МАИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Т. А. ЛЕТОВА

А. В. ПАНТЕЛЕЕВ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИЙ

МОСКВА • 1998

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(технический университет)

Т.А. ЛЕТОВА А.В. ПАНТЕЛЕЕВ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИЙ

Учебное пособие

Утверждено
на заседании редсовета
25 декабря 1996 г.

Москва

Издательство МАИ

1998

Летова Т.А., Пантелеев А.В. Аналитические методы поиска экстремума функций: Учебное пособие. - М.: Изд-во МАИ, 1998.- 48 с.: ил.

Изложены аналитические методы решения задач безусловной и условной минимизации функций на основе необходимых и достаточных условий экстремума. Применение каждого метода продемонстрировано на решениях типовых примеров.

Рецензенты: *кафедра "Информатики и процессов управления" Московского государственного инженерно-физического института*; *к-т техн. наук А.М. Шевченко*

ISBN 5-7035-1977-2

Тем. план 1998, поз. 64

Летова Татьяна Александровна

Пантелеев Андрей Владимирович

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИЙ

Редактор *Е.В. Лисовец*

Сдано в набор 01.10.97. Подписано в печать 23.12.97
Бум. газетная. Формат 60 × 84 1/16. Печать офсетная
Усл. печ.л. 2,79. Уч.-изд.л. 3,0. Тираж 200
Зак. **2348** /1256. С. 78

Типография Издательства МАИ
125871, Москва, Волоколамское шоссе, 4

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ И ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Постановка задачи поиска минимума функций содержит:

- целевую функцию $f(x)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, определенную на n-мерном евклидовом пространстве R^n. Ее значения характеризуют степень достижения цели, во имя которой поставлена или решается задача;

- множество допустимых решений $X \subseteq R^n$, среди элементов которого осуществляется поиск.

Требуется найти такой вектор x^* из множества допустимых решений, которому соответствует минимальное значение целевой функции на этом множестве:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x). \tag{1.1}$$

Замечания 1.1.

1. Задача поиска максимума функции $f(x)$ сводится к задаче поиска минимума путем замены знака перед функцией на противоположный:

$$f(x^*) = \max_{x \in X} f(x) = -\min_{x \in X} [-f(x)].$$

2. Задача поиска минимума и максимума целевой функции $f(x)$ называется задачей поиска *экстремума*: $f(x^*) = \operatorname{extr}_{x \in X} f(x)$.

3. Если множество допустимых решений X задается ограничениями (условиями), накладываемыми на вектор x, то решается задача поиска *условного экстремума*. Если $X = R^n$, т.е. ограничения (условия) на вектор x отсутствуют, решается задача поиска *безусловного экстремума*.

Определение 1.1. Точка $x^* \in X$ называется точкой *глобального (абсолютного) минимума* функции $f(x)$ на множестве X, если функция достигает в этой точке своего наименьшего значения, т.е. $f(x^*) \le f(x) \quad \forall x \in X$.

Определение 1.2. Точка $x^* \in X$ называется точкой *локального (относительного) минимума* функции $f(x)$ на множестве X, если существует $\varepsilon > 0$, такое, что если $x \in X$ и $\|x - x^*\| < \varepsilon$, то $f(x^*) \le f(x)$. Здесь $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ - евклидова норма вектора x.

Замечания 1.2.

1. В определении 1.1 точка x^* сравнивается со всеми точками из множества допустимых решений X, а в определении 1.2 - только с принадлежащими ε - окрестности.

2. Если в определениях 1.1 и 1.2 знак неравенства $\le$ заменить на $\ge$, то получатся определения *глобального (абсолютного)* и *локального (относительного) максимумов*.

3. Глобальный экстремум всегда является одновременно локальным, но не наоборот.

Определение 1.3. Поверхностью уровня функции $f(x)$ называется множество точек, в которых функция принимает постоянное значение, т.е. $f(x) = \text{const}$. Если $n = 2$, поверхность уровня изображается *линией уровня* на плоскости R^2.

Определение 1.4. Градиентом $\nabla f(x)$ непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ в точке x называется вектор-столбец, элементами которого являются частные производные первого порядка, вычисленные в данной точке:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \; \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T. \qquad (1.2)$$

Градиент функции направлен по нормали к поверхности уровня (см. определение 1.3), т.е. перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в точке x, в сторону наибольшего возрастания функции в данной точке.

Определение 1.5. Матрицей Гессе $H(x)$ дважды непрерывно дифференцируемой в точке x функции $f(x)$ называется матрица частных производных второго порядка, вычисленных в данной точке:

$$H(x) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & & h_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{где } h_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \; i, j = 1,\ldots,n. \qquad (1.3)$$

Матрица Гессе является симметрической размера $(n \times n)$.

Определение 1.6. Квадратичная форма $\Delta x^T H(x) \Delta x$ (а также соответствующая матрица Гессе $H(x)$) называется:

положительно определенной $(H(x) > 0)$, если для любого ненулевого Δx выполняется неравенство $\Delta x^T H(x) \Delta x > 0$;

отрицательно определенной $(H(x) < 0)$, если для любого ненулевого Δx выполняется неравенство $\Delta x^T H(x) \Delta x < 0$;

положительно полуопределенной $(H(x) \geq 0)$, если для любого Δx выполняется неравенство $\Delta x^T H(x) \Delta x \geq 0$ и имеется отличный от нуля вектор Δx, для которого $\Delta x^T H(x) \Delta x = 0$;

отрицательно полуопределенной $(H(x) \leq 0)$, если для любого Δx выполняется неравенство $\Delta x^T H(x) \Delta x \leq 0$ и имеется отличный от нуля вектор Δx, для которого $\Delta x^T H(x) \Delta x = 0$;

неопределенной ($H(x) \gtrless 0$) , если существуют такие векторы Δx, $\Delta \tilde{x}$, что выполняются неравенства $\Delta x^T H(x) \Delta x > 0$, $\Delta \tilde{x}^T H(x) \Delta \tilde{x} < 0$;

тождественно равной нулю $(H(x) \equiv 0)$, если для любого Δx выполняется $\Delta x^T H(x) \Delta x = 0$.

Пример 1.1. Классифицировать матрицу Гессе $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

□ Выпишем квадратичную форму:

$$\Delta x^T H\, \Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = 2\Delta x_1^2 + 2\Delta x_2^2 .$$

Очевидно, $\Delta x^T H\, \Delta x > 0$ для любого ненулевого Δx. Согласно определению 1.6 квадратичная форма (матрица Гессе) положительно определенная. ■

Пример 1.2. Классифицировать матрицу Гессе $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

□ Выпишем квадратичную форму:

$$\Delta x^T H\, \Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = 2\,\Delta x_1^2 .$$

Очевидно, $\Delta x^T H(x) \Delta x \ge 0$ для любого вектора Δx и $\Delta x^T H(x) \Delta x = 0$ для $\Delta x_1 = 0$ и любых $\Delta x_2 \ne 0$. Согласно определению 1.6 квадратичная форма (матрица Гессе) положительно полуопределенная. ■

Пример 1.3. Классифицировать матрицу Гессе функции $f(x) = x_1^2 - x_2^2$.

□ Следуя определению 1.5, получаем $H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Выпишем соответствующую квадратичную форму:

$$\Delta x^T H\, \Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = 2\Delta x_1^2 - 2\Delta x_2^2 .$$

При $\Delta x_1 = 0$ и любых $\Delta x_2 \ne 0$ квадратичная форма отрицательна, а при $\Delta x_1 \ne 0$ и $\Delta x_2 = 0$ положительна. Согласно определению 1.6 квадратичная форма (матрица Гессе) неопределенная. ■

Определение 1.7. Множество $X \subseteq R^n$ называется *выпуклым*, если оно содержит всякий отрезок, концы которого принадлежат X, т.е. если для любых $x^1, x^2 \in X$ и $0 \le \lambda \le 1$ справедливо $\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \in X$.

Определение 1.8. Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X, называется *выпуклой*, если $f\left(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2\right) \le \lambda f\left(x^1\right) + (1-\lambda) f\left(x^2\right)$ $\forall x^1, x^2 \in X$, $0 \le \lambda \le 1$.

Определение 1.9. Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X, называется *строго выпуклой*, если $f\left(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2\right) < \lambda f\left(x^1\right) + (1-\lambda) f\left(x^2\right)$ $\forall x^1, x^2 \in X$, $x^1 \ne x^2$, $0 < \lambda < 1$.

Определение 1.10. Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X, называется *сильно выпуклой* с константой $l > 0$, если

$$f\left(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2\right) \le \lambda f\left(x^1\right) + (1-\lambda) f\left(x^2\right) - \frac{l}{2} \lambda (1-\lambda) \left\| x^1 - x^2 \right\|^2$$

$$\forall x^1, x^2 \in X, \quad x^1 \ne x^2, \quad 0 \le \lambda \le 1 .$$

Замечания 1.3.

1. Функцию $f(x)$ называют выпуклой, если она целиком лежит не выше отрезка, соединяющего две ее произвольные точки. Функцию называют строго выпуклой, если она целиком лежит ниже отрезка, соединяющего две ее произвольные, но не совпадающие точки.

2. Если функция сильно выпуклая, то она одновременно строго выпуклая и выпуклая. Если функция строго выпуклая, то она одновременно выпуклая.

3. Выпуклость функции можно определить по матрице Гессе:

если $H(x) \geq 0 \ \ \forall x \in R^n$, то функция выпуклая;

если $H(x) > 0 \ \ \forall x \in R^n$, то функция строго выпуклая;

если $H(x) \geq lE \ \ \forall x \in R^n$, где E - единичная матрица, то функция сильно выпуклая.

Пример 1.4. Дана функция $f(x) = x^2$, определенная на множестве $X = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$. Требуется исследовать ее на выпуклость.

□ Функция является строго выпуклой согласно п. 1 замечаний 1.3, так как она целиком лежит ниже отрезка, соединяющего две ее произвольные, но не совпадающие точки. Более того, функция одновременно является сильно выпуклой, так как согласно п. 3 замечаний 1.3 выполняется условие $H(x) = f''(x) = 2 \geq l$ при $0 < l \leq 2$. Очевидно, условия выпуклости и строгой выпуклости также выполняются (см. п.3 замечаний 1.3), что иллюстрирует справедливость п.2 замечаний 1.3. ■

Пример 1.5. Дана функция $f(x) = x$, определенная на множестве $X = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$. Требуется исследовать ее на выпуклость.

□ Согласно п. 1 замечаний 1.3 функция является выпуклой, так как она целиком лежит не выше отрезка, соединяющего две ее произвольные точки, но не является строго выпуклой и тем более сильно выпуклой. ■

Пример 1.6. Исследовать выпуклость функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ на R^2.

□ Матрица Гессе удовлетворяет условию $H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \geq l \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при $0 < l \leq 2$. Следуя п. 3 замечаний 1.3, можно сделать вывод о сильной выпуклости функции. Одновременно она является строго выпуклой и выпуклой (см. п. 2 замечаний 1.3). ■

Далее при решении примеров используются следующие свойства выпуклых функций.

Утверждение 1.1.

1. *Если $f(x)$ - выпуклая функция на выпуклом множестве X, то всякая точка локального минимума является точкой ее глобального минимума на X.*

2. *Если выпуклая функция достигает своего минимума в двух различных точках, то она достигает минимума во всех точках отрезка, соединяющего эти две точки.*

3. *Если $f(x)$ - строго выпуклая функция на выпуклом множестве X, то она может достигать своего глобального минимума на X не более чем в одной точке.*

2. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Постановка задачи

Дана дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$, определенная на множестве $X = R^n$.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^* \in R^n$ ее локальных минимумов и максимумов на R^n:

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x); \qquad f(x^*) = \max_{x \in R^n} f(x). \tag{2.1}$$

Стратегия решения задачи

Находятся точки x^* локальных экстремумов с помощью необходимых условий первого и второго порядка (порядок условий определяется порядком используемых производных), а также достаточных условий безусловного локального экстремума. Вычисляются значения $f(x^*)$ функции в найденных точках локальных экстремумов.

Утверждение 2.1 (необходимые условия экстремума первого порядка).

Пусть $x^* \in R^n$ есть точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n и $f(x)$ дифференцируема в точке x^*. Тогда градиент функции $f(x)$ в точке x^* равен нулю, т.е.

$$\nabla f(x^*) = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{2.2}$$

Определение 2.1. Точки x^*, удовлетворяющие условию (2.2), называются *стационарными.*

Утверждение 2.2 (необходимые условия экстремума второго порядка).

Пусть точка x^* есть точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n и функция $f(x)$ дважды дифференцируема в этой точке. Тогда матрица Гессе $H(x^*)$ функции $f(x)$, вычисленная в точке x^*, является положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной), т.е.

$$H(x^*) \geq 0, \qquad \left(H(x^*) \leq 0\right). \tag{2.3}$$

Утверждение 2.3 (достаточные условия экстремума).

Пусть функция $f(x)$ в точке $x^* \in R^n$ дважды дифференцируема, ее градиент равен нулю, а матрица Гессе является положительно определенной (отрицательно определенной), т.е.

$$\nabla f(x^*) = 0 \ \ \text{и} \ \ H(x^*) > 0, \ \left(H(x^*) < 0\right). \tag{2.4}$$

Тогда точка x^* есть точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n.

Определение 2.2. Рассмотрим определитель матрицы Гессе $H(x^*)$, вычисленной в стационарной точке

$$\det H(x^*) = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix}.$$

1. Определители $\Delta_1 = h_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} h_{11} & & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & & h_{nn} \end{vmatrix}$ называются *угловыми минорами.*

2. Определители m-го порядка ($m \le n$), получающиеся из определителя матрицы $H(x^*)$ вычеркиванием каких-либо $(n-m)$ строк и $(n-m)$ столбцов с одними и теми же номерами, называются *главными минорами.*

Для проверки выполнения достаточных условий экстремума и необходимых условий второго порядка используются два способа.

Первый способ (с помощью угловых и главных миноров).

А. Критерий проверки достаточных условий экстремума (критерий Сильвестра).

1. *Для того чтобы матрица Гессе $H(x^*)$ была положительно определенной ($H(x^*) > 0$) и точка x^* являлась точкой локального минимума, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров были строго положительны:*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ldots, \quad \Delta_n > 0. \tag{2.5}$$

2. *Для того чтобы матрица Гессе $H(x^*)$ была отрицательно определенной ($H(x^*) < 0$) и точка x^* являлась точкой локального максимума, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, начиная с отрицательного:*

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \ldots, \quad (-1)^n \Delta_n > 0. \tag{2.6}$$

Б. Критерий проверки необходимых условий экстремума второго порядка.

1. *Для того чтобы матрица Гессе $H(x^*)$ была положительно полуопределенной $(H(x^*) \ge 0)$ и точка x^* может быть являлась точкой локального минимума, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры определителя матрицы Гессе были неотрицательны.*

2. *Для того чтобы матрица Гессе $H(x^*)$ была отрицательно полуопределенной $(H(x^*) \le 0)$ и точка x^* может быть являлась точкой локального максимума, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры четного порядка были неотрицательны, а все главные миноры нечетного порядка - неположительны.*

Второй способ (с помощью собственных значений матрицы Гессе).

Определение 2.3. *Собственные значения* $\lambda_i, i = 1,\dots,n$, матрицы $H\left(x^*\right)$ размера $(n \times n)$ находятся как корни характеристического уравнения (алгебраического уравнения n-й степени):

$$\left|H\left(x^*\right) - \lambda E\right| = \begin{vmatrix} h_{11} - \lambda & h_{12} & & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} - \lambda & & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & & h_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2.7}$$

З а м е ч а н и е 2.1. Собственные значения вещественной симметрической матрицы $H\left(x^*\right)$ вещественны.

Оба способа проверки достаточных и необходимых условий экстремума второго порядка приведены в табл. 2.1.

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Записать необходимые условия экстремума первого порядка в форме (2.2) и найти стационарные точки x^* в результате решения системы n в общем случае нелинейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Для численного решения системы могут использоваться методы простой итерации, Зейделя, Ньютона.

Шаг 2. В найденных стационарных точках x^* проверить выполнение достаточных, а если они не выполняются, то необходимых условий второго порядка с помощью одного из двух способов (см. табл. 2.1).

Шаг 3. Вычислить значения $f\left(x^*\right)$ в точках экстремума.

Описанный алгоритм отображен на рис. 2.1, где показана последовательность действий в случаях выполнения и невыполнения соответствующих условий экстремума при применении первого способа.

З а м е ч а н и я 2.2.

1. Продолжение исследований, которое требуется в ряде случаев, разобранных в табл. 2.1, при решении практических задач, как правило, не проводится, за исключением небольшого числа модельных примеров.

2. Если требуется определить глобальные экстремумы, то они находятся в результате сравнения значений функции в точках локальных минимумов и максимумов с учетом ограниченности функции на R^n.

3. Для случая функции $f(x)$ одной переменной $(n = 1)$ можно сформулировать правило, заменяющее шаг 2 алгоритма:

Если функция $f(x)$ и ее производные непрерывны, то точка x^* является точкой экстремума тогда и только тогда, когда число m четное, где m - порядок первой не обращающейся в нуль в точке x^* производной. Если $f^{(m)}\left(x^*\right) > 0$, то в точке x^* - локальный минимум, а если $f^{(m)}\left(x^*\right) < 0$, то в точке x^* - локальный максимум. Если число m нечетное, в точке x^* нет экстремума.

4. Часто на практике, особенно при применении численных методов поиска экстремума, рассматриваемых в последующих разделах, требуется проверить, выполняются ли необходимые и достаточные условия экстремума в некоторой точке. Такой анализ необходим, так как многие численные методы позволяют найти лишь стационарную точку, тип которой требует уточнения.

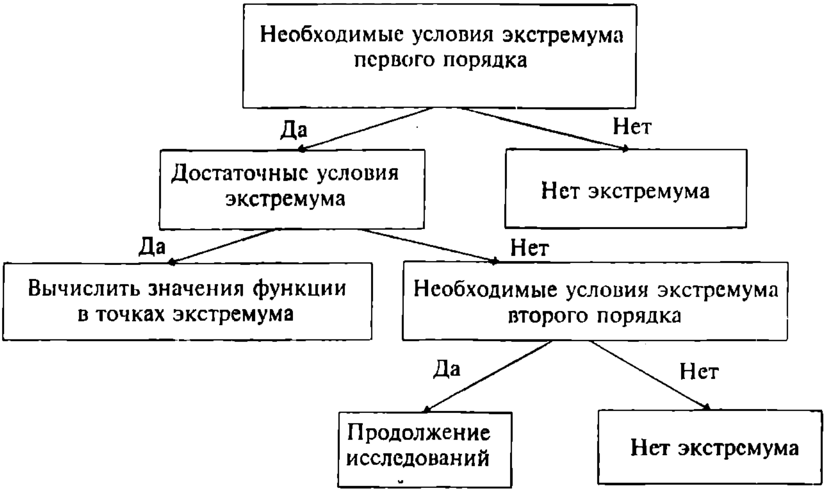

Рис. 2.1

Пример 2.1. Найти экстремум целевой функции $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ на множестве R^2.

□ 1. Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 = 0; \qquad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 = 0.$$

В результате решения системы получаем стационарную точку $x^* = (0,0)^T$.

2. Проверим выполнение достаточных условий экстремума первым способом. Матрица Гессе имеет вид $H(x^*) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Так как $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 8 - 1 = 7 > 0$, то точка x^* является точкой локального минимума (строка 1 в табл. 2.1) и $H(x^*) > 0$. Согласно п. 3 замечаний 1.3 функция является строго выпуклой. Поэтому точка x^* - точка глобального минимума (см. п. 3 утверждения 1.1).

3. Вычислим значение функции в точке глобального минимума: $f(x^*) = 0$. ■

Критерии проверки достаточных и необходимых условий второго порядка в задаче поиска безусловного экстремума

Таблица 2.1

№ п/п	$\nabla f(x^*)$	$H(x^*)$	Условия	Первый способ	Второй способ	Тип стационарной точки x^*
1	0	> 0	Достаточные условия экстремума	$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$	$\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$	Локальный минимум
2	0	< 0	Достаточные условия экстремума	$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$	$\lambda_1 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$	Локальный максимум
3	0	≥ 0	Необходимые условия экстремума второго порядка	Все главные миноры определителя матрицы $H(x^*)$ неотрицательны	$\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$	Может быть локальный минимум, требуется дополнительное исследование
4	0	≤ 0	Необходимые условия экстремума второго порядка	Все главные миноры четного порядка неотрицательны, а нечетного порядка неположительны	$\lambda_1 \leq 0, \ldots, \lambda_n \leq 0$	Может быть локальный максимум, требуется дополнительное исследование
5	0	$= 0$	Необходимые условия экстремума второго порядка	Матрица Гессе состоит из нулевых элементов	$\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$	Требуется дополнительное исследование
6	0	$\gtrless 0$	Необходимые условия экстремума второго порядка	Не выполняются условия п. 1-5	λ_i имеют разные знаки	Нет экстремума

Пример 2.2. Найти экстремум функции $f(x) = x_1^2 + x_2^4$ на множестве R^2.

□ 1. Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2x_1 = 0; \qquad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 4x_2^3 = 0.$$

В результате решения системы получаем стационарную точку $x^* = (0,0)^T$.

2. Проверим выполнение достаточных и необходимых условий второго порядка. Матрица Гессе имеет вид $H(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2^{*2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Так как $\Delta_1 = h_{11} = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, то достаточные условия экстремума не выполняются (строки 1 и 2 в табл. 2.1). Согласно схеме (рис. 2.1) проверим выполнение необходимых условий экстремума второго порядка. Пользуясь определением 2.2, получаем главные миноры первого порядка: 2, 0 и главный минор второго порядка: 0. Так как все главные миноры неотрицательные, то в точке x^* может быть минимум и требуется дополнительное исследование (строка 3 в табл. 2.1).

3. Вычислим значение целевой функции в точке x^* : $f(x^*) = 0$ и рассмотрим ε-окрестность точки x^*, а также поведение функции $f(x)$ на множестве R^2. При любых $x \in R^2$ имеем: $f(x) \ge f(x^*) = 0$, что соответствует не только определению 1.2, но и определению 1.1. Поэтому точка x^* является точкой глобального минимума. ■

Пример 2.3. Найти экстремум функции $f(x) = (1 - x_1)^2 + 10(x_2 - x_1^2)^2$ на множестве R^2.

□ 1. Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = -2(1 - x_1) - 40x_1(x_2 - x_1^2) = 0; \qquad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 20(x_2 - x_1^2) = 0.$$

В результате решения системы получаем стационарную точку $x^* = (1,1)^T$.

2. Проверим выполнение достаточных условий экстремума первым способом. Матрица Гессе имеет вид $H(x^*) = \begin{pmatrix} 82 & -40 \\ -40 & 20 \end{pmatrix}$. Так как $\Delta_1 = 82 > 0$, $\Delta_2 = 82 \cdot 20 - 40^2 = 1640 - 1600 = 40 > 0$, то в точке x^* локальный минимум (строка 1 в табл. 2.1) и $H(x^*) > 0$. Согласно п. 3 замечаний 1.3, функция является строго выпуклой. Поэтому точка x^* - точка глобального минимума (см. п. 3 утверждения 1.1).

3. Вычислим значение функции в точке глобального минимума: $f(x^*) = 0$. ■

Пример 2.4. Найти экстремум функции $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_1 + x_1x_2 + 2x_3$ на множестве R^3.

□ 1. Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = -2x_1 - 1 + x_2 = 0, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -2x_2 + x_1 = 0, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = -2x_3 + 2 = 0.$$

В результате решения системы получаем стационарную точку $x^* = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)^T$.

2. Проверим выполнение достаточных условий.

Первый способ. Матрица Гессе имеет вид $H(x^*) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Так как $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$, $\Delta_3 = (-2)\cdot 3 = -6 < 0$, т.е. знаки угловых миноров чередуются, начиная с отрицательного, то точка x^* - локальный максимум (строка 2 в табл. 2.1).

Второй способ. Найдем собственные значения матрицы Гессе, используя (2.7):

$$\det(H - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда $(-2-\lambda)\left[(-2-\lambda)^2 - 1\right] = 0$ и $\lambda_1 = -2 < 0, \lambda_2 = -1 < 0, \lambda_3 = -3 < 0$. Так как все собственные значения матрицы Гессе отрицательны, то в точке x^* - локальный максимум (строка 2 в табл. 2.1).

3. Вычислим значение функции в точке локального максимума: $f(x^*) = \frac{4}{3}$. ■

Пример 2.5. Найти экстремум функции

$$f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3 - 3x_1 + 6x_2 + 2$$

на множестве R^3.

□ 1. Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 3 = 0, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 2x_2 + x_3 + 6 = 0, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = 2x_3 + x_2 = 0.$$

В результате решения системы получаем две стационарные точки:

$$x^{1*} = (1, -4, 2)^T, \quad x^{2*} = (-1, -4, 2)^T.$$

2. Проверим выполнение достаточных и необходимых условий второго порядка в каждой стационарной точке двумя способами.

Исследуем точку $x^{1*} = (1, -4, 2)^T$.

Первый способ. Матрица Гессе имеет вид $H(x^{1*}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Так как $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$, $\Delta_3 = 18 > 0$, то точка x^{1*} является точкой локального минимума (строка 1 в табл. 2.1).

Второй способ. Найдем собственные значения матрицы Гессе, используя (2.7):

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = 0 .$$

Отсюда $\lambda_1 = 6 > 0$, $\lambda_2 = 3 > 0$, $\lambda_3 = 1 > 0$ и точка x^{1*} является точкой локального минимума (строка 1 в табл. 2.1).

Исследуем точку $x^{2*} = (-1,-4,2)^T$.

Первый способ. Матрица Гессе имеет вид $H\left(x^{2*}\right) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Так как $\Delta_1 = -6 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0$, $\Delta_3 = -18 < 0$, то достаточные условия экстремума не выполняются (строки 1 и 2 в табл. 2.1). Согласно схеме (рис. 2.1) проверим необходимые условия экстремума второго порядка. Главные миноры первого порядка ($m = 1$) получаются из $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ в результате вычеркивания $n - m = 3 - 1 = 2$ строк и 2 столбцов с одинаковыми номерами: -6, 2, 2. Главные миноры второго порядка ($m = 2$) получаются из Δ_3 в результате вычеркивания $n - m = 3 - 2 = 1$ строк и столбцов с одинаковыми номерами: 3, -12, -12. Главный минор третьего порядка ($m = 3$) получается из Δ_3 в результате вычеркивания $n - m = 3 - 3 = 0$ строк и столбцов, т.е. совпадает с $\Delta_3 = -18$. Отсюда следует, что необходимые условия экстремума второго порядка не выполняются (строки 3 и 4 в табл. 2.1). Так как матрица Гессе не является нулевой, то можно сделать вывод о том, что в точке x^{2*} нет экстремума (строка 6 в табл. 2.1).

Второй способ. Найдем собственные значения матрицы Гессе:

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-6-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = 0 .$$

Отсюда $\lambda_1 = -6 < 0$, $\lambda_2 = 3 > 0$, $\lambda_3 = 1 > 0$, т.е. собственные значения имеют разные знаки. Поэтому в точке x^{2*} нет экстремума (строка 6 в табл. 2.1).

3. Вычислим значение функции в точке x^{1*} локального минимума: $f\left(x^{1*}\right) = -12$. ■

Пример 2.6. Найти экстремум функции $f(x) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 4x_3^2$ на множестве R^3.

□ 1. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = -2x_1 + 2x_2 = 0, \qquad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 2x_1 - 2x_2 = 0, \qquad \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = -8x_3 = 0 .$$

В результате решения системы получаем бесконечное множество стационарных точек, удовлетворяющих соотношениям: $x_1^* = x_2^*, x_3^* = 0$.

2. Проверим выполнение достаточных и необходимых условий второго порядка.

Первый способ. Матрица Гессе имеет вид $H(x^*) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$. Так как

$\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 0$, то достаточные условия экстремума не выполняются (строки 1 и 2 в табл. 2.1): Согласно схеме (см. рис.2.1) проверим необходимые условия второго порядка. Поступим аналогично решению примера 2.5. Главные миноры первого порядка получаются из Δ_3 в результате вычеркивания двух строк и столбцов с одинаковыми номерами: -2,-2,-8. Главные миноры второго порядка получаются из Δ_3 в результате вычеркивания по одной строке и столбцу с одинаковым номером: 16, 16, 0. Главный минор третьего порядка совпадает с $\Delta_3 = 0$. Так как все главные миноры четного порядка неотрицательны, а все миноры нечетного порядка неположительны , то можно сделать вывод о том, что в исследуемых стационарных точках может быть максимум и требуется продолжение исследования (строка 4 в табл. 2.1).

Второй способ. Найдем собственные значения матрицы Гессе:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -8-\lambda \end{vmatrix} = (-8-\lambda)\left[(-2-\lambda)^2 - 4\right] = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = -8 < 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -4 < 0$, т.е. собственные значения неположительны. Поэтому в стационарных точках может быть максимум (строка 4 в табл. 2.1).

3. Функция $f(x)$ может быть записана в форме $f(x) = -(x_1 - x_2)^2 - 4x_3^2$. В каждой из найденной в п. 1 стационарной точке $f(x^*) = 0$. Исходя из структуры функции $f(x)$ можно сделать вывод о том, что для любых $x \in R^3$ справедливо: $f(x) \le f(x^*) = 0$. На основании определения 1.1 функция на множестве точек, удовлетворяющих условию: $x_1^* = x_2^*, x_3^* = 0$, достигает глобального максимума. ■

Пример 2.7. Найти экстремум функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ на множестве R.

□ 1. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Решая уравнение, получаем стационарные точки $x^{1*} = \frac{1}{3}$, $x^{2*} = 1$.

2. Проверяем достаточные условия экстремума. Так как $n = 1$, то матрица Гессе состоит из одного элемента: $h_{11} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 6x - 4$. В точке $x^{1*} = \frac{1}{3}$ имеем $\Delta_1 = -2 < 0$, а в точке $x^{2*} = 1$: $\Delta_1 = 2 > 0$. Поэтому в точке x^{1*} - локальный максимум, а в точке x^{2*} - локальный минимум (строки 1 и 2 в табл. 2.1).

3. Вычисляем значения функции в точках экстремума:

$$f(x^{1*}) = \frac{31}{27}, \quad f(x^{2*}) = 1. \ ■$$

Пример 2.8. Найти экстремум функции $f(x) = (x-1)^6$ на множестве R.

□ 1. Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\frac{df(x)}{dx} = 6(x-1)^5 = 0.$$

Отсюда стационарная точка $x^* = 1$.

2. Проверим достаточные условия экстремума с учетом п. 3 замечаний 2.2. Первая не равная нулю производная имеет порядок $m = 6$: $f^{(6)}(x) = 6! > 0$. Так как m четное, то функция достигает в точке x^* локального минимума.

3. Вычислим значение функции в точке минимума: $f(x^*) = 0$. ■

Пример 2.9. Найти экстремум функции

$$f(x) = 5x^6 - 36x^5 + \frac{165}{2}x^4 - 60x^3 + 36$$

на множестве R.

□ 1. Выпишем необходимое условие экстремума первого порядка:

$$\frac{df(x)}{dx} = 30x^5 - 180x^4 + 330x^3 - 180x^2 = 30x^2(x-1)(x-2)(x-3) = 0.$$

Отсюда получаем стационарные точки: $x^{1*} = 0, x^{2*} = 1, x^{3*} = 2, x^{4*} = 3$.

2. Проверим выполнение достаточных условий экстремума:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 150x^4 - 720x^3 + 990x^2 - 360x;$$

$$f''(x^{1*}) = 0, \ f''(x^{2*}) = 60 > 0, \ f''(x^{3*}) = -120 < 0, \ f''(x^{4*}) = 540 > 0.$$

Поэтому в точках x^{2*}, x^{4*} - локальный минимум, а в точке x^{3*} - локальный максимум (см. строки 1 и 2 в табл. 2.1 или п. 3 замечаний 2.2). В точке x^{1*} достаточные условия не выполняются (строка 5 в табл. 2.1), поэтому вычислим третью производную:

$$f^{(3)}(x^{1*}) = 600x^3 - 2160x^2 + 1980x - 360\big|_{x^{1*}=0} = -360.$$

Так как эта производная отлична от нуля и имеет нечетный порядок, то в точке x^{1*} нет экстремума (см. п. 3 замечаний 2.2). ■

3. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Общая постановка задачи и основные положения изложены в разд. 1. Здесь мы рассмотрим случаи, когда множество допустимых решений X задается равенствами и неравенствами, т.е.

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x); \quad f(x^*) = \max_{x \in X} f(x), \tag{3.1}$$

где $X = \left\{ x \,\middle|\, \begin{array}{l} g_j(x) = 0,\, j = 1,\ldots,m;\ m < n \\ g_j(x) \le 0,\, j = m+1,\ldots,p \end{array} \right\}$, m и p - числа; $f(x)$ - целевая функция, $g_j(x),\, j = 1,\ldots,p$ - функции, задающие ограничения (условия).

Будем считать функции $f(x)$; $g_j(x), j = 1,\ldots,p$ дважды непрерывно дифференцируемыми на множестве R^n. При $p = m$ задача (3.1) со *смешанными ограничениями* (см. разд. 3.4) преобразуется в задачу с *ограничениями типа равенств* (см. разд. 3.2), а при $m = 0$ в задачу с *ограничениями типа неравенств* (см. разд. 3.3).

Определение 3.1. Функция

$$L(x,\lambda_0,\lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, g_j(x) \tag{3.2}$$

называется *обобщенной функцией Лагранжа*, числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ - *множителями Лагранжа*, $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_p)^T$. *Классической функцией Лагранжа* называется функция

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, g_j(x). \tag{3.3}$$

Определение 3.2. *Градиентом обобщенной (классической) функции Лагранжа по x* называется вектор-столбец, составленный из ее частных производных первого порядка по x_i, $i = 1,\ldots,n$:

$$\nabla_x L(x,\lambda_0,\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \left[\nabla_x L(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \right]. \tag{3.4}$$

Определение 3.3. *Вторым дифференциалом обобщенной (классической) функции Лагранжа* $L(x,\lambda_0,\lambda)$ $[L(x,\lambda)]$ называется функция

$$d^2 L(x,\lambda_0,\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j, \left[d^2 L(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j \right]. \tag{3.5}$$

Определение 3.4. *Первым дифференциалом ограничения* $g_j(x)$ называется функция

$$dg_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} dx_i, \; j = 1,\ldots,p. \tag{3.6}$$

Определение 3.5. Ограничение $g_j(x) \le 0$ называется *активным* в точке x^*, если $g_j(x^*) = 0$. Если $g_j(x^*) < 0$, то ограничение называется *пассивным.*

Пример 3.1. Классифицировать ограничение $g_j(x) = x_1 + x_2 - 2 \le 0$ в точках $x^* = (1,1)^T$, $\bar{x} = (0,0)^T$.

□ В точке x^* $g_j(x^*) = 0$, т.е. неравенство превращается в равенство. Следовательно, ограничение является активным. В точке $\bar{x}$ справедливо $g_j(\bar{x}) = -2 < 0$, поэтому ограничение в этой точке является пассивным. ■

Определение 3.6. Градиенты ограничений $g_1(x),\ldots,g_m(x)$ являются *линейно независимыми* в точке x^*, если равенство $\lambda_1 \nabla g_1(x^*) + \lambda_2 \nabla g_2(x^*) + \ldots + \lambda_m \nabla g_m(x^*) = 0$ выполняется только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$. Если существуют числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ одновременно не равные нулю, для которых равенство выполняется, то градиенты *линейно зависимы.* В этом случае один из них есть линейная комбинация остальных. Один вектор $\nabla g_1(x^*)$ тоже образует систему векторов: при $\nabla g_1(x^*) \ne 0$ линейно независимую, а при $\nabla g_1(x^*) = 0$ линейно зависимую.

Система векторов, содержащая нулевой вектор, всегда линейно зависима. Если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\left(\nabla g_1(x^*)\nabla g_2(x^*)\ldots\nabla g_m(x^*)\right) = m$, то система векторов линейно независима. Если $\operatorname{rang} A < m$, то система линейно зависима.

Пример 3.2. Исследовать независимость активных ограничений в точках $x^* = (1,0)^T$, $\bar{x} = (0,0)^T$ для $g_1(x) = -x_1 \le 0$, $g_2(x) = -x_2 \le 0$, $g_3(x) = x_2 - (1 - x_1)^3 \le 0$.

□ Вычислим градиенты ограничений:

$$\nabla g_1(x) = (-1,0)^T; \quad \nabla g_2(x) = (0,-1)^T; \quad \nabla g_3(x) = \left(3(1-x_1)^2, 1\right)^T.$$

В точке $x^* = (1,0)^T$ активны второе и третье ограничения: $g_2(x^*) = g_3(x^*) = 0$; $\nabla g_2(x^*) = (0,-1)^T$; $\nabla g_3(x^*) = (0,1)^T$. Так как $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 < 2$, то градиенты второго и третьего ограничений линейно зависимы. Действительно, $\lambda_2(0,-1)^T + \lambda_3(0,1)^T = 0$, например, при $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$. В точке $\bar{x} = (0,0)^T$ активны первое и второе ограничения: $g_1(\bar{x}) = g_2(\bar{x}) = 0$; $\nabla g_1(\bar{x}) = (-1,0)^T$; $\nabla g_2(\bar{x}) = (0,-1)^T$.
Так как $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 = m$, то градиенты линейно независимы. ■

3.2. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ТИПА РАВЕНСТВ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ и функции ограничений $g_j(x)=g_j(x_1,\dots,x_n)=0, j=1,\dots,m$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^* \in X$ ее локальных минимумов и максимумов на множестве X:

$$f(x^*)=\min_{x\in X} f(x), \quad f(x^*)=\max_{x\in X} f(x), \tag{3.7}$$

где $X=\{x \mid g_j(x)=0,\ j=1,\dots,m;\ m<n\}$.

Стратегия решения задачи

Находятся точки x^* локальных экстремумов с помощью необходимых и достаточных условий минимума и максимума первого и второго порядка при ограничениях типа равенств (порядок условий определяется порядком используемых производных). Вычисляются значения $f(x^*)$ функции в найденных точках локального экстремума.

Утверждение 3.1 (необходимые условия экстремума первого порядка).

Пусть x^* есть точка локального экстремума в задаче (3.7). Тогда найдутся числа $\lambda_0^*,\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*$, не равные одновременно нулю и такие, что выполняются следующие условия:

- условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:

$$\frac{\partial L(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*)}{\partial x_i}=0, \quad i=1,\dots,n; \tag{3.8 а}$$

- условие допустимости решения:

$$g_j(x^*)=0, \quad j=1,\dots,m. \tag{3.8 б}$$

Если при этом градиенты $\nabla g_1(x^*),\dots,\nabla g_m(x^*)$ в точке x^* линейно независимы (выполняется условие регулярности), то $\lambda_0^*\neq 0$.

Замечания 3.1.

1. Система (3.8) содержит $n+m$ уравнений с $n+m+1$ неизвестными λ_0^*, $\lambda^*=(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)^T$, $x^*=(x_1^*,\dots,x_n^*)^T$. Точки x^*, удовлетворяющие системе при некоторых λ_0^*, λ^*, называются *условно-стационарными*.

2. При решении задач проверка условия регулярности затруднена, так как точка x^* заранее не известна. Поэтому, как правило, рассматриваются два случая: $\lambda_0^* = 0$ и $\lambda_0^* \neq 0$. Если $\lambda_0^* \neq 0$, в системе (3.8 а) полагают $\lambda_0^* = 1$. Это эквивалентно делению системы уравнений (3.8 а) на λ_0^* и замене $\frac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ на λ_j^*. При этом обобщенная функция Лагранжа становится классической, а сама система (3.8) имеет вид

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n; \tag{3.9 а}$$

$$g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{3.9 б}$$

Здесь число уравнений равно числу неизвестных.

3. Точка экстремума, удовлетворяющая системе (3.8) при $\lambda_0^* \neq 0$, называется *регулярной*, а при $\lambda_0^* = 0$ - *нерегулярной*. Случай $\lambda_0^* = 0$ отражает вырожденность ограничений. При этом в обобщенной функции Лагранжа исчезает член, содержащий целевую функцию, а в необходимых условиях экстремума не используется информация, представляемая градиентом целевой функции.

Утверждение 3.2 (необходимые условия экстремума второго порядка).

Пусть x^* - регулярная точка минимума (максимума) в задаче (3.7) и имеется решение (x^*, λ^*) системы (3.9). Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке (x^*, λ^*), неотрицателен (неположителен):

$$d^2 L(x^*, \lambda^*) \geq 0 \qquad \left(d^2 L(x^*, \lambda^*) \leq 0\right) \tag{3.10}$$

для всех $dx \in R^n$ таких, что

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{3.11}$$

Утверждение 3.3 (достаточные условия экстремума).

Пусть имеется точка (x^*, λ^*), удовлетворяющая системе (3.9). Если в этой точке $d^2 L(x^*, \lambda^*) > 0$ $\left(d^2 L(x^*, \lambda^*) < 0\right)$ для всех ненулевых $dx \in R^n$ таких, что

$$dg_j(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

то точка x^* является точкой локального минимума (максимума) в задаче (3.7).

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x).$$

Шаг 2. Записать необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L\left(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*\right)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n;$

б) $g_j\left(x^*\right) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$

Шаг 3. Решить систему для двух случаев:

1) $\lambda_0^* = 0;$

2) $\lambda_0^* \neq 0$ (при этом поделить условие "а" на λ_0^* и заменить $\dfrac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ на λ_j^*).

В результате найти условно-стационарные точки x^*, выделив из них полученные при $\lambda_0^* \neq 0$ (они могут быть регулярными точками экстремума).

Шаг 4. Для выделенных на шаге 3 точек проверить достаточные условия экстремума:

а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в точке $\left(x^*, \lambda^*\right)$:

$$d^2 L\left(x^*, \lambda^*\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L\left(x^*, \lambda^*\right)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \, dx_j \, ;$$

б) записать систему (3.11) в точке x^*:

$$dg_j\left(x^*\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j\left(x^*\right)}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad j = 1, \ldots, m;$$

в) из предыдущей системы выразить любые m дифференциалов dx_i через остальные $(n - m)$ и подставить в $d^2 L\left(x^*, \lambda^*\right)$;

г) если $d^2 L\left(x^*, \lambda^*\right) > 0$ при ненулевых dx, то в точке x^* - условный локальный минимум. Если $d^2 L\left(x^*, \lambda^*\right) < 0$ при ненулевых dx, то в точке x^* - условный локальный максимум. Если достаточные условия экстремума не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка (см. утверждение 3.2), следуя аналогичной процедуре. Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если не выполняются, то в точке x^* нет условного экстремума.

Шаг 5. Вычислить значения функции в точках условного экстремума.

Условия экстремума в задаче (3.7) приведены в табл. 3.1.

Замечания 3.2.

1. Иногда удается проверить условие линейной независимости градиентов ограничений на множестве X (см. определение 3.6.). Если оно выполняется, то на шаге 1 следует записать классическую функцию Лагранжа (3.3), на шаге 2 можно записывать сразу систему (3.9), а на шаге 3 отсутствует случай $\lambda_0^* = 0$.

2. При решении примеров для упрощения записи на шагах 2 и 3 алгоритма будем опускать знак $*$, оставляя его только для значений x и λ, соответствующих условно-стационарным точкам.

Необходимые и достаточные условия в задаче поиска условного экстремума при ограничениях типа равенств

Таблица 3.1

№ п/п	$\nabla_x L\left(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*\right)$	$g_j\left(x^*\right),\ j = 1, \ldots, m$	$\lambda_0^* \ne 0$, $d^2 L\left(x^*, \lambda^*\right)$	$dg_j\left(x^*\right)$, $j = 1, \ldots, m$	Тип условно-стационарной точки x^*
1	0	0	> 0	$0,\ dx \ne 0$	Условный локальный минимум
2	0	0	< 0	$0,\ dx \ne 0$	Условный локальный максимум
3	0	0	≥ 0	0	Может быть условный локальный минимум, требуется дополнительное исследование
4	0	0	≤ 0	0	Может быть условный локальный максимум, требуется дополнительное исследование
5	0	0	$= 0$	0	Требуется дополнительное исследование
6	0	0	$\gtrless 0$	0	Нет экстремума

Пример 3.3. Найти экстремум функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ на множестве $X = \{x \mid x_1 + x_2 - 2 = 0\}$: $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \text{extr}$, $g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0$.

□ Проверим условие регулярности. Так как $\nabla g_1(x) = (1,1)^T \neq 0$, то условие выполняется (см. определение 3.6). Поэтому будем пользоваться классической функцией Лагранжа (3.3).

1. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_1) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 2).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{\lambda_1}{2}$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 = 0 \Rightarrow x_2 = -\dfrac{\lambda_1}{2}$;

б) $g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0$.

3. Решение системы: $x_1^* = x_2^* = 1, \lambda_1^* = -2$ - условно-стационарная точка.

4. Проверим достаточные условия экстремума:

а) $d^2L(x^*,\lambda_1^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$, так как $\dfrac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_2^2} = 2$,

$$\frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0;$$

б) $dg_1(x^*) = dx_1 + dx_2 = 0$, так как $\dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} = 1$;

в) выразим дифференциал dx_1 через dx_2: $dx_1 = -dx_2$ и подставим в d^2L;

г) так как $d^2L(x^*,\lambda_1^*) = 4dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$, то в точке $x^* = (1,1)^T$ - регулярный локальный условный минимум (строка 1 в табл. 3.1).

5. Подсчитаем значение функции в точке условного экстремума: $f(x^*) = 2$. ■

Пример 3.4. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \text{extr},$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0.$$

□ Проверим условие регулярности. Так как $\nabla g_1(x) = (2x_1, 2x_2)^T \neq 0$ для всех $x \in X$, то условие выполняется (см. определение 3.6). Поэтому будем пользоваться классической функцией Лагранжа.

1. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_1) = x_1 + x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 2).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{1}{2\lambda_1}$, б) $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$.

$\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2} = 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\dfrac{1}{2\lambda_1}$;

3. Решением системы являются две условно-стационарные точки:

$$A\colon\ x_1^* = 1,\ x_2^* = 1,\ \lambda_1^* = -\frac{1}{2}; \qquad B\colon\ x_1^* = -1,\ x_2^* = -1,\ \lambda_1^* = \frac{1}{2}.$$

4. Проверим достаточные условия экстремума:

а) $d^2L(x^*,\lambda_1^*) = 2\lambda_1^*\, dx_1^2 + 2\lambda_1^*\, dx_2^2$, так как $\dfrac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_2^2} = 2\lambda_1^*$,

$$\frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0;$$

б) $dg_1(x^*) = 2x_1^*\, dx_1 + 2x_2^*\, dx_2 = 0$, так как $\dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} = 2x_1$, $\dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} = 2x_2$;

в) исследуем точку A. Получаем $dg_1(A) = 2dx_1 + 2dx_2 = 0$, откуда $dx_1 = -dx_2$. С учетом полученного соотношения $d^2L(A) = -dx_1^2 - dx_2^2 = -2dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$. Поэтому в точке $x^* = (1,1)^T$ - регулярный условный локальный максимум (строка 2 в табл. 3.1).

Исследуем точку B. Получаем $dg_1(B) = -2dx_1 - 2dx_2 = 0$, откуда $dx_1 = -dx_2$. С учетом полученного соотношения $d^2L(B) = dx_1^2 + dx_2^2 = 2dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$. Поэтому в точке $x^* = (-1,-1)^T$ - регулярный условный локальный минимум (строка 1 в табл. 3.1).

5. Подсчитаем значения функции в точках экстремума: $f(A) = 2, f(B) = -2$. Графическое решение задачи изображено на рис. 3.1. ■

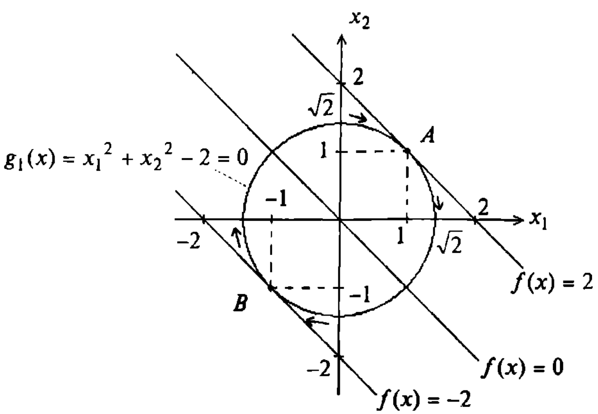

Рис. 3.1

Пример 3.5. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1 \to \text{extr},$$

$$g_1(x) = x_2^2 - x_1^3 = 0.$$

□ Проверим условие регулярности. Так как $\nabla g_1(x) = \left(-3x_1^2, 2x_2\right)^T = 0$ в точке $x^* = (0,0)^T$, то условие не выполняется (см. определение 3.6).

1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda_1) = \lambda_0\, x_1 + \lambda_1\left(x_2^2 - x_1^3\right).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_1} = \lambda_0 - 3\lambda_1 x_1^2 = 0$, $\quad \dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_2} = 2\lambda_1 x_2 = 0$;

б) $g_1(x) = x_2^2 - x_1^3 = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 \neq 0$, так как в утверждении 3.1 все множители Лагранжа не могут быть одновременно равны нулю. Отсюда $x_1^* = x_2^* = 0$, $\lambda_0^* = 0$.

Во втором случае $\lambda_0 \neq 0$. Поделим уравнения приведенной в п.2 системы на λ_0 с заменой $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1: $\quad 1 - 3\lambda_1 x_1^2 = 0$; $\quad 2\lambda_1 x_2 = 0$; $\quad x_2^2 - x_1^3 = 0$.

Рассмотрим второе уравнение. Если $\lambda_1 = 0$, то система несовместна. Если $x_2 = 0$, то $x_1 = 0$ и система тоже несовместна. Как видно, применение классической функции Лагранжа не дает результата.

4. Так как $\lambda_0^* = 0$, достаточные условия экстремума не проверяются. Точка x^* со значением целевой функции $f\left(x^*\right) = 0$ является точкой нерегулярного локального и глобального минимума, как следует из рис. 3.2. ■

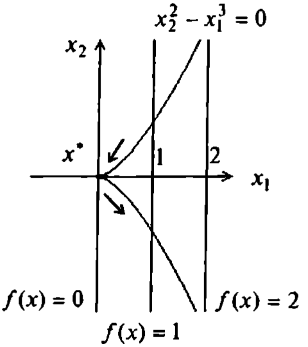

Рис. 3.2

Пример 3.6. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \text{extr},$$

$$g_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0.$$

□ Будем следовать алгоритму, не проверяя условие регулярности.

1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda_1) = \lambda_0\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \lambda_1\left[(x_1-1)^2 + x_2^2 - 4\right].$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1(x_1-1) = 0$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0$;

б) $g_1(x) = (x_1-1)^2 + x_2^2 - 4 = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Из п.2 следует:

$$2\lambda_1(x_1-1) = 0, \qquad 2\lambda_1 x_2 = 0, \qquad (x_1-1)^2 + x_2^2 - 4 = 0.$$

Так как согласно утверждению 3.1 $\lambda_1 \neq 0$, то из первых двух уравнений: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Однако при этом ограничение не выполняется: $g_1(x) = -4 \neq 0$. Следовательно, система несовместна.

Во втором случае $\lambda_0 \neq 0$. Перепишем систему, приведенную в п.2, поделив уравнения на λ_0 с заменой $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1:

$$\frac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda_1(x_1-1) = 0; \qquad \frac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2} = 2x_2(1+\lambda_1) = 0;$$

$$g_1(x) = (x_1-1)^2 + x_2^2 - 4 = 0.$$

Рассмотрим второе уравнение. Если $x_2 = 0$, то из третьего уравнения следует $x_1 = 3$, $x_1 = -1$, а из первого $\lambda_1 = -\dfrac{3}{2}, \lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$ соответственно. Если $\lambda_1 = -1$, то первое уравнение имеет вид $2 = 0$, т.е. система несовместна. Таким образом, найдены две условно-стационарные точки:

$$A\colon\ x_1^* = 3,\ x_2^* = 0,\ \lambda_1^* = -\frac{3}{2}; \qquad B\colon\ x_1^* = -1,\ x_2^* = 0,\ \lambda_1^* = -\frac{1}{2}.$$

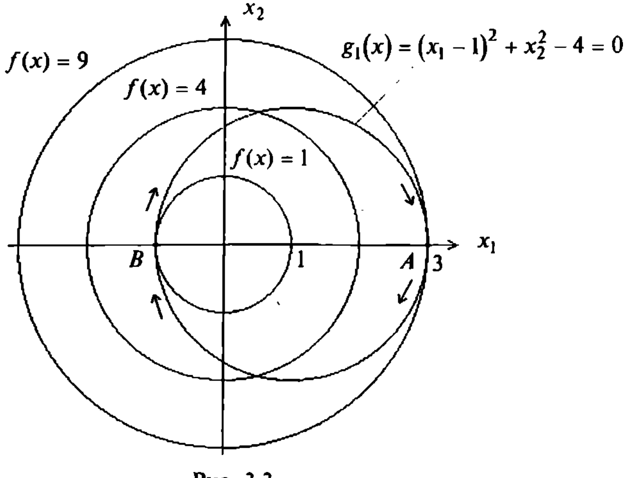

Рис. 3.3

4. Проверим достаточные условия экстремума:

а) $d^2L(x^*,\lambda_1^*) = 2(1+\lambda_1^*)dx_1^2 + 2(1+\lambda_1^*)dx_2^2$;

б) $dg_1(x^*) = 2(x_1^* - 1)dx_1 + 2x_2^* dx_2 = 0$;

в,г) исследуем точку A : $dg_1(A) = 4dx_1 + 0 = 0$, откуда $dx_1 = 0$ и $d^2L(A) = -dx_1^2 - dx_2^2 = -dx_2^2 < 0$ при $dx_2 \neq 0$. Поэтому в точке A - регулярный условный максимум (строка 2 в табл. 3.1).

Исследуем точку B : $dg_1(B) = -4dx_1 + 0 = 0$, откуда $dx_1 = 0$ и $d^2L(B) = dx_1^2 + dx_2^2 = dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$. Поэтому в точке B - регулярный условный минимум (строка 1 в табл. 3.1).

5. Подсчитаем значения функции в точках экстремума: $f(A) = 9, f(B) = 1$.

Графическое решение задачи изображено на рис. 3.3 . ■

Пример 3.7. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 \to \text{extr},$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$$

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda_1) = \lambda_0(x_1^2 - x_2^2) + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

2. Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1 = 0$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_2} = -2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0$;

б) $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 \neq 0$ в силу утверждения 3.1. Поэтому из первых двух уравнений следует: $x_1 = x_2 = 0$. Однако условие "б" при этом не выполняется. Следовательно, система несовместна.

Во втором случае $\lambda_0 \neq 0$. Перепишем систему, приведенную в п.2, поделив уравнения на λ_0 с заменой $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1:

$$\frac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1} = 2x_1(1+\lambda_1) = 0, \qquad \frac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2} = 2x_2(-1+\lambda_1) = 0;$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$$

Пусть $\lambda_1 = -1$. Тогда $x_2 = 0$, а $x_1 = \pm 1$. Пусть $\lambda_1 = 1$. Тогда $x_1 = 0$, а $x_2 = \pm 1$. Других решений система не имеет. Таким образом, имеем четыре условно-стационарные точки:

A: $x_1^* = 1,\quad x_2^* = 0,\quad \lambda_1^* = -1$; $\qquad B$: $x_1^* = -1,\quad x_2^* = 0,\quad \lambda_1^* = -1$;

C: $x_1^* = 0,\quad x_2^* = 1,\quad \lambda_1^* = 1$; $\qquad D$: $x_1^* = 0,\quad x_2^* = -1,\quad \lambda_1^* = 1$.

4. Проверим достаточные условия экстремума:

а) $d^2L\left(x^*,\lambda_1^*\right)=2\left(1+\lambda_1^*\right)dx_1^2+2\left(\lambda_1^*-1\right)dx_2^2$;

б) $dg_1\left(x^*\right)=2x_1^*\,dx_1+2x_2^*\,dx_2=0$;

в,г) исследуем точку A : $dg_1(A)=2dx_1=0$, откуда получаем $dx_1=0$ и $d^2L(A)=-4dx_2^2<0$ при $dx_2\neq 0$. Поэтому в точке A - регулярный локальный условный максимум (строка 2 в табл. 3.1).

Исследуем точку B : $dg_1(B)=-2dx_1=0$, откуда $dx_1=0$ и $d^2L(B)=-4dx_2^2<0$ при $dx_2\neq 0$. Поэтому в точке B - регулярный локальный условный максимум (строка 2 в табл. 3.1).

Исследуем точку C : $dg_1(C)=2dx_2=0$, откуда $dx_2=0$ и $d^2L(C)=4dx_1^2>0$ при $dx_1\neq 0$. Поэтому в точке C - регулярный локальный условный минимум (строка 1 в табл. 3.1).

Исследуем точку D : $dg_1(D)=-2dx_2=0$, откуда $dx_2=0$ и $d^2L(D)=4dx_1^2>0$ при $dx_1\neq 0$. Поэтому в точке D - регулярный локальный условный минимум (строка 1 в табл. 3.1).

Вычислим значения функции в точках условного экстремума:

$$f(A)=f(B)=1;\qquad f(C)=f(D)=-1.\ \blacksquare$$

3.3. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ТИПА НЕРАВЕНСТВ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ и функции ограничений $g_j(x)=g_j(x_1,\dots,x_n)\le 0$, $j=1,\dots,m$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^*\in X$ ее локальных минимумов и максимумов на множестве X:

$$f\left(x^*\right)=\min_{x\in X} f(x);\qquad f\left(x^*\right)=\max_{x\in X} f(x),\tag{3.12}$$

где $X=\left\{x\,\middle|\,g_j(x)\le 0, j=1,\dots,m\right\}$.

Стратегия решения задачи

Находятся точки x^* локального экстремума с помощью необходимых и достаточных условий минимума и максимума первого и второго порядка при ограничениях типа неравенств (порядок условий определяется порядком используемых производных). Вычисляются значения $f\left(x^*\right)$ функции в найденных точках локального экстремума.

Утверждение 3.4 (необходимые условия минимума (максимума) первого порядка).

Пусть x^* - точка локального минимума (максимума) в задаче (3.12). Тогда найдется такое число $\lambda_0^* \ge 0$ и вектор $\lambda^* = \left(\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*\right)^T$, не равные одновременно нулю и такие, что выполняются следующие условия:

- условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:

$$\frac{\partial L\left(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*\right)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \ ; \qquad (3.13\text{ а})$$

- условие допустимости решения:

$$g_j\left(x^*\right) \le 0, \quad j = 1, \dots, m; \qquad (3.13\text{ б})$$

- условие неотрицательности для условного минимума:

$$\lambda_j^* \ge 0, \quad j = 1, \dots, m \qquad (3.13\text{ в})$$

(условие неположительности для условного максимума: $\lambda_j^* \le 0$, $j = 1, \dots, m$);

- условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_j^* \, g_j\left(x^*\right) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \qquad (3.13\text{ г})$$

Если при этом градиенты активных в точке x^* ограничений линейно независимы (выполняется условие регулярности), то $\lambda_0^* \ne 0$.

Замечания 3.3.

1. Точки x^*, удовлетворяющие системе (3.13), называются *условно-стационарными*.

2. В отличие от случая ограничений типа равенств необходимые условия экстремума первого порядка формулируются отдельно для максимума и минимума.

3. Если в решаемой задаче ограничения записаны в форме $g_j(x) \ge 0$, то их необходимо переписать в виде, используемом в (3.12): $-g_j(x) \le 0$.

4. Далее будем использовать *множество индексов ограничений, активных в точке x^**, которое обозначим через J_a.

5. При решении задач поиска условного максимума можно использовать необходимые и достаточные условия минимума, применяя преобразование, описанное в п.1 замечаний 1.1.

6. Так как точка x^* заранее неизвестна, то проверка условия регулярности затруднена, поэтому рекомендуется следовать алгоритму, описанному в п.2 замечания 3.1.

7. Точка экстремума, удовлетворяющая системе (3.13) при $\lambda_0^* \ne 0$, называется *регулярной*, а при $\lambda_0^* = 0$ - *нерегулярной*. Случай $\lambda_0^* = 0$ отражает вырожденность ограничений.

8. При $\lambda_0^* \ne 0$ справедливы два важных утверждения:

1) если функции $f(x)$, $g_j(x)$, $j = 1, \dots, m$, выпуклые, то условия утверждения 3.4 являются одновременно и достаточными условиями глобального минимума;

2) если функции "$-f(x)$", $g_j(x)$, $j=1,\dots,m$, выпуклые, то условия теоремы 3.4 являются одновременно и достаточными условиями глобального максимума.

В обоих случаях множество допустимых решений X выпукло.

Утверждение 3.5 (достаточные условия минимума (максимума) первого порядка).

Пусть имеется точка $\left(x^*,\lambda^*\right)$, удовлетворяющая системе (3.13) при $\lambda_0^* \neq 0$, число активных ограничений в точке x^* совпадает с числом n переменных (при этом условие регулярности выполняется). Если $\lambda_j^* > 0$ для всех $j \in J_a$, то точка x^* - точка условного локального минимума. Если $\lambda_j^* < 0$ для всех $j \in J_a$, то x^* - точка условного локального максимума в задаче (3.12).

Утверждение 3.6 (необходимое условие минимума (максимума) второго порядка).

Пусть x^* - регулярная точка минимума (максимума) в задаче (3.12) и имеется решение $\left(x^*,\lambda^*\right)$ системы (3.13). Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке $\left(x^*,\lambda^*\right)$, неотрицателен (неположителен):

$$d^2L\left(x^*,\lambda^*\right) \geq 0 \qquad \left(d^2L\left(x^*,\lambda^*\right) \leq 0\right) \tag{3.14}$$

для всех $dx \in R^n$ таких, что

$$dg_j\left(x^*\right)=0, \quad j \in J_a, \quad \lambda_j^* > 0 \quad \left(\lambda_j^* < 0\right);$$

$$dg_j\left(x^*\right) \leq 0, \quad j \in J_a, \quad \lambda_j^* = 0.$$

Утверждение 3.7 (достаточные условия экстремума второго порядка).

Пусть имеется точка $\left(x^*,\lambda^*\right)$, удовлетворяющая системе (3.13) при $\lambda_0^* \neq 0$. Если в этой точке $d^2L\left(x^*,\lambda^*\right) > 0$ $\left(d^2L\left(x^*,\lambda^*\right) < 0\right)$ для всех ненулевых $dx \in R^n$ таких, что

$$dg_j\left(x^*\right)=0, \quad j \in J_a, \quad \lambda_j^* > 0 \quad \left(\lambda_j^* < 0\right);$$

$$dg_j\left(x^*\right) \leq 0, \quad j \in J_a, \quad \lambda_j^* = 0,$$

то точка x^* является точкой локального минимума (максимума) в задаче (3.12).

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0 f(x)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\, g_j(x).$$

Шаг 2. Записать необходимые условия минимума (максимума) первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L\left(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*\right)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,\ldots,n$;

б) $g_j\left(x^*\right) \le 0,\ j = 1,\ldots,m$;

в) $\lambda_j^* \ge 0,\ j = 1,\ldots,m$ (для минимума), $\lambda_j^* \le 0,\ j = 1,\ldots,m$ (для максимума);

г) $\lambda_j^*\, g_j\left(x^*\right) = 0,\quad j = 1,\ldots,m$.

Шаг 3. Решить систему для двух случаев:

1) $\lambda_0^* = 0$;

2) $\lambda_0^* \ne 0$ (при этом поделить условия, записанные на шаге 2, на λ_0^* и заменить $\dfrac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ на λ_j^*).

В результате найти условно-стационарные точки x^*, выделив из них полученные при $\lambda_0^* \ne 0$ (они могут быть регулярными точками экстремума). В каждом из двух случаев следует начинать с рассмотрения 2^m вариантов удовлетворения условия "г" дополняющей нежесткости.

Шаг 4. Для выделенных на шаге 3 точек проверить достаточные условия экстремума первого или второго порядка.

Для проверки достаточных условий первого порядка следует:

а) определить число l активных в точке x^* ограничений;

б) если $l = n$ и $\lambda_j^* > 0$ для всех $j \in J_a$, то в точке x^* - локальный минимум. Если $l = n$ и $\lambda_j^* < 0$ для всех $j \in J_a$, то в точке x^* - локальный максимум. Если $l < n$ или соответствующие множители Лагранжа не удовлетворяют достаточным условиям первого порядка, проверить достаточные условия второго порядка.

Для проверки достаточных условий второго порядка следует:

а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в точке $\left(x^*,\lambda^*\right)$: $d^2L\left(x^*,\lambda^*\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 L\left(x^*,\lambda^*\right)}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i\, dx_j$;

б) записать условия, накладываемые на первые дифференциалы активных ограничений:

$$dg_j\left(x^*\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j\left(x^*\right)}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad j \in J_a; \quad \lambda_j^* > 0 \ \left(\lambda_j^* < 0\right);$$
$$dg_j\left(x^*\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j\left(x^*\right)}{\partial x_i} dx_i \le 0, \quad j \in J_a, \quad \lambda_j^* = 0; \qquad (3.15)$$

в) исследовать знак второго дифференциала функции Лагранжа для ненулевых dx, удовлетворяющих системе (3.15). Если $d^2L\left(x^*,\lambda^*\right) > 0$, то в точке x^* - условный локальный минимум. Если $d^2L\left(x^*,\lambda^*\right) < 0$, то в точке x^* - условный локальный максимум.

Если достаточные условия первого и второго порядка не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка (утверждение 3.6), следуя аналогичной процедуре. Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если нет, то в точке x^* нет условного экстремума.

Шаг 5. Вычислить значения функции в точках условного экстремума.

Условия экстремума в задаче (3.12) приведены в табл. 3.2, 3.3.

Пример 3.8. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \text{extr},$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 \le 0.$$

☐ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda_1) = \lambda_0\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \lambda_1(x_1 + x_2 - 2).$$

2. Выпишем необходимые условия первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_1} = 2\lambda_0\, x_1 + \lambda_1 = 0$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda_1)}{\partial x_2} = 2\lambda_0\, x_2 + \lambda_1 = 0$;

б) $x_1 + x_2 - 2 \le 0$;

в) $\lambda_1 \ge 0$ (для минимума), $\lambda_1 \le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_1(x_1 + x_2 - 2) = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Тогда из условия "а" следует, что $\lambda_1 = 0$. Это противоречит требованию утверждения 3.4 о существовании ненулевого вектора $(\lambda_0,\lambda)^T$.

Во втором случае $\lambda_0 \ne 0$. Поделим систему, приведенную в п.2, на λ_0 и заменим $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1. Обобщенная функция Лагранжа при этом заменяется классической:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 = 0$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 = 0$;

б) $x_1 + x_2 - 2 \le 0$;

в) $\lambda_1 \ge 0$ (для минимума), $\lambda_1 \le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_1(x_1 + x_2 - 2) = 0$.

Из условия "г" дополняющей нежесткости следует:

1) $\lambda_1 = 0$ (фактически решается задача поиска безусловного экстремума). Тогда $x_1^* = x_2^* = 0$, $\lambda_1^* = 0$ и условие "б" выполняется. Выполняются необходимые условия и для минимума, и для максимума (строки 1 и 2 в табл. 3.2).

2) $\lambda_1 \ne 0$. Тогда из системы

$$x_1 + x_2 - 2 = 0, \quad 2x_1 + \lambda_1 = 0, \quad 2x_2 + \lambda_1 = 0$$

получаем: $x_1^* = x_2^* = 1$; $\lambda_1^* = -2$. Так как $\lambda_1^* < 0$, то необходимое условие минимума не выполняется (в точке $(1,1)^T$ нет минимума), но выполняется необходимое условие максимума. Таким образом, имеем две условно-стационарные точки.

Необходимые и достаточные условия первого порядка в задаче поиска условного экстремума при ограничениях типа неравенств

Таблица 3.2

Необходимые условия первого порядка				Достаточные условия первого порядка ($\lambda_0^* \neq 0$)		
№ п/п	$\nabla_x L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)$; $\lambda_j^* g_j(x^*)$, $j = 1, \ldots, m$	$g_j(x^*)$, $j = 1, \ldots, m$	$\lambda_0^* \geq 0$, λ_j^*, $j = 1, \ldots, m$	Число l активных ограничений	λ_j^*, $j \in J_a$	Тип условно-стационарной точки x^*
1	0	≤ 0	≥ 0	n	> 0	Условный локальный минимум
2	0	≤ 0	≤ 0	n	< 0	Условный локальный максимум

Необходимые и достаточные условия второго порядка в задаче поиска условного экстремума при ограничениях типа неравенств

Таблица 3.3

№ п/п	$d^2 L(x^*, \lambda^*)$	$dg_j(x^*)$, $j \in J_a$, $\lambda_j^* > 0$	$dg_j(x^*)$, $j \in J_a$, $\lambda_j^* < 0$	$dg_j(x^*)$, $j \in J_a$, $\lambda_j^* = 0$	Тип условно-стационарной точки x^*
1	> 0	0, $dx \neq 0$		≤ 0	Условный локальный минимум
2	< 0		0, $dx \neq 0$	≤ 0	Условный локальный максимум
3	≥ 0	0		≤ 0	Может быть условный локальный минимум, требуется дополнительное исследование
4	≤ 0		0	≤ 0	Может быть условный локальный максимум, требуется дополнительное исследование
5	$= 0$	0		≤ 0	Требуется дополнительное исследование
6	$= 0$		0	≤ 0	Требуется дополнительное исследование
7	$\gtrless 0$	0		≤ 0	Нет экстремума
8	$\gtrless 0$		0	≤ 0	Нет экстремума

4. Проверим выполнение достаточных условий экстремума.

В точке $x^* = (0,0)^T$ ограничение не является активным, так как $g_1(x^*) = -2 < 0$, поэтому достаточные условия первого порядка не удовлетворяются (строки 1 и 2 в табл. 3.2). Проверим условия второго порядка. Так как $d^2L(x^*,\lambda^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 > 0$ при $dx \neq 0$, то в точке $x^* = (0,0)^T$ регулярный локальный условный минимум (строка 1 в табл. 3.3), совпадающий в данной задаче с безусловным. С другой стороны, функция $f(x)$ выпуклая и множество X также выпуклое (см. определение 1.7). Поэтому в точке $x^* = (0,0)^T$ достигается глобальный условный минимум (п. 8 замечаний 3.3), а достаточные условия первого и второго порядка можно было и не проверять.

В точке $x^* = (1,1)^T$ ограничение является активным, но $l = 1 < n = 2$, поэтому достаточное условие первого порядка не выполняется. Проверим условие второго порядка. Имеем

$$d^2L(x^*,\lambda^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2,$$

$$dg_1(x^*) = dx_1 + dx_2 = 0 \ \Rightarrow \ dx_1 = -dx_2.$$

Следовательно, $d^2L(x^*,\lambda^*) = 4dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0$. Так как в этой точке $\lambda_1^* = -2 < 0$, то достаточное условие максимума не выполняется (строка 2 в табл. 3.3). Проверим необходимое условие максимума второго порядка. Так как $d^2L(x^*,\lambda^*) = 4dx_2^2 \geq 0$ при любых dx_2, то необходимое условие максимума не выполняется (строка 4 в табл. 3.3), поэтому в точке $x^* = (1,1)^T$ максимума нет.

Вычислим значение функции в точке условного минимума: $f(x^*) = 0$. ■

Пример 3.9. Найти условный максимум в задаче

$$f(x) = x_1 \to \max,$$

$$g_1(x) = -x_2 \leq 0,$$

$$g_2(x) = x_2 - (1-x_1)^3 \leq 0.$$

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2) = \lambda_0 x_1 + \lambda_1(-x_2) + \lambda_2\left[x_2 - (1-x_1)^3\right].$$

2. Выпишем необходимые условия максимума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1} = \lambda_0 + 3\lambda_2(1-x_1)^2 = 0$, $\quad \dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_2} = -\lambda_1 + \lambda_2 = 0$;

б) $-x_2 \leq 0$, $\quad x_2 - (1-x_1)^3 \leq 0$;

в) $\lambda_1 \leq 0$, $\quad \lambda_2 \leq 0$;

г) $\lambda_1(-x_2) = 0$, $\quad \lambda_2\left[x_2 - (1-x_1)^3\right] = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$, тогда $x_1^* = 1$, а $x_2^* = 0$. При этом $\lambda_1 = \lambda_2 \le 0$, например, $\lambda_1^* = \lambda_2^* = -1$. Получили условно-стационарную точку $x^* = (1,0)^T$, $\lambda_0^* = 0$.

На рис. 3.4 показано, что в точке $x^* = (1,0)^T$ достигается нерегулярный локальный и глобальный максимум. В ней условие линейной независимости градиентов $\nabla g_1(x^*) = (0,-1)^T$, $\nabla g_2(x^*) = (0,1)^T$ не выполняется (см. пример 3.2). Условие "а" выполняется только при $\lambda_0^* = 0$. Покажем это.

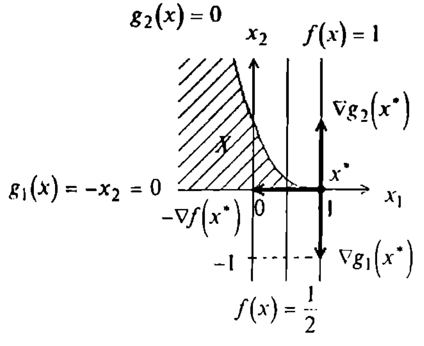

Рис. 3.4

Во втором случае $\lambda_0 \ne 0$. Тогда поделим уравнения системы, приведенной в п.2, на λ_0 и заменим $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\frac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2. Имеем:

$$1 + 3\lambda_2(1 - x_1)^2 = 0; \qquad -\lambda_1 + \lambda_2 = 0;$$

$$-x_2 \le 0, \; x_2 - (1 - x_1)^3 \le 0;$$

$$\lambda_1 \le 0, \quad \lambda_2 \le 0;$$

$$\lambda_1(-x_2) = 0, \quad \lambda_2\left[x_2 - (1 - x_1)^3\right] = 0.$$

Рассмотрим четыре варианта выполнения условия дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Из первого уравнения следует, что система несовместна;

2) $\lambda_1 \ne 0$, $\lambda_2 = 0$. Из первого уравнения также следует, что система несовместна;

3) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \ne 0$. Из второго уравнения получаем, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, т.е. имеется противоречие;

4) $\lambda_1 \ne 0$, $\lambda_2 \ne 0$. Тогда $x_2 = 0$, $x_1 = 1$ и первое уравнение не удовлетворяется.

Новых условно-стационарных точек не найдено. Поэтому в задаче имеется только одна точка $x^* = (1,0)^T$ нерегулярного максимума с $f(x^*) = 1$. ■

Пример 3.10. Найти условный минимум в задаче

$$f(x) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min,$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0,$$

$$g_2(x) = -x_1 \le 0,$$

$$g_3(x) = -x_2 \le 0.$$

☐ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda) = \lambda_0\left[x_1^2 + (x_2-2)^2\right] + \lambda_1\left[x_1^2 + x_2^2 - 1\right] + \lambda_2(-x_1) + \lambda_3(-x_2).$$

2. Выпишем необходимые условия минимума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0,$

$\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_2} = 2\lambda_0(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0;$

б) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0,\quad -x_1 \le 0,\quad -x_2 \le 0;$

в) $\lambda_1 \ge 0,\quad \lambda_2 \ge 0,\quad \lambda_3 \ge 0;$

г) $\lambda_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) = 0,\quad \lambda_2(-x_1) = 0,\quad \lambda_3(-x_2) = 0.$

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Тогда условия "а" запишутся в виде

$$2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0,\qquad 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0.$$

Рассмотрим восемь вариантов выполнения условий "г" дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$. При этом не удовлетворяется требование утверждения 3.4;

2) $\lambda_1 \ne 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$. Тогда $x_1 = x_2 = 0$ из условия "а", но первое условие дополняющей нежесткости не удовлетворяется;

3) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \ne 0,\ \lambda_3 = 0$. Тогда из первого уравнения в условии "а" имеем $\lambda_2 = 0$, т.е. имеется противоречие;

4) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \ne 0$. Тогда из второго уравнения в условии "а" имеем $\lambda_3 = 0$, т.е. также имеется противоречие;

5) $\lambda_1 \ne 0,\ \lambda_2 \ne 0,\ \lambda_3 = 0$. Тогда $x_1 = 0$ и $x_2 = \pm 1$ и не выполняется второе уравнение в условии "а";

6) $\lambda_1 \ne 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \ne 0$. Тогда $x_2 = 0$ и $x_1 = \pm 1$ и не выполняется первое уравнение в условии "а";

7) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \ne 0, \lambda_3 \ne 0$. Тогда не выполняются оба уравнения в условии "а";

8) $\lambda_1 \ne 0,\ \lambda_2 \ne 0,\ \lambda_3 \ne 0$. Тогда уравнения $x_1 = x_2 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, следующие из условия "г", вместе не выполняются.

Условно-стационарных точек пока не найдено.

Во втором случае $\lambda_0 \ne 0$. Поделим уравнения системы, приведенной в п.2, на λ_0 и заменим $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2, $\dfrac{\lambda_3}{\lambda_0}$ на λ_3. Получаем:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = 2(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0$;

б) $x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0$, $-x_1 \le 0$, $-x_2 \le 0$;

в) $\lambda_1 \ge 0$, $\lambda_2 \ge 0$, $\lambda_3 \ge 0$;

г) $\lambda_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right) = 0$, $\lambda_2(-x_1) = 0$, $\lambda_3(-x_2) = 0$.

Рассмотрим восемь вариантов выполнения условий дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда $x_1 = 0, x_2 = 2$ и не выполняется первое ограничение в условии "б";

2) $\lambda_1 \ne 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \qquad 2x_1(1 + \lambda_1) = 0, \qquad 2(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 = 0.$$

Если $\lambda_1 = -1$, то третье уравнение не удовлетворяется. Если $x_1 = 0$, то $x_2 = \pm 1$. Ограничениям в условии "б" удовлетворяет $x_2 = 1$. При этом $\lambda_1 = 1$. Получили условно-стационарную точку A: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$, $\lambda_1^* = 1$, $\lambda_2^* = 0$, $\lambda_3^* = 0$;

3) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \ne 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда

$$x_1 = 0, \qquad 2x_1 - \lambda_2 = 0, \qquad 2(x_2 - 2) - \lambda_3 = 0.$$

Получаем $\lambda_2 = 2x_1 = 0$, что противоречит условию $\lambda_2 \ne 0$;

4) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \ne 0$. Тогда

$$x_2 = 0, \qquad 2x_1 = 0, \qquad 2(x_2 - 2) - \lambda_3 = 0.$$

Получаем $\lambda_3 = -4 < 0$, что противоречит условию "в";

5) $\lambda_1 \ne 0$, $\lambda_2 \ne 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \qquad x_1 = 0, \qquad 2x_1 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0, \qquad 2(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_1 = 0.$$

Из третьего соотношения следует, что $\lambda_2 = 0$, т.е. имеется противоречие;

6) $\lambda_1 \ne 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \ne 0$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad 2x_1 + 2\lambda_1 x_1 = 0, \qquad 2(x_2 - 2) + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что $\lambda_3 = -4 < 0$. Это противоречит условию "в";

7) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \ne 0$, $\lambda_3 \ne 0$. Тогда

$$x_1 = x_2 = 0, \qquad 2x_1 - \lambda_2 = 0, \qquad 2(x_2 - 2) - \lambda_3 = 0.$$

Из второго соотношения следует, что $\lambda_2 = 0$. Это противоречит условию $\lambda_2 \ne 0$;

8) $\lambda_1 \ne 0$, $\lambda_2 \ne 0$, $\lambda_3 \ne 0$. Тогда $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$. Из условия "г" следует: $x_1 = 0, x_2 = 0$. Эта система несовместна.

4. Проверим достаточные условия минимума. В точке A имеются два активных ограничения, т.е. $l = 2 = n = 2$ (рис. 3.5). Так как $\lambda_1^* = 1 > 0$, $\lambda_2^* = 0$, то достаточные условия минимума первого порядка не выполняются (строка 1 в

табл. 3.2) ввиду того, что требуется строгая положительность соответствующих множителей Лагранжа. Проверим условия второго порядка:

$$d^2L(A) = \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_1^2 + \left(2 + 2\lambda_1^*\right)dx_2^2 .$$

Так как в точке два активных ограничения и для одного из них $\lambda_1^* > 0$, а для другого $\lambda_2^* = 0$, то применим условия (3.15) (строка 1 в табл. 3.3):

$$dg_1(A) = 2x_1^*\, dx_1 + 2x_2^*\, dx_2 = 2dx_2 = 0, \quad \lambda_1^* > 0;$$

$$dg_2(A) = -dx_1 \le 0, \quad \lambda_2^* = 0.$$

В результате $d^2L(A) = 4dx_1^2 > 0$ при $dx_1 \ge 0$ и $dx_1 \ne 0$. Поэтому в точке A - локальный условный минимум (строка 1 в табл. 3.3). С другой стороны, целевая функция и множество допустимых решений выпуклые. Поэтому в точке A достигается глобальный минимум (п. 8 замечаний 3.3).

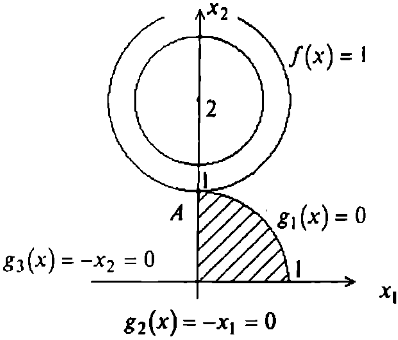

Рис. 3.5

5. Вычислим значение функции в точке глобального минимума: $f(A) = 1$. ■

3.4. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ПРИ СМЕШАННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Постановка задачи

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(x) = f(x_1,\dots,x_n)$ и функции ограничений типа равенств и неравенств: $g_j(x) = 0$, $j = 1,\dots,m$; $g_j(x) \le 0$, $j = m+1,\dots,p$, определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^* \in X$ ее локальных минимумов и максимумов на множестве X:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x); \quad f(x^*) = \max_{x \in X} f(x), \qquad (3.16)$$

где $X = \left\{ x \,\middle|\, \begin{array}{l} g_j(x) = 0, \ j = 1,\dots,m; \ m < n \\ g_j(x) \le 0, \ j = m+1,\dots,p \end{array} \right\}$.

Стратегия решения задачи

Находятся точки x^* локального экстремума с помощью необходимых и достаточных условий минимума и максимума первого и второго порядка при смешанных ограничениях (порядок условий определяется порядком используемых производных). Вычисляются значения $f\left(x^*\right)$ функции в найденных точках локального экстремума.

Утверждение 3.8 (необходимые условия минимума (максимума) первого порядка).

Пусть x^* - точка локального минимума (максимума) в задаче (3.16). Тогда найдется такое число $\lambda_0^* \geq 0$ и вектор $\lambda^* = \left(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_p^*\right)^T$, не равные одновременно нулю и такие, что выполняются следующие условия:

- условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:

$$\frac{\partial L\left(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*\right)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n; \qquad (3.17\text{ а})$$

- условие допустимости решения:

$$g_j\left(x^*\right) = 0,\ j = 1, \ldots, m; \qquad g_j\left(x^*\right) \leq 0,\ j = m+1, \ldots, p; \qquad (3.17\text{ б})$$

- условие неотрицательности для условного минимума:

$$\lambda_j^* \geq 0, \quad j = m+1, \ldots, p \qquad (3.17\text{ в})$$

(*условие неположительности для условного максимума:* $\lambda_j^* \leq 0, j = m+1, \ldots, p$);

- условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_j^* g_j\left(x^*\right) = 0,\ j = m+1, \ldots, p. \qquad (3.17\text{ г})$$

Если при этом градиенты активных ограничений-неравенств и ограничений-равенств в точке x^* линейно независимы (выполняется *условие регулярности*), то $\lambda_0^* \neq 0$.

Замечания 3.4.

1. Пункты 1 - 7 замечаний 3.3 остаются справедливы и для данной задачи, если заменить (3.13) на (3.17), а утверждение 3.4 на 3.8.

2. При $\lambda_0^* \neq 0$ справедливы два важных утверждения:

1) *если функции $f(x)$, $g_j(x)$, $j = m+1, \ldots, p$, выпуклые, а функции $g_j(x)$, $j = 1, \ldots, m$, линейные, то условия утверждения 3.8 являются одновременно и достаточными условиями глобального минимума;*

2) *если функции "$-f(x)$", $g_j(x), j = m+1, \ldots, p$, выпуклые, а функции $g_j(x)$, $j = 1, \ldots, m$, линейные, то условия утверждения 3.8 являются одновременно и достаточными условиями глобального максимума.*

В обоих случаях множество допустимых решений X выпукло.

3. Следует подчеркнуть, что условия дополняющей нежесткости и знакоопределенности множителей Лагранжа записываются только для ограничений-неравенств.

Утверждение 3.9 (достаточные условия минимума (максимума) первого порядка).

Пусть имеется точка $\left(x^*,\lambda^*\right)$, *удовлетворяющая системе (3.17) при* $\lambda_0^* \ne 0$, *суммарное число активных ограничений-неравенств в точке* x^* *и ограничений-равенств совпадает с числом* n *переменных (при этом условие регулярности выполняется). Если* $\lambda_j^* > 0$ *для всех* $j \in J_a$, *то точка* x^* *- точка условного локального минимума в задаче (3.16). Если* $\lambda_j^* < 0$ *для всех* $j \in J_a$, *то* x^* *- точка условного локального максимума.*

Утверждение 3.10 (необходимые условия минимума (максимума) второго порядка).

Пусть x^* *- регулярная точка минимума (максимума) в задаче (3.16) и имеется решение* $\left(x^*,\lambda^*\right)$ *системы (3.17). Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке* $\left(x^*,\lambda^*\right)$, *неотрицателен (неположителен):*

$$d^2L\left(x^*,\lambda^*\right) \ge 0 \qquad \left(d^2L\left(x^*,\lambda^*\right) \le 0\right)$$

для всех $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j\left(x^*\right) = 0,\ j = 1,\dots,m \ \ \text{и} \ \ j \in J_a,\ \lambda_j^* > 0 \ \left(\lambda_j^* < 0\right);$$

$$dg_j\left(x^*\right) \le 0,\ \ j \in J_a,\ \ \lambda_j^* = 0.$$

Утверждение 3.11 (достаточные условия экстремума второго порядка).

Пусть имеется точка $\left(x^*,\lambda^*\right)$, *удовлетворяющая системе (3.17) при* $\lambda_0^* \ne 0$. *Если в этой точке* $d^2L\left(x^*,\lambda^*\right) > 0$ $\left(d^2L\left(x^*,\lambda^*\right) < 0\right)$ *для всех ненулевых* $dx \in R^n$ *таких, что*

$$dg_j\left(x^*\right) = 0,\ j = 1,\dots,m \ \ \text{и} \ \ j \in J_a,\ \lambda_j^* > 0 \ \left(\lambda_j^* < 0\right);$$

$$dg_j\left(x^*\right) \le 0,\ \ j \in J_a,\ \ \lambda_j^* = 0,$$

то точка x^* *является точкой локального минимума (максимума) в задаче (3.16).*

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(x).$$

Шаг 2. Записать необходимые условия минимума (максимума) первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L\left(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*\right)}{\partial x_i}=0,\ i=1,\ldots,n;$

б) $g_j\left(x^*\right)=0,\ j=1,\ldots,m;\quad g_j\left(x^*\right)\le 0,\ j=m+1,\ldots,p;$

в) $\lambda_j^*\ge 0,\ j=m+1,\ldots,p$ (для минимума), $\lambda_j^*\le 0,\ j=m+1,\ldots,p$ (для максимума);

г) $\lambda_j^*\ g_j\left(x^*\right)=0,\ j=m+1,\ldots,p.$

Шаг 3. Решить систему для двух случаев:

1) $\lambda_0^*=0$;

2) $\lambda_0^*\ne 0$ (при этом поделить условия "а", "в", "г" на λ_0^* и заменить $\dfrac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ на λ_j^*).

В результате найти условно-стационарные точки x^*, выделив из них полученные при $\lambda_0^*\ne 0$ (они могут быть регулярными точками экстремума). В каждом из двух случаев следует начинать с рассмотрения 2^{p-m} вариантов удовлетворения условия "г" дополняющей нежесткости.

Шаг 4. Для выделенных на шаге 3 точек проверить достаточные условия экстремума первого или второго порядка.

Для проверки достаточных условий первого порядка следует:

а) определить число l ограничений-равенств и активных ограничений-неравенств;

б) если $l=n$ и $\lambda_j^*>0$ для всех $j\in J_a$, т.е. для всех активных ограничений-неравенств, то в точке x^* - локальный минимум. Если $l=n$ и $\lambda_j^*<0$ для всех $j\in J_a$, то в точке x^* - локальный максимум. Если $l<n$ или соответствующие множители Лагранжа не удовлетворяют достаточным условиям первого порядка, проверить достаточные условия второго порядка.

Для проверки достаточных условий второго порядка следует:

а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в точке $\left(x^*,\lambda^*\right)$:

$$d^2L\left(x^*,\lambda^*\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L\left(x^*,\lambda^*\right)}{\partial x_i\partial x_j}dx_i\,dx_j;$$

б) записать условия, накладываемые на первые дифференциалы ограничений-равенств и активных в точке x^* ограничений-неравенств:

$$dg_j\left(x^*\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j\left(x^*\right)}{\partial x_i}dx_i=0,\ j=1,\ldots,m \text{ и } j\in J_a;\ \lambda_j^*>0\ \left(\lambda_j^*<0\right); \qquad (3.18)$$

$$dg_j\left(x^*\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j\left(x^*\right)}{\partial x_i}dx_i\le 0,\ j\in J_a,\ \lambda_j^*=0;$$

в) исследовать знак второго дифференциала функции Лагранжа для ненулевых dx, удовлетворяющих (3.18). Если $d^2L(x^*,\lambda^*)>0$, то в точке x^* - условный локальный минимум. Если $d^2L(x^*,\lambda^*)<0$, то в точке x^* - условный локальный максимум. Если достаточные условия экстремума не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка (утверждение 3.10), следуя аналогичной процедуре. Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если нет, то в точке x^* нет условного экстремума.

Шаг 5. Вычислить значения функции в точках условного экстремума.

Условия экстремума в задаче (3.16) приведены в табл. 3.4, 3.5.

Пример 3.11. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x)=x_1^2+x_2^2\to \text{extr},$$
$$g_1(x)=x_1-1=0,$$
$$g_2(x)=x_1+x_2-2\le 0.$$

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda)=\lambda_0\left(x_1^2+x_2^2\right)+\lambda_1(x_1-1)+\lambda_2(x_1+x_2-2).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1}=2\lambda_0x_1+\lambda_1+\lambda_2=0$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_2}=2\lambda_0x_2+\lambda_2=0$;

б) $x_1-1=0$, $x_1+x_2-2\le 0$;

в) $\lambda_2\ge 0$ (для минимума), $\lambda_2\le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_2(x_1+x_2-2)=0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0=0$. Тогда $\lambda_1=0$ и $\lambda_2=0$, что противоречит утверждению 3.8.

Во втором случае $\lambda_0\ne 0$. Поделим уравнения системы, приведенной в п.2, на λ_0, заменяя $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1 и $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2. Условие "а" записывается в форме

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1}=2x_1+\lambda_1+\lambda_2=0,\qquad \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2}=2x_2+\lambda_2=0.$$

Остальные соотношения сохранят свой вид. Рассмотрим $2^{p-m}=2$ варианта удовлетворения условия "г" дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_2=0$. Тогда $x_2=0$. Из ограничения следует $x_1=1$, а из условия "а" $\lambda_1=-2$. Имеем условно-стационарную точку A : $x_1^*=1,\ x_2^*=0,\ \lambda_1^*=-2,\ \lambda_2^*=0$, в которой удовлетворяются необходимые условия и минимума, и максимума;

2) $\lambda_2\ne 0$. Тогда $x_1+x_2-2=0,\ 2x_1+\lambda_1+\lambda_2=0,\ 2x_2+\lambda_2=0,\ x_1-1=0$. Получаем условно-стационарную точку B : $x_1^*=1,\ x_2^*=1,\ \lambda_1^*=0,\ \lambda_2^*=-2<0$, в которой удовлетворяются необходимые условия максимума.

Необходимые и достаточные условия первого порядка в задаче поиска условного экстремума при смешанных ограничениях

Таблица 3.4

Необходимые условия первого порядка					Достаточные условия первого порядка		
№ п/п	$\nabla_x L(x^*,\lambda_0^*,\lambda^*)$, $\lambda_j^* g_j(x^*)$, $j = m+1,\dots,p$	$g_j(x^*)$, $j = 1,\dots,m$	$g_j(x^*)$, $j = m+1,\dots,p$	$\lambda_0^* \ge 0$, λ_j^*,	Число l ограничений-равенств и активных ограничений-неравенств	λ_j^*, $j \in J_a$	Тип условно-стационарной точки
1	0	0	≤ 0	≥ 0	n	> 0	Условный локальный минимум
2	0	0	≤ 0	≤ 0	n	< 0	Условный локальный максимум

Необходимые и достаточные условия второго порядка в задаче поиска условного экстремума при смешанных ограничениях

Таблица 3.5

№ п/п	$d^2L(x^*,\lambda^*)$	$dg_j(x^*)$, $j = 1,\dots,m$	$dg_j(x^*)$, $j \in J_a$, $\lambda_j^* > 0$	$dg_j(x^*)$, $j \in J_a$, $\lambda_j^* < 0$	$dg_j(x^*)$, $j \in J_a$, $\lambda_j^* = 0$	Тип условно-стационарной точки x^*
1	> 0	$0,\ dx \ne 0$	$0,\ dx \ne 0$		≤ 0	Условный локальный минимум
2	< 0	$0,\ dx \ne 0$		$0,\ dx \ne 0$	≤ 0	Условный локальный максимум
3	≥ 0	0	0		≤ 0	Может быть условный локальный минимум, требуется дополнительное исследование
4	≤ 0	0		0	≤ 0	Может быть условный локальный максимум, требуется дополнительное исследование
5	$= 0$	0	0		≤ 0	Требуется дополнительное исследование
6	$= 0$	0		0	≤ 0	Требуется дополнительное исследование
7	$\gtrless 0$	0	0		≤ 0	Нет экстремума
8	$\gtrless 0$	0		0	≤ 0	Нет экстремума

4. Проверим достаточные условия экстремума.

Исследуем точку A. Ограничение-неравенство не является активным. Поэтому $l = 1 < n = 2$ и достаточные условия первого порядка не выполняются. Проверим условия второго порядка: $d^2L(A) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$. Так как ограничение $g_2(x) \le 0$ в точке A пассивно, то $dg_1(A) = dx_1 = 0$ и $d^2L(A) = 2dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \ne 0$. Следовательно, в точке A - условный локальный минимум (строка 1 в табл. 3.5).

С другой стороны, целевая функция задачи выпуклая (см. пример 1.6), ограничение-равенство - линейное, ограничение-неравенство - выпуклое (см. определение 1.8). Поэтому в точке A достигается глобальный минимум (п.2 замечаний 3.4), а достаточные условия второго порядка можно было не проверять. Если бы искался экстремум функции $f(x) = -x_1^2 - x_2^2$, то функция "$-f(x)$" была бы выпуклой, а в точке A достигался бы глобальный максимум (п.2 замечаний 3.4).

Исследуем точку B. Ограничение $g_2(x) \le 0$ является активным. Поэтому $l = 2 = n = 2$. Так как $\lambda_2^* = -2 < 0$, то в точке B выполняются достаточные условия максимума первого порядка (строка 2 в табл. 3.4) и она является точкой локального максимума.

Из методических соображений проверим достаточные условия второго порядка: $d^2L(B) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2$. В точке B ограничение $g_2(x) = 0$ активно: $dg_1(B) = dx_1 = 0, dg_2(B) = dx_1 + dx_2 = 0$. Отсюда $dx_1 = dx_2 = 0$ и $d^2L(B) = 0$. Поэтому требуется дополнительное исследование (строка 6 в табл. 3.5).

На рис. 3.6 видно, что в точке B - условный локальный максимум, так как при приближении к точке B вдоль множества X функция возрастает, а при движении от точки B убывает. Это подтверждает сделанный ранее вывод.

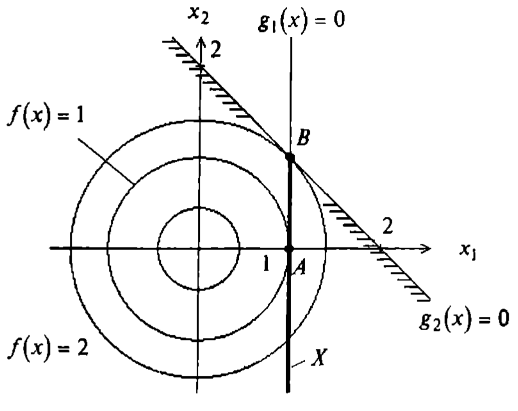

Рис. 3.6

5. Значения функции в точках экстремума: $f(A) = 1$, $f(B) = 2$. ■

Пример 3.12. Найти условный экстремум в задаче

$$f(x) = x_1^2 - x_2 \to \text{extr},$$
$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 6 = 0,$$
$$g_2(x) = 1 - x_1 \le 0,$$
$$g_3(x) = x_1^2 + x_2^2 - 26 \le 0.$$

□ 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda) = \lambda_0\left(x_1^2 - x_2\right) + \lambda_1(x_1 + x_2 - 6) + \lambda_2(1 - x_1) + \lambda_3\left(x_1^2 + x_2^2 - 26\right).$$

2. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_1 = 0$, $\dfrac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_2} = -\lambda_0 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0$;

б) $x_1 + x_2 - 6 = 0$, $1 - x_1 \le 0$, $x_1^2 + x_2^2 - 26 \le 0$;

в) $\lambda_2 \ge 0$, $\lambda_3 \ge 0$ (для минимума), $\lambda_2 \le 0$, $\lambda_3 \le 0$ (для максимума);

г) $\lambda_2(1 - x_1) = 0$, $\lambda_3\left(x_1^2 + x_2^2 - 26\right) = 0$.

3. Решим систему для двух случаев.

В первом случае $\lambda_0 = 0$. Тогда условия "а" имеют вид

$$\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Рассмотрим четыре варианта удовлетворения условия "г" дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда $\lambda_1 = 0$ и не удовлетворяется утверждение 3.8;

2) $\lambda_2 \ne 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$, что противоречит условию $\lambda_2 \ne 0$;

3) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \ne 0$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - 6 = 0,$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_3 x_1 = 0,$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Из двух последних уравнений следует: $2\lambda_3(x_2 - x_1) = 0$. Так как $\lambda_3 \ne 0$, то $x_1 = x_2$. Из двух первых уравнений следует:

$$x_1 = 1, x_2 = 5; \qquad x_1 = 5, x_2 = 1;$$

т.е. $x_1 \ne x_2$. Поэтому система несовместна;

4) $\lambda_2 \ne 0$, $\lambda_3 \ne 0$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0,$$
$$1 - x_1 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - 6 = 0.$$

Система удовлетворяется в точке $x_1 = 1, x_2 = 5$. Условия "а" примут вид

$$\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0,$$
$$\lambda_1 + 10\lambda_3 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = -10\lambda_3$ и $\lambda_2 = -8\lambda_3$. Так как $\lambda_3 \neq 0$, то λ_2 и λ_3 имеют разные знаки, что противоречит условию и минимума, и максимума.

Во втором случае $\lambda_0 \neq 0$. Поделим уравнения системы, приведенной в п.2, на λ_0 и заменим $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ на λ_1, $\frac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_2, $\frac{\lambda_3}{\lambda_0}$ на λ_3. Условие "а" принимает форму

$$2x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 x_1 = 0, \qquad -1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Условия "б" - "г" сохраняют вид. Рассмотрим четыре варианта выполнения условий "г" дополняющей нежесткости:

1) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда $\lambda_1 = 1$, а $x_1 = -\frac{1}{2}$, что не удовлстворяет ограничениям "б";

2) $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Тогда $x_1 = 1$, а $x_2 = 5, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Получена условно-стационарная точка A: $x_1^* = 1, x_2^* = 5, \lambda_1^* = 1, \lambda_2^* = 3$, в которой удовлетворяются необходимые условия минимума;

3) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0, \quad x_1 + x_2 - 6 = 0, \quad 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_1 = 0, \quad -1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 x_2 = 0.$$

Отсюда получаем точки с координатами $x_1 = 1, x_2 = 5$ и $x_1 = 5, x_2 = 1$. В первой точке имеем

$$2 + \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0, \quad -1 + \lambda_1 + 10\lambda_3 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = -\frac{11}{4}, \lambda_3 = \frac{3}{8}$. Во второй точке

$$10 + \lambda_1 + 10\lambda_3 = 0, \quad -1 + \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = \frac{15}{4}, \lambda_3 = -\frac{11}{8}$. Получены условно-стационарные точка A' : $x_1^* = 1$, $x_2^* = 5, \lambda_1^* = -\frac{11}{4}, \lambda_2^* = 0, \lambda_3^* = \frac{3}{8}$, в которой удовлетворяются необходимые условия минимума, и точка B: $x_1^* = 5, x_2^* = 1, \lambda_1^* = \frac{15}{4}, \lambda_2^* = 0, \lambda_3^* = -\frac{11}{8}$, в которой удовлетворяются необходимые условия максимума;

4) $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0, \quad 1 - x_1 = 0, \quad x_1 + x_2 - 6 = 0$$

выполняется в точке $x_1 = 1, x_2 = 5$. Условие "а" принимает форму

$$2 + \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0,$$
$$-1 + \lambda_1 + 10\lambda_3 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 1 - 10\lambda_3$ и $3 - 8\lambda_3 - \lambda_2 = 0$. Так как $\lambda_2 \neq 0$ и $\lambda_3 \neq 0$, а также они должны быть одного знака, то последнее равенство выполняется только при $\lambda_3 > 0, \lambda_2 > 0$, в частности, при $\lambda_3 = 0{,}1$; $\lambda_2 = 2{,}2$. При этом $\lambda_1 = 0$. Получили ту же условно-стационарную точку А": $x_1^* = 1$; $x_2^* = 5$; $\lambda_1^* = 0$; $\lambda_2^* = 2{,}2$; $\lambda_3^* = 0{,}1$.

4. Проверим достаточные условия экстремума первого порядка. Ограничение-равенство в точках A и B естественно выполняется. В точке A активно второе

ограничение и, следовательно, $l = 2 = n$. Так как $\lambda_2^* = 3 > 0$, то в точке А - условный локальный минимум (строка 1 в табл. 3.4). В точке A' активно третье ограничение и поэтому $l = 2 = n$. Так как $\lambda_3^* = \frac{3}{8} > 0$, то в точке A' - условный локальный минимум. В точке B активно третье ограничение и, следовательно, $l = 2 = n$. Так как $\lambda_3^* = -\frac{11}{8} < 0$, то в точке B - условный локальный максимум (строка 2 в табл. 3.4).

Из рис. 3.7 следует, что в точках A и B - соответственно глобальный минимум и максимум.

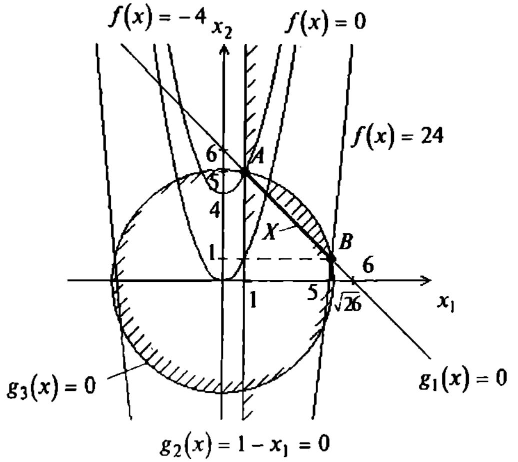

Рис. 3.7

Теперь исследуем свойства целевой функции и ограничений. Ограничение-равенство - линейное. Так как целевая функция и функции второго и третьего ограничений удовлетворяют условиям

$$H_f(x) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \geq 0, \quad H_{g_2}(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \geq 0, \quad H_{g_3}(x) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0,$$

то они выпуклы (см. п. 3 замечаний 1.3). Поэтому в точке A - глобальный минимум (п.2 замечаний 3.4). Так как функция "$-f(x)$"$= -x_1^2 + x_2$ не является выпуклой, то вывода о глобальном максимуме с помощью необходимых условий первого порядка сделать нельзя (п.2 замечаний 3.4).

5. Значения функции в точках условного экстремума: $f(A) = -4, f(B) = 24$.■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аоки М.* Введение в методы оптимизации. - М.: Мир, 1977.

2. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. - М.: Мир, 1982.

3. *Бертсекас Д.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. - М.: Радио и связь, 1987.

4. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1980.

5. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Методы оптимизации. - Минск: Изд-во БГУ, 1981.

6. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. - М.: Наука, 1975.

7. *Летова Т.А., Руденко Е.А., Журина Н.Э.* Методы решения экстремальных задач. - М.: МАИ,1985.

8. *Малышев В.В.* Методы оптимизации сложных систем. - М.: МАИ,1981.

9. *Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М.* Методы оптимизации. - М.: Наука, 1978.

10. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. - М.: Наука, 1983.

11. *Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К.* Оптимизация в технике. Т. 1 и 2, в 2-х т. - М.: Мир, 1986.

12. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. - М.: Наука, 1986.

13. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. - М.: Мир, 1975.

ОГЛАВЛЕНИЕ