 2.

2. Задать начальную плотность вероятности  $p(t_0, x) \in P$ .

3. Решить уравнение (5.3) с начальной плотностью вероятности  $p(t_0, x)$  совместно с оптимальной синтезирующей функцией  $u^*(t, x^1; p(x))$ , найденной в п.1. В результате определяется пара  $d_m^* = (p^*(t, x), u^*(t, x^1) = u^*(t, x^1; p^*(t, x)))$  — решение задачи 1 для фиксированной начальной плотности вероятности (см. рис. 5.3).

4. Для получения другого решения задачи 1 перейти к п.2, где задать новую начальную плотность вероятности. Если этого не требуется, следует перейти к этапу использования синтезированного оптимального управления  $u^*(t, x^1)$  по неполному вектору состояния при управлении исходной системой.

**Б.** Применение оптимального управления  $u^*(t, x^1)$  для нахождения траекторий системы, описываемой уравнением (5.1).

1. Получить реализацию начального условия  $X(t_0) = X_0$  в соответствии с заданной выше (см. п.2) плотностью вероятности  $p(t_0, x)$ .

2. Решить уравнение (5.1) с начальным условием  $X(t_0)$  совместно с оптимальным управлением  $u^*(t, x^1)$  для конкретной реализации стандартного винеровского процесса  $W(t)$ . В результате получим пару  $(X(t), u(t))$ , где  $X(t)$  — траектория, а  $u(t) = u^*(t, X^1(t))$  — управление (см. рис. 5.2).

3. Для получения семейства пар  $(X(t), u(t))$  проинтегрировать уравнение (5.1) для других реализаций случайного процесса  $W(t)$  и начального условия  $X(t_0)$ , т.е. перейти либо к п.1, либо к п.2 раздела Б.

Раздел Б методики описывает процедуру моделирования системы (5.1) совместно с найденным управлением. Он иллюстрирует применимость результатов решения редуцированной задачи 1 к исходной стохастической проблеме.

Таким образом, оптимальная синтезирующая функция  $u^*(t, x; p(x))$  порождает для каждой плотности вероятности  $p(t_0, x)$  соответствующее оптимальное управление  $u^*(t, x^1)$ , которое, в свою очередь, служит для получения траекторий исходной управляемой системы (5.1), так что применяемое в текущий момент управление имеет вид  $u(t) = u^*(t, X^1(t))$ .

**Предельные случаи информированности о векторе состояния.**

1.  $m = 0$  (информация о векторе состояния отсутствует). Как следует из теоремы 5.2, решается задача поиска оптимальной синтезирующей функции  $u^*(t; p(x)): T \times P \rightarrow U$ , порождающей на решениях уравнения (5.3) оптимальные программные управления  $u^*(t)$  для каждой начальной плотности вероятности  $p(t_0, x) \in P$ . Из (5.15), (5.16) следует уравнение для ее определения

$$\frac{\partial S(t, p(x))}{\partial t} + \max_{u \in U} \int_B \left\{ A_*^u \left[ \frac{\partial S(t, p(\xi))}{\partial p(x)} \right] p(x) - \right. \\ \left. - f^0(t, p(x), u) \right\} dx = 0 \quad \forall (t, p(x)) \in T \times P, \quad (5.17)$$

$$S(t, p(x)) = -F(p(x)) \quad \forall p(x) \in P.$$

Применяя (5.4), можно получить эквивалентную форму записи (5.17):

$$\frac{\partial S(t, p(x))}{\partial t} + \max_{u \in U} \int_B \left\{ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} A^u [p(x)] - f^0(t, p(x), u) \right\} dx = 0 \quad \forall (t, p(x)) \in T \times P, \quad (5.18)$$

$$S(t, p(x)) = -F(p(x)) \quad \forall p(x) \in P.$$

2.  $m = n$  (имеется полная информация о векторе состояния). В этом случае уравнения (5.15), (5.16) имеют вид

$$\frac{\partial S(t, p(x))}{\partial t} + \int_B \max_{u \in U} \left\{ A_+^u \left[ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} \right] p(x) - f^0(t, p(x), u) \right\} dx = 0 \quad \forall (t, p(x)) \in T \times P, \quad (5.19)$$

$$S(t, p(x)) = -F(p(x)) \quad \forall p(x) \in P. \quad (5.20)$$

Решение данной задачи определяет оптимальную синтезирующую функцию  $u^*(t, x; p(x)) : T' \times B \times P \rightarrow U$ , порождающую для каждой начальной плотности вероятности  $p(t_0, x)$  соответствующее оптимальное управление  $u^*(t, x)$  с полной обратной связью.

Рассмотрим частный случай, когда функционал (5.5) имеет вид

$$J(p_0(x), d_m) = \int_{t_0}^1 \int_B f^0(t, x, u(t, x^1)) p(t, x) dx dt + \int_B F(x) p(t_1, x) dx = \\ = M \left[ \int_{t_0}^1 f^0(t, X(t), u(t, X^1(t))) dt + F(X(t_1)) \right], \quad (5.21)$$

где непрерывные функции  $f^0(t, x, u)$ ,  $F(x)$  удовлетворяют условиям [44]:  $\exists c_2, c_3 = \text{const}$  такие, что  $\forall (t, x, u) \in (T \times B \times U)$   $|f^0(t, x, u)| \leq c_2(1 + |x| + |u|)^{c_3}$ ,  $|F(x)| \leq c_2(1 + |x|)^{c_3}$ , которые гарантируют конечность величины (5.21)  $\forall u(t, x^1) \in \gamma_m$ ;  $M$  — знак математического ожидания,  $m = n$ .

В этом случае решение  $S(t, p(x))$  уравнения (5.19) можно искать в форме

$$S(t, p(x)) = \int_B \varphi(t, x) p(x) dx,$$

где неизвестная функция  $\varphi(t, x) \in C^{1,2}(Q)$ .

Подставляя это выражение в уравнение (5.19) и краевое условие, применяя правило (П.1.1) вычисления вариационных производных и основную лемму вариационного исчисления, имеем

$$\begin{aligned} \max_{u \in U} \left\{ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + \right. \\ \left. + (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right\} = 0 \\ \forall (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\varphi(t, x) = -F(x) \quad \forall x \in B. \quad (5.23)$$

Согласно теореме 5.2 оптимальное управление  $u^*(t, x)$ , определяемое при решении уравнения Беллмана (5.22), (5.23) для стохастических систем [1, 13, 30, 44, 45], обеспечивает минимум функционала (5.21) для любых  $p(t_0, x) \in P$ , который согласно (5.12) равен

$$\min_{d_n \in \mathcal{D}_n} J(p(t_0, x), d_n) = -S(t_0, p(t_0, x)) = -\int_B \varphi(t_0, x) p(t_0, x) dx \quad \forall p(t_0, x) \in P.$$

Если начальная плотность вероятности  $p(t_0, x)$  — дельтаобразная, т.е.  $p(t_0, x) = p_0(x) = \delta(x - x_0)$ , где  $x_0$  — начальное условие, сформулированный вывод также справедлив: управление  $u^*(t, x)$  обеспечивает минимум функционала (5.21), равный

$$\min_{d_n \in \mathcal{D}_n} J(p(t_0, x), d_n) = -\int_B \varphi(t_0, x) \delta(x - x_0) dx = -\varphi(t_0, x_0) \quad \forall x_0 \in B.$$

Последнее соотношение придает функции  $\varphi(t_0, x)$  смысл, заключающийся в ее связи с величиной минимума функционала качества управления для различных начальных условий.

С учетом равенства

$$p(t, x) = \int_B p(t, x | t_0, y) p(t_0, y) dy = \int_B p(t, x | t_0, y) \delta(y - x_0) dy = p(t, x | t_0, x_0)$$

функционал (5.21) в этом случае можно переписать в виде условного математического ожидания

$$J = M_{t_0, x_0} \left[ \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, X(t), u(t, X^1(t))) dt + F(X(t_1)) \right]. \quad (5.24)$$



### 5.3. СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

#### 5.3.1. Общий случай минимизируемого функционала

Задача поиска оптимальных синтезирующих функций весьма привлекательна, так как ее решение связано с решением множества задач типа задачи 1. В то же время эта проблема влечет за собой необходимость решения уравнений в вариационных производных, что связано с большими трудностями. Поэтому актуальным является непосредственное определение оптимального управления в задаче 1. Для этого воспользуемся условиями теоремы 5.1.

Функцию  $S(t, p(x))$  будем искать в виде

$$S(t, p(x)) = \int_B \varphi(t, x) p(x) dx + W(t), \quad (5.25)$$

где неизвестная функция  $\varphi(t, x) \in C^{1,2}(Q)$  и непрерывна на  $Q$ , а  $W(t)$  — непрерывно дифференцируемая неизвестная функция.

Подставляя (5.25) в (5.8), применяя правило (П.1.1) вычисления вариационных производных (см. приложение 1) имеем

$\frac{\delta S(t, p(x))}{\delta p(x)} = \varphi(t, x)$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} R(t, p(x), u) = & \int_B \left\{ \left[ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x, u) \right] p(x) - f^0(t, p(x), u) \right\} dx + \\ & + \frac{dW(t)}{dt} = H(t, p(x), u) + \frac{dW(t)}{dt} + \int_B \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} p(x) dx, \quad (5.26) \end{aligned}$$

$$G(t, p(x)) = \int_B \varphi(t, x) p(x) dx + W(t) + F(p(x)).$$

Из условия 1 теоремы 5.1 и (5.10) следует, что структура оптимального управления  $u^*(t, x)$  определяется соотношением

$$u^*(t, x) = \arg \max_{u \in U} \int_B \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + \right. \right.$$

$$+ (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x, u) \left[ p^*(t, x) - f^0(t, p^*(t, x), u) \right] dx^2. \quad (5.27)$$

Здесь считается, что операция максимизации по управлению  $Vt, x^1$  однозначно разрешима.

Предполагая, что функции  $R(t, p(x), u)$ ,  $G(t, p(x))$  в (5.26) имеют непрерывную вариационную производную по  $p(x)$ , используя необходимое условие экстремума в (5.10), (5.11) и условия теоремы 5.1, получаем

$$\frac{\delta R(t, p^*(t, x), u^*(t, x^1))}{\delta p(x)} = 0 \quad \forall (t, x) \in Q,$$

$$\frac{\delta G(t_1, p^*(t_1, x))}{\delta p(x)} = 0 \quad \forall x \in B.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = - \frac{\delta H(t, p^*(t, x), u^*(t, x^1))}{\delta p(x)} \quad \forall (t, x) \in Q, \quad (5.28)$$

$$\varphi(t_1, x) = - \frac{\delta F(p^*(t_1, x))}{\delta p(x)} \quad \forall x \in B, \quad (5.29)$$

где  $p^*(t, x)$  — решение уравнения (5.3) с начальным условием (5.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^*(t, x)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ f_i(t, x, u^*(t, x^1)) p^*(t, x) \right] + \\ & + (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[ a_{ij}(t, x, u^*(t, x^1)) p^*(t, x) \right] \quad \forall (t, x) \in Q, \\ & p^*(t_0, x) = p_0(x) \quad \forall x \in B \end{aligned}$$

и управлением  $u^*(t, x^1)$ , удовлетворяющим (5.27).

Таким образом, для нахождения решения задачи 1 требуется решить краевую задачу для системы уравнений с частными производными (5.3), (5.28) с крайевыми условиями (5.2), (5.29) и условием (5.27), в которое входят решения обоих уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^*(t, x)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ f_i(t, x, u^*(t, x^1)) p^*(t, x) \right] + \\ & + (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[ a_{ij}(t, x, u^*(t, x^1)) p^*(t, x) \right] \quad \forall (t, x) \in Q, \end{aligned}$$

$$p^*(t_0, x) = p_0(x) \quad \forall x \in B,$$

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = - \frac{\delta H(t, p^*(t, x), u^*(t, x^1))}{\delta p(x)} \quad \forall (t, x) \in Q,$$

$$\varphi(t_1, x) = - \frac{\delta F(p^*(t_1, x))}{\delta p(x)} \quad \forall x \in B, \quad (5.30)$$

$$u^*(t, x^1) = \arg \max_{u \in U} \int \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x, u) \right] p^*(t, x) - f^0(t, p^*(t, x), u) \right\} dx^2,$$

где

$$H(t, p^*(t, x), u^*(t, x^1)) = \int \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u^*(t, x^1)) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x, u^*(t, x^1)) \right] p^*(t, x) - \right. \\ \left. - f^0(t, p^*(t, x), u^*(t, x^1)) \right\} dx.$$

С учетом равенства  $r_m(t) \equiv 0$ ,  $g=0$  из (5.8) – (5.11), (5.26), (5.28), (5.29) и условий 1,2 теоремы 5.1 следует уравнение для определения функции  $W(t)$ , решаемое на найденной экстремали  $(p^*(t, x), u^*(t, x^1))$ :

$$\frac{dW(t)}{dt} = - H(t, p^*(t, x), u^*(t, x^1)) - \int_B \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} p^*(t, x) dx,$$

$$W(t_1) = - \int_B \varphi(t_1, x) p^*(t_1, x) dx - F(p^*(t_1, x)).$$

В результате можно подсчитать минимум функционала (5.5) по формуле (5.12):

$$\min_{d_m \in \mathcal{D}_m} J(p_0(x), d_m) = - \int_B \varphi(t_0, x) p_0(x) dx - W(t_0).$$

**Замечания.** 1. Следует отметить, что соотношения (5.28), (5.29) получены с помощью необходимых условий экстремума. Поэтому, если найдено решение выведенной системы, то это

еще не означает, что пара  $(p^*(t,x), u^*(t,x^1))$  удовлетворяет условию (5.6). С другой стороны, конструкция (5.25) не задает до конца функции  $S(t, p(x))$ , существование которой требуется условиями теоремы 5.1, определяя лишь ее первую вариационную производную по  $p(x)$  и оставляя некоторый произвол для ее доопределения. Одним из путей решения этой проблемы может быть задание конструкций, определяющих функцию  $S(t, p(x))$  в окрестности экстремали  $p^*(t,x)$  и аналогичных используемым в [6,15].

2. Если начальная плотность вероятности  $p(t_0, x)$  — дельтообразная, т.е.  $p(t_0, x) = p_0(x) = \delta(x - x_0)$ , где  $x_0$  — начальное условие, то с учетом равенства

$$p(t, x) = \int_B p(t, x | t_0, y) p(t_0, y) dy = \int_B p(t, x | t_0, y) \delta(y - x_0) dy = p(t, x | t_0, x_0)$$

вместо (5.2), (5.3) в системе уравнений (5.30) для определения оптимального управления будет присутствовать уравнение для условной плотности вероятности и соответствующее начальное условие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, x | t_0, x_0)}{\partial t} &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x, u(t, x^1)) p(t, x | t_0, x_0)] + \\ &+ (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [a_{ij}(t, x, u(t, x^1)) p(t, x | t_0, x_0)] = \\ &= A^{u(\cdot)} [p(t, x | t_0, x_0)] \quad \forall (t, x) \in Q, \\ p(t_0, x | t_0, x_0) &= \delta(x - x_0). \end{aligned}$$

**Предельные случаи информированности о векторе состояния.**

1.  $m=0$  (информация о векторе состояния отсутствует). В этом случае для определения оптимального программного управления  $u^*(t)$  соответствующим образом изменяются условия теоремы 5.1, а в системе (5.30) структура оптимального управления определяется из соотношения, следующего из (5.27):

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \arg \max_{u \in U} \int_B \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + \right. \right. \\ &\left. \left. + (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x, u) \right] p^*(t, x) - f^0(t, p^*(t, x), u) \right\} dx. \end{aligned}$$

2.  $m = n$  (имеется полная информация о векторе состояния). Для определения оптимального управления  $u^*(t, x)$  с полной обратной связью по вектору состояния требуется решить систему (5.30), где структура искомого управления также следует из (5.27):

$$u^*(t, x) = \arg \max_{u \in U} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x, u) \right] p^*(t, x) - f^0(t, p^*(t, x), u) \right\}.$$

### 5.3.2. Случай линейного по плотности вероятности функционала

Если функционал (5.5) линеен по плотности вероятности, т.е. имеет вид (5.21):

$$J(p_0(x), d_m) = \int_{t_0}^{t_1} \int_B f^0(t, x, u(t, x)) p(t, x) dx dt + \int_B F(x) p(t_1, x) dx, \quad (5.31)$$

соотношения (5.26) принимают следующую форму:

$$R(t, p(x), u) = \int_B \left\{ \left[ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right] p(x) \right\} dx + \frac{dW(t)}{dt} = H(t, p(x), u) + \frac{dW(t)}{dt} + \int_B \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} p(x) dx,$$

$$G(t_1, p(x)) = \int_B [\varphi(t_1, x) + F(x)] p(x) dx + W(t_1).$$

Так как согласно правилу (П.1.1)

$$\frac{\delta H(t, p(x), u)}{\delta p(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x, u) - f^0(t, x, u),$$

$$\frac{\delta F(p(x))}{\delta p(x)} = \frac{\delta \left[ \int_B F(x) p(x) dx \right]}{\delta p(x)} = F(x),$$

соотношения (5.28), (5.29) упрощаются:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u^*(t, x^1)) - \\ & - (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x, u^*(t, x^1)) + f^0(t, x, u^*(t, x^1)) = \\ & = - A_*^{u^*(\cdot)} [\varphi(t, x)] + f^0(t, x, u^*(t, x^1)) \quad \forall (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\varphi(t, x) = -F(x) \quad \forall x \in B. \quad (5.33)$$

Учитывая, что

$$p(t, x^1) = \int_{B_2} p(t, x) dx^2, \quad p(t, x^2 | x^1) = \frac{p(t, x)}{\int_{B_2} p(t, x) dx^2}, \quad (5.34)$$

где  $p(t, x^1)$  — маргинальная плотность вероятности,  $p(t, x^2 | x^1)$  — условная плотность вероятности, имеем

$$\begin{aligned} u^*(t, x^1) = & \arg \max_{u \in U} \int_{B_2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + \right. \\ & \left. + (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right] p^*(t, x^2 | x^1) dx^2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Таким образом, искомое оптимальное управление  $u^*(t, x^1)$ , удовлетворяющее условию (5.6), можно найти в результате решения системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^*(t, x)}{\partial t} = & A^{u^*(\cdot)} [p^*(t, x)], \quad p^*(t_0, x) = p_0(x), \\ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = & - A_*^{u^*(\cdot)} [\varphi(t, x)] + f^0(t, x, u^*(t, x^1)), \quad \varphi(t_1, x) = -F(x) \end{aligned}$$

совместно с (5.34), (5.35). При этом функция  $W(t) \equiv 0$ , а минимум функционала (5.31) можно подсчитать по формуле (5.12):

$$\min_{d_m \in \mathcal{D}_m} J(p_0(x), d_m) = - \int_B \varphi(t_0, x) p_0(x) dx.$$

## 5.4. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ИНФОРМИРОВАННОСТИ О ВЕКТОРЕ СОСТОЯНИЯ

### 5.4.1. Стохастический принцип максимума

При  $m=0$  (информация о векторе состояния отсутствует) соотношения для общего случая, изложенные в разд. 5.3.2, принимают форму *стохастического принципа максимума* [24,26]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^*(t, x)}{\partial t} &= A^{u^*} [p^*(t, x)], \quad p^*(t_0, x) = p_0(x), \\ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} &= -A_{*}^{u^*} [\varphi(t, x)] + f^0(t, x, u^*(t)), \quad \varphi(t_1, x) = -F(x), \\ u^*(t) &= \arg \max_{u \in U} \int_B \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + \right. \\ &+ \left. (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right] p^*(t, x) dx. \end{aligned} \quad (5.36)$$

В результате решения системы (5.36) может быть найдено оптимальное программное управление  $u^*(t)$ .

**Пример 5.1.** Элементы постановки задачи (5.1) – (5.3), (5.5) имеют вид

$$d_0 X = u(t) dt + d_0 W, \quad X(0) = X_0,$$

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [u(t)p(t, x)] + (1/2) \frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial x^2}, \quad p(0, x) = p_0(x),$$

$$J = (1/2) \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} u^2(t) p(t, x) dx dt + (1/2) \int_{\mathbb{R}} x^2 p(1, x) dx,$$

где  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $m=0$ .

Требуется найти оптимальное программное управление  $u^*(t)$  для различных начальных плотностей вероятности  $p_0(x)$ . Решим задачу двумя способами.

□ *Первый способ.* Используем методику, изложенную в разд. 5.2.

1. Найдем оптимальную синтезирующую функцию  $u^*(t; p(x))$ . Уравнение (5.17) для данной задачи имеет вид

$$-\frac{\partial S(t, p(x))}{\partial t} = \max_u \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} \right\} u + \right.$$

$$+ (1/2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} \right\} - (1/2) u^2 \Big] p(x) dx,$$

$$S(1, p(x)) = - (1/2) \int_R x^2 p(x) dx.$$

Так как ограничения на управление отсутствуют, то, используя необходимые условия экстремума, можно найти структуру оптимального управления:

$$u^*(t; p(x)) = \int_R \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} \right\} p(x) dx.$$

Будем искать решение в форме

$$S(t, p(x)) = \int_R \left[ (1/2) K_2(t) x^2 + K_1(t) x + K_0(t) \right] p(x) dx +$$

$$+ (1/2) N(t) \left[ \int_R x p(x) dx \right]^2,$$

где  $K_2(t)$ ,  $K_1(t)$ ,  $K_0(t)$ ,  $N(t)$  — неизвестные функции.

Введем обозначения:  $m = \int_R x p(x) dx$ ,  $D = \int_R x^2 p(x) dx$ .

Тогда по формулам (П.1.1), (П.1.2) имеем

$$\delta S(t, p(\xi)) / \delta p(x) = (1/2) K_2(t) x^2 + K_1(t) x + K_0(t) + N(t) x m,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} \right\} = K_2(t) x + K_1(t) + N(t) m,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} \right\} = K_2(t).$$

Подставляя последние соотношения в уравнение и приравнявая члены при одинаковых степенях переменных  $m, D$ , получаем систему:

$$\dot{K}_2 = 0, \quad K_2(1) = -1;$$

$$\dot{K}_1 + K_1 K_2 + N K_1 = 0, \quad K_1(1) = 0;$$

$$2\dot{K}_0 + K_1^2 + K_2 = 0, \quad K_0(1) = 0;$$

$$\dot{N} + K_2^2 + N^2 + 2N K_2 = 0, \quad N(1) = 0.$$

Здесь аргументы неизвестных функций для краткости опущены.  
Решение:  $K_2(t) = -1$ ,  $K_1(t) = 0$ ,  $K_0(t) = (t-1)/2$ ,  $N(t) = (1-t)/(2-t)$ .



Следовательно, оптимальная синтезирующая функция имеет вид

$$u^*(t; p(x)) = K_2(t)m + K_1(t) + N(t)m - m / (t-2) = \int_R xp(x) dx / (t-2).$$

2. Предположим, что начальной плотности вероятности  $p(0, x)$  соответствует математическое ожидание  $m_0$ . Тогда из уравнения модели объекта и найденной синтезирующей функции следует уравнение  $dm/dt = m(t)/(t-2)$ ,  $m(0) = m_0$ .

Таким образом, для различных  $m_0$  оптимальная синтезирующая функция порождает соответствующие пары функций (решения задачи 1):  $m(t) = m_0(1-t/2)$ ,  $u(t) = u^*(t; m(t)) = -m_0/2$ .

*Второй способ.* Рассмотрим алгоритм непосредственного решения задачи 1. Для этого воспользуемся системой (5.36), которая имеет вид

$$\frac{\partial p^*(t, x)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [u^*(t) p^*(t, x)] + (1/2) \frac{\partial^2 p^*(t, x)}{\partial x^2},$$

$$p^*(0, x) = p_0(x),$$

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} u^*(t) + (1/2) \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} - (1/2) u^*(t)^2 = 0,$$

$$\varphi(1, x) = -(1/2)x^2,$$

$$u^*(t) = \arg \max_u \int_R \left[ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} u - (1/2) u^2 \right] p^*(t, x) dx.$$

Отсюда получим структуру оптимального управления:

$$u^*(t) = \int_R \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} p^*(t, x) dx.$$

Будем искать функцию  $\varphi(t, x)$  в виде

$$\varphi(t, x) = (1/2) K_2(t) x^2 + K_1(t) x + K_0(t),$$

где  $K_2(t)$ ,  $K_1(t)$ ,  $K_0(t)$  — неизвестные функции.

Подставляя  $\varphi(t, x)$  в формулу, определяющую структуру управления, находим

$$u^*(t) = K_2(t)m(t) + K_1(t).$$

Подставим последние два выражения в систему, приравняем нулю члены при одинаковых степенях  $x$  и тогда с помощью уравнения для математического ожидания вектора  $x$  получим

$$\dot{m} = K_2 m + K_1,$$

$$m(0) = m_0;$$

$$\dot{K}_2 = 0,$$

$$K_2(1) = -1;$$

$$\dot{K}_1 = -K_1 K_2 - K_2^2 m,$$

$$K_1(1) = 0;$$

$$\dot{K}_0 = [K_2(t)^2 m(t)^2 - K_1(t)^2 - K_2(t)]/2,$$

$$K_0(1) = 0;$$

$$u^*(t) = K_2(t)m(t) + K_1(t).$$

Отсюда

$$K_2(t) = -1, \quad K_1(t) = m_0(1-t)/2,$$

$$K_0(t) = m_0^2 [-t^2/8 + 3t/8 - 1/4] + (t-1)/2,$$

и, следовательно,  $m^*(t) = m_0[1-t/2]$  — оптимальный закон изменения математического ожидания, а  $u^*(t) = -m_0/2$  — оптимальное программное управление.

Полученный результат подтверждает свойство оптимальной синтезирующей функции  $u^*(t; p(x))$  порождать соответствующие оптимальные программные управления  $u^*(t)$  для каждой начальной плотности вероятности. ■

**Пример 5.2.** Элементы постановки задачи (5.1) — (5.3), (5.5) имеют вид

$$d_0 X = [Z(t) + u(t)] dt + d_0 W, \quad X(0) = X_0,$$

$$d_0 Z = 0,$$

функции  $p(0, x) = p_0(x)$ ,  $p(z)$  заданы,

$$\frac{\partial p(t, x, z)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [(z+u(t))p(t, x, z)] + (1/2) \frac{\partial^2 p(t, x, z)}{\partial x^2},$$

$$J = (1/2) \int_0^1 \int_B u^2(t) p(t, x, z) dx dz dt + (1/2) \int_B x^2 p(1, x, z) dx dz,$$

где  $x \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $m=0$ ,  $B = \mathbb{R}^2$ .

Требуется найти оптимальное программное управление. Решим задачу двумя способами.

□ *Первый способ.* Рассмотрим задачу 2 нахождения оптимальной синтезирующей функции. Так как  $m=0$ , из (5.18) следует

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S(t, p(x, z))}{\partial t} = \max_B \int & \left\{ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x, z)} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} [(z+u)p(x, z)] + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1/2) \frac{\partial^2 p(x, z)}{\partial x^2} \right] - (1/2) u^2 p(x, z) \right\} dx dz, \end{aligned}$$

$$S(1, p(x, z)) = - (1/2) \int_{\mathbf{B}} x^2 p(x, z) dx dz .$$

Интегрируя в уравнении по частям, имеем

$$\begin{aligned} - \frac{\partial S(t, p(x, z))}{\partial t} = \max_u \int_{\mathbf{B}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x, z)} \right] (z+u) p(x, z) + \right. \\ \left. + (1/2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x, z)} \right] p(x, z) - (1/2) u^2 p(x, z) \right\} dx dz . \quad (5.37) \end{aligned}$$

Отсюда следует структура оптимальной синтезирующей функции:

$$u^*(t; p(x, z)) = \int_{\mathbf{B}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x, z)} \right\} p(x, z) dx dz .$$

Обозначим:

$$x' = (x, z)^T, \quad \hat{x} = \int_{\mathbf{B}} x p(x') dx', \quad D_1 = \int_{\mathbf{B}} x^2 p(x') dx',$$

$$\hat{z} = \int_{\mathbf{B}} z p(x') dx', \quad D_2 = \int_{\mathbf{B}} z^2 p(x') dx', \quad R = \int_{\mathbf{B}} xz p(x') dx' .$$

Будем искать решение уравнения (5.37) в виде

$$\begin{aligned} S(t, p(x, z)) = (1/2) K_2(t) D_1 + K_1(t) \hat{x} + K_0(t) + (1/2) N(t) \hat{x}^2 + \\ + \psi_1(t) \hat{z} + (1/2) \psi_2(t) \hat{z}^2 + \psi_3(t) D_2 + M(t) \hat{x} \hat{z} + L(t) R, \quad (5.38) \end{aligned}$$

где  $K_2(t), K_1(t), K_0(t), N(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t), M(t), L(t)$  — неизвестные функции.

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x, z)} = (1/2) K_2(t) x^2 + K_1(t) x + N(t) \hat{x} x + \psi_1(t) z + \\ + \psi_2(t) \hat{z} z + \psi_3(t) z^2 + M(t) \hat{x} z + M(t) x \hat{z} + L(t) x z, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x, z)} = K_2(t) x + K_1(t) + N(t) \hat{x} + M(t) \hat{z} + L(t) z,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x, z)} = K_2(t) ,$$

а оптимальная синтезирующая функция

$$u^*(t; p(x, z)) = K_2(t) \hat{x} + K_1(t) + N(t) \hat{x} + M(t) \hat{z} + L(t) \hat{z} . \quad (5.39)$$

Подставляя (5.39), (5.38) в (5.37) и приравнявая нулю члены при одинаковых степенях  $\hat{x}$ ,  $\hat{z}$ ,  $R$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ , получаем систему

$$\dot{K}_2 = 0, \quad \dot{K}_1 + K_1 K_2 + K_1 N = 0, \quad 2\dot{K}_0 + K_1^2 + K_2 = 0,$$

$$K_2(1) = -1, \quad K_1(1) = 0, \quad K_0(1) = 0,$$

$$\dot{\psi}_1 + K_1 + K_1 M + K_1 L = 0, \quad \dot{\psi}_2 + M^2 + 2M + ML + L^2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 + L = 0,$$

$$\psi_1(1) = 0, \quad \psi_2(1) = 0, \quad \psi_3(1) = 0,$$

$$\dot{M} + K_2 L + K_2 M + N + NL + NM = 0, \quad \dot{N} + K_2^2 + 2K_2 N + N^2 = 0,$$

$$\dot{L} + K_2 = 0,$$

$$M(1) = 0, \quad N(1) = 0, \quad L(1) = 0.$$

Решение системы имеет вид

$$K_2(t) = -1, \quad K_1(t) = 0, \quad L(t) = t-1, \quad N(t) = (t-1)/(t-2),$$

$$M(t) = -(t-1)^2/(t-2).$$

Поэтому из (5.39) получаем оптимальную синтезирующую функцию

$$u^*(t; p(x, z)) = [\hat{x} + (1-t)\hat{z}]/(t-2). \quad (5.40)$$

Из уравнения, которое описывает поведение функции  $p(t, x, z)$ , и из (5.40) можно получить уравнения для математически ожидаемый компонент вектора состояния:

$$d\hat{x}/dt = (\hat{x} - \hat{z})/(t-2), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0,$$

$$d\hat{z}/dt = 0, \quad \hat{z}(0) = \hat{z}.$$

Решение имеет вид  $\hat{z}(t) = \hat{z}$ ,  $\hat{x}(t) = [2\hat{x}_0 + (\hat{z} - \hat{x}_0)t]/2$ .

Оптимальная синтезирующая функция принимает форму

$$u^*(t; p(x, z)) = -(\hat{x}_0 + \hat{z})/2. \quad (5.41)$$

Для различных начальных плотностей вероятности оптимальная синтезирующая функция (5.41) порождает соответствующие программные управления.

$$\text{Для } \hat{x}_0 = 0, \quad \hat{z} = 1, \quad \text{решение: } \hat{x}_1(t) = t/2, \quad u_1^*(t) = -1/2.$$

$$\text{Для } \hat{x}_0 = 0, \quad \hat{z} = 0, \quad \text{решение: } \hat{x}_2(t) = 0, \quad u_2^*(t) = 0.$$

$$\text{Для } \hat{x}_0 = 0, \quad \hat{z} = -1, \quad \text{решение: } \hat{x}_3(t) = -t/2, \quad u_3^*(t) = 1/2$$

и т.д.

Таким образом, решение семейства задач 1 получено через решение задачи 2.

*Второй способ.* Рассмотрим алгоритм непосредственного решения задачи 1. Для этого воспользуемся системой (5.36), которая принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^*(t, x, z)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} [(z + u^*(t)) p^*(t, x, z)] + (1/2) \frac{\partial^2 p^*(t, x, z)}{\partial x^2}, \\ p^*(0, x, z) = p_0(x) p(z), \\ \frac{\partial \varphi(t, x, z)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x, z)}{\partial x} (z + u^*(t)) + \\ + (1/2) \frac{\partial^2 \varphi(t, x, z)}{\partial x^2} - (1/2) u^*(t)^2 = 0, \\ \varphi(1, x, z) = - (1/2) x^2, \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$u^*(t) = \arg \max_x \int_B \left[ \frac{\partial \varphi(t, x, z)}{\partial x} u - (1/2) u^2 \right] p^*(t, x, z) dx dz.$$

Отсюда определим структуру оптимального управления:

$$u^*(t) = \int_B \frac{\partial \varphi(t, x, z)}{\partial x} p^*(t, x, z) dx dz. \quad (5.43)$$

Будем искать функцию  $\varphi(t, x, z)$  в виде

$$\begin{aligned} \varphi(t, x, z) = (1/2) K_2(t) x^2 + K_1(t) x + K_0(t) + N(t) x z + \\ + \psi_1(t) z + \psi_2(t) z^2, \end{aligned} \quad (5.44)$$

где  $K_2(t)$ ,  $K_1(t)$ ,  $K_0(t)$  — неизвестные функции.

Подставляя (5.44) в (5.43), имеем

$$u^*(t) = K_2(t) \hat{x}(t) + K_1(t) + N(t) \hat{z}(t). \quad (5.45)$$

Подставим (5.45), (5.44) в (5.42), приравняем нулю члены при одинаковых степенях  $x$ ,  $z$ . Используя уравнения для математических ожиданий векторов  $x$  и  $z$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{z} + K_2 \hat{x} + K_1 + N \hat{z}, & \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \\ \frac{d\hat{z}}{dt} = 0, & \quad \hat{z}(0) = \hat{z}, \\ \dot{K}_2 = 0, & \quad \dot{K}_1 + K_1 K_2 + K_2^2 \hat{x} + K_2 N \hat{z} = 0, & \quad \dot{N} + K_2 = 0, \\ K_2(1) = -1, & \quad K_1(1) = 0, & \quad N(1) = 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Решение системы (5.46) имеет вид

$$K_2(t) = -1, \quad N(t) = t - 1, \quad \hat{z}(t) = \hat{z}.$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Для  $\hat{x}_0 = 0, \hat{z} = 1$  из системы (5.46) следует:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}/dt &= -\hat{x} + K_1 + t, & \hat{x}(0) &= 0, \\ \dot{K}_1 &= K_1 - \hat{x} + t - 1, & K_1(1) &= 0. \end{aligned}$$

Решение системы:  $\hat{x}_1(t) = t/2, K_1(t) = (1-t)/2$ , а оптимальное программное управление (5.45):  $u_1^*(t) = -1/2$ .

2. Для  $\hat{x}_0 = 0, \hat{z} = 0$  решение:  $\hat{x}_2(t) = 0, K_1(t) = 0, u_2^*(t) = 0$ .

3. Для  $\hat{x}_0 = 0, \hat{z} = -1$  из (5.46) следует:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}/dt &= -\hat{x} + K_1 - t, & \hat{x}(0) &= 0, \\ \dot{K}_1 &= K_1 - \hat{x} + 1 - t, & K_1(1) &= 0. \end{aligned}$$

Решение системы:  $\hat{x}_3(t) = -t/2, K_1(t) = (t-1)/2$ . Оптимальное программное управление (5.45):  $u_3^*(t) = 1/2$ .

Полученный результат подтверждает свойство оптимальной синтезирующей функции порождать оптимальные управления в требуемом классе. ■

Данный пример демонстрирует возможность применения разработанного подхода к синтезу оптимальных систем в условиях неопределенности параметров и неполной информации о состоянии.

**Оптимальное программное управление линейными системами.**

Пусть модель объекта управления (5.1) имеет вид

$$d_0 X = [A(t)X(t) + B(t)u(t)]dt + C(t)d_0 W, \quad (5.47)$$

где  $A(t), B(t), C(t)$  — матрицы размера соответственно  $p \times p, p \times q, p \times k$ , элементы которых непрерывно дифференцируемы по  $t$ ; на управление ограничений не наложено, т.е.  $u \in U = R^q$ .

Пусть начальная плотность вероятности (5.2) — гауссовская с математическим ожиданием  $m_0$  и ковариационной матрицей  $R_0$ .

Функционал качества управления (5.5), (5.21) квадратичный:

$$\begin{aligned} J &= (1/2) \int_0^{t_1} \int_B [x^T S(t)x + u(t)^T Q(t)u(t)] p(t,x) dx dt + \\ &\quad + (1/2) \int_B [x^T \Lambda x] p(t_1,x) dx = \\ &= M \left\{ (1/2) \int_0^{t_1} [X(t)^T S(t)X(t) + u(t)^T Q(t)u(t)] dt + \right. \\ &\quad \left. + (1/2) [X(t_1)^T \Lambda X(t_1)] \right\}, \quad (5.48) \end{aligned}$$

где  $S(t), \Lambda$  — неотрицательно определенные симметрические матри-

цы размера  $n \times n$ , а  $Q(t)$  — положительно определенная симметрическая матрица размера  $q \times q$ .

Сравнивая (5.47), (5.48) с (5.1), (5.21), имеем

$$f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u,$$

$$\sigma(t, x, u) = C(t), \quad a(t, x, u) = C(t)C(t)^T,$$

$$f^0(t, x, u) = (1/2)[x^T S(t)x + u^T Q(t)u]; \quad F(x) = (1/2)[x^T \Lambda x].$$

Требуется найти оптимальное программное управление  $u^*(t)$ .

Система (5.36) для определения оптимального программного управления  $u^*(t)$  преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^*(t, x)}{\partial t} = & - \nabla \{ [A(t)x + B(t)u^*(t)] p^*(t, x) \} + \\ & + (1/2) \operatorname{tr} \left\{ C(t)C(t)^T \frac{\partial^2 p^*(t, x)}{\partial x^2} \right\}, \\ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = & - \left( \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \right)^T [A(t)x + B(t)u^*(t)] - \\ & - (1/2) \operatorname{tr} \left\{ C(t)C(t)^T \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} \right\} + \\ & + (1/2) [x^T S(t)x + u^{*T}(t)Q(t)u^*(t)], \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$p^*(t_0, x) = p_0(x), \quad \varphi(t, x) = - (1/2) [x^T \Lambda x],$$

$$u^*(t) = \arg \max_u \int \left[ \left( \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \right)^T B(t)u - (1/2)u^T Q(t)u \right] p^*(t, x) dx,$$

где  $\nabla$  — оператор градиента.

Функцию  $\varphi(t, x)$  будем искать в виде

$$\varphi(t, x) = (1/2)x^T K_2(t)x + K_1(t)^T x + K_0(t), \quad (5.50)$$

где неизвестные  $K_2(t)$  — симметрическая матрица размера  $n \times n$ ,  $K_1(t)$  — вектор  $n \times 1$ ,  $K_0(t)$  — функция.

Пользуясь (П.2.1), (П.2.2), запишем выражение, определяющее структуру оптимального управления:

$$\begin{aligned} u^*(t) = & \arg \max_u \int \left[ [K_2(t)x + K_1(t)]^T B(t)u - (1/2)u^T Q(t)u \right] p^*(t, x) dx = \\ = & \arg \max_u \left\{ [K_2(t)m(t) + K_1(t)]^T B(t)u - (1/2)u^T Q(t)u \right\} = \\ = & \arg \max_u H(t, p^*(t, x), u), \end{aligned}$$

где  $m(t)$  — математическое ожидание,  $m(t) = \int_V xp^*(t, x) dx$ .

Так как на управление ограничений не наложено, воспользуемся необходимыми и достаточными условиями безусловного максимума. Применяя формулы (П.2.1) — (П.2.3), имеем

$$\frac{\partial H(t, p^*(t, x), u)}{\partial u} = B(t)^T [K_2(t)m(t) + K_1(t)] - Q(t)u = 0,$$

откуда

$$u^*(t) = Q^{-1}(t)B(t)^T [K_2(t)m(t) + K_1(t)]. \quad (5.51)$$

Так как

$$\frac{\partial^2 H(t, p^*(t, x), u)}{\partial u^2} = -Q(t),$$

а  $Q(t)$  — положительно определенная матрица, то достаточное условие максимума  $H(t, p^*(t, x), u)$  по управлению выполняется.

Далее, умножая первое уравнение в системе (5.49) на  $x$ , интегрируя по частям по множеству  $V$  с учетом (5.51), получаем уравнение, описывающее изменение математического ожидания

$$\begin{aligned} \dot{m} &= [A(t) + B(t)Q^{-1}(t)B(t)^T K_2(t)]m + B(t)Q^{-1}(t)B(t)^T K_1(t), \\ m(t_0) &= m_0. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Подставляя (5.50), (5.51) в уравнение и краевое условие для функции  $\varphi(t, x)$ , входящие в (5.49), приравнявая члены с одинаковыми степенями  $x$  нулю и применяя (П.2.4), получаем

$$\dot{K}_2 = -A^T K_2 - K_2 A + S, \quad K_2(t_1) = -\Lambda,$$

$$\dot{K}_1 = -A^T K_1 - K_2 B Q^{-1} B^T K_1 - K_2 B Q^{-1} B^T K_2 m, K_1(t_1) = 0, \quad (5.53)$$

$$\dot{K}_0 = [m^T K_2 B Q^{-1} B^T K_2 m - K_1 B Q^{-1} B^T K_1 - \text{tr} \{C C^T K_2\}] / 2, \quad K_0(t_1) = 0.$$

Здесь аргумент  $t$  для краткости опущен.

Решая систему (5.53), можно найти оптимальное программное управление  $u^*(t)$  и вычислить минимальное значение функционала (5.48):

$$\begin{aligned} \min_{u_0 \in \mathcal{D}_0} J &= - \int_V \varphi(t_0, x) p(t_0, x) dx = \\ &= -M \left[ (1/2) x^T K_2(t_0) x + K_1(t_0)^T x + K_0(t_0) \right] = \\ &= - (1/2) M \left[ (x - m_0)^T K_2(t_0) (x - m_0) + x^T K_2(t_0) m_0 + \right. \\ &\quad \left. + m_0^T K_2(t_0) x - m_0^T K_2(t_0) m_0 \right] - K_1(t_0)^T m_0 - K_0(t_0) = \\ &= - (1/2) m_0^T K_2(t_0) m_0 - (1/2) \text{tr} \{K_2(t_0) R_0\} - K_1(t_0)^T m_0 - K_0(t_0). \end{aligned}$$



Пример 5.3. Дана модель объекта управления (5.47) в виде

$$d_0 X = u(t) dt + d_0 W, \quad X(0) = X_0.$$

Начальная плотность вероятности — гауссовская с математическим ожиданием  $m_0 = 1$  и дисперсией  $R_0 = 1$ .

Функционал качества

$$J = (1/2) \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} u(t)^2 p(t, x) dx dt + (1/2) \int_{\mathbb{R}} x^2 p(1, x) dx,$$

где  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $u \in \mathbb{R}$ .

Требуется найти оптимальное программное управление  $u^*(t)$ .

□ В поставленной задаче  $A(t) = 0$ ,  $B(t) = 1$ ,  $C(t) = 1$ ,  $S(t) = 0$ ,  $Q(t) = 1$ ,  $\Lambda = 1$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ .

Выпишем условия (5.51) — (5.53) для данной задачи:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= K_2(t)m(t) + K_1(t), & m(0) &= 1, \\ \dot{K}_2 &= 0, & K_2(1) &= -1, \\ \dot{K}_1 &= -K_2(t)^2 m(t) - K_1(t)K_2(t), & K_1(1) &= 0, \\ \dot{K}_0 &= [K_2(t)^2 m(t)^2 - K_1(t)^2 - K_2(t)]/2, & K_0(1) &= 0, \end{aligned}$$

$$u^*(t) = K_2(t)m(t) + K_1(t).$$

Отсюда:  $K_2(t) = -1$ ,  $K_1(t) = (1-t)/2$ ,  $K_0(t) = -t^2/8 + 7t/8 - 3/4$ , а  $m^*(t) = 1 - t/2$ ,  $u^*(t) = -1/2$  — оптимальный закон изменения математического ожидания и оптимальное программное управление.

Минимальное значение функционала определяется по формуле

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{D}_0} J &= -(1/2)m_0^T K_2(0)m_0 - (1/2)\text{tr}\{K_2(0)R_0\} - K_1(0)^T m_0 - K_0(0) = \\ &= -1/2 + 1/2 - 1/2 + 3/4 = 5/4. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

#### 5.4.2. Уравнение Беллмана

При  $m = n$  (имеется полная информация о векторе состояния) соотношения (5.2), (5.3), (5.32) — (5.35) для общего случая преобразуются в уравнение Беллмана (5.22), (5.23) для стохастических систем для определения оптимального управления  $u^*(t, x)$  с полной обратной связью:

$$\max_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + \right.$$

$$+ (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x, u) - f^0(t, x, u) \Big\} = 0 \quad \forall (t, x) \in Q, \quad (5.54)$$

$$\varphi(t, x) = -F(x) \quad \forall x \in B.$$

Если обозначить  $W(t, x) = -\varphi(t, x)$ , уравнение Беллмана с учетом равенства  $\max f(x) = -\min [-f(x)]$  можно переписать в эквивалентной форме [1, 13, 44, 45]:

$$\min_{u \in U} \left\{ \frac{\partial W(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 W(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} \times \right. \\ \left. \times a_{ij}(t, x, u) + f^0(t, x, u) \right\} = 0 \quad \forall (t, x) \in Q, \quad (5.55)$$

$$W(t, x) = F(x) \quad \forall x \in B.$$

**Пример 5.4.** Дана модель объекта управления

$$d_0 X = u(t) dt + \sqrt{a} d_0 W, \quad X(0) = X_0,$$

где  $X \in R$ ;  $|u| \leq U_{\max}$ ,  $t \in [0, T]$ ;  $T$ ,  $a, U_{\max}$  — заданные положительные числа.

Требуется найти оптимальное управление  $u^*(t, x)$  с обратной связью, обеспечивающее минимальное значение функционала

$$J = (1/2) \int_R x^2 p(T, x) dx.$$

□ Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем

$$f(t, x, u) = u, \quad \sigma(t, x, u) = \sqrt{a}, \quad f^0(t, x, u) = 0, \quad F(x) = (1/2)x^2.$$

1. Выпишем уравнение Беллмана и граничное условие (5.55):

$$\min_{|u| \leq U_{\max}} \left\{ \frac{\partial W(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial W(t, x)}{\partial x} u + (1/2) \frac{\partial^2 W(t, x)}{\partial x^2} a \right\} = 0,$$

$$W(T, x) = (1/2)x^2.$$

2. Найдем структуру оптимального управления из условия минимума выражения в фигурных скобках:

$$u^*(t, x) = -U_{\max} \operatorname{sign} \frac{\partial W(t, x)}{\partial x}.$$

3. Подставим найденную структуру оптимального управления в уравнение Беллмана:

$$\frac{\partial W(t, x)}{\partial t} - U_{\max} \left| \frac{\partial W(t, x)}{\partial x} \right| + (1/2) \frac{\partial^2 W(t, x)}{\partial x^2} a = 0,$$

$$W(T, x) = (1/2)x^2.$$

4. Решение уравнения является четной функцией и при  $x > 0$  может быть записано в форме [45]:

$$W(t, x) = \int_0^{\infty} [(1/2)y^2 p(t, x-y) + \psi(y)p(t, x+y)] dy,$$

где

$$p(t, z) = \frac{1}{[2\pi a(T-t)]^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{[z - (T-t)U_{\max}]^2}{2a(T-t)} \right\},$$

$$\psi(y) = (1/4b^2)(1 - e^{-2by}) - ye^{-2by}/2b, \quad b = U_{\max}/a.$$

Искомое оптимальное управление с обратной связью  $u^*(t, x) = -U_{\max} \operatorname{sign} x$ . ■

Пример 5.5. Дана модель объекта управления

$$d_0 X = [AX(t) + u(t)] dt + \sqrt{a} d_0 W, \quad X(0) = X_0,$$

где  $X \in \mathbb{R}$ ;  $|u| \leq 1$ ,  $t \in [0, T]$ ;  $a$ ,  $T$  — заданные положительные числа. Начальная плотность вероятности — гауссовская с математическим ожиданием  $m_0 = 2$  и дисперсией  $R_0 = 3$ .

Требуется найти оптимальное управление  $u^*(t, x)$  с обратной связью, обеспечивающее минимальное значение функционала

$$J = \int_{\mathbb{R}} xp(T, x) dx.$$

□ Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем

$$f(t, x, u) = Ax + u, \quad \sigma(t, x, u) = \sqrt{a}, \quad f^0(t, x, u) = 0, \quad F(x) = x.$$

1. Выпишем уравнение Беллмана и граничное условие (5.54):

$$\max_{|u| \leq 1} \left\{ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} [Ax + u] + (1/2) \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} a \right\} = 0,$$

$$\varphi(T, x) = -x.$$

2. Найдем структуру оптимального управления из условия максимума выражения в фигурных скобках:

$$u^*(t, x) = 1 \operatorname{sign} \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x}.$$

3. Подставим найденную структуру оптимального управления в уравнение Беллмана:

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \left| \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \right| + \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \Lambda x + (1/2) \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} a = 0,$$

$$\varphi(T, x) = -x.$$

4. Решение уравнения ищется в виде

$$\varphi(t, x) = K_1(t)x + K_0(t),$$

где  $K_1(t)$ ,  $K_0(t)$  — неизвестные функции.

Подставляя  $\varphi(t, x)$  в уравнение и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получаем

$$\dot{K}_1 = -K_1 \Lambda, \quad K_1(T) = -1,$$

$$\dot{K}_0 = -|K_1|, \quad K_0(T) = 0,$$

$$u^*(t, x) = 1 \operatorname{sign} K_1(t).$$

Отсюда

$$K_1(t) = -e^{\Lambda(T-t)}, \quad K_0(t) = (1/\Lambda) [e^{\Lambda(T-t)} - 1],$$

искомое оптимальное управление  $u^*(t, x) = -1$ .

Минимальное значение функционала вычисляется по формуле (5.12):

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{U}_x} J &= - \int_{\mathbb{R}} \varphi(0, x) p_0(x) dx = - \left\{ (1/\Lambda) [e^{\Lambda T} - 1] - e^{\Lambda T} m_0 \right\} = \\ &= 2e^{\Lambda T} + 1/\Lambda - (1/\Lambda)e^{\Lambda T}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Синтез оптимальных линейных регуляторов с полной обратной связью. Пусть модель объекта управления (5.1) имеет вид

$$d_0 X = [A(t)X(t) + B(t)u(t)] dt + C(t)d_0 W,$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  — матрицы размера соответственно  $p \times p$ ,  $p \times q$ ,  $p \times k$ , элементы которых непрерывно дифференцируемы по  $t$ ; на управление ограничений не наложено, т.е.  $u \in \bar{U} = \mathbb{R}^q$ .

Пусть начальная плотность вероятности (5.2) — гауссовская с математическим ожиданием  $m_0$  и ковариационной матрицей  $R_0$ .

Функционал качества управления (5.21) квадратичный:

$$\begin{aligned} J &= (1/2) \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{B}} [x^T S(t)x + u(t, x)^T Q(t)u(t, x)] p(t, x) dx dt + \\ &+ (1/2) \int_{\mathbb{B}} [x^T \Lambda x] p(t_1, x) dx = M \left\{ (1/2) \int_{t_0}^{t_1} [X(t)^T S(t)X(t) + \right. \end{aligned}$$

$$+ u(t, X(t))^T Q(t) u(t, X(t)) \} dt + (1/2) [X(t_1)^T \Lambda X(t_1)] \},$$

где  $S(t), \Lambda$  — неотрицательно определенные симметрические матрицы размера  $n \times n$ , а  $Q(t)$  — положительно определенная симметрическая матрица размера  $q \times q$ . Сравнивая с общим случаем, рассмотренным в разд. 5.1, имеем

$$f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u; \sigma(t, x, u) = C(t); a(t, x, u) = C(t)C(t)^T;$$

$$f^0(t, x, u) = (1/2) [x^T S(t)x + u^T Q(t)u]; F(x) = (1/2) [x^T \Lambda x].$$

Требуется найти оптимальное управление  $u^*(t, x)$  с полной обратной связью.

Уравнение Беллмана (5.54) для данной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \max_u \left\{ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \left( \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \right)^T [A(t)x + B(t)u] + \right. \\ \left. + (1/2) \operatorname{tr} \left\{ C(t)C(t)^T \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} \right\} - (1/2) [x^T S(t)x + u^T Q(t)u] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\varphi(t_1, x) = - (1/2) [x^T \Lambda x].$$

Отсюда

$$u^*(t, x) = \arg \max_u \left[ \left( \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \right)^T B(t)u - (1/2)u^T Q(t)u \right]. \quad (5.57)$$

Решение уравнения (5.56) ищется в виде

$$\varphi(t, x) = (1/2)x^T K_2(t)x + K_0(t), \quad (5.58)$$

где  $K_2(t)$  — симметрическая матрица размера  $n \times n$ ,  $K_0(t)$  — функция.

Подставляя (5.58) в (5.57), получаем

$$u^*(t, x) = Q(t)^{-1} B(t)^T K_2(t)x. \quad (5.59)$$

Подставляя (5.59), (5.58) в (5.56) и приравнявая нулю члены с одинаковыми степенями  $x$ , с использованием (П.2.1) — (П.2.4) будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{K}_2 = -A^T K_2 - K_2 A - K_2 B Q^{-1} B^T K_2 + S, \quad K_2(t_1) = -\Lambda, \\ \dot{K}_0 = -\operatorname{tr} \{ C C^T K_2 \} / 2, \quad K_0(t_1) = 0. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Решая (5.60), где первое уравнение является уравнением Риккати, можно найти явный вид оптимального управления (5.59) с полной обратной связью и минимальную величину функционала

$$\min_{d_n \in \mathcal{D}_n} J = - \int_B \varphi(t_0, x) p(t_0, x) dx = - M [(1/2) x^T K_2(t_0) x + K_0(t_0)] =$$

$$= - (1/2) m_0^T K_2(t_0) m_0 - (1/2) \text{tr} \{K_2(t_0) R_0\} - K_0(t_0).$$

**З а м е ч а н и е.** Сравнивая (5.59), (5.60) с (4.27), (4.26), можно сделать вывод о совпадении оптимального управления с полной обратной связью для стохастических и детерминированных линейных систем с квадратичным функционалом, определенным на их траекториях.

**Пример 5.6.** Дана модель объекта управления

$$d_0 X = u(t) dt + d_0 W, \quad X(0) = X_0.$$

Начальная плотность вероятности — гауссовская с математическим ожиданием  $m_0 = 1$  и дисперсией  $R_0 = 1$ .

Функционал качества

$$J = (1/2) \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} u^2(t, x) p(t, x) dx dt + (1/2) \int_{\mathbb{R}} x^2 p(1, x) dx,$$

где  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $u \in \mathbb{R}$ .

Требуется найти оптимальное управление  $u^*(t, x)$  с полной обратной связью.

□ В поставленной задаче  $A(t) = 0$ ,  $B(t) = 1$ ,  $C(t) = 1$ ,  $S(t) = 0$ ,  $Q(t) = 1$ ,  $\Lambda = 1$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ .

Выпишем уравнения (5.60) и соотношение (5.59):

$$\dot{K}_2 = -K_2(t)^2, \quad K_2(1) = -1,$$

$$\dot{K}_0 = -K_2(t)/2, \quad K_0(1) = 0,$$

$$u^*(t, x) = K_2(t)x.$$

Отсюда  $K_2(t) = 1/(t-2)$ ,  $K_0(t) = -\ln(2-t)/2$ , а искомое оптимальное управление с полной обратной связью  $u^*(t, x) = x/(t-2)$ .

Минимальное значение функционала определяется по формуле

$$\min_{d_n \in \mathcal{D}_n} J = - (1/2) m_0^T K_2(0) m_0 - (1/2) \text{tr} \{K_2(0) R_0\} - K_0(0) =$$

$$= 1/4 + 1/4 + \ln 2/2 = (1 + \ln 2)/2.$$

Заметим, что оно меньше минимального значения функционала, обеспечиваемого с помощью оптимального программного управления (см. пример 5.3). ■

## 5.5. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С НЕЗАДАНЫМ ВРЕМЕНЕМ ОКОНЧАНИЯ ПРОЦЕССА

### 5.5.1. Задача поиска наилучшего момента окончания процесса

**Постановка задачи.** Предположим, что момент  $t_1$  окончания процесса управления заранее не задан и подлежит выбору.

Тогда обозначим  $\mathcal{D}_m$  — множество, состоящее из троек  $d_m = (t_1, p(t, x), u(t, x^1))$ , где  $t_0 \leq t_1 < \infty$ , функции  $p(t, x) \in C^{1,2}(Q)$ ,  $u(t, x^1) \in \mathcal{U}_m$  удовлетворяют тем же условиям, что и в разд. 5.1.

На введенном множестве  $\mathcal{D}_m$  определим функционал

$$J(p_0(x), d_m) = \int_{t_0}^{t_1} \int_B f^0(t, p(t, x), u(t, x^1)) dx dt + F(t_1, p(t_1, x)). \quad (5.61)$$

Сформулируем аналог задачи 1.

**Задача 1\*.** Требуется найти такой элемент  $d_m^* = (t_1^*, p^*(t, x), u^*(t, x^1)) \in \mathcal{D}_m$ , что

$$J(p_0(x), d_m^*) = \min_{d_m \in \mathcal{D}_m} J(p_0(x), d_m). \quad (5.62)$$

Предполагается, что такой элемент существует.

**Достаточные условия оптимальности.** Для решения задачи введем изменения в конструкции (5.8), (5.11):

$$\begin{aligned} G(t_1, p(x)) &= S(t_1, p(x)) + F(t_1, p(x)), \\ g &= \min_{\substack{t_1 \in [t_0, \infty) \\ p(x) \in P}} G(t_1, p(x)). \end{aligned} \quad (5.63)$$

Далее сформулируем достаточные условия оптимальности в поставленной задаче, аналогичные теореме 5.1.

Пусть имеется тройка  $d_m^* = (t_1^*, p^*(t, x), u^*(t, x^1)) \in \mathcal{D}_m$ .

**Утверждение 5.1.** (достаточные условия оптимальности в задаче 1\*).

Если существует такая функция  $S(t, p(x)) \in \Sigma$ , что тройка  $d_m^* \in \mathcal{D}_m$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $R(t, p^*(t, x), u^*(t, x^1)) = r_m(t)$  почти всюду на  $T^* = (t_0, t_1^*)$ ;
- 2)  $G(t_1^*, p^*(t_1^*, x)) = g$ ,

то справедливо условие (5.62). Функцию  $r_m(t)$  и величину  $g$  можно без ограничения общности положить равными нулю.

Доказательство утверждения 5.1 повторяет доказательство теоремы 5.1, где вместо пары  $d_m$  используется соответствующая тройка, а взамен (5.8), (5.11) — соотношения (5.63).

Соотношения для определения оптимального управления. Для получения уравнений, которые необходимо решить с целью нахождения оптимального управления, используем тот же подход, что и в разд.5.3, где применим также необходимое условие минимума функции  $G(t_1, p(x))$  по  $t_1$  и условия утверждения 5.1:

$$\frac{\partial G(t_1, p(x))}{\partial t_1} = \frac{\partial S(t_1, p(x))}{\partial t_1} + \frac{\partial F(t_1, p(x))}{\partial t_1} \Big|_{t_1^*, p^*(t_1^*, x)} = 0.$$

С учетом (5.25), (5.26) и уравнения, определяющего функцию  $W(t)$  из разд.5.3.1, имеем, что

$$\frac{\partial S(t, p^*(t, x))}{\partial t} = -H(t, p^*(t, x), u^*(t, x^1)).$$

Отсюда следует условие

$$H(t_1^*, p^*(t_1^*, x), u^*(t_1^*, x^1)) = \frac{\partial F(t_1^*, p^*(t_1^*, x))}{\partial t_1}, \quad (5.64)$$

которое служит для определения момента  $t_1^*$  при совместном решении с системой (5.30).

### 5.5.2. Задача со случайным моментом окончания процесса

**Постановка задачи.** Пусть поведение модели системы управления описывается стохастическим дифференциальным уравнением (5.1) с начальным условием, определяемым (5.2), и задано открытое множество  $V \subset R^n$  с компактным замыканием  $V' = V \cup \partial V$ , где  $\partial V$  — кусочно-гладкая граница.

Обозначим:  $Q = (t_0, T_1) \times V$ , где момент времени  $T_1 > t_0$  задан,  $\Gamma = ([t_0, T_1] \times \partial V) \cup (\{T_1\} \times V)$ ;  $V_1, V_2$  — проекции множества  $V$  соответственно на  $R^m, R^{n-m}$ .

Моментом окончания процесса будем считать первый момент  $t \in [t_0, T_1]$ , когда точка  $(t, X(t))$  достигает множества  $\Gamma$ .

Определим функционал качества управления в форме

$$J = M \left[ \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, X(t), u(t, X^1(t))) dt + F(t_1, X(t_1)) \right], \quad (5.65)$$

где  $M$  — знак математического ожидания и  $\forall u(t, x^1) \in \gamma_m$  величина (5.65) конечна,  $F(t_1, x)$ :  $\Gamma \rightarrow R$ .

Для решения задачи оптимального управления с нефиксированным временем окончания процесса сформулируем эквивалентную проблему, изменив форму записи функционала (5.65).



**Лемма.** Пусть имеется функция  $\varphi(t, x) \in C^{1,2}(Q)$ , удовлетворяющая уравнению

$$-\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} - A_*^{u(\cdot)}[\varphi(t, x)] - f^0(t, x, u(t, x^1)) \quad \forall (t, x) \in Q \quad (5.66)$$

с граничным условием

$$\varphi(t_1, x) = -F(t_1, x) \quad \forall (t_1, x) \in \Gamma. \quad (5.67)$$

Тогда

$$J = - \int_B \varphi(t_0, x) p_0(x) dx = J(p_0(x), z_m), \quad (5.68)$$

где  $z_m \in Z_m$  — пары функций  $(\varphi(t, x), u(t, x^1))$ , удовлетворяющих (5.66), (5.67), и  $\varphi(t, x) \in C^{1,2}(Q)$ ,  $u(t, x^1) \in \gamma_m$ .

**Доказательство.** Для  $t \leq t_1$  определим функцию

$$\varphi(t, x) = -M \left[ \int_t^{t_1} f^0(\theta, X(\theta), u(\theta, X^1(\theta))) d\theta + F(t_1, X(t_1)) \mid X(t) = x \right].$$

Используя формулу Ито (2.78) стохастического дифференцирования [7, 26, 28, 44]

$$d_\sigma \varphi(t, X(t)) = \left\{ \frac{\partial \varphi(t, X(t))}{\partial t} + A_*^{u(\cdot)}[\varphi(t, X(t))] \right\} dt + \varphi_x^T(t, X(t)) \sigma(t, X(t), u(t, X^1(t))) d_0 W,$$

получаем

$$M \left[ \int_{t_0}^{t_1} d_\sigma \varphi \right] = M \left[ \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial \varphi(t, X(t))}{\partial t} + A_*^{u(\cdot)}[\varphi(t, X(t))] \right\} dt \right] + M \left[ \int_{t_0}^{t_1} \varphi_x^T(t, X(t)) \sigma(t, X(t), u(t, X^1(t))) d_0 W \right].$$

Второй член в правой части равен нулю по свойствам стохастических интегралов [7, 26, 44]. Тогда с учетом (5.66) получим

$$M \left[ \int_{t_0}^{t_1} d_\sigma \varphi \right] = M \left[ \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, X(t), u(t, X^1(t))) dt \right] \quad \text{и}$$

$$M [\varphi(t_0, X(t_0))] = -M \left[ \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, X(t), u(t, X^1(t))) dt \right] + \\ + M [\varphi(t_1, X(t_1))].$$

По определению функция  $\varphi(t, x) = -M [F(t, X(t)) | X(t) = x] = -F(t, x)$ , что соответствует условию (5.67). Поэтому

$$M [\varphi(t_0, X(t_0))] = \int_B \varphi(t_0, x) p_0(x) dx = \\ = -M \left[ \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, X(t), u(t, X^1(t))) dt + F(t_1, X(t_1)) \right].$$

Отсюда с учетом (5.65) следует (5.68). ■

На основании данной леммы можно сформулировать аналог задачи 1.

**Задача 1<sup>\*\*\*</sup>.** Требуется найти такой элемент  $z_m^* = (\varphi^*(t, x), u^*(t, x^1)) \in Z_m$ , что

$$J(p_0(x), z_m^*) = \min_{z_m \in Z_m} J(p_0(x), z_m). \quad (5.69)$$

**Достаточные условия оптимальности.** Введем в рассмотрение множество  $\Sigma$  функций  $S(t, \varphi(x)) : [t_0, T_1] \times C^1(B) \rightarrow R^1$ , непрерывно дифференцируемых по  $t$  и имеющих непрерывную вариационную производную по аргументу  $\varphi(x)$ , причем  $\frac{\delta S(t, \varphi(\xi))}{\delta \varphi(x)} \in C^{1,2}(Q)$  и непрерывна на  $Q'$ , где  $\varphi(x) = \varphi(t, x)$  при  $t = \text{const}$ , а также конструкции

$$R(t, \varphi(x), u) = -\frac{\delta S(t, \varphi(x))}{\delta t} + \int_B \frac{\delta S(t, \varphi(\xi))}{\delta \varphi(x)} \{ \Lambda_*^u[\varphi(x)] - \\ - f^0(t, x, u) \} dx, \quad (5.70)$$

$$G(t_0, \varphi(x)) = S(t_0, \varphi(x)) - \int_B \varphi(x) p_0(x) dx.$$

Предположим, что при фиксированном  $m$  ( $0 \leq m \leq n$ ) функции в (5.70) достигают экстремальных значений

$$r_m(t) = \max_{\varphi(x) \in C^2(B)} \left\{ -\frac{\partial S(t, \varphi(x))}{\partial t} + \right. \\ \left. + \int_{B_1} \left[ \max_{u \in U} \int_{B_2} \frac{\delta S(t, \varphi(\xi))}{\delta \varphi(x)} \{A_*^u[\varphi(x)] - f^0(t, x, u)\} dx^2 \right] dx^1 \right\}, \quad (5.71)$$

$$g = \min_{\varphi(x) \in C^2(B)} G(t_0, \varphi(x)),$$

где функция  $r_m(t)$  кусочно-непрерывна на  $[t_0, T_1]$ .

Пусть имеется пара  $z_m^* = (\varphi^*(t, x), u^*(t, x^1)) \in Z_m$ .

**Утверждение 5.2.** (достаточные условия оптимальности в задаче 1<sup>\*)</sup>).

Если существует такая функция  $S(t, \varphi(x)) \in \Sigma$ , что пара  $z_m^* \in Z_m$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $R(t, \varphi^*(t, x), u^*(t, x^1)) = r_m(t)$  почти всюду на  $[t_0, T_1]$ ;
- 2)  $G(t_0, \varphi^*(t_0, x)) = g$ ,

то справедливо условие (5.69).

**Доказательство.** Как и при доказательстве теоремы 5.1, применим принцип расширения с заданием множества  $V$  и поиском доопределения функционала  $J$  на множестве  $V$  (см. разд.4.2).

Определим множество  $V$  пар  $z_m = (\varphi(t, x), u(t, x^1))$ , где:

- а) элементы пар по сравнению с входящими в  $Z_m$  необязательно связаны уравнением (5.66);
- б) выполняется условие (5.67);
- в) допускаются разрывы первого рода функций  $\varphi(t, x)$ ,  $u(t, x^1)$  по  $t \forall x \in B$ .

Таким образом, множество  $Z_m \subset V$  и расширение построено. Доопределение функционала  $J$  на множестве  $V$  производится с помощью задания функции  $S(t, \varphi(x)) \in \Sigma$ .

На множестве  $V$  определим функционал

$$L(p_0(x), z_m) = G(t_0, \varphi(t_0, x)) - \int_{t_0}^{T_1} R(t, \varphi(t, x), u(t, x^1)) dt - \\ - S(T_1, \varphi(T_1, x)). \quad (5.72)$$

Рассмотрим функционал (5.72) на множестве  $Z_m \subset V$ , где между функциями  $\varphi(t, x)$ ,  $u(t, x)$  существует дифференциальная связь (5.66).

Подставляя (5.70) в (5.72), с учетом (5.66) получаем

$$L(p_0(x), z_m) = S(t_0, \varphi(t_0, x)) - \int_B \varphi(t_0, x) p_0(x) dx + \\ + \int_{t_0}^{T_1} \left\{ \frac{\partial S(t, \varphi(t, x))}{\partial t} + \int_B \left[ \frac{\delta S(t, \varphi(t, x))}{\delta \varphi(x)} \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \right] dx \right\} dt - \\ - S(T_1, \varphi(T_1, x)).$$

Используя формулу вычисления полной производной функции  $S(t, \varphi(t, x))$  по аргументу  $t$

$$\frac{dS(t, \varphi(t, x))}{dt} = \frac{\partial S(t, \varphi(t, x))}{\partial t} + \int_B \frac{\delta S(t, \varphi(t, x))}{\delta \varphi(x)} \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} dx$$

и интегрируя по времени, получаем

$$L(p_0(x), z_m) = S(t_0, \varphi(t_0, x)) - \int_B \varphi(t_0, x) p_0(x) dx + \\ + \int_{t_0}^{T_1} \frac{dS(t, \varphi(t, x))}{dt} dt - S(T_1, \varphi(T_1, x)) = \\ = - \int_B \varphi(t_0, x) p_0(x) dx \equiv J(p_0(x), z_m).$$

Таким образом, на множестве  $Z_m$  функционалы  $L$  и  $J$  совпадают. Поведение функционала  $L$  на множестве  $V \setminus Z_m$  полностью определяется видом функции  $S(t, \varphi(x))$ .

Пусть имеется функция  $S(t, \varphi(x)) \in \Sigma$ . Рассмотрим задачу поиска минимума функционала (5.72) на множестве  $V$ . Третье слагаемое при имеющейся функции  $S(t, \varphi(x)) \in \Sigma$  и выполнении условия (5.67) вычисляется. С учетом свойств пар  $z_m \in V$  и (5.71) получаем

$$\min_{z_m \in V} L(p_0(x), z_m) \geq g - \int_{t_0}^{T_1} r_m(t) dt - S(T_1, \varphi(T_1, x)). \quad (5.73)$$

Если имеется пара  $z_m^* = (\varphi^*(t, x), u^*(t, x')) \in Z_m$ , удовлетворяющая условиям 1, 2 утверждения 5.2, то с учетом (5.70) – (5.73)  $L(p_0(x), z_m^*) \leq L(p_0(x), z_m) \quad \forall z_m \in V$ . Так как  $z_m^* \in Z_m \subset V$ , то  $L(p_0(x), z_m^*) \leq L(p_0(x), z_m) \quad \forall z_m \in Z_m$ . Как доказано выше,  $L(p_0(x), z_m) \equiv J(p_0(x), z_m) \quad \forall z_m \in Z_m$  при имеющейся  $S(t, \varphi(x)) \in \Sigma$ . Поэтому  $J(p_0(x), z_m^*) \leq J(p_0(x), z_m) \quad \forall z_m \in Z_m$ , что соответствует определению экстремума функционала (5.68). При этом  $L(p_0(x), z_m^*) = \min_{z_m \in Z_m} J(p_0(x), z_m) = J(p_0(x), z_m^*)$ .

Утверждение доказано.

Соотношения для определения оптимального управления. Функцию  $S(t, \varphi(x))$  будем искать в виде

$$S(t, \varphi(x)) = \int_B p(t, x) \varphi(x) dx, \quad (5.74)$$

где неизвестная функция  $p(t, x) \in C^{1,2}(Q)$  и непрерывна на  $Q'$ .

Подставляя (5.74) в (5.70) и применяя (П.1.1), имеем  $\frac{\delta S(t, \varphi(\xi))}{\delta \varphi(x)} = p(t, x)$  и, сравнивая с (5.26), получаем

$$R(t, \varphi(x), u) = \int_B \left\{ -\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} \varphi(x) + p(t, x) [A_*^u[\varphi(x)] - f^0(t, x, u)] \right\} dx, \quad (5.75)$$

$$G(t_0, \varphi(x)) = \int_B [p(t_0, x) - p_0(x)] \varphi(x) dx.$$

Из условия 1 утверждения 5.2 и из (5.71) следует, что структура оптимального управления  $u^*(t, x)$  определяется соотношением

$$u^*(t, x) = \arg \max_{u \in U} \int \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^*(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi^*(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right] p(t, x) dx^2.$$

Здесь считается, что операция максимизации по управлению  $\forall t, x^1$  однозначно разрешима.

Применяя в первом равенстве соотношений (5.75) условие (5.4) сопряженности операторов, перепишем (5.75) в форме

$$R(t, \varphi(x), u) = \int_B \left[ \left\{ -\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} + A^u[p(t, x)] \right\} \varphi(x) - f^0(t, x, u) p(t, x) \right] dx,$$

$$G(t_0, \varphi(x)) = \int_B [p(t_0, x) - p_0(x)] \varphi(x) dx.$$

Предполагая, что функции  $R(t, \varphi(x), u)$ ,  $G(t_0, \varphi(x))$  имеют непрерывную вариационную производную по  $\varphi(x)$ , используя необходимое условие экстремума в (5.71) и условия утверждения 5.2, получаем

$$\frac{\delta R(t, \varphi^*(t, x), u^*(t, x^1))}{\delta \varphi(x)} = 0 \quad \forall (t, x) \in Q,$$

$$\frac{\delta G(t_0, \varphi^*(t_0, x))}{\delta \varphi(x)} = 0 \quad \forall x \in B.$$

Отсюда с учетом (П.1.1) имеем

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} - A^{u^*} p(t, x) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x, u^*(t, x^1)) p(t, x)] + \quad (5.76)$$

$$+ (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [a_{ij}(t, x, u^*(t, x^1)) p(t, x)] \quad \forall (t, x) \in Q,$$

$$p(t_0, x) = p_0(x) \quad \forall x \in B. \quad (5.77)$$

Учитывая, что

$$p(t, x^1) = \int_{B_2} p(t, x) dx^2; \quad p(t, x^2 | x^1) = \frac{p(t, x)}{\int_{B_2} p(t, x) dx^2}, \quad (5.78)$$

где  $p(t, x^1) \geq 0$  — маргинальная плотность вероятности, а  $p(t, x^2 | x^1)$  — условная плотность вероятности, находим

$$u^*(t, x^1) = \arg \max_{u \in U} \int_{B_2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^*(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + \right. \\ \left. + (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi^*(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right] p(t, x^2 | x^1) dx^2. \quad (5.79)$$

Таким образом, искомое оптимальное управление  $u^*(t, x^1)$ , удовлетворяющее условию (5.69), можно найти в результате решения системы (5.66), (5.67), (5.76) — (5.79).

Выведенная система совпадает с необходимыми условиями экстремума, полученными У.Флемингом.

**Замечание.** Как следует из [44], граничное условие в (5.67) можно задавать на некотором замкнутом подмножестве  $\Gamma^* \subset \Gamma$ , для которого  $(t_1, X(t_1)) \in \Gamma^*$  с вероятностью 1 при любом начальном состоянии и допустимом управлении.

## 5.6. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ С НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

### 5.6.1. Постановка задачи

Рассмотрим частный случай задачи, поставленной в разд.5.1. Пусть модель объекта управления (5.1) линейна:

$$d_0 X(t) = [A(t)X(t) + B(t)u(t)] dt + C(t)d_0 W(t),$$

$$X(t_0) = X_0, \quad (5.80)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  — матрицы размера соответственно  $n \times n$ ,  $n \times q$ ,  $n \times k$ . Остальные обозначения совпадают с используемыми в разд.5.1.

Будем считать начальную плотность вероятности  $p_0(x)$  гауссовской с математическим ожиданием  $m_0$  и ковариацией  $V_0$ .

Уравнение (5.3) можно записать в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^n A_{ij}(t)x_j + \sum_{j=1}^q B_{ij}(t)u_j(t, x^1) \right] p(t, x) \right\} + \\ & + (1/2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} Z_{ij}(t), \quad p(t_0, x) = p_0(x), \quad (5.81) \end{aligned}$$

где  $Z(t) = C(t)C(t)^T$  — матрица размера  $n \times n$ .

Функционал (5.5) имеет вид

$$\begin{aligned} J = M \left\{ (1/2) \int_{t_0}^{t_1} [X^T(t)S(t)X(t) + u^T(t, X^1(t))Q(t)u(t, X^1(t))] dt + \right. \\ \left. + (1/2) [X^T(t_1)\Lambda X(t_1)] \right\}, \quad (5.82) \end{aligned}$$

где  $S(t)$ ,  $\Lambda$  — неотрицательно определенные симметрические матрицы размера  $n \times n$ , а  $Q(t)$  — положительно определенная симметрическая матрица размера  $q \times q$ ;  $M$  — знак математического ожидания.

Сравнивая с (5.1), (5.3), имеем.

$$f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u, \quad \sigma(t, x, u) = C(t)C(t)^T,$$

$$f^0(t, x, u) = (1/2) [x^T S(t)x + u^T Q(t)u]; \quad F(x) = (1/2) x^T \Lambda x.$$

Предполагается, что элементы матриц  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $S(t)$ ,  $Q(t)$  непрерывно дифференцируемы, а на управление ограничений не наложено.

Пусть управление зависит только от времени и вектора  $x^1 = (x_1, \dots, x_m)^T$ .

Требуется найти пару  $d_m^* = (p^*(t, x), u^*(t, x^1))$ , на которой достигается минимум функционала (5.82).

### 5.6.2. Соотношения для определения оптимального управления

Как следует из разд.5.3, для нахождения искомого управления следует решить систему (5.2), (5.3), (5.32) – (5.35).

Обозначим в матрице  $A$  и в остальных матрицах соответствующие блоки:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \hat{A} & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \\ a_{m+1,1} & \dots & a_{m+1,n} \\ & \hat{A} & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ & \circlearrowleft A & & & & \circlearrowright A \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \\ a_{m+1,1} & \dots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ & \circlearrowleft A & & & & \circlearrowright A \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

где матрицы имеют следующие размеры:  $\hat{A} - m \times n$ ,  $\hat{A} - (n-m) \times n$ ,  $\circlearrowleft A - m \times m$ ,  $\circlearrowright A - m \times (n-m)$ ,  $\circlearrowleft A - (n-m) \times m$ ,  $\circlearrowright A - (n-m) \times (n-m)$ .

Будем искать неизвестную функцию  $\varphi(t, x)$  в виде

$$\begin{aligned} \varphi(t, x) = & K_0(t) + K_1(t)^T x^1 + (1/2) x^{1T} K_2(t) x^1 + \psi_1(t)^T x^2 + \\ & + (1/2) x^{2T} \psi_2(t) x^2 + x^{1T} N(t) x^2, \end{aligned} \quad (5.83)$$

где  $K_0(t)$  – функция;  $K_1(t)$  – матрица размера  $m \times 1$ ,  $K_2(t) - m \times m$ ,  $\psi_1(t) - (n-m) \times 1$ ,  $\psi_2(t) - (n-m) \times (n-m)$ ,  $N(t) - m \times (n-m)$  – неизвестные матрицы.

Далее с целью сокращения записи зависимость всех матриц, кроме  $\Lambda$ , от времени там, где это не вызывает недоразумений, опущена.

Выпишем уравнение (5.32) с учетом (5.83) и введенных обозначений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = & - \left( \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \right)^T (Ax + Bu) - (1/2) \text{tr} \left\{ Z \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x \partial x^T} \right\} + \\ & + (1/2) x^T Sx + (1/2) u^T Qu = \\ = & - (\partial \varphi / \partial x^1)^T (\hat{A}x + \hat{B}u) - (\partial \varphi / \partial x^2)^T (\hat{A}x + \hat{B}u) - \\ - & (1/2) \text{tr} \left\{ Z \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x \partial x^T} \right\} + (1/2) x^T Sx + (1/2) u^T Qu = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - (K_1 + K_2 x^1 + N x^2)^T (\hat{A}x + \hat{B}u) - \\
& - (\psi_1 + \psi_2 x^2 + N^T x^1)^T (\hat{A}x + \hat{B}u) - \\
& - (1/2) \text{tr} \left\{ Z \begin{bmatrix} K_2 & N \\ N^T & \psi_2 \end{bmatrix} \right\} + (1/2) x^T S x + (1/2) u^T Q u. \quad (5.84)
\end{aligned}$$

Выделяя члены, зависящие от управления, аргументы которого здесь опущены, выпишем аналог условия (5.35):

$$\begin{aligned}
u^*(t, x^1) &= \arg \max_{B_2} \int \left\{ (K_1 + K_2 x^1 + N x^2)^T \hat{B}u + \right. \\
& \left. + (\psi_1 + \psi_2 x^2 + N^T x^1)^T \hat{B}u - (1/2) u^T Q u \right\} p(t, x^2 | x^1) dx^2 = \\
&= \arg \max_{\mu} \left\{ [K_1 + K_2 x^1 + N \mu(t, x^1)]^T \hat{B}u + \right. \\
& \left. + [\psi_1 + \psi_2 \mu(t, x^1) + N^T x^1]^T \hat{B}u - (1/2) u^T Q u \right\} = \\
&= \arg \max_{\mu} \Phi(u), \quad (5.85)
\end{aligned}$$

где  $\mu(t, x^1)$  — условное математическое ожидание вектора  $X^2$  при фиксированном значении  $X^1 = x^1$ :

$$\mu(t, x^1) = \int_{B_2} x^2 p(t, x^2 | x^1) dx^2.$$

Так как на управление ограничений не наложено, структура оптимального управления находится из (5.85) с помощью необходимых условий безусловного экстремума:  $\partial \Phi(u) / \partial u = 0$ . Отсюда с учетом (П.2.1), (П.2.2) имеем

$$\begin{aligned}
& \hat{B}^T [K_1 + K_2 x^1 + N \mu(t, x^1)] + \\
& + \hat{B}^T [\psi_1 + \psi_2 \mu(t, x^1) + N^T x^1] - Qu = 0.
\end{aligned}$$

Так как матрица  $Q(t)$  невырожденная, то

$$\begin{aligned}
u^*(t, x^1) &= Q^{-1} \hat{B}^T [K_1 + K_2 x^1 + N \mu(t, x^1)] + \\
& + Q^{-1} \hat{B}^T [\psi_1 + \psi_2 \mu(t, x^1) + N^T x^1] = \\
& = Q^{-1} \hat{B}^T \begin{bmatrix} K_1 + K_2 x^1 + N \mu(t, x^1) \\ \psi_1 + \psi_2 \mu(t, x^1) + N^T x^1 \end{bmatrix}. \quad (5.86)
\end{aligned}$$

Вычисляя матрицу вторых производных функции  $\Phi(u)$ , получаем

$$\frac{\partial^2 \Phi(u)}{\partial u^2} = -Q^T < 0.$$

Так как матрица  $Q(t)$  положительно определенная, то на управлении (5.86) достигается максимум функции в (5.85) по управлению вследствие выполнения достаточных условий экстремума.

Предположим, что уравнению (5.81) удовлетворяет гауссовская плотность вероятности

$$p(t, x) = \frac{1}{[(2\pi)^n \det V(t)]^{1/2}} \times \exp \left\{ - (1/2) [x - m(t)]^T V^{-1}(t) [x - m(t)] \right\},$$

где  $m(t)$  — безусловное математическое ожидание,  $m = (m_1, m_2)^T$ ,  $m^1 = M \{X^1\}$ ,  $m^2 = M \{X^2\}$ ;  $V(t)$  — ковариационная матрица,

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12}^T & V_{22} \end{bmatrix}.$$

Согласно [34] условное математическое ожидание определяется по формуле

$$\mu(t, x^1) = m^2(t) + V_{12}(t)^T V_{11}(t)^{-1} [x^1 - m^1(t)]. \quad (5.87)$$

Окончательно с учетом (5.86), (5.87) имеем

$$u^*(t, x^1) = Q^{-1} B^T \times \left[ \begin{array}{l} K_1 + N m^2 - N V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 + (K_2 + N V_{12}^T V_{11}^{-1}) x^1 \\ \psi_1 + \psi_2 m^2 - \psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 + (N^T + \psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1}) x^1 \end{array} \right]. \quad (5.88)$$

Для получения уравнений, описывающих изменение математического ожидания и ковариации, подставим (5.88) в (5.80). Пользуясь известными соотношениями для линейных систем [26, 28] и свойством  $M [\mu(t, x)] = m^2(t)$ , получаем

$$\dot{m} = A m + B Q^{-1} B^T \begin{bmatrix} K_1 + N m^2 + K_2 m^1 \\ \psi_1 + \psi_2 m^2 + N^T m^1 \end{bmatrix}, \quad m(t_0) = m_0, \quad (5.89)$$

$$\dot{V} = \left\{ A + B Q^{-1} B^T \begin{bmatrix} (K_2 + N V_{12}^T V_{11}^{-1}); 0 \\ (N^T + \psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1}); 0 \end{bmatrix} \right\} V +$$

$$+ V \left\{ A^T + \begin{bmatrix} (K_2 + V_{11}^{-1} V_{12} N^T); & (N + V_{11}^{-1} V_{12} \psi_2) \\ 0 & ; & 0 \end{bmatrix} BQ^{-1} B^T \right\} + CC^T, \quad (5.90)$$

$$V(t_0) = V_0.$$

Подставляя (5.87) и (5.83) в (5.84) с учетом (П.2.5), имеем .

$$\begin{aligned} & \dot{K}_0(t) + (1/2) \dot{K}_1(t)^T x^1 + (1/2) x^{1T} \dot{K}_1(t) + (1/2) x^{1T} \dot{K}_2(t) x^1 + \\ & + (1/2) \dot{\psi}_1(t)^T x^2 + (1/2) x^{2T} \dot{\psi}_1(t) + (1/2) x^{2T} \dot{\psi}_2(t) x^2 + \\ & + (1/2) x^{1T} \dot{N}(t) x^2 + (1/2) x^{2T} \dot{N}(t)^T x^1 = \\ & = - (x^{2T} N^T + x^{1T} K_2 + K_1^T) \left\{ \circ A x^1 + \dot{A} \circ x^2 + \right. \\ & + \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T [K_1 + Nm^2 - NV_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 + (K_2 + NV_{12}^T V_{11}^{-1}) x^1] + \\ & + \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T [\psi_1 + \psi_2 m^2 - \psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 + (N^T + \psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1}) x^1] \left. \right\} - \\ & - (x^{1T} N + x^{2T} \psi_2 + \psi_1^T) \left\{ \circ A x^1 + A \circ x^2 + \right. \\ & + \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T [K_1 + Nm^2 - NV_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 + (K_2 + NV_{12}^T V_{11}^{-1}) x^1] + \\ & + \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T [\psi_1 + \psi_2 m^2 - \psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 + (N^T + \psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1}) x^1] \left. \right\} + \\ & + (1/2) x^{1T} \circ S x^1 + (1/2) x^{2T} S \circ x^2 + (1/2) x^{1T} S \circ x^2 + (1/2) x^{2T} \circ S x^1 - \\ & - (1/2) \text{tr} \left\{ Z \begin{bmatrix} K_2 & N \\ N^T & \psi_2 \end{bmatrix} \right\} + \quad (5.91) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (1/2) \begin{bmatrix} K_1^T + m^{2T} N^T - m^{1T} V_{11}^{-1} V_{12} N^T + x^{1T} (K_2 + V_{11}^{-1} V_{12} N^T) \\ \psi_1^T + m^{2T} \psi_2 - m^{1T} V_{11}^{-1} V_{12} \psi_2 + x^{1T} (N + V_{11}^{-1} V_{12} \psi_2) \end{bmatrix} \times \\ & \times BQ^{-1} B^T \begin{bmatrix} K_1 + Nm^2 - NV_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 + (K_2 + NV_{12}^T V_{11}^{-1}) x^1 \\ \psi_1 + \psi_2 m^2 - \psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 + (N^T + \psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1}) x^1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя (П.2.4) и приравнявая коэффициенты при  $x^1$  и свободный член нулю, находим

$$\begin{aligned} \dot{K}_2 = & -K_2 \circ A - K_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T K_2 - K_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^* T N^T - N \circ A - \circ A^T K_2 - \circ A^T N^T - \\ & - N \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T K_2 + \circ S - N \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^* T N^T + V_{11}^{-1} V_{12} N^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T N V_{12}^T V_{11}^{-1} + \\ & + V_{11}^{-1} V_{12} \psi_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^* T \psi_2^T V_{12}^T V_{11}^{-1} + V_{11}^{-1} V_{12} N^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^* T \psi_2^T V_{12}^T V_{11}^{-1} + \\ & + V_{11}^{-1} V_{12} \psi_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^* T N V_{12}^T V_{11}^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 = & -\circ A^T K_1 - K_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T K_1 - K_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^* T \psi_1 - \\ & - \circ A^T \psi_1 - N \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^* T \psi_1 - N \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T K_1 + \\ & + V_{11}^{-1} V_{12} N^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T N m^2 - V_{11}^{-1} V_{12} N^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T N V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 + \\ & + V_{11}^{-1} V_{12} \psi_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^* T \psi_2 m^2 - V_{11}^{-1} V_{12} \psi_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^* T \psi_2^T V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 + \\ & + V_{11}^{-1} V_{12} N^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^* T \psi_2 m^2 - V_{11}^{-1} V_{12} N^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^* T \psi_2^T V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 + \\ & + V_{11}^{-1} V_{12} \psi_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T N m^2 - V_{11}^{-1} V_{12} \psi_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T N V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_0 = & -(1/2) K_1^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T K_1 - (1/2) K_1^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^* T \psi_1 - \\ & - (1/2) \psi_1^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T K_1 - (1/2) \psi_1^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^* T \psi_1 - (1/2) \text{tr} Z \begin{bmatrix} K_2 & N \\ N^T & \psi_2 \end{bmatrix} + \\ & + (1/2) [m^{2T} - m^{1T} V_{11}^{-1} V_{12}] N^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T N [m^2 - V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1] + \\ & + (1/2) [m^{2T} - m^{1T} V_{11}^{-1} V_{12}] N^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^* T \psi_2 [m^2 - V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1] + \\ & + (1/2) [m^{2T} - m^{1T} V_{11}^{-1} V_{12}] \psi_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T N [m^2 - V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1] + \\ & + (1/2) [m^{2T} - m^{1T} V_{11}^{-1} V_{12}] \psi_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^* T \psi_2 [m^2 - V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1]; \end{aligned}$$

(5.92)

$$\begin{aligned} \dot{N} = & -\circ A^T N - [V_{11}^{-1} V_{12} N^T + K_2] \hat{B} Q^{-1} \hat{B} N - K_2 A \circ - \\ & - [V_{11}^{-1} V_{12} N^T + K_2] \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^* \psi_2 - [V_{11}^{-1} V_{12} \psi_2 + N] \hat{B} Q^{-1} \hat{B} N - \end{aligned}$$

$$- [V_{11}^{-1}V_{12}\psi_2 + N] \hat{B}Q^{-1}\hat{B}\psi_2 - NA_{\bullet} - A^T\psi_2 + S^{\circ};$$

$$\dot{\psi}_2 = S_{\bullet} - A^T\psi_2 - \psi_2A_{\bullet} - N^T A^{\circ} - A^{\circ T}N;$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 = & -A^{\circ T}K_1 - A_{\bullet}^T\psi_1 - N^T\hat{B}Q^{-1}\hat{B}^T[K_1 + Nm^2 - NV_{12}^T V_{11}^{-1}m^1] - \\ & - N^T\hat{B}Q^{-1}\hat{B}^T[\psi_1 + \psi_2 m^2 - \psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1}m^1] - \\ & - \psi_2 \hat{B}Q^{-1}\hat{B}^T[K_1 + Nm^2 - NV_{12}^T V_{11}^{-1}m^1] - \\ & - \psi_2 \hat{B}Q^{-1}\hat{B}^T[\psi_1 + \psi_2 m^2 - \psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1}m^1]. \end{aligned}$$

Краевое условие имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, x) + F(x) = & (1/2)x^{1T}K_2(t_1)x^1 + K_1^T(t_1)x^1 + K_0(t_1) + \psi_1(t_1)^T x^2 + \\ & + (1/2)x^{2T}\psi_2(t_1)x^2 + x^{1T}N(t_1)x^2 + \\ & + (1/2)x^{1T}\Lambda x^1 + x^{1T}\Lambda^{\circ}x^2 + (1/2)x^{2T}\Lambda_{\bullet}x^2 = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая члены при одинаковых степенях  $x^1$  и используя (П.2.4), (П.2.5), находим

$$\begin{aligned} K_2(t_1) = -\Lambda, & \quad K_1(t_1) = 0, & \quad K_0(t_1) = 0, \\ \psi_2(t_1) = -\Lambda_{\bullet}, & \quad \psi_1(t_1) = 0, & \quad N(t_1) = -\Lambda^{\circ}. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Решая систему (5.89), (5.90), (5.92), (5.93) совместно с (5.86), можно определить искомое оптимальное управление с неполной информацией.

Минимальное значение функционала вычисляется по формуле (5.12) с учетом (5.83):

$$\begin{aligned} \min_{d_m \in \mathcal{D}_m} J = & - (1/2)m^1(t_0)^T K_2(t_0)m^1(t_0) - (1/2)\text{tr} K_2(t_0)V_{11}(t_0) - \\ & - K_1(t_0)^T m^1(t_0) - K_0(t_0) - \psi_1(t_0)^T m^2(t_0) - \\ & - (1/2)m^2(t_0)^T \psi_2(t_0)m^2(t_0) - (1/2)\text{tr} \psi_2(t_0)V_{22}(t_0) - \\ & - m^1(t_0)^T N(t_0)m^2(t_0) - \text{tr} N(t_0)V_{12}(t_0)^T. \end{aligned} \quad (5.94)$$

### 5.6.3. Предельные случаи информированности о векторе состояния

1.  $m=0$  (информация о векторе состояния отсутствует). Структура оптимального управления следует из (5.86):

$$u^*(t) = Q^{-1}(t)B(t)^T[\psi_1(t) + \psi_2(t)m(t)]. \quad (5.95)$$

Система (5.89), (5.92) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_2 &= -\psi_2 A - A^T \psi_2 + S, & \psi_2(t_1) &= -\Lambda, \\ \dot{\psi}_1 &= -A^T \psi_1 - \psi_2^T B Q^{-1} B^T \psi_1 - \psi_2^T B Q^{-1} B^T \psi_2 m, & \psi_1(t_1) &= 0, \\ \dot{K}_0 &= -(1/2)\psi_1^T B Q^{-1} B^T \psi_1 - (1/2)\text{tr } Z \psi_2 + \\ &+ (1/2)m^T \psi_2^T B Q^{-1} B^T \psi_2 m, & K_0(t_1) &= 0, \\ \dot{m} &= [A + B Q^{-1} B^T \psi_2] m + B Q^{-1} B^T \psi_1, & m(t_0) &= m_0. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Решая систему (5.96) совместно с (5.95), можно найти иско-  
мое оптимальное программное управление. Уравнения системы  
(5.90) для нахождения оптимального управления не используются.  
Заметим, что соотношения (5.95), (5.96) совпадают с (5.52),  
(5.53).

Минимальное значение функционала находится по формуле,  
следующей из (5.94):

$$\begin{aligned} \min_{d_0 \in \mathcal{D}_0} J &= -(1/2)m_0^T \psi_2(t_0) m_0 - (1/2)\text{tr } \psi_2(t_0) V_0 - \\ &- \psi_1(t_0)^T m_0 - K_0(t_0). \end{aligned}$$

Полагая  $p(t) = \psi_2(t)m(t) + \psi_1(t)$ , получаем систему, имеющую  
привычную форму принципа максимума [15,21,26]:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= A m + B Q^{-1} B^T p, & m(t_0) &= m_0, \\ \dot{p} &= S m - A^T p, & p(t_1) &= -\Lambda m(t_1). \\ u^*(t) &= Q(t)^{-1} B(t)^T p(t). \end{aligned}$$

2.  $m=p$  (имеется полная информация о векторе состоя-  
ния).

Система (5.89), (5.92) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{K}_2 &= -K_2 A - A^T K_2 - K_2 B Q^{-1} B^T K_2 + S, & K_2(t_1) &= -\Lambda, \\ \dot{K}_1 &= -A^T K_1 - K_2 B Q^{-1} B^T K_1, & K_1(t_1) &= 0, \\ \dot{K}_0 &= -(1/2)K_1^T B Q^{-1} B^T K_1 - (1/2)\text{tr } \{C C^T K_2\}, & K_0(t_1) &= 0, \end{aligned}$$

а оптимальный линейный регулятор с полной обратной связью определяется формулой

$$u^*(t, x) = Q^{-1}(t) B(t)^T [K_2(t)x + K_1(t)].$$

Так как в полученной системе  $K_1(t) \equiv 0$ , то она упрощается:

$$\begin{aligned} \dot{K}_2 &= -K_2 A - A^T K_2 - K_2 B Q^{-1} B^T K_2 + S, & K_2(t_1) &= -\Lambda, \\ \dot{K}_0 &= -(1/2) \text{tr} \{C C^T K_2\}, & K_0(t_1) &= 0, \end{aligned} \quad (5.97)$$

$$u^*(t, x) = Q(t)^{-1} B(t)^T K_2(t)x$$

и совпадает с (5.59), (5.60).

Минимальное значение функционала вычисляется по формуле, следующей из (5.94):

$$\min_{d_n \in \mathcal{D}_n} J = -(1/2) m_0^T K_2(t_0) m_0 - (1/2) \text{tr} \{K_2(t_0) V_0\} - K_0(t_0).$$

Пример 5.7. Дана модель объекта управления в виде

$$\begin{aligned} d_0 X &= [Z(t) + u(t, X(t))] dt + d_0 W, \\ d_0 Z &= 0. \end{aligned}$$

Начальная плотность вероятности — гауссовская с  $m_0 = (0, 0)^T$ ,

$$V_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Функционал (5.82) задан в форме

$$J = M \left[ (1/2) \int_0^1 u^2(t, X(t)) dt + (1/2) X^2(1) \right].$$

Требуется найти оптимальное управление  $u^*(t, x)$ , считая, что информация о  $Z$  отсутствует.

□ Здесь

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S = 0, \quad Q = 1, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \quad B Q^{-1} B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X^1 = X, \quad X^2 = Z,$$

$$m = 1, \quad n = 2.$$

Тогда из (5.89) следует

$$\dot{m}_1 = m_2 + K_1 + N m_2 + K_2 m_1, \quad \dot{m}_2 = 0, \quad m(0) = m_0 = (0, 0)^T,$$

а из (5.90)

$$\dot{V}_{11} = 2V_{11}K_2 + 2NV_{12} + 2V_{12} + 1, \quad V_{11}(0) = 1,$$

$$\dot{V}_{12} = V_{12}K_2 + NV_{12}^2/V_{11} + V_{22}, \quad V_{12}(0) = 0,$$

$$\dot{V}_{22} = 0, \quad V_{22}(0) = 1.$$

Из (5.88) получаем структуру оптимального регулятора:

$$u^*(t, x) = K_1 + Nm_2 - NV_{12}m_1/V_{11} + (K_2 + NV_{12}/V_{11})x.$$

Из системы (5.92) находим:

$$\dot{K}_2 = -K_2^2 + V_{12}^2N^2/V_{11}, \quad K_2(1) = -1,$$

$$\dot{K}_1 = -K_2K_1 + V_{12}^2N^2m_2/V_{11} - V_{12}^2N^2m_1/V_{11}, \quad K_1(1) = 0,$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_0 = & -(1/2)K_1^2 - (1/2)K_2 + \\ & + (1/2)[m_2 - m_1V_{12}/V_{11}]^2N^2, \end{aligned} \quad K_0(1) = 0,$$

$$\dot{N} = -K_2 - V_{12}N^2/V_{11} - K_2N, \quad N(1) = 0,$$

$$\dot{\psi}_2 = -2N, \quad \psi_2(1) = 0,$$

$$\dot{\psi}_1 = -K_1 - NK_1 - N^2m_2 - N^2V_{12}m_1/V_{11}, \quad \psi_1(1) = 0.$$

Отсюда  $m_1(t) = m_2(t) = K_1(t) = 0$ ,  $V_{12}(t) = 1$  и оптимальное управление может быть найдено в результате решения двухточечной краевой задачи:

$$\dot{V}_{11} = 2V_{11}K_2 + 2NV_{12} + 2V_{12} + 1, \quad V_{11}(0) = 1,$$

$$\dot{V}_{12} = V_{12}K_2 + NV_{12}^2/V_{11} + 1, \quad V_{12}(0) = 0,$$

$$\dot{K}_2 = -K_2^2 + V_{12}^2N^2/V_{11}, \quad K_2(1) = -1,$$

$$\dot{N} = -K_2 - V_{12}N^2/V_{11} - K_2N, \quad N(1) = 0.$$

Оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t, x) = (K_2(t) + N(t)V_{12}(t)/V_{11}(t))x = K(t)x.$$

Двухточечная краевая задача может быть решена методом Ньютона. При этом начальные условия  $K_2(0)$ ,  $N(0)$  ищутся по формуле

$$K_2(0)^{k+1} = K_2(0)^k + \Delta K_2^k(0), \quad N(0)^{k+1} = N(0)^k + \Delta N^k(0),$$

$$k = 0, 1, \dots,$$

где  $K_2(0)^0$ ,  $N(0)^0$  — начальные значения, а  $\Delta K_2^k(0)$ ,  $\Delta N^k(0)$  определяются на каждой итерации в результате решения системы двух линейных уравнений



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial K_2(0)} & \frac{\partial F_1}{\partial N(0)} \\ \frac{\partial F_2}{\partial K_2(0)} & \frac{\partial F_2}{\partial N(0)} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \Delta K_2^k(0) \\ \Delta N^k(0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}_k = - \begin{bmatrix} K_2(1) + 1 \\ N(1) \end{bmatrix}_k$$

Значения правой части получаются на  $k$ -й итерации путем интегрирования четырех дифференциальных уравнений системы при  $K_2(0) = K_2^k(0)$ ,  $N(0) = N^k(0)$ . Для нахождения производных в матрице Якоби лучше применять центральные аппроксимации, т.е., например, для вычисления  $\partial F_1 / \partial K_2(0)$ ,  $\partial F_2 / \partial K_2(0)$  требуется дважды проинтегрировать систему при  $N(0) = N^k(0)$ ,  $K_2(0) = K_2^k(0) - \Delta_1$  и  $K_2(0) = K_2^k(0) + \Delta_1$ , вычислить соответствующие значения  $F_1^+$ ,  $F_1^-$ ,  $F_2^+$ ,  $F_2^-$  функций  $F_1$ ,  $F_2$ , а затем найти приближенные значения производных по формулам

$$\frac{\partial F_1}{\partial K_2(0)} = \frac{F_1^+ - F_1^-}{2\Delta_1}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial K_2(0)} = \frac{F_2^+ - F_2^-}{2\Delta_1}.$$

Интегрирование производилось методом Рунге-Кутты с шагом  $h = 0,1$  с., а  $\Delta_1 = 10^{-6} \times K^k(0)$ ,  $\Delta_2 = 10^{-6} \times N^k(0)$ . Система линейных уравнений решалась методом Гаусса с выбором главного элемента.

При начальных значениях  $K_2^0(0) = -0,1$ ;  $N^0(0) = -0,1$  было проделано 6 итераций, давших приемлемую точность:

$$\varepsilon = |K_2^k(1) + 1| + |N^k(1)| = 1,026 \times 10^{-4}.$$

Результаты расчетов приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

t	$V_{11}$	$V_{12}$	$K_2$	N	$K(t)$
0	1	0	-0.505583	-0.4811067	-0.5055830
0.1	1.001478	$9.728 \times 10^{-2}$	-0.5324355	-0.4545502	-0.5765902
0.2	1.007704	0.1884886	-0.5619515	-0.4267127	-0.6417671
0.3	1.017913	0.2729096	-0.5944509	-0.3965742	-0.7007751
0.4	1.031233	0.3501589	-0.6305299	-0.3630078	-0.7537904
0.5	1.046723	0.4201192	-0.6710850	-0.3247430	-0.8014258
0.6	1.063402	0.4828736	-0.7173505	-0.2803158	-0.8446374
0.7	1.080257	0.5386330	-0.7709540	-0.2279970	-0.8846368
0.8	1.096250	0.5876693	-0.8339983	-0.1656942	-0.9228224
0.9	1.110303	0.6302581	-0.9091813	-0.0908149	-0.9607319
1.0	1.121291	0.6666364	-0.9999723	$-7.488 \times 10^{-5}$	-1.0000170

Величина функционала с учетом того, что  $m(t) = 0$ , определяется по формуле

$$J_1 = (1/2) \left\{ \int_0^1 K^2(t) V_{11}(t) dt + V_{11}(1) \right\}.$$

Вычисления по формуле трапеций с учетом результатов, имеющих в табл.5.1, дают  $J_1 = 0,9265$ .

Сравним полученный результат со случаями отсутствия информации о состоянии и полной информации.

При  $m=0$ , как следует из примера 5.2, оптимальное управление  $u^*(t) = 0$ , а система для ковариаций имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V}_{11} &= 2V_{12} + 1, & V_{11}(0) &= 1, \\ \dot{V}_{12} &= V_{22}, & V_{12}(0) &= 0, \\ \dot{V}_{22} &= 0, & V_{22}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Ее решение:  $V_{11}(t) = t^2 + t + 1$ ,  $V_{12}(t) = t$ ,  $V_{22}(t) = 1$ .

Величина функционала с учетом того, что  $m(t) = 0$ ,  $u^*(t) = 0$ , определяется по формуле  $J_0 = (1/2)V_{11}(1) = 1,5$ .

При  $m=2$  оптимальный регулятор имеет вид

$$u^*(t, x, z) = (1 \ 0) K_2(t) \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = K_{11}x + K_{12}z,$$

где элементы матрицы  $K_2(t) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$  удовлетворяют уравнению (5.97):

$$\begin{aligned} \dot{K}_{11} &= -K_{11}, & K_{11}(1) &= -1, \\ \dot{K}_{12} &= -K_{11} - K_{11}K_{12}, & K_{12}(1) &= 0, \\ \dot{K}_{22} &= -2K_{12} - K_{12}^2, & K_{22}(1) &= 0, \end{aligned}$$

$$\dot{K}_0 = -(1/2) \text{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = -(1/2)K_{11}, \quad K_0(1) = 0.$$

Решение имеет вид

$$\begin{aligned} K_{11}(t) &= \frac{1}{1-t}, \quad K_{12}(t) = \frac{1-t}{1-t^2}, \quad K_{22}(t) = t + \frac{1}{1-t^2}, \\ K_0(t) &= -(1/2) \ln(2-t), \\ u^*(t, x, z) &= \frac{x}{1-t^2} + \frac{1-t}{1-t^2} z. \end{aligned}$$

Минимальное значение функционала с учетом  $m(0) = 0$  будет

$$J_2 = -(1/2) \text{tr} K_2(0) V_0 - K_0(0) = (1/2) [1 + \ln 2] = 0,8465.$$

Отсюда следует неравенство  $J_2 < J_1 < J_0$ .

## 6. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЗАДАНИЯ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

### 6.1. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО В СРЕДНЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ

#### 6.1.1. Постановка задачи

Пусть поведение модели объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.1)$$

где  $x$  — вектор состояния системы,  $x = (x^1, x^2)^T \in R^n$ ,  $x^1 = (x_1, \dots, x_m)^T$ ,  $x^2 = (x_{m+1}, \dots, x_n)^T$ ,  $0 \leq m \leq n$  (предположим, что о компонентах вектора  $x^1 \in R^m$  известна текущая информация, а о компонентах вектора  $x^2 \in R^{n-m}$  она отсутствует);  $u$  — вектор управления,  $u \in U \subseteq R^q$ ,  $U$  — некоторое заданное множество;  $t$  — время,  $t \in T' = [t_0, t_1] = T \cup \{t_0\} \cup \{t_1\}$ ,  $T'$  — интервал времени функционирования системы, моменты времени  $t_0$  и  $t_1$  заданы, внешние воздействия на объект управления отсутствуют, функция  $f(t, x, u) : T' \times R^n \times U \rightarrow R^n$ .

Здесь и далее основные обозначения совпадают с обозначениями, введенными в разд. 4.

Начальные условия  $x(t_0)$  заданы компактным множеством  $\Omega$  положительной меры с кусочно-гладкой границей

$$x(t_0) = x_0 \in \Omega \subset R^n. \quad (6.2)$$

Множество  $\Omega$  характеризует неопределенность задания начальных условий. Множество, состоящее из всех множеств  $\Omega$  с описанными выше свойствами, обозначим  $\omega$ .

Предполагается, что при управлении используется информация только о времени и о текущей величине вектора  $x$ , т. е. управление  $u(t)$ , применяемое в каждый момент времени  $t \in T'$ , имеет вид управления с обратной связью по неполному вектору состояния:  $u(t) = u(t, x^1(t))$  (см. рис. 4.3).

Как и в разд. 4, число  $m$  ( $0 \leq m \leq n$ ) определяется условиями информированности. При  $m = n$  имеется информация о всех координатах вектора  $x$ : система, изображенная на рис. 4.3, будет системой с полной обратной связью, а при  $m = 0$  — системой, разомкнутой по состоянию, где применяется программное управление  $u(t)$ .

Множество допустимых управлений  $\gamma_m$  состоит из функций  $u(t, x^1) : T' \times V_1 \rightarrow U$  таких, что для всех  $i = 1, \dots, n$  функции  $f_i^{u(t)}(t, x) = f_i(t, x, u(t, x^1))$ , определены на множестве  $Q'$ , непрерывно дифференцируемы и имеют ограниченные производные по  $x$ ,

кусочно-непрерывны по  $t$ , что гарантирует существование и единственность решения уравнения (6.1), а управление  $u(\cdot) = u(\cdot, x^1(\cdot))$  — кусочно-непрерывно.

Определим множество допустимых процессов  $\mathcal{D}$  как множество пар  $d = (x(\cdot), u(\cdot))$ , заданных на  $T'$ , удовлетворяющих уравнению (6.1) с начальным условием (6.2), где решение  $x(\cdot)$  — непрерывно и кусочно-дифференцируемо, а управление  $u(\cdot)$  кусочно-непрерывно, причем  $\forall t \in T' \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in U$ . Далее везде подразумевается, что множество  $\mathcal{D}$  зависит от начального условия  $x_0$ , но эта зависимость явно не указана.

Каждому допустимому управлению  $u(t, x^1) \in \mathcal{U}_m$  и множеству  $\Omega$  поставим в соответствие пучок (ансамбль) траекторий уравнения (6.1)  $X(t; u(t, x^1))$ ,  $t \in T'$  — объединение решений уравнения (6.1) по всем возможным начальным условиям (6.2) [16]:

$$X(t; u(t, x^1)) = \bigcup \left\{ x(t; u(t, x^1), x(t_0)) \mid x(t_0) \in \Omega \right\}, \quad t \in T'.$$

Пучок траекторий (рис. 6.1) порождается множеством  $\Omega$  и управлением  $u(t, x^1)$ . Здесь  $\Omega_{\tau, u}$  — образ множества  $\Omega$  в момент  $\tau \in T'$  при фиксированном управлении  $u(t, x^1)$ .

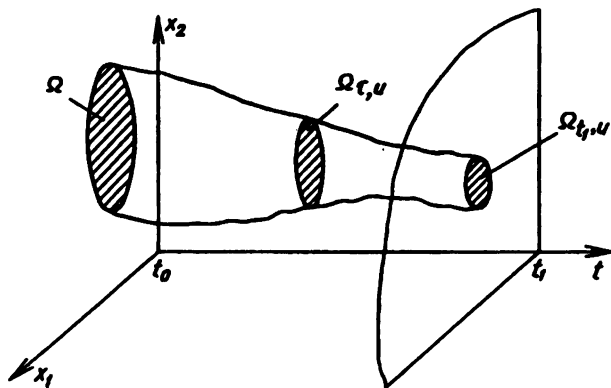


Рис. 6.1

Для описания положения пучка траекторий в пространстве воспользуемся вероятностным подходом.

Положение пучка в текущий момент времени будем описывать функцией  $p(t, x)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x, u(t, x^1)) p(t, x)] = - A^{u(\cdot)} [p(t, x)] \quad \forall (t, x) \in Q, \quad (6.3)$$

с начальным условием

$$p(t_0, x) = p_0(x) \in P^0, \quad (6.4)$$

где  $A^{u(\cdot)}[\cdot]$  — дифференциальный оператор первого порядка,

$$P^0 = \left\{ p(x) \mid p(x) \in C^1(B), \int_B p(x) dx = 1, p(x) \geq 0 \quad \forall x \in B, \right. \\ \left. p(x) = 0 \quad \forall x \notin \Omega \right\}.$$

Уравнение (6.3) называется уравнением переноса или *уравнением Лиувилля* [22]. Его решение определяется решением системы уравнений для характеристик:

$$\frac{dx_i}{f_i(t, x, u)} = \frac{dp}{-p \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(t, x, u)}{\partial x_i}} = dt; \quad x(t_0) = x_0 \in \Omega, \quad p(t_0) = p_0. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.3) является частным случаем уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова (5.3), когда в системе (5.1)  $\sigma(t, x, u) \equiv 0$ , что соответствует отсутствию случайных воздействий в модели объекта управления. Поэтому далее функция  $p(t, x)$  трактуется как плотность вероятности. Начальные условия для системы (6.1) могут лежать произвольно в множестве  $\Omega$ . При использовании данного подхода они полагаются случайными и распределенными согласно закону  $p_0(x)$ , что отражено в (6.4). Величина функции  $p(t, x)$  при фиксированном  $t$  характеризует плотность следов траекторий пучка, а носитель функции  $p(t, x)$ , т.е. множество тех  $x$ , где  $p(t, x) \neq 0$ , совпадает в силу (6.5) с множеством  $\Omega_{t,u}$  — образом множества  $\Omega$  в момент  $t$ .

В некоторых практических задачах информация о законе распределения начальных условий отсутствует. В таких случаях удобно считать начальную плотность равномерной:

$$p(t_0, x) = p_0(x) = \begin{cases} 1/\text{mes } \Omega & \forall x \in \Omega, \\ 0 & \forall x \notin \Omega, \end{cases}$$

а решение уравнения Лиувилля понимать в обобщенном смысле.

Обозначим через  $\mathcal{D}_m$  множество пар  $d_m = (p(t, x), u(t, x^1))$ , где функции  $p(t, x)$ ,  $u(t, x^1) \in \gamma_m$  удовлетворяют уравнению (6.3) с начальным условием (6.4).

В общем случае в качестве критерия оптимальности управления пучком можно использовать функционал (5.5), заданный на множестве  $\mathcal{D}_m$ .

Тогда справедливы две постановки проблемы определения оптимального управления пучком, аналогичные рассмотренным в разд. 5: задача 1 нахождения оптимальной пары  $d_m^* = (p^*(t, x), u^*(t, x^1))$ , для заданного множества  $\Omega$  неопределенности начального состояния системы (6.1) и задача 2 определения оптимальной синтезирующей функции  $u^*(t, x; p(x))$ , порождающей для любого множества  $\Omega \subset \omega$  соответствующее оптимальное управление  $u^*(t, x)$ .

Постановки задач 1 и 2 при применении вероятностного подхода к определению оптимального управления пучком траекторий совпадают с изложенными в разд. 5.1. Достаточные условия оптимальности аналогичны теоремам 5.1 и 5.2 при  $\sigma(t, x, u) \equiv 0$ . Соотношения для определения оптимального управления являются частным случаем соотношений, полученных в разд. 5.3.

Для определения оптимальной синтезирующей функции  $u^*(t, x; p(x))$  в задаче 2 требуется решить уравнение, следующее из (5.15), (5.16) при  $a_{ij}(t, x, u) \equiv 0$  в операторе  $A_*^u[\cdot]$ .

Для определения оптимального управления  $u^*(t, x^1)$  в задаче 1 требуется решить систему, следующую из (5.30) при замене (5.2), (5.3) на (6.3), (6.4) и при  $a_{ij}(t, x, u) \equiv 0$ .

Рассмотрим подробнее важный частный случай задач управления пучком траекторий.

*Качество управления отдельной траекторией пучка* будем описывать величиной функционала, определенного на множестве допустимых процессов  $\mathcal{D}$ :

$$I(x_0, d) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(x(t_1)), \quad (6.6)$$

где  $f^0(t, x, u)$ ,  $F(x)$  — заданные непрерывно дифференцируемые функции.

*Качество управления пучком траекторий* предлагается оценивать величиной функционала

$$J = \int_{\Omega} I(x_0, d) p_0(x_0) dx_0. \quad (6.7)$$

Функционал (6.7) характеризует среднее значение функционала  $I(x_0, d)$  на множестве  $\Omega$ .

Требуется найти управление  $u^*(t, x^1) \in \gamma_m$ , минимизирующее функционал (6.7).

Искомое управление  $u^*(t, x^1)$  называется *оптимальным в среднем*.

Пусть  $q(t, x) = x(t_0)$  — полная совокупность первых интегралов уравнения (6.1) при фиксированном управлении  $u(t, x^1)$ , определенных на множестве  $Q'$ , а функции  $q_i(t, x)$  непрерывно дифференцируемы по всем аргументам почти при всех  $t \in T'$ .

Тогда можно определить обратную функцию

$$x = x(t, t_0, x(t_0)); \quad x(t_0, t_0, x(t_0)) = x(t_0) = x_0, \quad (6.8)$$

являющуюся общим решением уравнения (6.1).

Преобразуем функционал (6.7) с учетом (6.6):

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Omega} p_0(x_0) \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t, x^1(t))) dt + F(x(t_1)) \right\} dx_0 = \\ &= \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t, t_0, x_0), u(t, x^1(t, t_0, x_0))) p_0(x_0) dt dx_0 + \\ &\quad + \int_{\Omega} F(x(t_1, t_0, x_0)) p_0(x_0) dx_0. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования в первом члене и производя замену переменных в интеграле по  $x_0$ , имеем

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega_1, u} f^0(t, x(t, t_0, q(t, x)), u(t, x^1(t, t_0, q(t, x)))) p_0(q(t, x)) \times \\ &\quad \times \left| \det \frac{\partial x_0}{\partial x} \right| dx dt + \int_{\Omega_1, u} F(x(t_1, t_0, q(t_1, x))) p_0(q(t_1, x)) \left| \det \frac{\partial x_0}{\partial x} \right| dx. \end{aligned}$$

По формуле Лиувилля [22]

$$\det \frac{\partial x_0}{\partial x} = \exp \left( - \int_{t_0}^t \operatorname{tr} \frac{\partial f(\tau, x(\tau), u(\tau, x^1(\tau)))}{\partial x} d\tau \right).$$

Функция

$$p(t, x(t)) = p_0(q(t, x(t))) \exp \left( - \int_{t_0}^t \operatorname{tr} \frac{\partial f(\tau, x(\tau), u(\tau, x^1(\tau)))}{\partial x} d\tau \right)$$

удовлетворяет уравнению (6.3), что можно проверить непосредственно прямой подстановкой. Окончательно получим

$$\begin{aligned}
 J(p_0(x), d_m) &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega_{t,u}} f^0(t, x, u(t, x^1)) p(t, x) dx dt + \int_{\Omega_{t_1, u}} F(x) p(t_1, x) dx = \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \int_B f^0(t, x, u(t, x^1)) p(t, x) dx dt + \int_B F(x) p(t_1, x) dx. \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что функция  $p(t, x)$  имеет компактный носитель, т.е.  $p(t, x) = 0 \forall x \notin \Omega_{t,u}$ .

Функционал (6.9) определен на множестве  $\mathcal{D}_m$  допустимых пар  $d_m = (p(t, x), u(t, x^1))$ , где элементы пар удовлетворяют уравнению (6.3) с начальным условием (6.4).

Задача оптимального в среднем управления пучком траекторий может быть теперь сформулирована аналогично задаче 1 из разд. 5.1.

Требуется найти пару  $d_m^* = (p^*(t, x), u^*(t, x^1)) \in \mathcal{D}_m$ , на которой достигается минимум функционала (6.9) на множестве  $\mathcal{D}_m$ .

### 6.1.2. Соотношения для определения оптимального в среднем управления

Так как поставленная задача является частным случаем проблемы, рассмотренной в разд. 5, она может быть решена с помощью полученных ранее соотношений (5.2), (5.3), (5.32)–(5.35) с соответствующими изменениями.

Для определения оптимального управления  $u^*(t, x^1)$  в задаче 1 требуется решить систему уравнений

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p^*(t, x)}{\partial t} &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ f_i(t, x, u^*(t, x^1)) p^*(t, x) \right] = \\
 &= A^{u^*(t)} [p^*(t, x)] \quad \forall (t, x) \in Q, \\
 p^*(t_0, x) &= p_0(x) \in P^0, \quad \varphi(t_1, x) = -F(x) \quad \forall x \in B, \quad (6.10)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u^*(t, x^1)) + f^0(t, x, u^*(t, x^1)) \quad \forall (t, x) \in Q,$$

$$u^*(t, x^1) = \arg \max_{u \in U} \int_{B_2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right] p^*(t, x^2 | x^1) dx^2,$$

где  $p^*(t, x^2 | x^1)$  – условная плотность вероятности,



$$p^*(t, x^2 | x^1) = \frac{p^*(t, x)}{\int_{B_2} p^*(t, x) dx^2}.$$

Минимальное значение функционала можно подсчитать по формуле

$$\min_{d_m \in \mathcal{D}_m} J(p_0(x), d_m) = - \int_{\Omega} \varphi(t_0, x) p_0(x) dx.$$

**Замечание.** Задача оптимального управления пучком траекторий с нефиксированным временем окончания процесса может рассматриваться для двух случаев (см. разд. 5.5.1 и 5.5.2).

*Первый случай.* Момент  $t_1$  заранее не задан и подлежит выбору. Аналог функционала качества (6.9) имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \int_B f^0(t, x, u(t, x^1)) p(t, x) dx dt + \int_B F(t_1, x) p(t_1, x) dx.$$

Тогда к системе (6.10) следует добавить условие, получающееся из (5.64):

$$H(t_1, p^*(t_1, x), u^*(t_1, x)) = \int_B \frac{\partial F(t_1, x)}{\partial t_1} p^*(t_1, x) dx,$$

$$\text{где } H(t, p(t, x), u) = \int_B \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right] p(t, x) dx.$$

*Второй случай.* Пусть поведение модели объекта управления описывается дифференциальным уравнением (6.1) с начальным условием, определяемым (6.2), и задано открытое множество  $B \subset \mathbb{R}^n$  с компактным замыканием  $B' = B \cup \partial B$ , где  $\partial B$  — кусочно-гладкая граница.

Обозначим:  $Q = (t_0, T_1) \times B$ , где момент времени  $T_1 > t_0$  задан,  $\Gamma = ([t_0, T_1] \times \partial B) \cup (\{T_1\} \times B)$ .

Моментом окончания процесса управления будем считать первый момент  $t \in [t_0, T_1]$ , когда точка  $(t, X(t))$  достигает множества  $\Gamma$ .

Определим функционал качества управления в форме

$$J = \int_{\Omega} I(x_0, d) p_0(x_0) dx_0 = M \left[ \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, X(t), u(t, X^1(t))) dt + F(t_1, X(t_1)) \right],$$

где  $M$  — знак математического ожидания;  $F(t_1, x): \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $X(t)$  — случайный процесс, удовлетворяющий уравнению (6.1) со случайным начальным условием  $X_0 \in \Omega$ .

Для решения задачи оптимального управления с нефиксированным временем окончания процесса следует сформулировать эквивалентную проблему, изменив форму записи функционала так же, как в разд.5.5.2. Система уравнений для определения оптимального управления пучком следует из (5.66), (5.67), (5.76) – (5.79) с учетом описанных выше изменений:

$$\frac{\partial p^*(t, x)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ f_i(t, x, u^*(t, x^1)) p^*(t, x) \right] = A^{u^*(t)} [p^*(t, x)] \quad \forall (t, x) \in Q,$$

$$- \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = A_*^{u^*(t)} [\varphi(t, x)] - f^0(t, x, u^*(t, x^1)) \quad \forall (t, x) \in Q, \quad (6.11)$$

$$p^*(t_0, x) = p_0(x) \in P^0, \quad \varphi(t_1, x) = -F(t_1, x) \quad \forall (t_1, x) \in \Gamma,$$

$$u^*(t, x^1) = \arg \max_{u \in U} \int_{B_2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right] p^*(t, x^2 | x^1) dx^2,$$

где  $p^*(t, x^2 | x^1) = \frac{p^*(t, x)}{\int_{B_2} p^*(t, x) dx^2}$  – условная плотность вероятности.

### 6.1.3. Предельные случаи информированности о векторе состояния

1.  $m=0$  (информация о векторе состояния отсутствует). Соотношения (6.10) для общего случая принимают вид

$$\frac{\partial p^*(t, x)}{\partial t} = A^{u^*(t)} [p^*(t, x)], \quad p^*(t_0, x) = p_0(x) \in P^0,$$

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = -A_*^{u^*(t)} [\varphi(t, x)] + f^0(t, x, u^*(t, x^1)),$$

$$\varphi(t_1, x) = -F(x), \quad (6.12)$$

$$u^*(t) = \arg \max_{u \in U} \int_B \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right] p^*(t, x) dx,$$

которую требуется решить для определения *оптимального в среднем программного управления*. Синтезированное оптимальное управление  $u^*(t)$  применяется для всех начальных условий из множества  $\Omega$ . При этом схема, изображенная на рис.4.3, разомкнута по состоянию.

2.  $m = n$  (имеется полная информация о векторе состояния). Соотношения для общего случая преобразуются в уравнение Беллмана для определения оптимального управления  $u^*(t, x)$  с полной обратной связью:

$$\max_{u \in U} \left\{ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right\} = 0 \quad \forall (t, x) \in Q, \quad (6.13)$$

$$\varphi(t_1, x) = -F(x) \quad \forall x \in B.$$

В отличие от оптимального в среднем программного управления управление  $u^*(t, x)$  в общем случае для каждого начального условия из множества  $\Omega$  порождает соответствующее управление  $u(t) = u^*(t, x(t))$ . При этом на каждой паре  $(x(\cdot), u(\cdot))$  достигается минимум функционала (6.6), а на всем пучке — минимум функционала (6.7) или равного ему (6.9).

Пример 6.1. Для задачи

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = x_0 \in \Omega = [0, 2],$$

$$I(x_0, d) = (1/2) \int_0^1 u^2(t) dt + (1/2) x^2(1),$$

$$J = \int_{\Omega} I(x_0, d) p_0(x_0) dx_0 \rightarrow \min$$

найти оптимальное в среднем программное управление  $u^*(t)$ .

□ В поставленной задаче  $x \in R$ ;  $u \in R$ ;  $f(t, x, u) = u$ ;  $f^0(t, x, u) = (1/2)u^2$ ;  $F(x) = (1/2)x^2$ ;  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ ,  $\text{mes } \Omega = 2$ , начальная плотность вероятности  $p_0(x)$  равномерная.

Выпишем систему (6.12) для данной задачи

$$\frac{\partial p^*(t, x)}{\partial t} = - \frac{\partial p^*(t, x)}{\partial x} u^*(t),$$

$$p^*(0, x) = p_0(x) = \begin{cases} 1/2 & \forall x \in \Omega = [0, 2], \\ 0 & \forall x \notin \Omega = [0, 2], \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} u^*(t) + (1/2) u^*(t)^2, \quad \varphi(1, x) = - (1/2) x^2,$$

$$u^*(t) = \arg \max_u \int_R \left[ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} u - (1/2) u^2 \right] p^*(t, x) dx.$$

Так как на управление ограничений не наложено, то, применяя необходимые условия экстремума, из последнего соотношения получаем

$$u^*(t) = \int_R \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} p^*(t, x) dx.$$

Будем искать функцию  $\varphi(t, x)$  в форме

$$\varphi(t, x) = (1/2)K_2(t)x^2 + K_1(t)x + K_0(t),$$

где  $K_2(t)$ ,  $K_1(t)$ ,  $K_0(t)$  — неизвестные функции.

Отсюда следует структура оптимального управления

$$u^*(t) = K_2(t)m(t) + K_1(t),$$

где  $m(t)$  — математическое ожидание,  $m(t) = \int_R x p^*(t, x) dx$ .

Подставляя найденную структуру оптимального управления в первое уравнение системы, умножая на  $x$  и интегрируя по множеству  $R$ , имеем  $\dot{m} = K_2(t)m(t) + K_1(t)$ ,  $m(0) = 1$ .

Подставляя функцию  $\varphi(t, x)$  во второе уравнение системы и конечное условие, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  нулю, получаем

$$\dot{K}_2 = 0, \quad \dot{K}_1 = -K_2(t)^2 m(t) - K_1(t)K_2(t), \quad \dot{K}_0 = [K_2(t)^2 m(t)^2 - K_1(t)^2]/2,$$

$$K_2(1) = -1, \quad K_1(1) = 0, \quad K_0(1) = 0.$$

Решая двухточечную краевую задачу, образованную уравнениями для функций  $m(t)$ ,  $K_2(t)$ ,  $K_1(t)$ ,  $K_0(t)$  и соответствующими условиями, имеем:  $K_2(t) = -1$ ,  $K_1(t) = (1-t)/2$ ,  $K_0(t) = -t^2/8 + 3t/8 - 1/4$ ,  $m(t) = 1 - t/2$ .

В результате получаем оптимальное в среднем программное управление  $u^*(t) = -1/2$ . Сравнивая полученный результат с решением примера 4.2, можно сделать вывод о том, что здесь оптимальное управление пучком совпадает с оптимальным программным управлением для начального условия  $x(0) = 1$  с точки зрения минимума функционала  $I(x_0, d)$ . Иначе говоря, в данном примере проблема управления пучком эквивалентна задаче управления одной траекторией, исходящей из центра множества  $\Omega$ .

Таким образом, системе (6.12) для данного примера удовлетворяют функции:

$$\varphi(t, x) = -x^2/2 + (1-t)x/2 - t^2/8 + 3t/8 - 1/4, \quad u^*(t) = -1/2,$$

$$p^*(t, x) = \begin{cases} 1/2 & \forall x \in [-t/2, 2-t/2], \\ 0 & \forall x \notin [-t/2, 2-t/2]. \end{cases}$$

Минимальное значение функционала определяется по формуле

$$\min_{d_0 \in \mathcal{D}_0} J = - \int_0^2 \varphi(0, x) (1/2) dx = - (1/2) \int_0^2 [-x^2/2 + x/2 - 1/4] dx = 5/12. \blacksquare$$

Пример 6.2. Дана модель объекта управления

$$\dot{x}(t) = z(t) + u(t),$$

$$\dot{z}(t) = 0,$$

где  $x \in \mathbb{R}$ ;  $u \in \mathbb{R}$ ;  $t \in [0, 1]$ ,  $\mathbf{B} = \mathbb{R}^2$ .

Начальные условия заданы множеством  $\Omega$ :

$$(x(0), z(0))^T \in \Omega = \left\{ \begin{array}{l} -(1/2) \leq x \leq (1/2), \\ 0 \leq z \leq 1 \end{array} \right.$$

На траекториях системы задан функционал

$$I(x_0, d) = (1/2) \int_0^1 u^2(t) dt + (1/2) x^2(1).$$

Критерий качества управления пучком имеет вид

$$J = (1/2) \int_0^1 \int_{\mathbf{B}} u^2(t) p(t, x, z) dx dz dt + (1/2) \int_{\mathbf{B}} x^2 p(1, x, z) dx dz,$$

где функция  $p(t, x, z)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p(t, x, z)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [(z + u(t)) p(t, x, z)]$$

с начальным условием

$$p(0, x, z) = p_0(x, z) = \begin{cases} 1 & \forall (x, z) \in \Omega, \\ 0 & \forall (x, z) \notin \Omega. \end{cases}$$

□ Рассмотрим два случая информированности о векторе состояния.

1.  $m = 0$ . Требуется найти оптимальное в среднем программное управление  $u^*(t)$ , минимизирующее функционал  $J$ .

Система (6.12) для данного примера имеет вид

$$\frac{\partial p^*(t, x, z)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [(z + u^*(t)) p^*(t, x, z)],$$

$$p^*(0, x, z) = p_0(x, z) = \begin{cases} 1 & \forall (x, z) \in \Omega, \\ 0 & \forall (x, z) \notin \Omega, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi(t, x, z)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x, z)}{\partial x} [z + u^*(t)] - (1/2) u^*(t)^2 = 0,$$

$$\varphi(1, x, z) = - (1/2) x^2,$$

$$u^*(t) = \arg \max_u \int_B \left[ \frac{\partial \varphi(t, x, z)}{\partial x} u - (1/2) u^2 \right] p^*(t, x, z) dx dz.$$

Отсюда получим структуру оптимального управления:

$$u^*(t) = \int_B \frac{\partial \varphi(t, x, z)}{\partial x} p^*(t, x, z) dx dz.$$

Будем искать функцию  $\varphi(t, x, z)$  в виде

$$\varphi(t, x, z) = (1/2) K_2(t) x^2 + K_1(t) x + K_0(t) + N(t) x z + \Psi_1(t) z + \Psi_2(t) z^2,$$

где  $K_2(t)$ ,  $K_1(t)$ ,  $K_0(t)$ ,  $N(t)$ ,  $\Psi_1(t)$ ,  $\Psi_2(t)$  — неизвестные функции.

Подставляя  $\varphi(t, x, z)$  в структуру оптимального управления, имеем  $u^*(t) = K_2(t) \hat{x}(t) + K_1(t) + N(t) \hat{z}(t)$ .

Тогда из системы, приравнявая нулю члены при одинаковых степенях  $x$ ,  $z$  и используя уравнения для математических ожиданий векторов  $x$  и  $z$ , получаем

$$\hat{dx}/dt = \hat{z} + K_2 \hat{x} + K_1 + N \hat{z}, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 = 0,$$

$$\hat{dz}/dt = 0, \quad \hat{z}(0) = \hat{z} = 1/2,$$

$$\dot{K}_2 = 0, \quad K_2(1) = -1; \quad \dot{K}_1 + K_1 K_2 + K_2^2 \hat{x} + K_2 N \hat{z} = 0, \quad K_1(1) = 0,$$

$$2\dot{K}_0 + K_1^2 - K_2^2 \hat{x}^2 - N^2 \hat{z}^2 - 2K_2 N \hat{z} \hat{x} = 0, \quad K_0(1) = 0,$$

$$\dot{N} + K_2 = 0, \quad N(1) = 0; \quad \dot{\Psi}_2 + N = 0, \quad \Psi_2(1) = 0,$$

$$\dot{\Psi}_1 + N K_2 \hat{x} + N^2 \hat{z} + K_1 N + K_1 = 0, \quad \Psi_1(1) = 0.$$

Решение системы имеет вид

$$K_2(t) = -1; \quad K_1(t) = (1-t)/4; \quad K_0(t) = -t^2/32 + 3t/32 - 1/16; \quad N(t) = t-1; \\ \hat{z}(t) = 1/2; \quad \hat{x}(t) = t/4; \quad \Psi_1(t) = t^2/4 - t/2 + 1/4; \quad \Psi_2(t) = -t^2/2 + t - (1/2).$$

Поэтому оптимальное в среднем программное управление  $u^*(t) = -1/4$ .

Минимальное значение функционала определяется по формуле

$$\min_{u \in \mathcal{D}_0} J = - \int_{\Omega} \varphi(0, x, z) p_0(x, z) dx dz = - \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 \left[ -(1/2)x^2 + (1/4)x - (1/16) - xz + z/4 - (1/2)z^2 \right] dx dz = 10/48 = 0,2083.$$

2.  $m=2$ . Требуется найти оптимальное управление  $u^*(t, x, z)$  с полной обратной связью.

Составим уравнение Беллмана (6.13):

$$\max_u \left\{ \frac{\partial \varphi(t, x, z)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x, z)}{\partial x} (z + u) - (1/2) u^2 \right\} = 0,$$

$$\varphi(1, x, z) = -(1/2)x^2.$$

Отсюда получим структуру оптимального управления:

$$u^*(t, x, z) = \frac{\partial \varphi(t, x, z)}{\partial x}.$$

Будем искать функцию  $\varphi(t, x, z)$  в виде

$$\varphi(t, x, z) = (1/2)K_2(t)x^2 + N(t)xz + \Psi_2(t)z^2,$$

где  $K_2(t)$ ,  $N(t)$ ,  $\Psi_2(t)$  — неизвестные функции.

Подставляя  $\varphi(t, x, z)$  в структуру оптимального управления, имеем  $u^*(t, x, z) = K_2(t)x + N(t)z$ .

Тогда из уравнения, приравнявая нулю члены при одинаковых степенях  $x$ ,  $z$ , получаем

$$\dot{K}_2 + K_2^2 = 0, \quad \dot{N} + K_2 + NK_2 = 0, \quad \dot{\Psi}_2 + N + (1/2)N^2 = 0,$$

$$K_2(1) = -1, \quad N(1) = 0, \quad \Psi_2(1) = 0.$$

Решение системы имеет вид

$$K_2(t) = 1/(t-2); \quad N(t) = (1-t)/(t-2); \quad \Psi_2(t) = t/2 + 1/[2(t-2)].$$

Поэтому искомое оптимальное в среднем управление с полной обратной связью

$$u^*(t, x, z) = x/(t-2) + (1-t)z/(t-2).$$

Минимальное значение функционала определяется по формуле

$$\min_{d_2 \in \mathcal{D}_2} J = - \int_{\Omega} \varphi(0, x, z) \rho_0(x, z) dx dz = - \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 \left[ - (1/4)x^2 - (1/2)xz - (1/4)z^2 \right] dx dz = 8/48 = 0,1666.$$

Случай  $m=1$  рассмотрен в [24]. ■

#### 6.1.4. Пример определения оптимального в среднем управления ЛА

**Постановка задачи.** Рассматривается проблема торможения ЛА в атмосфере Марса. Поведение модели ЛА в скоростной системе координат описывается системой (см. разд.1.1. и 4.6.5.):

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= - (1/2)\rho_0 e^{-\beta h} v^2 \sigma_x - g_x \sin\theta = f_1(t, x, u), \\ \frac{d\theta}{dt} &= (1/2)\rho_0 e^{-\beta h} v \sigma_x k_{\varphi}(t) - \left( \frac{g_x}{v} - \frac{v}{R+h} \right) \cos\theta = f_2(t, x, u), \\ \frac{dh}{dt} &= v \sin\theta = f_3(t, x, u), \end{aligned} \quad (6.14)$$

где  $x$  — вектор состояния,  $x = (v, \theta, h)^T$ ;  $t$  — время;  $\rho_0, \beta$  — параметры модели плотности атмосферы;  $R, g_x$  — параметры планеты;  $u$  — управление,  $u = k_{\varphi}$ ,  $k_{\varphi} = k_0 \cos\gamma_c$ ;  $k_0, \sigma_x$  — параметры ЛА;  $\gamma_c$  — угол крена.

Движение происходит на заданном интервале времени  $[0, t_1]$ . Начальные условия движения заданы множеством  $\Omega$ :

$$(v(0), \theta(0), h(0))^T \in \Omega = [v_{01}, v_{02}] \times [\theta_{01}, \theta_{02}] \times [h_{01}, h_{02}]. \quad (6.15)$$

Множество  $\Omega$  является параллелепипедом, стороны которого определяются разбросом начальных значений координат вектора состояния, и характеризует неопределенность задания начальных условий.

На управление наложено ограничение:  $|k_{\varphi}| \leq k_0$ . Значение  $k_{\varphi} = -k_0$  соответствует случаю, когда подъемная сила, действующая на ЛА, направлена вниз. При  $k_{\varphi} = k_0$  подъемная сила направлена вверх. Предполагается, что изменение  $k_{\varphi}$  может происходить мгновенно, а текущая информация о векторе состояния отсутствует.

Множество допустимых управлений образуется кусочно-непрерывными функциями  $k_{\varphi}(\cdot)$ , удовлетворяющими ограничению.



В конце *этапа торможения* ЛА для уменьшения энергозатрат на следующем этапе спуска — участке мягкой посадки с применением двигателей — необходимо стремиться к достижению наименьшей скорости  $v(t_1)$ , при этом на угол  $\theta(t_1)$  ограничений не накладывается. В конечный момент времени требуется выполнение условия  $h(t_1) = h_{зад}$ .

Чтобы исключить возможность "жесткой" посадки, накладывается ограничение на минимальную высоту полета над поверхностью планеты:  $h(t) \geq h_{доп}$ . Выбору  $h_{доп}$  предшествует анализ рельефа местности в предполагаемом месте посадки ЛА.

Предполагается, что *внешние возмущения* на ЛА отсутствуют. На траекториях системы (6.14) определим функционал

$$I(v_0, \theta_0, h_0, k_{\phi}(\cdot)) = \lambda_1 \int_0^{t_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_3 h(t))} dt + \lambda_4 v(t_1) + \lambda_5 [h(t_1) - h_{зад}]^2, \quad (6.16)$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_5$  — весовые коэффициенты.

Здесь  $f^0(t, x, u) = \lambda_1 e^{\lambda_2 - \lambda_3 h}$ ,  $F(x) = \lambda_4 v + \lambda_5 [h - h_{зад}]^2$ . Интегральный член характеризует степень невыполнения ограничения  $h(t) \geq h_{доп}$ , являясь функцией штрафа, которая значительно возрастает по величине при приближении к границе допустимой области. Терминальный член отражает требование минимизации конечной скорости и достижения заданной высоты. При этом весовые коэффициенты  $\lambda_1, \lambda_4, \lambda_5$  назначаются исходя из приоритета слагаемых в (6.16), а  $\lambda_2, \lambda_3$  зависят от величины  $h_{доп}$ . Задание функционала в виде (6.16) позволяет рассматривать решаемую задачу как задачу со свободным правым концом траектории.

Функционал (6.16) характеризует *качество управления отдельной траекторией* при фиксированном начальном условии. Однако вследствие неопределенности задания начальных условий движения любому допустимому управлению  $k_{\phi}(\cdot)$  соответствует пучок траекторий, исходящих из множества  $\Omega$ .

*Критерий качества управления пучком траекторий*

$$J = \frac{\int_{\Omega} I(v_0, \theta_0, h_0, k_{\phi}(\cdot)) dv_0 d\theta_0 dh_0}{\text{mes } \Omega}, \quad (6.17)$$

где  $\text{mes } \Omega = [v_{02} - v_{01}] [\theta_{02} - \theta_{01}] [h_{02} - h_{01}]$  — объем параллелепипеда  $\Omega$ .

Критерий (6.17) описывает среднее значение функционала (6.16) на множестве  $\Omega$ .

Требуется найти управление  $k_{\phi}^*(\cdot)$ , минимизирующее функционал (6.17) (оптимальное в среднем программное управление).

Соотношения для определения оптимального управления. Для решения задачи воспользуемся системой (6.12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^*(t, x)}{\partial t} = & - \frac{\partial p^*(t, x)}{\partial v} \left[ - (1/2) \rho_0 e^{-\beta h} v^2 \sigma_x - g_x \sin \theta \right] - \\ & - \frac{\partial p^*(t, x)}{\partial \theta} \left[ (1/2) \rho_0 e^{-\beta h} v \sigma_x k_{s, \phi}^*(t) - \left( \frac{g_x}{v} - \frac{v}{R+h} \right) \cos \theta \right] - \\ & - \frac{\partial p^*(t, x)}{\partial h} v \sin \theta - p^*(t, x) \left[ - \rho_0 e^{-\beta h} v \sigma_x + \left( \frac{g_x}{v} - \frac{v}{R+h} \right) \sin \theta \right], \end{aligned}$$

$$p^*(0, x) = p_0(x) = \begin{cases} 1/\text{mes } \Omega & \forall x \in \Omega, \\ 0 & \forall x \notin \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = & - \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial v} \left[ - (1/2) \rho_0 e^{-\beta h} v^2 \sigma_x - g_x \sin \theta \right] - \\ & - \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial \theta} \left[ (1/2) \rho_0 e^{-\beta h} v \sigma_x k_{s, \phi}^*(t) - \left( \frac{g_x}{v} - \frac{v}{R+h} \right) \cos \theta \right] - \\ & - \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial h} v \sin \theta + \lambda_1 e^{\lambda_2 - \lambda_3 h}, \end{aligned}$$

$$\varphi(t_1, x) = -\lambda_4 v - \lambda_5 [h - h_{\text{зад}}]^2,$$

$$k_{s, \phi}^*(t) = \arg \max_{|k_{s, \phi}| \leq k_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial \theta} \left[ (1/2) \rho_0 e^{-\beta h} v \sigma_x k_{s, \phi} \right] p^*(t, x) dx.$$

Учитывая линейность последнего выражения по ограниченному управлению и условие  $(1/2) \rho_0 \sigma_x > 0$ , имеем

$$k_{s, \phi}^*(t) = k_0 \text{sign} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial \theta} e^{-\beta h} v p^*(t, x) dx.$$

Оптимальное в среднем программное управление имеет релейную структуру.

Численные результаты расчетов. Решение задачи получено с помощью метода последовательных приближений для следующих значений параметров:

$$\rho_0 = 0,013 \text{ кг/м}^3; \quad \beta = 9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}; \quad R = 3,4 \cdot 10^6 \text{ м}; \quad g_m = 3,72 \text{ м/с}^2;$$

$$k_6 = 0,3; \quad \sigma_x = 1/150 \text{ м}^2/\text{кг}; \quad h_{\text{зад}} = h_{\text{доп}} = 6 \cdot 10^3 \text{ м}; \quad v_{01} = 5,9 \cdot 10^3 \text{ м/с};$$

$$v_{02} = 6,1 \cdot 10^3 \text{ м/с}; \quad \theta_{01} = -0,354 \text{ рад}; \quad \theta_{02} = -0,274 \text{ рад}; \quad h_{01} = 95 \cdot 10^3 \text{ м};$$

$$h_{02} = 105 \cdot 10^3 \text{ м}; \quad t_1 = 175 \text{ с}; \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 6; \quad \lambda_3 = 0,0011; \quad \lambda_4 = 1; \quad \lambda_5 = 10^{-4}.$$

Оптимальное в среднем программное управление  $k_{\text{зп}}^*(t)$  обеспечивается при однократном изменении с  $-k_6$  на  $+k_6$  в момент  $t_{\text{п}} = 43,13 \text{ с}$ . Сечения полученного пучка траекторий изображены на рис.6.2.

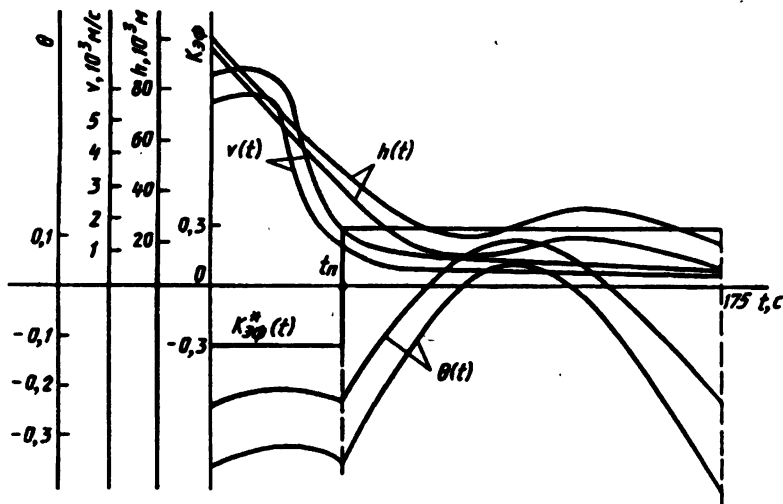


Рис.6.2.

Сравнение полученного результата с результатом, приведенным в разд.4.6.5, показывает, что в решаемой задаче управления ЛА оптимальное программное управление отдельной траекторией по структуре аналогично оптимальному в среднем программному управлению пучком траекторий.

## 6.2. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ

### 6.2.1. Постановка задачи

При синтезе систем управления, работающих в условиях неопределенности параметров объекта управления и неполной информации о внешних воздействиях, важным для практики является получение наилучшего гарантированного результата, при котором цель управления достигалась бы даже в самой неблагоприятной ситуации. Такой подход к формированию законов управления, развитый в работах по дифференциальным играм, применяется и в задачах управления пучками траекторий нелинейных детерминированных систем [16, 22]. При этом наилучшим считается управление, доставляющее наименьшее значение критерию качества для худшей (в смысле этого критерия) траектории пучка.

Особенностью рассматриваемой ниже задачи гарантирующего управления пучком траекторий является требование зависимости синтезируемого управления от части координат вектора состояния системы управления.

Пусть поведение модели системы управления описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx^1(t)}{dt} &= f^1(t, x^1(t), x^2(t), u(t, x^1(t))), \\ \frac{dx^2(t)}{dt} &= f^2(t, x^1(t), x^2(t), u(t, x^1(t))), \end{aligned} \quad t \in [t_0, t_1], \quad (6.18)$$

где  $x^1 = (x_1, \dots, x_m)^T$ ,  $x^2 = (x_{m+1}, \dots, x_n)^T$  — измеряемая и неизмеряемая части вектора состояния  $x = (x^1, x^2)^T$  системы;  $u$  — вектор управления,  $u \in U \subset R^k$ ; моменты времени  $t_0$  и  $t_1$  фиксированы. Множество  $\mathcal{U}$  допустимых управлений образуют функции  $u(t, x)$ , для которых программные управления  $u(t) = u(t, x^1(t))$  на траекториях системы (6.18) являются кусочно-непрерывными функциями.

В начальный момент времени  $t_0$  измеряемая часть  $x^1(t_0)$  вектора состояния считается известной, а неизмеряемая часть  $x^2(t_0)$  принадлежит множеству значений заданной функции  $x^2 = y_0(x^1, s)$ :

$$x^1(t_0) = x_0^1, \quad x^2(t_0) \in \bigcup_{s \in \sigma} y_0(x_0^1, s). \quad (6.19)$$

Функцию  $y_0(x^1, s)$ , определяющую многообразие начальных состояний, предполагаем непрерывной по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемой по  $x^1$  при любых значениях параметра  $s$ , принадлежащих компактному подмножеству  $\sigma$  конечномерного пространства.

Параметрическое задание (6.19) множества возможных начальных состояний позволяет описывать широкий класс подмножеств пространства состояний системы управления. Например, если для системы третьего порядка в начальный момент времени координата  $x_1$  вектора  $(x_1, x_2, x_3)^T$  состояния может быть измерена точно, а координаты  $x_2, x_3$  известны с абсолютными погрешностями  $\Delta_2, \Delta_3$ , то множество возможных начальных состояний (рис.6.3,а) можно задать в форме (6.19) следующим образом:

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20} + s_2, \quad x_3(t_0) = x_{30} + s_3,$$

где параметры  $s_2$  и  $s_3$  принадлежат прямоугольнику (рис.6.3,б)

$$\sigma = \{ (s_2, s_3) \in \mathbb{R}^2 : |s_2| \leq \Delta_2, |s_3| \leq \Delta_3 \}.$$

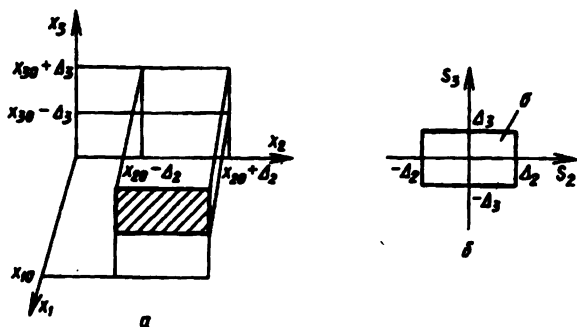


Рис.6.3.

Качество управления  $u(t, x^1)$  изолированной траекторией, исходящей из начального состояния  $x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}$ , оценивается функционалом Майера

$$J(x_0^1, x_0^2, u) = F(x^1(t_1), x^2(t_1)). \quad (6.20)$$

Каждому допустимому управлению  $u(t, x^1)$  соответствует пучок траекторий системы (6.18), исходящих из множества (6.19) возможных начальных состояний, и совокупность значений  $J(x_0, y_0(x_0, s), u)$  функционала (6.20) для  $z \in \sigma$ . Качество управления пучком траекторий будем оценивать наибольшим значением функционала (6.20):

$$J_r(x_0^1, u) = \max_{z \in \sigma} J(x_0^1, y(x_0^1, s), u). \quad (6.21)$$

Требуется найти допустимое управление  $u^*(t, x^1)$ , на котором достигается минимум функционала (6.21):

$$J_r(x_0^1, u^*) = \min_{u \in \mathcal{U}} J_r(x_0^1, u).$$

Такое управление принято называть *оптимальным гарантирующим*, поскольку для любой траектории пучка значение функционала  $J(x_0^1, y_0(x_0^1, s), u^*)$  не будет превосходить величины  $J_r(x_0^1, u^*)$ .

### 6.2.2. Достаточные условия оптимальности

Траектории системы (6.18) будем описывать вектор-функциями  $x^1(t, s)$  и  $y(t, x^1, s)$ , непрерывно зависящими от параметра  $s$  и удовлетворяющими уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t} x^1(t, s) = f^1(t, x^1(t, s), y(t, x^1, s), u(t, x^1(t, s))), \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^i}{\partial t} + \frac{\partial y^i}{\partial x^1} \cdot f^1(t, x^1, y(t, x^1, s), u(t, x^1)) = \\ = f^2(t, x^1, y(t, x^1, s), u(t, x^1)), \quad i = m+1, \dots, n, \end{aligned} \quad (6.23)$$

и начальным условиям

$$x^1(t_0, s) = x_0^1, \quad y(t_0, x^1, s) = y_0(x^1, s). \quad (6.24)$$

Здесь и далее  $\frac{\partial y^i}{\partial x^1} \cdot f^1$  — скалярное произведение:

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^1} \cdot f^1 = \sum_{k=1}^m \frac{\partial y^i(t, x^1, s)}{\partial x_k} f_k(t, x^1, y, u).$$

Множество допустимых процессов  $\mathcal{D}(x_0^1, y_0)$  образуют тройки функций  $d = (x^1(t, s), y(t, x^1, s), u(t, x^1))$ , связанных условиями (6.22)–(6.24), в которых функция  $u(t, x^1)$  является допустимым управлением из  $\mathcal{U}$ . На множестве  $\mathcal{D}(x_0^1, y_0)$  зададим функционал

$$I(d) = \max_{d \in \mathcal{D}} F(x^1(t_1, s), y(t_1, x^1(t_1, s), s)), \quad (6.25)$$

который совпадает на этом множестве с ранее введенным функционалом (6.21).

Рассмотрим множество  $\Phi$  непрерывных скалярных функций  $\varphi(t, x^1, x^2)$ , производные которых в силу системы (6.18)

$$R(t, x^1, x^2, u) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \cdot f^1(t, x^1, x^2, u) + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \cdot f^2(t, x^1, x^2, u)$$

непрерывны на всей области определения, за исключением конечно-

го числа сечений при фиксированных  $t \in [t_0, t_1]$ . Для непрерывных на  $\sigma$  функций  $x^1(s), x^2(s)$  определим конструкции

$$P(t, x^1(\cdot), x^2(\cdot), u(t, x^1)) = \min_{s \in \text{Arg} \min_{\sigma} \varphi(t, x^1(s), x^2(s))} R(t, x^1(s), x^2(s), u(t, x^1(s))), \quad (6.26)$$

$$Q(x^1(\cdot), x^2(\cdot)) = \max_{\sigma} F(x^1(s), x^2(s)) + \min_{\sigma} \varphi(t, x^1(s), x^2(s)),$$

где  $\text{Arg} \min_{\sigma} \varphi(t, x(s)) = \{s^* \in \sigma \mid \varphi(t, x(s^*)) = \min_{\sigma} \varphi(t, x(s))\}$  — множество точек глобального минимума функции  $s \rightarrow \varphi(t, x(s))$ .

Выделим из множества  $\Phi$  класс  $\Phi_D$  таких функций  $\varphi(t, x^1, x^2)$ , для которых функционалы (6.26) достигают экстремальных значений для непрерывных на  $\sigma$  функций  $x^1(s), x^2(s)$ :

$$\begin{aligned} \max_{u \in U} \max_{x^2(\cdot)} P(t, x^1(\cdot), x^2(\cdot), u) &= p(t), \\ \min_{x^2(\cdot)} Q(x^1(\cdot), x^2(\cdot)) &= q, \end{aligned} \quad (6.27)$$

причем функция  $p(t)$  является кусочно-непрерывной на  $[t_0, t_1]$ .

**Теорема 6.1.** Пусть допустимому управлению  $u^*(t, x^1)$  соответствует решение  $y^*(t, x^1, s)$  уравнения (6.23) с начальным условием (6.24). Для того чтобы управление  $u^*(t, x)$  было оптимальным гарантирующим, достаточно существования такой функции  $\varphi \in \Phi_D$ , что:

1)  $P(t, x^1, u^*(t, x^1, \cdot), u^*(t, x^1)) = p(t)$  для всех  $x^1 \in \mathbb{R}^m$  почти всюду на  $[t_0, t_1]$ ;

2)  $Q(x^1, u^*(t, x^1, \cdot)) = q$  для всех  $x^1 \in \mathbb{R}^m$ .

**Доказательство.** На множестве  $V$  троек функций  $v = (x^1(t, s), y(t, x^1, s), u(t, x^1))$ , кусочно-непрерывных по  $t$  и не связанных уравнениями (6.22), (6.23), зададим вспомогательный функционал

$$\begin{aligned} L(v) &= Q(x^1(t_1, \cdot), x^2(t_2, \cdot)) - \min_{\sigma} \varphi(t_0, x_0^1, y_0(x_0^1, s)) - \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} P(t, x^1(t, \cdot), x^2(t, \cdot), u(t, x^1)) dt, \end{aligned}$$

где  $x^2(t, s) = y(t, x^1(t, s), s)$ .

Поскольку для допустимых процессов почти всюду на  $[t_0, t_1]$  справедливо равенство

$$P(t, x^1(t, \cdot), x^2(t, \cdot), u(t, x^1)) = \frac{d}{dt} \min_{\sigma} \varphi(t, x^1(t, s), x^2(t, s)),$$

то  $L(d) = I(d)$  для всех  $d \in \mathcal{D}(x_0^1, y_0)$ . Из условий (6.27) следует, что

$$L(v) \geq q - \int_0^1 p(t) dt - \min_{t \in \sigma} \varphi(t_0, x_0^1, y_0(x_0^1, s))$$

для всех процессов  $v$  из множества  $V$ , включающего множество допустимых процессов  $\mathcal{D}(x_0^1, y_0)$ . Условия теоремы обеспечивают равенство

$$L(d^*) = q - \int_0^1 p(t) dt - \min_{t \in \sigma} \varphi(t_0, x_0^1, y_0(x_0^1, s))$$

для процесса  $d^* = (x^{1*}(t, s), y^*(t, x^{1*}(t, s), s), u^*(t, x^1))$ . Таким образом, управление  $u^*(t, x^1)$  порождает оптимальный процесс  $d^*$ , так как для любого допустимого процесса  $d \in \mathcal{D}(x_0^1, y_0)$  выполняется неравенство  $L(d) = I(d) \geq I(d^*) = L(d^*)$ .

Без ограничения общности функцию  $p(t)$  и величину  $q$  в условиях (6.27) можно взять равными нулю, при этом наименьшее значение функционала (6.25) вычисляется по формуле

$$\min_{d \in \mathcal{D}(x_0^1, y_0)} I(d) = - \max_{t \in \sigma} \varphi(t_0, x_0^1, y_0(x_0^1, s)).$$

### 6.2.3. Соотношения для определения оптимального гарантирующего управления

Пусть  $u^*(t, x^1)$  — оптимальное гарантирующее управление, которому соответствует решение  $y(t, x^1, s)$  задачи Коши (6.23), (6.24). Функцию  $\varphi$  выберем так, чтобы максимум функционала  $P(t, x^1, y(t, x^1, \cdot), u)$  по переменной  $u$  достигался на управлении  $u^*(t, x^1)$ :

$$u^*(t, x^1) = \arg \max_{u \in U} \min_{s \in \text{Arg} \max_{t \in \sigma} \varphi(t, x^1, y(t, x^1, s))} R(t, x^1, y(t, x^1, s), u), \quad (6.28)$$

а сами функционалы  $P$  и  $Q$  оказались бы равными нулю при  $u = u^*(t, x^1)$ . Для этого функция  $\varphi(t, x^1, x^2)$  должна удовлетворять условиям:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \cdot f^1(t, x^1, x^2, u^*(t, x^1)) + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \cdot f^2(t, x^1, x^2, u^*(t, x^1)) = 0, \quad (6.29)$$

$$\varphi(t_1, x^1, x^2) = -F(x^1, x^2). \quad (6.30)$$



Действительно, из (6.30) и (6.26) следует, что  $Q \equiv 0$ , а из (6.29) — что  $R(t, x^1, x^2, u^*(t, x^1)) \equiv 0$  и  $P(t, x^1, x^2(\cdot), u^*(t, x^1)) \equiv 0$ .

Дальнейшее упрощение условий (6.28)–(6.30) связано с представлением функции  $\varphi(t, x^1, x^2)$  в виде

$$\varphi(t, x^1, x^2) = \gamma(t, x^1, s) + \psi(t, x^1, s) \cdot (x^2 - y(t, x^1, s)), \quad (6.31)$$

где  $\gamma(t, x^1, s) = \varphi(t, x^1, y(t, x^1, s))$ ,  $\psi(t, x^1, s) = \frac{\partial}{\partial x^2} \varphi(t, x^1, y(t, x^1, s))$ .

Подставим (6.31) в (6.29) и (6.30) и приравняем нулю полученные выражения и их производные по  $x^2$  при  $x^2 = y(t, x^1, s)$ . В результате получим уравнения для неизвестных функций  $\gamma(t, x^1, s)$  и  $\psi(t, x^1, s)$ :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x^1} \cdot f^1(t, x^1, y(t, x^1, s), u^*(t, x^1)) = 0, \quad (6.32)$$

$$\gamma(t_1, x^1, s) = -F(x^1, y(t_1, x^1, s)),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \cdot f^1(t, x^1, y(t, x^1, s), u^*(t, x^1)) + \frac{\partial}{\partial x^2} H(t, x^1, y(t, x^1, s), u^*(t, x^1)) = 0, \quad (6.33)$$

$$\psi(t_1, x^1, s) = -\frac{\partial}{\partial x^2} F(x^1, y(t_1, x^1, s)),$$

где

$$\begin{aligned} H(t, x^1, x^2, u) &= \frac{\partial \gamma}{\partial x^1} \cdot f^1(t, x^1, x^2, u) + \psi \cdot f^2(t, x^1, x^2, u) - \\ &- \psi \cdot \frac{\partial}{\partial x^1} y(t, x^1, s) \cdot f^1(t, x^1, x^2, u). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Соотношение (6.28), определяющее оптимальное управление для функции (6.31), будет иметь вид

$$u^*(t, x^1) = \arg \max_{u \in U} \min_{\substack{s \in \Lambda \\ \frac{\partial}{\partial s} \gamma(t, x^1, s) = 0}} \{ H[u] - H[u^*] \}, \quad (6.35)$$

где  $H[u] = H(t, x^1, y(t, x^1, s), u)$ ,  $H[u^*] = H(t, x^1, y(t, x^1, s), u^*(t, x^1))$ .

Таким образом, решение задачи синтеза оптимального гарантирующего управления сведено к краевой задаче (6.23), (6.24), (6.32), (6.33) с параметром  $s \in \mathcal{B}$  для системы  $2(n-m)+1$  дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка относительно функций  $y(t, x^1, s)$ ,  $\gamma(t, x^1, s)$ ,  $\psi(t, x^1, s)$ . Искомое управление  $u^*(t, x^1)$  при решении краевой задачи определяется из условия (6.35).

**Замечание.** Если качество управления изолированной траекторией оценивается функционалом Больца

$$J(x_0^1, x_0^2, u) = \int_{t_0}^1 f^0(t, x^1(t), x^2(t), u(t)) dt + F(x^1(t_1), x^2(t_1)), \quad (6.36)$$

то для описания изменения интегральной части функционала следует ввести дополнительную функцию  $y^0(t, x^1, s)$ . При этом соотношения для нахождения оптимального гарантирующего управления

$u^*(t, x^1)$  будут следующие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^0}{\partial t} + \frac{\partial y^0}{\partial x^1} \cdot f^1 = f^0, \quad y^0(t_0, x^1, s) = 0, \\ \frac{\partial y^i}{\partial t} + \frac{\partial y^i}{\partial x^1} \cdot f^1 = f_i, \quad y^i(t_0, x^1, s) = y_0^i(x^1, s), \quad i = m+1, \dots, n, \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x^1} \cdot f^1 = f^0, \quad \gamma(t_1, x^1, s) = -F(x^1, y(t_1, x^1, s)),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^i}{\partial t} + \frac{\partial \psi^i}{\partial x^1} \cdot f^1 + \frac{\partial}{\partial y^i} H[u^*] = 0, \quad \psi^i(t_1, x^1, s) = -\frac{\partial}{\partial y^i} F(x^1, y(t_1, x^1, s)), \\ i = m+1, \dots, n; \end{aligned}$$

$$u^*(t, x^1) = \arg \max_{u \in U} \min_{\substack{s \in \text{Arg} \\ s \in \sigma}} \{ H[u] - H[u^*] \}, \quad (6.38)$$

где  $f = f(t, x^1, y(t, x^1, s), u^*(t, x^1))$ ,

$$\begin{aligned} H(t, x^1, y, u) = \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x^1} - \psi \cdot \frac{\partial y(t, x^1, s)}{\partial x^1} \right) \cdot f^1(t, x^1, y, u) + \\ + \psi \cdot f^2(t, x^1, y, u) - f^0(t, x^1, y, u). \end{aligned} \quad (6.39)$$

#### 6.2.4. Предельные случаи информированности о векторе состояния

**Программное управление.** Для нахождения оптимального гарантирующего программного управления  $u^*(t)$  в системе (6.37) — (6.39) следует исключить зависимость всех функций от измеряемой части  $x^1$  вектора состояния ( $m=0$ ). Учитывая, что разность  $\gamma(t, s) - y^0(t, s)$  не изменяется в силу уравнений (6.37), множество  $\text{Arg} \min_{s \in \sigma} [\gamma(t, s) - y^0(t, s)]$  можно заменить на  $\text{Arg} \min_{s \in \sigma} \gamma(t_0, s)$  и исключить функцию  $y^0(t, s)$  из рассмотрения. После этих преобразований получим краевую задачу для системы  $2n+1$  обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром  $s \in \sigma$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y^i(t,s)}{\partial t} &= f_i(t,y(t,s),u^*(t)), & y^i(t_0,s) &= y_0^i(s), \\
\frac{\partial \gamma(t,s)}{\partial t} &= f^0(t,y(t,s),u^*(t)), & \gamma(t_1,s) &= -F(y(t_1,s)), \\
\frac{\partial \psi^i(t,s)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial y^i} H(t,y(t,s),u^*(t)), & \psi^i(t_1,s) &= -\frac{\partial}{\partial y^i} F(y(t_1,s)).
\end{aligned} \tag{6.40}$$

$$i = 1, \dots, n,$$

$$u^*(t) = \arg \max_{u \in U} \min_{\substack{s \in \text{Arg} \\ s \in \sigma}} \{ H(t,y(t,s),u) - H(t,y(t,s),u^*(t)) \}, \tag{6.41}$$

где  $H(t,y,u) = \psi \cdot f(t,y,u) - f^0(t,y,u)$ . (6.42)

Соотношения (6.40), (6.41) являются необходимыми условиями оптимальности гарантирующего управления, что характеризует близость достаточных условий, приведенных в теореме 6.1, к необходимым. Действительно, если  $u^*(t)$  — оптимальное гарантирующее управление, а  $v(t)$  — допустимое управление, отличающееся от  $u^*(t)$  на множестве  $\mathcal{M} \subset [t_0, t_1]$  малой меры  $\mu = \text{mes } \mathcal{M}$ , то вариацию  $\delta J_\Gamma$  функционала (6.21) можно выразить через вариацию  $\delta J$  функционала (6.36) следующим образом:

$$\delta J_\Gamma = \max_{\substack{s \in \text{Arg} \\ s \in \sigma}} \delta J(y_0(s), u^*) = \max_{\substack{s \in \text{Arg} \\ s \in \sigma}} J(y_0(s), u^*)$$

Это выражение с помощью функций  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $H$ , удовлетворяющих условиям (6.40), (6.41), приводится к виду

$$\delta J_\Gamma = - \min_{\substack{s \in \text{Arg} \\ s \in \sigma}} \int_{\mathcal{M}} \{ H(t,y(t,s),v(t)) - H(t,y(t,s),u^*(t)) \} dt.$$

Поскольку множество  $\mathcal{M}$  можно расположить всюду плотно на  $[t_0, t_1]$ , то из неравенства  $\delta J_\Gamma \geq 0$ , которое должно выполняться для любого допустимого управления  $v(t)$ , отличающегося на  $\mathcal{M}$  от оптимального управления  $u^*(t)$ , следует, что почти всюду на  $[t_0, t_1]$  справедливо неравенство

$$\min_{\substack{s \in \text{Arg} \\ s \in \sigma}} \{ H(t,y(t,s),v) - H(t,y(t,s),u^*(t)) \} \leq 0$$

для всех  $v \in U$ . Последнее условие эквивалентно (6.41).

При решении практических задач, чтобы упростить процедуру нахождения оптимального управления из условия (6.41), допустимо предположить, что множество  $\text{Arg} \min_{s \in \sigma} \gamma(t_0,s)$  точек глобального минимума функции  $\gamma(t_0,s)$  состоит из конечного числа элементов. В этом случае справедливо следующее утверждение.

**Теорема 6.2.** Пусть при оптимальном гарантирующем управлении  $u^*(t)$  в пучке имеется конечное число траекторий  $y(t, s_1), \dots, y(t, s_k)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} y^i(t, s_j) = f_i(t, y(t, s_j), u^*(t)), \quad y^i(t_0, s_j) = y_0^i(s_j), \quad (6.43)$$

$$i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, k,$$

на которых функционал (6.36) достигает наибольшего значения:

$$J(y_0(s_1), u^*) = \dots = J(y_0(s_k), u^*) = \max_{u \in U} J(y_0(s), u^*).$$

Тогда существует такие числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ :  $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ , что почти всюду на  $[t_0, t_1]$  выполняется равенство

$$u^*(t) = \arg \max_{u \in U} \sum_{j=1}^k \lambda_j H(t, \psi(t, s_j), y(t, s_j), u), \quad (6.44)$$

где

$$H(t, \psi, y, u) = \sum_{i=1}^n \psi^i f_i(t, y, u) - f^0(t, y, u), \quad (6.45)$$

а функции  $\psi(t, s_1), \dots, \psi(t, s_k)$  являются решением системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi^i(t, s_j) = - \frac{\partial}{\partial y^i} H(t, \psi(t, s_j), y(t, s_j), u^*(t)), \quad (6.46)$$

$$\psi^i(t_1, s_j) = - \frac{\partial}{\partial y^i} F(y(t_1, s_j)), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k.$$

**Доказательство.** Действительно, рассматриваемая задача в данном случае может быть сформулирована как задача оптимального управления одной траекторией  $y(t, s_1)$  при  $k-1$  ограничениях:

$$J(y_0(s_0), u) \rightarrow \min,$$

$$J(y_0(s_j), u) = J(y_0(s_1), u), \quad j = 2, \dots, k.$$

Для оптимальности управления в этой задаче необходимо существование таких чисел  $\lambda_2, \dots, \lambda_k$ , чтобы неравенство

$$\delta J_1 + \lambda_2(\delta J_2 - \delta J_1) + \dots + \lambda_k(\delta J_k - \delta J_1) \geq 0 \quad (6.47)$$

выполнялось при любых допустимых изменениях управления  $u^*(t)$  на

множестве  $\mathcal{M}$  малой меры. Вариация функционала (6.36) имеет вид [43]

$$\delta J_j = \delta J(y_0(s), u^*) = \\ = \int_{\mathcal{M}} \{H(t, \psi(t, s), y(t, s), u^*(t)) - H(t, \psi(t, s), y(t, s), v(t))\} dt, \\ j = 1, \dots, k,$$

где  $v(t)$  — допустимое управление, совпадающее на  $[t_0, t_1] \setminus \mathcal{M}$  с оптимальным управлением  $u^*(t)$ , а функции  $H, \psi$  задаются соотношениями (6.45), (6.46).

Подставляя вариации  $\delta J$  в (6.47) и обозначая  $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_k$ , получаем неравенство

$$\int_{\mathcal{M}} \sum_{j=1}^k \lambda_j \{H(t, \psi(t, s), y(t, s), u^*(t)) - H(t, \psi(t, s), y(t, s), v(t))\} dt \geq 0,$$

из которого следует условие (6.44), поскольку множество  $\mathcal{M}$  можно взять всюду плотным на  $[t_0, t_1]$ . Заметим, что если множество  $\text{Arg} \min_{s \in \mathcal{S}} \gamma(t_0, s) = \{s_1, \dots, s_k\}$ , то условия теоремы 6.2 получаются из соотношений (6.40) — (6.42), так как в них можно исключить все значения параметра  $s$  из множества  $\mathcal{S}$  кроме  $s_1, \dots, s_k$ .

**Управление с полной обратной связью.** Если для выработки управляющего воздействия доступна полная информация о состоянии ( $m = n$ ), то возможно построение оптимального управления для каждой траектории пучка. Функции  $y$  и  $\psi$  в системе (6.37) можно опустить и не учитывать зависимость функции  $\gamma$  от параметра  $s$ . Условия (6.40), (6.41) тогда примут вид

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \cdot f(t, x, u^*(t, x)) = f^0(t, x, u^*(t, x)), \quad \gamma(t_1, x) = -F(x),$$

$$u^*(t, x) = \arg \max_{u \in U} \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial x} \cdot f(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right],$$

что совпадает с уравнением Беллмана [15].

**Управление изолированной траекторией по неполному вектору состояния.** Если начальное состояние (6.19) системы известно точно:  $x(t_0) = x_0$ ,  $x'(t_0) = y_0(x_0)$ , то в условиях (6.37) для нахождения оптимального управления  $u^*(t, x)$  следует исключить зависимость всех функций от параметра  $s$ . При этом в условии (6.38) исчезают операции минимизации по параметру  $s$  и отпадает необходимость учета дополнительной функции  $y$ . После таких изменений соотношения (6.37), (6.38) будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^i}{\partial t} + \frac{\partial y^i}{\partial x^1} \cdot f^1 = f_i, \quad y^i(t_0, x^1) = y_0^i(x^1), \quad i = m+1, \dots, n, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x^1} \cdot f^1 = f^0, \quad \gamma(t_1, x^1) = -F(x^1, y(t_1, x^1)), \end{aligned} \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^i}{\partial t} + \frac{\partial \psi^i}{\partial x^1} \cdot f^1 = -\frac{\partial}{\partial y^i} H^*, \quad \psi^i(t_1, x^1) = -\frac{\partial}{\partial y^i} F(x^1, y(t_1, x^1)), \quad i = m+1, \dots, n, \\ u^*(t, x^1) = \arg \max_{u \in U} H(t, x^1, y(t, x^1), u), \end{aligned} \quad (6.49)$$

где  $f = f(t, x^1, y(t, x^1), u^*(t, x^1))$ ,  $H^* = H(t, x^1, y(t, x^1), u^*(t, x^1))$ ,

$$\begin{aligned} H(t, x^1, y, u) = \frac{\partial \gamma}{\partial x^1} \cdot f^1(t, x^1, y, u) + \psi \cdot f^2(t, x^1, y, u) - f^0(t, x^1, y, u) - \\ - \psi \cdot \frac{\partial \gamma(t, x^1)}{\partial x^1} \cdot f^1(t, x^1, y, u). \end{aligned} \quad (6.50)$$

Отличие условий (6.48) – (6.50) от полученных ранее в разд.4 (см.(4.17)) объясняется различием в представлениях (6.31) и (4.14) функции  $\varphi$  при выводе уравнений.

**Пример 6.2.** Найти оптимальное гарантирующее программное управление  $u^*(t)$  в задаче

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) \in [-1; 3], \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad x(t) \in \mathbb{R},$$

$$J(x_0, u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt + \frac{1}{2} x^2(1), \quad J_1(u) = \max_{x \in [-1; 3]} J(x_0, u).$$

□ Запишем для данной задачи (при  $n=1$ ) систему соотношений (6.40), (6.41):

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(t, s)}{\partial t} = u^*(t), \quad y(0, s) = s, \\ \frac{\partial \gamma(t, s)}{\partial t} = \frac{1}{2} u^{*2}(t), \quad \gamma(1, s) = -\frac{1}{2} y^2(1, s), \\ \frac{\partial \psi(t, s)}{\partial t} = 0, \quad \psi(1, s) = -y(1, s), \quad s \in [-1; 3], \end{aligned}$$

$$u^*(t) = \arg \max_{u \in \mathbb{R}} \min_{s \in \text{Arg min}_{s \in [-1; 3]} \gamma(0, s)} \left\{ \psi(t, s) (u - u^*(t)) - \frac{1}{2} (u^2 - u^{*2}(t)) \right\}. \quad (6.51)$$

Будем искать функции  $y$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$  в виде

$$\begin{aligned}
 y(t,s) &= a(t)s + b(t), \\
 \gamma(t,s) &= \frac{1}{2}A(t)s^2 + B(t)s + C(t), \\
 \psi(t,s) &= \alpha(t)s + \beta(t).
 \end{aligned}
 \tag{6.52}$$

Подставляя (6.52) в (6.51) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$ , получаем

$$\begin{aligned}
 \dot{a} &= 0, \quad \dot{b} = 0, \quad \dot{A} = 0, \quad \dot{B} = 0, \quad \dot{C} = \frac{1}{2}u^{*2}(t), \quad \dot{\alpha} = 0, \quad \dot{\beta} = 0, \\
 a(0) &= 1, \quad b(0) = 0, \quad A(1) = -\frac{1}{2}a^2(1), \quad B(1) = -a(1)b(1), \\
 C(1) &= -\frac{1}{2}b^2(1), \quad \alpha(1) = -a(1), \quad \beta(1) = -b(1).
 \end{aligned}$$

Эти уравнения позволяют найти коэффициенты  $a(t) \equiv 1$ ,  $A(t) \equiv -1$ ,  $B(t) \equiv -b(1)$ ,  $\alpha(t) \equiv -1$ ,  $\beta(t) \equiv -b(1)$  и уточнить выражения (6.52):

$$\begin{aligned}
 y(t,s) &= s + b(t), \quad \gamma(t,s) = -\frac{1}{2}s^2 - b(1)s + C(t), \\
 \psi(t,s) &= -b(1) - s,
 \end{aligned}
 \tag{6.53}$$

где неизвестные функции  $b(t)$  и  $C(t)$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
 \dot{b}(t) &= u^*(t), \quad b(0) = 0, \\
 \dot{C}(t) &= \frac{1}{2}u^{*2}(t), \quad C(1) = -\frac{1}{2}b^2(1).
 \end{aligned}
 \tag{6.54}$$

Рассмотрим теперь условие (6.51) для оптимального управления  $u^*(t)$ . Поскольку функция  $\gamma(t,s)$  из (6.53) является вогнутой по  $s$  и может достигать наименьшего значения только на концах промежутка  $[-1; 3]$ , то

$$\text{Arg min}_{s \in [-1; 3]} \gamma(0,s) = \begin{cases} \{-1\}, & b(1) < -1, \\ \{-1; 3\}, & b(1) = -1, \\ \{3\}, & b(1) > -1. \end{cases}$$

Если  $b(1) < -1$ , то в пучке имеется одна наихудшая траектория  $y(t,-1)$ , на которой достигается наибольшее значение функционала  $J$ . При этом из (6.51) находим

$$u^*(t) = \text{arg max}_{u \in \mathbb{R}} \left[ (1 - b(1))u - \frac{1}{2}u^2 \right] = 1 - b(1).$$

Подставляя это управление в уравнение (6.54), получаем  $\dot{b}(t) = -1 - b(t)$ . Следовательно,  $b(1) = 1/2$ , но это противоречит предположению  $b(1) < -1$ . К аналогичному противоречию приходим и в случае  $b(1) > -1$ . Поэтому для оптимального управления  $u^*(t)$  в пучке должны быть две наихудшие траектории  $y(t,-1)$  и  $y(t,3)$ , т.е.  $\text{Arg min}_{s \in [-1; 3]} \gamma'(0,s) = \{-1; 3\}$  и  $b(1) = -1$ . Тогда, как следует

из теоремы 6.2, найдутся такие числа  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ), что

$$u^*(t) = \arg \max_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \lambda_1 \left[ \psi(t, -1)u - \frac{1}{2}u^2 \right] + \lambda_2 \left[ \psi(t, 3)u - \frac{1}{2}u^2 \right] \right\} = \\ = \lambda_1 \psi(t, -1) + \lambda_2 \psi(t, 3).$$

Учитывая вид функции  $\psi(t, s)$  и (6.54), получаем

$$u^*(t) = \lambda_1 [1 - b(1)] + \lambda_2 [-3 - b(1)] = \lambda_1 - 3\lambda_2 - b(1). \quad (6.55)$$

При управлении (6.55) решаем краевую задачу (6.54) и находим вид функций  $b(t)$  и  $C(t)$ :

$$b(t) = (\lambda_1 - 3\lambda_2 - b(1))t,$$

$$C(t) = C(0) + \frac{1}{2}(\lambda_1 - 3\lambda_2 - b(1))^2 t.$$

Из условия  $b(1) = -1$  определяем величины  $\lambda_1 = \frac{1}{4}$  и  $\lambda_2 = \frac{3}{4}$ , а из равенства  $C(1) = -\frac{1}{2}b^2(1) = \text{постоянную } C(0) = -1$ .

Таким образом, решение системы (6.51) имеет вид

$$u^*(t) = -1, \quad y(t, s) = s - t, \quad \psi(t, s) = 1 - s, \quad \gamma(t, s) = -\frac{1}{2}s^2 + s + \frac{1}{2}t - 1,$$

а наименьшее значение функционала  $J_r(u^*) = 5/2$ . ■

### 6.2.5. Пример определения оптимального гарантирующего управления ЛА

**Постановка задачи.** Рассмотрим движение спускаемого аппарата в атмосфере Марса. Математическая модель движения объекта управления на участке аэродинамического торможения описывается уравнениями (см. пример 1.1):

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\frac{1}{2}\rho v^2 \sigma_x - g_m \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{2}\rho v \sigma_x k_{\text{эф}} - \left( \frac{g_m}{v} - \frac{v}{R+h} \right) \cos \theta, \\ \dot{h} &= v \sin \theta, \end{aligned} \quad (6.56)$$

где  $v$  — скорость полета;  $h$  — высота полета;  $\theta$  — угол наклона траектории к местному горизонту;  $\rho$  — плотность атмосферы, модель которой экспоненциальная:  $\rho = \rho_0 e^{-\beta h}$ ;  $g_m$  — ускорение свободного падения;  $R$  — радиус Марса;  $\sigma_x$  — баллистический параметр ЛА. Управлением в данной модели является эффективное аэродинамическое качество  $k_{\text{эф}}$ , величина которого ограничена:  $|k_{\text{эф}}| \leq k_g$ .

За начальные условия этапа торможения принимаются: скорость  $v(t_0)$  и угол  $\theta(t_0)$  входа в атмосферу, а также высота  $h(t_0)$  ус-



ловной границы атмосферы. В конце участка аэродинамического торможения для уменьшения энергозатрат на следующем этапе спуска — участке реактивной мягкой посадки — необходимо стремиться к достижению наименьшей скорости  $v(t_1)$ . Чтобы исключить возможность "жесткой" посадки, накладывается ограничение на минимальную высоту полета над поверхностью:  $h(t) \geq h_{\text{доп}}$ , где  $h_{\text{доп}}$  — заданная допустимая высота полета.

Качество управления изолированной траекторией спуска оценивается функционалом

$$J(v_0, \theta_0, h_0, k_{\text{эп}}(\cdot)) = \lambda_1 \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctg[\lambda_2 (h(t) - h_{\text{доп}})] \right\} dt + v(t_1). \quad (6.57)$$

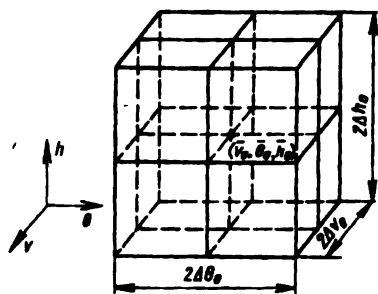


Рис.6.4.

Интегральный член функционала (6.57) отвечает за выполнение ограничения  $h(t) \geq h_{\text{доп}}$ , являясь фактически функцией штрафа с весовым коэффициентом  $\lambda_1$ . Величина коэффициента  $\lambda_2$  определяет точность контроля за выполнением этого ограничения.

Начальное состояние  $(v(t_0), \theta(t_0), h(t_0))$  точно не известно и задается с абсолютными погрешностями  $\Delta v_0, \Delta \theta_0, \Delta h_0$  (рис.6.4):

$$\begin{aligned} \bar{v}_0 - \Delta v_0 &\leq v(t_0) \leq \bar{v}_0 + \Delta v_0, \\ \bar{\theta}_0 - \Delta \theta_0 &\leq \theta(t_0) \leq \bar{\theta}_0 + \Delta \theta_0, \\ \bar{h}_0 - \Delta h_0 &\leq h(t_0) \leq \bar{h}_0 + \Delta h_0, \end{aligned} \quad (6.58)$$

где  $\bar{v}_0, \bar{\theta}_0, \bar{h}_0$  — номинальные условия входа в атмосферу.

Качество управления пучком траекторий, исходящих из множества (6.58), оценивается максимальным значением функционала (6.57):

$$J_r(k_{\text{эп}}(\cdot)) = \max J(v_0, \theta_0, h_0, k_{\text{эп}}(\cdot)). \quad (6.59)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_0 - \Delta v_0 &\leq v_0 \leq \bar{v}_0 + \Delta v_0, \\ \bar{\theta}_0 - \Delta \theta_0 &\leq \theta_0 \leq \bar{\theta}_0 + \Delta \theta_0, \\ \bar{h}_0 - \Delta h_0 &\leq h_0 \leq \bar{h}_0 + \Delta h_0. \end{aligned}$$

Требуется найти оптимальное гарантирующее управление  $k_{\text{эп}}^*(t)$  эффективным аэродинамическим качеством, которое доставляет минимум функционала (6.59).

Уравнения для синтеза оптимального гарантирующего управления. Воспользуемся условиями оптимальности, полученными в разд.6.2.4 для программного гарантирующего управления. Для этого обозначим начальное состояние объекта управления при входе в атмосферу через  $s = (v_0, \theta_0, h_0)$ , а множество (6.58) возможных начальных состояний через  $\sigma$ : \*

$$\sigma = \{s = (v_0, \theta_0, h_0)^T \in \mathbb{R}^3 : |v_0 - \bar{v}_0| \leq \Delta v_0, |\theta_0 - \bar{\theta}_0| \leq \Delta \theta_0, |h_0 - \bar{h}_0| \leq \Delta h_0\}.$$

Запишем для модели (6.56) уравнения (6.40) и соотношение (6.41):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(t, s)}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \rho v^2 \sigma_x - g_m \sin \theta, \quad v(t_0, s) = v_0, \\ \frac{\partial \theta(t, s)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \rho v \sigma_x k_{\varphi} - \left( \frac{g_m}{v} - \frac{v}{R+h} \right) \cos \theta, \quad \theta(t_0, s) = \theta_0, \end{aligned} \quad (6.60)$$

$$\frac{\partial h(t, s)}{\partial t} = v \sin \theta, \quad h(t_0, s) = h_0, \quad s = (v_0, \theta_0, h_0)^T \in \sigma;$$

$$\frac{\partial \gamma(t, s)}{\partial t} = \lambda_1 \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctg \left[ \lambda_2 (h - h_{\text{дон}}) \right] \right\},$$

$$\frac{\partial \psi^1(t, s)}{\partial t} = \psi^1 \rho v \sigma_x - \psi^2 \left[ \frac{1}{2} \rho v \sigma_x k_{\varphi} + \left( \frac{g_m}{v^2} + \frac{1}{R+h} \right) \cos \theta \right] - \psi^3 \sin \theta,$$

$$\frac{\partial \psi^2(t, s)}{\partial t} = \psi^1 g_m \cos \theta - \psi^2 \left( \frac{g_m}{v} - \frac{v}{R+h} \right) \sin \theta - \psi^3 v \cos \theta,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^3(t, s)}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \psi^1 \rho \beta v^2 \sigma_x + \psi^2 \left[ \frac{1}{2} \rho \beta v \sigma_x k_{\varphi} + \frac{v}{(R+h)^2} \cos \theta \right] - \\ &\quad - \lambda_1 \lambda_2 / [1 + \lambda_2^2 (h - h_{\text{дон}})^2], \end{aligned} \quad (6.61)$$

$$\gamma(t_1, s) = -v(t_1, s), \quad \psi^1(t_1, s) = -1, \quad \psi^2(t_1, s) = 0, \quad \psi^3(t_1, s) = 0;$$

$$k_{\varphi}^*(t) = \arg \max_{-k_6 \leq k \leq k_6} \min_{s \in \Lambda \text{ r g m i n }_{s \in \sigma} \gamma(t_0, s)} [\psi^2(t, s) \rho(t, s) v(t, s) (k - k_{\varphi}^*(t))], \quad (6.62)$$

где  $\rho(t, s) = \rho_0 \exp(-\beta h(t, s))$ .

Методика численного решения. Для синтеза оптимального гарантирующего управления  $k_{\varphi}^*(t)$  можно использовать метод последовательных приближений в следующей форме. Для заданного опор-

ного управления  $k_{s\phi}^{\text{он}}(t)$  интегрируются уравнения движения (6.60) от начального момента времени  $t_0$  до конечного момента  $t_1$ . Получив описание множества возможных конечных состояний траекторий пучка в виде функций  $v(t_1, s)$ ,  $\theta(t_1, s)$ ,  $h(t_1, s)$  параметра  $s$ , из конечных условий в (6.61) находим функции  $\gamma(t_1, s)$ ,  $\psi^1(t_1, s)$ ,  $\psi^2(t_1, s)$ ,  $\psi^3(t_1, s)$ . Интегрируем уравнения (6.61) от конечного момента времени  $t_1$  до начального момента  $t_0$ . В результате определяем значение функционала (6.59):

$$J_r(k_{s\phi}^{\text{он}}(\cdot)) = - \min_{s \in \sigma} \gamma(t_0, s)$$

и новое опорное управление  $k_{s\phi}^{\text{нов}}(\cdot)$ :

$$k_{s\phi}^{\text{нов}}(t) = \arg \max_{-k_G \leq k \leq k_G} \min_{s \in \text{Arg} \min_{s \in \sigma} \gamma(t_0, s)} [\psi^2(t, s) \rho(t, s) v(t, s) (k - k_{s\phi}^{\text{он}}(t))]. \quad (6.63)$$

При интегрировании уравнений (6.60), (6.61) следует ограничиться конечным числом различных значений параметра  $s$ , выделяя тем самым конечное число траекторий из пучка.

Проанализируем соотношение (6.63). Рассмотрим два случая.

1. Множество  $\text{Arg} \min_{s \in \sigma} \gamma(t_0, s)$  состоит из одной точки  $s_0$ , т.е. в пучке траекторий имеется одна наихудшая траектория

$$J_r(k_{s\phi}^{\text{он}}(\cdot)) = -\gamma(t_0, s_0) > -\gamma(t_0, s) \quad \forall s \in \sigma \setminus \{s_0\}.$$

В этом случае, учитывая положительность произведения  $\rho(t, s)v(t, s)$ , из (6.63) получаем

$$k_{s\phi}^{\text{нов}}(t) = k_G \text{sign} \psi^2(t, s), \quad (6.64)$$

т.е. новое опорное гарантирующее управление совпадает с оптимальным управлением для наихудшей траектории в пучке.

2. Множество  $\text{Arg} \min_{s \in \sigma} \gamma(t_0, s)$  состоит из двух точек  $s_b$  и  $s_n$ , т.е. наибольшее значение функционала (6.57) достигается на двух траекториях пучка:

$$J_r(k_{s\phi}^{\text{он}}(\cdot)) = -\gamma(t_0, s_b) = -\gamma(t_0, s_n).$$

В этом случае из соотношения (6.63) получаем два выражения:

а) если  $\psi^2(t, s_b)\psi^2(t, s_n) > 0$ , то

$$k_{s\phi}^{\text{нов}}(t) = k_G \text{sign} \psi^2(t, s_b) = k_G \text{sign} \psi^2(t, s_n);$$

б) если  $\psi^2(t, s_p)\psi^2(t, s_n) < 0$ , то

$$k_{s_\phi}^{\text{нов}}(t) = k_{s_\phi}^{\text{оп}}(t). \quad (6.65)$$

Условие (6.65) свидетельствует о том, что оптимальное управление совпадает с опорным управлением  $k_{s_\phi}^{\text{оп}}(t)$ .

При выполнении описанной процедуры численного решения задачи нужно учитывать следующие особенности. Наличие вычислительных погрешностей при интегрировании систем обыкновенных дифференциальных уравнений приводит к тому, что всегда реализуется первый случай (6.64), т.е. существует лишь одна худшая траектория в пучке. Причем в зависимости от опорного управления этой траекторией попеременно являются "нижняя" траектория, для которой характерна малая конечная скорость  $v(t_1, s_n)$  и большое значение штрафного слагаемого в функционале (6.57), и "верхняя" траектория, для которой конечная скорость велика  $v(t_1, s_p) > v(t_1, s_n)$ , а величина штрафа за просадку траектории ниже допустимой высоты мала. Оптимальное гарантирующее управление торможением в атмосфере Марса достигается, когда значения функционала (6.57) на "верхней" и "нижней" траекториях равны. При этом оказывается, что неравенства  $\psi^2(t, s_p) < 0$  и  $\psi^2(t, s_n) > 0$  выполняются на всем отрезке времени  $[t_0, t_1]$ , т.е. имеет место второй случай (6.65).

Расчеты проводились при следующих значениях параметров:

$$t_0 = 0 \text{ с}; \quad t_1 = 180 \text{ с}; \quad \sigma_x = 1/150 \text{ м}^2/\text{кг}; \quad k_g = 0,3;$$

$$\rho_0 = 0,013 \text{ кг/м}^3; \quad \beta = 9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1};$$

$$R = 3,4 \cdot 10^6 \text{ м}; \quad g_n = 3,72 \text{ м/с}^2;$$

$$\lambda_1 = 1,6; \quad \lambda_2 = 0,01; \quad h_{\text{доп}} = 6000 \text{ м};$$

$$\bar{v}_0 = 6000 \text{ м/с}; \quad \bar{\theta}_0 = -0,314 \text{ рад}; \quad \bar{h}_0 = 10^5 \text{ м};$$

$$\Delta v_0 = 20 \text{ м/с}; \quad \Delta \theta_0 = 0,01 \text{ рад}; \quad \Delta h_0 = 2000 \text{ м}.$$

Результаты расчетов иллюстрируются графиками (см. рис.6.5 — 6.9). На рис.6.5 изображен график изменения значений функционала (6.57) на "верхней" ( $J_p$ ) и "нижней" ( $J_n$ ) траекториях пучка.

Оптимальное гарантирующее управление  $k_{s_\phi}^*(t)$  приведено на рис.6.6. Граничные значения скорости ( $v_{\min}, v_{\max}$ ), угла наклона траектории ( $\theta_{\min}, \theta_{\max}$ ) и высоты ( $h_{\min}, h_{\max}$ ) для оптимального пучка траекторий изображены на рис.6.7 — 6.9.

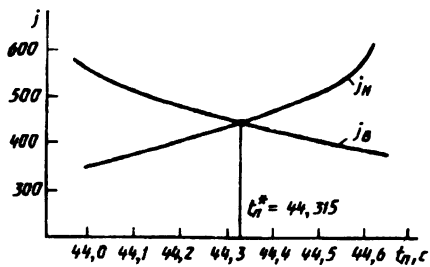


Рис.6.5.

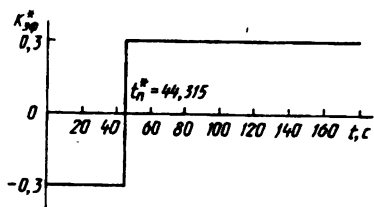


Рис.6.6.

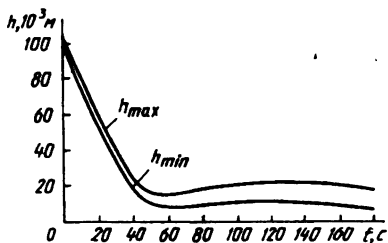


Рис.6.7.

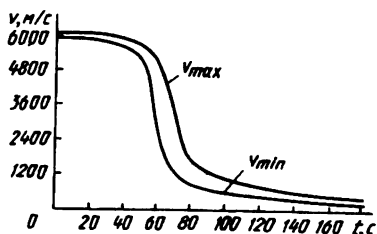


Рис.6.8.

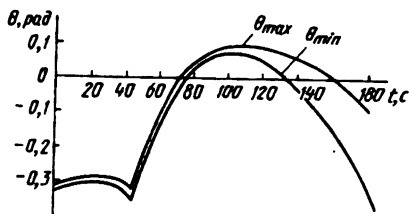


Рис.6.9.

## 7. СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НАБЛЮДЕНИЯ

### 7.1. АБСОЛЮТНО ОПТИМАЛЬНЫЕ ФИЛЬТРЫ

#### 7.1.1. Постановка задачи определения оценки состояния

Как показано в разд. 4–6, при синтезе оптимального управления как детерминированными, так и стохастическими *дифференциальными системами* наиболее эффективно управление, являющееся функцией мгновенного значения *полного вектора состояния* системы. Однако обычно на практике этот вектор может быть измерен лишь косвенно, так как датчики фиксируют значения лишь некоторых и, как правило, нелинейных функций от переменных состояния. Кроме того, измерения могут быть неточными из-за собственных погрешностей (шумов) датчиков даже в тех редких случаях, когда все переменные состояния наблюдаются непосредственно.

Рассмотрим синтез *нелинейных систем наблюдения*, осуществляющих восстановление полного вектора состояния по результатам косвенных и (или) неточных измерений его составляющих. Учтем, что результаты измерений являются случайными вследствие случайности как самого вектора состояния, так и погрешностей измерений. Процесс же восстановления состояния, называемый в этом случае *оцениванием*, должен проходить в реальном масштабе времени, без запаздывания по отношению к процессу наступления новых измерений. Системы наблюдения, решающие эту задачу, называются *фильтрами*.

Пусть *объект наблюдения* при  $t \geq t_0 = 0$  описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$d_0 X(t) = a(t, X(t)) dt + G(t, X(t)) d_0 W(t), \quad (7.1a)$$

или эквивалентным ему симметризованным уравнением Стратоновича

$$d_{1/2} X(t) = f(t, X(t)) dt + G(t, X(t)) d_{1/2} W(t). \quad (7.1b)$$

Здесь  $X(t)$  —  $n$ -мерный вектор состояния;  $W(t)$  —  $l$ -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от случайного начального состояния  $X(0)$ , определяемого плотностью распределения  $p_0(x)$ . Связь между функциями  $a(t, x)$ ,  $f(t, x)$  устанавливается формулой (3.4).

Пусть также косвенные измерения переменных состояния объекта осуществляются при наличии помехи в виде гауссовского белого шума, т.е. математическая модель измерителя имеет вид

$$Y(t) = h(t, X(t)) + D(t, X(t))V(t). \quad (7.2)$$

Здесь первое слагаемое описывает точные измерения, а второе характеризует погрешности измерителя;  $Y(t)$  —  $m$ -мерный вектор измерений;  $V(t)$  —  $k$ -мерный стандартный гауссовский белый шум измерителя, статистически не зависящий от белого шума  $W(t)$  объекта наблюдения. При этом погрешность измерений  $D(t, X(t))V(t)$  при условии  $X(t) = x$  характеризуется невырожденной положительно определенной  $m \times m$ -матрицей условной интенсивности:

$$R(t, x) = D(t, x)D^T(t, x) > 0 \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n. \quad (7.3)$$

Требуется в каждый момент времени  $t \geq 0$  по результатам всех доступных к этому моменту измерений  $Y_0^t = \{Y(\tau), 0 \leq \tau < t\}$  получить  $n$ -мерный вектор оценки  $X(t)$  состояния  $X(t)$  в виде функционала этих измерений:

$$\hat{X}(t) = \psi(t, Y_0^t). \quad (7.4)$$

Здесь  $\psi(t, Y_0^t)$  —  $n$ -мерный детерминированный функционал, определенный на множестве всех возможных реализаций  $Y_0^t$  случайных измерений  $Y_0^t$ .

Выражение (7.4) задает связь вход-выход синтезируемого нелинейного фильтра — динамической (инерционной) системы, преобразующей входной сигнал  $Y(t)$  в выходной сигнал  $\hat{X}(t)$  по закону  $\hat{X}(t) = \Psi_t[Y(\cdot)]$ , где оператор  $\Psi_t[\cdot]$  определяется функционалом  $\psi(t, \cdot)$ . При этом точность оценивания характеризуется функцией потерь  $\Pi(t, E(t))$ , зависящей от ошибки фильтрации  $E(t) = X(t) - \hat{X}(t)$ . Функция потерь должна удовлетворять ряду условий [34]. Наиболее часто используются квадратичная функция потерь

$$\Pi(t, \varepsilon) = \varepsilon^T C(t) \varepsilon, \quad (7.5)$$

где  $C(t) > 0$  — симметрическая положительно определенная матрица весовых коэффициентов, и простая функция потерь

$$\Pi(t, \varepsilon) = c(t) - d(t) \delta(\varepsilon), \quad (7.6)$$

где  $\delta(\varepsilon)$  — функция Дирака;  $c(t) > 0$ ,  $d(t) > 0$  — заданные положительные параметры.

Критерием оптимальности оценки (7.4) является минимум среднего риска в каждый момент времени:

$$I(t) = M[\Pi(t, X(t) - \hat{X}(t))] \rightarrow \min_{\Phi(t)} \quad \forall t \geq 0 \quad (7.7)$$

(критерий оптимальности всюду). Здесь  $M$  — оператор математического ожидания;  $\Phi(t)$  — класс допустимых функционалов оценивания  $\psi(t, Y_0^t)$ , обеспечивающих при каждом  $t \geq 0$  существование среднего риска  $I(t)$  для данной функции потерь  $\Pi(t, \varepsilon)$  при любых реализациях  $Y_0^t$  случайных измерений  $Y_0^t$ .

Например, при выборе квадратичной функции потерь (7.5) средний риск (7.7) можно записать в виде

$$I(t) = \text{tr}\{C(t) [m_\varepsilon(t) m_\varepsilon^T(t) + D_\varepsilon(t)]\}, \quad (7.8)$$

где  $\text{tr}$  — оператор следа матрицы;  $m_\varepsilon(t)$ ,  $D_\varepsilon(t)$  — вектор математического ожидания и матрица ковариаций ошибки оценивания  $E(t)$  соответственно. Поэтому в данном случае требуется существование конечных вторых моментов всех компонент как самого вектора состояния  $X(t)$ , так и вектора его оценки  $\hat{X}(t)$ . Если же выбрана простая функция потерь (7.6), то средний риск (7.7) принимает вид

$$I(t) = C(t) - d(t) \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\varepsilon) q(t, \varepsilon) d\varepsilon = C(t) - d(t) q(t, 0). \quad (7.9)$$

Здесь  $q(t, \varepsilon)$  — одноточечная плотность распределения ошибки оценивания, существование которой и требуется в этом случае.

### 7.1.2. Связь оценки с апостериорной плотностью

Если пренебречь требованием получения оценки  $\hat{X}(t)$  в темпе с поступлением измерений  $Y(t)$ , то на класс  $\Phi(t)$  функционалов  $\psi(t, y_0^i)$  не нужно накладывать дополнительных ограничений. Тогда, подставляя (7.4) в (7.7), получаем задачу на безусловный минимум среднего риска:

$$I(t) = I_1[\psi(t, \cdot)] = M\{\Pi[t, X(t) - \psi(t, Y_0^i)]\} \rightarrow \min_{\psi \in \Phi(t)} \quad (7.10)$$

Для нахождения из этого условия оптимального функционала  $\psi$  воспользуемся известным свойством условного математического ожидания [38]

$$M\{f(X, Y)\} = M\{M\{f(X, Y) | Y\}\}. \quad (7.11)$$

Оно позволяет представить средний риск  $I(t)$  как математическое ожидание условного риска

$$J(t, y_0^i, \psi(t, y_0^i)) = M\{\Pi[t, X(t) - \psi(t, Y_0^i)] | Y_0^i = y_0^i\}, \quad (7.12)$$

т.е. в виде

$$I_1[\psi(t, \cdot)] = M\{J[t, Y_0^i, \psi(t, Y_0^i)]\}. \quad (7.13)$$

Из (7.13) следует, что для решения задачи (7.10) достаточно найти минимум условного риска (7.12) для любых реализаций  $y_0^i$  случайных измерений  $Y_0^i$ :

$$J[t, y_0^i, \psi(t, y_0^i)] \rightarrow \min_{\psi \in \Phi(t)} \quad \forall y_0^i.$$

Последнее же позволяет свести сложную стохастическую задачу (7.10) определения оптимального функционала  $\psi(t, y_0^i)$  к гораздо



более простой детерминированной задаче отыскания частного минимума функции многих переменных:

$$\psi(t, y_0^i) = \arg \min_{\psi \in R^n} J(t, y_0^i, \psi). \quad (7.14)$$

Предположим, что при заданных уравнениях объекта наблюдения (7.1) и измерителя (7.2), а также плотности  $p_0(x)$  распределения начального состояния  $X(0)$  существует апостериорная плотность  $p(t, x | y_0^i)$  распределения текущего состояния  $X(t)$  при условии  $Y_0^i = y_0^i$ . Тогда функцию условного риска (7.12) можно представить через плотность  $p$ :

$$J(t, y_0^i, \psi) = \int_{R^n} \Pi(t, x - \psi) p(t, x | y_0^i) dx. \quad (7.15)$$

Подставляя в эту формулу выбранную функцию потерь  $\Pi$ , из (7.14) можно получить соответствующее представление оптимального функционала оценивания  $\psi$  через апостериорную плотность:

$$\psi(t, y_0^i) = \varphi[t, p(t, \cdot | y_0^i)].$$

В результате найдем конкретную связь оптимальной оценки (7.4) с апостериорной плотностью вероятности:

$$\hat{X}(t) = \varphi[t, p(t, \cdot | Y_0^i)]. \quad (7.16)$$

**Пример 7.1.** Найти оптимальную оценку для квадратичной функции потерь (7.5).

□ В этом случае (7.15) имеет вид

$$J(t, y_0^i, \psi) = \int_{R^n} (x - \psi)^T C(t) (x - \psi) p(t, x | y_0^i) dx.$$

Используя необходимые и достаточные условия экстремума функции многих переменных, получаем

$$\frac{\partial J}{\partial \psi} = 2C(t) \int_{R^n} (\psi - x) p(t, x | y_0^i) dx = 0,$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \psi^2} = 2C(t) \int_{R^n} p(t, x | y_0^i) dx = 2C(t) > 0.$$

Следовательно, минимум (7.14) условного, а значит, и среднего риска достигается на функционале апостериорного математического ожидания

$$\psi(t, y_0^i) = \int_{R^n} x p(t, x | y_0^i) dx = M[X(t) | y_0^i].$$

В результате среднеквадратически оптимальная оценка (СКО-оценка) (7.4) имеет вид

$$\hat{X}_{\text{СКО}}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x p(t, x | Y_0^1) dx = M[X(t) | Y_0^1]. \quad (7.17)$$

Усредняя обе части последнего выражения по множеству реализаций и учитывая свойство (7.11), находим

$$M[\hat{X}_{\text{СКО}}(t)] = M[M\{X(t) | Y_0^1\}] = M[X(t)], \quad (7.18)$$

т.е. оптимальная СКО-оценка является несмещенной. ■

**Пример 7.2.** Найти оптимальную оценку для простой функции потерь (7.6).

□ В этом случае (7.15) принимает вид

$$J(t, y_0^1, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} [c(t) - d(t)\delta(x - \psi)] p(t, x | y_0^1) dx,$$

откуда, используя свойства  $\delta$ -функции Дирака, получаем

$$J(t, y_0^1, \psi) = c(t) - d(t)p(t, \psi | y_0^1).$$

Минимизируя эту функцию вектора  $\psi \in \mathbb{R}^n$  с учетом того, что  $c(t) > 0$ ,  $d(t) > 0$ , находим

$$\psi(t, y_0^1) = \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} p(t, x | y_0^1).$$

Следовательно, простая функция потерь приводит к функционалу максимума апостериорной плотности. Соответствующая ему оценка (МАП-оценка) имеет вид

$$\hat{X}_{\text{МАП}}(t) = \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} p(t, x | Y_0^1). \quad (7.19)$$

Эта оценка, в отличие от СКО-оценки, свойством несмещенности не обладает. ■

### 7.1.3. Уравнения для апостериорной плотности

Фундаментальным результатом классической теории абсолютно оптимальной нелинейной фильтрации является уравнение для апостериорной плотности распределения состояния объекта (7.1) при наблюдении измерений (7.2). Процедура вывода этого уравнения сложна и громоздка, а потому здесь не приводится. Ограничимся рассмотрением различных форм записи этого уравнения, полученного в предположении независимости матрицы условной интенсивности погрешностей измерений (7.3) от значений измеряемого вектора состояния:

$$R(t, x) = R(t) \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n. \quad (7.20)$$

Нормализованная апостериорная плотность  $p(t, x | Y_0^1)$  ( $\int p dx = 1$ ) удовлетворяет нелинейному стохастическому интегродифференциаль-

ному уравнению Стратоновича–Кушнера в частных производных, которое обычно записывают либо в форме Ито [26, 28, 30, 41]:

$$\frac{d_0 p(t, x | Y_0^1)}{dt} = K_x [p] + [h(t, x) - \langle h, p \rangle]^T R^{-1}(t) [Y(t) - \langle h, p \rangle] p, \quad (7.21a)$$

либо в симметризованной форме [10, 41, 42]:

$$\frac{d_{1/2} p(t, x | Y_0^1)}{dt} = K_x [p] + [\alpha(t, x, Y(t)) - \langle \alpha, p \rangle] p, \quad (7.21b)$$

где

$$\alpha(t, x, y) = h^T(t, x) R^{-1}(t) [y - \frac{1}{2} h(t, x)]. \quad (7.22)$$

В этих уравнениях  $K_x$  — прямой производящий оператор диффузионного марковского процесса  $X(t)$  (см. разд. 2.1.3):

$$K_x [p] = -\frac{\partial^T}{\partial x} [a(t, x) p] + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^T}{\partial x} [G(t, x) G^T(t, x) p] \right\},$$

а угловыми скобками обозначено скалярное произведение в  $R^n$  вектор-функции  $\xi(t, x, y)$  и плотности  $p$ , имеющее смысл апостериорного математического ожидания функции  $\xi(t, X(t), y)$ :

$$\langle \xi, p \rangle = \int_{R^n} \xi(t, x, y) p(t, x | Y_0^1) dx = M[\xi(t, X(t), y) | Y_0^1].$$

Начальным условием для уравнения Стратоновича–Кушнера служит известная плотность  $p_0(x)$  распределения начального состояния  $X(t_0)$  объекта наблюдения (7.1):

$$p(t, x | Y_0^1) |_{t=t_0} = p_0(x). \quad (7.23)$$

Отметим, что иногда функцию  $\alpha$  из уравнения (7.21b) записывают, вместо (7.22), в следующем виде [10, 42]:

$$\alpha(t, x, y) = -\frac{1}{2} [y - h(t, x)] R^{-1}(t) [y - h(t, x)].$$

Такая замена не изменяет уравнения (7.21b), ибо как  $\alpha$ , так и  $\langle \alpha, p \rangle$  содержат одинаковые слагаемые  $-y^T R^{-1}(t) y / 2$ , которые уничтожаются при вычислении разности  $\alpha - \langle \alpha, p \rangle$ .

Уравнение Стратоновича–Кушнера является нелинейным, что затрудняет его использование. Поэтому также получило распространение линейное стохастическое дифференциальное уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи для ненормализованной апостериорной плотности  $\rho(t, x | Y_0^1)$  ( $\int \rho dx \neq 1$ ). Последняя позволяет найти нормализованную плотность  $p$  по формуле

$$p(t, x | Y_0^1) = \rho(t, x | Y_0^1) / \int_{R^n} \rho(t, x | Y_0^1) dx. \quad (7.24)$$

В форме Ито это уравнение имеет вид [41]

$$\frac{d_0 \rho(t, x | Y_0^1)}{dt} = K_x [\rho] + h^T(t, x) R^{-1}(t) Y(t) \rho, \quad (7.25a)$$

а в симметризованной форме оно представляется как [41, 42]

$$\frac{d_{1,2} \rho(t, x | Y_0^1)}{dt} = K_x[\rho] + h^T(t, x) R^{-1}(t) [Y(t) - \frac{1}{2} h(t, x)] \rho. \quad (7.256)$$

В качестве начального условия здесь также можно принять плотность распределения начального состояния

$$\rho(t, x | Y_0^1) |_{t=0} = p_0(x).$$

Таким образом структуру абсолютно оптимального нелинейного фильтра можно представить в виде двух последовательно соединенных блоков (рис. 7.1). Первый из них — инерционное звено, осуществляющее решение уравнений (7.21) или (7.25) для апостериорной плотности в темпе с поступлением на его вход текущих значений  $Y(t)$ .

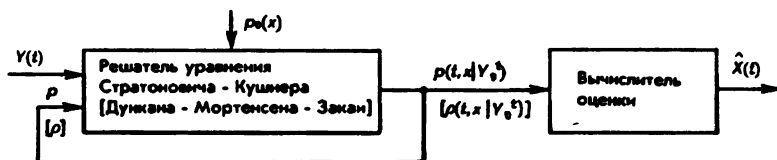


Рис. 7.1.

Второй блок, являясь безынерционным, реализует достаточно простую операцию (7.16) вычисления оптимальной оценки  $\hat{X}(t)$  по известному мгновенному значению апостериорной плотности  $\rho$ . Примерами этой операции являются выражения (7.17), (7.19). Если же найдена ненормализованная плотность  $\rho$ , то здесь используется еще и формула (7.24).

#### 7.1.4. Фильтр нормальной аппроксимации

Найти точное решение стохастических дифференциальных уравнений в частных производных (7.21), (7.25) в реальном масштабе времени не удастся. Однако с их помощью можно получить эквивалентные им бесконечные системы обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений первого порядка для любой последовательности числовых характеристик плотности  $\rho$  — апостериорных моментов, кумулянтов или квазимоментов [26, 28, 31], подобно тому, как это сделано в разд. 3.2.1 при решении уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова. В результате найдем уравнение состояния абсолютно оптимального фильтра, например, в форме Ито:

$$\frac{d_0 S(t)}{dt} = \varphi(t, S(t)) + \Psi(t, S(t)) Y(t). \quad (7.26)$$

При этом вектор состояния фильтра  $S(t)$  представляет собой всю совокупность элементов одной из указанных последовательностей числовых характеристик — достаточных координат, т.е. имеет бесконечную размерность. Поэтому в общем случае *точный* абсолютно оптимальный нелинейный фильтр является *бесконечномерным* и его практическая реализация невозможна.

Можно реализовать лишь приближенные нелинейные фильтры, “урезая” совокупности апостериорных кумулянтов или квазимоментов (но не моментов) до некоторого их порядка  $L$ . Такие *субоптимальные фильтры* являются уже *конечномерными*, а их размерность (количество уравнений) определяется числом  $C_{n+L}^n - 1$  (см. табл. 3.2.).

При этом оценка состояния объекта  $\hat{X}(t)$  согласно (7.16) оказывается функцией мгновенного значения вектора состояния  $S'(t)$  такого фильтра:

$$\hat{X}(t) \approx \mu(t, S'(t)), \quad (7.27)$$

где  $S'(t)$  — усеченный вектор  $S(t)$  состояния оптимального фильтра.

Структурная схема субоптимального фильтра приведена на рис. 7.2.

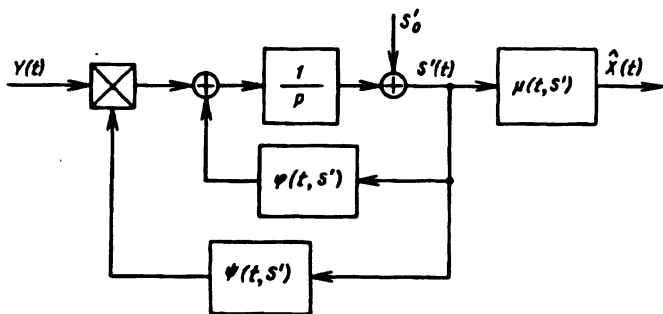


Рис. 7.2.

Наибольшее распространение получил простейший из этих фильтров с номером приближения  $L=2$  размерности  $n(n+3)/2$ , основанный на аппроксимации апостериорного распределения нормальным законом

$$p(t, x | Y_0^t) \approx N(x - Z(t), P(t)). \quad (7.28)$$

Параметры  $Z(t)$ ,  $P(t)$  этого приближения выбираются равными вектору математического ожидания и матрице ковариаций апостериорной плотности:

$$Z(t) = M[X(t) | Y_0^1] = \int_{R^n} xp(t, x | Y_0^1) dx, \quad (7.29)$$

$$P(t) = \text{cov}[X(t), X(t) | Y_0^1] = M\{[X(t) - Z(t)][X(t) - Z(t)]^T | Y_0^1\}.$$

Аппроксимация (7.28) приводит к тому, что разные субоптимальные оценки состояния (7.17), (7.19), соответствующие различным функциям потерь, становятся одинаковыми и равными параметру  $Z(t)$ :

$$\hat{X}_{\text{СКО}}(t) \approx \hat{X}_{\text{МАП}}(t) \approx Z(t). \quad (7.30)$$

Особенность процедуры получения уравнений состояния субоптимального фильтра по сравнению с изложенным в разд. 3.2.1 выводом уравнений для априорных квазимоментов состоит в том, что уравнение для апостериорной плотности является стохастическим. Поэтому при нахождении несимметризованной формы таких уравнений необходимо использовать формулу  $\theta$ -дифференцирования (2.77).

Записанные в форме Ито, уравнения фильтра нормальной аппроксимации имеют вид [26, 28, 30]:

$$\begin{aligned} \frac{d_0 Z(t)}{dt} &\approx \hat{a}(t, Z, P) + PH^T(t, Z, P)R^{-1}(t)[Y(t) - \hat{h}(t, Z, P)], \\ \frac{d_0 P(t)}{dt} &\approx A(t, Z, P)P + PA^T(t, Z, P) + F(t, Z, P) - \\ &- PH^T(t, Z, P)R^{-1}(t)H(t, Z, P)P + \Theta(t, Z, P) * R^{-1}(t)[Y(t) - \hat{h}(t, Z, P)]. \end{aligned} \quad (7.31)$$

В уравнениях (7.31) вектор-функции  $\hat{a}$ ,  $\hat{h}$  и матрицы-функции  $A$ ,  $H$ ,  $F$  определяются как коэффициенты статистической линеаризации (см. разд. 2.3.2) соответствующих нелинейностей объекта наблюдения (7.1):

$$\begin{aligned} \hat{a}(t, Z, P) &= M_N[a(t, X) | Z, P] = \int_{R^n} a(t, x) N(x - Z, P) dx, \\ A(t, Z, P) &= M_N\left[\frac{\partial a}{\partial x}(t, X) | Z, P\right] = \frac{\partial \hat{a}}{\partial z}(t, Z, P), \end{aligned} \quad (7.32)$$

$$F(t, Z, P) = M_N[G(t, X)G^T(t, X) | Z, P],$$

а также измерителя (7.2):

$$\begin{aligned} \hat{h}(t, Z, P) &= M_N[h(t, X) | Z, P], \\ H(t, Z, P) &= M_N\left[\frac{\partial h}{\partial x}(t, X) | Z, P\right] = \frac{\partial \hat{h}}{\partial z}(t, Z, P). \end{aligned} \quad (7.33)$$

Трехмерная же матрица-функция  $\Theta$  порядка  $n \times n \times m$  задается аналогичным выражением для ее элементов ( $i, j = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, m}$ ):

$$\Theta_{ijk}(t, Z, P) = \sum_{r, s=1}^n P_{ir} P_{js} M_N\left[\frac{\partial^2 h_k}{\partial x_r \partial x_s}(t, X) | Z, P\right],$$

которое с помощью (2.44) можно переписать в виде

$$\Theta_{ijk}(t, Z, P) = \sum_{r, s=1}^n P_{ir} P_{js} \frac{\partial \hat{h}_k(t, Z, P)}{\partial P_{rs}} + \sum_{r=1}^n P_{ir} P_{jr} \frac{\partial \hat{h}_k(t, Z, P)}{\partial P_{rr}}. \quad (7.34)$$

Наконец, символом \* в (7.31) обозначена операция умножения этой матрицы на  $n$ -мерный вектор:

$$\Theta^* u = \left\| \sum_{k=1}^n \Theta_{ijk} u_k \right\|_{i,j=1,\dots,n} :$$

в результате чего получается плоская  $n \times n$ -матрица.

Начальными условиями для уравнений (7.31) служат, в соответствии с (7.23), (7.29), математическое ожидание и ковариация начального состояния объекта наблюдения:

$$Z(0) = m_0 = M[X(0)] = \int_{R^n} x p_0(x) dx, \quad (7.35)$$

$$P(0) = D_0 = \text{cov}[X(0), X(0)].$$

Отметим, что уравнения фильтра (7.31) всегда можно преобразовать из формы Ито в эквивалентную симметризованную форму с помощью формул, приведенных в разд. 2.2.3.

**Пример 7.3** Получить уравнения фильтра нормальной аппроксимации для приближенного оценивания состояния одномерного объекта

$$d_0 X(t) = -X^3(t) dt + X(t) d_0 W(t) \quad (7.36)$$

по результатам следующих скалярных измерений:

$$Y(t) = X^2(t) + \nu V(t). \quad (7.37)$$

□ В данном случае в уравнениях (7.1), (7.2)  $a(t, X) = -X^3$ ,  $G(t, X) = X$ ,  $h(t, X) = X^2$ ,  $D(t, X) = \nu$ . Поэтому из (7.3) получаем  $R(t) = \nu^2$ , а из (7.32)–(7.34), используя результаты примера 2.8, легко находим

$$\begin{aligned} \hat{a}(Z, P) &= -(Z^3 + 3ZP), & A(Z, P) &= -3(Z^2 + P), & F(Z, P) &= Z^2 + P, \\ \hat{h}(Z, P) &= Z^2 + P, & H(Z, P) &= 2Z, & \Theta(Z, P) &= 2P^2. \end{aligned}$$

В результате уравнения фильтра (7.31) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d_0 Z(t)}{dt} &\approx -Z(Z^2 + 3P) + 2\nu^{-2} ZP(Y - Z^2 - P), \\ \frac{d_0 P(t)}{dt} &\approx (1 - P)(Z^2 + P) + 2\nu^{-2} P^2(Y - 3Z^2 - P). \end{aligned} \quad (7.38)$$

Симметризованная форма их записи получена в примере 7.6. ■

### 7.1.5. Обобщенный фильтр Калмана–Бьюси

Недостатком фильтра нормальной аппроксимации является сложность, а иногда и невозможность определения его структурных функций (7.32)–(7.34). Поэтому, если нелинейности объекта (7.1) и измерителя (7.2) дифференцируемы по переменным состояния, то часто используют различные упрощенные модификации этого фильтра, основанные на аппроксимации функций  $a(t, X)$ ,  $G(t, X)$ ,  $h(t, X)$  по  $X$  при любых  $t \geq 0$  в окрестности текущей оценки  $Z(t)$  отрезками ряда Тейлора [28, 30, 34]. Если при такой аппроксимации учитываются члены ряда Тейлора по  $L$ -й порядок малости относительно ошибки оценивания  $E(t)$ , то такой *тейлоровский фильтр* называется *фильтром  $L$ -го порядка*. Здесь этот термин характеризует номер старших используемых производных нелинейностей по переменным состояния, а не число уравнений фильтра, которое для всех этих модификаций остается равным  $n(n+3)/2$ .

Наибольшее распространение получил *фильтр первого порядка*, основанный на линеаризации функций  $a(t, X)$ ,  $h(t, X)$ :

$$a(t, X) \approx a(t, Z) + a_x(t, Z)(X - Z), \quad h(t, X) \approx h(t, Z) + h_x(t, Z)(X - Z),$$

и на замене функции  $G(t, X)$  нулевым членом ряда Тейлора:  $G(t, X) \approx G(t, Z)$ . Подставляя последние три выражения в (7.32)–(7.34), легко находим

$$\begin{aligned} \hat{a}(t, Z, P) &\approx a(t, Z), & A(t, Z, P) &\approx a_x(t, Z), & F(t, Z, P) &\approx G(t, Z)G^T(t, Z), \\ \hat{h}(t, Z, P) &\approx h(t, Z), & H(t, Z, P) &\approx h_x(t, Z), & \Theta(t, Z, P) &\approx 0. \end{aligned}$$

В результате получаемые из (7.31) уравнения такого фильтра, чаще называемого *обобщенным фильтром Калмана–Бьюси* (а также *расширенным* или *квазилинейным*), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d_0 Z(t)}{dt} &\approx a(t, Z) + Ph_x^T(t, Z)R^{-1}(t)[Y(t) - h(t, Z)], \\ \frac{d_0 P(t)}{dt} &\approx a_x t, Z)P + Pa_x^T(t, Z) + G(t, Z)G^T(t, Z) - \\ &\quad - Ph_x^T(t, Z)R^{-1}(t)h_x(t, Z)P. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Структурные функции этого фильтра состоят из соответствующих функций объекта и измерителя, а также из матриц их первых частных производных. Кроме того, результаты измерений  $Y(t)$  не входят теперь во второе уравнение фильтра.

**Пример 7.4.** Найти уравнения обобщенного фильтра Калмана–Бьюси для условий примера 7.3.

□ Из (7.39) легко получаем

$$\frac{d_0 Z(t)}{dt} \approx -Z^3 + 2\nu^{-2}ZP(Y - Z^2), \quad \frac{d_0 P(t)}{dt} \approx (1 - 6P)Z^2 - 4\nu^{-2}Z^3P^2.$$



В этих уравнениях в отличие от уравнений фильтра нормальной аппроксимации (7.38) отсутствует ряд слагаемых. ■

Некоторое распространение получили также *фильтры второго порядка* [28, 30, 34]. Их уравнения более громоздки, чем (7.39), из-за появления дополнительных слагаемых с трехмерными матрицами  $A_{xx}$ ,  $h_{xx}$ , а возможно, и с четырехмерной матрицей  $G_{xx}$ . При этом результаты измерений  $Y(t)$  снова входят в уравнение для апостериорной ковариации  $P(t)$ .

Общим недостатком тейлоровских фильтров как первого, так и второго порядка является замена глобальных свойств нелинейностей объекта и измерителя, учитываемых в уравнениях фильтра нормальной аппроксимации коэффициентами их статистической линеаризации, на локальные свойства этих нелинейностей, которые определяются их производными. На практике эта замена приводит к *ухудшению точности* тейлоровских фильтров по сравнению с фильтром нормальной аппроксимации.

#### 7.1.6. Анализ точности субоптимальных фильтров

Основным показателем точности фильтров является критерий их оптимальности — *средний риск* (7.7). Кроме него, представляют интерес математическое ожидание и ковариация ошибки оценивания  $E(t)$ , которые характеризуют несмещенность оценки и ее разброс относительно истинного состояния объекта наблюдения, а также одноточечная плотность распределения этой ошибки  $q(t, \epsilon)$ , которая позволяет находить доверительные области. В свою очередь эти частные показатели точности обычно позволяют найти *средний риск*, соответствующий выбранной функции потерь, например, по формулам (7.8) или (7.9).

Из (7.1), (7.2), (7.26), (7.27) следует, что объект наблюдения, измеритель и субоптимальный фильтр описываются единой системой уравнений:

$$\begin{aligned} d_0 X(t) &= a(t, X) dt + G(t, X) d_0 W(t), \\ d_0 S'(t) &\approx [\varphi'(t, S') + \Psi'(t, S') h(t, X)] dt + \Psi'(t, S') D(t) d_0 U(t), \end{aligned} \quad (7.40)$$

где  $\dot{U}(t) = V(t)$ . Добавив к (7.40) формулу ошибки

$$E(t) \approx X(t) - \mu(t, S'(t)),$$

получим стохастическую дифференциальную систему управления (см. разд. 2) с объединенным вектором состояния  $(X(t), S'(t))$ , точность которой можно анализировать методами, приведенными в разд. 3.1, 3.2. Исходной информацией для них являются локальные характеристики диффузионного марковского процесса  $(X(t), S'(t))$  — век-

тор сноса  $\tilde{a}(t, x, s')$  и матрица коэффициентов  $\tilde{G}(t, x, s')$  при векторе белых шумов  $(W(t), U(t))$  этой системы:

$$\tilde{a}(t, x, s') = \begin{bmatrix} a(t, x) \\ \varphi'(t, s') + \Psi'(t, s')h(t, x) \end{bmatrix}, \quad (7.41)$$

$$\tilde{G}(t, x, s') = \begin{bmatrix} G(t, x) & 0 \\ 0 & \Psi'(t, s')D(t) \end{bmatrix}.$$

**Пример 7.5.** Для условий примера 7.3 найти локальные характеристики  $\tilde{a}, \tilde{G}$  марковского процесса, содержащего переменные состояния фильтра нормальной аппроксимации.

□ Подставляя (7.37) в (7.38) и учитывая (7.36), получаем систему (7.40), в которой  $S' = (Z, P)$ . Поэтому функции (7.41) в данном случае имеют следующий вид:

$$\tilde{a}(t, x, s') = \begin{bmatrix} -x^3 \\ -z(z^2 + 3p) + 2\nu^{-2}zp(x^2 - z^2 - p) \\ (1 - 6p)(z^2 + p) + 2\nu^{-2}p^2(x^2 - 3z^2 - p) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{G}(t, x, s') = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 2\nu^{-1}zp \\ 0 & 2\nu^{-1}p^2 \end{bmatrix}.$$

Наиболее удобным для анализа точности сложной системы (7.40) является метод статистического моделирования Монте-Карло. Он требует многократного численного решения дифференциальных уравнений (7.40) с помощью специальных разностных схем (см. разд. 3.1.2). Если при этом желательно применение численных методов, более точных, чем метод Эйлера, то уравнения (7.40) из формы Ито

$$d_0 \begin{bmatrix} X(t) \\ S'(t) \end{bmatrix} \approx \tilde{a}(t, X, S')dt + \tilde{G}(t, X, S')d_0 \begin{bmatrix} W(t) \\ U(t) \end{bmatrix}$$

нужно предварительно преобразовать в симметризованную форму

$$d_{1/2} \begin{bmatrix} X(t) \\ S'(t) \end{bmatrix} \approx \tilde{f}(t, X, S') dt + \tilde{G}(t, X, S') d_{1/2} \begin{bmatrix} W(t) \\ U(t) \end{bmatrix}.$$

Здесь функция  $\tilde{f}(t, \chi)$ , где  $\chi = (x, s')$ , находится по известным из (7.41) функциям  $\tilde{a}(t, \chi)$ ,  $\tilde{G}(t, \chi)$  по формуле, являющейся модификацией (3.4):

$$\tilde{f}(t, \chi) = \tilde{a}(t, \chi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l+k} \frac{\partial \tilde{G}^i(t, \chi)}{\partial \chi} \tilde{G}^i(t, \chi). \quad (7.42)$$

Суммирование в (7.42) проводится по всем столбцам  $\tilde{G}^i$  матрицы  $\tilde{G}$ .

**Пример 7.6.** Для условий примера 7.3 найти симметризованную форму записи уравнений фильтра нормальной аппроксимации.

□ Используя результаты примера 7.5, получаем, что  $\chi = (x, z, p)$ , а также

$$\frac{\partial \tilde{G}^1}{\partial \chi} \tilde{G}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \tilde{G}^2}{\partial \chi} \tilde{G}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p/v & 2z/v \\ 0 & 0 & 4p/v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2zp/v \\ 2p^2/v \end{bmatrix}.$$

Тогда по (7.42) находим

$$\tilde{f}(t, \chi) = \tilde{a}(t, \chi) - \begin{bmatrix} x/2 \\ 4v^{-2}zp^2 \\ 4v^{-2}p^3 \end{bmatrix}.$$

Учитывая также формулу измерений (7.37), можно записать симметризованную форму уравнения фильтра (7.38):

$$\frac{d_{1/2} Z(t)}{dt} \approx -Z(Z^2 + 3P) + 2v^{-2} ZP(Y - Z^2 - 3P),$$

$$\frac{d_{1/2} P(t)}{dt} \approx (1 - 6P)(Z^2 + P) + 2v^{-2} P^2(Y - 3Z^2 - 3P),$$

а также аналогичную форму уравнения объекта (7.36):

$$\frac{d_{1/2} X(t)}{dt} = (-X^3 - \frac{1}{2}X) + X\dot{W}.$$

При этом формула измерений (7.37) остается той же. ■

### 7.1.7. Линейный фильтр Калмана–Бьюси

Рассмотрим, не используя никакой аппроксимации, построение абсолютно оптимального нелинейного фильтра (7.16) для следующего частного случая. Пусть уравнения наблюдений (7.1) и измерений (7.2) являются линейными (следовательно, форма Ито совпадает с симметризованной):

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A(t)X(t) + G(t)\dot{W}(t) + i(t), \\ Y(t) &= C(t)X(t) + D(t)V(t) + j(t), \end{aligned} \quad (7.43)$$

где  $A(t)$ ,  $G(t)$ ,  $C(t)$ ,  $D(t)$  — матрицы параметров;  $i(t)$ ,  $j(t)$  — векторы детерминированных воздействий.

Начальное состояние объекта будем считать гауссовским с параметрами  $m_0$ ,  $D_0$ :

$$X(0) \sim p_0(x) = N(x - m_0, D_0). \quad (7.44)$$

При этом независимые стандартные белые шумы  $\dot{W}(t)$ ,  $V(t)$ , как обычно, являются гауссовскими.

Очевидно, что в этом случае процессы  $X(t)$ ,  $Y(t)$  имеют гауссовское совместное распределение, вследствие чего апостериорная плотность также гауссова, т.е. становятся точными как приближенное равенство (7.28)

$$p(t, x | Y_0^t) = N(x - Z(t), P(t)),$$

так и связь (7.30) оценок для разных функций потерь с вектором  $Z(t)$ . Полный вектор достаточных координат является теперь конечномерным:  $S = (Z, P)$ , так как все квазиомменты и старшие кумулянты гауссовского распределения равны нулю (см. разд. 2.1.4).

Следовательно, фильтр нормальной аппроксимации (7.31) является в данном случае точным. Подставляя структурные функции линейных объекта и измерителя (7.43)

$$a(t, x) = A(t)x + i(t), \quad G(t, x) = G(t), \quad h(t, x) = C(t)x + j(t)$$

в (7.32)–(7.34), найдем соответствующие структурные функции этого фильтра:

$$\begin{aligned} \hat{a}(t, z, p) &= A(t)z + i(t), & A(t, z, p) &= A(t), & F(t, z, p) &= G(t)G^T(t), \\ \hat{h}(t, z, p) &= C(t)z + j(t), & H(t, z, p) &= C(t), & \Theta(t, z, p) &= 0. \end{aligned}$$

В результате из (7.31) получаем уравнения абсолютно оптимального в данном случае *линейного фильтра Калмана–Бьюси*:

$$\dot{Z}(t) = A(t)Z + i(t) + PC^T(t)R^{-1}(t)[Y(t) - C(t)Z - j(t)], \quad (7.45)$$

$$\dot{P}(t) = A(t)P + PA^T(t) + G(t)G^T(t) - PC^T(t)R^{-1}(t)C(t)P. \quad (7.46)$$

Начальными условиями для них по-прежнему являются параметры (7.35) плотности (7.44):  $Z(0) = m_0$ ,  $P(0) = D_0$ .

Особенностью этого фильтра является *независимость уравнения (7.46) для матрицы ковариации P(t)* не только от результатов измерений Y(t), но и от вектора оптимальной оценки Z(t). Поэтому матрица P(t) становится теперь *детерминированной* и, как видно из (7.29), имеет смысл априорной ковариации ошибки оценивания  $P(t) = \text{cov}[E(t), E(t)]$ .

Следовательно, уравнение (7.46), являющееся *нелинейным матричным дифференциальным уравнением Риккати*, можно решить заранее, до начала процесса обработки измерений фильтром. Найденная  $n \times n$ -матрица P(t) позволяет, во-первых, сделать априорный вывод о точности фильтрации и, во-вторых, вычислить  $n \times m$ -матрицу усиления фильтра

$$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}(t). \quad (7.47)$$

Тогда для получения  $n$ -мерного вектора оценки Z(t) остается решить в реальном масштабе времени лишь уравнение (7.45), которое принимает теперь вид

$$\dot{Z}(t) = A(t)Z + i(t) + K(t)[Y(t) - C(t)Z - j(t)]. \quad (7.48)$$

Таким образом, *размерность фильтра Калмана-Бьюси равна размерности (порядку) объекта n*, а для реализации этого фильтра необходимо запомнить найденные заранее  $nm$  функций времени — элементов матрицы усиления K(t).

Если же линейные объект наблюдения и измеритель (7.43) *стационарны*, т.е. их параметры A, G, C, D, i, j не зависят от времени, и работают они в *установившемся режиме*, в результате чего случайные процессы X(t), Y(t) также становятся стационарными, то и фильтр Калмана-Бьюси (7.48) является стационарным:

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + i + K[Y(t) - CZ(t) - j].$$

В этом случае его реализация еще более упрощается, так как запоминаемая матрица усиления K не зависит от времени. Она находится как  $K = PC^T R^{-1}$  по постоянной матрице ковариации ошибки оценивания P, определяемой путем решения вытекающего из (7.46) *алгебраического матричного уравнения Риккати*:

$$AP + PA^T + GG^T - PC^T R^{-1} CP = 0.$$

## 7.2. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ФИЛЬТРОВ

### 7.2.1. Постановка задачи синтеза параметров фильтра

Недостатком классических субоптимальных фильтров является сильная зависимость их размерности (числа уравнений), определяю-

щей сложность реализации этих фильтров в реальном масштабе времени, от номера приближения  $L$  апостериорной плотности и размерности  $n$  объекта наблюдения. Эта зависимость выражается формулой  $C_{n+L}^n - 1$ , т.е. фильтр имеет порядок, пропорциональный  $n^L$ . Даже простейший из классических фильтр нормальной аппроксимации и его популярная модификация — обобщенный фильтр Калмана—Бьюси, имеют размерность уже  $n(n+3)/2$ , но далеко не всегда удовлетворительны по точности оценивания. Лишь в линейно-гауссовском случае абсолютно оптимальный линейный фильтр Калмана—Бьюси имеет ту же размерность, что и объект наблюдения и дает наилучшую точность. Поэтому актуален синтез нелинейных фильтров невысокой конечной размерности, в частности, размерности объекта наблюдения.

В данном разделе рассмотрим задачу выбора наилучших параметров конечномерного фильтра, предполагая известной его структуру. Последняя задается зависимостью правой части уравнения состояния фильтра от элементов вектора оценки  $\hat{X}(t)$ .

Учтем требование получения оценки  $\hat{X}(t)$  состояния  $X(t)$  объекта (7.1) в темпе с поступлением наблюдений  $Y(t)$  от измерителя (7.2). Тогда функциональную зависимость (7.4) оценки от измерений можно искать в виде уравнения состояния *фильтра заданной структуры*

$$\frac{d_0 \hat{X}(t)}{dt} = \alpha(t, \hat{X}(t), \tau(t)) + \Lambda(t, \hat{X}(t), \tau(t))Y(t), \quad \hat{X}(0) = z_0. \quad (7.49)$$

Здесь  $\alpha(t, \hat{x}, \tau)$ ,  $\Lambda(t, \hat{x}, \tau)$  — известные векторная и матричная структурные функции размерностей  $n \times 1$  и  $n \times m$  соответственно. Неизвестные же  $q$ -мерный вектор параметров  $\tau(t)$  и детерминированное начальное состояние фильтра  $z_0$  необходимо найти из условия минимума среднего риска (7.7) при любом  $t \geq 0$ . При этом на матрицу (7.3) не накладывается условие (7.20). Структурная схема этого фильтра представлена на рис. 7.3.

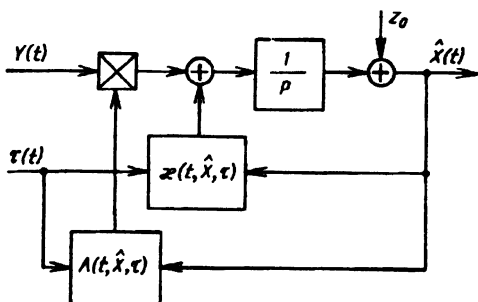


Рис. 7.3.

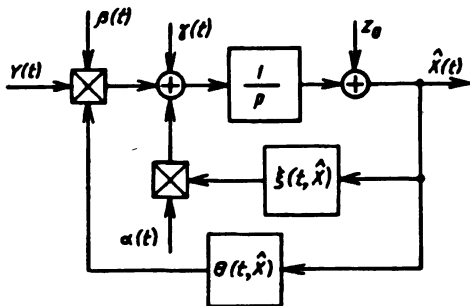


Рис.7.4

Частным случаем фильтра (7.49) является предложенный Пугачевым *регрессионный (условно оптимальный) фильтр* [28]:

$$\frac{d_0 \hat{X}(t)}{dt} = \alpha(t) \xi(t, \hat{X}) + \beta(t) \theta(t, \hat{X}) Y(t) + \gamma(t), \quad \hat{X}(0) = z_0, \quad (7.50)$$

Здесь  $\xi(t, \hat{x})$ ,  $\theta(t, \hat{x})$  — заданные векторная  $g \times 1$  и матричная  $s \times m$  структурные функции;  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$  — подлежащие определению  $p \times g$ -,  $p \times s$ -матрицы и  $p$ -мерный вектор параметров фильтра соответственно. При этом элементы вектора  $\xi(t, \hat{x})$  и элементы столбцов матрицы  $\theta(t, \hat{x})$  как функции переменной  $\hat{x}$  должны быть линейно независимыми. Выбор этих структурных функций можно осуществить, используя приведенные выше уравнения классических субоптимальных фильтров. Например, сравнивая (7.50) с первым уравнением обобщенного фильтра Калмана-Бьюси (7.39), можем положить

$$\xi(t, \hat{x}) = \begin{bmatrix} a(t, \hat{x}) \\ h_x^T(t, \hat{x}) R^{-1}(t) h(t, \hat{x}) \end{bmatrix}, \quad \theta(t, \hat{x}) = h_x^T(t, \hat{x}) R^{-1}(t),$$

так что в этом случае  $g = 2n$ ,  $s = n$ . Структурная схема условно-оптимального фильтра изображена на рис. 7.4.

### 7.2.2. Синтез параметров фильтра, оптимального всюду

Объединяя уравнения объекта (7.1), измерителя (7.2) и фильтра (7.49), получаем систему

$$d_0 X(t) = a(t, X) dt + G(t, X) d_0 W(t),$$

$$d_0 \hat{X}(t) = [x(t, \hat{X}, \tau) + \Lambda(t, \hat{X}, \tau) h(t, X)] dt + \Lambda(t, \hat{X}, \tau) D(t, X) d_0 U(t),$$

где  $\dot{U}(t) = V(t)$ .

Следовательно, объединенный вектор  $(X(t), \hat{X}(t))$  является марковским, причем одноточечная плотность его распределения  $\rho(t, x, \hat{x})$  удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (2.87):

$$\frac{\partial \rho(t, \chi)}{\partial t} = Q[\rho(t, \chi)]. \quad (7.51)$$

Здесь  $\chi = (x, \hat{x})$ , оператор  $Q$  имеет вид

$$Q[\rho] = -\frac{\partial^T}{\partial \chi} (a\rho) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} (\tilde{B}\rho) \right], \quad (7.52)$$

а вектор сноса  $a$  и матрица диффузии  $\tilde{B}$  зависят от параметра  $\tau$  и определяются выражениями

$$a(t, \chi, \tau) = \begin{bmatrix} a(t, x) \\ x(t, \hat{x}, \tau) + \Lambda(t, \hat{x}, \tau)h(t, x) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}(t, \chi, \tau) = \begin{bmatrix} G(t, x)G^T(t, x) & 0 \\ 0 & \Lambda(t, \hat{x}, \tau)R(t, x)\Lambda^T(t, \hat{x}, \tau) \end{bmatrix}.$$

Начальным условием для уравнения (7.51) служит функция

$$p(0, x, \hat{x}) = p_0(x) \delta(\hat{x} - z_0). \quad (7.53)$$

Из (7.51) следует, что сечение плотности  $\rho$  в любой фиксированный момент времени  $T \geq 0$  является функционалом параметров фильтра  $\tau(t)$  и функцией начального состояния  $z_0$ , т.е.

$$p(T, x, \hat{x}) = p(T, x, \hat{x}; \tau_0^T, z_0).$$

Поэтому значение в этот момент времени критерия оптимальности параметров (7.7), которое можно записать через плотность  $\rho$  как

$$I(T, \tau_0^T, z_0) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Pi(T, x - \hat{x}) \rho(T, x, \hat{x}) dx d\hat{x}, \quad (7.54)$$

также является функционалом параметров  $\tau(t)$  и функцией начального состояния  $z_0$ .

В результате задача синтеза фильтра заданной структуры (7.48) сводится к задаче минимизации функционала типа Майера (7.54) на решениях уравнения в частных производных (7.51) при начальном условии (7.53).

Получим необходимые условия минимума в данной задаче, для чего воспользуемся методом множителей Лагранжа. С этой целью составим вспомогательный функционал Лагранжа

$$L = I + \int_0^T \langle \psi, Q[\rho] - \frac{\partial \rho}{\partial t} \rangle dt, \quad (7.55)$$



где  $\psi(t, \chi)$  — неопределенный множитель Лагранжа, а угловыми скобками обозначено скалярное произведение функций в  $\mathbb{R}^{2n}$ :

$$\langle \psi, \eta \rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \psi(t, \chi) \eta(t, \chi) d\chi. \quad (7.56)$$

Осуществим в (7.55) интегрирования по частям: второго слагаемого по  $\chi$ , а третьего — по  $t$ . Учитывая при этом свойство сопряженности (2.31) оператора  $Q$ , а также вид целевого функционала (7.54) и форму начального условия (7.53), получаем

$$L = \langle \Pi - \psi, p \rangle \Big|_T + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(0, x, z_0) p_0(x) dx + \int_0^T \langle \frac{\partial \psi}{\partial t} + Q^*[\psi], p \rangle dt.$$

Здесь оператор  $Q^*$  согласно (2.32) имеет вид

$$Q^*[\psi] = a^T(t, \chi, \tau) \frac{\partial \psi(t, \chi)}{\partial \chi} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \tilde{B}(t, \chi, \tau) \frac{\partial^2 \psi(t, \chi)}{\partial \chi^2} \right]. \quad (7.57)$$

Теперь придадим параметрам  $\tau(t)$ ,  $z_0$  и плотности  $p(t, \chi)$  приращения  $\Delta \tau(t)$ ,  $\Delta z_0$ ,  $\Delta p(t, \chi)$ . Тогда соответствующая им вариация (первый дифференциал) функционала Лагранжа будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta L = & \langle \Pi - \psi, \Delta p \rangle \Big|_T + \Delta z_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}}(0, x, z_0) p_0(x) dx + \\ & + \int_0^T \langle \frac{\partial \psi}{\partial t} + Q^*[\psi], \Delta p \rangle dt + \int_0^T \Delta \tau^T(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \langle Q^*[\psi], p \rangle dt. \end{aligned}$$

В результате известное необходимое условие условного экстремума

$$\delta L = 0 \quad \forall \Delta \tau(t), \Delta z_0, \Delta p(t, x) \neq 0$$

позволяет записать следующую систему уравнений для нахождения экстремалей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, \chi)}{\partial t} &= Q[p(t, \chi)], & p(0, x, \hat{x}) &= p_0(x) \delta(\hat{x} - z_0), \\ - \frac{\partial \psi(t, \chi)}{\partial t} &= Q^*[\psi(t, \chi)], & \psi(T, x, \hat{x}) &= \Pi(T, x - \hat{x}), \end{aligned} \quad (7.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\mathbb{R}^{2n}} Q^*[\psi(t, \chi)] p(t, \chi) d\chi = 0 \quad \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}}(0, x, z_0) p_0(x) dx = 0.$$

Таким образом, нахождение параметров  $\tau(t)$ ,  $z_0$  фильтра (7.49), обеспечивающих наилучшую точность оценки в фиксированный момент времени  $T$ , сводится к решению двухточечной краевой задачи (7.58). Очевидно, что при замене момента  $T$  на  $T' > T$  новое решение  $\tau'(t)$ ,  $z_0'$  этой краевой задачи будет при  $t \in [0, T]$  в общем случае отличаться от старого решения  $\tau(t)$ ,  $z_0$ . Следовательно,

оптимальный всюду конечномерный фильтр заданной структуры не существует.

Исключением из этого правила является линейный фильтр Калмана-Бьюси (7.45). Действительно, он конечномерен и оптимален всюду. Можно показать [30], что поиск параметров линейного конечномерного фильтра

$$\dot{\hat{X}} = \alpha(t)\hat{X} + \beta(t)Y + \gamma(t), \quad \hat{X}(0) = z_0, \quad (7.59)$$

для линейных объекта и измерителя (7.43) при гауссовском начальном состоянии (7.44) и критерии (7.54) с квадратичной функцией потерь (7.5) приводит к независимым от момента времени  $T$  параметрам  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$ ,  $z_0$ , которые делают фильтр (7.59) фильтром Калмана-Бьюси.

### 7.2.3. Выбор параметров локально оптимального фильтра

\* Невозможность в общем случае синтезировать оптимальный всюду конечномерный фильтр заставляет изменить критерий оптимальности. Целесообразно минимизировать начальное значение среднего риска  $I(0)$ , а также приращение величины  $I(t)$  за бесконечно малый отрезок времени  $[t, t+\Delta t]$ , где  $\Delta t > 0$ , при любых  $t \geq 0$  [28]. Это приводит к следующим двум условиям:

$$I(0) \rightarrow \min, \quad (7.60)$$

$$\dot{I}(t) = \frac{dI}{dt} \rightarrow \min \quad \forall t \geq 0, \quad (7.61)$$

последнее из которых известно как *критерий локальной оптимальности* [10].

Согласно (7.53), (7.54) значение  $I(0)$  является функцией только начального состояния  $z_0$  конечномерного фильтра и имеет вид

$$I(0, z_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \Pi(0, x - z_0) p_0(x) dx.$$

Поэтому *оптимальное начальное состояние*  $z_0$  находится в соответствии с (7.60):

$$z_0 = \arg \min_{z \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Pi(0, x - z) p_0(x) dx. \quad (7.62)$$

Для квадратичной функции потерь (7.5) это даст (см. пример 7.1)

$$z_0^{\text{CKO}} = m_0 = \int_{\mathbb{R}^n} x p_0(x) dx, \quad (7.63)$$

тогда как простая функция потерь (7.6) приводит к следующему значению (см. пример 7.2):

$$z_0^{\text{МАП}} = \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} p_0(x).$$

Получим выражение для критерия локальной оптимальности  $\dot{I}(t)$ . Для любого  $t \geq 0$  средний риск можно записать, используя обозначение скалярного произведения (7.56):

$$I(t) = \langle \Pi(t, x - \hat{x}), p(t, x, \hat{x}) \rangle.$$

Дифференцируя эту формулу по  $t$  и учитывая (7.51), (2.31), находим

$$\dot{I}(t) = \left\langle \frac{\partial \Pi}{\partial t} + Q^*[\Pi], p \right\rangle.$$

Отсюда, используя (7.57), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) = & \left\langle \frac{\partial \Pi}{\partial t} + a^T(t, x) \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ G(t, x) G^T(t, x) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \right], p \right\rangle + \\ & + \left\langle [x(t, \hat{x}, \tau) + \Lambda(t, \hat{x}, \tau) h(t, x)]^T \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{x}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \Lambda(t, \hat{x}, \tau) R(t, x) \Lambda^T(t, \hat{x}, \tau) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \hat{x}^2} \right], p \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.64)$$

В двух последних выражениях от вектора  $\tau(t)$  зависят лишь вторые слагаемые. Поэтому в соответствии с (7.61) параметры локально оптимального фильтра находятся путем простой минимизации функции многих переменных:

$$\tau(t) = \arg \min_{\tau \in \mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^{2n}} Q^*[\Pi(t, x - \hat{x})] p(t, x, \hat{x}) dx d\hat{x},$$

или, более подробно:

$$\begin{aligned} \tau(t) = \arg \min_{\tau \in \mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^{2n}} & \left\{ [x^T(t, \hat{x}, \tau) + h^T(t, x) \Lambda^T(t, \hat{x}, \tau)] \frac{\partial \Pi(t, x - \hat{x})}{\partial \hat{x}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \Lambda(t, \hat{x}, \tau) R(t, x) \Lambda^T(t, \hat{x}, \tau) \frac{\partial^2 \Pi(t, x - \hat{x})}{\partial \hat{x}^2} \right] \right\} p(t, x, \hat{x}) dx d\hat{x}. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Соотношение (7.65) определяет зависимость значения вектора параметров  $\tau(t)$  в момент времени  $t \geq 0$  от сечения плотности  $p(t, x, \hat{x})$  в этот же момент времени. Следовательно, вычисление параметров локально оптимального конечномерного фильтра (7.49) сводится к решению задачи Коши для ФПК-уравнения (7.51), в котором неизвестная переменная  $\tau(t)$  заменена выражением (7.65). В результате уравнение (7.51) становится нелинейным и интегродифференциальным. Начальное условие для него имеет вид (7.53), где величина  $z_0$  полностью определена формулой (7.62).

Вследствие большой сложности решения нелинейных интегродифференциальных уравнений в частных производных рассмотрим другой способ практического нахождения параметров локально оптимального фильтра. Заметим, что в (7.62), (7.65) минимизируются математические ожидания определенных функций от случайных векторов  $X(t)$ ,  $\hat{X}(t)$ :

$$z_0 = \arg \min_{z \in \mathbb{R}^n} M [ \Pi(0, X(0) - z) ],$$

$$\tau(t) = \arg \min_{\tau \in \mathbb{R}^q} M \{ Q^* [ \Pi(t, X(t) - \hat{X}(t)) ] \} = \quad (7.66)$$

$$= \arg \min_{\tau \in \mathbb{R}^q} M \left\{ [x^T(t, X(t), \tau) + h^T(t, X(t)) \Lambda^T(t, \hat{X}(t), \tau)] \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{x}}(t, X(t) - \hat{X}(t)) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \Lambda(t, \hat{X}(t), \tau) R(t, X(t)) \Lambda^T(t, \hat{X}(t), \tau) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \hat{x}^2}(t, X(t) - \hat{X}(t)) \right] \right\}.$$

Вычислить же эти математические ожидания можно достаточно точно с помощью многократного статистического моделирования начального состояния объекта  $X(0)$ , а также уравнений объекта (7.1), измерителя (7.2) и фильтра (7.49). При этом, используя стохастические разностные схемы (см. разд. 3.1.2), необходимо осуществлять *пошаговое статистическое моделирование*, т.е. чередовать вычисление случайных величин  $X(t)$ ,  $\hat{X}(t)$  и параметра  $\tau(t)$  в моменты времени  $t_k = kh$ ,  $k \geq 0$ , где  $h$  — малый шаг интегрирования. Одновременно с определением параметров статистическое моделирование позволяет получить и требуемые характеристики точности фильтра заданной структуры (см. разд. 7.1.6).

#### 7.2.4. Условно оптимальный фильтр Пугачева

Параметры фильтра находятся более просто, если функция потерь является квадратичной (7.5), а фильтр — регрессионным (7.50). В этом случае структурные функции конечномерного фильтра (7.49) зависят от параметров  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$  линейно:

$$x(t, \hat{x}, \tau) = \alpha \xi(t, \hat{x}) + \gamma, \quad \Lambda(t, \hat{x}, \tau) = \beta \theta(t, \hat{x}),$$

начальное состояние фильтра находится по (7.63) как  $z_0 = m_0$ , а производные функции потерь имеют вид

$$\frac{\partial \Pi(t, x - \hat{x})}{\partial \hat{x}} = 2C(t)(\hat{x} - x), \quad \frac{\partial^2 \Pi(t, x - \hat{x})}{\partial \hat{x}^2} = 2C(t). \quad (7.67)$$

Поэтому из (7.65), учитывая, что

$$\mathbf{x}^T \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \text{tr} \left[ \mathbf{x}^T \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right] = \text{tr} \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \mathbf{x}^T \right], \quad (7.68)$$

получаем следующее выражение для минимизируемой функции:

$$F(t, \alpha, \beta, \gamma) = \langle \text{tr} \left\{ \mathbf{C} [2(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\alpha \xi + \beta \theta + \gamma)^T + \beta \theta \mathbf{R} \theta^T \beta^T] \right\}, \mathbf{p} \rangle.$$

Эта функция линейна по  $\alpha$ ,  $\gamma$ , квадратична по  $\beta$  и, следовательно, достигает минимума на значениях этих параметров, определяемых из необходимых условий экстремума:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \gamma} = 0. \quad (7.69)$$

Используя известные формулы матричного дифференцирования (П.2.6), и учитывая невырожденность симметрической матрицы  $\mathbf{C}(t) > 0$ , из (7.69) получаем следующие уравнения:

$$\langle (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \xi^T, \mathbf{p} \rangle = 0, \quad (7.70)$$

$$\langle (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \mathbf{h}^T \theta^T + \beta \theta \mathbf{R} \theta^T, \mathbf{p} \rangle = 0, \quad (7.71)$$

$$\langle \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{p} \rangle = 0. \quad (7.72)$$

где уравнение (7.72) является условием несмещенности оценки

$$\mathbf{M} [\hat{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{X}(t)] = 0. \quad (7.73)$$

Однако из этих уравнений лишь в (7.71) явным образом входит параметр  $\beta(t)$  что позволяет записать для него замкнутое матричное уравнение

$$\beta(t) \mathbf{M} [\theta(t, \hat{\mathbf{X}}) \mathbf{R}(t, \mathbf{X}) \theta^T(t, \hat{\mathbf{X}})] = \mathbf{M} [(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}) \mathbf{h}^T(t, \mathbf{X}) \theta^T(t, \hat{\mathbf{X}})]. \quad (7.74)$$

Для определения же параметров  $\alpha(t)$ ,  $\gamma(t)$  продифференцируем по  $t$  уравнения (7.70), (7.72). Учитывая (7.51), (2.31), находим

$$\begin{aligned} \langle (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \frac{\partial \xi^T(t, \hat{\mathbf{x}})}{\partial t} + \mathbf{Q}^* [(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \xi^T(t, \hat{\mathbf{x}})], \mathbf{p} \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{Q}^* [\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}], \mathbf{p} \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (7.75)$$

где согласно (7.57)

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{a}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + (\alpha \xi + \beta \theta \mathbf{h} + \gamma)^T \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \mathbf{G} \mathbf{G}^T \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} + \beta \theta \mathbf{R} \theta^T \beta^T \frac{\partial^2}{\partial \hat{\mathbf{x}}^2} \right].$$

Вычисляя в (7.75) частные производные по  $\mathbf{x}$ ,  $\hat{\mathbf{x}}$  от вектор-функции  $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$  и матричной функции  $(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \xi^T(t, \hat{\mathbf{x}})$ , в результате получаем следующую систему линейных уравнений относительно  $\alpha(t)$ ,  $\gamma(t)$ :

$$\begin{aligned}
& M \left\{ (\alpha\xi + \gamma)\xi^T - (X - \hat{X})(\xi^T\alpha^T + \gamma^T) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \xi^T \right\} = \\
& = M \left\{ (a - \beta\theta h)\xi^T + (X - \hat{X}) \frac{\partial \xi^T}{\partial t} + [(X - \hat{X})h^T - \beta\theta R]\theta^T \beta^T \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \xi^T + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}(X - \hat{X}) \text{tr} \left[ \beta\theta R \theta^T \beta^T \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \right] \xi^T \right\}, \quad (7.76)
\end{aligned}$$

$$\alpha M[\xi(t, \hat{X})] + \gamma = M[a(t, X)] - \beta M[\theta(t, \hat{X})h(t, X)].$$

Таким образом, вычисление параметров локально оптимального (в смысле минимума производной среднеквадратической ошибки) регрессионного фильтра (7.50) сводится к решению матричного уравнения (7.74) и системы линейных уравнений (7.76). Коэффициенты и свободные члены этих уравнений находятся, как и в общем случае, методом статистического моделирования.

**Пример 7.7.** Найти уравнения для определения параметров регрессионного фильтра, оценивающего состояние объекта (7.36) по измерениям (7.37).

□ Структурные функции этого фильтра выберем по первому уравнению соответствующего фильтра нормальной аппроксимации (7.38). Учитывая требование линейной независимости элементов вектор-функции  $\xi(t, \hat{x})$ , положим

$$\xi(t, \hat{x}) = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{x}^3 \end{bmatrix}, \quad \theta(t, \hat{x}) = -\hat{x}.$$

Следовательно, в данном случае  $p=1$ ,  $r=2$ ,  $s=1$  и регрессионный фильтр ищется в виде

$$\frac{d_0 \hat{X}(t)}{dt} = \alpha_1(t) \hat{X} + \alpha_2(t) \hat{X}^3 + \beta(t) \hat{X}Y + \gamma(t).$$

Тогда из (7.74) получаем  $\beta = (m_{31} - m_{22})m_{02}^{-1}$ , где  $m_{ij} = M(X^i X^j)$ . В то же время система (7.76) имеет вид

$$\begin{aligned}
\alpha_1(2m_{02} - m_{11}) + \alpha_2(2m_{04} - m_{13}) + \gamma(2m_{01} - m_{10}) = \\
= -m_{31} + \beta(m_{31} - 2m_{22}) - \beta^2 v^2 m_{02},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1(4m_{04} - 3m_{13}) + \alpha_2(4m_{06} - 3m_{15}) + \gamma(4m_{03} - 3m_{12}) = \\
= -m_{33} + \beta(3m_{33} - 4m_{24}) + 3\beta^2 v^2 (m_{13} - 2m_{04}),
\end{aligned}$$

$$\alpha_1 m_{01} + \alpha_2 m_{03} + \gamma = -m_{30} - \beta m_{21}. \quad \blacksquare$$

Пример 7.8. Составить системы уравнений для определения параметров регрессионного фильтра, оценивающего состояние одномерного объекта (7.1) по скалярным измерениям (7.2) при произвольном выборе структурных функций  $\xi(t, \hat{x})$ ,  $\Theta(t, \hat{x})$ .

□ Так как в данном случае  $p = m = 1$ , то параметры  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  и функция  $\Theta(t, \hat{x})$  имеют размерности  $1 \times r$ ,  $1 \times s$  и  $s \times 1$  соответственно, а параметр  $\gamma(t)$  является скаляром. Тогда из (7.74) получаем матричное уравнение  $A(t)\beta^T(t) = b(t)$  для столбца  $\beta^T(t)$ , где квадратная матрица  $A(t)$  порядка  $s$  и  $s$ -мерный столбец  $b(t)$  задаются формулами

$$A(t) = M[D^2(t, X)\Theta(t, \hat{X})\Theta^T(t, \hat{X})], \quad b(t) = M[(X - \hat{X})h(t, X)\Theta(t, \hat{X})].$$

Аналогичное уравнение для столбца  $[\alpha(t), \gamma(t)]^T$  найдем, записав матричную систему уравнений (7.78) в скалярной форме. Вынося при этом неслучайные множители  $\alpha(t)$ ,  $j = \overline{1, r}$ ,  $\gamma(t)$  из-под знака оператора математического ожидания  $M$ , получаем уравнение

$$\tilde{A}(t) \begin{bmatrix} \alpha^T(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix} = \tilde{b}(t).$$

Здесь квадратная матрица  $\tilde{A}(t)$  порядка  $r+1$  и  $(r+1)$ -мерный столбец  $\tilde{b}(t)$  определяются выражениями для их элементов:

$$\tilde{A}_{ij}(t) = M \left[ \xi_i(t, \hat{X})\xi_j(t, \hat{X}) - (X - \hat{X}) \frac{\partial \xi_j}{\partial \hat{x}}(t, \hat{X})\xi_i(t, \hat{X}) \right], \quad i, j = \overline{1, r+1},$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_i(t) = M \left\{ [a(t, X) - c(t, \hat{X})h(t, X)]\xi_i(t, \hat{X}) + (X - \hat{X}) \frac{\partial \xi_i}{\partial t}(t, \hat{X}) + \right. \\ \left. + [(X - \hat{X})h(t, X) - c(t, \hat{X})D^2(t, X)]c(t, \hat{X}) \frac{\partial \xi_i}{\partial \hat{x}}(t, \hat{X}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(X - \hat{X})c^2(t, \hat{X})D^2(t, X) \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial \hat{x}^2}(t, \hat{X}) \right\}, \quad i = \overline{1, r+1}, \end{aligned}$$

в которых  $\xi_i(t, \hat{x})$ ,  $i = \overline{1, r}$ , — элементы структурной вектор-функции  $\xi(t, \hat{x})$ ;  $\xi_{r+1}(t, \hat{x}) \equiv 1$ , а  $c(t, \hat{x}) = \beta(t)\Theta(t, \hat{x})$  — известная вектор-функция. ■

## 7.2.5. Линейный фильтр для линейной системы

Пусть объект и измеритель являются линейными (7.43). Покажем, что в этом случае среднеквадратически локально оптимальный линейный регрессионный фильтр

$$\dot{\hat{X}} = \alpha(t)\hat{X} + \beta(t)Y + \gamma(t), \quad \hat{X}(0) = m_0, \quad (7.77)$$

совпадает с линейным фильтром Калмана-Бьюси.

Действительно, теперь структурные функции объекта, измерителя и фильтра имеют вид

$$\begin{aligned} a(t, x) &= A(t)x + i(t), & G(t, x) &= G(t), & \xi(t, \hat{x}) &= \hat{x}, \\ h(t, x) &= C(t)x + j(t), & R(t, x) &= R(t), & \theta(t, \hat{x}) &= E, \end{aligned} \quad (7.78)$$

где  $E$  — единичная матрица. Поэтому из (7.74) получаем

$$\beta(t) = M\{[X(t) - \hat{X}(t)]X^T(t)\} C^T(t) R^{-1}(t). \quad (7.79)$$

Кроме того, (7.70) в данном случае имеет вид

$$M\{[X(t) - \hat{X}(t)] \hat{X}^T(t)\} = 0. \quad (7.80)$$

Это равенство вместе с условием несмещенности оценки (7.73) позволяет представить матрицу ковариаций ошибки  $S(t) = \text{cov}[E(t), E(t)]$  в виде

$$S(t) = M\{[X(t) - \hat{X}(t)][X(t) - \hat{X}(t)]^T\} = M\{[X(t) - \hat{X}(t)]X^T(t)\}. \quad (7.81)$$

В результате вместо (7.79) можем записать формулу

$$\beta(t) = S(t)C^T(t)R^{-1}(t), \quad (7.82)$$

которая аналогична выражению (7.47) для матрицы усиления линейного фильтра Калмана-Бьюси. Вычисление ковариации  $S(t)$  рассмотрим ниже.

Подставим теперь (7.78) в (7.76). Так как в данном случае

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi(t, \hat{x}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \xi(t, \hat{x}) = E, \quad \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \xi_i(t, \hat{x}) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

то, учитывая (7.73), (7.80), получаем систему

$$\begin{aligned} \alpha M(\hat{X}\hat{X}^T) + \gamma M(\hat{X}^T) &= (A - \beta C)M(\hat{X}\hat{X}^T) + (i - \beta j)M(\hat{X}^T) + \\ &+ \{M[(X - \hat{X})X^T]C^T - \beta R\}\beta^T, \end{aligned} \quad (7.83)$$

$$\alpha M(\hat{X}) + \gamma = (A - \beta C)M(\hat{X}) + i - \beta j. \quad (7.84)$$

Исключим отсюда вектор  $\gamma$ . Для этого найдем его из (7.84):

$$\gamma = (A - \beta C - \alpha)M(\hat{X}) + i - \beta j \quad (7.85)$$

и подставим в (7.83), где последнее слагаемое в правой части вследствие (7.79) обращается в нуль. Тогда получим

$$(\alpha - A + \beta C)\Omega = 0,$$

где матрица  $\Omega = M(\hat{X}\hat{X}^T) - M(\hat{X})M(\hat{X}^T) = \text{cov}(\hat{X}, \hat{X})$  положительно определена и, следовательно, имеет обратную.

В результате окончательно имеем



$$\alpha(t) = A(t) - \beta(t)C(t) \quad (7.86)$$

и тогда из (7.85) находим

$$\gamma(t) = i(t) - \beta(t)j(t). \quad (7.87)$$

Из (7.82), (7.86), (7.87) следует, что уравнение синтезируемого фильтра (7.77) имеет вид

$$\dot{\hat{X}} = A(t)\hat{X} + i(t) + S(t)C^T(t)R^{-1}(t)[Y - C(t)\hat{X} - j(t)], \quad (7.88)$$

подобный уравнению (7.45) линейного фильтра Калмана—Бьюси. Остается вычислить матрицу ковариаций  $S(t)$  ошибки фильтра (7.88).

Сначала найдем дифференциальное уравнение ошибки оценивания  $E(t) = X(t) - \hat{X}(t)$ . Для этого исключим из системы уравнений объект-измеритель-фильтр (7.43), (7.88) переменную  $Y(t)$ . Используя формулу (7.82), получаем

$$\dot{X} = A(t)X + i(t) + G(t)\dot{W}, \quad X(0) = X_0,$$

$$\dot{\hat{X}} = A(t)\hat{X} + i(t) + \beta(t)C(t)(X - \hat{X}) + \beta(t)D(t)V, \quad X(0) = m_0.$$

Отсюда

$$\dot{E} = (A - \beta C)E + [G, -\beta D] \begin{bmatrix} \dot{W} \\ V \end{bmatrix}, \quad E(0) = x_0 - m_0. \quad (7.89)$$

Тогда уравнение для матрицы ковариаций (7.81) состояния  $E(t)$  линейной стохастической дифференциальной системы, заданной уравнением (7.89), получим с помощью уравнения (3.12) метода квази-моментов. Последнее для линейной системы превращается в уравнение метода моментов Дункана (см. пример 3.2), и имеет в данном случае вид

$$\dot{S} = (A - \beta C)S + S(A - \beta C)^T + [G, -\beta D] \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G^T \\ -D^T \beta^T \end{bmatrix}.$$

Учитывая здесь (7.82), после приведения подобных членов получаем уравнение Риккати:

$$\dot{S} = A(t)S + SA^T(t) + G(t)G^T(t) - SC^T(t)R^{-1}(t)C(t)S, \quad S(0) = D_0,$$

совпадающее с (7.46). Начальным условием для него является матрица  $D_0$  ковариаций начального состояния объекта.

Таким образом, доказано, что линейный фильтр Калмана—Бьюси действительно является среднеквадратически локально оптимальным в классе линейных регрессионных фильтров (7.77) для линейных объекта и измерителя (7.43). При этом гауссовость начального состояния объекта (7.43) нигде не использовалась.

## 7.3. ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ФИЛЬТРОВ

### 7.3.1. Постановка задачи синтеза структуры фильтра

Точность оценивания, которую обеспечивает фильтр заданной структуры, очевидным образом зависит от выбора его структурных функций. Однако в разд. 7.2 они определялись эвристически (из опыта, методом проб и ошибок). Рассмотрим теперь новый метод их строгого нахождения [31].

Для получения оценки  $\hat{X}(t)$  состояния объекта (7.1) по измерениям (7.2) будем искать конечномерный фильтр в виде

$$\frac{d_0 \hat{X}(t)}{dt} = \varphi(t, \hat{X}(t)) + \Psi(t, \hat{X}(t))Y(t), \quad \hat{X}(0) = z_0 \quad (7.90)$$

Структурная схема этого фильтра приведена на рис. 7.5.

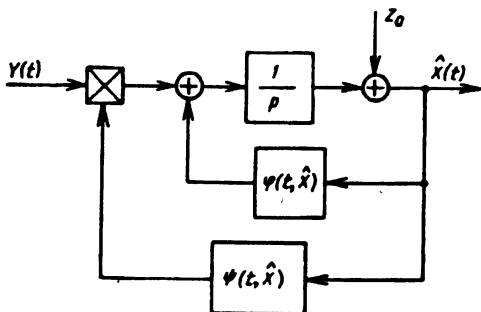


Рис.7.5.

Неизвестные векторную  $\varphi(t, \hat{x})$  и матричную  $\Psi(t, \hat{x})$  структурные функции этого фильтра размерности  $n \times 1$  и  $n \times m$  соответственно, а также его начальное состояние  $z_0$  определим из условий начальной и локальной оптимальности (7.60), (7.61). Оптимальный же всюду фильтр (7.90) не существует, что можно доказать, немного изменив выкладки разд. 7.2.2.

### 7.3.2. Структура локально оптимального фильтра

Объединяя уравнения объекта (7.1), измерителя (7.2) и фильтра (7.90), как в разд. 7.2.2, получаем, что одноточечная плотность  $p(t, x, \hat{x})$  совместного распределения состояний объекта  $X(t)$

и фильтра  $\hat{X}(t)$  также удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (7.51) и начальному условию (7.53), но уже со следующими вектором сноса и матрицей диффузии:

$$\begin{aligned} \bar{a}(t, x) &= \begin{bmatrix} a(t, x) \\ \varphi(t, \hat{x}) + \Psi(t, \hat{x})h(t, x) \end{bmatrix}, \\ \bar{B}(t, x) &= \begin{bmatrix} G(t, x)G^T(t, x) & 0 \\ 0 & \Psi(t, \hat{x})R(t, x)\Psi^T(t, \hat{x}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.91)$$

Поэтому определяемое из условия (7.60) начальное состояние  $z_0$  фильтра (7.90) снова находится по формуле (7.62). Критерий же локальной оптимальности (7.61) принимает, в отличие от (7.64), следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= -\left\langle \frac{\partial \Pi}{\partial t} + a^T \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ GG^T \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \right], p \right\rangle + \left\langle \varphi^T \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{x}}, p \right\rangle + \\ &+ \left\langle h^T \Psi^T \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \Psi R \Psi^T \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \hat{x}^2} \right], p \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.92)$$

Это выражение представляет собой функционал от  $\varphi(t, \cdot)$ ,  $\Psi(t, \cdot)$ , состоящий из трех слагаемых. Первое из них не зависит от  $\varphi$ ,  $\Psi$ , второе линейно по  $\varphi$ , а третье квадратично по  $\Psi$ . Используем известную формулу умножения плотностей распределения:

$$p(t, x, \hat{x}) = \rho(t, x | \hat{x}) s(t, \hat{x}), \quad (7.93)$$

где  $\rho$  — условная плотность;  $s$  — маргинальная (частная) плотность, причем

$$s(t, \hat{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} p(t, x, \hat{x}) dx. \quad (7.94)$$

Тогда, учитывая (7.68), второе и третье слагаемые функционала (7.92) можно представить как математическое ожидание функции

$$\begin{aligned} J(t, \hat{x}, \varphi, \Psi) &= \varphi^T \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Pi(t, x - \hat{x})}{\partial \hat{x}} \rho(t, x | \hat{x}) dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \text{tr} \left[ \frac{\partial \Pi(t, x - \hat{x})}{\partial \hat{x}} h^T(t, x) \Psi^T + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi(t, x - \hat{x})}{\partial \hat{x}^2} \Psi R(t, x) \Psi^T \right] \rho(t, x | \hat{x}) dx, \end{aligned} \quad (7.95)$$

т.е. в виде  $\dot{I}(t) = \text{const}(\varphi, \Psi) + M\{J[t, \hat{X}(t), \varphi(t, \hat{X}(t)), \Psi(t, \hat{X}(t))]\}$ .

Из последнего выражения следует, что для нахождения минимума функционала  $I(t)$  по функциям  $\varphi(t, \cdot)$ ,  $\Psi(t, \cdot)$  достаточно минимизировать по параметрам  $\varphi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  функцию многих переменных

$J(t, \hat{x}, \varphi, \Psi)$ . А так как эта функция линейна по  $\varphi$  и квадратична по  $\Psi$ , то из (7.95) с помощью необходимых условий экстремума и формул матричного дифференцирования (П.2.6), получаем, учитывая симметричность матриц  $\partial^2 \Pi / \partial \hat{x}^2$ ,  $R$ , уравнения для оптимальных  $\varphi$ ,  $\Psi$ :

$$\frac{\partial J}{\partial \varphi} = \int_{R^n} \frac{\partial \Pi(t, x - \hat{x})}{\partial \hat{x}} \rho(t, x | \hat{x}) dx = 0, \quad (7.96)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \Psi} = \int_{R^n} \left[ \frac{\partial \Pi(t, x - \hat{x})}{\partial \hat{x}} h^T(t, x) + \frac{\partial^2 \Pi(t, x - \hat{x})}{\partial \hat{x}^2} \Psi R(t, x) \right] \rho(t, x | \hat{x}) dx = 0. \quad (7.97)$$

Первое из них явным образом не зависит от искомых функций  $\varphi$ ,  $\Psi$ , тогда как второе представляет собой систему линейных уравнений относительно элементов матрицы  $\Psi(t, \hat{x})$ :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \Psi_{jk} \int_{R^n} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \hat{x}_i \partial \hat{x}_j} R_{kl} dx = - \int_{R^n} \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{x}_i} h_l \rho dx, \quad i = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, m}.$$

Для определения же функции  $\varphi(t, \hat{x})$  надо уравнение (7.96) домножить на  $s(t, \hat{x})$  и продифференцировать по  $t$ . Чтобы упростить процедуру последующих преобразований, сделаем это для частного случая квадратичной функции потерь.

### 7.3.3. Случай квадратичной функции потерь

Если функция потерь имеет вид (7.5), то ее производные определяются формулами (7.67). Тогда начальное состояние фильтра  $z_0$  находится по (7.63), а уравнения (7.96), (7.97), вследствие невырожденности квадратной матрицы  $S(t)$ , принимают вид

$$\int_{R^n} (\hat{x} - x) \rho(t, x | \hat{x}) dx = 0, \quad (7.98)$$

$$\int_{R^n} [(\hat{x} - x) h^T(t, x) + \Psi(t, \hat{x}) R(t, x)] \rho(t, x | \hat{x}) dx = 0. \quad (7.99)$$

Из (7.99) легко получаем выражение для матрицы-функции  $\Psi$ :

$$\Psi(t, \hat{x}) = \int_{R^n} (x - \hat{x}) h^T(t, x) \rho(t, x | \hat{x}) dx \left[ \int_{R^n} R(t, x) \rho(t, x | \hat{x}) dx \right]^{-1}. \quad (7.100)$$

Уравнение (7.98) позволяет, учитывая нормированность условной плотности ( $\int \rho dx = 1$ ), записать важную связь

$$\hat{x} = \int_{R^n} x \rho(t, x | \hat{x}) dx. \quad (7.101)$$

Для определения структурной функции  $\varphi$  домножим (7.98) на маргинальную плотность  $s(t, \hat{x})$ . С учетом (7.93) найдем

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\hat{x} - x) p(t, x, \hat{x}) dx = 0. \quad (7.102)$$

Отметим, что если последнее равенство проинтегрировать по  $\hat{x}$ , то получим условие несмещенности оценки рассматриваемого фильтра

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} (\hat{x} - x) p(t, x, \hat{x}) dx d\hat{x} = M[\hat{X}(t) - X(t)] = 0. \quad (7.103)$$

Подобным же образом из (7.101) найдем следующее равенство вторых начальных моментов:  $M[\hat{X}(t)\hat{X}^T(t)] = M[X(t)\hat{X}^T(t)]$ . Отсюда, учитывая (7.103), получаем связь между ковариационными матрицами:

$$\text{cov}[\hat{X}(t), \hat{X}(t)] = \text{cov}[X(t), \hat{X}(t)], \quad (7.104)$$

где оператор ковариации  $\text{cov}$  определяется формулой

$$\text{cov}(Y, Z) = M\{(Y - M[Y])(Z - M[Z])^T\}, \quad (7.105)$$

Дифференцируя (7.102) по  $t$  и используя (7.51), получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\hat{x} - x) Q[p] dx = 0. \quad (7.106)$$

Здесь оператор  $Q$  согласно (7.52), (7.91) можно представить в виде

$$Q[p] = K[p] + L[p],$$

где оператор  $K$  содержит операции дифференцирования только по переменной  $x$ :

$$K[p] = -\frac{\partial^T}{\partial x} (ap) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (GG^T p) \right], \quad (7.107)$$

а оператор  $L$  — только по переменной  $\hat{x}$ :

$$L[p] = -\frac{\partial^T}{\partial \hat{x}} [(\varphi + \Psi h)p] + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} (\Psi R \Psi^T p) \right]. \quad (7.108)$$

Поэтому (7.106) можно переписать, используя (2.31):

$$\int_{\mathbb{R}^n} K^*[\hat{x} - x] p dx + \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{x} - x) L[p] dx = 0, \quad (7.109)$$

где в соответствии с (2.32) оператор  $K^*$ , сопряженный с (7.107), имеет вид

$$K^* = a^T \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ GG^T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right],$$

вследствие чего  $K^*[\hat{x} - x] = -a(t, x)$ . Тогда вместо (7.109), учитывая (7.93), получаем уравнение

$$-\bar{a}(t, \hat{x})s(t, \hat{x}) + \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{x} - x)L[\rho s] dx = 0, \quad (7.110)$$

где чертой сверху обозначено *условное математическое ожидание*:

$$\bar{a}(t, \hat{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} a(t, x)\rho(t, x|\hat{x}) dx = M[a(t, X(t)) | \hat{X}(t) = \hat{x}]. \quad (7.111)$$

Преобразуем теперь второе слагаемое в (7.110), вводя множитель  $(\hat{x} - x)$  под знак дифференциального оператора (7.108). Для этого воспользуемся тождествами:

$$(\hat{x} - x) \frac{\partial^T}{\partial \hat{x}} e = \left( \frac{\partial^T}{\partial \hat{x}} [e(\hat{x} - x)^T] \right)^T - e,$$

$$(\hat{x} - x) \operatorname{tr} \left[ \frac{\partial^T}{\partial \hat{x}^2} F \right] = \left\| \operatorname{tr} \left( \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} [(\hat{x}_i - x_i)F] \right) \right\|_{i=1, n} - \frac{1}{n} - 2 \left( \frac{\partial^T}{\partial \hat{x}} F \right)^T,$$

где  $e$ ,  $F$  — некоторые векторная и матричная функции переменных  $t$ ,  $x$ ,  $\hat{x}$ , причем  $F^T = F$ . Тогда получаем

$$(\hat{x} - x)L[\rho s] = (\varphi + \Psi h)\rho s - \left\{ \frac{\partial^T}{\partial \hat{x}} [(\varphi + \Psi h)(\hat{x} - x)^T \rho s + \Psi R \Psi^T \rho s] \right\}^T + \frac{1}{2} \left\| \operatorname{tr} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} [(\hat{x}_i - x_i) \Psi R \Psi^T \rho s] \right\} \right\|_{i=1, n}.$$

Проинтегрируем это выражение по  $dx$ , учитывая, что от  $x$  здесь зависят лишь функции  $h$ ,  $R$  и плотность  $\rho$ . Используя равенства (7.100), (7.101) и обозначение (7.111), находим

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\hat{x} - x)L[\rho s] dx = s(\varphi + \Psi \bar{h}) + \frac{1}{2} \left\| \operatorname{tr} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} [s \Psi (\hat{x}_i \bar{R} - \bar{x}_i \bar{R}) \Psi^T] \right\} \right\|_{i=1, n}.$$

Наконец, подставив последнее выражение в (7.110), получим искомую формулу для вектор-функции  $\varphi$ :

$$\varphi(t, \hat{x}) = \bar{a}(t, \hat{x}) - \Psi(t, \hat{x})\bar{h}(t, \hat{x}) + \zeta(t, \hat{x}), \quad (7.112)$$

где элементы вектор-функции  $\zeta$  определяются выражением

$$\zeta_i(t, \hat{x}) = \frac{1}{2s(t, \hat{x})} \operatorname{tr} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} [s \Psi (\bar{x}_i \bar{R} - \hat{x}_i \bar{R}) \Psi^T] \right\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.113)$$

Отметим два важных свойства функции  $\zeta$ : ее математическое ожидание и второй смешанный момент с оценкой  $\hat{X}$  равны нулю:

$$M[\zeta(t, \hat{X}(t))] = 0, \quad M[\hat{X}(t)\zeta^T(t, \hat{X}(t))] = 0. \quad (7.114)$$

Действительно, обозначая  $\Omega_i = \Psi(\bar{x}_i \bar{R} - \hat{x}_i \bar{R})\Psi^T$ , из (7.113) находим

$$M(\zeta_i) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} (s\Omega) d\hat{x}, \quad M(\hat{X}_i \zeta_i) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{x}_i \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} (s\Omega) d\hat{x}.$$

Первый из этих интегралов вычисляется непосредственно, а второй легко интегрируется по частям. Учитывая при этом, что плотность  $s(t, \hat{x})$  и ее производные по  $\hat{x}$  асимптотически стремятся к нулю по каждой из переменных  $\hat{x}_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  (см. (2.27), (2.33)), в результате получим (7.114).

Выражения (7.100), (7.112) определяют зависимость функций  $\Psi$ ,  $\varphi$  от условной  $\rho$  и маргинальной  $s$  плотностей распределения или, учитывая (7.93), (7.94), — от совместной плотности  $p$ . Следовательно, *нахождение структурных функций среднеквадратически локально оптимального конечномерного фильтра (7.90) сводится к вычислению плотности  $p$  путем решения задачи Коши для ФПК-уравнения (7.51) с коэффициентами сноса и диффузии (7.91), в которых неизвестные функции  $\Psi$ ,  $\varphi$  заменены выражениями (7.100), (7.112). В результате такой замены уравнение (7.51) становится интегродифференциальным и нелинейным.* Начальное же условие для него имеет вид (7.53), где величина  $z_0$  находится по (7.63).

Другим способом вычисления функций  $\Psi$ ,  $\varphi$  по формулам (7.100), (7.112) является определение зависящих от переменной  $\hat{x}$  условных математических ожиданий  $\bar{a}$ ,  $\bar{h}$ ,  $xh^T$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{x}_i \bar{R}$ , где

$$\bar{a}(t, \hat{x}) = M[a(t, X(t)) | \hat{X}(t) = \hat{x}],$$

а также маргинальной плотности  $s$  с помощью пошагового статистического моделирования уравнений объекта (7.1), измерителя (7.2) и фильтра (7.90) (см. разд. 7.2.3.). Однако при этом для каждого момента времени  $t$  необходимо использовать достаточно сложную процедуру типа построения гистограммы распределения системы случайных величин.

В заключение отметим, что *уравнение фильтра оптимальной структуры (7.90), используя полученные формулы (7.100), (7.112), можно записать в следующем виде:*

$$\frac{d_0 \hat{X}(t)}{dt} = \bar{a}(t, \hat{X}) + \zeta(t, \hat{X}) + S(t, \hat{X}) \bar{R}^{-1}(t, \hat{X}) [Y - \bar{h}(t, \hat{X})], \quad (7.115)$$

где

$$S(t, \hat{x}) = \overline{xh^T}(t, \hat{x}) - \hat{x} \bar{h}^T(t, \hat{x}).$$

В частном случае, если коэффициент при белом шуме измерителя (7.2) не зависит от  $x$ , то матрица  $R$  удовлетворяет условию (7.20). Тогда, учитывая (7.101), находим  $\bar{x}_i \bar{R} - \hat{x}_i \bar{R} = 0$ , откуда, согласно (7.113), получаем  $\zeta(t, \hat{x}) = 0$  и формула (7.112) существенно упрощается:

$$\varphi(t, \hat{x}) = \bar{a}(t, \hat{x}) - \Psi(t, \hat{x}) \bar{h}(t, \hat{x}).$$

В этом случае уравнение оптимального фильтра (7.115) становится подобным первому уравнению фильтра нормальной аппроксимации (7.31):

$$\frac{d_0 \hat{X}(t)}{dt} = \bar{a}(t, \hat{X}) + S(t, \hat{X})R^{-1}(t)[Y(t) - \bar{h}(t, \hat{X})].$$

### 7.3.4. Гауссовский фильтр субоптимальной структуры

Вследствие сложности точного определения структурных функций конечномерного фильтра актуальны приближенные способы их аналитического вычисления. Рассмотрим один из них, основанный на гауссовской аппроксимации совместной плотности вероятности:

$$p(t, x, \hat{x}) \approx N(x, \hat{x} | m(t), \mu(t), D(t), \Delta(t), \Phi(t)). \quad (7.116)$$

Параметры аппроксимирующей плотности нормального распределения  $N$  зададим равными соответствующим математическим ожиданиям и ковариациям аппроксимируемого распределения:

$$\begin{aligned} m(t) &= M[X(t)], & \mu(t) &= M[\hat{X}(t)], & D(t) &= \text{cov}[X(t), X(t)], \\ \Delta(t) &= \text{cov}[\hat{X}(t), \hat{X}(t)], & \Phi(t) &= \text{cov}[X(t), \hat{X}(t)]. \end{aligned} \quad (7.117)$$

При этом будем предполагать, что оценка  $\hat{X}(t)$  достаточно близка к оптимальной, следовательно, согласно (7.103), (7.104) справедливости связи

$$\mu(t) = m(t), \quad \Phi(t) = \Delta(t). \quad (7.118)$$

Тогда в соответствии с известными свойствами нормального закона распределения [28, 38, 46] маргинальная и условная плотности вероятности также аппроксимируются гауссовскими плотностями:

$$s(t, \hat{x}) \approx N(\hat{x} | \mu(t), \Delta(t)), \quad \rho(t, x | \hat{x}) \approx N[x | \nu(t, \hat{x}), \Gamma(t)],$$

причем параметры последней из них находятся по формулам

$$\nu(t, \hat{x}) = m(t) + \Phi(t)\Delta^{-1}(t)[\hat{x} - \mu(t)], \quad \Gamma(t) = D(t) - \Phi(t)\Delta^{-1}(t)\Phi^T(t).$$

Учитывая здесь связи (7.118), получаем  $\nu(t, \hat{x}) = \hat{x}$ , а также

$$\Gamma(t) = D(t) - \Delta(t) = \text{cov}[E(t), E(t)], \quad (7.119)$$

где  $E(t)$  — ошибка оценивания.

В справедливости последнего равенства легко убедиться непосредственно, используя определение ковариации (7.105). В результате имеем следующие приближения:

$$s(t, \hat{x}) \approx N(\hat{x} | m(t), \Delta(t)), \quad (7.120)$$

$$\rho(t, x | \hat{x}) \approx N(x | \hat{x}, \Gamma(t)). \quad (7.121)$$

Из (7.121) следует, что необходимые для определения структурных функций  $\varphi$ ,  $\Psi$  условные средние типа (7.111) аппроксимиру-



ются коэффициентами статистической линеаризации соответствующих нелинейностей объекта и измерителя:

$$\begin{aligned} \bar{a}(t, \hat{x}) &\approx \hat{a}(t, \hat{x}, \Gamma(t)) = M_N[a(t, X) | \hat{x}, \Gamma(t)] = \int_{R^n} a(t, x) N(x | \hat{x}, \Gamma(t)) dx, \\ \bar{h}(t, \hat{x}) &\approx \hat{h}(t, \hat{x}, \Gamma(t)), & \bar{R}(t, \hat{x}) &\approx \hat{R}(t, \hat{x}, \Gamma(t)), \\ \overline{(x - \hat{x}) h^T}(t, \hat{x}) &\approx \Gamma(t) H^T(t, \hat{x}, \Gamma(t)), & H(t, \hat{x}, \Gamma) &= \frac{\partial \hat{h}(t, \hat{x}, \Gamma)}{\partial \hat{x}}, \\ \overline{(x_i - \hat{x}_i) R}(t, \hat{x}) &\approx \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}(t) \frac{\partial \hat{R}(t, \hat{x}, \Gamma(t))}{\partial \hat{x}_j}. \end{aligned} \quad (7.122)$$

Здесь использованы обозначения (7.33) и свойства (2.96), (2.97).

Подставляя (7.122) в (7.100), получаем приближенное представление структурной матрицы усиления фильтра:

$$\Psi(t, \hat{x}) \approx \Gamma(t) H^T(t, \hat{x}, \Gamma(t)) \bar{R}^{-1}(t, \hat{x}, \Gamma(t)). \quad (7.123)$$

Аналогично из (7.112), (7.113), учитывая (7.120), находим аппроксимацию структурной вектор-функции:

$$\varphi(t, \hat{x}) \approx \hat{a}(t, \hat{x}, \Gamma(t)) - \Psi(t, \hat{x}) \hat{h}(t, \hat{x}, \Gamma(t)) + \Gamma(t) \sigma(t, \hat{x}). \quad (7.124)$$

Здесь элементы вектор-функции  $\sigma$  определяются формулой

$$\sigma_j(t, \hat{x}) = \frac{1}{2N} \text{tr} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left[ N \Psi \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{x}_j} \Psi^T \right] \right\}, \quad j = \overline{1, n},$$

где  $N = N(\hat{x} | m(t), \Delta(t))$ .

Последнее соотношение можно записать более подробно. Используя следующие выражения для производных нормальной плотности распределения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} N(\hat{x} | m, \Delta) &= -\Delta^{-1}(\hat{x} - m) N(\hat{x} | m, \Delta), \\ \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} N(\hat{x} | m, \Delta) &= [\Delta^{-1}(\hat{x} - m)(\hat{x} - m)^T \Delta^{-1} - \Delta^{-1}] N(\hat{x} | m, \Delta), \end{aligned}$$

получим формулу, не содержащую плотности  $N$ :

$$\sigma_j(t, \hat{x}) = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ (\Delta^{-1} \hat{x} \hat{x}^T \Delta^{-1} - \Delta^{-1}) \Xi_j - 2 \Delta^{-1} \hat{x} \frac{\partial^T}{\partial \hat{x}} \Xi_j + \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \Xi_j \right],$$

где  $\Xi_j(t, \hat{x}) = \Psi(t, \hat{x}) \frac{\partial \hat{R}(t, \hat{x}, \Gamma(t))}{\partial \hat{x}_j} \Psi^T(t, \hat{x})$ ,  $\hat{x} = \hat{x} - m(t)$ .

В результате уравнение оптимального фильтра (7.115) с по-

мощью (7.123), (7.124) заменяется уравнением субоптимального гауссовского фильтра:

$$\frac{d_0 \hat{X}(t)}{dt} \approx \hat{a}(t, \hat{X}, \Gamma) + \Gamma \sigma(t, \hat{X}) + \Gamma \mathbf{H}^T(t, \hat{X}, \Gamma) \hat{R}^{-1}(t, \hat{X}, \Gamma) [Y - \hat{h}(t, \hat{X}, \Gamma)]. \quad (7.125)$$

Если же матрица  $R$  удовлетворяет условию (7.20), то  $\hat{R}(t, \hat{x}, \Gamma) = R(t)$ , вследствие чего  $\sigma(t, \hat{x}) = 0$  и тогда уравнение субоптимального фильтра упрощается:

$$\frac{d_0 \hat{X}(t)}{dt} \approx \hat{a}(t, \hat{X}, \Gamma) + \Gamma \mathbf{H}^T(t, \hat{X}, \Gamma) R^{-1}(t) [Y - \hat{h}(t, \hat{X}, \Gamma)]. \quad (7.126)$$

По форме оно совпадает с первым уравнением фильтра нормальной аппроксимации (7.31). Однако вместо случайной матрицы  $P(t)$  апостериорной ковариации состояния объекта (или ошибки оценивания — см. (7.29)), для получения которой в (7.31) есть специальное уравнение, в (7.126) присутствует детерминированная матрица  $\Gamma(t)$  априорной ковариации ошибки (7.119).

**Пример 7.9.** Найти уравнение гауссовского фильтра для объекта (7.36) и измерителя (7.37).

□ Повторяя выкладки примера 7.3, получаем согласно (7.126) уравнение

$$\frac{d_0 \hat{X}(t)}{dt} \approx -\hat{X}(\hat{X}^2 + 3\Gamma) + 2\nu^{-2} \Gamma \hat{X}(Y - \hat{X}^2 - \Gamma), \quad (7.127)$$

которое с точностью до обозначений переменных совпадает с первым уравнением системы (7.38). ■

### 7.3.5. Нахождение параметров гауссовского фильтра

Для окончательного построения гауссовского фильтра (7.125) остается найти симметрическую  $n \times n$ -матрицу его параметров  $\Gamma(t)$ . Согласно (7.119) она может быть вычислена двумя способами.

Первый способ, являющийся достаточно точным, основан на пошаговом статистическом моделировании уравнений объекта (7.1), измерителя (7.2) и фильтра (7.125). Исключая из них промежуточную переменную  $Y(t)$ , получаем систему стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$d_0 \begin{bmatrix} X(t) \\ \hat{X}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t, X) \\ \varphi(t, \hat{X}) + \Psi(t, \hat{X})h(t, X) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} G(t, X) & 0 \\ 0 & \Psi(t, \hat{X})D(t, X) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW \\ dU \end{bmatrix},$$

где  $dU(t) = V(t)dt$ , а функции  $\varphi$ ,  $\Psi$  определяются выражениями (7.124), (7.123).

Эти уравнения могут быть решены численно с помощью одной из разностных схем, приведенных в разд. 3.1.2. При этом, получив

множества реализаций случайных величин  $X(t_k)$ ,  $\hat{X}(t_k)$  в тактовый момент времени  $t_k \geq 0$  и определив их первые моменты (7.117), целесообразно найти и моменты ошибки фильтрации  $E(t) = X(t) - \hat{X}(t)$  по формулам

$$\begin{aligned} m_\varepsilon(t) &= M[E(t)] \approx m(t) - \mu(t), \\ D_\varepsilon(t) &= \text{cov}[E(t), E(t)] \approx D(t) + \Delta(t) - \Phi(t) - \Phi^T(t). \end{aligned} \quad (7.128)$$

Тем самым одновременно с определением параметров фильтра осуществляется проверка справедливости равенств (7.118) и анализ точности фильтра. В частности,  $m_\varepsilon(t)$  характеризует смещение оценки, а показатель точности фильтра  $I(t)$  при квадратичной функции потерь находится по известным величинам (7.128) с помощью формулы (7.8).

Вторым способом является определение  $\Gamma(t)$  как разности  $D(t) - \Delta(t)$  путем приближенного нахождения параметров (7.117) стохастической дифференциальной системы объект — измеритель — фильтр с вектором сноса и матрицей диффузии (7.91) одним из методов, приведенных в разд. 3.2. Рассмотрим наиболее простой из них — метод гауссовского приближения.

Сначала получим точные уравнения для параметров (7.117) с помощью (3.11), (3.12). В данном случае эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{m} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} &= M \begin{bmatrix} a(t, X) \\ \varphi(t, \hat{X}) + \Psi(t, \hat{X})h(t, X) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \dot{D} & \dot{\Phi} \\ \dot{\Phi}^T & \dot{\Delta} \end{bmatrix} &= M \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\hat{X}} \\ \dot{\bar{X}} \end{bmatrix} [a^T \ (\varphi + \Psi h)^T] + \begin{bmatrix} a \\ \varphi + \Psi h \end{bmatrix} [\dot{\hat{X}}^T \ \dot{\bar{X}}^T] + \begin{bmatrix} GG^T & 0 \\ 0 & \Psi R \Psi^T \end{bmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

где  $\dot{\hat{X}} = X - m$ ,  $\dot{\bar{X}} = \hat{X} - \mu$ . Отсюда легко получаем

$$\dot{m} = M[a(t, X)], \quad (7.129)$$

$$D = M[\dot{\hat{X}} a^T(t, X) + a(t, X) \dot{\hat{X}}^T + G(t, X)G(t, X)].$$

Кроме того, используя свойство (7.11), где полагаем  $Y = \hat{X}$ , и учитывая выражение (7.112) для функции  $\varphi$ , находим

$$\dot{\mu} = M[\varphi + \Psi \bar{h}] = M[a(t, X)] + M[\zeta(t, \hat{X})],$$

$$\dot{\Delta} = M[\dot{\bar{X}}(\bar{a} + \zeta)^T + (\bar{a} + \zeta)\dot{\bar{X}}^T + \Psi \bar{R} \Psi^T],$$

$$\dot{\Phi} = M[\dot{\hat{X}}(\bar{a} + \zeta)^T + \bar{a}\dot{\hat{X}}^T + (\dot{\hat{X}}h^T - \dot{\hat{X}}\bar{h}^T)\Psi^T].$$

Здесь, как и в (7.111), обозначено  $\bar{a}(t, \hat{X}) = M[a(t, X) | \hat{X}]$ . Начальные условия для этих уравнений согласно (7.53), (7.63) имеют вид

$$m(0) = \mu(0) = m_0, \quad D(0) = D_0, \quad \Delta(0) = \Phi(0) = 0, \quad (7.130)$$

где  $m_0, D_0$  — математическое ожидание и ковариация начального состояния объекта (см. (7.35)) соответственно.

Убедимся в справедливости связей (7.118). Действительно, учитывая первое из свойств (7.114) функции  $\zeta$ , получаем  $\dot{m} = \dot{m}$ . Тогда вследствие равенства начальных условий для этих переменных имеем  $\mu(t) = m(t)$ . Учитывая это, а также второе из свойств (7.114), и используя (7.100), (7.101), находим  $\dot{\Phi} = \dot{\Delta}$ , откуда вследствие (7.130) имеем  $\Phi(t) = \Delta(t)$ . При этом

$$\dot{\Delta} = M[\dot{\hat{X}}a^T(t, X) + a(t, X)\dot{\hat{X}}^T + \Psi(t, \hat{X})R(t, X)\Psi(t, \hat{X})]. \quad (7.131)$$

В результате для определения параметров (7.117) совместной плотности распределения  $p(t, x, \hat{x})$  имеем связи (7.118) и уравнения (7.129), (7.131) с начальными условиями (7.130). Переходя теперь к гауссовскому приближению (7.116) и используя свойства (2.96), (7.11), окончательно находим

$$\begin{aligned} \dot{m} &\approx \hat{a}(t, m, D), \\ \dot{D} &\approx A(t, m, D)D + DA^T(t, m, D) + F(t, m, D), \\ \dot{\Delta} &\approx A(t, m, D)\Delta + \Delta A^T(t, m, D) + U(t, m, D, \Delta). \end{aligned} \quad (7.132)$$

Здесь функции  $\hat{a}, A, F$  определяются выражениями (7.32), тогда как функция  $U$  задается формулой

$$U(t, x, D, \Delta) = M_N[\Psi(t, \hat{X})\dot{R}(t, \hat{X}, D - \Delta)\Psi^T(t, \hat{X}) | m, \Delta], \quad (7.133)$$

где  $M_N$  — оператор усреднения по гауссовской плотности (7.120).

Для гауссовского фильтра формулу (7.133) с помощью (7.123) можно записать в следующем виде:

$$U(t, m, D, \Delta) \approx \Gamma M_N[H^T(t, \hat{X}, \Gamma)\hat{R}^{-1}(t, \hat{X}, \Gamma)H(t, \hat{X}, \Gamma) | m, \Delta] \Gamma, \quad (7.134)$$

где  $\Gamma = D - \Delta$ .

**Пример 7.10.** Найти уравнения для определения параметров  $\Gamma(t)$  гауссовского фильтра (7.127), полученного для условий примера 7.3.

□ Используем приведенные в примере 7.3 выражения для функций  $R, \hat{a}, A, F, H$ . Тогда из (7.134) имеем

$$U(t, m, D, \Delta) \approx 4\nu^{-2}\Gamma^2 M_N[\hat{X}^2 | m, \Delta] = 4\nu^{-2}\Gamma^2(m^2 + \Delta),$$

а уравнения (7.132) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{m} &\approx -m^3 - 3mD, \quad \dot{D} \approx (1 - 6D)(m^2 + D), \\ \dot{\Delta} &\approx -6\Delta(m^2 + D) + 4\nu^{-2}(D - \Delta)^2(m^2 + \Delta). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 7.3.6. Линеаризованный фильтр

Рассмотрим более простой способ приближенного аналитического определения структурных функций конечномерного фильтра, позволяющий обойтись без вычисления коэффициентов статистической линеаризации (7.122) и не использующий гауссовской аппроксимации (7.116).

Предположим, что нелинейности объекта (7.1) и измерителя (7.2) дифференцируемы, а ошибка оценивания  $X(t) - \hat{X}(t)$  достаточно мала. Тогда уравнения объекта и измерителя можно линеаризовать в окрестности текущей оценки  $\hat{X}(t)$ :

$$\begin{aligned} d_0 X(t) &\approx [a(t, \hat{X}) + a_x(t, \hat{X})(X - \hat{X})] dt + G(t, \hat{X}) d_0 W, \\ Y(t) &\approx h(t, \hat{X}) + h_x(t, \hat{X})(X - \hat{X}) + D(t, \hat{X}) V. \end{aligned} \quad (7.135)$$

В этом случае необходимые для нахождения структурных функций  $\varphi$ ,  $\Psi$  условные средние типа (7.111) при любой плотности  $\rho$  аппроксимируются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \bar{a}(t, \hat{x}) &\approx a(t, \hat{x}), & \bar{h}(t, \hat{x}) &\approx h(t, \hat{x}), & \bar{R}(t, \hat{x}) &\approx R(t, \hat{x}), \\ \overline{(x - \hat{x}) h^T(t, \hat{x})} &\approx \Gamma(t) h_x^T(t, \hat{x}), & \overline{(x_i - \hat{x}_i) R(t, \hat{x})} &\approx 0. \end{aligned}$$

В результате из (7.100), (7.112), (7.113) получаем

$$\Psi(t, \hat{x}) \approx \Gamma(t) h_x^T(t, \hat{x}) R^{-1}(t, \hat{x}), \quad \varphi(t, \hat{x}) \approx a(t, \hat{x}) - \Psi(t, \hat{x}) h(t, \hat{x}),$$

и тогда уравнение субоптимального линеаризованного фильтра имеет вид

$$\frac{d_0 \hat{X}(t)}{dt} \approx a(t, \hat{X}) + \Gamma(t) h_x^T(t, \hat{X}) R^{-1}(t, \hat{X}) [Y(t) - h(t, \hat{X})]. \quad (7.136)$$

При выполнении условия (7.20) оно совпадает по форме с первым уравнением обобщенного фильтра Калмана-Бьюси (7.39).

В приведенных соотношениях матрица  $\Gamma(t)$  по-прежнему определяется выражением (7.119) и может быть вычислена теми же способами, что и для гауссовского фильтра. При этом лучше использовать точные уравнения объекта и измерителя.

Если же для нахождения  $\Gamma(t)$  применяются уравнения гауссовского приближения (7.132), то и здесь можно достичь упрощения за счет уменьшения точности. Действительно, вследствие линеаризации объекта и измерителя (7.135) вместо (7.132), (7.133) получаем

$$\dot{m} \approx a(t, m),$$

$$\dot{D} \approx a_x(t, m) D + D a_x^T(t, m) + M_N [G(t, X) G^T(t, X) | m, D], \quad (7.137)$$

$$\dot{\Delta} \approx a_x(t, m) \Delta + \Delta a_x^T(t, m) + \Gamma M_N [h_x(t, \hat{X}) R^{-1}(t, \hat{X}) h_x^T(t, \hat{X}) | m, \Delta] \Gamma.$$

В результате отпадает необходимость вычислять коэффициенты статистической линеаризации  $\hat{a}$ ,  $A$ ,  $H$ ,  $\hat{R}$ .

Однако в этой системе первое уравнение (для  $m$ ) не зависит от остальных и является уравнением невозмущенного движения объекта (7.1). Поэтому упрощение (7.137) по сравнению с (7.132) допустимо лишь при весьма малых возмущениях объекта.

**Пример 7.11.** Построить линеаризованный фильтр для условий примера 7.3.

□ По (7.136) легко находим

$$\frac{d_0 \hat{X}(t)}{dt} \approx -\hat{X}^3 + 2\nu^{-2} \Gamma \hat{X} (Y - \hat{X}^2),$$

что с точностью до обозначений совпадает с первым уравнением фильтра из примера 7.4. Для определения параметра  $\Gamma(t)$  можно использовать систему (7.132), которая в данном случае совпадает с приведенной в примере 7.10, или менее точную систему (7.137), имеющую вид

$$\begin{aligned} \dot{m} &\approx -m^3, & D &\approx -6m^2 D + m^2 + D, \\ \dot{\Delta} &\approx -6m^2 \Delta + 4\nu^{-2} (D - \Delta)^2 (m^2 + \Delta). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 7.3.7. Линейно-гауссовский случай

Пусть объект и измеритель являются линейными (7.43), а начальное состояние объекта — гауссовским (7.44). Покажем, что в этом случае нелинейный конечномерный фильтр оптимальной структуры превращается в линейный фильтр Калмана-Бьюси.

Действительно, из (7.43), (7.101) следует, что условные средние типа (7.111) при любой условной плотности  $\rho$  имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{a}(t, \hat{x}) &= A(t) \hat{x} + i(t), & \bar{h}(t, \hat{x}) &= C(t) \hat{x} + j(t), & \bar{R}(t, \hat{x}) &= R(t), \\ \overline{(x - \hat{x}) h^T}(t, \hat{x}) &= \Gamma(t, \hat{x}) C^T(t), & \overline{(x_1 - \hat{x}_1) R}(t, x) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\Gamma(t, \hat{x})$  — матрица условной ковариации

$$\Gamma(t, \hat{x}) = \text{cov}[X(t), X(t) | \hat{X}(t) = \hat{x}] = \text{cov}[E(t), E(t) | \hat{X}(t) = \hat{x}],$$

причем ее начальное значение, вследствие (7.44) и равенства  $\hat{X}(0) = m_0$ , совпадает с ковариацией начального состояния  $\Gamma(0, \hat{x}) = D_0$ . Тогда из (7.100), (7.112) получаем следующие структурные функции локально оптимального фильтра:

$$\Psi(t, \hat{x}) = \Gamma(t, \hat{x}) C^T(t) R^{-1}(t), \tag{7.138}$$

$$\varphi(t, \hat{x}) = A(t) \hat{x} + i(t) - \Psi(t, \hat{x}) [C(t) \hat{x} + j(t)].$$

Этот фильтр является нелинейным лишь из-за зависимости матрицы  $\Gamma$  от  $\hat{x}$ .

Предположим, что  $\Gamma(t, \hat{x})$  не зависит от  $\hat{x}$ :

$$\Gamma(t, \hat{x}) = \Gamma(t). \quad (7.139)$$

Тогда фильтр линеен и, очевидно, совместная плотность  $p(t, x, \hat{x})$  является гауссовской:

$$p(t, x, \hat{x}) = N(x, \hat{x} | m(t), \mu(t), D(t), \Delta(t), \Phi(t)). \quad (7.140)$$

Ее параметры (7.117), связанные соотношениями (7.118), можно найти из уравнений гауссовского приближения (7.132). Последние становятся теперь точными, совпадая с известными уравнениями метода моментов Дункана (см. пример 3.2):

$$\begin{aligned} \dot{m} &= A(t)m + i(t), \\ \dot{D} &= A(t)D + DA^T(t) + G(t)G^T(t), \\ \dot{\Delta} &= A(t)\Delta + \Delta A^T(t) + \Gamma(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)\Gamma(t). \end{aligned} \quad (7.141)$$

Из (7.140) следует, что условная плотность  $\rho(t, x | \hat{x})$  также является гауссовской, т.е. приближение (7.121) становится точным, а ее параметр снова определяется по формуле  $\Gamma(t) = D(t) - \Delta(t)$ . Дифференцируя последнее выражение по  $t$  и учитывая (7.141), получаем для  $\Gamma(t)$  замкнутое уравнение

$$\dot{\Gamma} = A(t)\Gamma + \Gamma A^T(t) + G(t)G^T(t) - \Gamma C^T(t)R^{-1}(t)C(t)\Gamma,$$

которое совпадает с уравнением Риккати (7.46). Уравнение же локально оптимального конечномерного фильтра, вследствие (7.138), (7.139) имеет вид

$$\dot{\hat{X}} = A(t)\hat{X} + i(t) + \Gamma(t)C^T(t)R^{-1}(t)[Y(t) - C(t)\hat{X} - j(t)],$$

что совпадает с уравнением (7.45) для оценки линейного фильтра Калмана-Бьюси.

Таким образом, предположив  $\Gamma(t, \hat{x}) = \Gamma(t)$ , мы показали, что в данном линейно-гауссовском случае среди нелинейных локально оптимальных конечномерных фильтров содержится линейный фильтр Калмана-Бьюси. Но последний является абсолютно оптимальным для этого случая, т.е. любой другой фильтр, в том числе нелинейный, будет не лучше. Тем самым доказаны как справедливость равенства (7.139), так и *превращение в линейно-гауссовском случае фильтра оптимальной структуры в линейный фильтр Калмана-Бьюси.*

### 7.3.8. Уточнение фильтров субоптимальной структуры

Линеаризованный и гауссовский фильтры являются лишь субоптимальными. Поэтому обеспечиваемая ими точность оценивания может

оказаться недостаточной. Это свидетельствует о несправедливости тех приближений, с помощью которых получены эти фильтры. Более точную структуру конечномерного фильтра можно получить с помощью *более тонких аппроксимаций*, например, приближая совместную плотность  $p(t, x, \hat{x})$  отрезком ряда Грама-Шарлье (3.10). При этом размерность фильтра не изменится, а лишь усложнится вид его структурных функций  $\varphi(t, \hat{x})$ ,  $\Psi(t, \hat{x})$ .

Другим способом уточнения линеаризованного и гауссовского фильтров является *вторичная оптимизация* их параметров методами, приведенными в разд. 7.2. Например, в уравнение линеаризованного фильтра (7.136) параметр  $\Gamma(t)$  входит линейно. Поэтому на основе этого фильтра можно построить *регрессионный* фильтр (7.50), положив

$$\xi(t, \hat{x}) = \begin{bmatrix} a(t, \hat{x}) \\ h_x^T(t, \hat{x})R^{-1}(t, \hat{x})h(t, \hat{x}) \end{bmatrix}, \quad \theta(t, \hat{x}) = h_x^T(t, \hat{x})R^{-1}(t, \hat{x}).$$

Вычисление параметров  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$  этого фильтра по точным формулам (7.74), (7.76) позволит получить меньшую ошибку оценивания, чем у линеаризованного фильтра с параметром  $\Gamma(t)$ , определенным по уравнениям гауссовского приближения (7.132).

В отличие от этого в уравнение *гауссовского* фильтра (7.125) параметр  $\Gamma(t)$  входит нелинейно, что не мешает и для данного случая построить регрессионный фильтр (7.50), полагая

$$\xi(t, \hat{x}) = \begin{bmatrix} \hat{a}(t, \hat{x}, \Gamma(t)) \\ H^T(t, \hat{x}, \Gamma(t))\hat{R}^{-1}(t, \hat{x}, \Gamma(t))\hat{h}(t, \hat{x}, \Gamma(t)) \end{bmatrix},$$

$$\theta(t, \hat{x}) = H^T(t, \hat{x}, \Gamma(t))\hat{R}^{-1}(t, \hat{x}, \Gamma(t)),$$

если считать здесь  $\Gamma(t)$  известной ковариационной матрицей (7.119). Однако больше степеней свободы, а следовательно, и больший эффект по точности даст построение *нерегрессионного* фильтра (7.49), отличающегося от гауссовского фильтра наличием дополнительных матриц усиления  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ ,  $\alpha_3(t)$ ,  $\beta(t)$  и вектора смещения  $\gamma(t)$ :

$$x(t, \hat{x}, \tau) = \alpha_1 \hat{a}(t, \hat{x}, \Gamma) + \alpha_2 \sigma(t, \hat{x}, \Gamma) + \alpha_3 H^T(t, \hat{x}, \Gamma)\hat{R}^{-1}(t, \hat{x}, \Gamma)\hat{h}(t, x, \Gamma) + \gamma,$$

$$\Lambda(t, \hat{x}, \tau) = \beta H^T(t, \hat{x}, \Gamma)\hat{R}^{-1}(t, \hat{x}, \Gamma).$$

Всю совокупность параметров этого фильтра

$$\tau(t) = \{\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \beta(t), \gamma(t), \Gamma(t)\}$$

следует определять из условия локальной оптимальности (7.66).



## ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Высшая школа, 1989.
2. Брайсон А., Хо-Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972.
3. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. — М.: Наука, 1982.
4. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1974.
5. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие. — Киев: Наукова думка, 1986.
6. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. — М.: Наука, 1985.
7. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз, 1963.
8. Задачник по теории автоматического управления: Учебное пособие для вузов / Н.И.Андреев, С.К.Васильев, В.Н.Захаров и др.; Под ред. А.С.Шаталова. — М.: Энергия, 1979.
9. Иванов Н.М., Мартынов А.И. Движение космических летательных аппаратов в атмосфере планет. — М.: Наука, 1985.
10. Казakov И.Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. — М.: Наука, 1975.
11. Казakov И.Е. Статистические методы проектирования систем управления. — М.: Машиностроение, 1969.
12. Климов Д.М., Руденко В.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики. — М.: Наука, 1989.
13. Колосов Г.Е. Синтез оптимальных автоматических систем при случайных возмущениях. — М.: Наука, 1984.
14. Красовский А.А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. — М.: Наука, 1974.
15. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.
16. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977.
17. Леви Б.Р., Шварц В. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. — М.: Радио и связь, 1985.
18. Летов А.М. Динамика полета и управление. — М.: Наука, 1969.
19. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований. — М.: Советское радио, 1978.

20. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981.
21. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко — М.: Наука, 1983.
22. Овсянников Д.А. Математические методы управления пучками. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
23. Основы автоматического регулирования / Под ред. В.В.Солодовникова. — М.: Машгиз, 1954.
24. Пантелеев А.В., Семенов В.В. Синтез оптимальных систем управления при неполной информации. — М.: Изд-во МАИ, 1992.
25. Пантелеев А.В., Летова Т.А., Борталковский А.С. Оптимальное управление в примерах и задачах: Учебное пособие. — М.: Изд-во МАИ, 1992.
26. Парашев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. — М.: Сов. радио, 1976.
27. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления: Учебное пособие. — М.: Наука, 1986.
28. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. — М.: Наука, 1985.
29. Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. — М.: Наука, 1976.
30. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. — М.: Наука, 1978.
31. Руденко Е.А. Оптимальная структура нелинейных фильтров конечного порядка. — Препринт. — М.: Изд-во МАИ, 1989.
32. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
33. Саульев В.К. Численное решение уравнений случайных процессов: Учебное пособие. — М.: Изд-во МАИ, 1989.
34. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. — М.: Связь, 1976.
35. Семенов В.В. Формы математического описания нелинейных систем: Учебное пособие. — М.: Изд-во МАИ, 1980.
36. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. — М.: Наука, 1974.
37. Сотскова И.Л. Применение аппарата обобщенной характеристической функции к анализу стохастических систем управления ЛА // Задачи стохастического управления: Тем. сб. науч. тр. / М., МАИ, 1986.
38. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С.Королюк, Н.И.Портенко, А.В.Скорород, А.Ф.Турбин — М.: Наука, 1985.

39. Статистическая динамика и оптимизация управления летательных аппаратов / А.А.Лебедев, В.Т.Бобронников, М.Н.Красильщиков, В.В.Малышев — М.: Машиностроение, 1985.

40. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.

41. Тихонов В.И., Кульман Н.К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. — М.: Советское радио, 1975.

42. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. — М.: Радио и связь, 1983.

43. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.

44. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — М.: Мир, 1978.

45. Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. — М.: Наука, 1978.

46. Ширяев А.Н. Вероятность. — М.: Наука, 1980.

**Вариационная производная, операции  
с вариационными производными**

Пусть дана функция  $S(t, p(\xi)) : T' \times P \rightarrow R^1$ , которая является функцией от  $t$  и функционалом от  $p(\xi)$ . Рассмотрим ее значение при фиксированном  $t$  на функции  $p(\xi) + \delta p(\xi)$ , где вариация  $\delta p(\xi)$  равна нулю всюду, кроме некоторой окрестности  $\Delta(x)$  точки  $x$  множества  $B \subset R^n$ .

*Вариационной (функциональной) производной* функционала  $S(t, p(\xi))$  по функции  $p(\xi)$  в точке  $x$  называется предел:

$$\frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} = \lim_{\substack{\int_{\Delta(x)} \delta p(\xi) d\xi \rightarrow 0 \\ \text{mes} \Delta(x) \rightarrow 0}} \frac{S(t, p(\xi) + \delta p(\xi)) - S(t, p(\xi))}{\int_{\Delta(x)} \delta p(\xi) d\xi},$$

если он существует, не зависит от вида  $\delta p(\xi)$ , от закона стремления  $\int_{\Delta(x)} \delta p(\xi) d\xi$  к нулю и способа стягивания к нулю  $\text{mes} \Delta(x)$ .

Вариационная производная является функционалом от  $p(\xi)$  и функцией от  $t$  и  $x$ . Приведем также эквивалентное определение.

Если вариация функционала  $S(t, p(\xi))$  может быть представлена в виде

$$\delta S(t, p(\xi)) = \int_B \gamma(t, x, p(\xi)) \delta p(x) dx,$$

то функционал  $\gamma(t, x, p(\xi))$  называется *вариационной производной* от  $S(t, p(\xi))$  по  $p(\xi)$  в точке  $x$ , т.е.

$$\frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} = \gamma(t, x, p(\xi)).$$

Примеры вычисления вариационных производных.

1. Если  $S(t, p(\xi)) = \int_B a(t, \xi) p(\xi) d\xi$  - линейный функционал, где  $a(t, \xi)$  - известная функция, то

$$\frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} = a(t, x). \quad (\text{П.1.1})$$

2. Если  $S(t, p(\xi)) = \int_B \int_B a(t, \xi, \eta) p(\xi) p(\eta) d\xi d\eta$  - квадратичный функционал, где  $a(t, \xi, \eta) = a(t, \eta, \xi)$ , то

$$\frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} = 2 \int_B a(t, x, \xi) p(\xi) d\xi; \quad \frac{\delta^2 S(t, p(\xi))}{\delta p(x_1) \delta p(x_2)} = 2a(t, x_1, x_2).$$

3. Если  $F[y]$  – функция одной переменной, то

$$\frac{\delta \{F[\Phi(p(\xi))]\}}{\delta p(x)} = F'[\Phi(p(\xi))] \frac{\delta \Phi(p(\xi))}{\delta p(x)}. \quad (\text{П.1.2})$$

### Приложение 2

#### Некоторые операции с функциями и матрицами

$$1. \frac{\partial (Ax)}{\partial x} = A^T. \quad (\text{П.2.1})$$

$$2. \frac{\partial (x^T Ax)}{\partial x} = Ax + A^T x. \quad (\text{П.2.2})$$

$$3. (AB)^T = B^T A^T. \quad (\text{П.2.3})$$

$$4. x^T Ax = 0, \text{ если } A + A^T = 0. \quad (\text{П.2.4})$$

$$5. x^T A = (1/2)x^T A + (1/2)A^T x. \quad (\text{П.2.5})$$

6. Пусть  $\text{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$  – след матрицы  $A$  размера  $n \times n$ , тогда

$$\frac{\partial}{\partial B} \text{tr}(AB^T) = A, \quad \frac{\partial}{\partial B} \text{tr}(ABNB^T) = ABN + A^T B N^T. \quad (\text{П.2.6})$$

7. Пусть  $f(t, x)$  – функция скалярного аргумента  $t$  и  $n$ -мерного вектора  $x$ , тогда

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = f_x = \nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f(t, x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad (\text{П.2.7})$$

$$\frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} = \nabla \nabla^T f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.2.8})$$

8. Пусть  $\Psi(t, x) = (\psi_1(t, x), \dots, \psi_m(t, x))^T$  – вектор-функция скалярного аргумента  $t$  и  $n$ -мерного вектора  $x$ , тогда

$$\frac{\partial \Psi(t, x)}{\partial x} = (\nabla \Psi^T)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.2.9})$$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие</i> . . . . .	3
<b>1. Описание и анализ нелинейных детерминированных систем</b> . . . . .	<b>5</b>
1.1. Описание нелинейных детерминированных систем . . . . .	5
1.1.1. Описание нелинейных систем дифференциальными уравнениями . . . . .	5
1.1.2. Описание систем с одним нелинейным элементом . . . . .	9
1.2. Анализ выходных процессов . . . . .	12
1.3. Анализ поведения нелинейных систем на фазовой плоскости . . . . .	16
1.3.1. Построение фазовых траекторий . . . . .	16
1.3.2. Построение фазового портрета методом изоклин . . . . .	20
1.3.3. Анализ устойчивости систем управления на фазовой плоскости . . . . .	23
1.4. Анализ абсолютной устойчивости . . . . .	31
1.5. Анализ автоколебаний систем управления методом гармонической линеаризации . . . . .	37
1.5.1. Гармоническая линеаризация нелинейных элементов . . . . .	37
1.5.2. Анализ наличия автоколебаний . . . . .	40
<b>2. Описание нелинейных стохастических систем</b> . . . . .	<b>45</b>
2.1. Конструктивные способы описания стохастических систем и процессов . . . . .	45
2.1.1. Постановка задачи . . . . .	45
2.1.2. Характеристический функционал . . . . .	46
2.1.3. Многоточечные плотности распределения . . . . .	48
2.1.4. Числовые характеристики . . . . .	56
2.2. Стохастические дифференциальные системы . . . . .	71
2.2.1. Описание стохастических систем дифференциальными уравнениями . . . . .	71
2.2.2. Стохастические интегралы и дифференциалы . . . . .	74
2.2.3. Стохастические дифференциальные уравнения и их связь с уравнениями Колмогорова . . . . .	80
2.3. Стохастические интегральные системы с нелинейностями . . . . .	84
2.3.1. Описание стохастических систем интегральными уравнениями Гаммерштейна–Вольтерра . . . . .	84
2.3.2. Статистическая линеаризация нелинейностей . . . . .	87
2.3.3. Корреляционное описание систем . . . . .	90
2.3.4. Уравнения для кумулянтных функций . . . . .	93
<b>3. Анализ выходных процессов нелинейных стохастических систем</b> . . . . .	<b>99</b>
3.1. Статистическое моделирование систем . . . . .	99
3.1.1. Метод статистических испытаний . . . . .	99
3.1.2. Методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений . . . . .	101

3.2. Решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова . . .	104
3.2.1. Метод квазимоментов . . . . .	104
3.2.2. Метод гауссовского приближения . . . . .	110
3.2.3. Проекционно-сеточный метод . . . . .	111
3.2.4. Спектральный метод . . . . .	115
3.3. Решения интегральных уравнений метода статистической линеаризации . . . . .	119
3.3.1. Применение преобразования Фурье . . . . .	119
3.3.2. Применение спектрального преобразования . . . . .	121
<b>4. Синтез оптимальных нелинейных детерминированных систем.</b>	<b>123</b>
4.1. Принципы формирования оптимальных систем управления.	123
4.1.1. Функциональная схема оптимальных систем . . . . .	123
4.1.2. Принцип расширения . . . . .	125
4.2. Постановка задачи . . . . .	126
4.3. Достаточные условия оптимальности . . . . .	129
4.4. Соотношения для определения оптимального управления . . . . .	132
4.5. Предельные случаи информированности о векторе состояния	136
4.5.1. Принцип максимума . . . . .	136
4.5.2. Уравнение Беллмана . . . . .	138
4.6. Оптимальное управление детерминированными системами с подвижным правым концом траекторий. . . . .	147
4.6.1. Постановка задачи . . . . .	147
4.6.2. Достаточные условия оптимальности . . . . .	147
4.6.3. Соотношения для определения оптимального управ- ления . . . . .	149
4.6.4. Предельные случаи информированности о векторе состояния . . . . .	153
4.6.5. Пример определения оптимального программного управления ЛА . . . . .	160
4.7. Синтез оптимальных линейных регуляторов с неполной обратной связью . . . . .	164
4.7.1. Постановка задачи . . . . .	164
4.7.2. Соотношения для определения оптимального управ- ления . . . . .	164
4.7.3. Предельные случаи информированности о векторе состояния . . . . .	166
<b>5. Синтез оптимальных нелинейных стохастических систем.</b>	<b>170</b>
5.1. Постановка задачи . . . . .	170
5.2. Достаточные условия оптимальности . . . . .	176
5.3. Соотношения для определения оптимального управления . . . . .	184
5.3.1. Общий случай минимизируемого функционала . . . . .	184
5.3.2. Случай линейного по плотности вероятности функ- ционала . . . . .	188

5.4. Предельные случаи информированности о векторе состояния	190
5.4.1. Стохастический принцип максимума	190
5.4.2. Уравнение Беллмана	200
5.5. Оптимальное управление стохастическими системами с заданным временем окончания процесса	206
5.5.1. Задача поиска наилучшего момента окончания процесса	206
5.5.2. Задача со случайным моментом окончания процесса	207
5.6. Синтез оптимальных линейных регуляторов с неполной обратной связью	214
5.6.1. Постановка задачи	214
5.6.2. Соотношения для определения оптимального управления	215
5.6.3. Предельные случаи информированности о векторе состояния	221
6. Синтез оптимальных детерминированных систем при неопределенности задания начальных условий	226
6.1. Синтез оптимального в среднем управления пучками траекторий	226
6.1.1. Постановка задачи	226
6.1.2. Соотношения для определения оптимального в среднем управления	231
6.1.3. Предельные случаи информированности о векторе состояния	233
6.1.4. Пример определения оптимального в среднем управления ЛА	239
6.2. Синтез оптимального гарантирующего управления пучками траекторий	243
6.2.1. Постановка задачи	243
6.2.2. Достаточные условия оптимальности	245
6.2.3. Соотношения для определения оптимального гарантирующего управления	247
6.2.4. Предельные случаи информированности о векторе состояния	249
6.2.5. Пример определения оптимального гарантирующего управления ЛА	255
7. Синтез нелинейных стохастических систем наблюдения	261
7.1. Абсолютно оптимальные фильтры	261
7.1.1. Постановка задачи определения оценки состояния	261
7.1.2. Связь оценки с апостериорной плотностью	263
7.1.3. Уравнения для апостериорной плотности	265
7.1.4. Фильтр нормальной аппроксимации	267
7.1.5. Обобщенный фильтр Калмана-Бьюси	271
7.1.6. Анализ точности субоптимальных фильтров	272
7.1.7. Линейный фильтр Калмана-Бьюси	275



7.2. Оптимизация параметров конечномерных фильтров . . .	276
7.2.1. Постановка задачи синтеза параметров фильтра . . .	276
7.2.2. Синтез параметров фильтра, оптимального всюду . . .	278
7.2.3. Выбор параметров локально оптимального фильтра . . .	281
7.2.4. Условно оптимальный фильтр Пугачева . . . . .	283
7.2.5. Линейный фильтр для линейной системы . . . . .	286
7.3. Оптимизация структуры конечномерных фильтров . . .	289
7.3.1. Постановка задачи синтеза структуры фильтра . . .	289
7.3.2. Структура локально оптимального фильтра . . . . .	289
7.3.3. Случай квадратичной функции потерь . . . . .	291
7.3.4. Гауссовский фильтр субоптимальной структуры . . .	295
7.3.5. Нахождение параметров гауссовского фильтра . . .	297
7.3.6. Линейризованный фильтр . . . . .	300
7.3.7. Линейно-гауссовский случай . . . . .	301
7.3.8. Уточнение фильтров субоптимальной структуры . . .	302
Литература . . . . .	304
Приложение 1. Вариационная производная, операции с вариационными производными . . . . .	307
Приложение 2. Некоторые операции с функциями и матрицами . . .	308