



издательство

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

А.Н. ИЛЬИНА
А.Я. КРАСИНСКИЙ

ОСНОВЫ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ

Москва • 2026

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)**

А.Н. Ильина, А.Я. Красинский

**ОСНОВЫ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ
С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ**

Учебное пособие

Утверждено
на заседании редсовета
18 ноября 2024 г.

Москва
Издательство МАИ
2026

Ильина А.Н., Красинский А.Я. Основы стабилизации систем с геометрическими связями: Учебное пособие. — М.: Изд-во МАИ, 2026. — 84 с.: ил.

Учебное пособие представляет собой краткое изложение курса лекций по дисциплине «Стабилизация нелинейных систем при неполной информации». Студентам предлагается ознакомиться с основами теории устойчивости, теории критических случаев и новым методом математического моделирования и стабилизации нелинейных голономных систем, основанным на применении уравнений Шульгина. Пособие содержит подробный разбор практических примеров, в частности, пример построения математической модели динамики системы Ball and Beam как системы с нелинейной геометрической связью.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 01.03.04 «Прикладная математика» и изучающих дисциплину «Стабилизация нелинейных систем при неполной информации».

Рецензенты:

кафедра «Прикладная математика» ВолгГТУ (зав. кафедрой канд. пед. наук, доцент *И.А. Тарасова*);

канд. техн. наук, доцент, руководитель управления перспективных технологий АО «Вертолеты России» *Я.В. Калинин*

ВВЕДЕНИЕ

Теория устойчивости — это дисциплина, изучающая влияние возмущений на движение материальной системы. С устойчивостью и стабилизацией положений равновесия и движений различных объектов и систем мы сталкиваемся постоянно в повседневной жизни (рис. В.1).

Разница между устойчивым и неустойчивым положениями равновесия хорошо видна на следующем простом примере. Рассмотрим плоский математический маятник: небольшой шарик массы m прикреплён к нерастяжимому стержню длины l . Второй конец стержня соединён с шарниром. Пусть шарик находится в нижнем вертикальном положении. Тогда, даже если немного отклонить его в сторону, маятник через некоторое время вернётся в начальное вертикальное положение (рис. В.2). Нижнее вертикальное положение маятника является *устойчивым*. А вот если даже совсем немного толкнуть маятник, когда он находится в верхнем вертикальном положении, обратно он уже не вернётся (рис. В.3). Верхнее вертикальное положение равновесия маятника является *неустойчивым*.



Рис. В.1. Балансировка каменных пирамид. Кисловодск, нижний парк

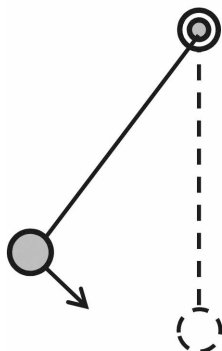


Рис. В.2. Устойчивое положение равновесия маятника

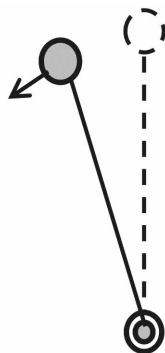


Рис. В.3. Неустойчивое положение равновесия маятника

С устойчивостью и стабилизацией движения сталкивается, например, велосипедист, едущий по дороге, человек, едущий на роликовых коньках или лыжах и т.д. Значение теории устойчивости в различных областях науки и техники трудно переоценить, ведь именно устойчивость определяет способность системы сохранять движение по заданной траектории с заданной ориентацией в пространстве, несмотря на внешние воздействия. Поэтому её понятия и принципы широко используются в авиастроении, космической технике, автомобилестроении, робототехнике и других областях.

Конечно, для того, чтобы конструируемая система (а мы, в первую очередь, будем иметь в виду механические системы) была работоспособной, необходимо учесть ещё многие важнейшие аспекты, о некоторых из них также пойдёт речь в пособии. Но начнётся всё с теории устойчивости.

Первыми задачами по исследованию устойчивости равновесия занимались ещё Аристотель и Архимед. Э. Торричелли (1608–1647) в 1644 году вывел критерий устойчивости равновесия системы тел, находящихся под действием силы тяжести. Ж.Л. Лагранж (1736–1813) в 1788 г. обобщил принцип Торричелли и доказал теорему о достаточных условиях устойчивости равновесия произвольных консервативных систем. Строгое доказательство его теоремы дал Л. Дирихле (1805–1859). Отдельными вопросами теории устойчивости занима-

лись Н.Е. Жуковский (1847–1821), Э.Д. Раус (1831–1907) и другие известные математики и механики. Однако как наука общая теория устойчивости была создана выдающимся русским математиком и механиком Александром Михайловичем Ляпуновым (1857–1918). Все исследования по устойчивости до Ляпунова относились к конкретным классам механических систем, не было единого понятия об устойчивости: каждый учёный определял устойчивость исследуемой системы по-своему. И только А.М. Ляпунову в его докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения» (1892) удалось создать единую стройную систему определений, понятий и теорем, ставших фундаментом общей теории устойчивости.

Теория А.М. Ляпунова развивается во всём мире и по сей день. В России труды А.М. Ляпунова по теории устойчивости после его смерти продолжил Николай Гурьевич Четаев. Он стал основателем советской школы по теории устойчивости.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УСТОЙЧИВОСТИ

Пусть некоторое явление описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$y_i(t_0) = y_{i0}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

где $Y_i(t, y_1, \dots, y_n)$ — известные функции, удовлетворяющие условиям существования и единственности решения¹.

Определение 1.1. *Невозмущённым движением* системы (1.1) с начальными условиями (1.2) называется её определённое частное решение

$$y_i(t) = f_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

которое исследуется на устойчивость.

Начальные условия (1.2) на практике в принципе не могут быть выполнены идеально точно, поэтому немного изменим их для системы (1.1):

$$y_i(t_0) = y_{i0} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Определение 1.2. Решение системы (1.1), отвечающее изменённым начальным условиям (1.4), называется *возмущённым движением*, а величины $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — *начальными возмущениями*.

¹ Т.е. выполняются следующие условия:

- 1) все функции $Y_i(t, y_1, \dots, y_n)$ непрерывны в окрестности начальных условий;
- 2) для всех $Y_i(t, y_1, \dots, y_n)$ выполняются условия Липшица по всем аргументам y_i , $i = 1, \dots, n$ в этой же окрестности. Данное условие можно заменить более грубым, но легче проверяемым: существуют все частные производные $\frac{\partial Y_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, \dots, n$, ограниченные по модулю.

Здесь и далее, говоря о возмущениях, мы всегда будем предполагать следующее:

- возмущаются только начальные условия;
- начальные возмущения предполагаются малыми;
- устойчивость рассматривается на бесконечном промежутке времени.

Введём функции:

$$x_i(t) = y_i(t) - f_i(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.5)$$

Определение 1.3. Переменные x_i называются **отклонениями** или **возмущениями** величин y_i .

Если ввести систему координат в n -мерном пространстве, рассматривая величины x_i как переменные, то их совокупность $(x_1, \dots, x_n)$ будет изображаться точкой M (*изображающая точка*) (рис. 1.1), описывающей некоторую траекторию при изменении переменной t .

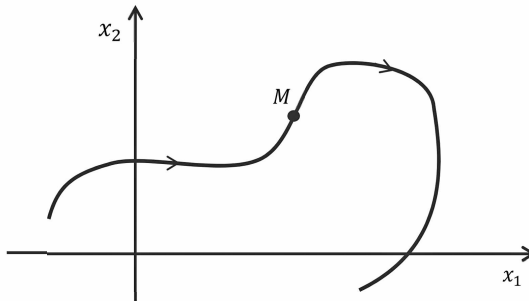


Рис. 1.1. Изображающая точка M движется по некоторой траектории в пространстве переменных $x_1, \dots, x_n$

Невозмущённому движению отвечает неподвижная точка — начало координат.

Пример 1.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 - 4y_2 + 4e^{-2t}, \\ \dot{y}_2 = 2y_1 - 2y_2. \end{cases}$$

Она имеет общее решение

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 (\cos(2t) - \sin(2t)) + C_2 (\cos(2t) + \sin(2t)), \\ y_2(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + e^{-2t}, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные действительные константы.

Рассмотрим частное решение, соответствующее начальным условиям

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1.$$

Подставляя заданные начальные условия в решение, находим соответствующие значения констант C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} y_1(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ y_2(0) = C_1 + 1 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

и соответствующее частное решение:

$$\begin{cases} f_1(t) = 0, \\ f_2(t) = e^{-2t}. \end{cases}$$

Теперь немного изменим начальные условия. Положим

$$y_1(0) = \varepsilon_1, \quad y_2(0) = 1 + \varepsilon_2,$$

где ε_1 и ε_2 малы. Например, $\varepsilon_1 = 0,01$, $\varepsilon_2 = -0,02$. Тогда

$$\begin{cases} y_1(0) = C_1 + C_2 = \varepsilon_1, \\ y_2(0) = C_1 + 1 = 1 + \varepsilon_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \varepsilon_2 = -0,02, \\ C_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0,03. \end{cases}$$

Возмущённое движение (решение системы, соответствующее введённым начальным возмущениям) имеет вид:

$$\begin{cases} y_1(t) = -0,02 \cdot (\cos(2t) - \sin(2t)) + 0,03 \cdot (\cos(2t) + \sin(2t)), \\ y_2(t) = -0,02 \cdot \cos(2t) + 0,03 \cdot \sin(2t) + e^{-2t}. \end{cases}$$

Или, после очевидных преобразований,

$$\begin{cases} y_1(t) = 0,01 \cdot \cos(2t) + 0,05 \cdot \sin(2t), \\ y_2(t) = -0,02 \cdot \cos(2t) + 0,03 \cdot \sin(2t) + e^{-2t}. \end{cases}$$

Теперь запишем возмущения переменных y_i :

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1(t) - f_1(t) = 0,01 \cdot \cos(2t) + 0,05 \cdot \sin(2t), \\ x_2(t) = y_2(t) - f_2(t) = -0,02 \cdot \cos(2t) + 0,03 \cdot \sin(2t). \end{cases}$$

Траектория соответствующей изображающей точки представлена на рис. 1.2.

Обозначим для $x = (x_1, \dots, x_n)$: $x = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ — норма x . В частности, если $n=1$, то $x = \sqrt{x^2} = |x|$.

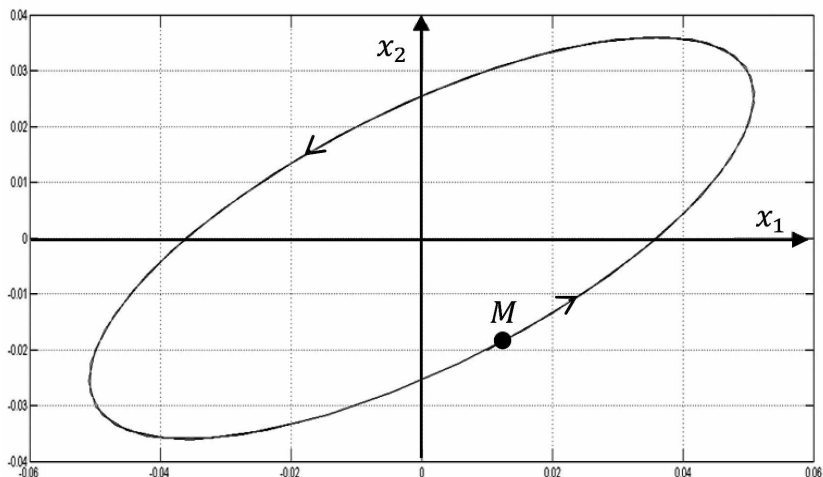


Рис. 1.2. Траектория изображающей точки

Определение 1.4. (устойчивости по Ляпунову)

Если $\forall \epsilon > 0$ найдётся такое $\delta(\epsilon) > 0$, что для всех начальных возмущений $x_1(t_0) = x_{10}, \dots, x_n(t_0) = x_{n0}$, таких, что $x(t_0) < \delta(\epsilon)$ и $\forall t > t_0$ следует $x(t) < \epsilon$, то невозмущённое движение **устойчиво**. Иначе — **неустойчиво**.

Определение 1.5. (асимптотической устойчивости по Ляпунову)

Если невозмущённое движение устойчиво и при этом выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0,$$

то невозмущённое движение называется **асимптотически устойчивым**.

Различие между устойчивостью и асимптотической устойчивостью хорошо видно по траектории движения изображающей точки. В случае устойчивости, если начальные возмущения отвечают условию $x(t_0) < \delta(\epsilon)$, то при любом $t > t_0$ изображающая точка не может выйти за пределы — окрестности начала координат. А в случае асимптотической устойчивости точка не только остаётся внутри этой ϵ -окрестности, но и стремится к началу координат (рис. 1.3). Это означает, что траектория возмущённого движения стремится слиться с траекторией невозмущённого (рис. 1.4).

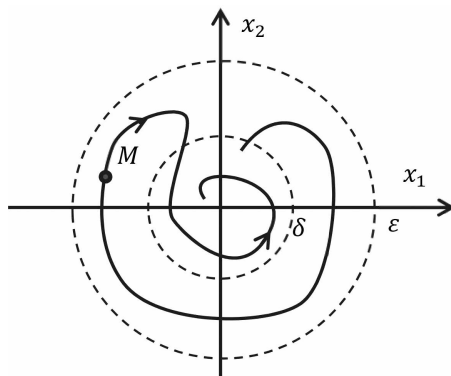


Рис. 1.3. Траектория изображающей точки в случае асимптотически устойчивого движения

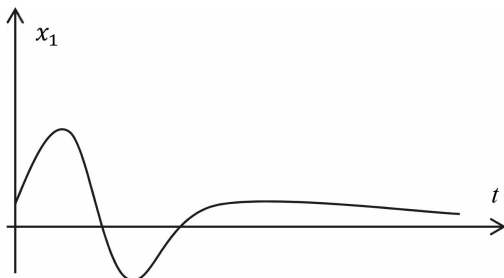


Рис. 1.4. Графики функций $x_i(t)$ асимптотически стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$

Определение 1.6. Если асимптотическая устойчивость имеет место при любых возмущениях, невозмущённое движение называется **асимптотически устойчивым в целом**.

Если устойчивость имеет место при начальных возмущениях, подчинённых некоторым условиям, устойчивость называется **условной**.

Заметим, что в определении Ляпунова условия предполагаются наложенными только на начальные возмущения. **А если на систему наложены, например, геометрические связи, возмущения должны удовлетворять этим связям во всё время движения.**

Таким образом, изучая поведение отклонений $x_i(t)$, можно сделать вывод об устойчивости невозмущённого движения. Для этого получим уравнения, которым удовлетворяют функции x_i , — уравнения

возмущённого движения. Продифференцируем соотношения (1.5) по времени с учётом исходной системы (1.1):

$$\begin{aligned} x_i(t) + f_i(t) &= y_i(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dy_i}{dt} &= \frac{dx_i}{dt} + \frac{df_i}{dt} = Y_i(t, x_1 + f_1, \dots, x_n + f_n), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Разложим функции $Y_i(t, x_1 + f_1, \dots, x_n + f_n)$ в ряд по степеням переменных x_i до членов первого порядка включительно

$$Y_i(t, x_1 + f_1, \dots, x_n + f_n) = Y_i(t, f_1, \dots, f_n) + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_1} \right)_0 x_1 + \dots + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_n} \right)_0 x_n + Y_i^*,$$

где Y_i^* — члены, зависящие от x_i в степенях выше первой.

Так как функции f_i , $i = 1, \dots, n$ являются решениями системы (1.1), то

$$\frac{df_i}{dt} = Y_i(t, f_1, \dots, f_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Учитывая это, получаем систему уравнений, которой должны удовлетворять возмущения x_i :

$$\frac{dx_i}{dt} = \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_1} \right)_0 x_1 + \dots + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_n} \right)_0 x_n + Y_i^*, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.7)$$

Обозначим: $\left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_1} \right)_0 = a_{i1}, \dots, \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_n} \right)_0 = a_{in}.$

Определение 1.7. Уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + Y_i^* = X_i(x), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.8)$$

называются **дифференциальными уравнениями возмущённого движения**.

Уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.9)$$

называются **уравнениями первого приближения**.

В общем случае правые части уравнений (1.8) зависят от времени

$$X_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + Y_i^* = X_i(t, x), \quad i = 1, \dots, n,$$

т.е. являются функциями переменных x_i и t . Если функции X_i не зависят явно от времени t , то система (1.8) называется **автономной**.

Пример 1.2. Рассмотрим колебания математического маятника длиной l . Его динамику можно описать уравнением

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \sin \varphi,$$

где l — длина маятника; g — ускорение свободного падения; φ — угол наклона от вертикальной оси (рис. 1.5).

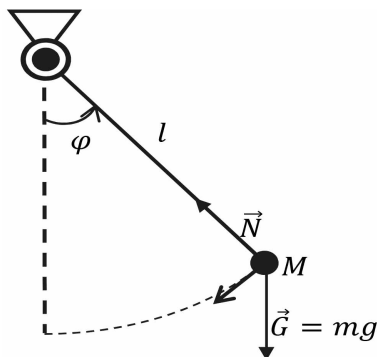


Рис. 1.5. Математический маятник

Чтобы перейти от одного уравнения второго порядка к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка, обозначим:

$$\varphi(t) = y_1, \quad \frac{d\varphi}{dt} = y_2.$$

Тогда уравнение динамики преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 = Y_1(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 = -\frac{g}{l} \cdot \sin y_1 = Y_2(y_1, y_2). \end{cases}$$

Пусть $y_1(0) = \alpha$, $y_2(0) = 0$. Частное решение, соответствующее этим начальным условиям, обозначим $f_1(t)$, $f_2(t)$. Положим

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1(t) - f_1(t), \\ x_2(t) = y_2(t) - f_2(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + f_1, \\ y_2 = x_2 + f_2. \end{cases}$$

Продифференцируем уравнения по времени, учитывая, что

$$\frac{df_1}{dt} = Y_1(y_1, y_2) = f_2, \quad \frac{df_2}{dt} = Y_2(y_1, y_2) = -\frac{g}{l} \cdot \sin f_1.$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{df_1}{dt} = Y_1(x_1 + f_1, x_2 + f_2), \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{dx_2}{dt} + \frac{df_2}{dt} = Y_2(x_1 + f_1, x_2 + f_2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + f_2 = x_2 + f_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{dx_2}{dt} - \frac{g}{l} \cdot \sin f_1 = -\frac{g}{l} \cdot \sin(x_1 + f_1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{g}{l} \cdot \sin f_1 - \frac{g}{l} \cdot \sin(x_1 + f_1). \end{cases}$$

Вид функции $Y_1 = x_2$ уже является её разложением в ряд Тейлора. Осталось разложить функцию $Y_2(x_1 + f_1, x_2 + f_2)$ в ряд по степеням x_1 и x_2 . При этом, вычисляя значение функции и её частных производных в нуле, учтём, что $f_1(0) = \alpha$, $f_2(0) = 0$:

$$Y_2(\alpha, 0) = -\frac{g}{l} \cdot \sin(\alpha) - \frac{g}{l} \cdot \sin(\alpha) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial Y_2}{\partial x_1} \right|_0 = -\frac{g}{l} \cdot \cos(x_1 + f_1) \Big|_0 = -\frac{g}{l} \cdot \cos(\alpha), \quad \left. \frac{\partial Y_2}{\partial x_2} \right|_0 = 0.$$

В итоге будем иметь систему уравнений возмущённого движения с выделенным первым приближением:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{g}{l} \cdot \cos \alpha \cdot x_1 + Y_2^*. \end{cases}$$

Здесь Y_2^* — члены порядков выше первого относительно x_1 и x_2 .

Пример 1.3. Рассмотрим движение конического маятника (рис. 1.6).

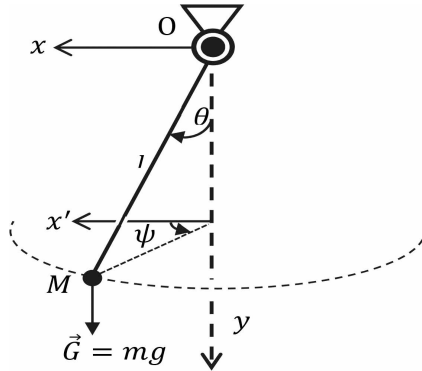


Рис. 1.6. Конический маятник

Составим уравнения возмущённого движения и выделим в них первое приближение.

Как известно из курса аналитической механики, кинетическая энергия T и потенциальная энергия Π конического маятника имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cdot \sin^2 \theta), \quad \Pi = -mgl \cdot \cos \theta,$$

где m — масса материальной точки M ; l — длина стержня; g — ускорение свободного падения. Углы ψ , θ и направления их отсчёта указаны на рис. 1.6.

Положение шарика однозначно задаётся углами ψ и θ , причём эти параметры не зависят друг от друга.

Замечание. Заметим, что выражения кинетической и потенциальной энергии не зависят от угла ψ . Поэтому ψ — это *циклическая* координата.

Напомним, что обобщённая координата q голономной системы называется **циклической**, если соответствующая ей обобщённая сила равна нулю, а выражения остальных обобщённых сил и выражение кинетической энергии не зависят от этой координаты. Нециклические координаты называются **позиционными**. В случае, когда действуют только потенциальные силы, как в рассматриваемом примере, цикли-

ческими будут являться те координаты, которые не входят в выражение функции Лагранжа $L = T - \Pi$.

Так как углы ψ и θ не зависят друг от друга, динамика системы может быть описана с помощью уравнений Лагранжа второго рода по каждому из углов:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi}. \end{cases}$$

Распишем:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = ml^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\psi},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \ddot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = ml^2 (\sin^2 \theta \cdot \dot{\psi} + 2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\psi} \dot{\theta}),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = ml^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\psi}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = mgl \sin \theta, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = 0.$$

Подставляя в уравнения динамики и проводя очевидные преобразования, получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta + \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\psi}^2, \\ \ddot{\psi} = -2 \operatorname{ctg} \theta \cdot \dot{\psi} \dot{\theta}. \end{cases}$$

Для приведения системы к нормальной форме положим:

$$\theta = y_1, \quad \dot{\theta} = y_2, \quad \dot{\psi} = y_3.$$

Тогда в соответствии с новыми обозначениями

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -\frac{g}{l} \sin y_1 + \sin y_1 \cos y_1 \cdot y_3^2, \\ \dot{y}_3 = -2 \operatorname{ctg} y_1 \cdot y_2 y_3. \end{cases}$$

Система допускает стационарное движение маятника с постоянной скоростью по горизонтально расположенной окружности — невозмущённое движение. Ему соответствуют значения параметров системы:

$$\theta = y_1 = \alpha = \text{const}, \quad \dot{\theta} = y_2 = 0, \quad \dot{\psi} = y_3 = \omega = \text{const}.$$

Напомним, что движение системы называется **стационарным**, если при этом движении все позиционные координаты сохраняют постоянные значения: $q_k = \alpha_k = \text{const}, \quad k = 1, \dots, m$.

При этом, конечно, значения параметров α и ω не могут быть произвольными, а должны удовлетворять той же системе дифференциальных уравнений. Подставив эти параметры в систему уравнений динамики, получим (при $\sin \alpha \neq 0$) требуемое соотношение:

$$\cos \alpha \cdot \omega^2 = \frac{g}{l}.$$

Теперь введём возмущения:

$$y_1 = \alpha + x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = \omega + x_3,$$

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1, \quad \dot{y}_2 = \dot{x}_2, \quad \dot{y}_3 = \dot{x}_3.$$

Подставляя в систему, получим дифференциальные уравнения возмущённого движения в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = X_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(\alpha + x_1) + \sin(\alpha + x_1) \cos(\alpha + x_1) (\omega + x_3)^2 = X_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 = -2 \text{ctg}(\alpha + x_1) (\omega + x_3) x_2 = X_3(x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

Теперь разложим правые части в ряды по степеням переменных x_i . Значения производных будем вычислять при $x_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$.

Обратим внимание, что свободные члены в разложениях должны обратиться в нуль в силу выбранных нами параметров движения:

$$X_1(0, 0, 0) = X_1(0) = 0, \quad X_3(0, 0, 0) = X_3(0) = 0,$$

$$X_2(0) = -\frac{g}{l} \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \omega^2 = -\frac{g}{l} \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \frac{g}{l} = 0.$$

Теперь запишем частные производные первого порядка функций X_j по переменным x_i :

$$\left. \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right|_0 = -\frac{g}{l} \cos \alpha + \omega^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -\frac{g}{l} \cos \alpha + \omega^2 \cos(2\alpha),$$

$$\left. \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \right|_0 = -2\omega \cdot \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\left. \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \right|_0 = 2\omega \cdot \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \omega \cdot \sin(2\alpha).$$

Уравнения возмущённого движения с выделенным первым приближением получают вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \left(\omega^2 \cos(2\alpha) - \frac{g}{l} \cos \alpha \right) \cdot x_1 + \omega \cdot \sin(2\alpha) \cdot x_3 + X_2^*(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 = -2\omega \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot x_2 + X_3^*(x_1, x_2, x_3), \end{cases}$$

где функции X_2^* и X_3^* содержат слагаемые с членами выше первого порядка.

Задача 1.1. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выяснить, устойчивы ли решения уравнения с указанными начальными условиями

$$3(t-1)\dot{x} = x, \quad x(2) = 0.$$

Имеем уравнение с разделяющимися переменными. Найдём общее решение:

$$3(t-1)dx = x dt | : 3(t-1)x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dt}{3(t-1)},$$

$$\Rightarrow \ln|x| = \frac{1}{3} \ln|t-1| + \ln C \quad \text{или} \quad x(t) = C \sqrt[3]{t-1}.$$

При разделении переменных мы могли потерять решение $x \equiv 0$, но оно входит в общую группу решений при $C = 0$.

Итак, общее решение данного дифференциального уравнения:

$$x(t) = C\sqrt[3]{t-1}.$$

Теперь найдём частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$x(2) = 0 \Rightarrow 0 = C\sqrt[3]{2-1} = C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0,$$

т.е. надо исследовать на устойчивость нулевое решение.

По определению решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$:

$$x(t_0) < \delta(\epsilon) \Rightarrow x(t) < \epsilon \forall t > t_0.$$

В нашем случае: $t_0 = 2$, $x(t_0) = x(2) = C\sqrt[3]{2-1} = C$. В качестве нормы имеется в виду модуль. Тогда условие устойчивости запишется в виде

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0: |C| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |C\sqrt[3]{t-1}| < \epsilon \forall t > 2.$$

Пусть $\epsilon = 1$. Тогда нужно, чтобы $\forall t > 2$ выполнялось неравенство

$$|C\sqrt[3]{t-1}| = |C| \cdot \sqrt[3]{t-1} < 1.$$

Но так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{t-1} = +\infty$, то, каким бы малым мы не взяли $\delta(\epsilon)$, начиная с $t > 1 + \frac{1}{|C|^3}$, это неравенство не будет выполняться. Следовательно, нулевое решение неустойчиво.

Задача 1.2. Начертить на плоскости (x, y) траектории данной системы и по чертежу выяснить, устойчиво ли нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -2y. \end{cases}$$

Решение. Чтобы найти y как функцию от x , разделим второе уравнение на первое:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение:

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln C \text{ или } y = Cx^2.$$

Следовательно, интегральные кривые имеют вид парабол с вершиной в точке $(0,0)$. Нулевому решению соответствует $C=0$. Чтобы понять, устойчиво ли нулевое решение, найдём направление движения точки вдоль интегральных кривых. Для этого построим вектор скорости $\vec{V}(x,y)$ в некоторой точке на траектории, например, в точке $(1,1)$:

$$\vec{V}(x,y) = (\dot{x}, \dot{y}) = (-x, -2y) \Rightarrow \vec{V}(1,1) = (-1, -2).$$

Так как движение направлено к точке $(0,0)$ (рис. 1.7), нулевое решение устойчиво.

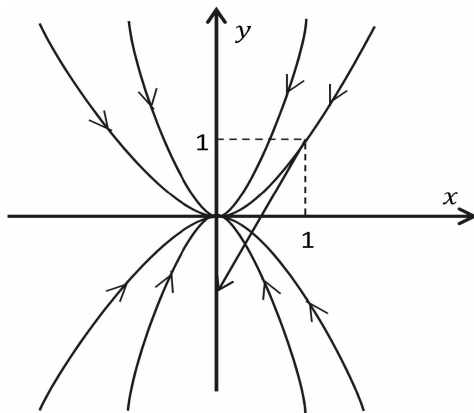


Рис. 1.7. Интегральные кривые системы из задачи 1.2

Задача 1.3. Выяснить, является ли устойчивым нулевое решение системы, если известно общее решение:

$$x(t) = C_1 \cos^2 t - C_2 e^{-t}, \quad y(t) = C_1 t^4 e^{-t} + 2C_2.$$

Решение. Положим $t_0 = 0$, $X(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдём такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$X(t_0) = X(0) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow X(t) < \varepsilon \forall t > 0.$$

Оценим $X(t)$:

$$\begin{aligned} X(t) &= \sqrt{(C_1 \cos^2 t - C_2 e^{-t})^2 + (C_1 t^4 e^{-t} + 2C_2)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{(|C_1| + |C_2|)^2 + (256|C_1|e^{-4} + 2|C_2|)^2}. \end{aligned}$$

Действительно, так как функция e^{-t} монотонно убывает при $t > 0$, то

$$|C_2 e^{-t}| \leq |C_2| \quad \forall t > 0.$$

Также очевидно, что $|C_1 \cos^2 t| \leq |C_1|$. Следовательно, для первого слагаемого под корнем будем иметь: $(C_1 \cos^2 t - C_2 e^{-t})^2 \leq (|C_1| + |C_2|)^2$.

Для оценки второго слагаемого найдём $\sup(t^4 e^{-t})$ при $t > 0$:

$$z(t) = t^4 e^{-t}, \quad \dot{z}(t) = 4t^3 e^{-t} - t^4 e^{-t} = t^3 e^{-t} (4 - t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ или } t = 4.$$

Исследуя знак производной на интервалах $(0, 4)$ и $(4, +\infty)$, заключаем, что функция $z(t) = t^4 e^{-t}$ имеет локальный максимум в точке $t = 4$ и $z(4) = 256 \cdot e^{-4}$. Следовательно,

$$(C_1 t^4 e^{-t} + 2C_2)^2 \leq (256|C_1|e^{-4} + 2|C_2|)^2.$$

Пусть $|C_1| < \frac{\delta}{2\sqrt{2}}$ и $|C_2| < \frac{\delta}{2\sqrt{2}}$. Тогда

$$\sqrt{(|C_1| + |C_2|)^2 + (256|C_1|e^{-4} + 2|C_2|)^2} < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + (128e^{-4} + 1)^2} < \varepsilon.$$

Из последнего неравенства выражаем $\delta(\varepsilon)$:

$$\delta < \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{\sqrt{1 + (128e^{-4} + 1)^2}}.$$

Выражение для $\delta(\varepsilon)$ найдено, следовательно, движение устойчиво.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ. МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Метод функций Ляпунова основывается на построении специальных функций, которые получили название функций Ляпунова. По их поведению на траекториях можно судить об устойчивости (асимптотической устойчивости) или неустойчивости исследуемого движения.

В общем случае эти функции могут (явно) зависеть от времени, но мы будем считать их функциями, зависящими только от координат $x_1, \dots, x_n$. Прежде всего введём несколько понятий для не зависящих явно от времени функций.

Определение 2.1. Функция $V(x_1, \dots, x_n)$ называется **знакоопределённой** (определённо-положительной или определённо-отрицательной), если она в окрестности начала координат $x \leq \varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число, может принимать значения только одного определённого знака, причём $V(x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$.

Для краткости введем обозначение: $V \gg 0$ ($V \ll 0$).

Определение 2.2. Функция $V(x_1, \dots, x_n)$ называется **знакопостоянной** (положительной или отрицательной), если она в окрестности начала координат $x \leq \varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число, может принимать значения только одного определённого знака, но может также обращаться в нуль и при $x_1^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$.

Определение 2.3. Функция $V(x_1, \dots, x_n)$ называется **знакопеременной**, если она в любой окрестности нуля может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Пример 2.1. В пространстве (x_1, x_2) функция $V = x_1^2 + x_2^2$ является знакоопределённой (определённо-положительной), так как может принимать только неотрицательные значения, причём обращается в нуль только в начале координат (рис. 2.1).

В том же пространстве функция $V = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$ является знакопостоянной (положительной), так как она принимает только неотрицательные значения и обращается в нуль при $x_1 = x_2$ (рис. 2.2).

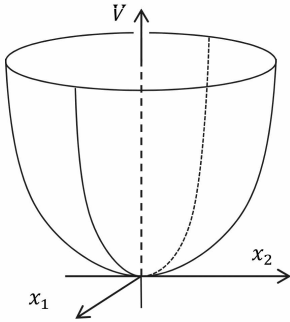


Рис. 2.1. Определённо-положительная функция $V = x_1^2 + x_2^2$ (эллиптический параболоид)

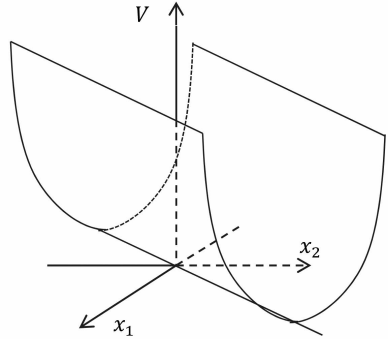


Рис. 2.2. Положительная функция $V = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ (параболический цилиндр)

Функция $V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3^4$ в пространстве (x_1, x_2, x_3) — определённо-положительная в достаточно малой окрестности нуля, так как $x_3^2 > x_3^4$ при $|x_3| < 1$.

В том же пространстве функция $V = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ является знакопеременной, так как в любой сколь угодно малой окрестности нуля она может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Определение 2.4. Будем называть функцию

$$V(x) = V(x_1, \dots, x_n): S_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R},$$

где $S_\varepsilon = \{x: x \leq \varepsilon\}$, **функцией Ляпунова**, если $V \in C^1$ и $V(0) = 0$.

Напомним, что символом C^1 называется множество непрерывно дифференцируемых функций, т.е. множество функций, имеющих непрерывные производные по всем своим аргументам. А записью $V(0) = 0$ мы обозначаем, что функция Ляпунова равна нулю при $x_1 = \dots = x_n = 0$.

Множество всех функций Ляпунова обозначим символом $\mathcal{L}$.

Для простоты в качестве функций Ляпунова мы будем брать **квадратичные формы** — однородные многочлены степени 2 от переменных $x_1, \dots, x_n$, т.е. функции вида

$$V(x_1, \dots, x_n) = c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + \dots + c_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_i x_j, \quad (2.1)$$

$$c_{ij} = c_{ji}, \quad c_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, все такие функции обладают требуемыми в определении 2.4 свойствами.

Пусть C — матрица коэффициентов функции (2.1), а Δ_k — её диагональные миноры:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = c_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Критерий Сильвестра. Для того чтобы выполнялось условие $V \gg 0$, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы C были положительны, т.е.

$$V \gg 0 \Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Очевидно, что если функция V определённо-положительна, то функция $-V$ — определённо-отрицательна. Матрица коэффициентов функции $-V$ имеет вид

$$-C = \begin{pmatrix} -c_{11} & \cdots & -c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{n1} & \cdots & -c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, отсюда легко получается и критерий для определения определённо-отрицательных форм:

$$V \ll 0 \Leftrightarrow \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$$

Пример 2.2. Рассмотрим функцию

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_2x_3.$$

Матрица C её коэффициентов имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вычислим диагональные миноры:

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Так как все три диагональных минора положительны, то данная функция V является определённо-положительной.

Пример 2.3. Рассмотрим функцию

$$V(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 4x_2x_3 - 5x_3^2.$$

Матрица C её коэффициентов имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим диагональные миноры:

$$\Delta_1 = -1 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 2 - 2 + 3 + 4 + 5 = -19 + 12 = -7 < 0.$$

Так как знаки диагональных миноров чередуются, начиная с отрицательного, то данная функция V является определённо-отрицательной.

Поверхность уровня функции Ляпунова $V(x_1, \dots, x_n)$ задаётся уравнением

$$V(x_1, \dots, x_n) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Пусть V — знакоопределённая функция (для определённости, определённо-положительная). Поверхности уровня таких функций в некоторой окрестности нуля имеют особое свойство. Рассмотрим сначала несколько простых примеров.

1. $V_1(x, y) = x^2 + y^2.$

Линии уровня функции V_1 задаются уравнением $x^2 + y^2 = C^2 \geq 0$, которое описывает окружности радиуса C с центром в начале координат (рис. 2.3).

2. $V_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$

Поверхности уровня функции V_2 задаются уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = C^2 \geq 0,$$

описывающим семейство сфер радиуса C с центром в начале координат.

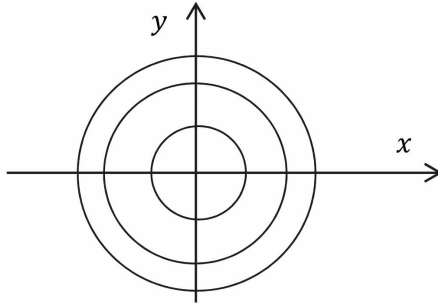


Рис. 2.3. Линии уровня функции $V = x^2 + y^2$

Утверждение 2.1. При достаточно малом c поверхности $V = c$ (где V — знакоопределённая функция) замкнуты и содержат внутри себя начало координат.

Доказательство. Пусть для простоты $n = 2$.

Рассмотрим окрестность $x < \delta$ начала координат для некоторого малого $\delta > 0$. И пусть $\Gamma = \{x : x = \delta\}$ — замкнутое множество. Обозначим

$$l = \inf_{\Gamma} V.$$

Так как функция V — знакоположительная и обращается в нуль только в начале координат, то $l > 0$.

На множестве Γ функция V достигает своего минимума как непрерывная функция на компакте, т.е.

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \Gamma \Rightarrow V(x_1, x_2) \geq l.$$

Выберем теперь $0 < c < l$. Рассмотрим значения функции V вдоль любого непрерывного пути, выходящего из точки $O(0,0)$ до точки на границе области Γ (рис. 2.4). Так как функция V непрерывна, она принимает все значения от нуля до некоторого своего значения, больше или равного l . Но $c < l$, следовательно, на этом пути найдётся точка $x = (x_1, x_2)$, такая, что

$$V(x_1, x_2) = c.$$

В этой точке траектория пересекает линию уровня. ♦

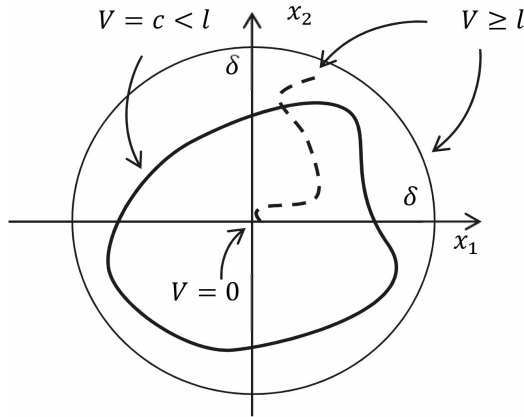


Рис. 2.4. Линии уровня знакоопределённой функции V в окрестности нуля замкнуты

Пусть теперь имеется система уравнений возмущённого движения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = X_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.2)$$

и функция $V(x_1, \dots, x_n)$.

Прежде всего нас будет интересовать поведение функции Ляпунова вдоль интегральных кривых.

Определение 2.5. Производной функции $V(x_1, \dots, x_n)$ по t , в силу уравнений (2.2), называется

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot X_i.$$

Теорема 2.1 (первая теорема Ляпунова об устойчивости)

Если для уравнений возмущённого движения (2.2) возможно найти знакоопределённую функцию $V(x_1, \dots, x_n)$ (например, $V \gg 0$), такую, что её полная производная $\frac{dV}{dt}$ по времени в силу этих уравнений есть функция знакопостоянная, знака, противоположного с V , или тождественный нуль, то невозмущённое движение устойчиво.

Доказательство. Пусть $V \gg 0$ в области $x \leq \varepsilon$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Тогда по условию теоремы в этой же области $\frac{dV}{dt} \leq 0$ или $\frac{dV}{dt} \equiv 0$.

Зафиксируем произвольное малое $0 < \delta < \varepsilon$ и рассмотрим множество $\Gamma = \{x = (x_1, \dots, x_n): x = \delta\}$.

Пусть $l = \inf_{\Gamma} V \geq 0$, т.е. во всех точках Γ верно, что $V(x) \geq l$, причём в некоторых точках равенство достигается, так как V — непрерывная функция, а Γ — ограниченное и замкнутое множество.

Выберем начальные значения (возмущения)

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

такие, что $x_0 \leq \eta < \delta$ и $V(x_0) = V(x_{10}, \dots, x_{n0}) < l$. Обозначим $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0}) \in \mathbb{R}^n$ — точка, лежащая внутри n -мерной сферы радиуса δ . Такие начальные условия непременно найдутся, так как V непрерывная функция и $V(0, \dots, 0) = 0$, а минимальное значение V на границе области не превосходит l .

Найдём решение системы (2.2), соответствующее начальным условиям (2.3):

$$x_0(t) = (x_{10}(t), \dots, x_{n0}(t)). \quad (2.4)$$

Подставим функции $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ в качестве аргументов функции V и рассмотрим её значения вдоль найденного решения. Функция $V(x_1(t), \dots, x_n(t)) = V(x(t))$ будет невозрастающей в области $x \leq \varepsilon$ в силу того, что там по условию $\frac{dV}{dt} \leq 0$ или $\frac{dV}{dt} \equiv 0$. Следовательно, $\forall t \geq t_0$ в области $x \leq \varepsilon$ будет выполняться:

$$V(x_0(t)) \leq V(x_0(t_0)) = V(x_0) < l.$$

Следовательно, $\forall t \geq t_0$ изображающая точка,двигающаяся вдоль решения (2.4), не сможет достичь множества Γ , так как во всех точках Γ выполняется $V(x) \geq l$ (рис. 2.5). ♦

Задача 2.1. Исследовать устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5, \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5, \end{cases}$$

построив функцию Ляпунова и применив теорему Ляпунова об устойчивости.

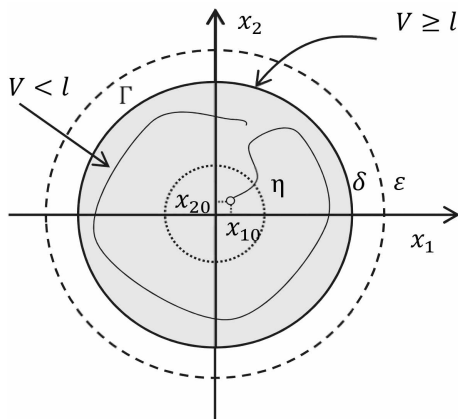


Рис. 2.5. К доказательству теоремы 2.1

Решение. Возьмём определённо-положительную функцию

$$V = x^2 + y^4 \gg 0.$$

Её производная по времени в силу уравнений движения будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2x \cdot \dot{x} + 4y^3 \cdot \dot{y} = 2x \cdot (2y^3 - x^5) + 4y^3 \cdot (-x - y^3 + y^5) = \\ &= 4xy^3 - 2x^6 - 4xy^3 - 4y^6 + 4y^8 = -2x^6 - 4y^6 + 4y^8 = \\ &= -2(x^6 + 2(y^6 - y^8)) \leq 0, \end{aligned}$$

если $(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} < 1$. Следовательно, по теореме Ляпунова об устойчивости нулевое решение устойчиво.

Теорема 2.2 (Ляпунова об асимптотической устойчивости)

Если для дифференциальных уравнений возмущённого движения (2.2) возможно найти знакоопределённую функцию $V(x_1, \dots, x_n)$, такую, что её полная производная по времени $\frac{dV}{dt}$ в силу этих уравнений есть функция также знакоопределённая, противоположного знака с V , то невозмущённое движение устойчиво асимптотически.

Доказательство. Пусть для определённости существует $V \gg 0$, такая, что, согласно условию теоремы, $\frac{dV}{dt} \ll 0$ в некоторой окрестности начала координат: $x \leq \varepsilon$, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Зафиксируем малое $0 < \delta < \varepsilon$. Так как выполнены условия теоремы 2.1 Ляпунова об устойчивости, то невозмущённое движение устойчиво. Это означает, что найдётся число $\eta(\delta) > 0$, такое, что для любого решения $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ с начальными условиями $x(t_0) = x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$, $x_0 < \eta(\varepsilon)$ следует, что $\forall t > t_0, x(t) < \delta$. Докажем, что при этом

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

По условию функция V монотонно убывает, так как $\frac{dV}{dt} \ll 0$, причем V обращается в нуль только при $t = 0$. Действительно, если бы она обращалась в нуль в какой-то другой точке, например, при некотором $T > 0$, то, следовательно, $x_1(T) = \dots = x_n(T) = 0$, так как V положительно определённая и обращается в нуль только в начале координат. А это противоречит единственности решения системы дифференциальных уравнений (2.2) — через каждую точку проходит только одна интегральная кривая, а через нуль уже проходит решение $x(t) \equiv 0$, соответствующее невозмущённому решению.

Как известно, монотонно убывающая и ограниченная снизу функция имеет предел:

$$\exists \alpha \geq 0: \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} V(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \alpha.$$

Докажем, что $\alpha = 0$. Отсюда сразу будет следовать, что $x_i(t) \rightarrow 0$, $i = 1, \dots, n$ при $t \rightarrow +\infty$, что эквивалентно тому, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

Предположим, что $\alpha > 0$. Следовательно,

$$V(x_1(t), \dots, x_n(t)) \geq \alpha \quad \forall t > t_0.$$

Это означает, что решение $x(t)$ не стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, так как в силу того, что $V \gg 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} V(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Следовательно, существует некоторое число $\sigma > 0$: $\sigma \leq x(t) \leq \varepsilon$.

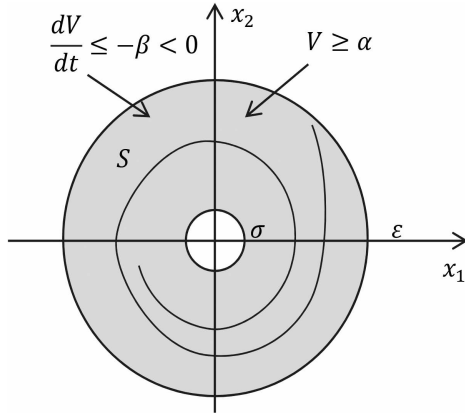


Рис. 2.6. К доказательству теоремы 2.2

Введём множество (рис. 2.6)

$$S = \{x : \sigma \leq x \leq \varepsilon\}.$$

Функция $\frac{dV}{dt}$ непрерывна, следовательно, достигает на ограниченном замкнутом множестве S своей точной верхней грани, т.е.

$$\exists \beta > 0 : \frac{dV}{dt} \leq -\beta \quad \forall t > t_0.$$

Проинтегрируем по t последнее неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \leq -\beta &\Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{dV}{dt} dt \leq -\int_{t_0}^t \beta dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow V(x_1(t), \dots, x_n(t)) - V(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) \leq -\beta \cdot (t - t_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(t_0)) - \beta \cdot (t - t_0) \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

А это противоречит тому, что $V(x(t))$ ограничена снизу. Значит, предположение было неверным и $\alpha = 0$. ♦

Теорема 2.2 имеет простой смысл. Если $\frac{dV}{dt} \ll 0$, то каждая интегральная кривая, выходящая из достаточно малой окрестности начала

координат, пересекает каждую из поверхностей $V = c$ снаружи внутрь, так как функция $V(x_1(t), \dots, x_n(t))$ монотонно убывает. Но тогда интегральные кривые должны неограниченно стремиться к началу координат. Это и означает асимптотическую устойчивость невозмущённого движения (рис. 2.7).

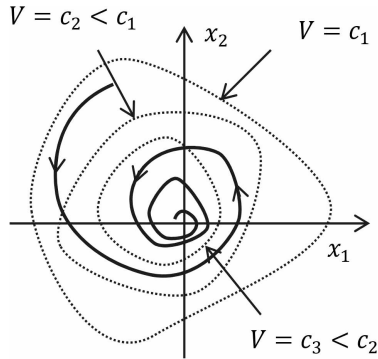


Рис. 2.7. Интегральная кривая пересекает поверхности уровня функции V по направлению к началу координат

Задача 2.2. Исследовать устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy, \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3, \end{cases}$$

построив функцию Ляпунова и применив теоремы Ляпунова об устойчивости.

Решение. Возьмём определённо-положительную функцию

$$V = x^2 + y^2 \gg 0.$$

Её производная по времени в силу системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2x \cdot \dot{x} + 2y \cdot \dot{y} = 2x \cdot (y - x + xy) + 2y \cdot (x - y - x^2 - y^3) = \\ &= 2xy - 2x^2 + 2x^2y + 2xy - 2y^2 - 2x^2y - 2y^4 = \\ &= -2(x - y)^2 - 2y^4 \leq 0. \end{aligned}$$

Так как $\frac{dV}{dt} \leq 0$, то по теореме Ляпунова об устойчивости нулевое решение устойчиво. А так как $\frac{dV}{dt} = -2((x-y)^2 + y^4) < 0$ при $\|(x, y)\| \neq 0$ и обращается в окрестности нуля в нуль только при $x = y = 0$, то невозмущённое движение устойчиво асимптотически.

Теорема 2.3 (Ляпунова о неустойчивости)

Если для дифференциальных уравнений возмущённого движения (2.2) возможно найти функцию $V(x_1, \dots, x_n)$, такую, что её полная производная по времени $\frac{dV}{dt}$ в силу этих уравнений — знакоопределённая функция, а сама функция V не знакопостоянная, знака, противоположного с $\frac{dV}{dt}$, то невозмущённое движение неустойчиво.

Доказательство. Пусть, для определённости, для системы дифференциальных уравнений (2.2) можно найти функцию $V(x) = V(x_1, \dots, x_n)$, такую, что её полная производная по времени в силу (2.2) в некоторой окрестности нуля является определённо-положительной функцией:

$$\frac{dV}{dt} \gg 0, \quad \|x\| \leq \varepsilon \leq H. \quad (2.5)$$

Мы также предполагаем, что в этой области система дифференциальных уравнений удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения.

Выберем начальные условия $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$, такие, что

$$\|x_0\| < \delta < \varepsilon, \quad \text{и} \quad V(x_0) = V(x_{10}, \dots, x_{n0}) > 0. \quad (2.6)$$

Такая точка существует, так как по условию теоремы функция $V(x)$ не является знакопостоянной и отрицательной, а значит, в любой окрестности нуля есть точки, в которых она принимает положительные значения.

Пусть $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ — решение системы (2.2), соответствующее выбранным начальным условиям.

Предположим, это решение устойчиво, т.е.

$$\forall t > t_0 \Rightarrow \|x(t)\| \leq \varepsilon \leq H.$$

Рассмотрим поведение функции $V(x)$ вдоль найденного решения $x(t)$. Если наше предположение об устойчивости решения $x(t)$ верно, то непрерывная функция $V(x(t))$ должна быть ограничена, так как она непрерывна, а её аргументы не выходят из ограниченной области $\|x(t)\| \leq \varepsilon \leq H$

Так как $\frac{dV}{dt} \gg 0$, то функция $V(x(t))$ монотонно возрастает в области (2.5), следовательно,

$$\forall t > t_0 \Rightarrow V(x(t)) > V(x_0).$$

Так как $V(x)$ непрерывна и обращается в нуль при $x_1 = \dots = x_n = 0$, то

$$\exists \alpha > 0: \|x(t)\| \geq \alpha, \alpha > 0.$$

Аргумент функции $V(x)$ отделён от нуля, т.е. рассматриваемая интегральная кривая не заходит в начало координат. Следовательно, так как $\frac{dV}{dt}$ — непрерывная функция, то

$$\exists l > 0: \frac{dV}{dt} \geq l \text{ в области } \alpha \leq \|x(t)\| \leq \varepsilon \leq H.$$

Проинтегрируем это неравенство по времени:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \geq l &\Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{dV}{dt} dt \geq \int_{t_0}^t l dt \Rightarrow V(x(t)) - V(x_0) \geq l(t - t_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow V(x(t)) \geq V(x_0) + l(t - t_0) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $V(x(t))$ неограниченно возрастает в области (2.5). Но это противоречит нашему предположению о том, что $V(x(t))$ ограничена. ♦

Смысл доказанной теоремы иллюстрирует рис. 2.8. По условию теоремы в окрестности начала координат необходимо существует хотя бы одна область, где $V > 0$. Эта область ограничена кривой $V = 0$. Если в начальный момент времени t_0 $V(x(t_0)) = V(x_0) \geq 0$, то интегральная кривая необходимо начинается в области $V > 0$ и, оставаясь в этой области, пересекает кривые семейства $V = c$ в сторону возрастания c , удаляясь от начала координат. В какой-то момент она покинет область $\alpha \leq \|x\| \leq \varepsilon$.

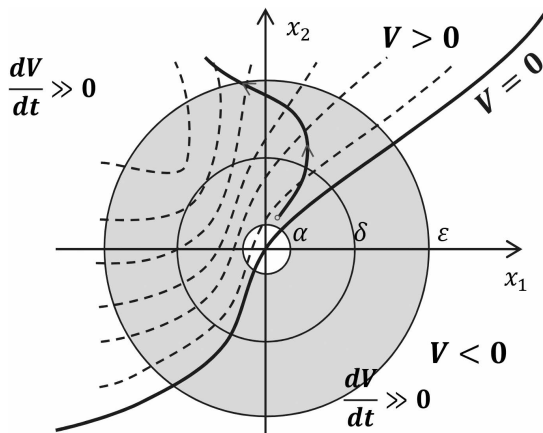


Рис. 2.8. К доказательству теоремы 2.3

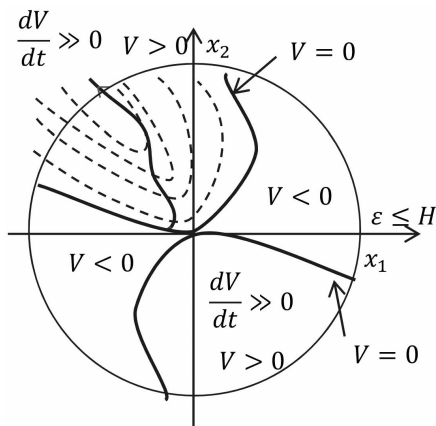


Рис. 2.9. К доказательству теоремы 2.4

Из доказательства теоремы видно, что требование $\frac{dV}{dt} \gg 0$ для всей области $\|x\| \leq \epsilon \leq H$ является излишним: достаточно, чтобы условие $\frac{dV}{dt} \gg 0$ выполнялось в области, где $V > 0$ (рис. 2.9). Теорему, обобщающую теорему Ляпунова о неустойчивости, доказал Н.Г. Четаев. Мы приведём её формулировку.

Теорема 2.4 (Н.Г. Четаев)

Если для дифференциальных уравнений возмущённого движения можно найти такую функцию $V(x_1, \dots, x_n)$, что:

1) в сколь угодно малой окрестности начала координат существует область, внутри которой $V > 0$, а на границе $V = 0$;

2) во всех точках области $V > 0$ производная $\frac{dV}{dt} > 0$,
то невозмущённое движение устойчиво.

Задача 2.3. Исследовать устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3, \\ \dot{y} = x^2 - y^3, \end{cases}$$

построив функцию Ляпунова и применив теорему Четаева об устойчивости.

Решение. Рассмотрим $V = xy$. Это знакопеременная функция. Её производная по времени в силу данной системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= y \cdot \dot{x} + x \cdot \dot{y} = y \cdot (xy - x^3 + y^3) + x \cdot (x^2 - y^3) = xy^2 - x^3y + \\ &+ y^4 + x^3 - xy^3 = xy^2(1 - y) + x^3(1 - y) + y^4 = x(x^2 + y^2)(1 - y) + y^4. \end{aligned}$$

Таким образом, $\frac{dV}{dt} \geq 0$ при $x > 0$ и $|y| < 1$. Следовательно, по теореме Четаева невозмущённое движение неустойчиво. ♦

Теорема 2.5 (Ляпунова о неустойчивости)

Если для дифференциальных уравнений возмущённого движения существует такая функция V , что её полная производная по времени $\frac{dV}{dt}$ в силу уравнений возмущённого движения имеет в области $\|x\| \leq \varepsilon$ вид

$$\frac{dV}{dt} = \alpha V + W(x),$$

где α — положительная постоянная, а $W \equiv 0$ или знакпостоянная, а функция V не является знакпостоянной, противоположного знака с W , то невозмущённое движение неустойчиво.

Теорема 2.6 (Н.Н. Красовского об асимптотической устойчивости)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущённого движения (2.2) и пусть Ω — многообразие точек, не содержащих целых траекторий системы (2.2) $\forall t \geq 0$.

Если для системы (2.2) в области $\|x\| \leq \varepsilon$ существует положительно определённая функция V , такая, что её полная производная по времени в силу уравнений (2.2) удовлетворяет в этой области следующим условиям:

1) $\frac{dV}{dt} < 0 \quad \forall x \notin \Omega;$

2) $\frac{dV}{dt} = 0 \quad \forall x \in \Omega,$

то невозмущённое движение асимптотически устойчиво.

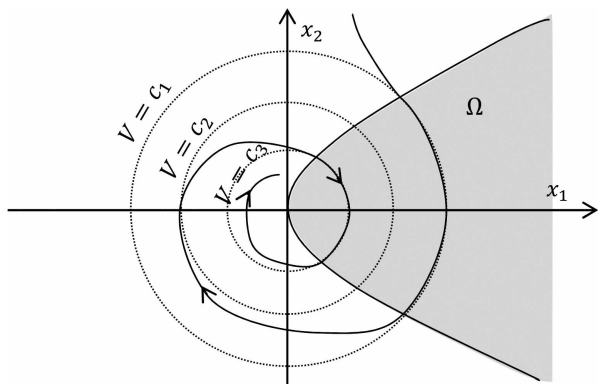


Рис. 2.10. К теореме 2.6

Суть теоремы Красовского проиллюстрирована на рис. 2.10 и 2.11.

Вне многообразия Ω выполняется условие $\frac{dV}{dt} < 0$ и, следовательно, функция V должна убывать вдоль траектории $x(t)$ изображающей точки. Поэтому она пересекает линии уровня $V = c$ снаружи внутрь. Если траектория движения во время пути попадает внутрь многообразия Ω , то в этой области должно выполняться условие $\frac{dV}{dt} = 0$, т.е. значение

функции V не меняется. Другими словами, точка будет двигаться по линии уровня $V = c$. И так как Ω не содержит целых траекторий, в некоторый момент времени изображающая точка непременно покинет Ω и снова попадёт в область $\frac{dV}{dt} < 0$. Этот процесс может повторяться неоднократно, и при этом изображающая точка будет приближаться к началу координат. В отличие от теоремы 2.2 Ляпунова об асимптотической устойчивости, здесь функция V не монотонно убывает, но стремится к нулю ступенчато.

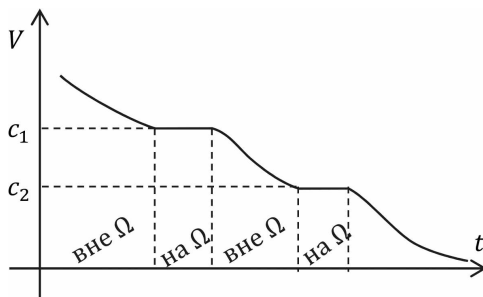


Рис. 2.11. К теореме 2.6

Теорема Ляпунова и её обобщение, сделанное Н.Н. Красовским, устанавливают достаточные условия при малых начальных возмущениях (говорят — асимптотическая устойчивость в малом). Следующая теорема, принадлежащая Е.А. Барбашину и Н.Н. Красовскому, определяющая достаточные условия асимптотической устойчивости *при любых* начальных возмущениях.

Теорема 2.7 (Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об асимптотической устойчивости)

Пусть для дифференциальных уравнений возмущённого движения (2.2) можно найти положительно определённую функцию $V(x)$, удовлетворяющую условию:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = \infty,$$

где символ $x \rightarrow \infty$ в пределе означает, что хотя бы одна координата вектора x стремится к бесконечности по любому закону. Пусть также

полная производная по времени $\frac{dV}{dt}$, вычисленная в силу уравнений (2.2), удовлетворяет следующим условиям:

$$1) \frac{dV}{dt} < 0 \quad \forall x \notin \Omega;$$

$$2) \frac{dV}{dt} = 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

где Ω — многообразие точек, не содержащее целых траекторий системы при $t \geq 0$, то невозмущённое движение устойчиво в целом.

ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений возмущённого движения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = X_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

в области, где выполняются условия существования и единственности решения. Выделим в функциях $X_1(x), \dots, X_n(x)$ линейные члены относительно переменных $x_i, i = 1, \dots, n$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + X_1^*(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + X_n^*(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (3.1)$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, функции $X_i^*(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, n$ содержат нелинейные члены относительно переменных $x_i, i = 1, \dots, n$, начиная со второго порядка.

Обозначим матрицу коэффициентов системы (3.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и поставим в соответствие нелинейной системе (3.1) систему её первого приближения

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n, \\ \vdots \\ \dot{y}_n = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n. \end{cases} \quad (3.2)$$

Из курса дифференциальных уравнений известен алгоритм нахождения решения линейной системы (3.2). По общему виду решения

системы (3.2) легко понять, устойчиво (асимптотически устойчиво) оно или неустойчиво. А в некоторой окрестности нуля нелинейные члены системы (3.1) достаточно малы, быть может, настолько, что ими можно пренебречь. Тем не менее вопрос о том, как связаны между собой решения систем (3.2) и (3.1) и возможно ли по поведению решения системы (3.2) решить задачу устойчивости для системы (3.1), требует строгого рассмотрения. В этой главе мы узнаем, при каких условиях рассмотрение нелинейной системы (3.1) можно заменить исследованием системы первого приближения (3.2).

Как известно, решение линейной системы дифференциальных уравнений (3.2) надо начинать с рассмотрения характеристического уравнения. Обозначим:

$$f(\lambda) = \det|A - \lambda E| = 0. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) — алгебраическое уравнение степени n с действительными коэффициентами. Оно имеет ровно n корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, с учётом их кратности.

Теорема 3.1 (А.М. Ляпунов)

Если все корни характеристического уравнения (3.3) имеют отрицательные действительные части, то невозмущённое движение системы (3.1) асимптотически устойчиво.

Теорема 3.2 (А.М. Ляпунов)

Если среди корней характеристического уравнения (3.3) имеется хотя бы один с положительной действительной частью, то невозмущённое движение системы (3.1) неустойчиво.

Доказательство этих теорем А.М. Ляпунов строит на основе двух лемм, которые мы сейчас приведём. Но сначала напомним некоторые сведения из алгебры.

Пусть $B = (b_{ij})$ — произвольная матрица размера $m \times n$. Символом B^T мы будем обозначать транспонированную матрицу размера $n \times m$, т.е. матрицу, полученную из исходной матрицы B заменой строк на столбцы.

Если B — квадратная матрица и $B^T = B$, то она называется симметричной.

Если $x^T = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор размерности n , то

$$Bx = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_{m1}x_1 + \dots + b_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

тоже вектор размерности m , i -й элемент которого получается поэлементным умножением компонент i -й строки матрицы B на компоненты x .

Пусть теперь B — квадратная матрица порядка n . Так как произведение Bx является n -мерным вектором, то определено и скалярное произведение $(Bx, x) = x^T Bx$. Это же выражение является квадратичной формой с матрицей коэффициентов B .

Лемма 3.1 (А.М. Ляпунов)

Если все корни уравнения (3.3) имеют отрицательные действительные части, то существует симметричная матрица B порядка n , такая, что:

- 1) $\forall x \neq 0 \Rightarrow (Bx, x) < 0$;
- 2) $A^T B + BA = E$, где E — единичная матрица.

Лемма 3.2 (А.М. Ляпунов)

Если уравнение (3.3) имеет корень с положительной вещественной частью, то существует симметричная матрица B порядка n и число $\alpha > 0$, такие, что:

- 1) область $\Omega = \{x : (Bx, x) > 0\} \neq \emptyset$ (точка 0 лежит на границе $\partial\Omega$ области Ω);
- 2) $A^T B + BA = \alpha B + E$.

Так как все элементы матрицы A известны, то условия п. 2 в обеих леммах, по сути, задают матричные уравнения для нахождения матрицы B . А матрица A определяется из уравнений возмущённого движения и от неё зависят корни характеристического уравнения. Если все корни характеристического уравнения (3.3) удовлетворяют

некоторым условиям (например, все они без исключения находятся строго в правой или левой полуплоскости), то матричные уравнения в условиях лемм обладают некоторыми свойствами. Впервые это увидел и доказал А.М. Ляпунов.

Доказательства лемм здесь приводить не будем. Зато приведём доказательства теоремы 3.1 и 3.2 и покажем их связь с функциями Ляпунова.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть все корни характеристического уравнения (3.3) имеют отрицательные действительные части. Рассмотрим определённо-отрицательную функцию Ляпунова

$$V = (Bx, x) = x^T Bx < 0 \quad \forall x \neq 0.$$

По лемме 3.1 такая матрица существует.

Систему (3.1) можно записать в векторно-матричном виде

$$\dot{x} = Ax + \bar{\bar{o}}(\|x\|), \quad (3.4)$$

где символом $\bar{\bar{o}}(\|x\|)$ обозначены члены высшего порядка по отношению к переменным $x_1, \dots, x_n$. Так как мы рассматриваем систему в окрестности невозмущённого (нулевого) решения, то они достаточно малы и стремятся к нулю при $\|x\| \rightarrow 0$ быстрее, чем линейные члены.

Найдём теперь полную производную функции V по времени в силу уравнений возмущённого движения (3.4):

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{x}^T Bx + x^T B\dot{x} = x^T A^T Bx + x^T BAx + \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \bar{\bar{o}}(\|x\|) \right) = \\ &= x^T (A^T B + BA)x + \bar{\bar{o}}(\|x\|^2). \end{aligned}$$

По лемме 3.1 матрица B должна удовлетворять матричному уравнению $A^T B + BA = E$. Следовательно,

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}^T E\dot{x} + \bar{\bar{o}}(\|x\|^2) = \dot{x}^T \dot{x} + \bar{\bar{o}}(\|x\|^2) = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2 + \bar{\bar{o}}(\|x\|^2).$$

Полученное выражение для $\frac{dV}{dt}$ больше нуля в области $0 < \|x\| < \sigma$ для некоторого малого σ , т.е. в этой области $\frac{dV}{dt} \gg 0$. А сама функция $V \ll 0$. Следовательно, по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости невозмущённое движение устойчиво асимптотически. ♦

Доказательство теоремы 3.2. Пусть среди корней характеристического уравнения (3.3) имеется корень с положительной действительной частью. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = (Bx, x) = x^T Bx,$$

где B — матрица, удовлетворяющая условиям леммы 3.2.

Найдём $\frac{dV}{dt}$ в силу уравнений (3.4):

$$\frac{dV}{dt} = x^T A^T Bx + x^T BAx + \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \bar{\bar{o}}(\|x\|) \right) = x^T (A^T B + BA)x + \bar{\bar{o}}(\|x\|^2).$$

По лемме 3.2 матрица B должна удовлетворять матричному уравнению $A^T B + BA = \alpha B + E$ для некоторого $\alpha > 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= x^T (\alpha B + E)x + \bar{\bar{o}}(\|x\|^2) = \alpha x^T Bx + x^T x + \bar{\bar{o}}(\|x\|^2) = \\ &= \underbrace{\alpha(Bx, x)}_{V(x)} + \sum_{i=1}^n x_i^2 + \bar{\bar{o}}(\|x\|^2). \end{aligned}$$

При достаточно малых x из области $0 < \|x\| < \sigma$ выражение

$$W(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \bar{\bar{o}}(\|x\|^2) > 0.$$

Следовательно,

$$\frac{dV}{dt} = \alpha \cdot V(x) + \sum_{i=1}^n x_i^2 + \bar{\bar{o}}(\|x\|^2) \geq \alpha \cdot V(x), \quad \forall x \in \{\|x\| < \sigma\}.$$

Сама функция $V(x) = x^T Bx$ по условию леммы 3.2 может принимать положительные значения. Следовательно, невозмущённое движение неустойчиво согласно теореме 2.5 Ляпунова о неустойчивости. ♦

Пример 3.1. Пусть система уравнений возмущённого движения имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - \cos(2x_1) + \sin(x_2) + \arcsin^3(x_3), \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + e^{x_3} - 1 + 4x_1x_2, \\ \dot{x}_3 = -1 - 5x_1 + \sqrt{1+2x_2} - 10x_2 - 5\sin(x_3). \end{cases}$$

Выделим в правых частях уравнений первое приближение. Это можно сделать несколькими способами. В данном случае легко использовать стандартные разложения в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$\cos(2x_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x_1)^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x_1)^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin(x_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x_2^{2n+1}}{(2n+1)!} = x_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x_2^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\arcsin(x_3) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \cdot x_3^{2n+1} = x_3 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x_3^{2n+1},$$

$$\arcsin^3(x_3) = \left(x_3 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x_3^{2n+1} \right)^3.$$

Разложение для $\arcsin(x_3)$ справедливо при $|x_3| < 1$, и очевидно, что ряд для функции $\arcsin^3(x_3)$ содержит члены не ниже третьего порядка по переменной x_3 . Следовательно,

$$X_1(x_1, x_2, x_3) = 1 - \cos(2x_1) + \sin(x_2) + \arcsin^3(x_3) = x_2 + X_1^*(x_1, x_2, x_3),$$

где функция $X_1^*(x_1, x_2, x_3)$ содержит члены второго порядка и выше относительно переменных x_i , $i = 1, 2, 3$. Графики переходных процессов для этой системы приведены на рис. 3.1.

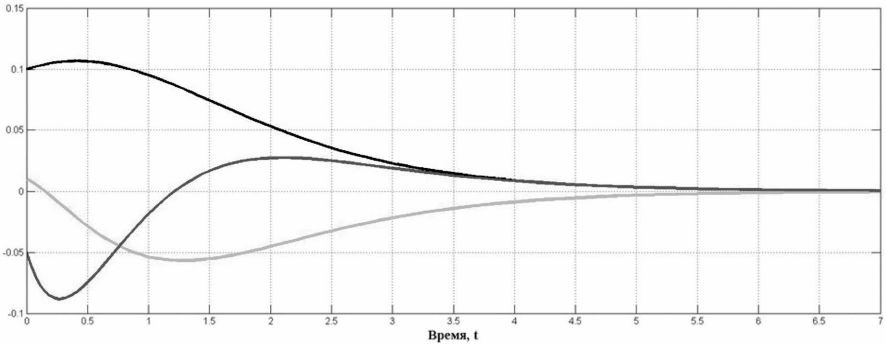


Рис. 3.1. Все графики переходных процессов $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ системы из примера 3.1 асимптотически стремятся к нулю

Аналогично будем иметь для второго уравнения:

$$e^{x_3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_3^n}{n!} = 1 + x_3 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x_3^n}{n!},$$

$$\begin{aligned} X_2(x_1, x_2, x_3) &= x_2^3 + e^{x_3} - 1 + 4x_1x_2 = \\ &= x_2^3 + 1 + x_3 - 1 + 4x_1x_2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x_3^n}{n!} = x_3 + X_3^*(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

И для третьего уравнения:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+2x_2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} \cdot (2x_2)^n = \\ &= 1 + x_2 + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)! 2^n}{(1-2n)(n!)^2 4^n} \cdot x_2^n, \quad |x_2| < 1; \end{aligned}$$

$$\sin(x_3) = x_3 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x_3^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\begin{aligned} X_3(x_1, x_2, x_3) &= -1 - 5x_1 + \sqrt{1+2x_2} - 10x_2 - 5\sin(x_3) = \\ &= -1 - 5x_1 + 1 + x_2 - 10x_2 - 5x_3 + X_3^*(x_1, x_2, x_3) = \\ &= -5x_1 - 9x_2 - 5x_3 + X_3^*(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Система с выделенным первым приближением:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + X_1^*(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 = x_3 + X_2^*(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 = -5x_1 - 9x_2 - 5x_3 + X_3^*(x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

Соответствующая линейная система

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = -5y_1 - 9y_2 - 5y_3 \end{cases}$$

имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & -5 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -5 & -9 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 9\lambda - 5 = 0$$

имеет корни

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 + i, \lambda_3 = -2 - i.$$

Все действительные части корней $\lambda_i, i=1,2,3$ отрицательны, следовательно, невозмущённое решение асимптотически устойчиво.

Теперь внесём небольшие изменения в третью строку полной нелинейной системы следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - \cos(2x_1) + \sin(x_2) + \arcsin^3(x_3), \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + e^{x_3} - 1 + 4x_1x_2, \\ \dot{x}_3 = -1 - 5x_1 + \sqrt{1+2x_2} - 10x_2 - 5\sin(x_2). \end{cases}$$

Соответствующая система с выделенным первым приближением:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + X_1^*(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 = x_3 + X_3^*(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 = -5x_1 - 14x_2 + X_3^*(x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

Матрица системы первого приближения

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -14 & 0 \end{pmatrix}$$

будет иметь следующее характеристическое уравнение:

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -5 & -14 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 14\lambda - 5 = 0.$$

Его корни:

$$\lambda_1 \approx -0,354, \lambda_2 \approx 0,177 + i \cdot 3,7542, \lambda_3 \approx 0,177 - i \cdot 3,7542.$$

Как видим, в этом случае корни λ_2 и λ_3 имеют положительные действительные части. Следовательно, решение неустойчиво. Графики переходных процессов $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ представлены на рис. 3.2.

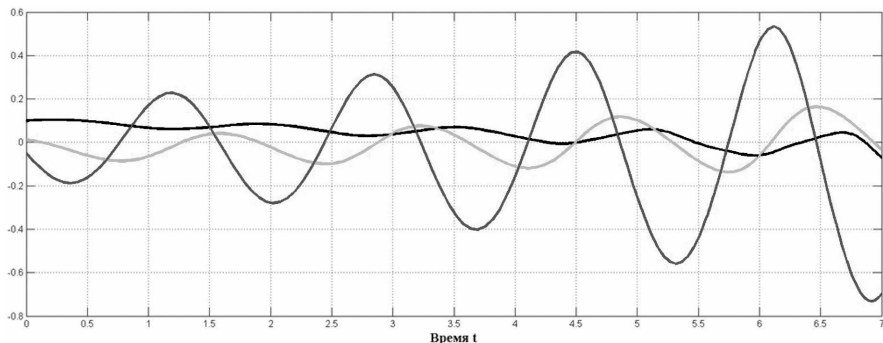


Рис. 3.2. Графики переходных процессов $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$

Итак, суммируя всё сказанное выше, когда уравнения возмущенного движения **явно не зависят** от времени (т.е. для **установившихся движений**) можно сделать следующее заключение.

Если *действительные части **всех** корней* характеристического уравнения системы первого приближения (3.2) *отрицательны*, то невозмущенное движение *асимптотически устойчиво* при **любых нелинейных членах** (говорят — асимптотически устойчиво по первому приближению)

Если *действительная часть хотя бы **одного** корня положительна*, то невозмущенное движение *неустойчиво*, каковы бы ни были остальные корни характеристического уравнения и нелинейные члены уравнений возмущенного движения (говорят — невозмущенное движение неустойчиво по первому приближению).

А что же происходит в случае, когда уравнение (3.2), не имея корней с положительной вещественной частью, имеет нулевые или чисто мнимые корни? Рассмотрим следующий пример.

Пример 3.2. Пусть уравнение возмущённого движения имеет вид

$$\ddot{x} + x = a \cdot \dot{x}^3,$$

где $x = x(t)$ — действительная функция; $a \in \mathbb{R}$ — некоторая константа.

Запишем это уравнение в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + ax_2^3. \end{cases}$$

Теперь запишем соответствующую линеаризованную систему:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -y_1. \end{cases}$$

Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Её характеристическое уравнение:

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

Рассмотрим функцию Ляпунова $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \gg 0$. Её производная в силу уравнений возмущённого движения:

$$\frac{dV}{dt} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 x_2 + x_2 (-x_1 + ax_2^3) = ax_2^4$$

и её знак зависит от знака параметра a . Возможны три варианта.

1. $a = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} \equiv 0$ и по теореме Ляпунова об устойчивости, невозмущённое решение просто устойчиво.

2. $a < 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} \leq 0$. Производная $\frac{dV}{dt}$ не является определённо отрицательной, так как она может обращаться в нуль при $x_2 = 0$, $x_1 \neq 0$. Следовательно, теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости

здесь применить нельзя. Рассмотрим многообразие Ω , задаваемое уравнением $\frac{dV}{dt} = 0$:

$$ax_2^4 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \dot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = C = \text{const.}$$

Но подставляя $x(t) \equiv 0$ в исходное дифференциальное уравнение можно убедиться, что единственное возможное значение для константы C — нулевое. Следовательно, многообразие Ω не содержит целых траекторий за исключением $x(t) = 0$. Значит, по теореме Н.Н. Красовского невозмущённое движение асимптотически устойчиво.

3. $a > 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} > 0$ и обращается в нуль на множестве Ω , не содержащем целые траектории. Следовательно, движение неустойчиво.

Графики переходных процессов $x_i(t), i = 1, 2$ для всех случаев приведены на рис. 3.3–3.5. На рис. 3.6–3.8 приведены траектории изображающей точки.

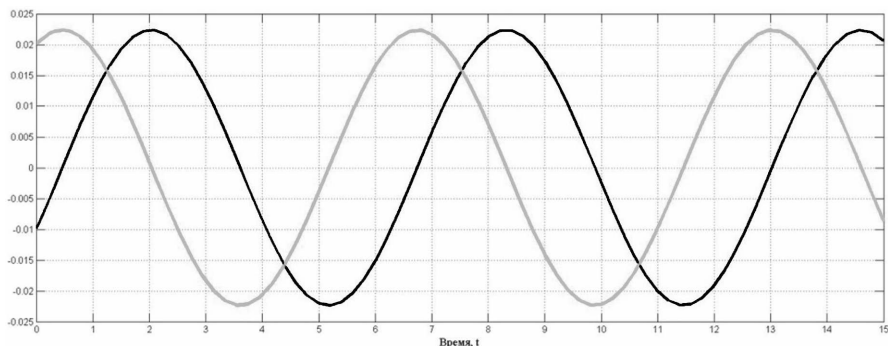


Рис. 3.3. Графики переходных процессов системы при $a = 0$, решение устойчиво

Пример 3.2 показывает нам, что в случае, когда линейная система имеет хотя бы один корень с нулевой действительной частью, первое приближение не может быть использовано для решения задачи устойчивости. Решающее значение в этом случае оказывают нелинейные члены. Такие случаи получили название *критических*. А.М. Ляпунов писал об этом так: «...случаи такого рода весьма разнообразны, и в каждом из них задача получает свой особый характер, так что не может быть и речи о каких-либо общих способах ее решения, которые относились бы ко всем таким случаям».

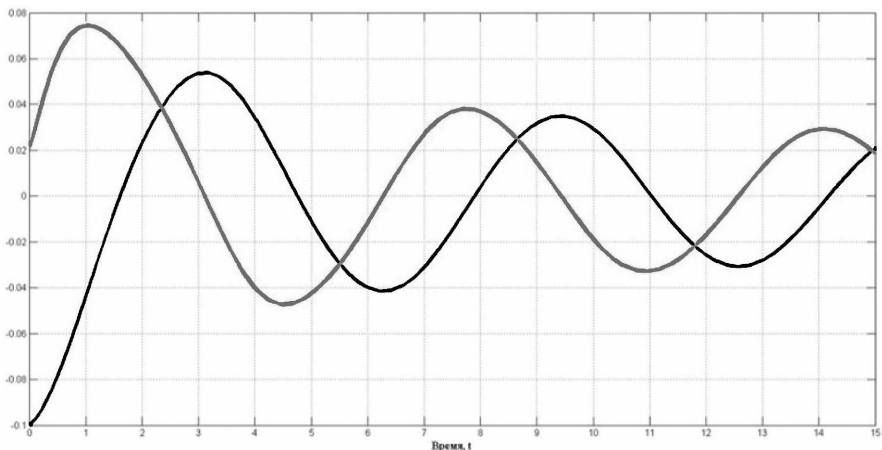


Рис. 3.4. Графики переходных процессов системы при $a = -100$,
решение устойчиво асимптотически

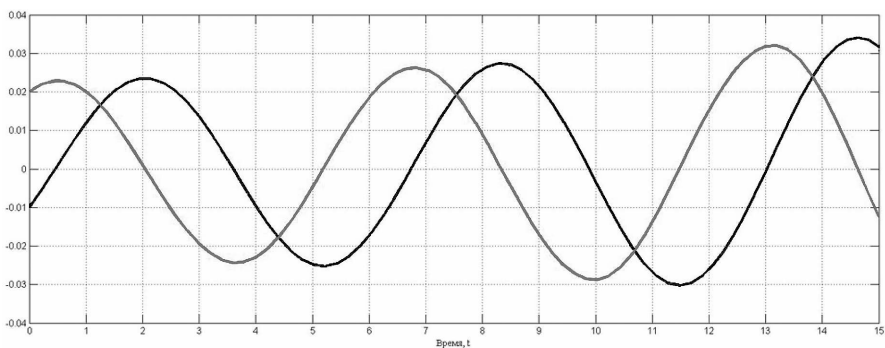


Рис. 3.5. Графики переходных процессов системы при $a = 100$.
Решение неустойчиво

Основные принципы теории критических случаев будут рассмотрены в главе 4. Там же подробно рассмотрим простейшую ситуацию, когда характеристическое уравнение линейной системы, не имея корней с положительными действительными частями, имеет один нулевой корень. А сейчас приведём две теоремы, которые могут помочь при анализе корней алгебраических уравнений, что также может являться весьма нетривиальной задачей.

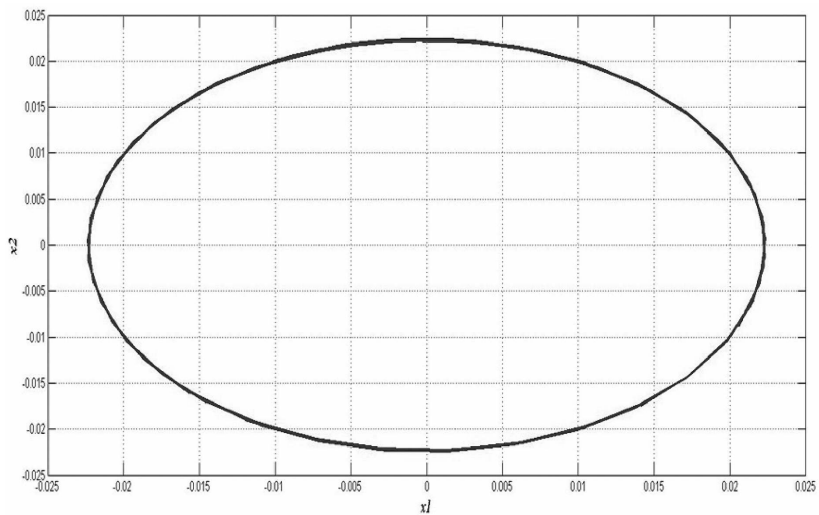


Рис. 3.6. Траектория изображающей точки при $a = 0$

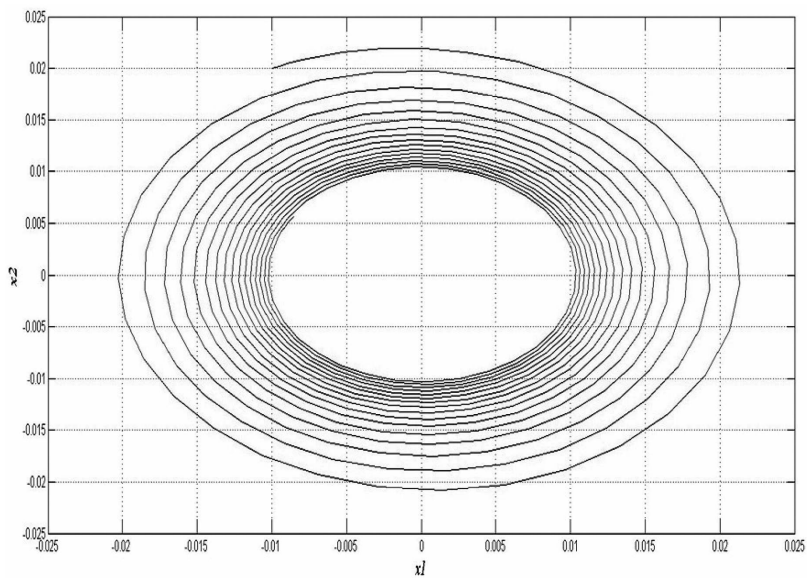


Рис. 3.7. Траектория изображающей точки при $a = -100$.
Движение направлено к началу координат

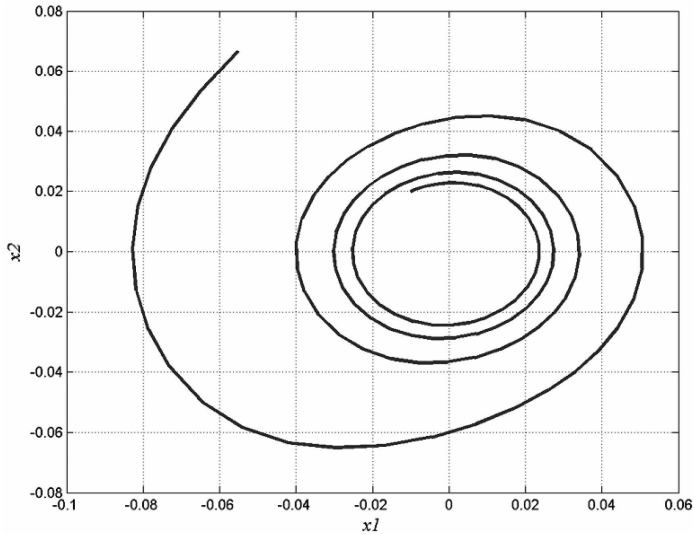


Рис. 3.8. Траектория изображающей точки при $a = 100$.
Движение неустойчиво, точка движется от начала координат

В общем случае характеристическое уравнение системы первого приближения можно записать в виде:

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad a_0 > 0. \quad (3.5)$$

Пусть $a_n \neq 0$, иначе уравнение (3.5) имело бы нулевой корень. Составим определитель, называемый *определителем Гурвица*.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

Пример 3.3. Пусть многочлен имеет вид

$$f(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda + 1.$$

Для него

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = -5, \quad a_5 = 1.$$

В этом случае определитель Гурвица будет выглядеть так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теорема 3.3 (Рауса – Гурвица)

Все корни уравнения (3.5) имеют отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры определителя Гурвица (3.6) положительны.

Рассмотрим несколько частных случаев.

$n = 1$. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$f(\lambda) = a_0\lambda + a_1 = 0, \quad a_0 > 0.$$

Составим определитель Гурвица. В данном случае это просто

$$\Delta_1 = a_1.$$

И условие асимптотической устойчивости: $a_1 > 0$.

$n = 2$. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$f(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \quad a_0 > 0;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = a_1 \cdot a_2.$$

Следовательно, условия асимптотической устойчивости имеют вид

$$\begin{cases} a_1 > 0, \\ a_1 \cdot a_2 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 > 0, \\ a_2 > 0, \end{cases}$$

т.е. все коэффициенты квадратного трёхчлена должны быть положительны.

$n = 3$. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$f(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad a_0 > 0;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = a_1, \Delta_2 = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3, \Delta_3 = a_3 \cdot \Delta_2.$$

Условия асимптотической устойчивости имеют вид

$$\begin{cases} a_1 > 0, a_0 > 0, \\ a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0, \\ a_3 \cdot \Delta_2 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 > 0, a_3 > 0, \\ a_0 > 0, a_2 > 0, \\ a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0. \end{cases}$$

$n = 4$. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^5 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0, a_0 > 0;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3, \Delta_4 = a_4 \cdot \Delta_3,$$

$$\Rightarrow \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 - (a_1)^2 a_4 - (a_3)^2 \cdot a_0.$$

Условия асимптотической устойчивости имеют вид

$$\begin{cases} a_1 > 0, a_0 > 0, a_4 > 0, \\ a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0, \\ a_1 a_2 a_3 - (a_1)^2 a_4 - (a_3)^2 \cdot a_0 > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим третье уравнение:

$$a_1 a_2 a_3 - (a_1)^2 a_4 - (a_3)^2 \cdot a_0 = a_1 \cdot a_2 a_3 - [(a_1)^2 a_4 + (a_3)^2 \cdot a_0] > 0.$$

Выражение $(a_1)^2 a_4 + (a_3)^2 \cdot a_0 > 0$ и $a_1 > 0$. Следовательно, должно выполняться и $a_2 a_3 > 0$.

С другой стороны,

$$a_1 a_2 a_3 - (a_1)^2 a_4 - (a_3)^2 \cdot a_0 = a_3 \cdot \underbrace{[a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3]}_{=\Delta_2 > 0} - \underbrace{(a_1)^2 a_4}_{> 0} > 0.$$

И мы можем сделать вывод, что $a_3 > 0$. Следовательно, и $a_2 > 0$. Окончательно получаем условия асимптотической устойчивости в случае $n = 4$:

$$\begin{cases} a_k > 0, & k = 0, \dots, 4, \\ a_1 a_2 a_3 - (a_1)^2 a_4 - (a_3)^2 \cdot a_0 > 0. \end{cases}$$

Аналогично можно рассмотреть случаи для других значений n .

В механике существует целый класс консервативных голономных систем, характеристические уравнения которых содержат только чётные степени λ .

Пусть характеристическое уравнение такой системы имеет вид

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^{2n} + a_1 \lambda^{2n-2} + \dots + a_{2n} = 0, \quad a_0 > 0, \quad a_{2n} \neq 0. \quad (3.7)$$

Так как функция $f(\lambda)$ — чётная, то $f(-\lambda) = f(\lambda)$. Следовательно, если уравнение имеет корень в левой полуплоскости, то имеется и корень в правой полуплоскости, так как $f(\lambda) = 0 \Rightarrow f(-\lambda) = 0$. Значит, для устойчивости необходимо (но недостаточно!), чтобы все корни уравнения (3.7) были чисто мнимыми. Нулевых корней уравнение (3.7) не имеет, так как $a_{2n} \neq 0$.

Теорема 3.4 (Романова)

Уравнение (3.7) имеет только чисто мнимые различные корни тогда и только тогда, когда все корни уравнения

$$F(\lambda) = f(\lambda) + \frac{1}{2} \frac{df}{d\lambda} = 0 \quad (3.8)$$

имеют отрицательные вещественные части.

Уравнение (3.8) содержит все степени λ и для него можно применить критерий Гурвица.

Пример 3.4. Рассмотрим частный случай, когда характеристическое уравнение имеет вид

$$f(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0.$$

Тогда

$$F(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^2 + b + \frac{1}{2}(4\lambda^3 + 2a\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + a\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Применим к $F(\lambda)$ критерий Гурвица:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = a, \quad a_3 = a, \quad a_4 = b.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 2 & 1 \\ 0 & b & a & a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0, \\ \Delta_2 = a > 0, \\ \Delta_3 = a^2 - 4b > 0, \\ \Delta_4 = b \cdot (a^2 - 4b) > 0. \end{cases}$$

Окончательно получаем: $a > 0$, $b > 0$, $a^2 - 4b > 0$.

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЕВ

В этой главе мы познакомимся с **принципом сведения** — основным методом исследования таких критических случаев, когда действительные части одного или нескольких корней характеристического уравнения равны нулю (в частности, имеется один или несколько нулевых корней), а действительные части остальных отрицательны. К исследованию нелинейных систем этого класса приводятся многие современные задачи мехатроники, физики и техники.

Принцип сведения был разработан Г.В. Каменковым и И.Г. Малкиным. Он заключается в том, чтобы исследование устойчивости для *полной системы* заменить исследованием устойчивости для *укороченной системы*, в которую входят только те переменные, которым отвечают корни характеристического уравнения с нулевыми действительными частями (эти переменные называются *критическими*).

Для простоты рассмотрим решение задачи в критическом случае одного нулевого корня.

Рассмотрим систему уравнений возмущённого движения

$$\dot{x} = Ax + X^*, \quad (4.1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_{n+1})^T$ — вектор фазовых переменных; A — матрица коэффициентов системы первого приближения, $a_{ij} \in \mathbb{R}$; $X^* = (X_1^*, \dots, X_{n+1}^*)^T$ — вектор функций, состоящих из членов высшего порядка относительно переменных $x_1, \dots, x_{n+1}$.

Пусть характеристическое уравнение

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda E_{n+1}) = 0 \quad (4.2)$$

имеет n корней с отрицательными действительными частями и **один нулевой** корень. Заметим, что отсюда следует, что $\det A = 0$, так как именно такое выражение мы получаем, положив $\lambda = 0$.

Приведём систему уравнений (4.1) к так называемому *специальному виду*. Для этого введём новую переменную:

$$z = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n + p_{n+1} x_{n+1}. \quad (4.3)$$

Коэффициенты $p_1, \dots, p_n$ выбираем так, чтобы полная производная по времени $\frac{dz}{dt}$ в силу уравнений (4.1) не содержала линейных членов:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= p_1 \frac{dx_1}{dt} + \dots + p_n \frac{dx_n}{dt} + p_{n+1} \frac{dx_{n+1}}{dt} = \\ &= p_1 (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + a_{1, n+1}x_{n+1}) + \dots \\ &\quad \dots + p_n (a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + a_{n, n+1}x_{n+1}) + \\ &\quad + p_{n+1} (a_{n+1,1}x_1 + \dots + a_{n+1,n}x_n + a_{n+1, n+1}x_{n+1}) + \\ &\quad + p_1 \cdot X_1^{(2)}(x_1, \dots, x_{n+1}) + \dots + p_{n+1} \cdot X_{n+1}^{(2)}(x_1, \dots, x_{n+1}). \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{dz}{dt}} \right\} \equiv 0$$

Выпишем отдельно уравнения для определения $p_1, \dots, p_{n+1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot p_1 + \dots + a_{n1} \cdot p_n + a_{n+1,1} \cdot p_{n+1} = 0, \\ \vdots \\ a_{1n} \cdot p_1 + \dots + a_{nn} \cdot p_n + a_{n+1,n} \cdot p_{n+1} = 0, \\ a_{1, n+1} \cdot p_1 + \dots + a_{n, n+1} \cdot p_n + a_{n+1, n+1} \cdot p_{n+1} = 0. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Система (4.4) — это линейная однородная система из $(n+1)$ уравнений относительно $(n+1)$ переменных $p_1, \dots, p_{n+1}$. Если матрица системы невырожденная, то существует только одно решение системы — нулевое. В нашем случае матрица системы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n+1,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1, n+1} & \dots & a_{n+1, n+1} \end{pmatrix} = A^T$$

вырожденная, так как $\det A^T = \det A = 0$. А это значит, что система (4.4) имеет бесконечно много решений, среди которых можно выбрать нетривиальный набор решений $p_1, \dots, p_{n+1}$ и такой, например, что $p_{n+1} \neq 0$.

Тогда из (4.3) получаем:

$$x_{n+1} = \frac{1}{p_{n+1}} (z - p_1 x_1 - \dots - p_n x_n). \quad (4.5)$$

Исключим переменную x_{n+1} из системы (4.1) с помощью (4.5).
Получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + \\ + \frac{a_{i,n+1}}{p_{n+1}}(z - p_1x_1 - \dots - p_nx_n) + X_i^* \Big|_{\text{после замены (4.5)}}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dz}{dt} = p_1X_1^* + \dots + p_nX_n^* + p_{n+1}X_{n+1}^* \Big|_{\text{после замены (4.5)}}. \end{array} \right.$$

Далее сгруппируем члены:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} = \left(a_{i1} - \frac{p_1}{p_{n+1}}a_{i,n+1} \right)x_1 + \dots + \\ + \left(a_{in} - \frac{p_n}{p_{n+1}}a_{i,n+1} \right)x_n + \frac{a_{i,n+1}}{p_{n+1}}z + X_i^* \Big|_{\text{после замены (4.5)}}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dz}{dt} = p_1X_1^* + \dots + p_nX_n^* + p_{n+1}X_{n+1}^* \Big|_{\text{после замены (4.5)}}. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Обозначим:

$$q_i = \frac{a_{i,n+1}}{p_{n+1}}, \quad q_{ik} = a_{ik} - \frac{p_k}{p_{n+1}}a_{i,n+1} = a_{ik} - p_k \cdot q_k, \quad i, k = 1, \dots, n;$$

$$Y_i^{(2)} = Y_i^*(x_1, \dots, x_n, z) = X_i^* \Big|_{\text{после замены (4.5)}};$$

$$Y^{(2)}(x_1, \dots, x_n, z) = p_1X_1^* + \dots + p_nX_n^* + p_{n+1}X_{n+1}^* \Big|_{\text{после замены (4.5)}}.$$

Тогда система (4.6) примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} = q_{i1}x_1 + \dots + q_{in}x_n + q_i z + Y_i^{(2)}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dz}{dt} = Y^{(2)}, \end{array} \right. \quad (4.7)$$

который называется *специальным видом*.

Уравнения возмущённого движения в критическом случае одного нулевого корня всегда можно привести к специальному виду (4.7). Переменная z называется *критической переменной*. Ей соответствует корень $\lambda = 0$ уравнения (4.2).

Действительно, характеристическое уравнение системы первого приближения для системы (4.7) теперь имеет вид:

$$g(\lambda) = \det(Q - \lambda E_{n+1}) = 0, \text{ где } Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} & q_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} & q_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\det(Q - \lambda E_{n+1}) = \begin{vmatrix} q_{11} - \lambda & \cdots & q_{1n} & q_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} - \lambda & q_n \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Очевидно, оно распадается на два уравнения:

$$\lambda = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} q_{11} - \lambda & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Все ненулевые корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части, так как корни характеристического уравнения *не* изменяются при неособенном преобразовании.

Напомним, что линейное преобразование $Y = BX$ называется *невырожденным* (неособенным), если его матрица B является невырожденной.

Далее нужно провести анализ зависимости правых частей системы (4.7) от критической переменной.

Присоединённой системой будем называть систему, соответствующую некритическим переменным:

$$\frac{dx_i}{dt} = q_{i1}x_1 + \dots + q_{in}x_n + q_i z + Y_i^{(2)}(x_1, \dots, x_n, z), \quad i = 1, \dots, n.$$

Укороченной системой называется система для критических переменных, в которой все некритические переменные приравнены нулю:

$$\frac{dz}{dt} = Y^{(2)}(0, \dots, 0, z).$$

Здесь и далее мы будем использовать стандартные обозначения:

$$Y_i^{(2)}(0, \dots, 0, z) = Y_i^{(0)}(z), \quad Y^{(2)}(0, \dots, 0, z) = Y^{(0)}(z).$$

Положим $x_1 = \dots = x_n = 0$. Тогда в правых частях системы (4.7) будем иметь:

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} q_1 z + Y_1^{(0)}(z); \\ \vdots \\ q_n z + Y_n^{(0)}(z); \\ Y^{(0)}(z). \end{array} & \begin{array}{l} \text{соответствует присоединённой системе;} \\ \\ \text{соответствует укороченной системе.} \end{array} \end{array}$$

Разложим $Y_i^{(0)}(z)$ и $Y^{(0)}(z)$ в ряды по степеням z :

$$\begin{aligned} q_1 z + Y_1^{(0)}(z) &= q_1 z + g_1 z^{m_1} + \dots, \\ &\vdots \\ q_n z + Y_n^{(0)}(z) &= q_n z + g_n z^{m_n} + \dots, \\ Y^{(0)}(z) &= g z^m + \dots, \quad m \geq 2. \end{aligned} \quad m_i \geq 2, \quad i = 1, \dots, n,$$

Рассмотрим возможные случаи.

I. $\forall i = 1, \dots, n, q_i = 0, m_i \geq m$ (частный случай критического случая).

Тогда вопрос об устойчивости полной системы (4.7) решается рассмотрением укороченной системы:

$$\frac{dz}{dt} = g z^m + \dots \quad (4.8)$$

Утверждение 4.1. Если m чётное, то нулевое решение неустойчиво.

Доказательство. Пусть $m = 2k$.

Рассмотрим функцию Ляпунова $V_1(z) = z$. Это знакопеременная функция. Её полная производная по времени в силу (4.8):

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{dz}{dt} = g z^{2k} + \dots$$

Это знакоопределённая функция, знак которой совпадает со знаком g . Следовательно, движение неустойчиво по теореме Ляпунова о неустойчивости. ♦

Утверждение 4.2. Если m нечётное, то нулевое решение асимптотически устойчиво при $g < 0$ и неустойчиво при $g > 0$.

Доказательство. Пусть теперь $m = 2k + 1$.

Рассмотрим функцию Ляпунова $V_2(z) = \frac{z^2}{2} \gg 0$. Её полная производная по времени:

$$\frac{dV_2}{dt} = z \cdot \frac{dz}{dt} = z \cdot (gz^{2k+1} + \dots) = gz^{2(k+1)} + \dots$$

является функцией также знакоопределённой. Она отрицательная при $g < 0$ (асимптотическая устойчивость) и положительная при $g > 0$ (неустойчивость). ♦

Таким образом, устойчивость в особом случае достигается, если m нечётное и $g < 0$.

II. $\exists i: q_i \neq 0$ (**общий случай критического случая**).

Сведём общий случай к частному: сделаем нелинейную замену по некритическим переменным:

$$x_i = \eta_i + u_i(z), \quad i = 1, \dots, n,$$

где η_i — новые некритические переменные; $u_i(z)$ — пока неизвестные функции z , такие, что

$$\frac{du_i}{dz} \cdot Y^{(2)}(u_1, \dots, u_n, z) = q_{i1}u_1(z) + \dots + q_{in}u_n(z) + q_i z + Y_i^{(2)}(u_1, \dots, u_n, z). \quad (4.9)$$

Функции $u_i(z)$ будем искать в виде формально удовлетворяющих системе (4.9) рядов:

$$u_i = b_1^i \cdot z + b_2^i \cdot z^2 + \dots + b_k^i \cdot z^k + \dots$$

Эти ряды, как правило, будут **расходящимися**. Но их сходимость и **не нужна**, если вопрос об устойчивости будет решаться по членам некоторого **конечного** порядка N (число N может отличаться от m). Если же этот порядок установить не удаётся, то нужно брать **сумму всех членов ряда** до бесконечно высоких степеней, т.е. в этом случае нужна их **сходимость**:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= \frac{d}{dt}(\eta_i + u_i(z)) = \frac{d\eta_i}{dt} + \frac{du_i}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = q_{i1}(\eta_1 + u_1(z)) + \dots \\
&\dots + q_{in}(\eta_n + u_n(z)) + q_i z + Y_i^{(2)}(\eta_1 + u_1, \dots, \eta_n + u_n, z); \\
\left\{ \begin{aligned} \frac{d\eta_i}{dt} &= \sum_{k=1}^n q_{ik} \eta_k + q_i z + \tilde{Y}_i^{(2)}(\eta_1 + u_1, \dots, \eta_n + u_n, z), \quad i = 1, \dots, n; \\ \frac{dy}{dt} &= \tilde{Y}^{(2)}(\eta_1 + u_1, \dots, \eta_n + u_n, z); \\ \tilde{Y}_i^{(2)}|_{\eta_i=0} &\equiv 0, \quad \tilde{Y}^{(2)}|_{\eta_i=0} \equiv 0. \end{aligned} \right. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Теперь положим $\eta_1 = \dots = \eta_n = 0$. Система (4.10) допускает решение (особенный случай критического случая)

$$z = \text{const}, \quad \eta_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Асимптотической устойчивости нет.

Пример 4.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_1x_2, \\ \dot{x}_3 = x_1x_3 - 3x_3^2. \end{cases}$$

Матрица соответствующей линейной системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдём корни характеристического уравнения:

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -2 & -3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^2(3 + \lambda) - 2\lambda = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0.$$

Отсюда получаем, что $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$. Мы видим, что имеет место критический случай одного нулевого корня.

Обратим внимание, что система уже имеет специальный вид (4.7) и делать замену (4.3) не нужно. Достаточно положить $z = x_3$, чтобы обозначить критическую переменную.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + z + x_1x_2, \\ \dot{z} = x_1z - 3z^2. \end{cases}$$

Далее, в соответствии с ранее введенными обозначениями, запишем:

$$Y_1^{(2)} \equiv 0, \quad Y_2^{(2)} = x_1x_2, \quad Y^{(2)} = x_1z - 3z^2.$$

Установим минимальный порядок свободно входящей переменной z в правых частях уравнений возмущенного движения. Для этого положим

$$x_1 = x_2 = 0.$$

Тогда в правой части второго уравнения системы получим z , а в правой части третьего уравнения останется $-3z^2$. Значит, имеем

$$q_2 = 1 \neq 0,$$

т.е. общий случай критического случая.

Тогда сделаем замену, положив

$$x_1 = \eta_1 + u_1(z), \quad x_2 = \eta_2.$$

Подставим в систему:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 + \frac{du_1}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -2(\eta_1 + u_1) - 3\eta_2 + z + (\eta_1 + u_1) \cdot z, \\ \dot{z} = (\eta_1 + u_1) \cdot z - 3z^2. \end{cases}$$

Будем искать u_1 в виде

$$u_1 = b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 + \dots$$

Тогда

$$\frac{du_1}{dz} = b_1 + 2b_2z + 3b_3z^2 + \dots,$$

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= (\eta_1 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots) \cdot z - 3z^2 = \\
&= \eta_1 z + b_1 z^2 + b_2 z^3 + b_3 z^4 + \dots - 3z^2 = \\
&= \eta_1 z + (b_1 - 3)z^2 + b_2 z^3 + b_3 z^4 + \dots
\end{aligned}$$

Теперь подставляем в присоединённую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\eta}_1 + (b_1 + 2b_2 z + 3b_3 z^2 + \dots) \cdot (\eta_1 z + (b_1 - 3)z^2 + \dots + \\ \quad + b_2 z^3 + b_3 z^4 + \dots) = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -2\eta_1 - 3\eta_2 + z + \eta_1(z - 2) + \\ \quad + (z - 2) \cdot (b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots). \end{array} \right.$$

Приравняем к нулю некритические переменные $\eta_1 = \eta_2 = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (b_1 + 2b_2 z + 3b_3 z^2 + \dots) \cdot ((b_1 - 3)z^2 + b_2 z^3 + b_3 z^4 + \dots) = 0, \\ z + (z - 2) \cdot (b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots) = 0. \end{array} \right.$$

Определим коэффициенты при критической переменной z в наименьшей степени в обоих уравнениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} (b_1 + 2b_2 z + 3b_3 z^2 + \dots) \cdot ((b_1 - 3)z^2 + b_2 z^3 + b_3 z^4 + \dots) = 0, \\ (1 - 2b_1)z + (b_1 - 2b_2)z^2 + (b_2 - 2b_3)z^3 + \dots = 0; \\ \begin{cases} b_1(b_1 - 3)z^2 + (b_1 b_2 + 2b_2(b_1 - 3))z^3 + \dots = 0, \\ (1 - 2b_1)z + (b_1 - 2b_2)z^2 + (b_2 - 2b_3)z^3 + \dots = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Если

$$1 - 2b_1 = 0, \text{ т.е. } b_1 = \frac{1}{2},$$

то в присоединённой системе критическая переменная свободно входит только со второй степени. Подставляем $b_1 = \frac{1}{2}$ в укороченную систему:

$$u_1 = \frac{1}{2}z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots,$$

$$\dot{z} = \left(\frac{1}{2}z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots \right) \cdot z - 3z^2 = -\frac{5}{2}z^2 + b_2 z^3 + b_3 z^4 + \dots$$

Так как младшая степень в уравнении для z равна 2, то решение неустойчиво.

Пример 4.2. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 3x_2x_3, \\ \dot{x}_2 = \frac{3}{7}x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_1x_2 + 5x_2^2, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - \frac{1}{2}x_1x_3 - x_3^2. \end{cases}$$

Выпишем линеаризованную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{3}{7}x_1 - 5x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_2. \end{cases}$$

Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{7} & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ \frac{3}{7} & -5 - \lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left(\lambda^2 + 5\lambda + \frac{4}{7} \right) = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 \approx -0,117, \quad \lambda_3 \approx -4,8829.$$

Выделим критическую переменную

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3.$$

Найдём коэффициенты p_i :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= p_1x_2 + p_2 \left(\frac{3}{7}x_1 - 5x_2 + x_3 \right) - p_3x_2 + \dots = \\ &= \frac{3}{7}p_2x_1 + (p_1 - 5p_2 - p_3)x_2 + p_2x_3 + \dots \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при линейных членах, получаем систему

$$\begin{cases} \frac{3}{7}p_2 = 0, \\ p_1 - 5p_2 - p_3 = 0, \\ p_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_2 = 0, \\ p_1 - p_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 1, \\ p_2 = 0, \\ p_3 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$z = x_1 + x_3 \Rightarrow x_3 = z - x_1.$$

Подставим в систему. После элементарных преобразований она приводится к специальному виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 3x_1x_2 + 3x_2z, \\ \dot{x}_2 = -\frac{4}{7}x_1 - 5x_2 + z + 4x_1x_2 + 5x_2^2, \\ \dot{z} = -3x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_1z + 3x_2z - z^2. \end{cases}$$

Имеем **общий случай**. Надо сделать нелинейную замену, чтобы убрать свободно входящую критическую переменную z во втором уравнении.

Замена:

$$\begin{cases} x_1 = \eta_1 + u_1(z), \\ x_2 = \eta_2. \end{cases}$$

Функцию $u_1(z)$ будем искать в виде

$$u_1(z) = b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 + b_4z^4 + \dots$$

Найдём $\frac{dz}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -\frac{1}{2}(b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 + b_4z^4 + \dots)^2 + \frac{3}{2}(b_1z^2 + b_2z^3 + b_3z^4 + \dots) - z^2 = \\ &= -\frac{1}{2}((b_1)^2 z^2 + 2b_1b_2z^3 + 2b_1b_3z^4 + (b_2)^2 z^4 + \dots) + \left(\frac{3}{2}b_1 - 1\right)z^2 + \frac{3}{2}b_2z^3 + \\ &+ \frac{3}{2}b_3z^4 + \dots = \left(-\frac{1}{2}(b_1)^2 + \frac{3}{2}b_1 - 1\right)z^2 + \left(\frac{3}{2}b_2 - b_1b_2\right)z^3 + \left(\frac{3}{2}b_3 - b_1b_3 - \frac{1}{2}(b_2)^2\right)z^4 + \dots \end{aligned}$$

Подставим в систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = (b_1 + 2b_2z + 3b_3z^2 + 4b_4z^3 + \dots) \cdot \\ \cdot \left(\left(-\frac{1}{2}(b_1)^2 + \frac{3}{2}b_1 - 1 \right) z^2 + \left(\frac{3}{2}b_2 - b_1b_2 \right) z^3 + \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{2}b_3 - b_1b_3 - \frac{1}{2}(b_2)^2 \right) z^4 + \dots \right), \\ 0 = \left(1 - \frac{4}{7}b_1 \right) z - \frac{4}{7}b_2z^2 - \frac{4}{7}b_3z^3 - \frac{4}{7}b_4z^4 + \dots, \\ \dot{z} = \left(-\frac{1}{2}(b_1)^2 + \frac{3}{2}b_1 - 1 \right) z^2 + \left(\frac{3}{2}b_2 - b_1b_2 \right) z^3 + \\ + \left(\frac{3}{2}b_3 - b_1b_3 - \frac{1}{2}(b_2)^2 \right) z^4 + \dots \end{array} \right.$$

Из второго уравнения находим

$$1 - \frac{4}{7}b_1 = 0 \Leftrightarrow b_1 = \frac{7}{4}.$$

Подставляем в $\frac{dz}{dt}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{3}{32} \cdot z^2 - \frac{1}{4}b_2z^3 + \left(-\frac{9}{8}b_3 - \frac{1}{2}(b_2)^2 \right) z^4 + \dots$$

Так как разложение начинается с чётной степени, невозмущённое движение неустойчиво.

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ В ФОРМЕ М.Ф. ШУЛЬГИНА. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ BALL AND BEAM

Один из важнейших классов механических систем, динамика которых задаётся уравнениями, среди корней характеристических уравнений которых возникают нулевые, — это голономные системы с нелинейными связями. Напомним, что *голономной* называется механическая система, в которой все связи являются голономными, т.е. геометрическими или сводящимися к геометрическим и налагающими ограничения только на положения (перемещения) точек и тел системы, но не на их скорости (в отличие от неголономных систем). Простейшей голономной системой со связью является, например, математический маятник, если считать стержень нерастяжимым.

В этой главе мы рассмотрим способ построения математической модели такой системы с помощью уравнений Шульгина.

Пусть конфигурация механической системы с n степенями свободы задаётся параметрами $q_1, \dots, q_{n+m}$, взятыми в числе, превосходящем необходимое число n . Тогда m из этих $n + m$ параметров называются **избыточными координатами**.

Пусть также уравнения связей задаются m независимыми соотношениями:

$$F_k(q_1, \dots, q_{n+m}) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (5.1)$$

Независимость уравнений (5.1) означает, что выполнено соотношение

$$\text{rank} \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(q_1, \dots, q_{n+m})} = m. \quad (5.2)$$

Когда на параметры механической системы наложены ограничения, приращения координат не являются независимыми. В этом случае

для математического моделирования динамики такой системы нельзя воспользоваться уравнениями Лагранжа второго рода, так как вывод этих уравнений основывается именно на независимости вариаций параметров системы.

Если уравнения связи (5.1) нелинейные, то от них сложно избавиться простым исключением «лишних» переменных. В этом случае стандартно применяются уравнения Лагранжа со множителями связей:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \tilde{Q}_s + \sum_{k=1}^m \lambda_k b_{ks}, \quad s=1, \dots, n+m, \quad (5.3)$$

где T — кинетическая энергия; $\tilde{Q}_s$ — потенциальные и непотенциальные силы, действующие на систему; λ_k — (неизвестные) множители связей. Коэффициенты b_{ks} определяются из уравнений связей (5.1) после их дифференцирования по времени

$$\sum_{s=1}^{n+m} \frac{\partial F_k}{\partial q_s} \cdot \dot{q}_s = \sum_{s=1}^{n+m} b_{ks} \cdot \dot{q}_s = 0, \quad k=1, \dots, m. \quad (5.4)$$

Отметим, что $\frac{\partial b_{ks}}{\partial q_r} = \frac{\partial b_{kr}}{\partial q_s}$. Действительно,

$$\frac{\partial b_{ks}}{\partial q_r} = \frac{\partial}{\partial q_r} \left(\frac{\partial F_k}{\partial q_s} \right) = \frac{\partial^2 F_k}{\partial q_r \partial q_s} = \frac{\partial^2 F_k}{\partial q_s \partial q_r} = \frac{\partial}{\partial q_s} \left(\frac{\partial F_k}{\partial q_r} \right) = \frac{\partial b_{kr}}{\partial q_s}.$$

Итак, для моделирования динамики систем со связями стандартным решением является использование уравнений Лагранжа со множителями связей, однако такой подход имеет и ряд неудобств. Неизвестные множители связей нужно находить, определяя реакции связей. Это усложняет решение задачи и увеличивает её размерность. Достаточно простой и эффективный для практического применения метод получения свободных от множителей связей уравнений движения систем с избыточными координатами был разработан М.Ф. Шульгиным. Перейдём теперь к его изложению.

Обозначим:

$$\tilde{B}(q_1, \dots, q_{n+m}) = (b_{ks})_{m \times (n+m)}$$

— матрица размера $m \times (n+m)$, элементы которой взяты из уравнения (5.4).

В общем случае кинетическая энергия системы (без учёта связей)

$$T(q_1, \dots, q_{n+m}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n+m})$$

является функцией параметров системы $q_1, \dots, q_{n+m}$ и их скоростей.

Допустим без ограничения общности, что в рассматриваемой области пространства

$$\det \left[\frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (q_{n+1}, \dots, q_{n+m})} \right] \neq 0. \quad (5.5)$$

Действительно, в силу (5.2) $\text{rank} \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{q}} \right) = m$, поэтому можем выбрать m координат так, чтобы выполнялось уравнение (5.4). Здесь есть выбор, какие именно координаты считать зависимыми. Конкретное решение зависит от постановки задачи и вида уравнений (5.1).

Запишем уравнения связей в разрешённом относительно скоростей зависимых координат виде:

$$\sum_{s=1}^{n+m} b_{ks} \cdot \dot{q}_s = 0 \Rightarrow \dot{q}_k = \sum_{j=1}^n B_{kj}(\vec{q}) \cdot \dot{q}_j, \quad k = n+1, \dots, n+m, \quad (5.6)$$

где вектор $\vec{q} = (q_1, \dots, q_{n+m})^T$.

Введём матрицу коэффициентов уравнения (5.6):

$$B(\vec{q}) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{11} & B_{11} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & \dots & B_{mn} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m \times n} \quad \underbrace{\hspace{5em}}_{m \times m}$

Тогда уравнения динамики (5.3) преобразуются к виду:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \tilde{Q}_j + \sum_{k=1}^m \lambda_k B_{kj}, & j = 1, \dots, n, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}} - \frac{\partial T}{\partial q_{n+k}} = \tilde{Q}_{n+k} + \lambda_k, & k = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (5.7)$$

Тогда из последних m уравнений системы (5.7) множители λ_k легко выражаются:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}} - \frac{\partial T}{\partial q_{n+k}} - \tilde{Q}_{n+k} = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (5.8)$$

И подставляя уравнение (5.8) в оставшиеся n уравнений системы (5.7), получим следующие уравнения:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \tilde{Q}_j + \sum_{k=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}} - \frac{\partial T}{\partial q_{n+k}} - \tilde{Q}_{n+k} \right) \cdot B_{kj}, \quad j=1, \dots, n. \quad (5.9)$$

Преобразуем ещё уравнения (5.9), чтобы упростить их вид. Исключим из выражения для кинетической энергии зависимые скорости, используя уравнение (5.6). Полученное выражение обозначим

$$T^* = T(q_1, \dots, q_{n+m}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_{n+k}} &= 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_{n+k}} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T^*}{\partial q_j} &= \tilde{Q}_j - \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial T^*}{\partial q_{n+k}} + \tilde{Q}_{n+k} \right) \cdot B_{kj}, \quad j=1, \dots, n. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T^*}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial T^*}{\partial q_{n+k}} \cdot B_{kj} = \tilde{Q}_j - \sum_{k=1}^m \tilde{Q}_{n+k} \cdot B_{kj}, \quad j=1, \dots, n. \quad (5.10)$$

Силы $\tilde{Q}_j, \tilde{Q}_{n+k}$ можно разделить на потенциальные и непотенциальные:

$$\tilde{Q}_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j, \quad \tilde{Q}_{n+k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_{n+k}} + Q_{n+k}. \quad (5.11)$$

Подставим выражение (5.11) в уравнения (5.10):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T^*}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial T^*}{\partial q_{n+k}} \cdot B_{kj} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \\ + Q_j - \sum_{k=1}^m \left(Q_{n+k} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_{n+k}} \right) \cdot B_{kj}, \quad j=1, \dots, n. \end{aligned}$$

Или, группируя члены,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T^* - \Pi)}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial (T^* - \Pi)}{\partial q_{n+k}} \cdot B_{kj} &= \\ = Q_j - \sum_{k=1}^m Q_{n+k} B_{kj}, \quad j=1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Введём следующие обозначения:

$r = (q_1, \dots, q_n)^T$ — вектор независимых координат;

$s = (q_{n+1}, \dots, q_{n+m})^T$ — вектор зависимых координат;

$L^*(r, s; \dot{r}) = T^*(r, s; \dot{r}) - \Pi(r, s)$ — функция Лагранжа после исключения скоростей зависимых координат.

Заметим, что, так как потенциальная энергия $\Pi(r, s)$ не зависит от скоростей $\dot{q}_j$, $j = 1, \dots, n$, то $\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T^* - \Pi)}{\partial \dot{q}_j}$. Тогда уравнения (5.12) можно записать в ещё более компактном виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L^*}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial L^*}{\partial q_{n+k}} \cdot B_{kj} = Q_j - \sum_{k=1}^m Q_{n+k} B_{kj}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.13)$$

Наконец, в векторно-матричной записи, уравнения (5.13) имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L^*}{\partial r} = Q_r^* + B'(q) \left(\frac{\partial L^*}{\partial s} + Q_s^* \right). \quad (5.14)$$

Уравнения (5.13) (в скалярной записи) или (5.14) (в векторно-матричной записи) называются уравнениями Шульгина (или уравнениями в форме М.Ф. Шульгина). Они не содержат множителей связей и их число равно n — числу степеней свободы системы. Заметим, что их нужно рассматривать совместно с уравнениями связей (5.6).

Теперь рассмотрим пример применения уравнений Шульгина для построения нелинейной математической модели механической системы GBB1005 Ball and Beam («Шар и желоб»). Это лабораторный стенд, широко используемый для изучения динамики нелинейных управляемых объектов и различных стратегий управления.

Существует несколько разновидностей систем «Шар и желоб», нам будет интересна система с геометрической связью (рис. 5.1).

Система состоит из шара, катящегося по жёлобу под действием силы тяжести. Жёлоб прикреплен одним концом (точка O) к неподвижной опоре, а другим соединяется с нерастяжимым стержнем AB , который, в свою очередь, связан с колесом редуктора электропривода. В точках O , A , B имеются плоские шарниры, так что когда колесо поворачивается на некоторый угол θ , жёлоб изменяет свой угол наклона α . Задача системы — стабилизировать шар в некоторой точке r_0 на жёлобе, задаваемой заранее пользователем.

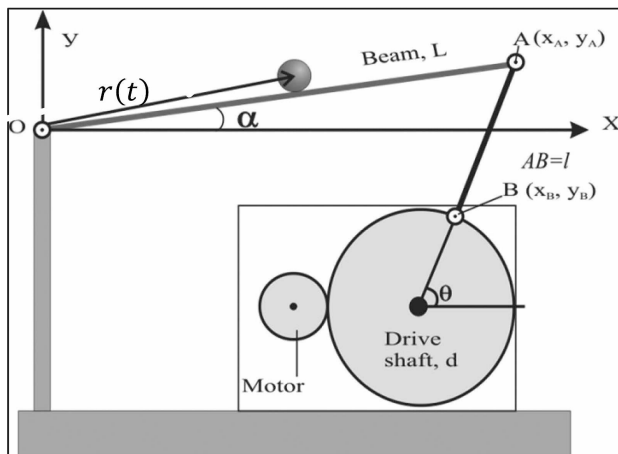


Рис. 5.1. Схема системы GBB1005 Ball and Beam

Уравнение связи системы задаётся выражением

$$F(r, \alpha, \theta) = (L(\cos \alpha - 1) + d(1 - \cos \theta))^2 + (L \sin \alpha + l - d \sin \theta)^2 = l^2, \quad (5.15)$$

которое легко получается из условия, что квадрат расстояния между точками A и B постоянен и равен l^2 , если l — длина стержня AB , L — длина жёлоба, а d — радиус колеса. Система координат введена, как показано на рис. 5.1. Несмотря на кажущуюся простоту задачи, уравнение связи нелинейно и содержит тригонометрические функции, поэтому исключить какой-либо один из углов проблематично.

Очевидно, что положение равновесия возможно только тогда, когда жёлоб расположен горизонтально. В этом случае $\alpha = 0$ и из уравнения связи (5.15) можно найти соответствующее значение угла θ :

$$d^2 (1 - \cos \theta)^2 + (l - d \sin \theta)^2 = l^2.$$

Раскрываем скобки:

$$d^2 - 2d^2 \cos \theta + d^2 \cos^2 \theta + l^2 - 2dl \sin \theta + d^2 \sin^2 \theta = l^2.$$

После приведения подобных членов

$$2d^2 - 2d^2 \cos \theta - 2dl \sin \theta = 0 \Rightarrow d \cos \theta + l \sin \theta = d.$$

Теперь разделим уравнение на $\sqrt{d^2 + l^2}$:

$$\frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}} \cdot \cos \theta + \frac{l}{\sqrt{d^2 + l^2}} \cdot \sin \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}}. \quad (5.16)$$

Из уравнения (5.16) сразу следует нулевое решение $\theta_1 = 0$. Но есть и другое, ненулевое решение. Действительно, так как

$$\left(\frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}} \right)^2 + \left(\frac{l}{\sqrt{d^2 + l^2}} \right)^2 = 1,$$

то уравнение (5.16) можно представить в виде

$$\cos \varphi \cdot \cos \theta + \sin \varphi \cdot \sin \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}},$$

где $\cos \varphi = \frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}}$, $\sin \varphi = \frac{l}{\sqrt{d^2 + l^2}}$. Тогда

$$\cos \varphi \cdot \cos \theta + \sin \varphi \cdot \sin \theta = \cos(\theta - \varphi) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta - \varphi = \arccos\left(\frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}}\right) \Rightarrow \theta = \varphi + \arccos\left(\frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_2 = 2 \arccos\left(\frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}}\right).$$

Оба решения также легко получить из геометрических соображений (рис. 5.2 и 5.3).

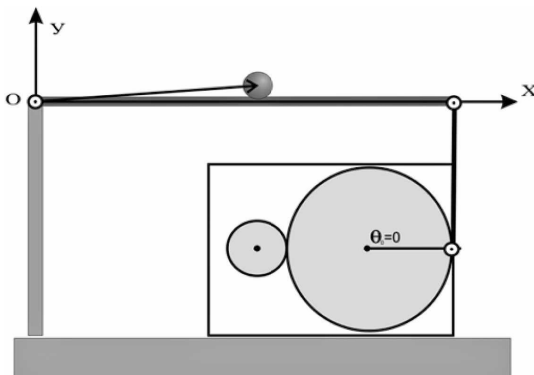


Рис. 5.2. Нулевое положение равновесия системы GVB1005 Ball and Beam

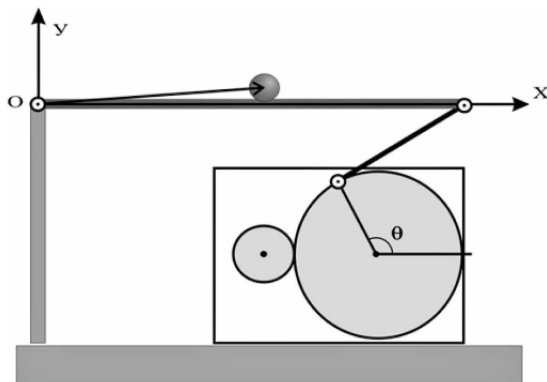


Рис. 5.3. Ненулевое положение равновесия системы GBB1005 Ball and Beam

Отметим, что без приложения постоянного момента, создаваемого приводным двигателем, в рассматриваемой конструкции Ball and Beam равновесия не существует! Постоянный момент для заданного положения является отличной от нуля позиционной неконсервативной силой.

Напомним, что *позиционные силы* — силы, действующие на материальную точку и зависящие только от координат материальной точки. Примерами позиционных сил являются сила упругости, сила всемирного тяготения.

Консервативные или потенциальные силы — это силы, работа которых не зависит от вида траектории, точки приложения этих сил и закона их движения и определяется только начальным и конечным положением этой точки. Пример консервативных или потенциальных сил — сила тяжести, сила упругости.

Если в системе действуют только консервативные силы, то механическая энергия системы сохраняется.

Неконсервативные или диссипационные силы — это силы, работа которых зависит от формы траектории и пройденного пути. Пример таких сил — сила трения скольжения, силы сопротивления воздуха или жидкости.

Примечательно, что в большинстве работ, посвящённых стабилизации равновесия системы GBB1005 Ball and Beam, рассматривается только одно положение равновесия, когда $\alpha = 0$, $\theta = 0$. Также просто

решается вопрос с нелинейной связью — нелинейное уравнение (5.15) заменяется линеаризованным в окрестности нуля:

$$\alpha \approx \frac{d}{L} \theta, \quad (5.17)$$

а после исключения одного из углов для построения математической модели применяются уравнения Лагранжа второго рода. При таком способе решения задачи второе положение равновесия теряется в принципе, а линеаризация связи в нулевом положении равновесия, хотя и возможна в данной ситуации, в общем случае может привести к неверным результатам. Далее это будет показано.

Используем уравнения Шульгина, чтобы построить математическую модель динамики системы GBB1005 Ball and Beam с учётом нелинейной связи.

Геометрическая конфигурация системы полностью задаётся **тремя параметрами**: $r(t)$ — положение шара в жёлобе, $\alpha(t)$ — угол наклона жёлоба, $\theta(t)$ — угол поворота колеса редуктора электропривода. При этом система имеет две степени свободы, так как параметры $\alpha(t)$ и $\theta(t)$ связаны нелинейной зависимостью (5.15).

Заметим, что в качестве зависимой (избыточной) координаты можно выбрать любой из углов: $\alpha(t)$ или $\theta(t)$. Математические уравнения динамики системы при этом будут различны, но это не окажет влияния на работу системы в целом.

Для упрощения модели, сделаем следующие допущения:

- рассматриваем плоскую задачу;
- пренебрегаем толщиной колеса редуктора электропривода;
- учитываем радиус R шара;
- массу жёлоба считаем пренебрежимо малой;
- трение не учитываем;
- шарниры идеально плоские;
- звено AB считаем тонким прямым невесомым, абсолютно жестким стержнем.

Тогда кинетическую энергию запишем в виде

$$T = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} + \frac{J_0}{2} \dot{\theta}^2,$$

где V_C — скорость центра масс шара (складывающаяся из движения вдоль желоба и движения по касательной к окружности); $\omega = \dot{\alpha} - \frac{\dot{r}}{R}$ — полная угловая скорость шара; $J = \frac{2}{5}mR^2$ — момент инерции шара; J_0 — момент инерции всей системы, приведённой к валу двигателя.

Потенциальную энергию запишем в виде

$$\Pi = mg(r \sin \alpha + R \cos \alpha).$$

По координате θ на систему действует непотенциальная сила

$$Q_\theta = v - b_0 \dot{\theta},$$

где v — механический момент. Его можно выбрать за управление, b_0 — коэффициент сопротивления вращению.

В качестве избыточной координаты выберем угол θ .

Продифференцируем по времени уравнение связи (5.15). Получим уравнение кинематических связей в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \dot{\theta} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow L[d \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \alpha + l \cos \alpha] \dot{\alpha} - & \quad (5.18) \\ -d[L \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \theta + l \cos \theta] \dot{\theta} &= 0. \end{aligned}$$

Из полученного уравнения (5.18) выразим скорость зависимой координаты $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{d} \cdot \frac{d \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \alpha + l \cos \alpha}{L \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \theta + l \cos \theta} \cdot \dot{\alpha} = B(\alpha, \theta) \cdot \dot{\alpha}. \quad (5.19)$$

Теперь распишем выражение для функции Лагранжа и исключим из него зависимую скорость $\dot{\theta}$ с помощью выражения (5.19):

$$\begin{aligned} L = T - \Pi &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} (r^2 + R^2) \left(\dot{\alpha} - \frac{R \dot{r}}{r^2 + R^2} \right)^2 + \frac{J}{2} \left(\dot{\alpha} - \frac{\dot{r}}{R} \right)^2 + \frac{J_0}{2} \dot{\theta}^2 - \\ &\quad - mg(r \sin \alpha + R \cos \alpha); \\ L^* &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} (r^2 + R^2) \left(\dot{\alpha} - \frac{R \dot{r}}{r^2 + R^2} \right)^2 + \frac{J}{2} \left(\dot{\alpha} - \frac{\dot{r}}{R} \right)^2 + \frac{J_0}{2} B^2(\alpha, \theta) \dot{\alpha}^2 - \\ &\quad - mg(r \sin \alpha + R \cos \alpha). \end{aligned}$$

Аналогично для выражения непотенциальной силы:

$$Q_{\theta}^* = v - b_0 B(\alpha, \theta) \dot{\alpha}.$$

Теперь запишем уравнения Шульгина для системы Ball and Beam в случае зависимой координаты θ . В этом случае вектор независимых координат содержит две компоненты — $q_1 = r$ и $q_2 = \alpha$, а зависимая (избыточная) координата всего одна: $q_3 = \theta$. Следовательно, система будет состоять из двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L^*}{\partial r} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L^*}{\partial \alpha} = B(\alpha, \theta) \left(\frac{\partial L^*}{\partial \theta} + Q_{\theta} \right). \end{cases} \quad (5.20)$$

Действительно, в общем векторно-матричном виде уравнения Шульгина имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{Q}_r + B'(\mathbf{q}) \left(\frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{s}} + \mathbf{Q}_s \right).$$

В соответствии с задачей и введёнными обозначениями:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix}, \mathbf{s} = \theta, \mathbf{Q}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{Q}_s = Q_{\theta} = v - b_0 B \dot{\alpha}, \quad n = 2, \quad m = 1;$$

$$\dot{\theta} = \underbrace{(0 \quad B(\alpha, \theta))}_{B - 1 \times 2 \text{ матрица}} \cdot \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}} \\ \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L^*}{\partial r} \\ \frac{\partial L^*}{\partial \alpha} \end{pmatrix}, \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial L^*}{\partial \theta}.$$

Наконец, найдём все необходимые производные, чтобы записать систему в явном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}} &= m \dot{r} + m(r^2 + R^2) \left(\dot{\alpha} - \frac{R \dot{r}}{r^2 + R^2} \right) \left(\frac{-R}{r^2 + R^2} \right) - \frac{J}{R} \left(\dot{\alpha} - \frac{\dot{r}}{R} \right) = \\ &= \left(m + \frac{J}{R^2} + m R^2 \frac{1}{r^2 + R^2} \right) \dot{r} - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \dot{\alpha}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}} &= \left(m + \frac{J}{R^2} + mR^2 \frac{1}{r^2 + R^2} \right) \ddot{r} - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{\alpha} - \\
&\quad - mR^2 \left(\frac{2r}{(r^2 + R^2)^2} \right) \dot{r}^2 = \\
&= \left(m + \frac{J}{R^2} + mR^2 \frac{1}{r^2 + R^2} \right) \ddot{r} - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{\alpha} - 2mR^2 \frac{r}{(r^2 + R^2)^2} \dot{r}^2; \\
\frac{\partial L^*}{\partial r} &= mr \left(\dot{\alpha} - \frac{R\dot{r}}{r^2 + R^2} \right)^2 + m(r^2 + R^2) \left(\dot{\alpha} - \frac{R\dot{r}}{r^2 + R^2} \right) \frac{2Rr \cdot \dot{r}}{(r^2 + R^2)^2} - \\
&\quad - mg \sin \alpha = mr\dot{\alpha}^2 - 2mR \cdot \frac{r}{r^2 + R^2} \dot{\alpha}\dot{r} + mR^2 \frac{r}{(r^2 + R^2)^2} \dot{r}^2 + \\
&\quad + 2mR \frac{r}{r^2 + R^2} \dot{\alpha}\dot{r} - 2mR^2 \frac{r}{(r^2 + R^2)^2} \dot{r}^2 - mg \sin \alpha = \\
&= mr\dot{\alpha}^2 - mR^2 \frac{r}{(r^2 + R^2)^2} \dot{r}^2 - mg \sin \alpha.
\end{aligned}$$

Первое уравнение системы (5.20) после приведения подобных членов будет иметь вид

$$\begin{aligned}
&\left(m + \frac{J}{R^2} + mR^2 \frac{1}{r^2 + R^2} \right) \ddot{r} - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{\alpha} - mR^2 \frac{r}{(r^2 + R^2)^2} \dot{r}^2 - \\
&\quad - mr\dot{\alpha}^2 + mg \sin \alpha = 0.
\end{aligned}$$

Найдём производные для второго уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\alpha}} &= m(r^2 + R^2) \left(\dot{\alpha} - \frac{R\dot{r}}{r^2 + R^2} \right) + J \left(\dot{\alpha} - \frac{\dot{r}}{R} \right) + J_0 B^2(\alpha, \theta) \dot{\alpha} = \\
&= m(r^2 + R^2) \dot{\alpha} - mR\dot{r} + J\dot{\alpha} - \frac{J}{R} \dot{r} + J_0 B^2(\alpha, \theta) \dot{\alpha} = \\
&= (m(r^2 + R^2) + J_0 B^2(\alpha, \theta) + J) \dot{\alpha} - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \dot{r};
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\alpha}} = \left(m(r^2 + R^2) + J_0 B^2(\alpha, \theta) + J \right) \ddot{\alpha} - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{r} + 2mr \cdot \dot{r} \dot{\alpha} +$$

$$+ 2J_0 B \cdot \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \theta} B \right) \dot{\alpha}^2;$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \alpha} = J_0 B(\alpha, \theta) \frac{\partial B}{\partial \alpha} \dot{\alpha}^2 - mg(r \cos \alpha - R \sin \alpha);$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \theta} = J_0 B(\alpha, \theta) \frac{\partial B}{\partial \theta} \dot{\alpha}^2.$$

Второе уравнение системы после приведения подобных членов будет иметь вид:

$$\left(m(r^2 + R^2) + J_0 B^2(\alpha, \theta) + J \right) \ddot{\alpha} - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{r} + 2mr \cdot \dot{r} \dot{\alpha} +$$

$$+ J_0 B \cdot \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \theta} B \right) \dot{\alpha}^2 + mg(r \cos \alpha - R \sin \alpha) = BQ_0.$$

В итоге получим систему дифференциальных уравнений динамики в форме М.Ф. Шульгина для системы GBB1005 Ball and Beam

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(m + \frac{J}{R^2} + mR^2 \frac{1}{r^2 + R^2} \right) \ddot{r} - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{\alpha} - \\ - mR^2 \frac{r}{(r^2 + R^2)^2} \dot{r}^2 - mr \dot{\alpha}^2 + mg \sin \alpha = 0, \\ \left(m(r^2 + R^2) + J_0 B^2(\alpha, \theta) + J \right) \ddot{\alpha} - R \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{r} + \\ + 2mr \cdot \dot{r} \dot{\alpha} + J_0 B \cdot \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \theta} B \right) \dot{\alpha}^2 + \\ + mg(r \cos \alpha - R \sin \alpha) = B(v - b_0 B \dot{\alpha}), \\ \dot{\theta} = B \dot{\alpha}, \end{array} \right. \quad (5.21)$$

где

$$B = B(\alpha, \theta) = \frac{L}{d} \cdot \frac{d \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \alpha + l \cos \alpha}{L \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \theta + l \cos \theta}.$$

Чтобы найти значения всех параметров системы в положении равновесия, надо подставить в систему (5.21) значения:

$$r = r_0, \quad \alpha = 0, \quad \theta = \theta_i, \quad i = 1, 2,$$

где, как было вычислено ранее,

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 2 \arccos \left(\frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}} \right).$$

Тогда из второго уравнения системы (5.20) будем иметь:

$$mgr_0 = B(0, \theta_i) \cdot v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{mgr_0}{B(0, \theta_i)}.$$

Следующие шаги по решению задачи устойчивости заключаются в ведении возмущений по всем координатам и выделении первого приближения в окрестности исследуемых положений равновесия.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. — М.: Наука, 1971.
2. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учебное пособие. — 5-е изд. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013.
4. Баринаева Е.В. Основы теории устойчивости движения применительно к задачам космической техники: Учебное пособие. — Самара: Самарский университет, 2023.
5. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. Научные труды САГУ. — Ташкент: Изд-во САГУ, 1958.
6. Лурье А.И. Аналитическая механика. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961.
7. Сулов Г.К. Теоретическая механика. — М.-Л.: ОГИЗ, 1946.
8. Красинский А.Я., Красинская Э.М. Приложение математической теории управления к задачам управления мехатронными системами. Ч. I. Принцип сведения: Методические указания к самостоятельной работе. — М.: МГУПБ, 2009.
9. Красинская Э.М., Красинский А.Я., Обносов К.Б. О развитии научных методов школы М.Ф. Шульгина в применении к задачам устойчивости и стабилизации равновесий мехатронных систем с избыточными координатами: Сборник научно-методических статей. Вып. 28. Теор. мех. / Под ред. проф. Ю.Г. Мартыненко. — М.: Изд-во МГУ, 2012.
10. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. — М.-Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950.
11. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. — М.: Наука, 1966.
12. Карапетян А.В. Устойчивость и бифуркация движений. — М.: Изд-во МГУ, 2020.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.	3
Глава 1. Введение в теорию устойчивости.	6
Глава 2. Основные понятия теории устойчивости. Метод функций Ляпунова	21
Глава 3. Теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости и о неустойчивости по первому приближению	39
Глава 4. Основные принципы теории критических случаев.	57
Глава 5. Уравнения динамики голономных систем в форме М.Ф. Шульгина. Построение математической модели динамики системы Ball and Beam	69
Библиографический список	83

Тем. план 2026, ч. 1, поз. 27

Ильина Анастасия Николаевна
Красинский Александр Яковлевич

ОСНОВЫ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ

Редактор *О.А. Пелипенко*

Сдано в набор 24.12.2025. Подписано в печать 30.01.2026.

Бумага офсетная. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 5,25. Тираж 200 экз.

Заказ 707/1436.

Издательство МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4
Москва, А-80, ГСП-3 125993

Типография Издательства МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4
Москва, А-80, ГСП-3 125993

