МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

ИЗДАТЕЛЬСТВО

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

В. А. КАЛИНИН
Р. Н. МОЛОДОЖНИКОВА

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

МОСКВА • 1993

Государственный Комитет Российской Федерации
по высшему образованию

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ

В.А. КАЛИНИН Р.Н. МОЛОДОЖНИКОВА

ЧИСЛОВЫЕ
И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Учебное пособие

Утверждено
на заседании редсовета
5 октября 1992 г.

Москва
Издательство МАИ
1993

Калинин В.А., Молодожникова Р.Н. Числовые и функциональные ряды: Учеб. пособие. - М.: Изд-во МАИ, 1993. - 88 с.: ил.

Учебное пособие по разделу "Числовые и функциональные ряды" математического анализа является необходимым дополнением к методическому обеспечению курса высшей математики для студентов МАИ. Содержание пособия соответствует действующей программе курса математического анализа. Предназначено для студентов младших курсов.

Рецензенты: Кафедра высшей математики МАДИ; В.Е. Чижов

Тем. план 1993, доп.

Калинин Виктор Александрович
Молодожникова Раиса Николаевна

ЧИСЛОВЫЕ
И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Редактор Е.В. Лисовец
Техн. редактор Е.А. Смирнова

Подписано в печать 29.06.93
Бум. офсетная. Формат 60x84 1/16. Печать офсетная
Усл. печ. л. 5,11. Уч.-изд. л. 5,00. Тираж 500
Зак. 2278/654. С77. Отпускная цена для реализации в МАИ 38 руб.

Типография издательства МАИ
125871 Москва, Волоколамское шоссе, 4

ISBN 5-7035-0807-Х

Глава I. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ I. Определение ряда. Сходящиеся ряды

Пусть дана последовательность действительных чисел $\{a_n\}$. Положим:

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Если последовательность $\{S_n\}$ имеет предел S : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то символически записывают так:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \Leftrightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad (1.1)$$

Выражение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называют рядом, числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – членами ряда, a_n – общим членом ряда, $\{S_n\}$ – последовательностью его частичных сумм. Число S называется суммой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Говорят также, что ряд сходится к S. Ряд, который не является сходящимся, называется расходящимся. Ряд с постоянными членами $a_1, a_2, a_3, \ldots$ будем называть числовым. Если члены ряда – комплексные числа $c_n = a_n + ib_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ будем называть числовым с комплексными членами c_n.

Приведем примеры исследования рядов на сходимость.

I. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}$, $|q|<1$, $a \neq 0$. Как известно, при любом $n \in N$ справедливо равенство $a + aq + aq^2 + \ldots +$

$+aq^{n-1} = a\dfrac{q^n-1}{q-1}$ (формула для суммы геометрической прогрессии).

Значит, $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a}{1-q} - \dfrac{aq^n}{1-q}$. Так как $|q| < 1$, то

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$. Следовательно, $\dfrac{a}{1-q} =$

$= a + aq + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \dfrac{a}{1-q}, |q|<1$. Например, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \ldots = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \ldots$

$\ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$

Площадь квадрата с единичной стороной может быть представлена в виде суммы площадей бесконечного числа полос (рис. I.I,а).

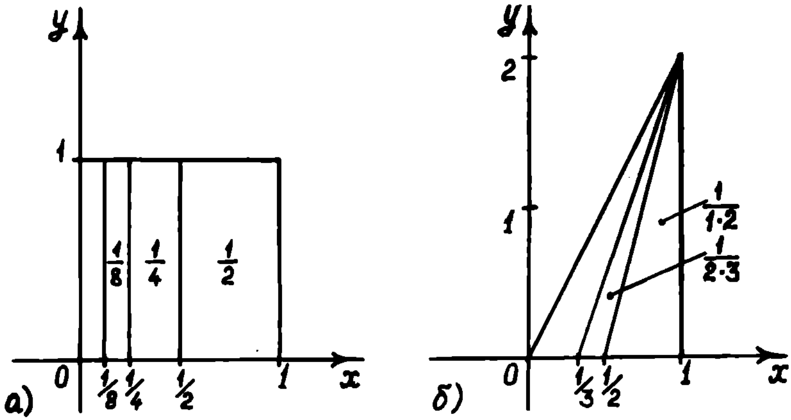

Рис. I.I

При суммировании членов убывающей геометрической прогрессии

$$a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}, \ldots \tag{I.2}$$

для любого числа $a \neq 0$ и $|q| < 1$ удалось найти число $S = \dfrac{a}{1-q}$, которое мы назвали суммой ряда и записали $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \dfrac{a}{1-q}$. Если $a = 0$, то все члены бесконечной последовательности (I.2) равны нулю. Если $q = 1$, то все члены последовательности равны a и $S_n = na$.

Значит, последовательность частичных сумм ряда $a + a + \ldots + a + \ldots$ неограниченно возрастает и предела не имеет. Этот ряд суммы не имеет, т.е. расходится. Попытаемся найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ для случая $a = 1$, $q = -1$, т.е. рассмотрим ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ Очевидно, $S_n = 1$, если $n = 2k-1$, и $S_n = 0$, если $n = 2k$, $k \in N$, и предел S_n не существует, т.е. ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ расходится и с точки зрения принятого определения суммы не имеет.

З а м е ч а н и е. Заключив формально каждую пару слагаемых, состоящую из одного положительного и одного отрицательного числа, в скобки, получим $(1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0$; соединив слагаемые в пары, начиная не с первого, а со второго, получим $1 + (-1 + 1) + \ldots + (-1 + 1) + \ldots = 1$. Переставив же каждое положительное слагаемое на место отрицательного и обратно, придем к выражению $-1 + (1 - 1) + \ldots + (1 - 1) = -1$. Действуя тремя различными способами для получения значения "суммы" $1 - 1 + 1 - \ldots$, приходим к трем различным значениям 0, 1, -1. При этом были использованы известные свойства конечных сумм - ассоциативность и коммутативность. Значит, операция суммирования бесконечного числа слагаемых, вообще говоря, не обладает этими свойствами, поскольку та или иная группировка слагаемых и их перестановка могут повлиять на величину суммы.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ (назовем его геометрическим) будет сходящимся в случае бесконечно убывающей ($|q| < 1$) геометрической прогрессии и расходящимся при $|q| \geqslant 1$.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ запишем в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots$$

Значит, $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$, откуда $S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$. Таким образом, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ и, например, площадь прямоугольного треугольника с катетами 1 и 2 (рис. 1.1,б) может быть представлена в виде суммы площадей бесконечного числа треугольников:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=1.$$

3. Для ряда I + 2 + 3 + ... + n + ... n-я частичная сумма $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$ неограниченно возрастает, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ расходится и о его сумме говорить нельзя.

4. В теории рядов важную роль играет ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, который называется гармоническим. Название ряда связано с понятием среднего гармонического $\frac{2}{1/a+1/b}$ двух положительных чисел a и b. Каждый член гармонического ряда, начиная со второго, есть среднее гармоническое предшествующего и последующего членов. Докажем, что гармонический ряд расходится. Известно, что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, монотонно возрастая, имеет пределом число e, т.е. для любого $n\in N$ выполняется неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$. Логарифмируя это неравенство, получаем $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1$, откуда $\frac{1}{n}>\ln(n+1)-\ln n$ и, следовательно, при n = I, 2, ... имеем $1>\ln 2$, $\frac{1}{2}>\ln 3-\ln 2$, $\frac{1}{3}>\ln 4-\ln 3$, ... $\frac{1}{n}>\ln(n+1)-\ln n$. Складывая эти неравенства, находим $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)$, т.е. $S_n>\ln(n+1)$, и поскольку $\ln(n+1)\to\infty$ при $n\to\infty$, то тем более $S_n\to\infty$ при $n\to\infty$, а это означает, что гармонический ряд расходится.

5. Рассмотрим так называемый ряд Лейбница:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

и докажем, что он сходится к числу $\ln 2$.

По формуле Маклорена для функции $\ln(1+x)$ напишем разложение

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$, $0<\theta<1$, и, следовательно, $|R_{n+1}(x)|<\frac{1}{n+1}$ для всех $x\in[0,\ 1]$. Полагая x = I, будем иметь

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+R_{n+1}(1),\text{ где } |R_{n+1}(1)|<\frac{1}{n+1},$$

или $\left|\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]-\ln 2\right|<\frac{1}{n+1}$. Обозначим через S_n n-ю частичную сумму ряда Лейбница. Тогда $|S_n-\ln 2|<\frac{1}{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\ln 2$. Доказана сходимость ряда Лейбница к числу $\ln 2$.

Переставим теперь члены ряда так, чтобы после одного положительного члена стояли два отрицательных. В результате такой перестановки получим ряд

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\ldots$$

Покажем, что этот ряд сходится и имеет сумму, вдвое меньшую, чем сумма исходного ряда. Имеем

$$S_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}S_{2n}^{(Л)},\quad S_{3n-1}=\frac{1}{2}S_{2n}^{(Л)}+\frac{1}{4n},\quad S_{3n-2}=S_{3n-1}+\frac{1}{4n-2},$$

где $S_{2n}^{(Л)}$ - частичная сумма ряда Лейбница:

$$S_{2n}^{(Л)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right).$$

Полученный в результате указанной перестановки членов ряда Лейбница новый ряд сходится и имеет сумму, равную $1/2\ln 2$, так как

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n}=\lim_{n\to\infty} S_{3n-1}=\lim_{n\to\infty} S_{3n-2}=\frac{1}{2}\ln 2.$$

Как видим, сумма ряда Лейбница изменилась вследствие перестановки членов ряда. Следовательно, ряд Лейбница не обладает переместительным свойством. Мы убедились в том, что даже в сходящемся ряде, вообще говоря, нельзя менять порядок слагаемых.

Таким образом, отыскание суммы ряда сводится к отысканию предела связанной с этим рядом последовательности частичных сумм S_1, S_2, ..., S_n, ... И, обратно, если задана произвольная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, то, полагая $u_1=a_1$, $u_2=a_2-a_1$, ..., $u_n=a_n-a_{n-1}$, ..., можно свести отыскание предела последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ к отысканию суммы ряда $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$, поскольку последовательность частичных сумм этого ряда $S_1 = u_1 = a_1$, $S_2 = u_1 + u_2 = a_2$, ..., $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = a_n$, ... совпадает с последовательностью a_n, и, значит, $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Укажем три важных свойства сходящихся рядов:

I. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и имеют суммы S', S'', то их сумма (разность), т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$, тоже сходится и имеет сумму $S = S' + S''$. Действительно, частичные суммы исходных рядов S_n', S_n'' имеют пределы S', S'', а поэтому для частичных сумм S_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ имеем $S_n = S_n' + S_n'' \to S' + S''$ при $n \to \infty$, т.е. $S = S' + S''$.

2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и имеет сумму S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ тоже сходится и имеет сумму cS. Действительно, для первого ряда $S_n \to S$, а для второго $S_n' = cS_n \to cS$ при $n \to \infty$, и предложение доказано.

3. У всякого сходящегося ряда последовательность частичных сумм S_n ограничена (поскольку существует $\lim_{n\to\infty} S_n = S$). Обратное, вообще говоря, не справедливо, т.е. последовательность частичных сумм ряда может быть ограниченной, но ряд будет расходиться, как это имеет место у ряда I - I + I - ... Однако для рядов с неотрицательными членами из ограниченности частичных сумм S_n следует сходимость ряда. Действительно, последовательность сумм S_n ряда с неотрицательными членами представляет собой неубывающую последовательность, и если она ограничена сверху, то по известной теореме Вейерштрасса имеет предел, т.е. ряд сходится.

Опираясь на этот факт, рассмотрим два ряда с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, таких, что $u_n \le v_n$ для любых n. Для частичных сумм S_n', S_n'' этих рядов справедливо неравенство $S_n' \le S_n''$, откуда видно, что если второй ряд сходится (частичные суммы S_n'' ограничены: $S_n'' \le K$), то сходится и первый ряд (частичные суммы S_n' тем более ограничены: $S_n' \le S_n'' \le K$). Если же первый ряд расходится, то второй также расходится, так как если бы второй сходился, то по доказанному должен был бы сходиться и первый, что противоречит условию.

Таким образом, установлено, что если "бо́льший" ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то сходится и "меньший" $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, а если "меньший" расходится, то расходится и "бо́льший". В этом состоит принцип сравнения рядов с неотрицательными членами, используемый при исследовании их на сходимость.

§ 2. Абсолютно и условно сходящиеся ряды

На примерах показано, что если в сходящемся ряде осуществить перестановку его членов, то это может изменить сумму ряда, т.е. известное правило "от перемены мест слагаемых сумма не меняется" в общем случае для рядов (бесконечных сумм) не справедливо. Возникает вопрос: существуют ли ряды, обладающие коммутативностью, и если существуют, то какое их свойство наверняка обеспечивает коммутативность?

Начнем с рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами ($a_n \geq 0$), которые почти очевидно обладают коммутативностью. Действительно, обозначим через S_n n-ю частичную сумму сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, имеющего сумму S, и через S_n' сумму первых n членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, полученного из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ изменением порядка его членов. Зададим целое число n. Поскольку все члены частичной суммы S_n' принадлежат ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, можно найти такое число N, что частичная сумма S_N будет содержать все члены суммы S_n' и, быть может, еще и другие. Итак, $S_n' \leq S_N$. Но S_N с ростом N монотонно не убывает, а потому $S_N \leq S$ и, следовательно, $S_n' < S$. Таким образом, неубывающая последовательность S_n' - ограниченная, а потому она сходится. Положив $S' = \lim\limits_{n\to\infty} S_n'$, получим $S' \leq S$, поскольку $S_n' \leq S_N$. Так как всегда можно считать $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ рядом, полученным из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ изменением порядка его членов, то аналогично предшествующему можно получить, что $S \leq S'$. Сравнивая неравенства $S' \leq S$, $S \leq S'$, заключаем, что $S' = S$. Следовательно, в любом сходящемся ряде с неотрицательными членами можно произвольным образом переставлять его члены и сумма ряда при этом не изменится.

Откажемся теперь от предположения, что члены ряда имеют одинаковые знаки, и рассмотрим знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Обозначим через $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ ряд, полученный из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n''$ заменой всех отрицательных членов нулями, а через $-\sum_{n=1}^{\infty} a_n''$ ряд, полученный из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ заменой всех положительных членов нулями. Если ряды с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n''$ сходятся, то сходится их разность, т.е. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n'-a_n'')$ и, следовательно, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, поскольку $a_n=a_n'-a_n''$. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n''$ с частичными суммами S_n', S_n'' наверняка будут сходиться, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, поскольку последовательности S_n', S_n'' являются подпоследовательностями последовательности S_n^+ частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (известно, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится). Таким образом, установлено, что если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n''$, а также ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Предположив ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходящимся, осуществим перестановку членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и обозначим полученный в результате перестановки ряд через $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Это приведет к перестановке членов ряда с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$. В результате возникнут ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n'$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n''$, причем $b_n=b_n'-b_n''$, что, как уже известно, не повлияет ни на факт сходимости, ни на величины сумм полученных рядов. Но тогда по-прежнему будет сходиться и иметь ту же сумму ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с переставленными членами, поскольку он является разностью рядов $\sum_{n=1}^{\infty} b_n'$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n''$. Итак, доказано, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то сходится знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и в нем допустима любая перестановка членов в том смысле, что сумма ряда при этом не меняется. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, для которого сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ (и который тем самым также сходится), называется абсолютно сходящимся. Мы установили, что в абсолютно сходящемся ряде допустима любая перестановка членов, причем полученный в результате перестановки ряд снова абсолютно сходится.

Что касается группировки членов сходящегося ряда, не изменяющей их порядка, то частичные суммы "сгруппированного" ряда будут подпоследовательностью последовательности S_n частичных сумм исходного ряда и, следовательно, будут иметь тот же предел S, что и последовательность S_n. Группировка же членов ряда, связанная с их перестановкой, наверняка допустима лишь в абсолютно сходящемся ряде.

Без доказательства отметим, что абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать по обычным правилам алгебры. Поясним сказанное. Пусть даны два ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$. Произведением этих рядов называется ряд $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty}a_i b_k$, члены которого $a_i b_k$ состоят из всевозможных произведений членов исходных рядов. Если ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ абсолютно сходятся и имеют суммы S_1, S_2, то их произведение, т.е. ряд $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty}a_i b_k$, при любом расположении слагаемых $a_i b_k$ будет абсолютно сходиться и иметь сумму $S=S_1 S_2$.

Отметим, что если операция "заключения в скобки", т.е. группировка членов, не изменяющая их порядка, в сходящемся ряде – операция "безопасная", не влияющая ни на факт сходимости, ни на величину суммы ряда, то операция "раскрытия скобок" – операция "опасная", так как она может сходящийся ряд превратить в расходящийся, что хорошо видно на примере ряда $(1-1)+(1-1)+\ldots$, сумма которого $S=0$. Раскрытие скобок в этом случае приводит к расходящемуся ряду $1-1+1-1+\ldots$.

Итак, абсолютная сходимость рядов обеспечивает возможность применения к ним некоторых основных правил алгебры, связанных с перестановкой и группировкой их членов, а также с их перемножением.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, который сходится, но для которого ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, называется условно сходящимся. Применительно к таким рядам установленные выше положения в общем случае неприменимы, т.е. в условно сходящемся ряде перестановка его членов может изменить сумму ряда и даже сделать сходящийся ряд расходящимся. Перемножение условно сходящихся рядов может также привести к расходящемуся ряду. Например, ряд Лейбница $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ сходится к сумме $\ln 2$ условно.

Можно доказать, что каждый из условно сходящихся рядов путем изменения порядка членов в нем можно превратить в ряд, сходящийся к произвольному наперед выбранному числу (теорема Римана). Следовательно, если сумма некоторого сходящегося ряда не зависит от порядка его членов, то этот ряд абсолютно сходится.

§ 3. Необходимые признаки сходимости рядов

I. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Действительно, $a_n = S_n - S_{n-1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) =$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Применение необходимого условия часто позволяет убедиться в расходимости ряда. Например, геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}$ расходится при $a \neq 0$ и $|q| \geqslant 1$, потому что $|a_n| = |a|\,|q^{n-1}| \geqslant |a|$. Однако, нельзя сделать обратное утверждение: если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. В самом деле, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ предел общего члена равен нулю, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$. С другой стороны, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln(n)$ и $S_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + [\ln(n+1) - \ln n] \Leftrightarrow S_n = \ln(n+1)$. Таким образом, последовательность S_n стремится к $+\infty$, значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ln(1+\frac{1}{n})$ расходится.

Другим примером может служить гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Если бы этот ряд был сходящимся, то, обозначив его сумму через S, мы получили бы $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}-\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S-S=0$. Но $S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$, и правая часть уменьшится, если каждый ее член заменить на $\frac{1}{2n}$. Поэтому $S_{2n}-S_n>n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$ и равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$ невозможно.

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм ограничена.

Действительно, если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ и $\{S_n\}$ ограничена. Нельзя, однако, утверждать обратное. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n=$ $=-1+1-1+1-\ldots$ имеем $S_1=-1$, $S_2=0$, $S_3=-1$, $S_4=0,\ldots$, $S_n=\frac{-1+(-1)^n}{2}$. Очевидно, что $|S_n|\leq 1$, но последовательность $\{S_n\}$ не имеет предела, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ расходится.

Для ряда с неотрицательными членами условие ограниченности частичных сумм этого ряда является необходимым и достаточным условием сходимости ряда. Действительно, если $a_n\geqslant 0$, то $\{S_n\}$ является неубывающей и ограниченной, в силу чего эта последовательность обязательно сходится. Покажем, например, что ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha>1$ сходится. Действительно, по теореме Лагранжа имеем $(x+h)^{-\alpha+1}-x^{-\alpha+1}=(-\alpha+1)h(x+\theta h)^{-\alpha}$. Положим $x=n$, $h=-1$, тогда для $n>1$ $\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{n^{\alpha-1}}=(\alpha-1)\frac{1}{(n-\theta)^{\alpha}}$. Так как $0<\theta<1$, то $\frac{1}{(n-\theta)^\alpha}>\frac{1}{n^\alpha}$. Но $\alpha-1>0$, поэтому $\frac{1}{n^\alpha}<\frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right]$ и

$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}<1+\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{1^{\alpha-1}}-\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)+\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}-\frac{1}{3^{\alpha-1}}\right)+\frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right],$$

откуда $S_n<1+\frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)<1+\frac{1}{\alpha-1}$. Последовательность частичных сумм ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, где $\alpha > 1$, ограничена, поэтому этот ряд сходится.

§ 4. Критерий Коши сходимости ряда

В соответствии с теорией последовательностей можно указать необходимое и достаточное условие того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ был сходящимся. Заметим, что если $p > 0$, то $S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}$. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1 (критерий Коши). Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было найти такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при любых целых $p > 0$ и $n > N$ будет выполняться неравенство $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

Применим критерий Коши для доказательства одного достаточного признака сходимости знакочередующегося ряда вида $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$.

Теорема 1.2 (признак Лейбница). Если предел невозрастающей последовательности положительных чисел $\{a_n\}$ равен нулю, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится (вообще говоря, неабсолютно).

Доказательство. Действительно, имеем $S_{n+p} - S_n = \pm (a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots \pm a_{n+p})$, где целое $p > 0$. Если n четное, то $S_{n+p} - S_n \le a_{n+1}$, так как $S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + (a_{n+3} - a_{n+2}) + (a_{n+5} - a_{n+4}) + \ldots$ и выражения в скобках неположительны. Заметим также, что $S_{n+p} - S_n \geq 0$, так как $S_{n+p} - S_n = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \ldots + (a_{n+p-1} - a_{n+p})$ и выражения в скобках неотрицательны. Аналогично в случае нечетного n: $-a_{n+1} \le S_{n+p} - S_n \le 0$. Значит, для любого n и $p > 0$ имеем $|S_{n+p} - S_n| \le a_{n+1}$. Так как $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, то для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $a_{n+1} < \varepsilon$. Поэтому для любого $n > N$ и $p > 0$ имеет место неравенство $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Ряд удовлетворяет условию Коши, следовательно, сходится. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $p \to \infty$ для случая фиксированного n, найдем $|S - S_n| \le a_{n+1}$.

Таким образом, погрешность, возникающая при замене суммы S знакочередующегося ряда с невозрастающими по абсолютной величине членами его частичной суммой S_n, не превосходит абсолютной величины первого из отброшенных членов ряда.

§ 5. Достаточные признаки сходимости рядов

Теорема I.3 (признак (принцип) сравнения рядов в неопределенной форме). Если, начиная с некоторого члена, все последующие члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не превышают по модулю соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n \geqslant 0$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (даже абсолютная), а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. Действительно, положив $S_n = |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$, $S_n' = b_1+b_2+\ldots+b_n$, получим $S_n \leq S_N + S_n'$, где N - тот номер, начиная с которого $|a_n| \leq b_n$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится к S', то $S_n' \leq S'$, откуда $S_n \leq S_N + S'$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, и поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, так как в противном случае в силу доказанного сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ повлекла бы сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Следствие I.I. Если $a_n>0$, $b_n>0$ и $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, начиная с некоторого номера N, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Действительно, не ограничивая общности рассуждений, можно положить $N = 1$. Тогда $\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}$, откуда $\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n \Leftrightarrow a_n \leq c b_n$, где $c = \frac{a_1}{b_1}$.

Пример I.I. Ряд $1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots$ сходится, так как его члены меньше членов сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Пример I.2. Ряд $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots$ абсолютно сходится для любого $x\in(-1;\,1)$, так как абсолютные величины членов ряда не превышают значений членов сходящегося геометрического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|x|^n$, где $|x|<1$.

Пример I.3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, где $\alpha\le 1$, расходится, так как его члены не меньше членов гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Теорема I.4 (признак (принцип) сравнения рядов с положительными членами в предельной форме). Если, начиная с некоторого номера все члены рядов $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (I) и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ (2) положительны и существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$, то из сходимости ряда (2) вытекает сходимость ряда (I). Если $A\ne 0$ (но, возможно, $A=\infty$), то из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (I).

Доказательство. Действительно, начиная с некоторого номера, $a_n>0$, $b_n>0$ и $\frac{a_n}{b_n}<A+1$, откуда $a_n<(A+1)b_n$. По условию сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, значит, сходится ряд с общим членом $(A+1)b_n$. По непредельному признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Если $A\ne 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{A}$ и, начиная с некоторого номера, $b_n<\left(\frac{1}{A}+1\right)a_n$. Если ряд (2) расходится, то по непредельному признаку расходится и ряд (I).

Пример I.4. Ряд с общим членом $a_n=\frac{\sqrt{n^4+5}}{n^3-15n}$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}{}^{a_n}/_{1/n}=1$, а гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - расходящийся.

Теорема I.5 (признак Коши для рядов с неотрицательными членами). Если существует такое неотрицательное число $q<1$, что, начиная с некоторого члена a_N, все последующие члены ряда удовлетворяют неравенству $\sqrt[n]{a_n}\le q$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ с неотрицательными членами сходится. Если же $\sqrt[n]{a_n}\ge 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Действительно, в первом случае имеем $a_n \le q^n$, $n>N$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ является сходящимся геометрическим ($0 \le q < 1$) и по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Во втором случае не выполнен необходимый признак сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Для приложений полезен признак Коши в предельной форме, вытекающий из предыдущего: если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ неотрицательны и существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = d$, то ряд сходится, при $d<1$; ряд расходится при $d>1$; при d = I требуется дополнительное исследование сходимости ряда.

Пример I.5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin^2 n\alpha \; (r>0)$ сходится по признаку Коши для всех значений $r<$ I и любых α, так как в этом случае $\sqrt[n]{a_n} = r\sqrt[n]{\sin^2 n\alpha} \le r < 1$.

Пример I.6. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ сходится, так как $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} =$
$= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} < 1.$

Пример I.7. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \pi^{\ln n} x^n$ сходится для всех значений $|x|<1$ и притом абсолютно, так как $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\pi^{\ln n} |x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \pi^{\frac{\ln n}{n}} =$
$= |x|\pi^0 = |x|$.

Пример I.8. Признак Коши не решает вопроса о сходимости ряда Дирихле, так как $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) = 1$. Однако, мы знаем, что при $\alpha \le 1$ ряд расходится, при $\alpha > 1$ сходится.

Теорема I.6 (признак Даламбера для рядов с положительными членами). Если существует такое неотрицательное число $q<1$, что, начиная с некоторого члена a_N, все последующие члены ряда удовлетворяют неравенству $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$, $n>N$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами сходится, если же $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Действительно, в первом случае $a_{n+1} \le a_n q$, $n > N$, следовательно, положив $n = N+1, N+2, N+3, \dots N+p$ $(p>0)$, получим:

$$a_{N+2} \le a_{N+1} q,$$

$$a_{N+3} \le a_{N+2} q \le a_{N+1} q^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{N+p} \le a_{N+1} q^{p-1}.$$

Так как ряд геометрической прогрессии $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_{N+1} q^{p-1}$ сходится ($q < 1$), то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится. Во втором случае общий член ряда a_n при $n \to \infty$ не стремится к нулю, а значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Из этого признака вытекает признак Даламбера в предельной форме: если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$, то при $d < 1$ ряд сходится, при $d > 1$ расходится. При $d = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример 1.9. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится для любого $x \in R$, так как

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{|x|^n}{n!} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Пример 1.10. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ сходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e} < 1$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} n!}{n^n}$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{(1+1/n)^n} = \frac{4}{e} > 1.$

Пример 1.11. Признак Даламбера, примененный к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n \sin^2 n\alpha$ ($r > 0$), не дает результата, так как отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \left[\frac{\sin (n+1)\alpha}{\sin n\alpha} \right]^2$ не стремится ни к какому пределу и даже не остается все время меньшим или неменьшим единицы.

Замечание. Можно показать, что признак Коши сильнее признака Даламбера, т.е. он может применяться во всех случаях, когда применим принцип Даламбера, и, кроме того, в ряде случаев, когда последний не дает ответа. Но пользование признаком Коши сложнее, чем признаком Даламбера. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d>0$, то автоматически $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=d$, т.е. предельный признак Даламбера теоретически ничего нового по сравнению с признаком Коши не дает. Однако он очень удобен на практике.

<u>Теорема I.7</u> (признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов в предельной форме). Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ абсолютно сходится, при $\rho>1$ ряд расходится, при $\rho=1$ признак вопроса не решает (признак Даламбера).

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ абсолютно сходится, при $\rho>1$ ряд расходится, при $\rho=1$ признак вопроса не решает (признак Коши).

<u>Пример I.12.</u> Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pi^{\ln n}x^{3n}$ сходится для всех значений $|x|<1$ и притом абсолютно, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\pi^{\ln n}|x^{3n}|}=|x|^3\lim\limits_{n\to\infty}\pi^{\frac{\ln n}{n}}=|x|^3$.

Признаки Коши и Даламбера все же являются весьма частными и не применимы часто даже в простых случаях. В сомнительных ситуациях когда на вопрос о сходимости и расходимости ряда нельзя ответить с помощью названных выше признаков, прибегают к более "тонким" признакам, которые основаны на сравнении данного ряда с так сказать медленнее сходящимися или медленнее расходящимися, чем ряд геометрической прогрессии, рядами.

<u>Теорема I.8</u> (обобщенный признак Гаусса для рядов с положительными членами). Пусть $\frac{p_n}{p_{n+1}}=c_1+\frac{c_2}{n}+\frac{Q_n}{n\ln n}$, $|Q_n|\le M$, c_1 и c_2 – действительные числа. Тогда, если

а) $c_1>1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ сходится;

$c_1<1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ расходится;

б) $c_1 = 1$,

$c_2 > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится;

$c_2 < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ расходится;

в) $c_1 = c_2 = 1$, существует $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = l$,

$l > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится;

$l < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ расходится;

при $l = 1$ признак на вопрос о сходимости и расходимости ряда не отвечает.

<u>Доказательство.</u> Случай "а". По условию $\frac{p_n}{p_{n+1}} = c_1 + \frac{c_2}{n} + \frac{Q_n}{n\ln n}$, где $\{Q_n\}$ – ограниченная последовательность, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_{n+1}} = c_1$, а значит, по предельному признаку Даламбера ряд сходится, если $c_1 > 1$, и расходится, если $c_1 < 1$.

Случай "б". Если $c_1 = 1$, то $\frac{p_n}{p_{n+1}} = 1 + \frac{c_2}{n} + \frac{Q_n}{n\ln n}$. Пусть $c_2 > 1$. Сравним исходный ряд с рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, который сходится. Составим и преобразуем отношение $\frac{p_n'}{p_{n+1}'} = \frac{(1+n)^\alpha}{n^\alpha} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, а затем разность $\frac{p_n}{p_{n+1}} - \frac{p_n'}{p_{n+1}'} = 1 + \frac{c_2}{n} - 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{c_2-\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, где $c_2 - \alpha > 0$.

Значит, начиная с некоторого номера, $\frac{p_n}{p_{n+1}} > \frac{p_n'}{p_{n+1}'}$ и по следствию из признака сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, так как сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n'$. Пусть теперь $c_2 < 1$. Выберем для сравнения гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Тогда $\frac{p_n}{p_{n+1}} - \frac{p_n'}{p_{n+1}'} = \frac{c_2-1}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, где $c_2 - 1 < 0$ и, начиная с некоторого номера, $\frac{p_n}{p_{n+1}} < \frac{p_n'}{p_{n+1}'}$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ расходится, так как гармонический ряд расходится.

<u>Следствие 1.2.</u> Если $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{c_2}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $c_2 > 1$, и расходится при $c_2 < 1$ (признак Раабе в непре-

дельной форме). Если $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=C_2$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $C_2>1$. и расходится при $C_2<1$ (признак Раабе в предельной форме.

Случай "в". Если $C_1=C_2=1$, то ряд $\frac{p_n}{p_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{Q_n}{n\ln n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n=l$. Если $l>1$, то для сравнения выберем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p'_n=$ $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{k_1}}$, $1<k_1<l$, который сходится по интегральному признаку сходимости.

Составим и преобразуем отношение:

$$\frac{p'_n}{p'_{n+1}}=\frac{(n+1)[\ln(n+1)]^{k_1}}{n(\ln n)^{k_1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln n}\right)^{k_1}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+k_1\frac{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)+o\left(\frac{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)=1+k_1\frac{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln n}+\frac{1}{n}+$$

$$+\frac{o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln n}=1+\frac{1}{n}+\frac{k_1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

Выберем $k_1<k<l$, тогда, начиная с некоторого номера, $Q_n>k$ и $\frac{p_n}{p_{n+1}}>1+\frac{1}{n}+\frac{k}{n\ln n}$. Значит, $\frac{p_n}{p_{n+1}}-\frac{p'_n}{p'_{n+1}}>\frac{k-k_1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$, где $k-k_1>0$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится. Если $l<1$, то положив $k_1=1$, получим $\frac{p_n}{p_{n+1}}-\frac{p'_n}{p'_{n+1}}<0$, начиная с некоторого номера. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ расходится, так как расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Следствие I.3. Если $\frac{p_n}{p_{n+1}}=1+\frac{C_2}{n}+\frac{Q_n}{n^{1+\varepsilon}}$, где $\varepsilon>0$ и $|Q_n|\le M$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, если $C_2>1$, и расходится, если $C_2<1$ (признак Гаусса).

Пример I.13. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ расходится по непредельному признаку Раабе, так как $\frac{p_n}{p_{n+1}}=\frac{2n+2}{2n+1}=1+\frac{1}{2n+1}=1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ и $C_2=\frac{1}{2}<1$.

Пример I.14. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\sqrt{n}}$ также расходится, но по признаку Гаусса, так как отношение $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{Q_n}{n^2}$ и $\frac{p_n}{p_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\tilde{Q}_n}{n^2}$, где c_2 = I и $|\tilde{Q}_n| \le M$.

Теорема I.9 (признак Гаусса для знакопеременных рядов). Пусть $\left|\frac{p_n}{p_{n+1}}\right| = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{Q_n}{n^{1+\varepsilon}}$, где $\varepsilon > 0$ и $|Q_n| \le M$. Тогда а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится абсолютно, если $\mu >$ I; б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ расходится, если $\mu < 0$. Случай "а" очевидно следует из признака Гаусса для рядов с положительными членами; в случае "б" не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Если $0 < \mu \le$ I, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |p_n|$ расходится, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ может сходиться или расходиться. Получили условие абсолютной сходимости ряда, но условие расходимости получить, вообще говоря, нельзя.

Теорема I.10 (интегральный признак сходимости Коши - Маклорена для рядов с неотрицательными членами). Если неотрицательная функция $f(x)$ определена при $x \geqslant$ I и монотонно убывает, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Действительно, учитывая геометрический смысл определенного интеграла (рис. I.2), запишем: $f(2) + f(3) + \dots + f(n+1) \le \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \le f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n)$ или $S_{n+1} - f(1) \le \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \le S_n$, где S_n - частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$. Если $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то его частичные интегралы $\int\limits_1^{n+1} f(x)dx$ ограничены. Учитывая левую часть неравенства , получим, что последовательность частичных сумм также ограничена. Этого достаточно для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ с неотрицательными членами.

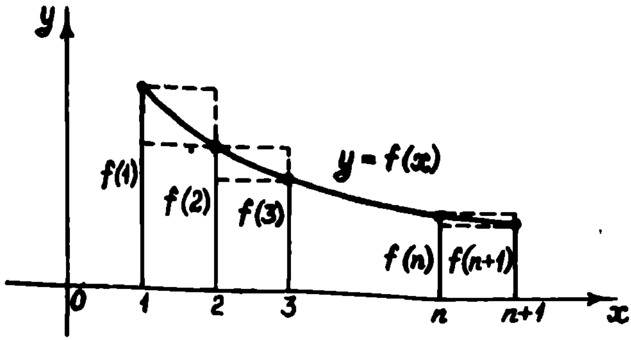

Рис. I.2

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится и его сумма равна S, то $S_n \le S$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и потому $\int\limits_1^{n+1} f(x)dx \le S$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Если $A \geqslant 1$, то, беря $n \geqslant A$, получаем в силу неотрицательности функции $f(x)$: $\int\limits_1^A f(x)dx \le \int\limits_1^n f(x)dx \le S$.

Частичные интегралы $\int\limits_1^A f(x)dx$, $A \geqslant 1$ ограничены, а потому $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится.

З а м е ч а н и е. Если $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то $\int\limits_1^{n+1} f(x)dx \to \infty$ при $n \to \infty$ (как монотонно возрастающая неограниченная последовательность) и согласно неравенству $\int\limits_1^{n+1} f(x)dx \le S_n$ тем более $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится.

Пример I.15. Ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$, так как $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Пример I.16. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$, так как аналогично ведет себя интеграл $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha} x} = \int\limits_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}}$.

Приведем достаточный признак сходимости числовых рядов, пригодных и для рядов с комплексными членами.

Теорема I.II (признак Дирихле сходимости ряда с произвольными членами). Если последовательность $\{\sigma_n\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена, а последовательность $\{p_n\}$ монотонно убывающая (невозрастающая) и стремится к нулю, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n p_n$ сходится.

Доказательство. Действительно, если $a_1 = \sigma_1$, $a_1+a_2=\sigma_2$, ..., $a_1+a_2+\ldots+a_n=\sigma_n$, то $a_1=\sigma_1$, $a_2=\sigma_2-\sigma_1$, ..., $a_n=\sigma_n-\sigma_{n-1}$ и потому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n p_n = \sigma_1 p_1 + (\sigma_2-\sigma_1)p_2+\ldots+(\sigma_n-\sigma_{n-1})p_n+\ldots$ (σ_0 = 0) (преобразование Абеля), $S_n=\sigma_1(p_1-p_2)+\sigma_2(p_2-p_3)+\ldots+\sigma_{n-1}(p_{n-1}-p_n)+\sigma_n p_n$, где $|\sigma_n|\le c$.

Введем ряды:

A) $\sigma_1(p_1-p_2)+\sigma_2(p_2-p_3)+\ldots+\sigma_{n-1}(p_{n-1}-p_n)+\ldots$

B) $c\,(p_1-p_2)+c\,(p_2-p_3)+\ldots+c\,(p_{n-1}-p_n)+\ldots$

C) $(p_1-p_2)+(p_2-p_3)+\ldots+(p_{n-1}-p_n)+\ldots$

Ряд C сходится, так как его частичные суммы $S_n^{(c)} \to p_1$ при $n\to\infty$. По свойству сходящихся рядов сходится ряд B. По принципу сравнения сходится ряд A. Значит, существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n p_n=0$.

Следствие I.4. Если в знакочередующемся ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} p_n$ последовательность $\{p_n\}$ монотонно невозрастающая ($p_n \ge p_{n+1} \ge 0$) и $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$, то ряд сходится (признак Лейбница).

Следствие I.5. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$ (ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится), $\{p_n\}$ - монотонно невозрастающая последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n p_n$ сходится.

Пример I.17. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится по признаку Лейбница (условно).

Пример I.18. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}$ при $\alpha\ne 2\pi m$ сходится по признаку Дирихле. При $\alpha=2\pi m$, m = 0, I, 2, ... все его члены равны нулю, и потому ряд также сходится.

§ 6. Ряды с комплексными числами

Пусть $\{c_n\} = \{a_n + ib_n\}$, $a_n \in R$, $b_n \in R$, - бесконечная последовательность комплексных чисел. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то S - сумма ряда и записывают $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$. Если $\{S_n\}$ расходится, то ряд называется расходящимся.

Ряду с комплексными членами соответствуют два действительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = Re\, c_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n = Jm\, c_n$. Для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (следует из эквивалентности сходимости последовательности частных сумм $\{S_n\}$ и частичных сумм рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$).

Критерий Коши для ряда получается сразу же, если учесть, что $S_{n+p} - S_n = \sum\limits_{k=1}^{p} c_{n+k}$. Поэтому для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при $n > N$ и любом целом $p > 0$ выполнялось бы неравенство $\left|\sum\limits_{k=1}^{p} c_{n+k}\right| < \varepsilon$ (критерий Коши).

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ называется неабсолютно сходящимся. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ (очевидно следует из критерия Коши).

<u>Теорема I.I2</u> (критерий абсолютной сходимости). Для абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ необходима и достаточна абсолютная сходи-

мость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Утверждение легко доказывается с помощью неравенств

$$|a_n| \leq |c_n| \leq |a_n| + |b_n|,$$
$$|b_n| \leq |c_n| \leq |a_n| + |b_n|$$

и признака сравнения для рядов с неотрицательными членами.

Из этой теоремы, а также из теоремы о перестановке членов абсолютно сходящихся рядов с действительными членами получим теорему: в абсолютно сходящемся ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ любая перестановка членов сохраняет абсолютную сходимость ряда и величину его суммы.

Также можно показать, что в сходящемся ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ любая группировка членов, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость ряда и величину его суммы. В абсолютно сходящемся ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ допустима любая перестановка и группировка членов ряда.

Исследование абсолютной сходимости ряда с комплексными членами сводится к решению вопроса о сходимости действительного числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$, к которому применимы все существующие признаки сходимости рядов с положительными членами. В связи с этим мы не будем подробно останавливаться на рассмотрении достаточных условий сходимости исходного ряда. Еще раз заметим, что теоремы о сложении и вычитании сходящихся рядов, об умножении абсолютно сходящихся рядов, о необходимом признаке сходимости ряда по существу без изменения переносятся из действительной области в комплексную область.

<u>Пример I.18.</u> Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(a+i)^n}{n!}$, $a \in R$, сходится абсолютно, так как по признаку Даламбера, примененному к ряду из модулей его членов, находим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a+i|^{n+1}}{|a+i|^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a+i|}{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a^2+1}}{n+1} = 0 < 1.$$

Пример I.19. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{a^n} \cos\frac{\pi n}{n+1}$, $a > 1$, абсолютно сходится по признаку сравнения, примененному к ряду из модулей его членов, так как $\left|\frac{i^n}{a^n}\cos\frac{\pi n}{n+1}\right| \le \frac{1}{a^n}$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ сходится как ряд геометрической прогрессии, знаменатель которой $q = \frac{1}{a}$ находится в пределах $0 < q < 1$.

Глава 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. СХОДИМОСТЬ. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

§ I. Сходимость. Равномерная сходимость

До сих пор члены рассматриваемых рядов были числами. Рассмотрим ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \qquad (2.1)$$

члены которого являются функциями переменной x, определенными на отрезке $[a,b]$. Давая переменной x некоторое числовое значение $x = x_0 \in [a,b]$, мы превращаем ряд (2.I) в числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Этот числовой ряд может либо сходиться, либо расходиться. Точка $x = x_0 \in [a,b]$, в которой ряд сходится, называется точкой сходимости этого ряда. Точка $x_0 \in [a,b]$, в которой ряд расходится, называется точкой его расходимости. Совокупность точек сходимости ряда (2.I) образует область его сходимости, а совокупность точек его расходимости - область расходимости. В частном случае одно или другое из этих множеств может оказаться пустым. Исследование на сходимость функционального ряда состоит в отыскании его области сходимости. Например, ряд $1 + x + x^2 + \dots + x^n \dots$, все члены которого определены на всей числовой прямой, для каждого значения x представляет собой сумму геометрической прогрессии. Областью сходимости ряда служит интервал (-I, +I), область расходимости определяется неравенством $|x| \ge 1$.

Суммы вида $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ по аналогии с числовыми рядами будем называть частичными суммами ряда (2.I). В любой точке x области сходимости ряда существует $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$. Функции $S_n(x)$ определены в любой точке отрезка $[a,b]$, но функция $S(x)$, называемая суммой ряда, определена только в точках сходимости этого ряда.

Функцию $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ будем называть остатком данного ряда. Для любого n функция $r_n(x)$ определена только в области сходимости ряда. В каждой точке x этой области существует $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, т.е. для любой точки x области сходимости и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N = N(\varepsilon, x)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$. При различных значениях x из ряда (2.I) получаются, вообще говоря, различные числовые ряды, и именно поэтому число N, т.е. номер, начиная с которого выполняется неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$, будет различным для различных фиксированных x.

В теории функциональных рядов естественно поставить вопрос: в какой мере мы может обращаться с рядами как с конечными суммами функций? Известно, что сумма конечного числа непрерывных функций всегда есть непрерывная функция, рассматриваем ли мы непрерывность в данной точке или на данном отрезке. Сохраняется ли это свойство для сходящихся функциональных рядов (бесконечных сумм)?

Известно также, что сумма конечного числа функций, интегрируемых на отрезке $[a,b]$, также интегрируема на этом отрезке и интеграл суммы равен сумме интегралов слагаемых. Если все члены ряда (2.I) интегрируемы на $[a,b]$ и если этот ряд сходится в каждой точке данного отрезка, то можно ли утверждать, что и сумма $S(x)$ этого ряда интегрируема на $[a,b]$ и что интеграл суммы равен сумме интегралов членов ряда, т.е.

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \dots + \int_a^b u_n(x)dx + \dots ? \tag{2.2}$$

Если равенство (2.2) имеет место, то говорят, что ряд (2.I) допускает на $[a,b]$ почленное интегрирование. В этом случае, очевидно, $\int_a^b S(x)dx = \int_a^b S_n(x)dx + \tilde{r}_n$, где $\tilde{r}_n$ - остаток сходящегося ряда (2.2), откуда

$$\int_a^b S(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)dx \quad , \lim_{n\to\infty} \tilde{r}_n = 0. \tag{2.3}$$

Верно и обратное: из любого соотношения (2.3) следует равенство (2.2).

Аналогично ставится вопрос о почленном дифференцировании функциональных рядов. Сумма конечного числа функций, дифференцируемых в некоторой точке, также дифференцируема в этой точке, и производная суммы равна сумме производных слагаемых. При каких условиях это правило почленного дифференцирования может быть перенесено на бесконечные ряды функций? Другими словами, если функции $u_n(x)$ имеют непрерывные производные в области сходимости ряда и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$, т.е. $S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$, то при каких условиях можно утверждать, что функция $S(x)$ имеет производную $S'(x)$ и что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'(x)=S'(x)$ в каждой точке области сходимости, т.е. $S'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x)+\ldots$?

§ 2. Свойства равномерно сходящихся рядов

Начнем с исследования непрерывности суммы ряда. Пусть x_0 - произвольно фиксированная точка области сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, составленного из непрерывных на $[a,b]$ функций и имеющего сумму $S(x)$. Выясним, при каких условиях сумма $S(x)$ будет непрерывной в точке x_0. Непрерывность $S(x)$ в точке x_0, как известно, означает существование окрестности D_0 точки x_0 такой, что для любого x' из этой окрестности и любого заданного $\varepsilon>0$ будет выполняться неравенство $|S(x')-S(x_0)|<\varepsilon$. Очевидно, что

$$|S(x')-S(x_0)|=|S(x')-S_n(x')+S_n(x')-S_n(x_0)+S_n(x_0)-S(x_0)|\le$$
$$\le|S(x')-S_n(x')|+|S_n(x')-S_n(x_0)|-|S_n(x_0)-S(x_0)|.$$

Так как конечные суммы $S_n(x)$ по условию - непрерывные функции, то существует такая окрестность D_{0n}, в каждой точке x' которой и для любого n будет выполняться неравенство $|S_n(x')-S_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$. Размер окрестности D_{0n} при выбранном ε зависит от числа n слагаемых в сумме $S_n(x)$. Таким образом, при $x'\in D_{0n}$ имеем $|S(x')-S(x_0)|<$ $<|r_n(x')|+\frac{\varepsilon}{3}+|r_n(x_0)|$, где $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$. Заметим теперь, что точка x' - любая точка окрестности D_{0n} точки x_0 и к тому же сама точка x_0 - произвольная точка области сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Из сходимости ряда на $[a,b]$ следует, что для любого $x\in[a,b]$ существует номер N такой, что при $n>N$ будет выполняться неравенство $|r_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$, где $\varepsilon>0$ произвольно выбрано. Как указывалось выше, в общем случае номер $N=N(x,\varepsilon)$, т.е. зависит как от ε , так и от выбора точки x . Предположим, что сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ такова, что неравенство $|r_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ выполняется одновременно для всех точек отрезка сходимости $[a,b]$, начиная с одного и того же номера N , который, следовательно, зависит только от ε , т.е. $N=N(\varepsilon)$. Тогда при $n>N(\varepsilon)$ одновременно будут выполняться неравенства $|r_n(x')|<\frac{\varepsilon}{3}$, $|r_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$ и, следовательно, при $n\geqslant N$ и $x'\in D_{0N}$ будем иметь $|S(x')-S(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$, т.е. существует такая окрестность D_{0N} точки x_0 , что для любых $x\in D_{0N}$ выполняется неравенство $|S(x')-S(x_0)|<\varepsilon$, свидетельствующее о непрерывности суммы $S(x)$. Таким образом, сумма $S(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, составленная из непрерывных функций, будет непрерывной функцией на отрезке $[a,b]$ его сходимости, если неравенство $|r_n(x)|<\varepsilon$, свидетельствующее о сходимости ряда, будет выполняться для всех $x\in[a,b]$, начиная с некоторого номера N , зависящего только от ε . Ряды, обладающие указанным свойством, называют равномерно сходящимися.

Определение 2.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, составленный из функций $u_n(x)$, определенных на $[a,b]$, называется равномерно сходящимся к $S(x)$ на этом отрезке $[a,b]$, если для любого $\varepsilon>0$ существует номер $N=N(\varepsilon)$, зависящий только от ε , такой, что для любых $n>N$ и любых $x\in[a,b]$ выполняется неравенство $|r_n(x)|<\varepsilon$, где $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$ – остаток ряда. Значит, доказана непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда.

Теорема 2.1. Сумма равномерно сходящегося на $[a,b]$ ряда, составленного из непрерывных на $[a,b]$ функций, есть функция, непрерывная на $[a,b]$.

Составим теперь ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ из производных членов исходного ряда (предполагается, что функции $u_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$), и пусть производный ряд сходится на том же отрезке $[a,b]$, что и исходный ряд $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, и имеет сумму $\sigma(x)$, т.е. $\sigma(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$. Попытаемся ответить на поставленный выше вопрос: при каких условиях сумма $\sigma(x)$ производного ряда будет производной от суммы исходного ряда, т.е. при каких условиях будет $\sigma(x)=S'(x)$ и, следовательно, будет выполняться равенство $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$, свидетельствующее о возможности почленного дифференцирования ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$. С этой целью рассмотрим разность $\Delta_n(x_0)=\dfrac{S_n(x_0+h)-S_n(x_0)}{h}-\sigma(x_0)$, где h - малое приращение координаты произвольной точки $x_0\in[a,b]$, причем $x_0+h\in[a,b]$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty,h\to 0}\Delta_n(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h}-\sigma(x_0)\right]$, и, если мы докажем, что существует

$$\lim_{n\to\infty,h\to 0}\Delta_n(x_0)=0, \tag{2.4}$$

то тем самым будет доказано существование производной $S'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{S(x_0+h)-S(x_0)}{h}$ и выполнение равенства $S'(x_0)=\sigma(x_0)$.

Используя формулу Лагранжа конечных приращений, имеем

$$\Delta_n(x_0)=S_n'(x_0+\theta h)-\sigma(x_0)=S_n'(x_0+\theta h)-\sigma(x_0+\theta h)+$$
$$+\sigma(x_0+\theta h)-\sigma(x_0)\ ,\quad 0<\theta<1,$$

откуда $|\Delta_n(x_0)|\le|S_n'(x_0+\theta h)-\sigma(x_0+\theta h)|+|\sigma(x_0+\theta h)-\sigma(x_0)|$, или

$$|\Delta_n(x_0)|\le|\tilde{r}_n(x_0+\theta h)|+|\sigma(x_0+\theta h)-\sigma(x_0)|, \tag{2.5}$$

где $\tilde{r}_n(x_0+\theta h)$ - остаток производного ряда. Для выполнения предельного равенства (2.4) второе слагаемое должно быть сколь угодно малым при достаточно малых h, т.е. сумма $\sigma(x)$ должна быть непрерывной в точке x_0, что будет иметь место, если производный ряд равномерно сходится на своей области сходимости $[a,b]$ (напомним, что функции $u_n(x)$ непрерывно дифференцируемые, т.е. производный ряд состоит из непрерывных функций). При этом первое слагаемое будет сколь угодно малым (меньше любого $\varepsilon>0$), начиная с некоторого номера $N = N(\varepsilon)$, зависящего только от ε и общего для всех малых h.

Таким образом, если исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на отрезке $[a,b]$, а производный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$, то для произвольно выбранного $\varepsilon>0$ существуют числа $\delta = \delta(\varepsilon)$ и $N = N(\varepsilon)$ такие, что при $|h| \le \delta$ и $n>N$ будет $|\tilde{r}_n(x_0+\theta h)|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|G(x_0+h)-G(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$ и, следовательно (см. (2.5)), будет $|\Delta_n(x_0)|<\varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty, h\to 0} \Delta_n(x_0)=0$.

Итак, сформулирована теорема о почленном дифференцировании функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, составленного из непрерывно дифференцируемых функций.

Теорема 2.2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на $[a,b]$ к $S(x)$, а производный ряд равномерно сходится на $[a,b]$ к $G(x)$, то $G(x)=S'(x)$.

Обратимся к проблеме почленного интегрирования функционального ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, составленного из непрерывных на отрезке $[a,b]$ своей сходимости функций. Составим ряд из интегралов членов исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx$, где пределы интегрирования α, β принадлежат отрезку $[a,b]$. Частичные суммы проинтегрированного ряда имеют вид $\tilde{S}_n = \int\limits_{\alpha}^{\beta} S_n(x)dx$. При каких условиях будет выполняться равенство

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \int\limits_{\alpha}^{\beta} S(x)dx, \qquad (2.6)$$

т.е. при каких условиях сумма проинтегрированного ряда будет равна интегралу суммы исходного ряда? Для того чтобы равенство (2.6) выполнялось, разность $|\tilde{S}_n - \int\limits_{\alpha}^{\beta} S(x)dx|$ должна быть сколь угодно малой при достаточно больших n, т.е. при достаточно больших n должно выполняться неравенство

$$\left|\int_\alpha^\beta S_n(x)dx-\int_\alpha^\beta S(x)dx\right|<\varepsilon \quad \text{или} \quad \left|\int_\alpha^\beta (S_n(x)-S(x))dx\right|<\varepsilon,$$

т.е.

$$\left|\int_\alpha^\beta r_n(x)\,dx\right|<\varepsilon, \tag{2.7}$$

где $\varepsilon>0$ произвольно выбрано. Последнее неравенство заведомо будет выполняться, если при достаточно больших n будет

$$\int_\alpha^\beta |r_n(x)|\,dx<\varepsilon. \tag{2.8}$$

В свою очередь, неравенство (2.8) выполняется, если для всех $x\in(\alpha,\beta)$ существует номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что при любых $n\geqslant N$ будет

$$|r_n(x)|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}, \tag{2.9}$$

так как при этом $\int_\alpha^\beta |r_n(x)|dx<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta dx=\varepsilon$.

Условие (2.9) означает, что неравенство (2.8) реализуется, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ будет равномерно сходиться на отрезке $[a,b]$.

Теорема 2.3. Функциональный ряд с непрерывными членами можно почленно интегрировать в пределах, принадлежащих его отрезку сходимости $[a,b]$, если ряд равномерно сходится на $[a,b]$.

Отметим, что при этом сумма ряда будет непрерывной и поэтому интегрируемой функцией. Таким образом, установлено, что равномерная сходимость функционального ряда обеспечивает возможность применения основных правил математического анализа, справедливых для конечных сумм (сумма непрерывных функций есть функция непрерывная, интеграл от суммы равен сумме интегралов, производная суммы равна сумме производных).

Отметим, что полученные результаты переносятся на функциональные последовательности, поскольку всякую последовательность $f_n(x)$ можно рассматривать как последовательность частичных сумм ряда

$$f_1(x)+[f_2(x)-f_1(x)]+\ldots+[f_n(x)-f_{n-1}(x)]+\ldots$$

Равномерная сходимость на отрезке $[a,b]$ к функции $f(x)$ этого ряда определяется неравенством $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$ при $n\geqslant N$, где $N=N(\varepsilon)$, т.е. неравенством $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ при $n\geqslant N$, поскольку в данном случае $S_n(x) = f_n(x)$. Поэтому доказанные выше теоремы могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема 2.4. Если последовательность $f_n(x)$ состоит из функций, непрерывных на $[a,b]$, и равномерно сходится на $[a,b]$, то предельная функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Теорема 2.5. Если последовательность $f_n(x)$, состоящая из непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций, сходится на $[a,b]$ к функции $f(x)$, а последовательность $f_n'(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$, т.е. $f_n'(x) \rightrightarrows G(x)$, то $G(x) = f'(x)$.

Теорема 2.6. Если последовательность $f_n(x)$ состоит из непрерывных на $[a,b]$ функций и равномерно сходится на $[a,b]$ к функции $f(x)$, то $\int\limits_a^b f_n(x)dx \to \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx$ при $n \to \infty$, где α, β - любые числа, принадлежащие отрезку $[a,b]$.

Признаки равномерной сходимости рядов

Теорема 2.7 (критерий Коши равномерной сходимости ряда). Для того чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geqslant N(\varepsilon)$, всех целых $p \geqslant 0$ и всех $x \in E$ выполнялось неравенство $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$.

Доказательство. Заметим, что $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) = S_{n+p}(x) - S_n(x)$, где $\{S_n(x)\}$ - последовательность частичных сумм ряда. В силу определения равномерно сходящегося на E ряда критерий Коши его равномерной сходимости вытекает из критерия Коши равномерной сходимости функциональной последовательности $\{S_n(x)\}$ на множестве E.

Замечание. Если $p = 0$, то $u_n(x) \rightrightarrows 0$ на E. Получили необходимое условие равномерной сходимости ряда.

Поскольку равномерная сходимость функционального ряда обеспечивает возможность применения основных правил математического анализа, то важно иметь признаки, позволяющие установить равномерную сходимость функционального ряда. Одним из таких признаков является признак Вейерштрасса.

Теорема 2.8. (признак Вейерштрасса абсолютной и равномерной сходимости ряда). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве E, если на этом множестве $|u_n(x)|\le a_n$, $n=1,2,\ldots$, где u_n – функции, определенные на E, а числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \ge 0$, сходится.

Доказательство. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \ge 0$ сходится, то в силу критерия Коши сходимости числовых рядов для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что $\sum_{k=n}^{p+n} a_k < \varepsilon$ для всех $n \ge N$ и всех целых $p \ge 0$. В силу условия $|u_n(x)|\le a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, получаем $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| \le \sum_{k=n}^{n+p} a_k < \varepsilon$ для всех $n \ge N$ и всех $x \in E$ сразу. Поэтому в силу критерия Коши для равномерной сходимости функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на множестве E. Абсолютная сходимость ряда на E следует сразу по признаку сравнения из неравенства $|u_n(x)|\le a_n$, $n=1,2,\ldots$

Пример 2.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin^2 nx}{\sqrt{(1+n^2)(1+nx^2)}}$ сходится равномерно на R по признаку Вейерштрасса, так как $\left|\frac{x \sin^2 nx}{\sqrt{(1+n^2)(1+nx^2)}}\right| \le \frac{1}{n\sqrt{n}}$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится.

З а м е ч а н и е. Признак Вейерштрасса дает лишь достаточное условие равномерной сходимости ряда.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющий для всех $x \in [a,b]$ условию $|u_n(x)| \le a_n$ при любых n, называется мажорирующим рядом (говорят также, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мажорирует функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на $[a,b]$). Мы доказали, что если мажорирующий ряд сходится на $[a,b]$, то мажорируемый функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$.

Докажем достаточный признак равномерной сходимости, применимый в отличие от признака Вейерштрасса и к неабсолютно сходящимся рядам.

Теорема 2.9 (признак Дирихле равномерной сходимости ряда). Если последовательность $\sigma_n(x)$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно ограничена на множестве E, т.е. существует число $C>0$ такое, что $|\sigma_n(x)|\le C$ при $n = 1, 2, \ldots$ сразу для всех $x\in E$, а последовательность функций $\{\alpha_n(x)\}$, монотонно не возрастая, равномерно стремится к нулю на этом множестве, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\alpha_n(x)$ равномерно сходится на множестве E.

Доказательство. Докажем, что при условиях теоремы выполнен критерий Коши равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\alpha_n(x)$. Запишем

$$S_{n+p}-S_n=\alpha_{n+1}u_{n+1}+\alpha_{n+2}u_{n+2}+\ldots+\alpha_{n+p}u_{n+p}=\alpha_{n+1}(\sigma_{n+1}-\sigma_n)+$$
$$+\alpha_{n+2}(\sigma_{n+2}-\sigma_{n+1})+\ldots+\alpha_{n+p}(\sigma_{n+p}-\sigma_{n+p-1})=-\alpha_{n+1}\sigma_n+$$
$$+(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2})\sigma_{n+1}+\ldots+(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p})\sigma_{n+p-1}+\alpha_{n+p}\sigma_{n+p}.$$

Учитывая, что $\alpha_1(x)\ge\alpha_2(x)\ge\ldots\ge\alpha_{n+1}(x)\ge\ldots$ и что $|\sigma_n(x)|\le C$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ и всех $x\in E$, получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x)\alpha_{n+k}(x)\right|\le C\{\alpha_{n+1}+(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2})+(\alpha_{n+2}-\alpha_{n+3})+$$
$$+\ldots+(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p})+\alpha_{n+p}\}=2C\alpha_{n+1}\le 2C\varepsilon_{n+1}$$

при всех $p\ge 0$ и сразу для всех $x\in E$, где $\varepsilon_{n+1}=\sup\limits_{E}\alpha_{n+1}(x)\to 0$ при $n\to\infty$.

Пример 2.2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ равномерно сходится на каждом отрезке, не содержащем точек вида $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, так как удовлетворяет всем условиям признака Дирихле: числовая последовательность $a_n=\frac{1}{n}$ монотонно убывает и стремится к нулю, а частичные суммы σ_n равномерно ограничены в силу неравенства

$$|\sigma_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\le\frac{1}{\sin\alpha/2}=const\quad n = 1, 2, \ldots,\ \text{где}$$
$$2m\pi+\alpha\le x\le(2m+1)\pi+\alpha,\quad 0<\alpha<\pi.$$

Приведем несколько примеров сходимости рядов.

I. Рассмотрим геометрический ряд $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$, порождаемый функциональной геометрической прогрессией $1, x, x^2, \ldots$ Его сумма при $|x|<1$, как известно, равна $\frac{1}{1-x}$, т.е. $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ Пусть a - произвольное число, заключенное между 0 и I. Тогда для всех $x\in[-a,a]$ будем иметь $|x|\le a$, и следующий ряд $1+a+a^2+\ldots+a^n+\ldots$ мажорирует геометрический ряд на $[-a,a]$. Поэтому на основании признака Вейерштрасса заключаем, что геометрический ряд равномерно сходится на любом отрезке $[-a,a]$, принадлежащем интервалу (-I, I). Но тогда сумма геометрического ряда есть функция, непрерывная на (-I, I), и ряд можно почленно интегрировать в любых пределах, принадлежащих интервалу (-I, I). В частности,

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad |x|<1,$$

или $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots, |x|<1$, или с заменой x на $-x$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \ldots,$$

и мы получили представление $\ln(1+x)$ в виде степенного ряда.

Составим для геометрического ряда производный ряд $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$; соответствующий мажорирующий ряд имеет вид $1+2a+3a^2+\ldots+na^{n-1}+\ldots$, если $x\in[-a,a]$, $0<a<1$. Мажорирующий ряд сходится, что легко проверить, используя признак Даламбера: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)a^n}{na^{n-1}} = \frac{n+1}{n}a \to a<1$ при $n\to\infty$. Поэтому производный ряд равномерно сходится на любом отрезке $[-a,a]$, строго лежащем в интервале сходимости, и геометрический ряд, следовательно, можно почленно дифференцировать в любой точке интервала (-I, I), в силу чего

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots,$$

т.е.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots, |x|<1.$$

Обратим внимание на характер сходимости геометрического ряда. С ростом n остаток ряда $r_n(x)=S(x)-S_n(x)=\frac{x^n}{1-x}$ убывает для значений $x\in$ (-I, I). С другой стороны, при фиксированном значении n

числитель дроби возрастает, если x стремится к I, а знаменатель убывает, приближаясь к нулю. Значит, дробь $\frac{x^n}{1-x}$ возрастает при $x \to$ I. Поэтому, чтобы при x, близком к I, дробь $\frac{x^n}{1-x}$ была достаточно малой, необходимо брать большое число n членов прогрессии. Это число n неограниченно возрастает при $x \to$ I. В результате для далёких от I точек ряд будет сходиться быстрее, для близких к I – медленнее. Сходимость ряда в одних точках как бы отстает от сходимости его в других точках и является в этом смысле неравномерной в интервале (-I, I).

Рассмотрим теперь любой отрезок, который вместе со своими концами лежит в интервале сходимости ряда, т.е. ограничимся значениями x, для которых $|x| \le a < 1$. Тогда $|r_n(x)| = \left|\frac{x^n}{1-x}\right| \le \frac{a^n}{1-a}$ и, решая неравенство $a^n < (1-a)\varepsilon$, можно найти номер $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого достигается любая наперед заданная малость модуля разности $|S(x) - S_n(x)|$ при всех указанных значениях x одновременно. Неравномерность в сходимости ряда для любых значений x из отрезка, строго лежащего в интервале (-I, I), исчезла. Сходимость ряда на отрезке $[-a, a]$ стала равномерной.

2. Рассмотрим ряд

$$x + (x^2 - x) + \dots + (x^n - x^{n-1}) + \dots, \quad n > 1,$$

все члены которого – непрерывные функции на R. Последовательность частичных сумм ряда $S_n(x) = x^n$ есть последовательность непрерывных функций, но сумма ряда

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

– разрывная функция на отрезке [0, I]. Значит, ряд сходится на этом отрезке неравномерно, поскольку в противном случае сумма $S(x)$ ряда должна быть непрерывной. Неравенство $|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ не может быть выполнено для всех точек x отрезка [0, I] одновременно, как бы велико ни было n. Номера $N = N(\varepsilon)$ (зависящего только от ε), начиная с которого выполнялось бы неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$ в любой точке отрезка, не существует. Действительно, для точки $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in (0,1)$ остаток ряда $r_n(x_n) = S(x_n) - S_n(x_n) = -x_n^n = -1/2$, как бы велико ни было число n. Следовательно, хотя для любой фиксированной точки $x < x_n$ с ростом n последовательность $S_n(x)$ убывает, стремясь к нулю, однако, какое бы большое n мы ни выбрали, для точки $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ сумма $S_n(x) = 1/2$ будет еще далека от своего нулевого предела. Это означает, что на каждой кривой $y = S_n(x)$ найдется точка, ордината которой еще далека от нуля. С ростом n точка $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ меняет свое положение, передвигаясь все правее по направлению к единице (рис. I.3).

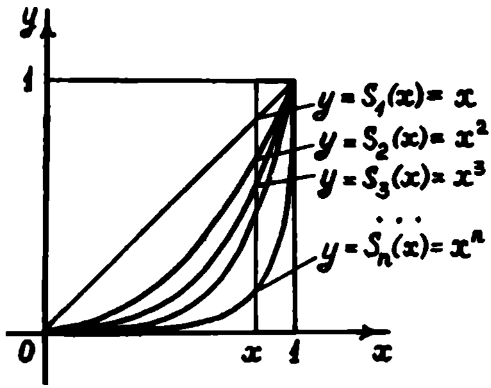

Рис. I.3

Таким образом, хотя остаток ряда по абсолютной величине станет меньше ε при больших n, но для одних точек это будет достигнуто раньше, для других - позже. Значит, для одних точек ряд будет сходиться быстрее, для других - медленнее. Сходимость ряда в одних точках как бы отстает от сходимости его в других точках, являясь в этом смысле неравномерной на отрезке $[0, 1]$.

Кажущееся противоречие, что для каждого x имеем $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, в то время как для каждого n существует такое x_n, что $|r_n(x)| = \frac{1}{2}$, объясняется тем, что точка x_n, в которой $|r_n(x)|$ достигает этого максимального на $[0, x_n]$ значения, с ростом n не остается на месте, а продвигается вправо, неограниченно приближаясь к единице.

Рассмотрим отрезок $[0, 1-\varepsilon]$. Тогда для каждого $x \in [0, 1-\varepsilon]$ найдется номер $N = N(\varepsilon, x)$, начиная с которого $|r_n(x)| < \varepsilon$; но в множестве номеров $N(\varepsilon, x)$ найдется наибольший, начиная с которого $|r_n(x)| < \varepsilon$ для всех x сразу (рис. I.4). Значит, существует номер $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого $|r_n(x)| < \varepsilon$ сразу для всех x из отрезка. В этом смысле скорость сходимости ряда для всех x одинакова. Сходимость ряда на отрезке $[0, 1-\varepsilon]$ стала равномерной. Только поведение членов ряда в окрестности точки $x = 1$ мешает ему равномерно сходиться на отрезке $[0, 1]$.

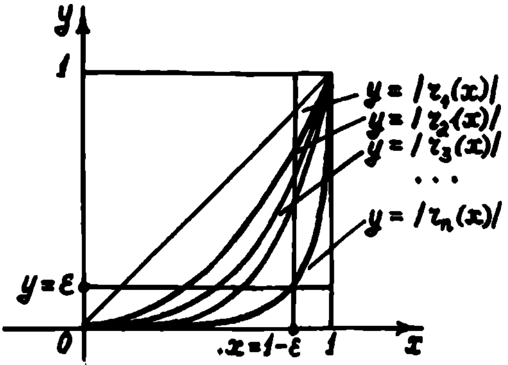

Рис. I.4

Заметим, что ряд можно при этом почленно интегрировать на отрезке [0, I], так как на промежутке [0, I) имеем $|r_n(x)| = x^n$, $S(x) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 S_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x^n dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$

3. Рассмотрим ряд с непрерывными членами, у которого последовательность частичных сумм имеет вид $S_n(x) = nxe^{-nx^2}$ на отрезке [0, I]. Очевидно, сумма ряда $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 0$,

$$\int\limits_0^1 S_n(x)\,dx = n\int\limits_0^1 xe^{-nx^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-n}),$$

откуда получим

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 S_n(x)\,dx = \frac{1}{2}, \text{ но } \int\limits_0^1 S(x)\,dx = \int\limits_0^1 0\,dx = 0 \neq \frac{1}{2}.$$

Равенство (2.3) для рассматриваемого ряда не выполняется, и ряд нельзя почленно интегрировать. Значит, исходный ряд сходится на отрезке [0, I] неравномерно, поскольку в противном случае ряд можно было бы интегрировать. Невозможность почленного интегрирования ряда явилась следствием его неравномерной сходимости, которая, однако, не мешает сумме ряда быть непрерывной на [0, I]. Как и в предыдущем примере, неравенство $|r_n(x)| = S_n(x) < \varepsilon$ не может быть выполнено сразу для всех $x \in [0, I]$ и сколь угодно больших номеров n. Действительно, $S_n'(x) = (n - 2n^2x^2)e^{-nx^2}$ и $S_n'(x) = 0$, если

$x^2 = \frac{1}{2n}$, т.е. абсолютная величина остатка ряда принимает экстремальное значение $\sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{-0,5}$ в точках $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} \in [0,1]$ и $\max\limits_{[0,1]} |r_n(x)| \to \infty$ при $n \to \infty$, поскольку $|r_n(x_n)| = \sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{-0,5} \to \infty$ при $n \to \infty$.

4. Рассмотрим ряд с непрерывно дифференцируемыми членами и с последовательностью частичных сумм $S_n(x) = \frac{1}{n} x^n$ на отрезке [0, I]. Тогда сумма ряда $S(x) \equiv 0$, и на отрезке [0, I] ряд сходится к $S(x) \equiv 0$ равномерно, поскольку неравенство $|r_n(x)| = \left| -\frac{x^n}{n} \right| \le \frac{1}{n} < \varepsilon$ выполняется сразу для всех $x \in [0, 1]$, начиная с номера $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, зависящего только от ε. Последовательность производных $S_n' = x^{n-1}$ также сходится на отрезке [0, I], но в точке x = I производная суммы $S'(x)$ равна нулю, а $\lim\limits_{n \to \infty} S_n'(1) = 1 \ne 0$. Значит, ряд нельзя почленно дифференцировать всюду на отрезке $[0,1]$. Причиной этого является неравномерность сходимости на данном отрезке производного ряда с частичными суммами $S_n'(x) = x^{n-1}$ (см. п.2).

5. Ряд с последовательностью частичных сумм $S_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ сходится к $S(x) = 0$ на всей числовой оси, но ряд, составленный из производных членов исходного ряда, не сходится к $S'(x) = 0$, так как, например, при x = 0 предел $S_n'(x) = \cos nx$ равен I. Более того, ряд, составленный из производных членов исходного ряда, расходится, например, в точке x = I, так как $\lim\limits_{n \to \infty} \cos n$ не существует. Ряд нельзя почленно дифференцировать на R, так как производный ряд даже не сходится на R, хотя исходный ряд на числовой прямой сходится, и притом равномерно (см. п. 4).

Примеры показывают, что именно неравномерность сходимости ряда может сделать сумму ряда разрывной, повлиять на возможность дифференцирования и интегрирования ряда. Равномерная сходимость ряда непрерывных функций достаточна, чтобы обеспечить непрерывность суммы этого ряда, возможность его почленного интегрирования. Равномерная сходимость производного ряда достаточна, чтобы обеспечить возможность почленного дифференцирования ряда с непрерывно дифференцируемыми членами. Дифференцируемость суммы $S(x)$ при этом не предполагается, а устанавливается. Равномерная сходимость, будучи достаточным условием для выполнения указанных функциональных свойств ряда, не является их необходимым условием.

Глава 3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§ I. Радиус и круг сходимости степенного ряда

Самым важным конкретным классом функциональных рядов в математическом анализе является класс степенных рядов. Мы приступаем к его рассмотрению, причем в начале, исследуя область сходимости, мы рассмотрим более общий случай степенных рядов в комплексной плоскости.

Определение 3.I. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{3.I}$$

где c_n и z_0 - комплексные числа, а z - комплексная переменная, называется степенным рядом, а числа c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, называются коэффициентами этого ряда.

Если сделать формальную замену $\zeta = z - z_0$, то получится степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n.$$

Поэтому, очевидно, что исследование сходимости последнего ряда эквивалентно исследованию сходимости ряда (3.I).

Теорема 3.I (Абель). Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{3.2}$$

сходится при $z = z_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно при любом z, для которого $|z| < |z_0|$.

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ сходится по условию, то его общий член $c_n z_0^n$ стремится к 0 при $n \to \infty$, и, таким образом, последовательность $\{c_n z_0^n\}$ ограничена, т.е. существует такое M, что $|c_n z_0^n| \le M$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Отсюда

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \le M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

При $|z|<|z_0|$ действительный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ сходится как сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q=\left|\frac{z}{z_0}\right|<1$. Следовательно, по признаку сравнения (см. теорему I.3) сходится и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n z^n|$, т.е. ряд (3.2) сходится абсолютно.

<u>Следствие 3.I.</u> Если степенной ряд (3.2) расходится при $z=z_0$, то он расходится и при любом z, для которого $|z|>|z_0|$.

<u>Доказательство.</u> Если ряд (3.2) сходился бы при некотором z, для которого $|z|>|z_0|$, то по теореме 3.I сходился бы и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$, что противоречит условию.

Доказанные теорема Абеля и следствие являются основным инструментом для установления области сходимости степенного ряда.

<u>Определение 3.2.</u> Неотрицательное число R или $+\infty$ называется радиусом сходимости ряда (3.2), если этот ряд сходится при $|z|<R$ и расходится при $|z|>R$. Множество точек z комплексной плоскости, для которых $|z|<R$, называется кругом сходимости.

Заметим, что аналогичное определение можно сделать и для общего случая ряда (3.I) и что круг сходимости - это открытый круг на комплексной плоскости.

<u>Теорема 3.2</u> (о существовании радиуса сходимости). У всякого степенного ряда (3.2) существует радиус сходимости. Внутри круга сходимости ряд (3.2) сходится абсолютно, а на любом замкнутом круге $|z|\le r$, где $r<R$, он сходится равномерно.

<u>Доказательство.</u> В доказательстве мы будем опираться на свойство непрерывности действительных чисел:

если A и B - два таких непустых подмножества множества действительных чисел $\mathbb{R}$, что $A\cup B=\mathbb{R}$ и $a<b$ для любых $a\in A, b\in B$, то существует либо наибольшее число во множестве A, либо наименьшее во множестве B.

Итак, разобьем все действительные числа на два подмножества A и B: множеству A будут принадлежать все неположительные числа и те положительные числа x, для которых ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится, а множеству B будут принадлежать все остальные числа. Возможны два случая: B пусто и B не пусто.

В первом случае ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится при любом положительном x, и $R=+\infty$. Действительно, для всякого комплексного z существует такое положительное число x, что $|z|<x$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится абсолютно по теореме 3.I. В данном случае круг сходимости представляет собой всю комплексную плоскость.

Во втором случае множества A и B удовлетворяют условиям свойства непрерывности действительных чисел, так как $A\neq\varnothing, B\neq\varnothing,$ $A\cup B=\mathbb{R}$ и $x<y$ для любых $x\in A$, $y\in B$. Последнее нуждается в проверке. Для любых $x\leq 0$ и $y\in B$ будет $x<y$. Предположим, что $x_0>y_0$ при некоторых положительных $x_0\in A$ и $y_0\in B$. Так как по определению множества A ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ сходится, то по теореме 3.I сходится и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n y_0^n$. Но тогда $y_0\in A$, что противоречит тому, что $A\cap B=\varnothing$, ибо по определению $B=\mathbb{R}\setminus A$. Итак, все условия непрерывности выполнены и, следовательно, существует такое действительное число R, которое является либо наибольшим в A, либо наименьшим в B.

Если $|z|<R$, то можно найти такое положительное x_0, что $|z|<x_0<R$. Из определения числа R $x_0\in A$, и потому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ сходится. Следовательно, по теореме 3.I ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится абсолютно.

Если $|z|>R$, то можно найти такое положительное y_0, что $|z|>y_0>R$. Из определения R $y_0\in B$, и поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n y_0^n$ расходится. Следовательно, по следствию 3.I ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ также расходится. Таким образом, мы показали, что R есть радиус сходимости и в круге сходимости при $|z|<R$ ряд (3.2) сходится абсолютно.

Наконец, рассмотрим $0<r<R$. По доказанному ряд (3.2) сходится абсолютно при $z=r$, т.е. сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$. Тогда при $|z|<r$ имеем $|c_n z^n|\leq|c_n|r^n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, и по признаку Вейерштрас-

са (см. теорему 2.8) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится равномерно в области $|z| \le r$.

Таким образом, областью сходимости степенного ряда является открытый круг и, быть может, какие-либо его граничные точки. Для нахождения радиуса сходимости можно применить признак Даламбера и радикальный признак Коши.

Если существует предел (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, то $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$. Действительно, при $|z|<R$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}z^{n+1}|}{|c_n z^n|}=|z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\frac{|z|}{R}<1,$$

и ряд (3.2) абсолютно сходится по признаку Даламбера. Если $|z|>R$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}z^{n+1}|}{|c_n z^n|}=\frac{|z|}{R}>1$ и ряд из абсолютных величин $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n z^n|$ расходится по тому же признаку, причем его общий член не стремится к 0. Но тогда расходится и сам ряд (3.2).

Аналогично будет и для радикального признака Коши. Если существует предел (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$, то $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$, так как при $|z|<R$ будет $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n z^n|}=$ $=|z|\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\frac{|z|}{R}<1$, и ряд (3.2) абсолютно сходится. А при $|z|>R$ будет $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n z^n|}=\frac{|z|}{R}>1$, и ряд из абсолютных величин членов ряда (3.2) расходится, причем его общий член не стремится к 0. Следовательно, не стремится к 0 и общий член самого ряда (3.2), ряд расходится по необходимому признаку.

Приведем примеры крайних случаев значений радиуса сходимости и различных структур области сходимости степенных рядов.

Пример 3.1. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!z^n$ имеет радиус сходимости $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$. Этот ряд сходится в единственной точке, в которой сходится любой ряд (3.2), $z=0$.

Пример 3.2. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ имеет радиус сходимости

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty$ и сходится при любом z.

Пример 3.3. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ представляет собой сумму геометрической прогрессии, имеет R = I, сходится при $|z|<1$ и расходится при $|z|\geqslant 1$, так как при $|z|$ = I общий член ряда не стремится к 0.

Пример 3.4. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ имеет радиус сходимости

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$, сходится при $|z| \leqslant 1$ и расходится при $|z|>1$, так как при $|z|$ = I данный степенной ряд абсолютно сходится, ибо ряд из абсолютных величин имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Пример 3.5. В примерах 3.3 и 3.4 ряды имели один и тот же радиус сходимости R = I. Но в первом из них область сходимости представляла собой открытый круг радиуса I, ни в одной граничной точке круга ряд не сходился. Во втором из них, наоборот, область сходимости максимальна и представляет собой замкнутый единичный круг. Следующий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, очевидно, также имеет радиус сходимости, равный I. Но в одних граничных точках он сходится, а в других - расходится. Действительно, при z = -I получается сходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, а при z = I - расходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$.

В заключение этого параграфа приведем одну вспомогательную лемму, которая нам понадобится в дальнейшем.

Лемма 3.I. Радиусы сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^{n+1}}{n+1}, \tag{3.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \tag{3.4}$$

равны.

Доказательство. Пусть R - радиус сходимости ряда (3.2) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, R_1 - ряда (3.3) и R_2 - ряда (3.4). Из неравенств

$$\left|\frac{c_n z^{n+1}}{n+1}\right| \le |z||c_n z^n| \le |z|^2 |nc_n z^{n-1}|,\ n = 1, 2, \ldots,$$ и признака сравнения (см. теорему 1.3) получаем, что из абсолютной сходимости ряда (3.4) в точке z следует абсолютная сходимость ряда (3.2) в этой точке и из абсолютной сходимости ряда (3.2) в точке z следует абсолютная сходимость ряда (3.3) в этой точке. Это означает, что $R_2 \le R \le R_1$.

Поэтому для доказательства леммы нужно показать, что $R_2 \geq R_1$. Пусть ряд (3.3) сходится в точке z_0, где $0<|z_0|<R_1$. Возьмем такое действительное r, чтобы $|z_0|<r<R_1$. Тогда будем иметь
$$|nc_n z_0^{n-1}| = \frac{n(n+1)}{|z_0|^2}\left|\frac{c_n r^{n+1}}{n+1}\right|\left|\frac{z_0}{r}\right|^{n+1}$$ при $n = 1, 2, \ldots$. Так как R_1 - радиус сходимости ряда (3.3), то этот ряд сходится при $z=r$, и $\left|\frac{c_n r^{n+1}}{n+1}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Отсюда последовательность $\left\{\left|\frac{c_n r^{n+1}}{n+1}\right|\right\}$ ограничена, т.е. существует такое M, что $\left|\frac{c_n r^{n+1}}{n+1}\right| \le M$ при $n=1,2,\ldots$.

Тогда для любого n
$$|nc_n z_0^{n-1}| \le \frac{n(n+1)}{|z_0|^2} M \left|\frac{z_0}{r}\right|^{n+1}.$$

Ряд с общим членом $\frac{n(n+1)}{|z_0|^2} M \left|\frac{z_0}{r}\right|^{n+1}$ сходится (это можно проверить с помощью признака Даламбера), так как $0<\left|\frac{z_0}{r}\right|<1$. Из последнего неравенства следует по признаку сравнения сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |nc_n z_0^{n-1}|$, т.е. абсолютная сходимость ряда (3.4) при $z=z_0$. Это означает, что $R_2 \geq R_1$, откуда $R_2 = R = R_1$.

§ 2. Свойства суммы степенного ряда

Для установления свойств степенного ряда нам потребуются общие свойства функциональных рядов, полученные в гл. 2. Так как эти свойства получены для действительных рядов, то далее мы будем рассматривать действительные степенные ряды
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \tag{3.5}$$
где a_n, x_0 - действительные числа, а x - действительная переменная.

Если рассмотреть этот ряд как комплексный ряд (3.I) с $c_n = a_n$ и $z_0 = x_0$, то у него существует радиус сходимости R, который можно находить с помощью признака Даламбера или радикального признака Коши, если существуют соответствующие пределы, и круг сходимости $\{z \mid |z-x_0|<R\}$. Если теперь вернуться к ряду (3.5), ограничив изменение комплексной переменной действительной прямой, то мы получим интервал сходимости $(x_0-R, x_0+R) = \{x \mid |x-x_0|<R\}$ как пересечение круга сходимости и действительной прямой. Отсюда сразу получаем аналог теоремы 3.2 для действительного степенного ряда.

Теорема 3.3. Всякий степенной ряд (3.5) имеет радиус сходимости. В интервале сходимости при $|x-x_0|<R$ ряд (3.5) сходится абсолютно, при $|x-x_0|>R$ он расходится и на отрезке $|x-x_0|\le r$, где $r<R$, он сходится равномерно.

Таким образом, область сходимости ряда (3.5) состоит из интервала сходимости и, быть может, еще из одной или двух его граничных точек.

Теорема 3.4. Если $S(x)$ - сумма ряда (3.5), а R - его радиус сходимости, то:

I) $S(x)$ непрерывна в интервале сходимости (x_0-R, x_0+R);

2) $S(x)$ бесконечно дифференцируема в этом интервале, причем ее производные находятся почленным дифференцированием ряда (3.5);

3) для любого $x \in (x_0-R, x_0+R)$

$$\int_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},$$

т.е. внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать.

Доказательство. Сначала заметим, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},$$

получающиеся из ряда (3.5) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ почленным дифференцированием и интегрированием, имеют по лемме 3.I такой же радиус сходимости R, что и ряд (3.5).

Возьмем произвольную точку $x \in (x_0-R, x_0+R)$. Найдется такое r, что $x \in [x_0-r, x_0+r] \subset (x_0-R, x_0+R)$. Так как ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ равномерно сходятся на $[x_0-r, x_0+r]$ по теореме 3.3 и состоят из непрерывных на этом отрезке функций, то по теоремам 2.I и 2.2 сумма $S(x)$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ непрерывна и дифференцируема на этом отрезке, а следовательно, и в точке x, и $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$. Так как x была произвольной точкой интервала сходимости, то все это верно для любой точки из него.

Если повторить рассуждения для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ и $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$, то получим, что ряд можно еще раз почленно дифференцировать, т.е. в интервале сходимости существует $S''(x)$ и $S''(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$. Повторив эти рассуждения любое конечное число раз, придем к тому, что в интервале сходимости у функции $S(x)$ существует производная $S^k(x)$ любого порядка k и

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}.$$

Аналогично по теореме 2.3 в силу непрерывности степенных функций и равномерной сходимости ряда (3.5) на отрезке $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$) получаем утверждение 3.

Степенные ряды обладают свойством единственности. А именно верна следующая теорема.

<u>Теорема 3.5.</u> Если в некоторой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$, точки x_0 ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ имеют одинаковую сумму, т.е. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ при $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, то эти ряды тождественно совпадают, т.е. $a_n = b_n$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$

<u>Доказательство.</u> Так как в окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ ряды имеют сумму, т.е. сходятся, то эта окрестность содержится в интервалах сходимости обоих рядов и, следовательно, оба ряда можно почленно дифференцировать по теореме 3.4 в этой окрестности.

Так как $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ в $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, то, в частности, при $x = x_0$ имеем $a_0 = b_0$. Дифференцируя оба ряда почленно, имеем в $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n (x-x_0)^{n-1}.$$

В частности, при $x = x_0$ получаем из этого равенства $a_1 = b_1$ и т.д. На k-м шаге после k-го почленного дифференцирования имеем в $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\, a_n (x-x_0)^{n-k} =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\, b_n (x-x_0)^{n-k}.$$

Опять при $x = x_0$ получаем $k(k-1)\cdot\ldots\cdot 1\, a_k = k(k-1)\cdot\ldots\cdot 1\, b_k$, откуда $a_k = b_k$ и т.д.

§ 3. Разложение функций в степенные ряды

В предыдущем параграфе мы изучали степенной ряд, его сумму и свойства этой суммы. Теперь рассмотрим обратную ситуацию: мы имеем некоторую функцию и хотим найти степенной ряд, для которого эта функция является суммой, или, другими словами, мы хотим разложить данную функцию в степенной ряд.

Определение 3.3. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производные всех порядков в этой точке. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \qquad (3.6)$$

называется рядом Тейлора функции f в точке x_0.

При $x_0 = 0$ ряд (3.6) называется также рядом Маклорена.

Теорема 3.6. Если функция f является суммой степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)$ в некоторой окрестности точки x_0, то этот ряд является рядом Тейлора этой функции в точке x_0.

Доказательство. Так же как в теореме 3.6, данная окрестность содержится в интервале сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ и ряд можно почленно дифференцировать в этой окрестности любое число раз.

Поскольку $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ в окрестности точки x_0, то при $x = x_0$ имеем $f(x_0) = a_0$. Дифференцируя ряд почленно в этой окрестности, получаем $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ для точки x из данной окрестности, в частности, при $x=x_0$ будет $f'(x_0)=a_1$. Если продифференцировать ряд в указанной окрестности k раз, то получим в ней $f^{(k)}(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$, в частности, $f^{(k)}(x_0)=k(k-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot a_k$, откуда $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Так как k произвольно, то теорема доказана.

Фактически эта теорема есть необходимое условие разложимости функции в ряд Тейлора. Нетрудно видеть, что если мы хотим, чтобы функция раскладывалась в степенной ряд в окрестности некоторой точки x_0, то она должна быть бесконечно дифференцируема в этой точке окрестности. С другой стороны, не всякая бесконечно дифференцируемая функция может быть разложена в степенной ряд, а значит, и в свой ряд Тейлора.

Пример 3.6. Пусть $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x\neq 0, \\ 0 & \text{при } x=0. \end{cases}$

Тогда при $x\neq 0$ эта функция имеет производные всех порядков:

$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f''(x)=-\frac{6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}$ и вообще $f^{(n)}(x)=P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$, где $P\left(\frac{1}{x}\right)$ - многочлен некоторой степени относительно $\frac{1}{x}$, т.е. $f^{(n)}(x)$ есть линейная комбинация слагаемых вида $\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}$, $m=0, 1, \ldots$

Найдем по правилу Лопиталя предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x^m}}{e^{1/x^2}}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{m}{x^{m+1}}}{-\frac{2}{x^3}e^{1/x^2}}=\frac{m}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^{m-2}}}{e^{1/x^2}}=\frac{m(m-2)}{2^2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^{m-4}}}{e^{1/x^2}}=\ldots=$$

$$=\frac{m(m-2)\ldots(m-2k+2)}{2^k}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^{m-2k}}}{e^{1/x^2}}=0,$$

где $m-2k$ равно 0 или -1 в зависимости от четности m. Отсюда $\lim\limits_{x\to 0}P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=0$ для любого многочлена P. Тогда находим $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$. Рассуждая по индукции, если $f^{(n-1)}(0)=0$ ($f^{(n-1)}(x)=Q\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$, где Q - некоторый многочлен и $x\neq 0$), то

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{Q\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\bar{Q}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

Таким образом, ряд Тейлора нашей функции в точке $x_0 = 0$ есть нулевой ряд, который не сходится к этой функции ни в какой окрестности точки $x_0=0$, так как $f(x)>0$ при $x \neq 0$.

Из примера видно, что бесконечная дифференцируемость не является достаточным условием разложимости функции в степенной ряд и один и тот же степенной ряд (в примере нулевой ряд) может быть рядом Тейлора разных функций (функции f из примера 3.6 и нулевой функции), в отличие от того, что функция по теореме 3.6 может быть суммой только одного степенного ряда, а именно соответствующего ей ряда Тейлора.

Возникает вопрос, когда же ряд Тейлора данной функции в точке x_0 сходится к этой функции в некоторой окрестности точки x_0? Напомним, что по формуле Тейлора для функции f, имеющей $n+1$ производную в некоторой окрестности точки x_0,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x) \tag{3.7}$$

в этой окрестности, где остаточный член $r_n(x)$ может быть записан в форме Лагранжа:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{3.8}$$

где ξ - некоторая точка, лежащая между x_0 и x, или в форме Коши

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \tag{3.9}$$

где $0<\theta<1$. Отсюда видно, что, для того чтобы f была равна сумме своего ряда Тэйлора в некоторой окрестности точки x_0, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ для точек x этой окрестности. Это позволяет получить достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.

Теорема 3.7. Если функция f бесконечно дифференцируема в окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0 и все производные ограничены в совокупности в этой окрестности, т.е. $|f^{(n)}(x)|\leq M$ для некоторого M, $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ и $n=0, 1, 2, \ldots$, то для $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Доказательство. Заметим, что для любого числа a имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$. Действительно, если n_0 таково, что $\frac{|a|}{n_0}<\frac{1}{2}$, то $\frac{|a|}{n}<\frac{1}{2}$ при всех $n>n_0$, и поэтому

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a^{n_0}}{n_0!}\cdot\frac{a}{n_0+1}\cdot\frac{a}{n_0+2}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{n}<\frac{a^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.$$

Так как правая часть последнего неравенства стремится к 0 при $n\to\infty$, то $\frac{a^n}{n!}$ также стремится к 0.

Тогда из условия теоремы, используя форму Лагранжа (3.8) остаточного члена, имеем

$$|r_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $|\xi-x_0|<|x-x_0|<\delta$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$, и теорема доказана.

§ 4. Разложение в степенной ряд некоторых элементарных функций

Все разложения элементарных функций мы будем получать при $x_0=0$, т.е. это будут разложения в ряд Маклорена.

1. Показательная функция $f(x)=e^x$. Для любого x можно найти такое $\Delta>0$, что $x\in(-\Delta,\Delta)$. Так как $f^{n}(x)=e^x$ для любого n, то $0<f^{(n)}(x)<e^{\Delta}$ при $x\in(-\Delta,\Delta)$, т.е. условия теоремы 3.7 выполнены и функция раскладывается в ряд Тейлора на любом конечном интервале, а значит, и на всей прямой. Так как $f^{(n)}(0)=1$ при любом n, то

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}. \qquad (3.10)$$

2. Гиперболические функции $ch\,x$ и $sh\,x$. Заменив в формуле (3.10) x на $-x$, получим

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}. \qquad (3.11)$$

По свойству сходящихся рядов имеем для любого x следующие равенства:

$$ch\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad (3.12)$$

$$sh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \qquad (3.13)$$

В силу единственности разложения функции в степенной ряд в правых частях формул (3.12) и (3.13) стоят ряды Тейлора соответствующих функций.

3. Тригонометрические функции $\cos x$ и $\sin x$. Для $f(x)=\cos x$ имеем $f^{(n)}(x)=\cos(x+n\frac{\pi}{2})$. Поэтому $|f^{(n)}(x)|\le 1$ для любого $x\in(-\infty,+\infty)$. Опять по теореме 3.7 для любого x получаем

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \tag{3.14}$$

так как $f^{(n)}(0)=0$ при нечетном n и $f^{(n)}(0)=(-1)^k$ при четном $n=2k$.

Точно так же можно получить разложение на всей прямой в ряд Тейлора функции $\sin x$:

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{3.15}$$

4. Логарифмическая функция $f(x)=\ln(1+x)$. Тогда $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ при $n=1,2,\ldots$ и $x>-1$. По формуле Тейлора

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+r_n(x),$$

где остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$$

где $\xi=\theta x$, $0<\theta<1$.

Если $0\le x\le 1$, то $0<\frac{1}{1+\theta x}\le 1$ и поэтому $|r_n(x)|<\frac{1}{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$.

Если $-1<x<0$, то, записав остаточный член в форме Коши,

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}=(-1)^n\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1},$$

будем иметь

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}=\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}<1,\quad \frac{1}{1+\theta x}=\frac{1}{1-\theta|x|}<\frac{1}{1-|x|}$$

и

$$|r_n(x)|\le\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n\frac{1}{|1+\theta x|}|x|^{n+1}\le\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$ и при $-1<x<0$.

Таким образом,

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \tag{3.16}$$

при $x\in(-1,1]$. При $x=-1$ ряд имеет вид $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и расходится.

При $|x|>1$ ряд также расходится, так как его общий член не стремится к 0 ($\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n} = +\infty$ при $|x|>1$).

5. Степенная функция $f(x)=(1+x)^{\alpha}$. Действительное число α произвольно, поэтому область определения функции $x>-1$. Так как $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, то формула Тейлора и ряд Тейлора рассматриваемой функции имеют вид

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x), \quad (3.17)$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \quad (3.18)$$

Если α - неотрицательное целое число, то ряд (3.18) содержит лишь конечное число членов, отличных от нуля, и, следовательно, сходится при любых x.

Теперь рассмотрим случай, когда α не является неотрицательным целым числом. Тогда все члены ряда (3.18) отличны от нуля при $x\neq 0$ и мы можем применить признак Даламбера к ряду из абсолютных величин членов ряда (3.18):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{n+1}n!}{(n+1)!\,\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}x\right|=|x|.$$

Следовательно, ряд (3.18) абсолютно, а значит, и просто сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$.

Однако отсюда мы не можем заключить, что ряд сходится к рассматриваемой функции. Для этого нужно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ при $|x|<1$ в формуле (3.17). Запишем остаточный член в (3.17) в форме Коши:

$$r_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}, \quad 0<\theta<1.$$

(θ зависит от n и от x). Положим

$$A_n(x)=\frac{(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot[(\alpha-1)-(n-1)]}{n!}x^n,$$

$$B_n(x)=\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}, \quad C_n(x)=\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Тогда $r_n(x)=A_n(x)\,B_n(x)\,C_n(x)$.

Выражение $A_n(x)$ является общим членом биномиального ряда (3.18), но только с показателем $\alpha-1$. По доказанному такой ряд сходится при $|x|<1$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(x)=0$ при этих x.

Из неравенства $1-|x|<1+\theta x<1+|x|$ следует, что $|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1}<|B_n(x)|<|\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1}$ при $|x|<1$ и, значит, последовательность $\{B_n(x)\}$ ограничена при фиксированном x.

Наконец, $|C_n(x)|=\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n\leqslant\left|\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}\right|^n<1$. Из полученных свойств имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ при $|x|<1$. Таким образом, при любом $x\in(-1,1)$ установлено равенство

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \qquad (3.19)$$

Задача 3.I. Доказать, что в точке x = I при $\alpha>-1$ ряд(3.I8) сходится и при $\alpha\leqslant-1$ - расходится, а в точке x = -I он сходится абсолютно при $\alpha\geqslant 0$ и расходится при $\alpha<0$. Показать, что в случае сходимости ряд (3.I8) всегда сходится к функции $(1+x)^\alpha$.

6. Обратная тригонометрическая функция $f(x)=\operatorname{arctg} x$. Производная $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$ рассматриваемой функции является суммой геометрической прогрессии со знаменателем $q=-x^2$, т.е.

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots, \qquad (3.20)$$

где должно быть $|q|=|x^2|<1$ или $|x|<1$. Интервал сходимости написанного ряда, где имеет место равенство (3.20), есть как раз $(-1,1)$.

По теореме 3.4 степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку, лежащему внутри интервала сходимости. Поэтому для любого $x\in(-1,1)$

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (3.21)$$

7. Обратная тригонометрическая функция $f(x)=\arcsin x$. Аналогично предыдущему примеру $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, и из разложения степенной функции (п. 5), заменяя x на $-x^2$ и беря $\alpha=-\frac{1}{2}$, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-1)^n x^{2n}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!}(-1)^n x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},$$

где $|-x^2|<1$ или $|x|<1$. Интегрируя этот ряд почленно, для $[0,x]$, принадлежащего интервалу сходимости (-I, I) этого ряда, имеем

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right)dt=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \quad (3.22)$$

Г л а в а 4. РЯДЫ ФУРЬЕ

§ I. Основные определения

Еще одним замечательным классом функциональных рядов являются ряды Фурье, в частности тригонометрические ряды Фурье. Сначала мы рассмотрим более общую конструкцию рядов Фурье для функций с интегрируемым квадратом, а потом более подробно изучим свойства тригонометрических рядов Фурье.

В этой главе интегралы, вообще говоря, понимаются в несобственном смысле. Напомним, что общее определение несобственного интеграла от функции f на промежутке $\langle a,b\rangle$, $-\infty\le a<b\le+\infty$, состоит в следующем. На этом промежутке функция f может иметь конечное число особых точек x_i, $i=0,1,\ldots,k$; $a\le x_0<x_1<\ldots<x_k\le b$, таких, что f интегрируема в обычном смысле по Риману на любом отрезке $[\xi_i,\eta_i]$, где $x_{i-1}<\xi_i<\eta_i<x_i$, i = I, 2, ..., k, и на отрезках $[a,\eta_0]$, $\eta_0<x_0$, если $x_0\ne a$, и $[\xi_{k+1},b]$, $x_k<\xi_{k+1}$, если $x_k\ne b$, т.е. существуют обычные определенные интегралы $\int_{\xi_i}^{\eta_i}f(x)dx$, $\int_a^{\eta_0}f(x)dx$ и $\int_{\xi_{k+1}}^{b}f(x)dx$. Тогда несобственный интеграл по промежутку $\langle a,b\rangle$ определяется следующими равенствами:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0}f(x)dx+\int_{x_0}^{x_1}f(x)dx+\ldots+\int_{x_k}^{b}f(x)dx,$$

где

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \lim_{\substack{\rho_i \to x_i - \\ \xi_i \to x_{i-1}+}} \int\limits_{\xi_i}^{\rho_i} f(x)dx, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$\int\limits_a^{x_0} f(x)dx = \lim_{\rho_0 \to x_0 -} \int\limits_a^{\rho_0} f(x)dx, \text{ если } x_0 \neq a,$$

и

$$\int\limits_{x_k}^{b} f(x)dx = \lim_{\xi_{k+1} \to x_k +} \int\limits_{\xi_{k+1}}^{b} f(x)dx,$$

если $x_k \neq b$.

Перед тем как перейти к определениям, заметим, что если функции f и g имеют интегрируемый квадрат на промежутке $<a,b>$, т.е. существуют интегралы (вообще говоря, несобственные) $\int\limits_a^b f^2(x)dx$ и $\int\limits_a^b g^2(x)dx$, то сами функции и их произведение абсолютно интегрируемы на этом промежутке по признаку сравнения, ибо

$$|f| \leq \frac{1+f^2}{2}, \qquad |f \cdot g| \leq \frac{f^2+g^2}{2}.$$

Итак, в дальнейшем в этом параграфе мы будем предполагать, что все функции имеют интегрируемый квадрат на промежутке $<a,b>$.

Определение 4.I. Если на промежутке $<a,b>$ задана система функций

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots, \tag{4.I}$$

то числа

$$a_n = \frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)dx, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.2}$$

где $\lambda_n^2 = \int\limits_a^b \varphi_n^2(x)dx$, $\lambda_n > 0$, называются коэффициентами Фурье функции f по системе (4.I), а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{4.3}$$

называется рядом Фурье функции f по этой системе.

Определение 4.2. Система функций (4.I) называется ортогональной, если $\int\limits_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0$ при $m \neq n$. Система функций (4.I) называется нормированной, если $\lambda_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Если система функций ортогональна и нормированна, то она называется ортонормированной.

Мы видим, что функциональные последовательности и ряды могут сходиться поточечно и равномерно. Существуют и другие виды сходимости, в частности средняя квадратичная.

<u>Определение 4.3.</u> Число $\sqrt{\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx}$ называется средним квадратичным отклонением функции f от функции g на промежутке $<a,b>$. Последовательность функций $\{f_n\}$ сходится в смысле среднего квадратичного отклонения к f на $<a,b>$, если $\sqrt{\int\limits_a^b [f(x)-f_n(x)]^2 dx} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Ряд расходится в смысле среднего квадратичного отклонения к некоторой функции, если к ней сходится последовательность частичных сумм этого ряда в этом смысле.

Из равномерной сходимости на некотором множестве следует обычная поточечная сходимость в каждой точке этого множества. Оказывается из равномерной сходимости следует и средняя квадратичная сходимость.

<u>Теорема 4.I.</u> Если последовательность функций $\{f_n\}$ сходится равномерно на конечном промежутке $<a,b>$ к функции f, то она сходится на $<a,b>$ к f и в смысле среднего квадратичного.

<u>Доказательство.</u> В силу равномерной сходимости для любого $\varepsilon>0$ существует такое N, что при $n \geqslant N$ будет $|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}$ для любого $x\in<a,b>$. Тогда при $n\geqslant N$

$$\sqrt{\int\limits_a^b [f(x)-f_n(x)]^2 dx} \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b \frac{\varepsilon^2}{b-a} dx} = \varepsilon,$$

т.е. $\sqrt{\int\limits_a^b [f(x)-f_n(x)]^2 dx} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

Обратное, вообще говоря, неверно, что показывает следующий пример.

<u>Пример 4.I.</u> Рассмотрим на отрезке $[-1, 1]$ последовательность функций (рис. 4.I):

$$\varphi_n(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } -1 \le x \le -\frac{2}{n}, \\ -nx-2, & \text{если } -\frac{2}{n} \le x \le -\frac{1}{n}, \\ nx, & \text{если } -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n}, \\ -nx+2, & \text{если } \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n}, \\ 0, & \text{если } \frac{2}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

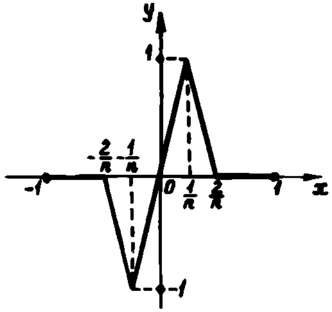

Рис. 4.I

Нетрудно видеть, что

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi(x)=0$$

в каждой точке $x\in[-1,1]$, так как $\varphi_n(0)=0$ при любом n и при $x \ne 0$ существует такое N, что $\frac{2}{N} < |x|$ и, значит, $\varphi_n(x)=0$ при всех $n \ge N$. Покажем, что в смысле среднего квадратичного эта последовательность сходится на $[-1,1]$ также к нулевой функции $\varphi(x) = 0$. Действительно,

$$\int_{-1}^{1}[\varphi_n(x)-\varphi(x)]^2 dx = \int_{-\frac{2}{n}}^{\frac{2}{n}} \varphi_n^2(x)dx + 2\left(\int_0^{\frac{1}{n}} n^2x^2dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}(-nx+2)^2dx\right)=$$

$$=2\left[\frac{n^2x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{n^2x^3}{3}-2nx^2+4x\right)\Big|_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\right] = \frac{10}{3n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

С другой стороны, равномерной сходимости здесь нет, так как для $\varepsilon=1/2$ мы не сможем сделать разность $|\varphi_n(x)-\varphi(x)|=|\varphi_n(x)|$ меньше $1/2$ для всех $x\in[-1,1]$ ни при каком n, ибо $\varphi_n(1/n)=1$ при любом n.

<u>Определение 4.4</u>. Система функций (4.I) называется полной в смысле равномерного приближения (среднего квадратичного приближения) для класса функций $\mathcal{Y}$, заданных на том же промежутке $<a,b>$, если для любой функции $f\in\mathcal{Y}$ и для любого $\varepsilon>0$ существует такая конечная линейная комбинация $\mu_1\varphi_{n_1}(x)+\ldots+\mu_k\varphi_{n_k}(x)$ функций системы, что

$$|f(x)-(\mu_1\varphi_{n_1}(x)+\ldots+\mu_k\varphi_{n_k}(x)|<\varepsilon \quad \text{для } x\in<a,b>.$$

$$\left(\sqrt{\int_a^b [f(x)-(\mu_1\varphi_{n_1}(x)+\ldots+\mu_k\varphi_{n_k}(x))]^2 dx} < \varepsilon\right).$$

Из теоремы 4.I тут же получаем следствие.

Следствие 4.I. Если система функций полна в смысле равномерного приближения для некоторого класса функций $\mathcal{Y}$, то она полна и в смысле среднего квадратичного приближения для этого класса.

§ 2. Минимальное свойство коэффициентов Фурье

Теперь возвратимся к ряду Фурье (4.3) по системе (4.I). Через $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x)$ будем обозначать частичные суммы этого ряда.

Определение 4.5. Линейная комбинация

$$T_n(x)=A_0\varphi_0(x)+A_1\varphi_1(x)+\ldots+A_n\varphi_n(x)$$

называется многочленом порядка n по системе функций (4.I), если $A_n\neq 0$.

Вообще произвольную линейную комбинацию функций системы(4.I) можно рассматривать как многочлен степени, равной наибольшему номеру функции, входящей в эту линейную комбинацию.

В этом параграфе мы будем рассматривать ортогональные системы функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Коэффициенты Фурье по такой системе обладают некоторым минимальным свойством.

Теорема 4.2. Если квадрат функции f интегрируем на промежутке $\langle a,b\rangle$ и $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ортогональная система функций на этом промежутке, то среднее квадратичное отклонение частичной суммы $S_n(x)$ ряда Фурье по этой системе от $f(x)$ является наименьшим среди всех средних квадратичных отклонений многочленов порядка n по этой системе от $f(x)$:

$$\int_a^b [f(x)-S_n(x)]^2 dx = \min_{T_n(x)} \int_a^b [f(x)-T_n(x)]^2 dx.$$

Кроме то[illegible]ет место неравенство Бесселя

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 a_n^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{4.4}$$

Доказательство. Произведем следующие преобразования:

$$\int_a^b [f(x)-T_n(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} A_k \varphi_k(x)\right)^2 dx -$$

$$-2\int_a^b f(x)\sum_{k=0}^{n} A_k\varphi_k(x)dx = \int_a^b f^2(x)dx + \sum_{k,l=0}^{n} A_k A_l \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)dx -$$

$$-2\sum_{k=0}^{n} A_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = \int_a^b f^2(x)dx + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 A_k^2 -$$

$$-2\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^2 a_k A_k = \int_a^b f^2(x)dx + \sum_{k=0}^{n}\lambda_k^2 (A_k-a_k)^2 - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 a_k^2 . \quad (4.5)$$

В последнем выражении слагаемые неотрицательны и переменными являются лишь коэффициенты A_k. Поэтому выражение (4.5) будет наименьшим, когда второе слагаемое равно 0, т.е. когда $A_k = a_k$ для каждого k. Таким образом, мы показали, что рассматриваемое среднее квадратичное отклонение-наименьшее при $T_n(x) = S_n(x)$. В этом случае равенство (4.5) принимает вид

$$\int_a^b [f_n(x)-S_n(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 a_k^2 . \quad (4.6)$$

Так как левая часть равенства (4.6) неотрицательна, то

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 a_k^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \quad (4.7)$$

для любого n. Ограниченность сверху частичных сумм неотрицательного ряда является необходимым и достаточным условием его сходимости. Поэтому ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 a_k^2$ сходится, и, переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (4.7), получаем неравенство Бесселя (4.4).

Следствие 4.2. Если система (4.I) ортонормирована, то $\lambda_n = 1$ для любого n и неравенство Бесселя принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \le \int_a^b f^2(x)dx .$$

Это означает, что квадраты коэффициентов Фурье образуют сходящийся ряд и, следовательно, его общий член стремится к 0. Откуда $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Рассмотрим еще один вопрос в этом параграфе: когда неравенство Бесселя превращается в равенство, которое в этом случае называется равенством Парсеваля.

Теорема 4.3. Для функции f с интегрируемым квадратом на промежутке $\langle a, b \rangle$ имеет место равенство Парсеваля

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 a_n^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx \tag{4.8}$$

тогда и только тогда, когда ортогональная система функций (4.I) полна в классе всех функций с интегрируемым квадратом на $\langle a, b \rangle$.

Доказательство. Если имеет место равенство Парсеваля, то из равенства (4.6)

$$\int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 a_k^2 \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Но это означает по определению 4.3, что ряд Фурье функции f по системе (4.I) сходится к ней в смысле среднего квадратичного, т.е. эта система полна в классе функций с интегрируемым квадратом, так как f была произвольной такой функцией.

Обратно, пусть система (4.I) полна в классе функций с интегрируемым квадратом и f – произвольная функция из этого класса. Тогда по определению 4.4 для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая линейная комбинация функций системы (4.I), что

$$\int_a^b [f(x) - (A_{n_1} \varphi_{n_1}(x) + \ldots + A_{n_k} \varphi_{n_k}(x))]^2 dx < \varepsilon.$$

Но мы уже говорили, что линейную комбинацию можно рассматривать как многочлен $T_n(x) = A_{n_1}\varphi_{n_1}(x) + \ldots + A_{n_k}\varphi_{n_k}(x)$ по системе (4.I) порядка $n = \max(n_1, \ldots, n_k)$. Тогда по теореме 4.2

$$\int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx \le \int_a^b [f(x) - T_n(x)]^2 dx < \varepsilon,$$

и из равенства (4.6) имеем

$$0 \le \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 a_k^2 < \varepsilon$$

при данном n, а следовательно, и при любом большем номере. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$0\le\int_a^b f^2(x)\,dx-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^2 a_k^2\le\varepsilon.$$

Так как это неравенство верно при любом $\varepsilon>0$, то на самом деле имеет место равенство $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda_k^2 a_k^2=\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.

Следствие 4.3. В случае ортонормированной системы (4.I) равенство Парсеваля имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2=\int_a^b f^2(x)\,dx \tag{4.9}$$

и дает значение суммы ряда из квадратов коэффициентов Фурье по этой системе.

§ 3. Тригонометрические ряды Фурье

Определение 4.6. Система функций

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \dots,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ \dots \tag{4.10}$$

называется тригонометрической системой на отрезке $[-l,l]$, $l>0$. Ряд $\frac{A_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi x}{l}+B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$, составленный из функций этой системы, называется тригонометрическим рядом, а конечная сумма $\frac{A_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(A_k\cos\frac{k\pi x}{l}+B_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$ называется тригонометрическим многочленом порядка n, если $A_n^2+B_n^2\ne0$.

Заметим, что все функции системы (4.10) являются периодическими функциями с периодом $2l$, определенными на всей действительной прямой. Поэтому тригонометрические многочлены и суммы тригонометрических рядов являются периодическими функциями с тем же периодом.

Лемма 4.I. Тригонометрическая система функций (4.10) ортогональна на $[-l,l]$. Кроме того, $\int\limits_{-l}^{l}dx=2l$,

$$\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}\,dx=l,\quad \int_{-l}^{l}\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx=l,\ n=1,2,\dots .$$

Доказательство. Очевидно, что $\int\limits_{-l}^{l} 1\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx =$ $= \int\limits_{-l}^{l} 1\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0$ и $\int\limits_{-l}^{l} dx = 2l$. Интеграл от произведения двух различных косинусов равен 0:

$$\int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\left[\cos\frac{(n-m)\pi x}{l} + \cos\frac{(n+m)\pi x}{l}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{l}{\pi(n-m)}\sin\frac{(n-m)\pi x}{l} + \frac{l}{\pi(n+m)}\sin\frac{(n+m)\pi x}{l}\right]\Bigg|_{-l}^{l} = 0 \quad при\ m \neq n.$$

Аналогично, интегралы от произведения двух различных синусов и произвольного синуса на произвольный косинус равны 0. Далее, имеем

$$\int\limits_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{l}{2\pi n}\sin\frac{2n\pi x}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l} = l, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Точно так же $\int\limits_{-l}^{l}\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx = l$.

Тогда в соответствии с общим определением 4.I коэффициенты Фурье по тригонометрической системе функций имеют вид

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.11}$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx$$

(правда, из общего определения $a_0 = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx$, но в записи тригонометрического ряда в определении 4.6 коэффициент A_0 делится на 2).

В дальнейшем для сокращения записи мы будем рассматривать частный случай системы (4.10) при $l = \pi$, а именно тригонометрическую систему на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{4.12}$$

Это можно сделать, так как, используя замену $y = \frac{\pi x}{l}$, мы сводим общий случай (4.10) к случаю (4.12). В этом случае коэффициенты Фурье имеют вид

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\ ,\quad n=0,1,2,\dots ,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\ ,\quad n=1,2,\dots .$$

В случае равномерной сходимости тригонометрического ряда он обязательно является рядом Фурье своей суммы.

Теорема 4.4. Пусть тригонометрический ряд

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos nx+B_n\sin nx.$$

равномерно сходится на $[-\pi,\pi]$ к функции f. Тогда его коэффициенты являются коэффициентами Фурье данной функции:

$$A_n=a_n,\ n=0,1,2,\dots;\qquad B_n=b_n\ ,\ n=1,2,\dots$$

Доказательство. В силу равномерной сходимости на $[-\pi,\pi]$ и непрерывности тригонометрических функций по теореме 2.3 в равенстве

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos nx+B_n\sin nx \tag{4.14}$$

ряд можно почленно проинтегрировать по отрезку $[-\pi,\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+$$

$$+B_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=A_0\pi.$$

Умножая обе части равенства (4.14) на $\cos kx$ или $\sin kx$, получим опять равномерно сходящийся на $[-\pi,\pi]$ ряд. Почленно интегрируя его и используя ортогональность системы (4.12), будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx=a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx=a_k\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx=b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx=b_k\pi,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Из теоремы 4.4 и теоремы 2.1 видно, что в случае равномерной сходимости тригонометрического ряда, а значит, и ряда Фурье функции f к ней эта функция должна быть непрерывна на периоде $[-\pi,\pi]$. С одной стороны, это слишком узкий класс функций для изучения сходимости и свойств рядов Фурье, а с другой – непрерывность функции не гарантирует сходимости ряда Фурье к этой функции, есть примеры непрерывных периодических функций, ряды Фурье которых вообще расходятся.

Для того чтобы можно было выписать коэффициенты и ряд Фурье функции f, нужно только существование интегралов (4.11) или (4.13). Наиболее распространенным достаточным условием существования этих интегралов является абсолютная интегрируемость функции f на отрезке $[-\pi,\pi]$ или $[-l,l]$ длины, равной периоду, так как из неравенств $|f(x)\cos nx|\le|f(x)|$, $|f(x)\sin nx|\le|f(x)|$ или $|f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}|\le|f(x)|$, $|f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}|\le|f(x)|$ по признаку сравнения следует абсолютная сходимость, а следовательно, и обычная интегралов (4.13) или (4.11). В дальнейшем абсолютная интегрируемость периодической функции с периодом 2π на $[-\pi,\pi]$ будет основным условием, накладываемым на функцию f. Так как не только абсолютная интегрируемость, но даже и непрерывность не гарантируют сходимости ряда Фурье функции к ней, то для обозначения того, что данный тригонометрический ряд является рядом Фурье функции f, вводится следующая запись:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Далее будут изучены свойства коэффициентов. Фурье и условий поточечной сходимости тригонометрических рядов Фурье. Далее мы рассмотрим вопросы, связанные с равномерной и средней квадратичной сходимостью этих рядов. И, наконец, исследуем вопросы, относящиеся к дифференцированию и интегрированию тригонометрических рядов Фурье.

§ 4. Теорема Римана

Теорема Римана является важным инструментом в исследованиях, относящихся к рядам Фурье и смежным вопросам. Введем сначала несколько вспомогательных понятий.

Определение 4.7. Для функции f, определенной на всей прямой, замыкание множества точек, в которых $f(x)\ne 0$, называется ее носителем и обозначается $\operatorname{supp} f$.

Определение 4.8. Функция, определенная на всей прямой, называется финитной, если ее носитель содержится в некотором конечном отрезке.

Определение 4.9. Для множества E, лежащего на прямой R, функция

$$\chi(x)=\chi_E(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in E,\\ 0, & \text{если } x\notin E,\end{cases}$$

называется характеристической функцией множества E.

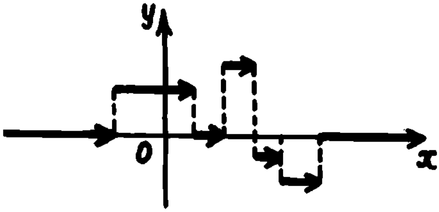

Рис. 4.2

Определение 4.10. Функция f, определенная на всей прямой, называется финитной ступенчатой функцией, если она является линейной комбинацией конечного числа характеристических функций попарно не пересекающихся интервалов $[a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ (рис. 4.2):

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\mu_i\chi_i(x). \qquad (4.15)$$

Финитная ступенчатая функция финитна и интегрируема на всей прямой, причем, если она задана формулой (4.15), то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\sum_{i=1}^{m}\mu_i\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_i(x)dx=\sum_{i=1}^{m}\mu_i\int_{a_i}^{b_i}dx=\sum_{i=1}^{m}\mu_i(b_i-a_i).$$

Лемма 4.2. Для любой функции, абсолютно интегрируемой на промежутке $\langle a,b\rangle$, $-\infty\le a<b\le+\infty$, существует последовательность таких финитных ступенчатых функций φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, что

$$\operatorname{supp}\varphi_n\subset(a,b) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b|f(x)-\varphi_n(x)|dx=0.$$

Доказательство. Пусть f абсолютно интегрируема на $\langle a,b\rangle$. Допустим для определенности, что она интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi,\eta]$, $-\infty\le a<\xi<\eta<b\le+\infty$ (общий случай абсолютно интегрируемой функции, см. § 1, легко сводится к этому случаю, так как в общем случае несобственный интеграл есть конечная линейная комбинация интегралов указанного вида). По определению несобственного интеграла для любого $\varepsilon>0$ существуют такие ξ_ε и η_ε, что

$$\int_a^{\xi_\varepsilon}|f(x)|dx+\int_{\eta_\varepsilon}^{b}|f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4.16)$$

Так как функция f интегрируема по Риману на $[\xi_\varepsilon, \rho_\varepsilon]$, то из необходимых и достаточных условий интегрируемости следует

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \underline{\sigma}_\tau = \int_{\xi_\varepsilon}^{\rho_\varepsilon} f(x)\,dx,$$

где $\underline{\sigma}_\tau$ - нижняя интегральная сумма, δ_τ - диаметр разбиения τ отрезка $[\xi_\varepsilon, \rho_\varepsilon]$. Поэтому существует такое разбиение $\tau_\varepsilon = \{\xi_\varepsilon = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = \rho_\varepsilon\}$ этого отрезка, что нижняя интегральная сумма

$$\underline{\sigma}_{\tau_\varepsilon} = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad \Delta x_i =$$

$$= x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

удовлетворяет неравенству

$$0 \le \int_{\xi_\varepsilon}^{\rho_\varepsilon} f(x)\,dx - \underline{\sigma}_{\tau_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} m_i, & \text{если } x_{i-1} \le x < x_i, \; i = 1, \ldots, k, \\ 0, & \text{если } x < \xi_\varepsilon \text{ или } x \ge \rho_\varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что $\psi_\varepsilon(x)$ - финитная ступенчатая функция, причем $\operatorname{supp} \psi_\varepsilon(x) \in [\xi_\varepsilon, \rho_\varepsilon] \subset (a, b)$ и $\int_{\xi_\varepsilon}^{\rho_\varepsilon} \psi_\varepsilon(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \underline{\sigma}_{\tau_\varepsilon}$.

Следовательно,

$$\int_{\xi_\varepsilon}^{\rho_\varepsilon} [f(x) - \psi_\varepsilon(x)]\,dx = \int_{\xi_\varepsilon}^{\rho_\varepsilon} f(x)\,dx - \int_{\xi_\varepsilon}^{\rho_\varepsilon} \psi_\varepsilon(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4.17)$$

причем $f(x) - \psi_\varepsilon(x) = |f(x) - \psi_\varepsilon(x)| \geqslant 0$, так как $\psi_\varepsilon(x) \le f(x)$ при $\xi_\varepsilon \le x < \rho_\varepsilon$. Из неравенств (4.16) и (4.17) имеем

$$\int_a^b |f(x) - \psi_\varepsilon(x)|\,dx = \int_a^{\xi_\varepsilon} |f(x)|\,dx +$$

$$+ \int_{\xi_\varepsilon}^{\rho_\varepsilon} [f(x) - \psi_\varepsilon(x)]\,dx + \int_{\rho_\varepsilon}^{b} |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Полагая $\varepsilon = \frac{1}{n}$ и обозначая соответствующие функции $\psi_n, n=1,2,\ldots$, получаем искомую последовательность ступенчатых финитных функций.

Теорема 4.5 (Римана). Если функция f абсолютно интегрируема на промежутке $\langle a,b\rangle$, то

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\nu x\,dx = \lim_{\nu\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\nu x\,dx = 0.$$

Доказательство. Если $\chi(x)$ - характеристическая функция полуинтервала $[\xi,\rho)\subset(a,b)$, то

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b \chi(x)\sin\nu x\,dx = \lim_{\nu\to\infty}\int_\xi^\rho \sin\nu x\,dx = \lim_{\nu\to\infty}\frac{\cos\nu\xi-\cos\nu\rho}{\nu} = 0,$$

так как $\left|\frac{\cos\nu\xi-\cos\nu\rho}{\nu}\right| \le \frac{|\cos\nu\xi|+|\cos\nu\rho|}{|\nu|} \le \frac{2}{|\nu|} \xrightarrow{\nu\to\infty} 0.$

Так как любая финитная ступенчатая функция является конечной линейной комбинацией характеристических функций полуинтервалов, то утверждение теоремы справедливо для любой финитной ступенчатой функции.

Если теперь f - произвольная абсолютно интегрируемая на промежутке $\langle a,b\rangle$ функция, то по лемме 4.2 для любого $\varepsilon>0$ существует такая финитная ступенчатая функция $\psi_\varepsilon(x)$, что

$$\int_a^b |f(x)-\psi_\varepsilon(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку для финитных ступенчатых функций теорема уже доказана, то найдется такое $\nu_\varepsilon>0$, что при $|\nu|>\nu_\varepsilon$ будет

$$\left|\int_a^b \psi_\varepsilon(x)\sin\nu x\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому при $|\nu|>\nu_\varepsilon$ получим

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\nu x\,dx\right| \le \left|\int_a^b [f(x)-\psi_\varepsilon(x)]\sin\nu x\,dx\right| +$$

$$+\left|\int_a^b \psi_\varepsilon(x)\sin\nu x\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)-\psi_\varepsilon(x)|\,dx +$$

$$+\left|\int_a^b \psi_\varepsilon(x)\sin\nu x\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\nu x\,dx = 0.$

Аналогично рассматривается и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\cos\nu x\,dx$.

Следствие 4.4. Коэффициенты Фурье (4.11) или (4.13) абсолютно интегрируемой на отрезке длины, равной периоду, функции стремятся к 0.

§ 5. Интеграл Дирихле. Принцип локализации

Напомним, что f -2π -периодическая, абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi,\pi]$ функция. Наша задача в этом параграфе - найти удобное для исследований выражение частичной суммы $S_n(x)$ ряда Фурье функции f.

Лемма 4.3. Если g - периодическая функция с периодом T, интегрируемая на отрезке длины периода, то интеграл $\int\limits_\alpha^{\alpha+T} g(x)dx$ не зависит от α и имеет одинаковое значение для всех α.

Доказательство. Сначала заметим, что если функция с периодом T интегрируема на некотором отрезке длины периода, то она интегрируема и на любом отрезке этой длины. Это очевидно для отрезков, которые получаются из данного сдвигом на число, кратное периоду T. Для остальных отрезков это следует из того, что функция интегрируема на некотором отрезке тогда и только тогда, когда она интегрируема по двум меньшим отрезкам, составляющим данный отрезок. Отсюда следует тогда, что функция интегрируема вообще на любом отрезке.

Проделаем следующие преобразования:

$$\int\limits_\alpha^{\alpha+T} g(x)dx = \int\limits_\alpha^{0} g(x)dx + \int\limits_0^{T} g(x)dx + \int\limits_T^{\alpha+T} g(x)dx =$$

$$= -\int\limits_0^{\alpha} g(x)dx + \int\limits_0^{T} g(x)dx + \int\limits_0^{\alpha} g(y+T)dy.$$

Последний интеграл получен с помощью замены $x=y+T$. Так как по определению периодической функции $g(y+T)=g(y)$ для любого y, то

$$\int\limits_\alpha^{\alpha+T} g(x)dx = -\int\limits_0^{\alpha} g(x)dx + \int\limits_0^{T} g(x)dx + \int\limits_0^{\alpha} g(y)dy = \int\limits_0^{T} g(x)dx.$$

Мы видим, что рассматриваемый интеграл не зависит от α и при любом α равен интегралу по отрезку $[0,T]$.

Лемма 4.4. Если g интегрируема на отрезке $[-l, l]$, то $\int_{-l}^{l} g(x)dx = 2\int_{0}^{l} g(x)dx$ для четной функции g и $\int_{-l}^{l} g(x)dx = 0$ для нечетной функции g.

Доказательство. Сделаем преобразование

$$\int_{-l}^{l} g(x)dx = \int_{-l}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{l} g(x)dx$$

и в первом интеграле справа сделаем замену $x = -y$. Тогда для четной функции имеем

$$\int_{-l}^{l} g(x)dx = -\int_{-l}^{0} g(-y)dy + \int_{0}^{l} g(x)dx = \int_{0}^{l} g(y)dy + \int_{0}^{l} g(x)dx = 2\int_{0}^{l} g(x)dx,$$

а для нечетной

$$\int_{-l}^{l} g(x)dx = -\int_{-l}^{0} g(-y)dy + \int_{0}^{l} g(x)dx = -\int_{0}^{l} g(y)dy + \int_{0}^{l} g(x)dx = 0.$$

Теперь займемся непосредственно преобразованием частичной суммы ряда Фурье функции f. Подставляя в эту сумму выражения (4.13) для коэффициентов Фурье, имеем

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\right]dt. \tag{4.18}$$

Обозначим

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt, \tag{4.19}$$

тогда равенство (4.18) перепишется в виде

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t-x)dt. \tag{4.20}$$

Функция $D_n(t)$ называется ядром Дирихле, а интеграл в правой части (4.20) - интегралом Дирихле.

Лемма 4.5. Ядро Дирихле обладает следующими свойствами:

1) это четная непрерывная 2π-периодическая функция;

2) $D_n(0) = n+\frac{1}{2}$;

3) $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1; \tag{4.21}$$

4) при $t \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}. \tag{4.22}$$

Доказательство. Непрерывность, четность и периодичность функции $D_n(t)$ непосредственно следуют из определения (4.19) этой функции. Формула (4.21) также следует из определения и леммы 4.1.

Докажем формулу (4.22):

$$D_n(t) = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2}+\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{t}{2}\cos kt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left[\sin\frac{t}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)\right] =$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}, \quad t \neq 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

В силу четности ядра Дирихле равенство (4.21) по лемме 4.4 можно переписать в виде

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1. \tag{4.23}$$

Лемма 4.6. Для частичной суммы $S_n(x)$ ряда Фурье абсолютно интегрируемой 2π-периодической функции f справедливы формулы

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,f(x+t)\,dt \tag{4.24}$$

и

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)\left[f(x+t)+f(x-t)\right]dt. \tag{4.25}$$

Доказательство. Сделаем в интеграле Дирихле (4.20) замену $u = t-x$:

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u)f(x+u)\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)f(x+u)\,du.$$

Последнее равенство получено по лемме 4.3.

Теперь получим вторую формулу леммы, разбив последний интеграл на два по отрезкам $[-\pi,0]$ и $[0,\pi]$, сделав в первом из них замену $u=-t$ и учтя четность ядра Дирихле $D_n(-t)=D_n(t)$:

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(u)f(x+u)\,du+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(u)f(x+u)\,du=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} D_n(-t)f(x-t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(u)f(x+u)\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)[f(x-t)+f(x-t)]\,dt.$$

Доказанные леммы позволяют получить одно важное свойство для сходимости рядов Фурье, которое называется принципом локализации.

Теорема 4.6 (принцип локализации). Для 2π -периодической абсолютно интегрируемой функции f существование и значение суммы ее ряда Фурье в точке $x_0\in[-\pi,\pi]$ зависит только от существования и значения предела

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} D_n(t)\,[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\,dt,$$

где δ - сколь угодно малое положительное число.

Доказательство. Возьмем произвольные $x_0\in[-\pi,\pi]$ и $\delta\in(0,\pi)$. Запишем интеграл из (4.25) в виде суммы двух интегралов

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} D_n(t)[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} D_n(t)[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\,dt.$$

Второй интеграл по лемме 4.5 может быть записан в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin t/2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt. \tag{4.26}$$

По условию функция $f(x_0+t)+f(x_0-t)$ при фиксированном x_0 имеет период 2π по переменной t и абсолютно интегрируема по ней на $[-\pi,\pi]$, а значит, и на $[\delta,\pi]$. Функция же $\frac{1}{2\sin t/2}$ непрерывна и, следовательно, ограничена на отрезке $[\delta,\pi]$: $0<\frac{1}{2\sin t/2}\le\frac{1}{2\sin\delta/2}$. Поэтому по признаку сравнения их произведение абсолютно интегрируемо на $[\delta, \pi]$, и мы находимся в условиях теоремы Римана (теорема 4.5). Поэтому интеграл (4.26) стремится к 0 при $n \to \infty$.

Сумма ряда Фурье есть предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$. Второй интеграл в записи $S_n(x_0)$ стремится к 0 при $n \to \infty$. Следовательно, сумма ряда существует тогда и только тогда, когда существует предел первого интеграла в записи $S_n(x_0)$, и сумма в случае существования равна пределу первого интеграла.

Мы доказали довольно примечательный факт. Дело в том, что в интеграле в теореме 4.6 значения функции берутся из отрезка $[x_0-\delta, x_0+\delta]$. Поэтому сходимость и значение суммы ряда Фурье в точке x_0 зависят только от значений функции f в окрестности точки x_0. Если, скажем, две функции совпадают в достаточно малой окрестности точки x_0, то их ряды Фурье в этой точке одновременно сходятся или расходятся и в случае сходимости имеют одинаковые суммы, несмотря на то, что функции могут быть различны и иметь поэтому совершенно разные ряды Фурье.

§ 6. Достаточные условия сходимости рядов Фурье в точке

Напомним, что точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные односторонние пределы:

$$\lim_{\Delta x\to 0+} f(x_0+\Delta x) = f(x_0+), \quad \lim_{\Delta x\to 0-} f(x_0+\Delta x) = f(x_0-).$$

Точку x_0 будем называть регулярной точкой функции f, если $f(x_0) = \dfrac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$. Если f непрерывна в точке x_0, то очевидно, x_0 регулярна.

Определим для точки x_0 разрыва первого рода понятие односторонних производных:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0+)}{\Delta x},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-)}{\Delta x}.$$

Если x_0 – точка непрерывности, это определение совпадает с обычным определением односторонних производных, так как в этом случае $f(x_0+) = f(x_0-) = f(x_0)$. Введем для удобства следующее обозначение:

$$f_x^*(t) = f(x+t) + f(x-t) - f(x+) - f(x-). \tag{4.27}$$

Лемма 4.7. Для 2π -периодической абсолютно интегрируемой на отрезке длины 2π функции f интегралы

$$\int_0^{\delta} \frac{|f_x^*(t)|}{t} dt \ , 0<\delta\leq 2\pi, \text{ и } \int_0^{2\pi} \frac{|f_x^*(t)|}{2\sin t/2} dt$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Для любого $\delta\in(0,\pi]$ функция $\frac{1}{2\sin t/2}$ непрерывна и, значит, интегрируема по Риману на отрезке $[\delta,\pi]$. Функция $f_x^*(t)$ при фиксированном x абсолютно интегрируема на $[-\pi,\pi]$ по условию, а значит, и на отрезке $[\delta,\pi]$. Поэтому произведение $\frac{f_x^*(t)}{2\sin t/2}$ этих функций абсолютно интегрируемо на $[\delta,\pi]$, т.е. при любом $\delta\in(0,\pi]$ интеграл $\int_{\delta}^{\pi} \frac{|f_x^*(t)|}{2\sin t/2} dt$ сходится.

Так как в силу абсолютной интегрируемости функция $f(t)$ и, следовательно, функция $f_x^*(t)$ имеет только конечное число особых точек на $[-\pi,\pi]$ (см. § I), то существует такое $\delta>0$, что на отрезке $[0,\delta]$ функция $f_x^*(t)$ не имеет особых точек, кроме, быть может, точки 0. Теперь заметим, что функции $\frac{|f_x^*(t)|}{t}$ и $\frac{|f_x^*(t)|}{2\sin t/2}$ эквивалентны при $t\to 0+$, так как $\lim\limits_{t\to 0+} \frac{2\sin t/2}{t} = 1$. Поэтому по предельной форме признака сравнения интегралы $\int_0^{\delta} \frac{|f_x^*(t)|}{t} dt$ и $\int_0^{\delta} \frac{|f_x^*(t)|}{2\sin t/2} dt$ сходятся или расходятся одновременно. Отсюда сразу следует утверждение леммы.

Теорема 4.7. Если точка x является точкой непрерывности или разрыва первого рода для 2π -периодической абсолютно интегрируемой на отрезке длины периода функции f и при некотором $\delta\in(0,\pi)$ интеграл $\int_0^{\delta} \frac{|f_x^*(t)|}{t} dt$ сходится, то ряд Фурье функции f сходится в точке x к значению

$$S(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2} .$$

Доказательство. Из лемм 4.5 и 4.6, используя формулы (4.25) и (4.23), имеем

$$S_n(x) - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]\,dt + \frac{f(x+)+f(x-)}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)-f(x+)-f(x-)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f_x^*(t)}{2\sin t/2}\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt. \qquad (4.28)$$

Интеграл $\int_0^{\delta}\frac{|f_x^*(t)|}{t}dt$ сходится по условию. Тогда по лемме 4.7 сходится интеграл $\int_0^{\pi}\frac{|f_x^*(t)|}{2\sin t/2}dt$, т.е. функция $\frac{f_x^*(t)}{2\sin t/2}$ абсолютно интегрируема на $[0,\pi]$. Отсюда по теореме Римана (см. теорему 4.5)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f_x^*(t)}{2\sin t/2}\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt = 0,$$

т.е. из (4.28) существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

<u>Следствие 4.5</u>. Если выполнены условия теоремы, то ряд Фурье функции в любой регулярной точке (в частности, в точке непрерывности) сходится к значению функции в этой точке.

<u>Следствие 4.6</u>. Если у 2π -периодической, абсолютно интегрируемой на отрезке длины периода функции f в точке x существуют $f(x+), f(x-), f_+'(x), f_-'(x)$, то ряд Фурье сходится в этой точке к числу $S(x)$.

<u>Доказательство.</u> Из условия следует существование конечного предела

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f_x^*(t)}{t} = \lim_{t\to 0+}\left[\frac{f(x+t)-f(x+)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x-)}{t}\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0+}\frac{f(x+t)-f(x+)}{t} + \lim_{u\to 0-}\frac{f(x+u)-f(x-)}{-u} = f_+'(x) - f_-'(x).$$

Следовательно, найдется такое $\delta\in(0,\pi)$, что функция $\frac{f_x^*(t)}{t}$ ограничена на $[0,\delta]$, и поэтому у нее нет ни одной особой точки на этом отрезке. Но тогда $\frac{f_x^*(t)}{t}$ интегрируема в обычном смысле по Риману на $[0,\delta]$, так как $f_x^*(t)$ абсолютно интегрируема на $[0,\delta]$, $\frac{1}{t}$ непрерывна на $(0,\delta]$ и интегрируемость функции $\frac{f_x^*(t)}{t}$ могла бы нарушаться только за счет ее стремления к бесконечности при $t \to 0+$, но функция ограничена. Функция, интегрируемая по Риману, абсолютно интегрируема по Риману, т.е. существует обычный определенный интеграл $\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t} dt$, и по теореме 4.7 ряд Фурье функции f сходится к $S(x)$ в данной точке x.

<u>Следствие 4.7</u>. Ряд Фурье 2π-периодической кусочно дифференцируемой на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции f сходится в каждой точке x к значению $S(x)$.

<u>Доказательство</u>. По определению кусочно дифференцируемой функции на отрезке $[-\pi,\pi]$ найдется конечное число точек разрыва первого рода, в которых существуют односторонние производные и между любыми соседними двумя из которых функция дифференцируема. Таким образом, в каждой точке на $[-\pi,\pi]$, а следовательно, и на всей прямой выполняются условия следствия 2.

Из следствий 4.5 и 4.7 непосредственно вытекает следующее следствие.

<u>Следствие 4.8</u>. Ряд Фурье 2π-периодической непрерывной, кусочно дифференцируемой функции сходится в каждой точке к значению функции в этой точке.

Заметим в конце параграфа, что все сказанное справедливо и для соответствующих функций произвольного периода $2l$ (см. § 3).

§ 7. <u>Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Разложение в ряд Фурье функции, заданной на конечном промежутке</u>

Ряды Фурье четных и нечетных функций имеют особый вид. Если, скажем, f - четная, $2l$ - периодическая, абсолютно интегрируемая на периоде функция, то произведения $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$, $n=0,1,2,\ldots$, и $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$, $n=1,2,\ldots$, являются четными и нечетными функциями соответственно.

Тогда по лемме 4.4

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad, n=0,1,2,\ldots, \tag{4.29}$$

$$b_n=0 \quad, n=1,2,\ldots,$$

и ряд Фурье четной функции состоит из одних косинусов.

Если f - нечетная функция, то $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$, $n=0,1,2,\ldots$ - нечетные функции, и $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$, $n=1,2,\ldots$ - четные функции, и по лемме 4.4

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$
$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1, 2, \dots , \qquad (4.30)$$

т.е. ряд Фурье нечетной функции состоит из одних синусов.

Теперь пусть функция f задана на конечном промежутке $\langle a,b\rangle$. Мы будем рассматривать эту функцию на интервале (a,b), так как ее значения в концах промежутка не играют никакой роли. Так как ряд Фурье строится и сходится к периодической функции, то нужно доопределить функцию f до некоторой вспомогательной периодической функции. Графически надо просто сдвигать график функции f вдоль оси Ox на число, кратное длине интервала (a,b) (рис. 4.3).

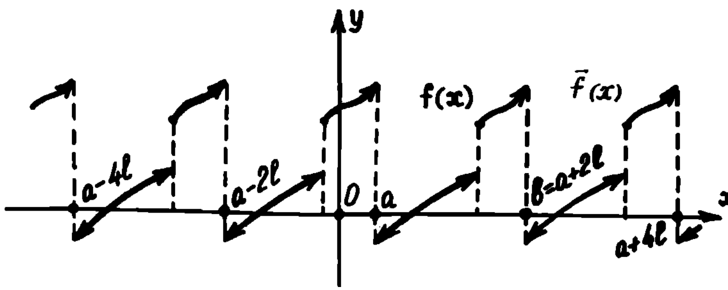

Рис. 4.3

Чтобы формально определить полученную вспомогательную функцию $\bar f$, обозначим $b-a=2l$ и положим
$$\bar f(x) = f(x-2lm) \quad для \quad x\in(a+2lm, a+2l(m+1)).$$
Тогда $\bar f$ - периодическая функция с периодом $2l$, $\bar f(x) = f(x)$ для $x\in(a,b)$ и $\bar f$ абсолютно интегрируема на отрезке длины периода, если f абсолютно интегрируема на $[a,b]$. Следовательно, мы можем выписать ряд Фурье для функции $\bar f$:
$$\bar f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$
где
$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\bar f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\bar f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Используя лемму 4.3 и равенство $\bar{f}(x) = f(x)$ при $x\in(a,b)$, будем иметь для $x\in(a,b)$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n=\frac{1}{l}\int_a^b\bar{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=0,1,2,\dots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^b\bar{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,2,\dots\ . \tag{4.31}$$

Мы получили ряд Фурье функции, заданной на конечном промежутке $<a,b>$. Заметим, что в записи (4.31) коэффициентов Фурье участвуют значения только самой функции на этом промежутке. Поэтому по значениям функции на $<a,b>$ мы можем делать выводы о сходимости ряда Фурье на основании полученных в § 6 теорем, не привлекая вспомогательную периодическую функцию.

<u>Пример 4.2.</u> Разложить в ряд Фурье неограниченную периодическую функцию

$$f(x)=\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right|,\ x\neq(2m+1)\pi,\ m\in\mathbb{Z}.$$

Функция $\cos\frac{x}{2}$ имеет период 4π. Но так как она стоит в логарифме под знаком модуля, то период функции $f(x)$ равен 2π. Так как функция $f(x)$ четная, то $b_n=0$, $n=1,2,\dots,$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln 2\cos\frac{x}{2}=0$. Действительно, посчитаем интеграл $\int_0^{\pi}\ln 2\cos\frac{x}{2}dx$, преобразовав его двумя способами:

$$\int_0^{\pi}\ln2\cos\frac{x}{2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln2\cos\frac{x}{2}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln2\cos\frac{x}{2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln2\cos\frac{x}{2}dx-$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln2\cos\frac{x}{2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln2\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln4\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln2\sin x\,dx=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\ln2\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln2\cos u\,du,$$

где в интегралах сделаны замены $x=\pi-t$ и $x=\frac{\pi}{2}-u$, и

$$\int_0^{\pi} \ln 2\cos\frac{x}{2}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \ln 2\cos u\,du \quad, \text{где} \quad u = \frac{x}{2}.$$

Получаем, что $2\int_0^{\pi/2} \ln 2\cos u\,du = \int_0^{\pi/2} \ln 2\cos u\,du$, откуда

$\int_0^{\pi/2} \ln 2\cos u\,du = 0$ и, следовательно, также $\int_0^{\pi} \ln 2\cos\frac{x}{2}\,dx = 0.$

Для вычисления коэффициентов a_n, n = I, 2, ..., проинтегрируем по частям, сделаем замену $x = \pi - t$ и воспользуемся свойствами ядра Дирихле (см. лемму 4.5):

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \ln 2\cos\frac{x}{2}\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\ln 2\cos\frac{x}{2}\,\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} +$$

$$+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\,\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nt\cos\frac{t}{2}}{\sin t/2}\,dt =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin t/2} + \frac{\sin(n-\frac{1}{2})t}{2\sin t/2}\right]dt =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\cos kt\right]dt = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

($\lim\limits_{x\to\pi-} \ln 2\cos\frac{x}{2}\sin nx = 0$ и вычисляется применением два раза правила Лопиталя).

Таким образом, по следствию 4.6

$$\ln|2\cos\frac{x}{2}| = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}$$

для $x\in(-\pi+2\pi m, \pi+2\pi m)$, так как в каждой такой точке наша функция дифференцируема, а на отрезке $[-\pi, \pi]$ абсолютно интегрируема. Последнее нуждается в пояснении. В силу четности имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln|2\cos\frac{x}{2}||\,dx = 2\int_0^{\pi}|\ln 2\cos\frac{x}{2}|\,dx =$$

$$= 2\left(\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\ln 2\cos\frac{x}{2}\,dx - \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\ln 2\cos\frac{x}{2}\,dx\right)$$

($\ln 2\cos\frac{x}{2} \geqslant 0$ при $x\in[0, \frac{2}{3}\pi]$ и $\ln 2\cos\frac{x}{2} \leqslant 0$ при $x\in[\frac{2}{3}\pi, \pi)$), причем первоначальный интеграл существует, если существуют оба интеграла в последней части равенства. С другой стороны, выше мы вычислили уже, что $\int\limits_0^{\pi} \ln 2\cos\frac{x}{2}\,dx = 0$. Поэтому $\int\limits_0^{\frac{2}{3}\pi} \ln 2\cos\frac{x}{2}\,dx +$ $+\int\limits_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \ln 2\cos\frac{x}{2}\,dx = 0$ и $\int\limits_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \ln 2\cos\frac{x}{2}\,dx = -\int\limits_0^{\frac{2}{3}\pi} \ln 2\cos\frac{x}{2}\,dx$, причем несобственный интеграл $\int\limits_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$ существует и равен обычному определенному интегралу $-\int\limits_0^{\frac{2}{3}\pi}$. Отсюда существует также интеграл

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\ln|2\cos\frac{x}{2}|\right| dx = 4\int\limits_0^{\frac{2}{3}\pi} \ln 2\cos\frac{x}{2}\,dx.$$

<u>Пример 4.3.</u> Разложить в ряд по косинусам на отрезке $[0,\pi]$ функцию $f(x) = x^2$.

Для того чтобы получить ряд только из косинусов, нужно нашу функцию продолжить на отрезок $[-\pi, 0]$ четным образом. Продолжение записывается с помощью того же выражения x^2. Теперь надо разложить функцию x^2, заданную на отрезке $[-\pi,\pi]$. На рис. 4.4 изображена вспомогательная 2π-периодическая функция $\bar{f}$. Нетрудно видеть, что функция $\bar{f}$ кусочно дифференцируема и непрерывная

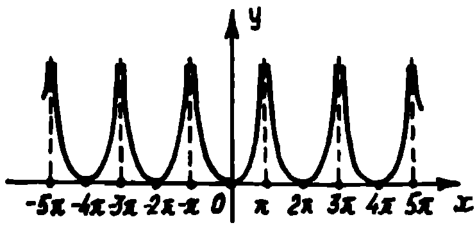

Рис. 4.4

на $[-\pi,\pi]$. Поэтому ряд Фурье сходится в каждой точке отрезка $[-\pi,\pi]$, а следовательно, и всей прямой к функции $\bar{f}$, в частности, в точках $x \in [0,\pi]$ сходится к $f(x) = x^2$.

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right) =$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\left(-x\,\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\left(-\pi\,\frac{\cos n\pi}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=(-1)^n\frac{4}{n^2},\ n=1,2,\ldots$$

Таким образом, для $x\in[0,\pi]$ имеем

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

В частности, при $x=\pi$ получаем

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Откуда находим сумму ряда Эйлера

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

§ 8. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических

Пусть опять f – 2π-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi,\pi]$. Рассмотрим средние арифметические частичных сумм $S_k(x)$ ряда Фурье и ядер Дирихле $D_k(x)$ функции f:

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\ldots+S_n(x)}{n+1},$$

$$\Phi_n(x)=\frac{D_0(x)+D_1(x)+\ldots+D_n(x)}{n+1},\quad n=0,1,2,\ldots \tag{4.32}$$

Сумма $\sigma_n(x)$ называется суммой Фейера n-го порядка, а $\Phi_n(x)$ – ядром Фейера n-го порядка. Из формулы (4.24)

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)f(x+t)dt$$

следует, что

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)f(x+t)dt. \tag{4.33}$$

Наша задача – исследовать поведение сумм $\sigma_n(x)$ при $n\to\infty$, т.е. рассмотреть суммирование ряда Фурье методом средних арифметических.

Лемма 4.8. Ядро Фейера обладает следующими свойствами:

1) $\Phi_n(x)$ является четной непрерывной 2π-периодической функцией;

2) $\Phi_n(0)=\frac{n+1}{2}$ и $\Phi_n(t)\geqslant 0$ при всех t;

3) $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Phi_n(t)dt=1$;

4) $\Phi_n(t)=\dfrac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}$ при $t\neq 2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

Доказательство. Четность, непрерывность и периодичность ядра Фейера сразу следуют из его определения (4.32) и свойств ядра Дирихле (см. лемму 4.5). Далее, $\Phi_n(0)=\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}D_k(0)=\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}(k+\frac{1}{2})=$
$=\frac{1}{n+1}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n+1}{2}\right]=\frac{n+1}{2}$. Аналогично, $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt=$
$=\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_k(t)dt=1$ (см. лемму 4.5).

Теперь получим свойство 4, из которого сразу следует неотрицательность ядра Фейера. При $t\neq 2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, имеем

$$(n+1)\Phi_n(t)=\sum_{k=0}^{n}D_k(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin t/2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{2\sin\frac{t}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{4\sin^2 t/2}=\frac{1}{4\sin^2 t/2}\sum_{k=0}^{n}(\cos kt-\cos(k+1)t)=$$

$$=\frac{1-\cos(n+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Следствие 4.9. При фиксированном $\delta\in(0,\pi)$ верно следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\max_{\delta\leq|t|\leq\pi}\Phi_n(t)=0. \tag{4.34}$$

Доказательство. Из свойства 4 вытекает

$$0\leq\max_{\delta\leq|t|\leq\pi}\Phi_n(t)=\frac{1}{2(n+1)}\max_{\delta\leq|t|\leq\pi}\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}\leq\frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

Так как правая часть полученного неравенства стремится к 0 при $n\to\infty$, то из неравенства сразу получают (4.34).

Если рассматриваемая 2π-периодическая функция f непрерывна, то из непрерывности на $[-\pi,\pi]$ следует ее ограниченность на этом отрезке, а из периодичности - ограниченность на всей прямой. Аналогично, функция f будет равномерно непрерывна на любом отрезке, например на отрезке $[0,4\pi]$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ будет существовать такое δ, $0<\delta<2\pi$, что для $x_1,x_2\in[0,4\pi]$ при $|x_1-x_2|<\delta$ будет $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. Тогда для произвольных x_1' и x_2', таких, что $|x_1'-x_2'|<\delta$, существует такое целое m, что $x_1'-2\pi m$, $x_2'-2\pi m\in[0,4\pi]$. Отсюда $|(x_1'-2\pi m)-(x_2'-2\pi m)|=$ $=|x_1'-x_2'|<\delta$, и, следовательно, $|f(x_1')-f(x_2')|=|f(x_1'-2\pi m)-$ $-f(x_2'-2\pi m)|<\varepsilon$. Таким образом, непрерывная периодическая функция равномерно непрерывна на всей прямой.

Теорема 4.8 (Фейер). Последовательность сумм Фейера непрерывной 2π-периодической функции f сходится равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$, а следовательно, и на всей прямой к этой функции.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. В силу вышесказанного функция f равномерно непрерывна на всей прямой, т.е. существует такое $\delta>0$, что при $|x_1-x_2|<\delta$ будет $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon/3$.

Оценим разность $f(x)-\sigma_n(x)$, используя выражение (4.33) и свойства ядра Фейера из леммы 4.8 и следствия 4.9:

$$|f(x)-\sigma_n(x)|=\left|\frac{f(x)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)f(x+t)dt\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)[f(x)-f(x+t)]dt\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)|f(x)-f(x+t)|dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}. \tag{4.35}$$

Для второго слагаемого при любом x имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)|f(x)-f(x+t)|dt\le\frac{\varepsilon}{3\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)dt\le\frac{\varepsilon}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt=\frac{\varepsilon}{3},$$

так как $|x-(x+t)|=|t|<\delta$ и $\Phi_n(t)\ge 0$.

Оставшиеся два интеграла из (4.35) оцениваются одинаково. А именно, из ограниченности функции f на всей прямой, т.е. из существования такого $M>0$, что $|f(x)|\le M$ при любом x, следует

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)|f(x)-f(x+t)|dt\le\frac{2M}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)dt\le$$

$$\le \frac{2M}{\pi} \max_{\delta \le t \le \pi} \Phi_n(t) \int_\delta^\pi dt = \frac{2M(\pi-\delta)}{\pi} \max_{\delta\le t\le\pi} \Phi_n(t) < 2M \max_{\delta \le t \le \pi} \Phi_n(t).$$

Так как правая часть неравенства стремится к 0 при $n \to \infty$ по следствию 4.9, то найдется такое натуральное число N, что при $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \Phi_n(t)\,|f(x)-f(x+t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Точно так же можно оценить и интеграл $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}$. Поэтому, подставляя все оценки в (4.35), для любого $x \in \mathbb{R}$ при $n > N$ имеем

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что означает равномерную сходимость последовательности $\{\sigma_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на всей прямой $\mathbb{R}$.

Несмотря на равномерную сходимость сумм Фейера непрерывной периодической функции к ней, ее ряд Фурье может расходиться. Однако, даже имея расходящийся ряд Фурье непрерывной функции, мы можем однозначно восстановить саму функцию как предел последовательности средних арифметических частичных сумм ряда Фурье. Кроме того, если все же ряд Фурье непрерывной функции сходится в какой-нибудь точке, то оказывается, что он обязательно сходится к значению функции в этой точке.

Следствие 4.10. Если ряд Фурье непрерывной 2π-периодической функции сходится в некоторой точке, то он сходится к значению функции в этой точке.

Доказательство. Сначала покажем следующее: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, где $y_n = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$. Для любых натуральных чисел n и n_0, $n_0 < n$, можно записать равенство

$$y_n - b = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} - b = \frac{x_1+\ldots+x_{n_0} - n_0 b}{n} + \frac{(x_{n_0+1}-b)+\ldots+(x_n-b)}{n}.$$

Если теперь взять произвольное $\varepsilon > 0$, то по определению предела существует такое n_0, что при $n > n_0$ будет $|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Так как $x_1+\ldots+x_{n_0} - n_0 b$ – фиксированное число, а $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+\ldots+x_{n_0}-n_0 b}{n} = 0$, т.е. существует такое n_1, что при $n > n_1$ будет $\left|\frac{x_1+\ldots+x_{n_0}-n_0 b}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для $n > n_\varepsilon = \max(n_0, n_1)$ получим

$$|y_n-b| \le \left|\frac{x_1+\ldots+x_{n_0}-n_0 b}{n}\right| + \frac{|x_{n_0+1}-b|+\ldots+|x_n-b|}{n} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n-n_0}{n}\,\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b.$

Таким образом, если частичные суммы $S_n(x_0)$ ряда Фурье непрерывной функции f сходятся в точке x к некоторому числу b, то суммы Фейера $\sigma_n(x_0)$ в этой точке также сходятся к этому числу b. Но по теореме 4.8 суммы Фейера сходятся к самой функции, т.е. $b = f(x_0)$ и $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ