

В. А. Котельников, М. В. Котельников, Г. С. Филиппов

# ФИЗИЧЕСКИЕ, МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ ПРИСТЕНОЧНОЙ ПЛАЗМЫ

*применительно к системам обвизионно космической  
техники и волновым технологиям*



Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)  
Институт машиноведения им. Благонравова РАН  
(Филиал «Научный центр нелинейной волновой механики  
и технологии РАН»)

В. А. Котельников, М. В. Котельников, Г. С. Филиппов

# **ФИЗИЧЕСКИЕ, МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ ПРИСТЕНОЧНОЙ ПЛАЗМЫ**

**применительно к системам авиационно-космической  
техники и волновым технологиям**

Учебное пособие

Допущено Учебно-методическим объединением  
высших учебных заведений РФ по образованию в области авиации,  
ракетостроения и космоса УМО АРК в качестве учебного пособия  
для студентов высших технических учебных заведений, обучающихся  
по направлениям подготовки бакалавриата 01.03.02 «Прикладная математика  
и информатика», 24.03.05 «Двигатели летательных аппаратов»,  
24.03.01 «Ракетные комплексы и космонавтика» и магистратуры  
01.04.02 «Прикладная математика и информатика», 24.04.05 «Двигатели  
летательных аппаратов», 24.04.01 «Ракетные комплексы и космонавтика».



Москва ♦ Ижевск

2018

УДК 621.38(075.8) + 533.9(075.8) + 539.1.08(075.8)

ББК 22.38я73

К 731

Рецензенты:

д. т. н., профессор Полуэктов Николай Павлович, кафедра физики Космического факультета Мытищинского филиала МГТУ им. Н. Э. Баумана (МГУЛ);

д. т. н., профессор, акад. РАН Попов Гарри Алексеевич, директор, главный конструктор Научно-исследовательского института прикладной механики и электродинамики МАИ.

**Котельников В. А., Котельников М. В., Филиппов Г. С.**

Физические, математические и численные модели пристеночной плазмы применительно к системам авиационно-космической техники и волновым технологиям : учебное пособие. — М.–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2018. — 280 с.

В учебном пособии рассмотрены физические, математические и численные модели пристеночной плазмы в бесстолкновительном и столкновительном режимах применительно к спутникам, движущимся в ионосферной плазме, двигателям малой тяги, жидкостным и твердотопливным двигателям, ракетным системам различного назначения, технологическим плазмотронам. Изложенные в учебном пособии модели предназначены для исследования в том числе и плазмотронов, применяющихся в волновых технологиях.

Пособие рекомендуется для студентов, аспирантов, инженеров, специализирующихся в области конструирования и диагностики авиационно-космических систем, в которых плазма является рабочим телом либо средой, в которой эти системы работают.

Пособие также будет полезно специалистам, работающим с технологическими плазмотронами в различных отраслях промышленности.

© В. А. Котельников, М. В. Котельников,  
Г. С. Филиппов, 2018

**ISBN 978-5-4344-0498-3**

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	6
Обозначения, индексы и сокращения .....	8
<b>Часть I. Физические, математические и численные модели бесстолкновительной пристеночной плазмы .....</b>	<b>11</b>
<b>Глава I.1. Физические модели бесстолкновительной пристеночной плазмы .....</b>	<b>11</b>
I.1.1. Понятие плазмы. Радиус Дебая. Ленгмюровские колебания. Пристеночный слой объемного заряда .....	11
I.1.2. Разреженная плазма в авиационно-космической технике .....	15
I.1.3. Молекулярно-кинетическое описание разреженной плазмы. ..	22
I.1.4. Система уравнений Максвелла. ....	27
Контрольные вопросы к главе I.1 .....	29
<b>Глава I.2. Математические модели бесстолкновительной пристеночной плазмы.....</b>	<b>30</b>
I.2.1. Модель Власова–Пуассона.....	30
I.2.2. Модель Алексеева–Пуассона .....	40
I.2.3. Начальные и граничные условия для задачи Власова– Пуассона и Алексеева–Пуассона.....	41
Контрольные вопросы к главе I.2 .....	44
<b>Глава I.3. Численные модели бесстолкновительной пристеночной плазмы .....</b>	<b>45</b>
I.3.1. Методы численного решения уравнения Власова .....	45
I.3.2. Методы численного решения уравнения Пуассона.....	60
I.3.3. Алгоритм решения системы Власова–Пуассона.....	63
I.3.4. Методические расчеты и сравнение с результатом работ других авторов. ....	68
I.3.5. Некоторые результаты математического моделирования применительно к авиационно-космической технике. ....	75
Контрольные вопросы к главе I.3. ....	104

<b>Часть II. Физические, математически и численные модели столкновительной пристеночной плазмы</b> .....	106
<b>Глава II.1. Физические модели столкновительной пристеночной плазмы</b> .....	106
II.1.1. Элементарные процессы в объеме столкновительной пристеночной плазмы .....	106
II.1.2. Элементарные процессы на стенке в столкновительной плазме .....	109
II.1.3. Элементарная теория процессов переноса .....	109
II.1.4. Плотная плазма в авиационно-космической технике .....	113
Контрольные вопросы к главе II.1 .....	121
<b>Глава II.2. Математические модели столкновительной пристеночной плазмы</b> .....	122
II.2.1. Слабоионизированная покоящаяся плазма с постоянными свойствами и замороженными химическими реакциями ....	122
II.2.2. Слабоионизированная покоящаяся плазма с переменны- ми свойствами и замороженными химическими реакци- ями .....	125
II.2.3. Слабоионизированная покоящаяся плазма с учетом реакций ионизации и рекомбинации .....	128
II.2.4. Слабоионизированная движущаяся плазма (ламинарное течение) .....	130
II.2.5. Слабоионизированная движущаяся плазма (турбулентное течение) .....	141
II.2.6. Слабоионизированная столкновительная плазма в магнит- ном поле .....	146
Контрольные вопросы к главе II.2 .....	148
<b>Глава II.3. Численные модели столкновительной пристеночной плазмы</b> .....	149
II.3.1. Метод крупных частиц Давыдова применительно к задачам столкновительной плазмы .....	149
II.3.2. Методы решения уравнения Пуассона .....	155
II.3.3. Алгоритм численного решения задачи Эйлера–Пуассона в случае столкновительной пристеночной плазмы .....	160
II.3.4. Методические исследования и тестовые задачи .....	164
II.3.5. Некоторые результаты математического моделирования применительно к авиационно-космической технике .....	167
Контрольные вопросы к главе II.3 .....	193

<b>Часть III. Физические, математические и численные модели пристеночной плазмы при <math>Kn \sim 1</math></b> .....	194
<b>Глава III.1. Физические модели пристеночной плазмы при <math>Kn \sim 1</math></b> .....	194
III.1.1. Столкновения типа «ион–нейтрал» .....	197
III.1.2. Столкновения типа «электрон–нейтрал» .....	199
III.1.3. Столкновения типа «ион–ион», «ион–электрон» .....	200
III.1.4. Пристеночная плазма при $Kn \sim 1$ в авиационно-космической технике. ....	203
Контрольные вопросы к главе III.1 .....	208
<b>Глава III.2. Математические модели пристеночной плазмы при <math>Kn \sim 1</math></b> .....	209
III.2.1. Математическая модель задачи с учетом столкновений типа «ион–нейтрал». ....	209
III.2.2. Математическая модель задачи с учетом столкновений типа «электрон–нейтрал». ....	210
III.2.3. Математическая модель задачи с учетом столкновений типа «ион–ион», «ион–электрон». ....	210
Контрольные вопросы к главе III.2 .....	212
<b>Глава III.3. Численные модели пристеночной плазмы при <math>Kn \sim 1</math></b> .....	213
III.3.1. Алгоритм численного решения задачи при $Kn \sim 1$ .....	213
III.3.2. Методические расчеты и сравнение с результатами других авторов .....	225
III.3.3. Некоторые результаты математического моделирования пристеночной плазмы при $Kn \sim 1$ .....	226
Контрольные вопросы к главе III.3 .....	233
<b>Приложение. История возникновения нелокальной физики. Ее физические основы</b> .....	234
<b>Литература</b> .....	267

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие написано как обобщение курса лекций, который читался авторами в течение ряда лет для студентов факультета прикладной математики и физики на кафедре прикладной физики.

Содержание пособия соответствует профилю Московского авиационного института; в частности, в качестве практического приложения в пособии рассмотрены следующие направления:

- математическое моделирование потока разреженной плазмы, истекающей из электроракетного двигателя (ЭРД) с соплом щелевой и цилиндрической формы [1, 2];
- взаимодействие потока разреженной плазмы с поперечным магнитным полем, что важно для систем электромагнитного управления вектором тяги ЭРД [2];
- исследования радиофизических параметров пристеночной плазмы вблизи гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА) различного класса, что необходимо для расчёта потоков тепла, массы, импульса, заряда на стенку ГЛА, а также решения проблемы радиосвязи [3, 4];
- исследование взаимодействия космических летательных аппаратов (КЛА) с окружающей ионосферной плазмой; КЛА цилиндрической и сферической формы; собственная атмосфера вблизи спутников, включая структуру ближнего следа [4, 5, 6];
- создание зондовой теории диагностики потоков разреженной и плотной плазмы, которая успешно применялась авторами для исследования как параметров пристеночной плазмы, так и потоков столкновительной и бесстолкновительной плазмы [7, 8, 9, 10, 11]. Авторами предложены оригинальные методики проведения зондового эксперимента и обработки вольт-амперных характеристик (ВАХ) [12].

Зондовая теория и методика зондовых измерений применимы не только в авиации, но и для исследования струй, истекающих из технологических плазмотронов различного назначения: в плазмохимии [13], при плазменном напылении покрытий и выращивании монокристаллов [14, 15] при воздействии импульсных разрядов на нефтеносные и газоносные

пласты [16, 17], для сварки, резки и сверления отверстий в металлах [18] и в ряде других технологических процессов.

Обратим внимание читателей на то, что речь идет о моделях: физических, математических и численных. При формулировке моделей важно учесть основные факторы, влияющие на рассматриваемый процесс, и отбросить несущественные. Критерием правильности выбранной модели может быть только практика, т. е. совпадение вытекающих из модели выводов с явлениями, наблюдаемыми на опыте. Поэтому в книге большое внимание уделено методическим исследованиям, сравнению вычислительных и натуральных экспериментов, сравнению с работами других авторов, рассмотрению предельных и частных случаев. Там, где это возможно, проводится анализ возможных ошибок и путей повышения точности исследования.

Предлагаемое пособие может вызвать интерес у студентов, аспирантов, преподавателей и научных работников в области физики и электродинамики низкотемпературной плазмы, вычислительной физики, зондовых методов диагностики плазмы, двигателей летательных аппаратов, конструирования новых образцов авиационной и космической техники.

Для понимания ряда разделов пособия необходимы знания в объеме программы технических университетов по таким предметам, как курс общей физики, математический анализ, векторная алгебра, дифференциальные уравнения, численные методы.

Выражаем благодарность преподавателям, сотрудникам, аспирантам и студентам кафедры 807 прикладной физики МАИ, принимавшим участие в составлении и отладке программ, проведении вычислительных и натуральных экспериментов, обсуждении результатов работы.



## ОБОЗНАЧЕНИЯ, ИНДЕКСЫ И СОКРАЩЕНИЯ

### Обозначения

$r$  — радиус зонда

$\mathbf{u}$  — скорость потока плазмы

$I$  — сила тока

$M$  — масштаб физических величин

$\Phi$  — потенциал ( $\Delta\Phi$  — разность потенциалов)

$\tau_T$  — гидродинамическое время

$\tau_\lambda$  — время между столкновениями

$\tau_b$  — время взаимодействия

$r_b$  — масштаб взаимодействия

$r_\Delta = \lambda$  — средняя длина свободного пробега

$r_T = L$  — гидродинамический масштаб

$F$  — сила

$m$  — масса частицы

$n$  — концентрация

$\nu$  — частота

$f$  — функция распределения

$t$  — время

$E$  — напряженность электрического поля

$D$  — электрическое смещение

$\rho$  — плотность объемного заряда

$B$  — индукция магнитного поля

$\mu$  — относительная магнитная проницаемость

$\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость;  $\epsilon = T_i / T_e$  — отношение температур ионов и электронов

$j$  — плотность тока

$H$  — напряженность магнитного поля

$\sigma$  — удельная проводимость

$k$  — постоянная Больцмана  
 $T$  — температура по шкале Кельвина  
 $q$  — заряд частиц  
 $e$  — заряд электрона  
 $\Delta$  — оператор Лапласа; толщина слоя объемного заряда  
 $J$  — якобиан перехода  
 $l$  — длина  
 $G$  — расход заряженных частиц

### Индексы

$i$  — ион  
 $e$  — электрон  
 $a$  — нейтральный атом  
 $0$  — признак безразмерной величины  
 $p$  — признак поверхности электрода  
 $\infty$  — внешняя граница расчетной области

### Сокращения

ГЛА — гиперзвуковой летательный аппарат  
КЛА — космический летательный аппарат  
ПД — плазменный двигатель  
ФР — функция распределения  
ФРИ — функция распределения ионов  
ФРЭ — функция распределения электронов  
ВАХ — вольт-амперная характеристика  
ДЗДЭ — двигатель с замкнутым дрейфом электронов  
СПД — стационарный плазменный двигатель  
ЕТД — единая теория диссипативных систем  
ЭРД — электроракетный двигатель  
ЖРД — жидкостный реактивный двигатель  
ВРД — воздушно-реактивный двигатель  
ТРД — твердотопливный реактивный двигатель  
УБ — уравнение Больцмана  
ГУЭ — гидродинамические уравнения Энскога

КУ — кинетические уравнения

БКТ — больцмановская кинетическая теория

ОУБ — обобщенное уравнение Больцмана (уравнение Алексева)

ФУ — фундаментальные уравнения

ТПП — теория процессов переноса

ФМО — физически бесконечно малый объем

ЛТР — локальное термодинамическое равновесие

ОГУ — обобщенные гидродинамические уравнения (уравнения Алексева)

УШ — уравнение Шрёдингера

# ЧАСТЬ I. ФИЗИЧЕСКИЕ, МАТЕМАТИЧЕСКИ И ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПРИСТЕНОЧНОЙ ПЛАЗМЫ

## Глава I.1. Физические модели бесстолкновительной пристеночной плазмы

### I.1.1. Понятие плазмы. Радиус Дебая. Ленгмюровские колебания. Пристеночный слой объемного заряда

Плазма считается разреженной, если средняя длина свободного пробега составляющих ее частиц  $\lambda$  велика по сравнению с характерным размером задачи  $r_p$ . В случае движения спутника в ионосфере  $r_p$  — это характерный размер спутника или характерный размер возмущенной области; для зондовой диагностики  $r_p$  — это характерный размер зонда или размер слоя объемного заряда; для плазмы, истекающей из плазменного двигателя,  $r_p$  — это размер сопла или характерный размер внесенного в струю тела. Разреженная плазма встречается в тлеющем разряде, высокочастотном разряде, дугах низкого давления и т. д. Плазма может считаться разреженной и при достаточно высоких давлениях, если характерный размер задачи мал по сравнению с  $\lambda$ . В данной главе рассмотрим некоторые свойства плазмы, которые нам потребуются при формулировке математических моделей, определяющих процессы переноса в пристеночных слоях.

Плазму будем рассматривать как среду, состоящую из нейтральных атомов (или молекул), положительно и отрицательно заряженных ионов и электронов. Положительные ионы и электроны образуются в ионосфере в основном за счет ионизации атмосферы коротковолновым и корпускулярным излучением Солнца, отрицательные ионы — вследствие прилипания электронов к нейтральным частицам. Основное свойство плазмы — квазинейтральность, т. е. приближительное равенство концентраций положительно и отрицательно заряженных частиц. Условие квазинейтральности может соблюдаться лишь в объемах, линейные

размеры которых больше некоторого характерного размера  $M_L$ , называемого линейным масштабом разделения зарядов. Такое разделение зарядов может происходить в результате хаотического (теплового) движения частиц, интенсивность которого определяется температурой. Отметим, что понятие температуры применимо лишь в условиях равновесия. В плазме часто встречаются такие условия, когда равновесие устанавливается лишь между частицами одного сорта, но между различными сортами равновесия нет. В этих условиях температуры различных компонент плазмы могут различаться. Предположим, что в результате хаотического движения в некотором объеме образовался избыточный отрицательный заряд. Тогда в силу условия квазинейтральности в соседнем объеме образуется избыточный положительный заряд. Возникающие между ними силы кулоновского притяжения стремятся восстановить квазинейтральность. Покажем, что разделение зарядов возможно лишь в достаточно малых объемах, характеризуемых масштабом  $M_L$ . Пусть плазма полностью однократно ионизована, имеет температуру  $T \sim 10^3$  К и давление  $P \sim 10^{-3}$  ат. В каждом кубическом метре такой плазмы содержится

$$n = \frac{P}{kT} \approx \frac{10^5 \cdot 10^{-3}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 10^3} \approx 7 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$$

ионов и электронов. Предположим гипотетическую ситуацию, когда в кубическом объеме со стороной  $X \sim 1$  мм остались заряды только одного знака. Возникающее при этом электрическое поле подчиняется уравнению Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho = \frac{1}{\epsilon_0} ne, \quad (\text{I.1.1})$$

где  $\mathbf{E}$  — вектор напряженности электрического поля,  $e$  — заряд электрона,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м — электрическая постоянная. Для оценки воспользуемся тем, что  $\operatorname{div} \mathbf{E} \sim \frac{dE}{dx} \sim \frac{E}{x}$ . Тогда  $E \sim \frac{1}{\epsilon_0} nex$ . Потенциал плазмы в области разделения зарядов

$$\varphi \sim Ex \sim \frac{1}{\epsilon_0} nex^2 \approx \frac{1}{8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot 7 \cdot 10^{21} \cdot 1,6 \cdot 10^{19} \cdot 10^{-6} \approx 10^8 \text{ В}. \quad (\text{I.1.2})$$

Из физических соображений очевидно, что такие большие потенциалы за счет энергии хаотического движения возникнуть не могут. Энергия электрического поля  $e\phi$  должна иметь порядок тепловой энергии  $kT$ . Поэтому разделение в данных условиях может произойти не на расстояние  $x \sim 1$  мм, а на значительно меньшие расстояния.

Обозначая  $M_L \sim x \sim r_D$  и используя для  $\phi$  выражение (I.1.2), имеем  $\frac{1}{\epsilon_0} e^2 n r_D^2 \cong kT$ , откуда

$$M_L \sim r_D = \left( \frac{\epsilon_0 kT}{e^2 n} \right)^{1/2}. \quad (\text{I.1.3})$$

Формула (I.1.3) характеризует масштаб разделения зарядов в плазме при температуре  $T$  и концентрации заряженных частиц  $n$ . Величина  $r_D$  носит название дебаевского радиуса или дебаевской длины по имени Дебая, впервые получившего эту формулу (но не для плазмы, а для электролитов). Вывод, приведенный выше для  $r_D$ , является приближенным, однако формула (I.1.3) совпадает с результатом более строгого вывода

(если  $T_e \neq T_i$ , то  $r_D = \left( \frac{\epsilon_0 k T_e T_i}{e^2 n (T_e + T_i)} \right)^{1/2}$ ). Радиус Дебая характеризует область

сильного изменения электрического поля, вызванного разделением заряда. Однако более слабое поле может проникать и на значительно большие расстояния. Например, если плазму поместить в объем, окруженный металлическими стенками, то металлическая стенка заряжается отрицательно относительно потенциала пространства вследствие большей подвижности электронов. Электрическое поле образуется не только за счет потенциала стенки, но и благодаря образуемому около нее слою положительного объемного заряда. Численный расчёт такой задачи имеется в [1], где показано, что электрическое поле может распространяться в плазму на расстояния нескольких десятков радиусов Дебая. Поэтому величина  $r_D$  может служить лишь для грубой оценки области разделения зарядов в плазме и проникновения в нее электрического поля. Область, в которой нарушена квазинейтральность, по установившейся терминологии называется ионизованным газом. Это понятие является более общим, чем понятие плазмы.

Кроме масштаба длины в плазме,  $M_L = r_D$ , вводят ещё масштаб времени  $M_t$ , который характеризуется следующим свойством: если время наблюдения  $t \gg M_t$ , то условие квазинейтральности выполняется. В противном случае квазинейтральность может нарушаться. Причина такого нарушения вытекает из теплового движения, в результате которого случайным образом могут появляться области с избыточным отрицательным и положительным зарядом. Области отрицательного заряда образуются, как правило, электронами. Ввиду малой инертности под действием электрических сил электроны начинают совершать колебания относительно центра тяжести ионов, образующих положительный избыточный заряд. Если время наблюдения достаточно велико, то успевают совершиться много колебаний, так что в среднем условие квазинейтральности выполняется. Если же время наблюдения сравнимо с периодом колебаний, то квазинейтральность может нарушаться. Естественно принять за временной масштаб разделения зарядов период плазменных колебаний (их называют также ленгмюровскими колебаниями). Вывод формулы для периода плазменных колебаний наиболее просто осуществить на примере плоского слоя плазмы, в котором все электроны сместились на расстояние  $x$ . Уравнение движения электрона в возникающем электрическом поле запишется в виде

$$m_e \ddot{x} = -eE = -\frac{1}{\epsilon_0} ne^2 x. \quad (I.1.4)$$

При выводе (I.1.4) использовано значение  $E$  из (I.1.2). Это уравнение описывает гармонические колебания с частотой  $\omega = \left( \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2}$ , откуда получаем период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \left( \frac{\epsilon_0 m_e}{ne^2} \right)^{1/2}.$$

Более точный расчет приводит к следующему выражению для временного масштаба разделения зарядов в плазме:

$$M_t = \left( \frac{\epsilon_0 m_e}{ne^2} \right)^{1/2}. \quad (I.1.5)$$

Поскольку плазма является проводящей средой, она под воздействием электрических и магнитных полей существенно меняет свои свойства. В плазме возможно протекание электрических токов. Проводимость зависит от концентраций составляющих ее частиц и их температур. В магнитном поле многие свойства плазмы, в том числе и проводимость, теряют свою изотропность. В достаточно разреженной плазме ее поведение как целого определяется движением отдельных заряженных частиц.

### I.1.2. Разреженная плазма в авиационно-космической технике

Ниже приведено несколько примеров, когда разреженная плазма используется в качестве рабочего тела либо в качестве среды обитания авиационно-космических объектов.

**Пример 1.** Космические летательные аппараты (КЛА) в ионосферной плазме.

В таблице I.1.1 приведены характерные параметры ионосферной плазмы [19]: концентрация заряженных частиц  $n_{i,e}$ , их температуры  $T_{i,e}$ , средняя длина свободного пробега  $\lambda$ , частота ленгмюровских колебаний  $\omega_{i,e}$  и дебаевский радиус  $r_D$  в зависимости от высоты над поверхностью Земли  $h$ .

Таблица I.1.1

$h$ , м	$n_{i,e}$ , м <sup>-3</sup>	$T_e$ , К	$T_i$ , К	$\lambda$ , м	$\omega_e$ , с	$\omega_i$ , м <sup>-1</sup>	$r_d$ , м
$10^5$	$8 \cdot 10^{10}$	240	210	0,036	$(3 \div 20) \cdot 10^4$	$(2 \div 10) \cdot 10^4$	1
$2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^{11}$	1300	1100	$6 \cdot 10$	$(1 \div 4) \cdot 10^7$	$(5 \div 20) \cdot 10^4$	$0,2 \div 1$
$3 \cdot 10^5$	$1,6 \cdot 10^{12}$	2000	1400	$5 \cdot 10$	$(2 \div 8) \cdot 10^7$	$(1 \div 4) \cdot 10^5$	$0,1 \div 0,7$
$4 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^{12}$	2400	1450	$(4 \div 7) \cdot 10$	$(3 \div 5) \cdot 10^7$	$(0,2 \div 0,4) \cdot 10^5$	$0,3 \div 0,4$
$5 \cdot 10^5$	$9 \cdot 10^{11}$	2600	1600	$3 \cdot 10^2$	$6 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^5$	$0,3 \div 0,6$
$7 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^{11}$	2800	2200	$1,2 \cdot 10^3$	$(2 \div 4) \cdot 10^7$	$(1 \div 3) \cdot 10^5$	$0,4 \div 0,7$
$10^6$	$5 \cdot 10^{10}$	3000	2500	$7 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^5$	1
$3 \cdot 10^6$	—	—	—	—	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^4$	4
$(3-4) R_3$	—	—	—	—	$10^6$	$2 \cdot 10^4$	30

На относительно низких орбитах (несколько сот км) располагаются космические станции, спутники для мониторинга Земли, орбиты балли-



стических ракет и другие объекты. На орбитах в несколько радиусов Земли находятся спутники связи. На этих высотах их период обращения совпадает с периодом обращения Земли вокруг оси.

**Пример 2.** Плазма, истекающая из двигателей малой тяги.

Среди плазменных электроракетных двигателей (ЭРД) в настоящее время нашли практическое применение четыре типа двигателей, которые называются в отечественной литературе плазменно-ионными двигателями (ПИД), двигателями с замкнутым дрейфом электронов (ДЗДЭ), электродуговыми (ЭДД) и импульсными плазменными двигателями (ИПД).

В СССР и России наибольший прогресс был достигнут в разработке плазменных ДЗДЭ, представленных двумя разновидностями: так называемым двигателем с анодным слоем (ДАС) и стационарным плазменным двигателем (СПД).

Принципиальная схема двигателя с анодным слоем (ДАС) была предложена в 1961 г. сотрудником ИАЭ А. В. Жариновым, и, начиная с 1962 г., разработки ДАС были начаты в Центральном научно-исследовательском институте машиностроения (ЦНИИМАШ), где они продолжают и в настоящее время [21]. В результате уже к середине 1970-х годов были созданы и испытаны уникальные образцы двухступенчатых ДАС, способные эффективно работать на различных рабочих веществах при мощностях до 100 кВт и скоростях истечения до 80 км/с [22, 23].

Описанные разработки были ориентированы на создание мощных маршевых энергосиловых установок для обеспечения энергоемких космических полетов тяжелых космических аппаратов. Однако к середине 1970-х годов стало ясно, что создание таких энергосиловых установок потребует значительных затрат сил, времени и средств. Поэтому в этот период наряду с двухступенчатыми ДАС в ЦНИИМАШ были начаты разработки одноступенчатых ДАС, рассчитанных на работу при мощностях ~1 кВт. Один из образцов такого ДАС в конце 1990-х годов успешно прошел летные испытания в составе американского искусственного спутника Земли (ИСЗ) [24]. Но в силу ряда причин разработка летных образцов ДАС отстала от соответствующих разработок ПИД и СПД.

Разработка и исследование первых лабораторных образцов СПД были осуществлены в Институте атомной энергии имени И. В. Курчатова

ва (ИАЭ) под руководством профессора А. И. Морозова в первой половине 1960-х годов, а в 1972 г. сотрудниками ИАЭ, ОКБ «Заря», ОКБ «Факел» и ВНИИЭМ были проведены первые и очень успешные летные испытания этого двигателя на борту ИСЗ «Метеор» [24], продемонстрировавшие эффективность управления движением ИСЗ с помощью этого двигателя и давшие мощный толчок развитию работ в СССР по этому двигателю. Последующая интенсивная работа ИАЭ, ОКБ «Факел», ВНИИЭМ, МАИ, ЦИАМ и ряда других организаций позволила создать летные образцы СПД и двигательных установок на их основе для систем коррекции орбит ИСЗ с достаточно высокими характеристиками, и началось серийное их производство в ОКБ «Факел», ставшем ведущим предприятием в СССР и России по разработке ЭРД и двигательных установок на их основе. Началось также и их регулярное применение в составе отечественных ИСЗ [24]. В последние годы СПД разработки ОКБ «Факел» начали применяться и в составе зарубежных космических аппаратов [24].

Общий вид серийного двигателя типа СПД-100 разработки ОКБ «Факел» и принципиальная схема СПД представлены на рис. I.1.1.

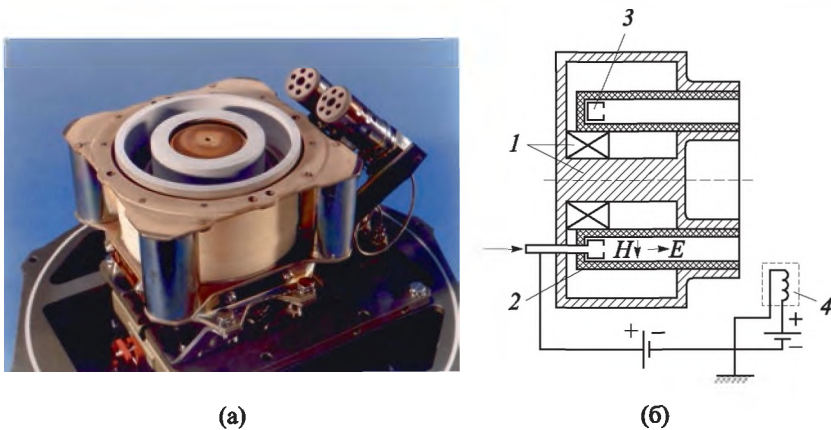


Рис. I.1.1. Общий вид двигателя СПД-100 (а) и принципиальная схема СПД (б)

Двигатель работает следующим образом. Рабочий газ (ксенон) подается в ускорительный канал двигателя, выполненный в виде кольцевой щели в разрядной камере 2, через кольцевой анод — газораспределитель.

Разрядное напряжение прикладывается между анодом и расположенным вне разрядной камеры катодом 4. В результате в ускорительном канале создается продольное (от анода к выходу из канала) электрическое поле. В этом же канале с помощью магнитной системы с одной или несколькими катушками намагничивания и магнитопроводящими элементами создается преимущественно радиальное магнитное поле. Таким образом, в потоке рабочего газа, движущемся от анода к выходу из канала, зажигается разряд в скрещенных электрическом и магнитном полях. Величина напряженности магнитного поля и плотность потока рабочего газа подбираются таким образом, чтобы электроны были замагничены, т. е. чтобы ларморовский радиус электронов был существенно меньше продольных размеров (длины) ускорительного канала, а частота столкновений электронов с атомами и ионами была существенно меньше циклотронной частоты электронов. В то же время уровень напряженности магнитного поля в СПД выбирается таким, что ларморовский радиус ионов значительно больше длины канала, т. е. ионы оказываются незамагниченными. В рассмотренных условиях усредненное движение электронов представляет собой так называемый электрический дрейф, и оно происходит преимущественно в азимутальном (перпендикулярном электрическому и магнитному полям) направлении, создавая почти замкнутый азимутальный (называемый многими «холловским») ток. Это и объясняет название СПД (и ДАС) как двигателя с замкнутым дрейфом электронов. Под действием электрического поля и в результате столкновений с атомами, ионами и стенками канала, а также вследствие турбулентных возмущений параметров плазмы из-за колебаний дрейфующие электроны постепенно диффундируют к аноду, набирая энергию от электрического поля. Многократно пронизывая поток атомов, они могут достаточно эффективно ионизировать их, а образовавшиеся ионы могут быть ускорены электрическим полем до достаточно больших скоростей. И в результате большого цикла исследований и разработок, выполненных при участии многих организаций, к настоящему времени удалось создать двигатели, обладающие тяговой эффективностью (30–60) % в наиболее востребованном в настоящее время диапазоне скоростей истечения (10–30) км/с и достаточно большим ресурсом (до 10000 часов и более).

Величина продольного электронного тока при фиксированных остальных параметрах оптимизируется подбором топологии и индукции

магнитного поля таким образом, чтобы обеспечивалась достаточно полная ионизация потока рабочего газа при минимально достижимой величине продольного электронного тока. Ионы ускоряются электрическим полем, их скорость определяется пройденной ими разностью потенциалов, как и в ионном двигателе. Однако принципиальным отличием СПД и ДАС от ионного двигателя является то, что ускорение ионов в нем осуществляется электрическим полем в квазинейтральной плазме, т. е. отсутствует ограничение плотности ионного тока пространственным зарядом ионов. Поэтому в СПД (и ДАС) удастся реализовать существенно большие плотности тока и тяги по сравнению с ионными двигателями и при заметно более низких разрядных напряжениях. Так, типичные значения разрядного напряжения в современных СПД составляют 200–1000 вольт. При работе на ксеноне удастся получить плотности тока в ускорительном канале двигателя  $\sim 10^3 \text{ А/м}^2$ .

Авторами пособия проводились исследования потока разреженной плазмы, истекающей из СПД-100 [20]. На рис. I.1.2 приведена зависимость температуры электронов от угловой координаты. Из рисунка следует, что  $T_e$  достигает  $\sim 10^4 \text{ К}$ . Незначительный провал в центральной части возникает по конструктивным причинам. Из рисунка I.1.1 видно, что в осевой части двигателя находится магнитная система, а поток плазмы имеет кольцевую симметрию.

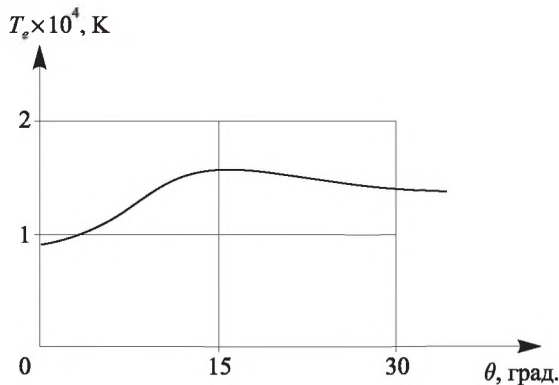


Рис. I.1.2. Зависимость температуры электронов от угловой координаты

$$(U_{\text{разряда}} = 800 \text{ В}, u_{\text{и}} = 20 \text{ км/с}, T_i = 5 \cdot 10^3 \text{ К})$$

На рисунке I.1.3 представлены кривые распределения концентрации заряженных частиц вдоль радиуса струи. Эксперимент показал, что источник плазмы и истекающий из него поток окружены фоновой плазмой с концентрацией  $(n_{i,e})_{\text{фон}} \sim 5 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$ . Концентрация в потоке достигает на оси  $(n_{i,e})_{\text{поток}} \sim 2 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$ . Такая струя в литературе называется затопленной.

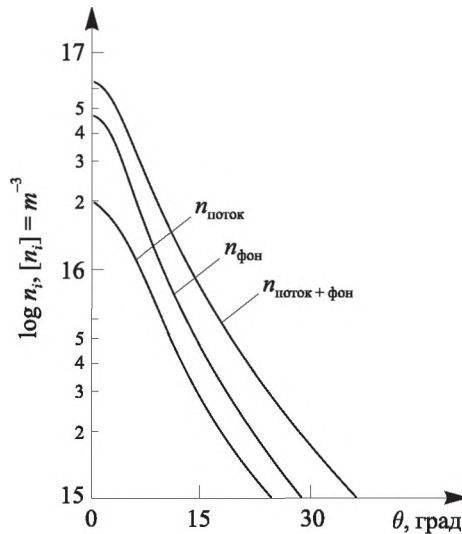


Рис. I.1.3. Зависимость концентрации ионов потока и фона от угловой координаты ( $U_{\text{разряда}} = 800 \text{ В}$ ,  $u_{\infty} = 20 \text{ км/с}$ ,  $T_i = 5 \cdot 10^3 \text{ К}$ )

### Пример 3. Плазменный катод в ЭРД.

В магнетоплазодинамических двигателях коаксиального и торцевого типа создается дуга низкого давления. Давление в разрядной камере — менее 1 мм рт. ст., температура  $T \sim 3000 \text{ К}$ . Ток разряда изменяется в широких пределах от нескольких ампер до десятков килоампер. Дуга зажигается при напряжении в несколько десятков вольт. Катод в дуге разогревается до температур, при которых возникает термоэмиссия электронов с его поверхности. Благодаря высокой температуре в дуговом разряде происходит ионизация рабочего вещества и образуется плазма,

которая ускоряется под действием электромагнитных сил и, истекая из сопла, образует струю плазмы. Скорость истечения достигает нескольких десятков километров в секунду. Разработка таких двигателей была инициирована С. П. Королёвым в 60-х годах прошлого столетия и проводилась в Московском авиационном институте и других организациях. Двигатели предполагалось использовать для полета на Марс и другие планеты Солнечной системы. Поскольку время полета могло составлять несколько месяцев и даже лет, особое внимание уделялось ресурсу двигателя. Самым слабым местом был катод, который должен был работать в напряженном режиме и часто выходил из строя. Поэтому возникла идея заменить катод потоком плазмы, образуемой с помощью высокочастотного разряда (ВЧ). Такая идея приводила к усложнению конструкции двигателя, но существенно повышала надежность его работы. ВЧ-разряд создаётся с помощью переменного электрического поля (ВЧЕ-разряд) или переменного магнитного поля (ВЧН-разряд). В случае ВЧЕ-разряда наиболее часто употребляемая частота —  $\omega = 0,86 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ , которая на несколько порядков меньше эффективной частоты столкновений электронов с атомами  $\nu_m$ . Поэтому в осциллирующем поле  $E = E_0 \sin \omega t$  электроны совершают так называемое дрейфовое движение по скорости [25]

$$v_d = -\frac{eE(t)}{m_e \nu_m}. \quad (I.1.6)$$

Дрейфовой скоростью ионов можно пренебречь ввиду их относительно большой массы. При тиричных условиях разряда основная часть разрядного промежутка квазинейтральна. Однако около электродов электронный ток, совершая колебания относительно «неподвижных» ионов, образует приэлектродный объемный заряд.

Основные физические процессы в сильноточном ВЧЕ-разряде — электронные и ионные лавины в приэлектродных слоях. Концентрация заряженных частей в ВЧЕ-разряде регулируется напряжением и током разряда, она также зависит от молярной массы плазмообразующего газа и геометрии разрядного устройства.

В случае ВЧН-разряда разрядная камера помещается в катушку соленоида, ток в котором меняется с высокой частотой и образует высоко-

частотное переменное магнитное поле [26, 27]. Последнее, согласно закону Фарадея, создает высокочастотное переменное электрическое поле.

### 1.1.3. Молекулярно-кинетическое описание разреженной плазмы

Кинетическое описание плазмы, в том числе и пристеночной, осуществляется в фазовом пространстве, где каждая частица характеризуется тремя координатами  $(x, y, z)$  и тремя скоростными координатами  $(v_x, v_y, v_z)$ . Для сокращения записи любая функция от шести переменных записывается так:  $F(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = F(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ . В общем случае, если система частиц эволюционирует со временем, функция  $F$  записывается так:  $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ .

В практически важных случаях концентрация заряженных частиц составляет  $(10^{12} + 10^{20})\text{м}^{-3}$ . Поэтому нет возможности проследить движение каждой частицы со временем и приходится использовать статистические подходы. В условиях равновесия зависимость от координат отсутствует и вводится функция распределения частиц по скоростям  $f(v_x, v_y, v_z) = f(\mathbf{v})$ . Выясним смысл этой функции.

Для упрощения исследуем зависимость функции распределения только от одной координаты  $v_x$  ( $-\infty \leq v_x \leq +\infty$ ). На оси  $v_x$  выберем интервал  $dv_x$  и посмотрим, от чего зависит число частиц  $dn$ , скорость которых по оси  $v_x$  попала в интервал  $dv_x$ . По смыслу можно записать

$$\left. \begin{aligned} dn &\sim dv_x, \\ dn &\sim n, \\ dn &\sim f(v_x). \end{aligned} \right\} \quad (1.1.7)$$

Первые две зависимости очевидны, а третья зависимость означает, что  $dn$  зависит от места нахождения интервала  $dv_x$  на оси  $v_x$ . Например, из теории относительности следует, что при скоростях больше скорости света частиц нет и  $dn = 0$ .

Воспользуемся теоремой умножения вероятностей, согласно которой вероятность совершения двух независимых событий равна произве-

дению вероятностей каждого из событий. Так как все три выражения в (I.1.7) являются независимыми, то

$$dn \sim dv_x n f(v_x).$$

Если пропорциональность заменить равенством, то появляется размерный коэффициент

$$dn = A dv_x n f(v_x).$$

Поскольку функция  $f(v_x)$  пока не определена, коэффициент  $A$  можно ввести в функцию  $f(v_x)$ :

$$dn = f(v_x) n dv_x, \text{ или} \\ \frac{dn}{n} = f(v_x) dv_x. \quad (\text{I.1.8})$$

Из (I.1.8) следует, что  $f(v_x) dv_x$  есть доля частиц, составляющая скорости которых  $v_x$  попала в интервал скоростей  $dv_x$ . На языке теории вероятности  $f(v_x) dv_x$  есть вероятность попадания частицы со скоростью  $v_x$  в интервал  $dv_x$ , а сама функция  $f(v_x) = \frac{dn}{n dv_x}$  называется плотностью вероятности.

Путем аналогичных рассуждений можно найти функцию распределения  $f(v_y)$  и  $f(v_z)$ . Поскольку  $f(v_x)$ ,  $f(v_y)$ ,  $f(v_z)$  есть независимые события, то по теории умножения вероятностей имеем

$$f(v_x, v_y, v_z) = f(\vec{v}) = f(v_x) f(v_y) f(v_z). \quad (\text{I.1.9})$$

Дифференциальное уравнение для нахождения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  впервые было получено Л. Больцманом в 1872 г. [28]

$$\frac{Df(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{Dt} = J^{\text{ст}},$$

где  $\frac{Df}{Dt}$  — субстанциональная производная,  $J^{\text{ст}}$  — интеграл столкновений.



Развернем  $\frac{Df}{Dt}$  через частные производные:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = J^{\text{ст}}. \quad (\text{I.1.10})$$

В (I.1.10)

$$\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = v_x \frac{df}{dx} + v_y \frac{df}{dy} + v_z \frac{df}{dz};$$

$$\mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = F_x \frac{df}{dv_x} + F_y \frac{df}{dv_y} + F_z \frac{df}{dv_z}.$$

$\mathbf{F}$  — внешняя сила, действующая на частицы, например, со стороны внешних электромагнитных полей. Если учитывается сила межчастичного взаимодействия  $F_{\alpha\alpha}$ , то  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{вн}} + \mathbf{F}_{\alpha\alpha}$ ,  $\alpha = i, e$ .

Интеграл столкновений  $J^{\text{ст}}$  в дальнейших расчетах нам не потребуется. Его выражение можно найти в [28].

Кинетическое уравнение Больцмана играет огромную роль в физике, особенно в гидродинамике, в теории процессов переноса, в космологии. Однако с момента своего создания и до настоящего времени больцмановская физическая кинетика, основанная на уравнении (I.1.10), подвергается критике ввиду имеющихся внутренних противоречий. Отметим некоторые из них, основываясь на анализе, проведенном Б. В. Алексеевым [29–32].

1. Уравнение Больцмана справедливо для масштаба времени  $\tau_\lambda$  ( $\tau_\lambda$  — время между столкновениями частиц) и  $\tau_\Gamma$  ( $\tau_\Gamma$  — гидродинамическое время течения), но оно не работает на временах  $\tau_b$  ( $\tau_b$  — время взаимодействия сталкивающихся частиц). Поэтому ряд физических явлений, в которых существенен масштаб времени  $\tau_b$ , выпадает из рассмотрения. Это, в частности, касается теоретических основ современных нанотехнологий.

2. Обычно одночастичная функция распределения, входящая в (I.1.10), нормируется на число частиц в единице объема. Если частицы рассматривать как материальные точки, то такая нормировка возможна. Но при вычислении интеграла столкновений, например с использованием модели твердых сфер, необходимо знать сечения столкновений, т. е.

рассматривать частицы конечного размера. Попадание центра масс частицы в контрольный объем не означает, что вся частица находится в этом объеме. В произвольный момент времени всегда найдутся частицы, которые располагаются частично внутри, а частично снаружи контрольной поверхности, что ведет к флуктуациям массы, а следовательно, и других гидродинамических величин. Возможность таких флуктуаций уравнение (I.1.10) не предусматривает.

3. Из кинетического уравнения Больцмана вытекают гидродинамические уравнения неразрывности, движения и энергии. Последнее при некоторых предположениях может быть сведено к уравнению теплопроводности параболического типа, связывающему первую производную от температуры по времени и вторую производную по координатам. Его решение показывает, что импульс температуры, созданный в источнике, может дать скачок температуры в любой достаточно удаленной точке за бесконечно малый интервал времени. Это означает, что происходит бесконечно быстрое распространение теплоты, что абсурдно с молекулярно-кинетической точки зрения. Физики «исправили» это противоречие, введя в уравнение теплопроводности вторую производную по времени и сведя тем самым его к уравнению гиперболического типа. «Исправленное» уравнение приводит к конечным скоростям тепловых возмущений. Такое «исправление» неизбежно ведет к новой гидродинамической теории, которая, в свою очередь, должна быть следствием кинетического уравнения, отличающегося от уравнения Больцмана (I.1.10).

Приведенных примеров достаточно, чтобы обосновать необходимость вывода более общего уравнения, чем уравнение (I.1.10), которое было бы лишено указанных противоречий. Среди большого числа попыток создания обобщенного уравнения Больцмана наиболее последовательное и логически обоснованное, с нашей точки зрения, принадлежит Б. В. Алексею [20–23]. Ниже будут коротко изложены основные идеи и выводы, вытекающие из работ Б. В. Алексея. (Впервые работа Б. В. Алексея была доложена на лекциях по физической кинетике, прочитанных для научных сотрудников Софийского университета в 1987 году, а в 1988 году опубликована в тезисах доклада на седьмом совещании по механике реагирующих сред (Красноярск).) При выводе обобщенного кинетического уравнения были учтены все три характерных масштаба

(от масштабов времени перейдем к масштабам длины, умножив масштаб времени на масштаб скорости):

- $r_b = l$  — масштаб взаимодействия, где  $l$  — длина Ландау, на которой кинетическая энергия теплового движения  $kT$  равна потенциальной энергии взаимодействия зарядов:

$$kT = e^2/(4\pi\epsilon_0 l) \rightarrow l = e^2/(4\pi\epsilon_0 kT);$$

- $r_\lambda = \lambda$  — средняя длина свободного пробега;
- $r_\Gamma = L$  — гидродинамический масштаб, например диаметр трубы, в которой течет газ.

Обычно

$$r_b \ll \lambda \ll L. \quad (I.1.11)$$

Как и в случае классического уравнения Больцмана (I.1), вывод обобщенного уравнения начинается с уравнения Лиувилля для  $N$ -частичной функции распределения

$$\partial f_N / \partial t + \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot (\partial f_N / \partial \mathbf{r}_i) + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot (\partial f_N / \partial \mathbf{v}_i) = 0. \quad (I.1.12)$$

Затем применяется метод Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона (ББГКИ) [33]. Безразмерные уравнения для  $S$ -частичной функции распределения  $f_S$  записываются с использованием пространственного масштаба  $r_b$ . Далее применяется метод многих масштабов [34]. В данном случае имеется три характерных масштаба:  $r_b = l$ ,  $r_\lambda = \lambda$ ,  $r_\Gamma = L$ . В методе многих масштабов  $\hat{f}_S$  представляется в виде асимптотического ряда:

$$\hat{f}_S = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}_S^j(\hat{t}_e, \hat{\mathbf{r}}_{iB}, \hat{\mathbf{v}}_{iB}; \hat{t}_\lambda, \hat{\mathbf{r}}_{i\lambda}, \hat{\mathbf{v}}_{i\lambda}; \hat{t}_L, \hat{\mathbf{r}}_{iL}, \hat{\mathbf{v}}_{iL}) \epsilon^j, \quad (I.1.13)$$

в котором  $\hat{f}_S^j$  зависит от всех трех групп переменных. Крышка сверху означает безразмерную величину (в дальнейшем будет опускаться).  $\epsilon^j$  — малый параметр ( $\epsilon = nr_b^3$  — число частиц в объеме взаимодействия).

Далее осуществляется стандартная процедура перехода к одночастичной функции распределения, в результате чего получается обобщенное уравнение Больцмана для слабоионизованного газа, которое принято называть уравнением Алексева:

$$Df_\alpha/Dt - D/Dt(\tau_{\alpha\alpha} \cdot Df_\alpha/Dt) = J_{\alpha\alpha}, \quad \alpha = i, e. \quad (I.1.14)$$

В (1.14)  $\tau_{\alpha a}$  — среднее время между столкновениями нейтральных (а) и заряженных ( $\alpha$ ) частиц. Интеграл столкновений  $J_{\alpha a}$  остается в больцмановской форме.

Рассмотрим случай максвелловского закона взаимодействия между заряженными и нейтральными частицами, когда сила межмолекулярного взаимодействия обратно пропорциональна пятой степени расстояния:

$$F_{\alpha a} = \chi_{\alpha a}/r^5. \quad (I.1.15)$$

В этом случае  $\tau_{\alpha a}$  может быть вычислено [17]:

$$\tau_{\alpha a} = [0,422 \cdot 2\pi(\chi \cdot (m_\alpha + m_a)/(m_\alpha \cdot m_a))^{1/2} \cdot n_a]^{-1}. \quad (I.1.16)$$

Если ввести

$$A = (8/3)(\pi)^{1/2}\Gamma(5/2)0,422(m_\alpha + m_a)^{-1}(\chi/(m_a \cdot M))^{1/2}, \\ M = m_\alpha/(m_\alpha + m_a), \quad (I.1.17)$$

то частота столкновений  $\nu$  заряженных и нейтральных частиц может быть представлена в виде

$$\nu = n_a(m_\alpha + m_a) \cdot A, \quad (I.1.18)$$

при этом  $\tau_{\alpha a} = \nu^{-1}$ .

Обобщенное уравнение Больцмана в данном случае записывается следующим образом:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \mathbf{F}_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha} - \\ - \tau_{\alpha a} (\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2} + 2 \mathbf{F}_\alpha \cdot \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha \partial t} + \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\alpha \partial \mathbf{v}_\alpha} : \mathbf{F}_\alpha \mathbf{F}_\alpha) = J_{\alpha a}. \quad (I.1.19)$$

Здесь двоеточие означает двойное скалярное произведение тензоров.

Более подробная информация об истории возникновения нелокальной физики и ее физических основах имеется в приложении 1.

#### 1.1.4. Система уравнений Максвелла

Внешнее электрическое поле, входящее в уравнения (I.1.10), (I.1.19) (а также силы, возникающие в магнитном поле, если оно существует), определяются решением системы дифференциальных уравнений Максвелла [35]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}_{\text{пр}} + \partial \mathbf{D} / \partial t, \end{aligned} \quad (\text{I.1.20})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{j}_{\text{пр}} = \sigma \mathbf{E}.$$

В случае использования обобщенного уравнения Больцмана (уравнения Алексеева) система уравнений Максвелла должна быть модифицирована. Ее традиционная формулировка (I.1.20) не содержит уравнения неразрывности, однако получена с его использованием:

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{пр}} = 0, \quad (\text{I.1.21})$$

где  $\rho$  — заряд единицы объема,  $\mathbf{j}_{\text{пр}}$  — плотность тока проводимости. Величины  $\rho$  и  $\mathbf{j}_{\text{пр}}$  получены без учета флуктуаций плотности, возникающих вследствие конечных размеров элементарных зарядов. Если учесть флуктуации, то в уравнениях (I.1.20) следует писать так:  $\rho = \rho_{\text{ср}} - \rho^*$ ;  $\mathbf{j}_{\text{пр}} = \mathbf{j}_{\text{ср}} - \mathbf{j}^*$ , где  $\rho^*$  и  $\mathbf{j}^*$  вычисляются в рамках обобщенной больцмановской теории [23].

Как показано в [11], в случае зондовых задач зондовые токи достаточно малы, и их магнитными полями можно пренебречь. В этих условиях процессы переноса заряда определяются электрическим полем, зависящим от потенциала зонда и пристеночного слоя объемного заряда. Поэтому система уравнений Максвелла сводится к уравнению Пуассона:

$$\Delta \varphi = e(n_e - n_i) / \varepsilon_0, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (\text{I.1.22})$$

где  $\varphi$  — потенциал самосогласованного электрического поля,  $n_{i,e}$  — концентрации заряженных частиц,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

### Примеры решения задач

1. Найти значение средней длины свободного пробега молекул у поверхности Земли при нормальных условиях и на высоте 100 км от поверхности Земли. Эффективный диаметр молекул принять равным  $3 \cdot 10^{-10}$  м. С целью упрощения расчетов будем предполагать, что температура при удалении от Земли остается постоянной. Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

*Решение.*

Формула для среднего пробега молекул из курса общей физики:

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d_{\text{эф}}^2 P} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^2}{1,43 \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 10^{-20} \cdot 10^5} \approx 10^{-7} \text{ м}.$$

По условию задачи с высотой меняется только давление. Согласно барометрической формуле

$$P(h) = P_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}} = 10^5 \cdot e^{-\frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^5}{8,31 \cdot 310^2}} \approx 0,036 \text{ М},$$

где  $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$  — молярная масса молекул воздуха,  $h = 100$  км.

Ответ: длина пробега на высоте  $h = 100$  км примерно на 5 порядков больше, чем у Земли.

2. Рассчитать значения радиуса Дебая на срезе сопла электроракетного двигателя, если концентрация ионов на срезе сопла равна  $10^{17} \text{ м}^{-3}$ , а температура  $T_j = 3 \cdot 10^3 \text{ К}$ :

$$r_d = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T_j}{n_i e^2}} = \sqrt{\frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^3}{10^{17} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}} = 10^{-5} \text{ м}.$$

При расчёте учтено, что  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ ,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ ,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ .

### Контрольные вопросы к главе I.1

1. Что называется плазмой?
2. Что называется газовым разрядом?
3. Какой физический смысл имеет радиус Дебая?
4. Как определяется частота ленгмюровских колебаний?
5. При каких условиях справедливо кинетическое уравнение Больцмана?
6. В чем отличие локальной физики от нелокальной?
7. Почему кинетическое уравнение Алексеева справедливо на масштабах столкновения, а уравнение Больцмана не справедливо?
8. При каких условиях система уравнений Максвелла сводится к уравнению Пуассона?
9. Какое кинетическое уравнение и почему справедливо в задачах нанотехнологий?
10. Каков физический смысл параметра  $\tau$ , входящего в кинетическое уравнение Алексеева?

## **Глава I.2. Математические модели бесстолкновительной пристеночной плазмы**

### **I.2.1. Модель Власова–Пуассона**

В случае разреженной плазмы средняя длина пробега частиц в плазме  $\lambda$  много больше характерного размера  $d$ :  $\lambda \gg d$ . Если ввести в рассмотрение число Кнудсена ( $Kn$ ), равное отношению  $\lambda$  к  $d$ , то  $Kn = \frac{\lambda}{d} \gg 1$ . В этих условиях роль столкновений незначительна, поэтому правая часть уравнения Больцмана (или уравнение Алексева) обращается в нуль. Кинетическое уравнение с нулевой правой частью в литературе именуется уравнением Власова. Поэтому математическая модель бесстолкновительной пристеночной плазмы включает кинетические уравнения Власова для ионов и электронов и уравнение Максвелла с системой начальных и граничных условий. В большинстве случаев авиационно-космических приложений система уравнений Максвелла сводится к уравнению Пуассона.

В общем случае данная система уравнений оказывается шестимерной и нестационарной. Если ориентироваться на настольные компьютеры типа Pentium, то их возможности недостаточны для решения таких задач. Для сокращения размерности задач используются свойства симметрии или другие дополнительные условия. Поэтому в практических приложениях решаются трехмерные нестационарные и четырехмерные нестационарные задачи. Поскольку компьютерная техника бурно развивается (например, появляются возможности параллельного счета), можно ожидать, что в ближайшей перспективе предложенные в пособии численные методы будут пригодны и для решения 5–6-мерных задач.

Ниже приводятся математические модели задач бесстолкновительной пристеночной плазмы для тел плоской, цилиндрической и сферической геометрии.

#### **Бесстолкновительная плазма вблизи заряженной плоскости**

Запишем полную систему уравнений применительно к плоскому изолированному электроду ленточного типа, активная поверхность которого ориентирована параллельно потоку (рис. I.2.1).

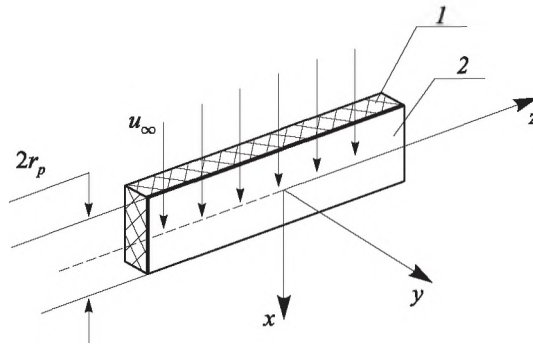


Рис. I.2.1. Плоский изолированный электрод ленточного типа, ориентированный параллельно потоку:  
1 — диэлектрик, 2 — активная поверхность зонда

Обратная сторона электрода и его боковые части изолированы от плазмы. Взаимодействует с плазменным потоком, имеющим направленную скорость  $u_\infty$ , только активная часть электрода (2). В декартовой системе координат ось  $Z$  направляем вдоль удлиненной стороны прямоугольника, ось  $X$  — вдоль вектора скорости потока плазмы, который параллелен пластине, ось  $Y$  — по нормали к пластине.

Размер короткой стороны прямоугольника —  $2r_p$ , его потенциал —  $\phi_p$ . Если имеется магнитное поле, то для сохранения размерности задачи оно должно быть направлено вдоль оси  $Z$ . В данной постановке задача оказывается четырехмерной в фазовом пространстве. В общем случае задача имеет шесть фазовых переменных ( $x, y, z, v_x, v_y, v_z$ ). Однако при условии, что длина пластины намного превышает ее ширину  $2r_p$ , имеет место сдвиговая симметрия:

$$\frac{\partial f_{i,e}}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0.$$

В результате получим  $E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$ ,  $E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$ ,  $E_z = 0$ .

Уравнения движения имеют следующую форму:

$$\dot{x} = v_x, \dot{y} = v_y, \dot{z} = v_z;$$



$$\dot{v}_x = \frac{q_{i,e}}{m_{i,e}} E_x, \quad \dot{v}_y = \frac{q_{i,e}}{m_{i,e}} E_y, \quad \dot{v}_z = \frac{q_{i,e}}{m_{i,e}} E_z = 0.$$

Следовательно,  $v_z = \text{const}$  и функции распределения сохраняют начальную зависимость по  $v_z$ . Поэтому можно перейти к распределениям  $f_{i,e}(t, x, y, v_x, v_y)$ . Система уравнений Власова–Пуассона принимает вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_i}{\partial y} + \frac{q_i}{m_i} \left( E_x \frac{\partial f_i}{\partial v_x} + E_y \frac{\partial f_i}{\partial v_y} \right) = 0, \quad (1.2.1)$$

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_e}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_e}{\partial y} + \frac{q_e}{m_e} \left( E_x \frac{\partial f_e}{\partial v_x} + E_y \frac{\partial f_e}{\partial v_y} \right) = 0, \quad (1.2.2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n_i), \quad E = -\nabla \phi. \quad (1.2.3)$$

К системе (1.2.1)–(1.2.3) следует добавить начальные и граничные условия. Для решения уравнений (1.2.1), (1.2.2) необходимо знать начальные функции распределения. Кроме того, должны быть заданы граничные условия для  $f_{i,e}$  на границах расчетной области. Для решения уравнения Пуассона (1.2.3) необходимо знать два граничных условия: значение  $\phi$  при  $r = r_p$  и его значение на внешней границе расчетной области, которое обычно полагается равным нулю. В качестве начальных ФРИ и ФРЭ часто выбирают равновесное распределение Максвелла

$$f_{i,e}(0, x, y, v_x, v_y, v_z) = n_\infty \left( \frac{m_{i,e}}{2\pi k T_{i,e}} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_{i,e}}{2k T_{i,e}} \left[ (u_\infty + v_x)^2 + v_y^2 + v_z^2 \right] \right\},$$

где  $n_\infty$  — концентрация заряженных частиц в невозмущенной электродеом плазме.

Учитывая сохранение начальной зависимости по  $v_z$ , можно провести факторизацию по плоскости и записать функции распределения в виде

$$f_{i,e}(t, x, y, v_x, v_y, v_z) = f_{i,e}(t, x, y, v_x, v_y) \pi^{-1/2} \exp \left( -\frac{m_{i,e} v_z^2}{2k T_{i,e}} \right).$$

После этого задача сводится к определению функции  $f_{i,e}(t, x, y, v_x, v_y)$  в четырехмерном фазовом пространстве  $(x, y, v_x, v_y)$ .

Начальное условие для  $f_{i,e}$  имеет вид

$$f_{i,e}(0, x, y, v_x, v_y) = n_{\infty} \pi^{-1} \left( \frac{m_{i,e}}{2kT_{i,e}} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_{i,e}}{2kT_{i,e}} \left[ (v_x + u_{\infty})^2 + v_y^2 \right] \right\}. \quad (I.2.4)$$

Как показали методические расчеты, начальные ФР мало влияют на окончательное решение, но существенно — на переходный процесс. Если необходимо знать точное значение начальных ФР, задачу решают дважды. На первом этапе в качестве начального берут максвелловское распределение. На втором этапе полученные на первом этапе функции распределения берут за начальные.

При таком подходе и конечный результат, и переходный процесс будут близкими к реальным.

Граничные условия на активной поверхности зонда зависят от физических процессов, которые там могут происходить. Если выполняется условие идеальной каталитичности, то отсутствуют потоки заряженных частиц от стенки в плазму. В реальных условиях вследствие фото-, вторичной или термоэмиссии возможно появление электронных потоков с поверхности зонда. ФР этих потоков достаточно хорошо изучены [36].

Если получено решение зондовой задачи (I.2.1)–(I.2.3) с соответствующими начальными и граничными условиями, то после этого подсчитываются моменты ФР. Приведем формулы для подсчета концентраций заряженных частиц и плотностей токов на зонд.

$$n_{i,e} = \left( \frac{2kT_{i,e}}{m_{i,e}} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{i,e}(x, y, v_x, v_y, t) dv_x dv_y, \quad (I.2.5)$$

$$j_{i,e} = \left( \frac{2kT_{i,e}}{m_{i,e}} \right)^{1/2} q_{i,e} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^0 f_{i,e}(x, y, v_x, v_y, t) v_y dv_x dv_y. \quad (I.2.6)$$

Рассмотрим теперь математическую модель плоского изолированного электрода, ориентированного навстречу потоку (рис. I.2.2).

Рисунок I.2.2 может быть получен из рис. I.2.1 путем поворота плоскости электрода относительно оси  $Z$  на угол  $90^\circ$ .

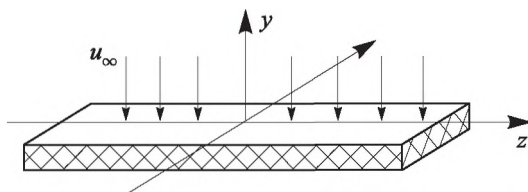


Рис. I.2.2. Плоский электрод ленточного типа, ориентированный навстречу потоку

Все условия, приведенные выше относительно зонда, ориентированного параллельно потоку, сохраняются и в данном случае.

Математическая модель включает систему уравнений (I.2.1)–(I.2.3).

Незначительные отличия появляются в записи начального распределения:

$$f_{i,e}(0, x, y, v_x, v_y) = n_\infty \pi^{-1} \left( \frac{m_{i,e}}{2kT_{i,e}} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_{i,e}}{2kT_{i,e}} \left[ v_x^2 + (v_y - u_\infty)^2 \right] \right\}, \quad (I.2.7)$$

эти отличия связаны с поворотом плоскости зонда вокруг оси  $Z$ .

На практике при проведении зондовых измерений в потоке разреженной плазмы часто используются плоские зонды в виде диска. Математическая модель для диска в фазовом пространстве оказывается пятимерной и с вычислительной точки зрения более громоздка, чем для случая зондов ленточного типа. Поэтому в пособии зондам в форме диска уделяется значительно меньшее внимание, чем зондам ленточного типа. Приведем систему уравнений Власова–Пуассона для плоского электрода в форме диска радиуса  $r_p$ . Если диск расположен поперек потока, удобно использовать цилиндрическую систему координат, ось  $Z$  которой совпадает с осью диска и направлена навстречу вектору направленной скорости плазмы  $u_\infty$ . Полярный угол  $\theta$  располагается в плоскости диска, и по

нему имеет место симметрия (рис. I.2.3)  $\frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$ .

Компоненты электрического поля следующие:

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad E_\theta = 0, \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

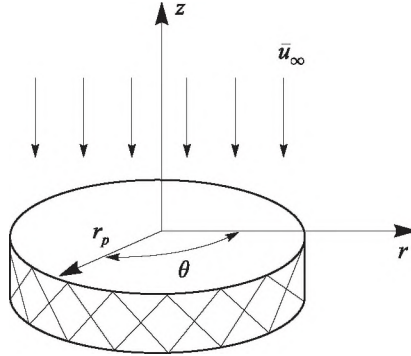


Рис. I.2.3. Плоский электрод в форме диска в поперечном потоке плазмы

Уравнения движения записываются так:

$$\dot{r} = v_r, \quad \dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r}, \quad \dot{z} = v_z;$$

$$\dot{v}_r = \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_r, \quad \dot{v}_\theta = -\frac{v_r v_\theta}{r}, \quad \dot{v}_z = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_z.$$

В этом случае система Власова–Пуассона имеет вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + v_z \frac{\partial f_\alpha}{\partial z} + \left( \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_r \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\theta}{r} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\theta} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_z \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum q_\alpha n_\alpha,$$

$$n_\alpha(r, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(r, z, v_r, v_\theta, v_z, t) dv_r dv_\theta dv_z, \quad (I.2.8)$$

$$f_\alpha(r, z, v_r, v_\theta, v_z, 0) = n_{\alpha\infty} \left( \frac{m_\alpha}{2\pi k T_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m_\alpha \left[ v_r^2 + v_\theta^2 + (v_z + u_\infty)^2 \right]}{2k T_\alpha} \right],$$

$$\phi(r_p, 0) = \phi_p, \quad \phi(r_\infty, z_\infty) = 0.$$

### Бесстолкновительная плазма вблизи заряженного цилиндра

Рассмотрим бесконечный заряженный цилиндр радиусом  $r_p$  и с потенциалом  $\phi_p$ , который расположен поперек набегающего потока

разреженной плазмы. Введем цилиндрическую систему координат так, чтобы ось  $z$  располагалась вдоль оси цилиндра, а вектор направленной скорости потока  $\mathbf{u}_\infty$  был ей перпендикулярен (рис. I.2.4).

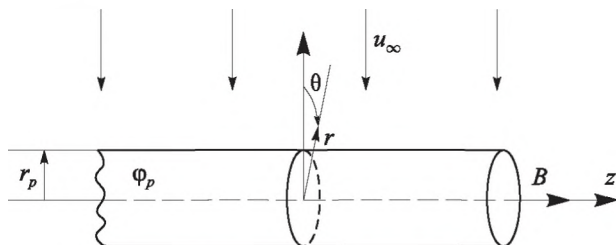


Рис. I.2.4. Расположение тела в потоке

Фазовыми переменными являются  $r, \theta, z, v_r, v_\theta, v_z$ . Функции распределения частиц и потенциала электрического поля инвариантны относительно оси  $z$ :  $\frac{\partial f_\alpha}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ . Наличие внешнего потока плазмы нарушает цилиндрическую симметрию возмущенной телом области. Сохраняется лишь симметрия относительно плоскости, содержащей вектора  $\mathbf{u}_\infty$  и ось  $\mathbf{z}$ . Компоненты напряженности электрического поля имеют вид

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad E_z = 0. \quad (1.2.9)$$

Запишем уравнения движения заряженных частиц в цилиндрической системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= v_r; \quad \dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r}; \quad \dot{z} = v_z, \\ \dot{v}_r &= \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_r; \quad \dot{v}_\theta = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_\theta - \frac{v_r v_\theta}{r}; \quad \dot{v}_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.10)$$

Из (I.2.10) следует, что  $v_z = \text{const}$ , поэтому  $f_\alpha$  сохраняет по переменной  $v_z$  свою начальную зависимость. В этих условиях уравнение Власова принимает вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} + \left( \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_r \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_r} + \left( \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_\theta - \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\theta} = 0. \quad (I.2.11)$$

В цилиндрической системе координат уравнение Пуассона имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum q_\alpha n_\alpha. \quad (I.2.12)$$

Если в качестве начальной функции распределения рассматривать максвелловские функции

$$f_\alpha(0, r, \theta, z, v_r, v_\theta, v_z) = n_{\alpha\infty} \left( \frac{m_\alpha}{2\pi k T_\alpha} \right)^{3/2} \times \\ \times \exp \left( -\frac{m_\alpha}{2k T_\alpha} \left[ (v_r + u_\infty \cos \theta)^2 + (v_\theta - u_\infty \sin \theta)^2 + v_z^2 \right] \right), \quad (I.2.13)$$

то можно провести факторизацию по плоскостям и, учитывая сохранение начальной зависимости по  $v_z$ , записать ФР в виде

$$f_\alpha(t, r, \theta, z, v_r, v_\theta, v_z) = f_\alpha(t, r, \theta, v_r, v_\theta) \pi^{-1/2} e^{-\frac{m_\alpha v_z^2}{2k T_\alpha}}. \quad (I.2.14)$$

После этого задача сводится к определению функции  $f_\alpha(t, r, \theta, v_r, v_\theta)$  в четырехмерном фазовом пространстве.

Уравнение Власова для  $f_\alpha$  совпадает с (I.2.11), а моменты ФР принимают вид

$$n_\alpha(r, \theta, t) = \left( \frac{2k T_\alpha}{m_\alpha} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(r, \theta, v_r, v_\theta, t) dv_r dv_\theta, \quad (I.2.15)$$

$$j_\alpha(t, \theta) = \left( \frac{2k T_\alpha}{m_\alpha} \right)^{1/2} q_\alpha \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(r_p, \theta, v_r, v_\theta, t) v_r dv_r dv_\theta, \quad (I.2.16)$$

$$I_\alpha(t) = r_p \int_0^{2\pi} j_\alpha(t, \theta) d\theta, \quad (I.2.17)$$

где  $j_\alpha(t, \theta)$  — плотность тока частиц сорта  $\alpha$ , а  $I_\alpha(t)$  — интегральный ток на единицу длины цилиндра.

Если в окрестности цилиндра создать внешнее однородное продольное магнитное поле  $B = B_z$ , то уравнение (I.2.11) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} + \left( \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_r + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} B v_\theta \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_r} + \\ + \left( \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_\theta - \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} B v_r \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\theta} = 0. \end{aligned} \quad (I.2.18)$$

### Бесстолкновительная плазма вблизи заряженной сферы

Рассматривается сферическое тело (рис. I.2.5) радиуса  $r_p$  и с потенциалом  $\Phi_p$ , помещенное в плазму с концентрациями заряженных частиц  $n_{i,e}$ . В плазме имеется направленная скорость величиной  $\mathbf{u}_\infty$ . Внешнее магнитное поле отсутствует, а собственное мало. Свяжем с центром сферы сферическую систему координат, как это показано на рис. I.2.5.

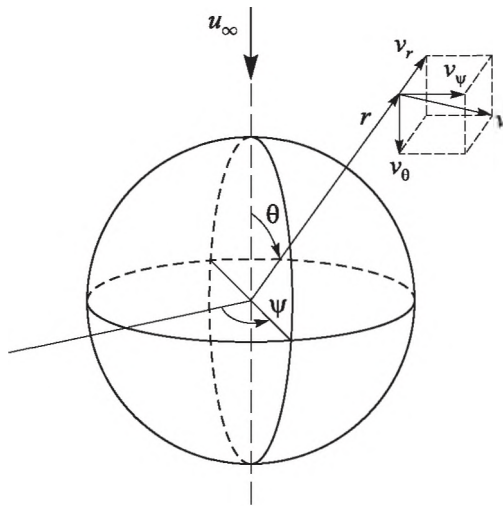


Рис. I.2.5. Схема обтекания сферы

Фазовыми переменными являются  $r, \psi, \theta, v_r, v_\psi, v_\theta$ . При данном выборе оси, по которой направлена скорость  $u_\infty$ , функция распределения частиц и потенциал инвариантны относительно вращения вокруг этой оси:  $\frac{\partial f_\alpha}{\partial \psi} = \frac{\partial \phi}{\partial \psi} = 0$ , где  $\alpha = i, e$ .

Следовательно, задача имеет осевую симметрию. Компоненты напряженности электрического поля заряженной сферы следующие:

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad E_\psi = 0.$$

Запишем уравнения движения частицы под действием электрического поля в сферических координатах [5]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= v_r; \dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r}; \dot{\psi} = \frac{v_\psi}{r \sin \theta}, \\ \ddot{r} &= \dot{v}_r = \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{v_\psi^2}{r} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_r, \\ \dot{v}_\theta &= -\frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\psi^2}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_\theta, \\ \dot{v}_\psi &= -\frac{v_r v_\psi}{r} - \frac{v_\theta v_\psi}{r} \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.19)$$

Учитывая (1.2.19), уравнение Власова для сферического тела в потоке плазмы запишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} + \left( \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{v_\psi^2}{r} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_r \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_r} + \\ & + \left( -\frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\psi^2}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_\theta \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\theta} + \\ & + \left( -\frac{v_r v_\psi}{r} - \frac{v_\theta v_\psi}{r} \operatorname{ctg} \theta \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\psi} = 0, \quad \text{где } \alpha = i, e. \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Уравнение Пуассона получим, записывая оператор Лапласа в сферических координатах:



$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_\alpha m_\alpha, \quad (I.2.21)$$

$$n_\alpha(t, r, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t, r, \theta, v_r, v_\theta, v_\psi) dv_r dv_\theta dv_\psi. \quad (I.2.22)$$

Плотность тока на поверхность сферы запишется так:

$$\left. \begin{aligned} j_\alpha &= q_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t, r_0, \theta, v_r, v_\theta, v_\psi) v_r dv_r dv_\theta dv_\psi, \\ \text{Полный ток на сферу:} \\ I_\alpha(t) &= 2\pi r^2 \int_0^\pi j_\alpha(t, r_0, \theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (I.2.23)$$

Начальная максвелловская функция распределения имеет вид

$$\begin{aligned} f_\alpha(0, r, \theta, v_r, v_\theta, v_\psi) &= \\ &= n_{\alpha\infty} \left( \frac{m_\alpha}{2\pi k T_\alpha} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{m_\alpha}{2k T_\alpha} \left[ (v_r + u_\infty \cos \theta)^2 + (v_\theta - u_\infty \sin \theta)^2 + v_\psi^2 \right] \right). \end{aligned} \quad (I.2.24)$$

Граничные условия для потенциала:

$$\Phi(r_p, t) = \Phi_0(t); \quad \Phi(r_\infty, t) = 0. \quad (I.2.25)$$

## I.2.2. Модель Алексеева–Пуассона

Кинетическое уравнение Б. В. Алексеева в случае разреженной плазмы имеет вид (I.1.14) с нулевой правой частью:

$$\frac{Df_\alpha}{Dt} - \frac{D}{Dt} \left( \tau \frac{Df_\alpha}{Dt} \right) = 0, \quad \text{где } \alpha = i, e; \quad (I.2.26)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_\alpha + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \cdot \frac{\mathbf{F}_\alpha}{m_\alpha}.$$

Параметр  $\tau$  есть среднее время между столкновениями. С использованием модели твердых сфер в [37] получена следующая формула для подсчета  $\tau$ :

$$\tau p = \Pi \eta, \quad (I.2.27)$$

где  $p$  — статическое давление,  $\eta$  — динамическая вязкость,  $\Pi = 0,8$ . В рамках модели твёрдых сфер в элементарной кинетической теории  $\Pi = 1$ . В общем случае значение параметра  $\Pi$  зависит от выбранной модели столкновений.

Входящее в модель Алексева–Пуассона уравнение Пуассона отличается от классического варианта тем, что в правой части плотность объемного заряда  $\rho$  должна быть заменена на  $\rho - \Delta\rho$ , где  $\Delta\rho$  есть следствие нелокальности.

В [32] сделан вывод формулы для расчета  $\Delta\rho$ :

$$\Delta\rho = \tau \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_\infty) \right], \quad (1.2.28)$$

где  $u_\infty$  — направленная скорость движения плазмы,  $\rho u_\infty$  — плотность потока импульса без учета флуктуаций.

Итак, математическая модель Алексева–Пуассона включает кинетические уравнения для компонент плазмы (1.2.27) и уравнение Пуассона в форме

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0}(\rho - \Delta\rho), \quad (1.2.29)$$

где  $\varphi$  — потенциал электрического поля,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная,  $(\rho - \Delta\rho)$  — плотность заряда с учетом влияния флуктуаций, где  $\Delta\rho$  определяется формулой (1.2.28).

Система уравнений (1.2.26)–(1.2.29) дополняется системой начальных и граничных условий, которые будут рассмотрены подробно в разделе I.2.3.

Модель Алексева–Пуассона (1.2.26), (1.2.29), записанная в общем виде, может быть представлена для частных случаев, когда пристеночная плазма находится около заряженной плоскости, цилиндра, сферы по аналогии с моделью Власова–Пуассона.

### **I.2.3. Начальные и граничные условия для задачи Власова–Пуассона и Алексева–Пуассона**

Начальные и граничные условия характеризуются достаточно большим разнообразием и зависят от физических процессов на поверх-

ности внесенных в плазму тел и параметров самой плазмы. Рассмотрим эти особенности на примере зондовых измерений, проводимых на космической станции, движущейся в ионосфере с первой космической скоростью. Напомним, что зонд — это проводящее тело цилиндрической, сферической или плоской формы, размером в несколько миллиметров, вносимое в заданную точку плазмы. Отметим некоторые особенности задачи.

- Около поверхности станции возникает возмущенная зона, в которой функции распределения заряженных частиц не максвелловские. С поверхности станции могут испускаться потоки нейтральных и заряженных частиц, в возмущенной зоне возникает распределение потенциала, образуется объемный заряд.
- У космической станции возмущенные зоны в лобовой части в боковой части и в теневой части существенно отличаются. Если в лобовой и боковой частях возмущенные зоны измеряются десятками радиусов Дебая, то в теневой области эта зона имеет несравненно больший размер, образуя характерный след.
- Условия на внешней границе зондовой задачи зависят от того, на каком расстоянии от поверхности станции располагается зонд. Если зонд выносится достаточно далеко от поверхности станции (выносной зонд), он попадает в невозмущенную станцией ионосферную плазму. Если зонд располагается вблизи поверхности станции (пристеночный зонд), он оказывается внутри возмущенной зоны станции, и тогда постановка граничных и начальных условий требует дополнительного исследования.

Поскольку характерный размер зонда на несколько порядков меньше размера космической станции, возмущенная зона от зонда намного меньше возмущенной зоны от станции. Поэтому граничные и начальные условия для зонда соответствуют параметрам возмущенной зоны от станции в точке расположения зонда.

**Граничные условия на зонде:**

$$r = r_p \text{ (индекс } p \text{ соответствует поверхности зонда);}$$

$$\Phi(r_p) = \Phi_p \text{ (потенциал } \Phi_p \text{ задается электрической цепью зонда);}$$

$$r = r_\infty \text{ (индекс } \infty \text{ относится к внешней границе расчетной области);}$$

$\varphi(r_\infty) = 0$  (потенциал на внешней границе расчетной области принимается за ноль).

Если зонд находится внутри возмущенной зоны станции, то  $\varphi(r_\infty) \neq 0$ . Этот потенциал, как правило, отрицательный и достигает по модулю величины менее одного вольта. Если требуется знать его точное значение, необходимо решить задачу Власова–Пуассона для всей станции.

Граничные условия для функции распределения определяются как значения ФР на границах расчетной области. В предположении идеальной каталитичности поверхности электрода поток заряженных частиц по нормали к ее поверхности полагается равным нулю.

### **Начальные условия**

Начальные функции распределения ионов и электронов в расчетной области, как правило, не известны. Из методических расчетов [11] следует, что начальное распределение слабо влияет на установившиеся значения ФР в процессе решения задачи Власова–Пуассона. Поэтому в качестве начальных ФР принимают максвелловские ФР со сдвигом на направленную скорость. Если необходимо знать не только установившиеся значения ФР, но и переходный процесс, то решение задачи Власова–Пуассона производят в два этапа. На первом этапе в качестве начального берут максвелловское распределение. В процессе решения задачи получают установившиеся ФР и на втором этапе берут их за начальные.

По начальным функциям распределения ионов и электронов рассчитываются поля концентраций заряженных частиц, которые входят в правую часть уравнения Пуассона. Решение этого уравнения позволяет получить начальное распределение потенциала.

Если зонд установлен в возмущенной зоне станции, то начальные функции распределения заряженных частиц получаются путем решения задачи Власова–Пуассона для самой станции. Если такого решения для нахождения начальных ФР проделать не удастся и используются, например, максвелловские ФР, то в зондовую теорию закладывается систематическая ошибка. Методические расчеты [4] показывают, что эта ошибка при вычислении концентрации заряженных частиц может достигать 50 % и более.

**Контрольные вопросы к главе I.2**

1. Как формулируется модель Власова–Пуассона для бесстолкновительной пристеночной плазмы вблизи заряженной плоскости, если направленная скорость плазмы параллельна плоскости?
2. В чем отличие модели Власова–Пуассона (п. 1), если направленная скорость плазмы перпендикулярна плоскости?
3. Как формулируется модель Власова–Пуассона для бесстолкновительной пристеночной плазмы вблизи заряженного цилиндра, если направленная скорость плазмы перпендикулярна оси цилиндра?
4. Как формулируется модель Власова–Пуассона для бесстолкновительной пристеночной плазмы вблизи заряженной сферы?
5. В чем отличие модели Алексеева–Пуассона от модели Власова–Пуассона?
6. Каков физический смысл параметра  $\tau$ , входящего в уравнение Алексеева, и как его подсчитать?
7. Как сформулировать граничные условия для задачи Власова–Пуассона?
8. Как формулируются начальные условия для задачи Власова–Пуассона?

## Глава I.3. Численные модели бесстолкновительной пристеночной плазмы

### I.3.1. Методы численного решения уравнения Власова

#### I.3.1.1. Классический метод характеристик

Математическая модель пристеночной плазмы — система дифференциальных уравнений Власова–Пуассона или Власова–Максвелла — это достаточно сложные системы нестационарных нелинейных дифференциальных уравнений, дополняемые нетривиальными начальными и граничными условиями, некоторые из которых являются существенно нелинейными или разрывными. Сложность задачи увеличивается при наличии направленных скоростей плазмы или внешних электромагнитных полей, приводящих к нарушению симметрии возмущенной зоны и многомерности фазового пространства.

Уравнение Власова — это квазилинейное уравнение первого порядка. Отметим, что обобщенное уравнение Власова — это уравнение второго порядка. Однако в данном разделе речь пойдет об уравнении Власова только первого порядка. Его общий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum a_i(x, v) \frac{\partial f}{\partial x_i} + b_i(t, x, v, f) \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0, \quad (I.3.1)$$
$$f(0, x, v) = f^0(x, v),$$

где  $x = x(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  — координаты,  $v = v(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$  — скорости.

Зависимость коэффициентов  $b_i$  от  $f$  появляется вследствие самосогласованного характера распределения частиц плазмы, когда сама функция распределения  $f$  определяет величины сил, действующих на частицы. Общая теория решения уравнений такого рода имеется в [38, 39], где изложены формальные принципы построения решения задачи Коши (I.3.1).

Рассмотрим векторное поле  $U$  с компонентами  $\{1, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$  и введем производную функции  $f$  по направлению этого поля. Тогда уравнение (I.3.1) запишется в виде

$$L_u f = 0, \quad (I.3.2)$$

где  $L_u$  — производная Ли.

Уравнению (I.3.2) или (I.3.1) соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений характеристик:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i^*}{dt} &= a_i(x^*, v^*), \quad i = \overline{1, n}, \\ \frac{dv_i^*}{dt} &= b_i(t^*, x^*, v^*, f^*), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (I.3.3)$$

Таким образом, нахождение решений квазилинейного уравнения (I.3.2) сводится к нахождению его характеристик, т. е. решений системы (I.3.3).

Общие принципы численной реализации метода характеристик для решения уравнения Власова разработаны в [40, 41]. Численный метод моделирует эволюцию функции распределения и содержит следующие основные этапы.

1. Введение ограниченного носителя функции распределения в фазовом пространстве. Разбиение носителя дискретной сеткой.

2. Выбор шага по времени, с которым производится пересчет функции распределения  $t^{s+1} = t^s + \Delta t$  ( $s$  — индекс времени).

3. Введение сеточных функций распределения  $f_{i_1, \dots, i_{2n}}^s$  ( $i_1, i_2, \dots, i_{2n}$  — индексы сетки по фазовым переменным), а также вспомогательных сеточных функций для коэффициентов кинетического уравнения.

4. Для определения  $(f)_{i_1, \dots, i_{2n}}^s$  на момент времени  $t^* = t^s$  производится численное решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (I.3.3) на отрезке  $[0, t^s]$  с краевыми условиями:

$$x_i^*(t^s) = x_i, \quad v_i^*(t^s) = v_i, \quad f^*(0) = f^0(x^*(0), v^*(0)), \quad (I.3.4)$$

где  $x_i, v_i$  берутся во всех узлах сетки на фазовом пространстве. При численной реализации краевой задачи используются значения функций распределения на предыдущих шагах по времени. Для обеспечения консервативности метода полученные значения  $(f)_{i_1, \dots, i_{2n}}^s$  домножаются на корректирующие множители  $\gamma_{i_1, \dots, i_{2n}}^s$ , которые подбираются так, чтобы моменты уточненной функции распределения удовлетворяли системе уравнений Эйлера. Обычно достаточно выполнить условие консервативности

только по отношению и закону сохранения количества вещества. После заполнения матриц  $(f)_{i_1, \dots, i_{2n}}^s$  ( $i_1 = \overline{1, N_1}, \dots, i_{2n} = \overline{1, N_{2n}}$ ) осуществляется переход к следующему шагу по времени.

Точность метода и необходимые ресурсы ЭВМ зависят от величин шагов сетки по фазовыми переменным, величины шага по времени, выбора метода решения краевой задачи для уравнения характеристик, размера расчетной области и других параметров задачи. Алгоритм расчета по своей структуре является сквозным, так как на каждом шаге по времени вдоль характеристик пересчитывается исходная функция распределения, как правило заданная аналитически. Это обеспечивает минимизацию возможной численной диффузии. Кроме того, для оптимизации вычислительного алгоритма можно проводить коррекцию положения центра тяжести носителя функции распределения в фазовом пространстве по мере его эволюции. Уточнению расчетов способствует также применение внутреннего шага по времени (более мелкого, чем шаг пересчета) в процессе решения краевых задач.

Рассмотрим более подробно сформулированные выше этапы численного метода характеристик применительно к уравнению Власова на примере электрода цилиндрической геометрии в потоке разреженной плазмы. Этапы реализации численного алгоритма не зависят от геометрии электрода. Наш выбор цилиндрической геометрии обосновывается тем, что путем конформных преобразований плоская геометрия также сводится к цилиндрической.

Система уравнений Власова в данном случае в цилиндрической системе  $(r, \theta, v_r, v_\theta)$  имеет вид (см. I.2.1)

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} + \left( \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_r(t, r, \theta) \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_r} + \left( \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_\theta(t, r, \theta) - \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\theta} = 0,$$

$$\alpha = i, e,$$

начальное распределение имеет вид

$$f_\alpha^0 = n_\infty \pi^{-1} \left( \frac{m_\alpha}{2kT_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_\alpha}{2kT_\alpha} \left[ (v_r + u_\infty \cos \theta)^2 + (v_\theta - u_\infty \sin \theta)^2 \right] \right\}.$$

Цилиндр располагается перпендикулярно вектору направленной скорости потока плазмы  $\mathbf{u}_\infty$ , причем угол между направлением скорости



и координатой  $r$  равен  $(\pi - \theta)$ . Если  $\theta = 0$ , т. е. координата  $r$  направлена навстречу вектору скорости, то начальное распределение упрощается:

$$f_{\alpha}^0 = n_{\infty} \pi^{-1} \left( \frac{m_{\alpha}}{2kT_{\alpha}} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_{\alpha}}{2kT_{\alpha}} \left[ (v_r + u_{\infty})^2 + v_{\theta}^2 \right] \right\}.$$

Компоненты  $E_r$  и  $E_{\theta}$  самосогласованного поля определяются решением уравнения Пуассона, правая часть которого зависит от функций распределения  $f_{\alpha}$ . В алгоритме численного метода значения  $E_r$ ,  $E_{\theta}$  вычисляются по зависимости функций распределения на предыдущем шаге.

Система уравнений характеристик имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dr^*}{dt^*} &= v_r^*, \\ \frac{d\theta^*}{dt^*} &= \frac{v_{\theta}^*}{r^*}, \\ \frac{dv_r^*}{dt^*} &= \frac{v_{\theta}^{*2}}{r^*} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_r(t^*, r^*, \theta^*), \\ \frac{dv_{\theta}^*}{dt^*} &= \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_{\theta}(t^*, r^*, \theta^*) - \frac{v_r^* v_{\theta}^*}{r^*}. \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Условия на текущий момент:

$$r^*(t) = r, \quad \theta^*(t) = \theta, \quad v_r^*(t) = v_r, \quad v_{\theta}^*(t) = v_{\theta}. \tag{1.3.6}$$

### Этап 1.

В качестве ограниченного носителя функций распределения рассматривается следующий компакт в фазовом пространстве:

$$\begin{aligned} \text{supp } f_{\alpha} = \{ (r, \theta, v_r, v_{\theta}) : r \in [r_0, r_{\infty}], \theta \in [0, \pi], \\ v_r \in [-v_{\max} - u_{\infty} \cos \theta, v_{\max} - u_{\infty} \cos \theta], v_{\theta} \in [-v_{\max} + u_{\infty} \sin \theta, v_{\max} + u_{\infty} \sin \theta] \}. \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Здесь  $r_0$  — радиус цилиндра,  $r_{\infty}$  — расстояние до внешней границы возмущенной зоны,  $v_{\max}$  — граница обрезания «хвоста» функции распределения Максвелла.  $r_{\infty}$  и  $v_{\max}$  выбираются на основании методических расчетов. По переменной  $\theta$  используется симметрия возмущенной зоны, а следовательно, и функций распределения. В плоскости скорости  $(v_r, v_{\theta})$  носитель сдвинут относительно точки  $(0,0)$  в соответствии

с величиной внешней скорости  $\mathbf{u}_\infty$ . Максимум начальной максвелловской функции распределения должен находиться в центре квадрата со стороной  $2v_{\max}$ . Число узлов сетки на носителе выбирается из компромиссных соображений. С увеличением числа узлов растет и необходимое машинное время. С другой стороны, расчетная область должна быть больше размера возмущенной зоны. Поэтому выбор числа узлов сетки определяется методическими расчетами.

### Этап 2.

Выбор шага по времени также проводится из компромиссных соображений. Использование слишком мелкого шага ведет к большим затратам машинного времени при интегрировании уравнений характеристик на растущих отрезках времени  $[0, t]$ . Отметим, что алгоритм сквозного счета по характеристикам допускает относительно большие шаги по времени по сравнению с некоторыми другими методами расчета.

### Этап 3.

Введем сеточные функции  $(f_\alpha)_{ijkl}, (E_r)_{ij}^s, (E_\theta)_{ij}^s$ , где индексы  $s, i, j, k, l$  соответствует координатам  $t, r, \theta, v_r, v_\theta$ .

Значения  $(E_r)_{ij}^s, (E_\theta)_{ij}^s$  вычисляются после решения уравнения Пуассона для электрического поля с правой частью, определяемой значениями функций распределения на предыдущем шаге по времени. После заполнения массивов  $(E_r)_{ij}^s$  и  $(E_\theta)_{ij}^s$  не требуется запоминать значения функций распределения на предыдущих шагах, поскольку они не используются при интегрировании уравнений характеристик.

### Этап 4.

В случае использования уравнения Власова функция распределения постоянна вдоль характеристик, поэтому вместо краевой задачи, решаемой в общем случае, имеем «обратную» задачу Коши для системы (I.3.5) с условиями (I.3.6).

После решения системы уравнений характеристик на отрезке  $[t^s, 0]$  значение функции распределения в узле  $(r_i, \theta_j, v_{rk}, v_{\theta l})$  определяется по формуле

$$(f_\alpha)_{ijkl}^s = f_\alpha(t^s, r_i, \theta_j, v_{rk}, v_{\theta l}) = f_\alpha^0(r^*(0), \theta^*(0), v_r^*(0), v_\theta^*(0)).$$

Метод численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений характеристик должен иметь хорошую сходимость и высокое быстродействие. В противном случае в условиях многократного интегрирования системы на каждом шаге по времени не удастся получить эволюцию функций распределения до установления за приемлемое время на машинах средней мощности. В расчетах рекомендуется использовать метод Рунге–Кутты–Фельберга четвертого порядка с автоматическим выбором шага [42, 43].

Вычисление значений  $E_r, E_\theta$  в узловых точках производилось с помощью полилинейной интерполяции. Другие (более сложные) виды интерполяции существенно увеличивают затраты машинного времени.

### ***1.3.1.2. Усовершенствованный метод характеристик***

Усовершенствованный метод характеристик для решения уравнения Власова в пристеночных областях плазмы предложен профессором М. В. Котельниковым [44].

В отличие от классического метода характеристик, алгоритм которого предполагает интегрирование системы уравнений характеристик от текущего момента времени до нуля, предлагается проинтегрировать систему уравнений характеристик один раз и сместиться вдоль характеристик на предыдущий временной слой. Далее путем интерполяции предлагается определить значение функции распределения в полученной узловой точке фазового пространства по значениям функций распределения, полученным на предыдущем временном слое в окружающих узлах расчетной сетки. Этим действием мы получаем искомое значение функции распределения для рассматриваемого узла расчетной сетки, которое постоянно вдоль характеристик.

Рассмотрим более подробно этапы нового алгоритма метода характеристик на примере задачи обтекания цилиндра разреженной плазмой. Уравнению Власова (I.2.11) соответствует система уравнений характеристик (I.3.5) с условиями на текущий момент времени (I.3.6).

В качестве ограниченного носителя функции распределения в фазовом пространстве выберем (I.3.7). Расчетная сетка не изменяется.

Вводятся сеточные функции  $(f_\alpha)_{ijk}, (f_\alpha)_{ijk}^{old}, (E_r)_{ij}, (E_\theta)_{ij}$ . Индексы  $i, j, k, l$  соответствуют  $r, \theta, V_r, V_\theta$ . Функция распределения  $(f_\alpha)_{ijk}$  соответ-

ствуем текущему временному слою. Функция распределения  $(f_\alpha)_{ijk}^{old}$  вычислена на предыдущем временном слое. Значения  $(E_r)_{ij}, (E_\theta)_{ij}$  вычисляются после решения уравнения Пуассона на текущем временном слое с правой частью, определяемой значениями функции распределения на предыдущем временном слое. При этом нет необходимости хранить значения напряженностей самосогласованного электрического поля на предыдущих временных слоях (как в классическом методе характеристик), так как они не используются в расчете.

Решаем «обратную» задачу Коши для системы (I.3.5) с условиями (I.3.6) на отрезке времени  $[t_s, t_{s-1}]$ , где  $s$  — индекс времени. В итоге значение функции распределения в узле  $(r_i, \theta_j, v_{r_k}, v_{\theta_l})$  будет определяться путем интерполяции по известным значениям функции распределения в соседних с исследуемой точкой узлах расчетной сетки на предыдущем временном слое.

Метод интерполяции выбирался с помощью методических расчетов. Достигалась достаточная точность расчета при установлении нового стационарного решения за разумное машинное время. В работе использовалась многомерная интерполяция в четырехмерном фазовом пространстве. При этом линейно аппроксимировалось значение функции распределения в точке, с использованием известных значений в шестидцати окружающих точках.

Отметим особенности алгоритма, возникающие при интегрировании системы уравнений характеристик.

1. Решение системы уравнений характеристик попало в область расположения обтекаемого плазмой тела. В этом случае существование рассматриваемой частицы плазмы не имеет физического смысла, так как тело по условию задачи не является источником заряженных частиц. В соответствии с этим функцию распределения соответствующей частицы приравняем к нулю.

2. Решение системы уравнений характеристик попало за пределы расчетной области в пространстве скоростей. В этом случае функцию распределения соответствующей частицы приравняем к нулю (носитель функции распределения по скоростям изначально должен выбирать

ся так, чтобы за его пределами данная функция была достаточно мала, тогда ее можно считать равной нулю без ущерба для точности расчета).

3. Решение системы уравнений характеристик попало за внешнюю границу расчетной области  $r_\infty$ . В этом случае необходимо использовать граничное условие для функции распределения. Подставив в него решение системы уравнений характеристик, получим значение функции распределения в исследуемой точке.

### Результаты тестовых расчетов

На рис. I.3.1, *a, б* представлены эволюционные кривые ионного тока на цилиндр в случае движущейся плазмы, полученные в вычислительных экспериментах с использованием классического и усовершенствованного метода характеристик. Известно, что при относительно больших скоростях потока плазмы и относительно небольших радиусах установившийся ионный ток на цилиндр хорошо аппроксимируется формулой Ленгмюра и Мотта–Смита для движущейся плазмы [45], которая имеет следующий вид:

$$I_i = en_{i\infty} 2r_p u_\infty \left(1 + \frac{2e|\phi|}{m_i u_\infty^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (I.3.8)$$

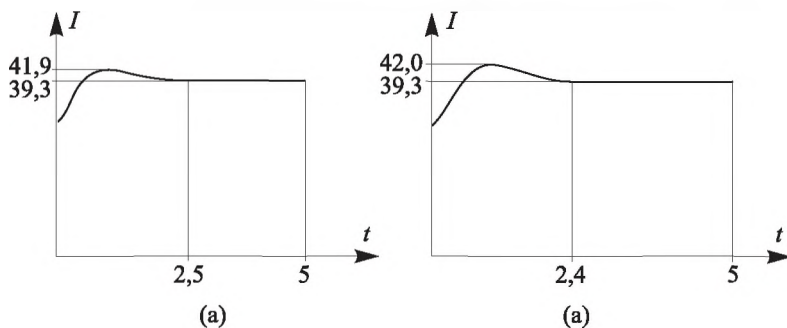


Рис. I.3.1. Эволюция ионного тока на цилиндр ( $r_0 = 3$ ,  $\phi_0 = -20$ ,  $v_0 = 5$ ,  $\varepsilon = 1$ ):

- (а) классический метод характеристик;  
 (б) усовершенствованный метод характеристик

Результаты расчетов и значение ионного тока, полученное из формулы (I.3.8), представлены в таблице I.3.1.

Таблица I.3.1

Классический метод характеристик	Усовершенствованный метод характеристик	Формула Ленгмюра и Мотт-Смита
39,3	39,3	40,2

Из таблицы I.3.1 следует практическое совпадение результатов обоих методов, а также хорошее согласование этих результатов с расчетом по формуле (I.3.8). При этом результат по формуле (I.3.8) немного превышает результаты вычислительных экспериментов. Этого и следовало ожидать, так как формула (I.3.8) получена в предельном случае орбитального движения, и расчет по ней даст верхнюю границу для ионного тока [45].

На рис. I.3.2, а, б представлены эволюционные кривые ионного тока на цилиндр в случае покоящейся плазмы, полученные в вычислительных экспериментах с использованием классического и усовершенствованного метода характеристик.

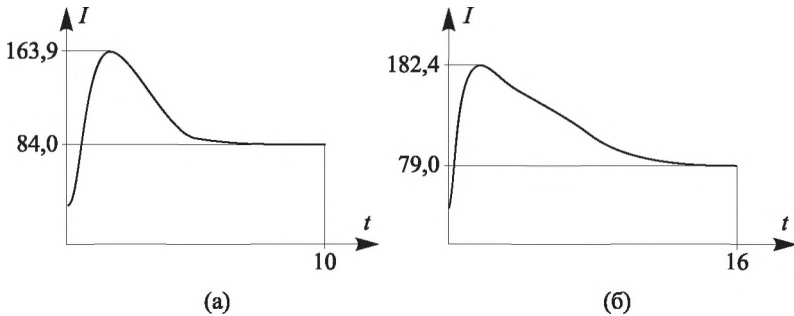


Рис. I.3.2. Эволюция ионного тока на цилиндр ( $r_0 = 20$ ,  $\varphi_0 = -10$ ,  $v_0 = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ):

(а) классический метод характеристик;

(б) усовершенствованный метод характеристик

Результаты вычислительных экспериментов представлены в таблице I.3.2. Там же представлены результаты расчетов американского ученого Лафрамбуаза, которые аппроксимированы формулами Кайла и Телбота [45]. Для этого был написан отдельный программный блок, реализующий алгоритмы формул Кайла и Телбота методом последовательных приближений.

Таблица I.3.2.

Классический метод характеристик	Усовершенствованный метод характеристик	Формула Кайла	Формула Телбота
84,0	79,0	77,12	80,25

Из таблицы I.3.2 следует удовлетворительное согласование результатов обоих методов, а также удовлетворительное согласование этих результатов с данными Лафрамбуаза. При этом усовершенствованный метод характеристик дает практическое совпадение с данными Лафрамбуаза, что повышает доверие к результатам, полученным с использованием предложенного метода.

В процессе данных методических экспериментов также контролировалось машинное время расчета до установления стационарного значения ионного тока. В случае классического метода характеристик (расчет проводился с шагом по времени 0,02) оно составило 240 минут, в случае усовершенствованного метода характеристик (расчет проводился с шагом по времени 0,01) — 47 минут. Таким образом, машинное время расчета до установления предложенным методом оказалось примерно в 5 раз меньше, чем с использованием классического метода характеристик.

На рис. I.3.3, *а, б* представлены распределения плотности ионного тока по обводу цилиндра в случае движущейся плазмы, полученные в вычислительных экспериментах с использованием классического и усовершенствованного метода характеристик.

Здесь также имеет место вполне удовлетворительное соответствие результатов. В лобовой области цилиндра на обоих графиках наблюдается характерный всплеск плотности ионного тока, в теневой области возникает обратная ситуация — плотность ионного тока падает практически до нуля.

На рис. I.3.4, *а, б* представлены изолинии функций распределения ионов, зафиксированных вблизи поверхности цилиндра в покоящейся плазме.

В обоих случаях наблюдается характерная подковообразная форма функций распределения, отмеченная ранее в работе [11].

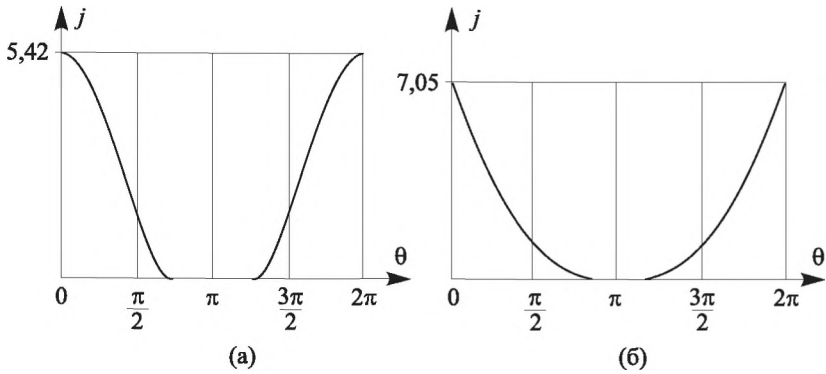


Рис. I.3.3. Распределение плотности ионного тока по обводу цилиндра

$$(r_0 = 3, \varphi_0 = -20, v_0 = 5, \varepsilon = 1):$$

- а) классический метод характеристик;  
 б) усовершенствованный метод характеристик

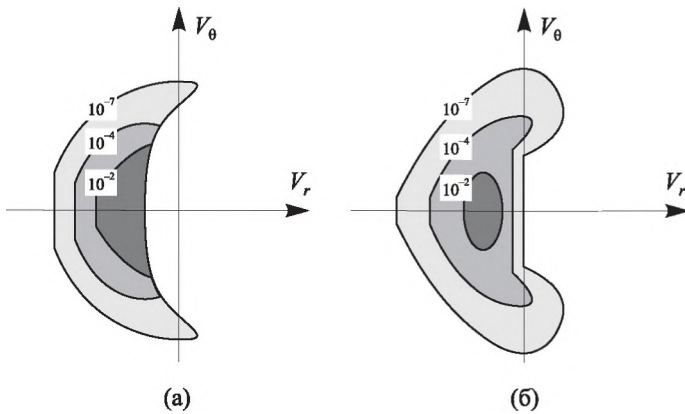


Рис. I.3.4. Функция распределения ионов вблизи цилиндра

$$(r_0 = 20, \varphi_0 = -10, v_0 = 0, \varepsilon = 1):$$

- а) классический метод характеристик;  
 б) усовершенствованный метод характеристик

### Выводы.

Предложенный численный метод хорошо себя зарекомендовал при использовании в задачах расчета пристеночных слоев разреженной плазмы. Метод показал хорошую сходимость, которая контролировалась



путем сравнений результатов расчетов с результатами, полученными с помощью классического метода характеристик, и с данными независимых авторов. Устойчивость метода была обеспечена подбором оптимальных шагов по координатам и времени в процессе вычислительного эксперимента. В частности, для нахождения начального приближения шага по времени использовалось условие устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви. Однако шаг по времени удавалось повысить еще в несколько раз относительно начального приближения без нарушения устойчивости. Данный эффект для задач расчета пристеночных слоев плазмы обоснован в работе [46].

Предложенный метод, на взгляд авторов, имеет следующие преимущества перед классическим методом характеристик.

1. Метод не так требователен к ресурсам памяти ЭВМ. При реализации классического метода приходится хранить массив напряженностей на каждом шаге по времени, без чего невозможен алгоритм сквозного счета по характеристикам. Соответственно, приходится резервировать в памяти ЭВМ соответствующий массив.

2. В предложенном методе время расчета на каждом временном слое одинаково, так как происходит однократное интегрирование системы уравнений характеристик. В то же время в классическом методе с ростом времени растет и время расчета на текущем временном слое, так как приходится интегрировать систему уравнений характеристик все большее количество раз. Соответственно, расчет классическим методом задач с затянутой эволюцией может иметь неприемлемое машинное время. Предложенный метод не содержит этого недостатка.

3. Как показали вычислительные эксперименты, машинное время счета до установления с использованием предложенного метода в среднем в несколько раз меньше, чем соответствующее время счета с использованием классического метода. В случае затянутой эволюции это время может быть меньше на порядок и более. Отсюда можно предположить, что предложенный метод более рационален.

К недостаткам предложенного метода можно отнести следующие особенности.

1. Предложенный метод предполагает использование многомерных массивов. В рассматриваемом примере это четырехмерный массив для функции распределения. В общем случае фазовое пространство шести-

мерно и, соответственно, придется использовать шестимерный массив. Не все языки программирования позволяют это делать. Как уже отмечалось выше, классический метод предполагает использование лишь трехмерного массива для напряженностей самосогласованного электрического поля.

2. Предложенный метод оказался более чувствительным к выбору шага по времени. Классический метод сквозного счета по характеристикам позволяет использовать в несколько раз большие шаги по времени, что показал вычислительный эксперимент.

### ***1.3.1.3. Метод крупных частиц Ю. М. Давыдова***

Метод крупных частиц был разработан Ю. М. Давыдовым [47–51] первоначально применительно к задачам газовой динамики для расчета сжимаемых течений сплошной среды [47].

В дальнейшем он был распространен на широкий круг задач, в том числе в работах авторов монографии, и на расчет взаимодействия заряженных тел с потоками разреженной плазмы, включая расчет пристеночных возмущенных слоев и процессов переноса из пристеночной области на обтекаемые плазмой тела. Изменяя потенциал внесенного в плазму тела и подсчитывая перенос на него заряда из окружающей плазмы, можно получить набор вольт-амперных характеристик цилиндрических зондов, ориентированных относительно вектора скорости [4], и зондов плоской геометрии с различной ориентацией относительно вектора скорости.

Уравнение Власова оказалось чрезвычайно удобно решать методом крупных частиц. Оно описывает процессы переноса в фазовом пространстве и может быть представлено в дивергентной форме. Суть метода крупных частиц заключается в том, что в нем осуществляется расщепление процесса эволюции системы по физическим процессам. Вначале изучается изменение внутреннего состояния подсистем, находящихся в ячейках эйлеровой сетки, в предположении их замороженности, а затем рассматривается смещение этих подсистем (крупных частиц) пропорционально их скорости и времени  $\Delta t$  без изменения их внутреннего состояния, с последующим перераспределением массы и заряда в исходных эйлеровых ячейках.

Согласно идеям Ю. М. Давыдова, моделируемая среда заменяется системой частиц, совпадающих в данный момент времени с ячейками эйлеровой сетки. Расчет каждого временного шага разбивается на три этапа.

1-й этап называется эйлеровым. На этом этапе рассматривается изменение за время  $\Delta t$  импульса и энергии крупной частицы, т. е. элемента объема, заключенного внутри эйлеровой ячейки. При этом процессы переноса между крупными частицами отсутствуют, границы самих ячеек не изменяются относительно начального положения.

2-й этап называется лагранжевым. На этом этапе моделируется движение крупных частиц под действием всех внешних сил, действующих на ячейки. Если среда обладает объемным зарядом и имеются внешние и собственные электромагнитные поля, то на крупные частицы действуют силы Лоренца, под действием которых и происходит их движение. Интервал времени  $\Delta t$  (шаг по времени), в течение которого рассматривается перенос, обычно определяется из условия Куранта–Фридрихса–Леви [52], которое выведено для линейных систем. Как показано в [4], это условие оказывается слишком жестким для нелинейных задач механики и электродинамики пристеночной плазмы. Поэтому шаг по времени уточнялся с помощью методических расчетов.

3-й этап называется заключительным. На этом этапе рассчитывается перераспределение массы и заряда по пространству, вызванное их переносом на втором этапе.

Таким образом, весь эволюционный процесс, вплоть до установления, моделируется повторением трех указанных этапов вычислительного алгоритма.

Отметим некоторые особенности метода крупных частиц Давыдова применительно к решению уравнения Власова.

– Метод удобен для использования в многомерных нестационарных задачах. Задачи обтекания тел в случае разреженной плазмы имеют размерность в фазовом пространстве от двух до шести. Рассматриваемые задачи, как правило, нестационарны.

– Алгоритм метода позволяет естественным путем учитывать многочисленные физические процессы, протекающие в пристеночной плазме и на поверхности тела.

– Схема метода консервативна. В процессе эволюции системы осуществляется контроль за потоками массы и заряда, что чрезвычайно важно в зондовых задачах. Небольшие погрешности в расчете концентраций заряженных частиц могут существенно влиять на самосогласованные поля, поскольку в уравнении Пуассона концентрации связаны со второй производной от потенциала электрического поля.

– В работах Ю. М. Давыдова [53, 54] рекомендуется при построении численной модели использовать однородные и изотропные вычислительные пространства. Если эти условия не выполняются, то могут возникнуть неконтролируемые ошибки в вычислительных экспериментах. В случае плоских тел используется декартова система координат, которая удовлетворяет условиям однородности и изотропности. Использование цилиндрической системы координат, очевидно, ведет к неоднородности вычислительного пространства. Для оценки возможных ошибок был создан дополнительный программный блок с использованием прямоугольной системы координат. При этом осложнилась программная реализация граничного условия на поверхности цилиндра. Вычислительные эксперименты показали, что возможные ошибки, связанные с неоднородностью пространства, составляют несколько процентов. Описанная ситуация возникает также при переходе от плоской геометрии к цилиндрической с помощью конформных преобразований.

– Метод крупных частиц Давыдова имеет некоторые общие черты с описанным выше методом характеристики:

1. В обоих методах самосогласованное поле на каждом временном шаге определяется путем решения уравнения Пуассона.

2. В соответствии с алгоритмом метода характеристик на каждом шаге по времени проводится численное интегрирование системы уравнений характеристик (например, уравнение (I.3.5)). Но в разреженной плазме по траекториям, вытекающим из уравнений характеристик, движутся фазовые частицы (в том числе и крупные частицы в методе Давыдова). Следовательно, лагранжев этап в методе Давыдова основан на решении тех же самых уравнений характеристик.

3. В обоих методах прослеживается эволюция системы по времени. Только в методе Давыдова время изменяется в сторону возрастания, а в методе характеристик — в обратную сторону, вплоть до начального момента  $t = 0$ . Следует отметить, что указанные общие черты двух мето-

дов не означают, что один метод вытекает из другого. Оба метода независимы и имеют совершенно различные области применения. Указанные общие черты следует рассматривать как частный случай. Метод Давыдова имеет значительно более широкую область применения, чем метод характеристик.

### 1.3.2. Методы численного решения уравнения Пуассона

В задачах пристеночной плазмы электрические токи проводимости, как правило, малы, а токи смещения вообще отсутствуют (за исключением нестационарных задач). Поэтому в системе уравнений Максвелла (1.1.20)  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ , переменные магнитные поля также отсутствуют, поэтому  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ . Постоянные однородные магнитные поля могут быть, однако они не входят в систему (1.1.20).

Оставшееся уравнение  $\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$  сводится к уравнению Пуассона:

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} e(n_e - n_i), \quad E = -\nabla \phi,$$

где  $n_{e,i}$  — концентрация заряженных частиц, вычисляемая через их функции распределения,  $E, \phi$  — потенциал и напряженность электрического поля.

Полная система уравнений Максвелла используется в задачах пристеночной плазмы в частных случаях, например для тел с эмиссией электронов.

Численные методы решения уравнения Пуассона можно разделить на конечно-разностные и численно-аналитические.

В конечно-разностных методах уравнение Пуассона сразу заменяется разностным уравнением, которое решается каким-либо итерационным разностным методом. Обзор таких методов можно найти, например, в [55]. В численно-аналитических методах сначала проводятся формальные аналитические преобразования, сводящие уравнение Пуассона, например, к обыкновенным дифференциальным уравнениям или к интегральным уравнениям, для решения которых затем применяются численные методы.

Для решения уравнения Пуассона в окрестности обтекаемого плазмой заряженного тела удобен численно-аналитический метод, основанный на методе разделения переменных Фурье. В случае цилиндрического тела он позволяет перейти от граничной задачи для уравнения Пуассона к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тело плоской геометрии с помощью конформных преобразований также сводится к цилиндрической геометрии.

Рассмотрим более подробно решение задачи Дирихле для тел цилиндрической и плоской геометрии.

### Тело цилиндрической геометрии

Уравнение Пуассона для потенциала вблизи заряженного цилиндра, расположенного поперек потока плазмы, имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \sigma(r, \theta), \quad (I.3.9)$$

где правая часть оказывается периодической четной функцией  $\theta$ :

$$\sigma(r, \theta) = \sigma(r, \theta + 2\pi); \quad \sigma(r, \theta) = \sigma(r, -\theta);$$

граничные условия:

$$\varphi(r_0, \theta) = \varphi_0, \quad \varphi(r_\infty, \theta) = 0. \quad (I.3.10)$$

Учитывая четность по  $\theta$ , ищем решение в виде разложения по косинусам:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) \cos k\theta. \quad (I.3.11)$$

Разлагаем в ряд по косинусам и правую часть (1.27):

$$\sigma(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sigma(r, \tilde{\theta}) d\tilde{\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cos k\theta}{\pi} \int_0^\pi \sigma(r, \tilde{\theta}) \cos k\tilde{\theta} d\tilde{\theta}. \quad (I.3.12)$$

Подставляем (I.3.11) и (I.3.12) в уравнение и граничные условия. После собирания членов одного порядка задача Дирихле (I.3.9), (I.3.10) сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 a_0'' + \frac{1}{r} a_0' &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sigma(r, \tilde{\theta}) d\tilde{\theta}, \\
 a_k'' + \frac{1}{r} a_k' - \frac{k^2}{r^2} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sigma(r, \tilde{\theta}) \cos k\tilde{\theta} d\tilde{\theta}, \\
 a_0(r_0) &= \Phi_0, \quad a_0(r_\infty) = 0, \\
 a_k(r_0) &= \theta_0, \quad a_k(r_\infty) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.
 \end{aligned} \tag{I.3.13}$$

Учитывая, что тригонометрические ряды достаточно быстро сходятся, в приближенных расчетах можно ограничиться несколькими первыми членами ряда, обеспечивающими заданную точность.

### Тело плоской геометрии

Задача для пластины сводится с помощью преобразования Жуковского к цилиндрической задаче [5]. Она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} J \sum q_\alpha n_\alpha, \quad \alpha = i, e, \\
 n_\alpha &= \left( \frac{2kT}{m_\alpha} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha J_\alpha dv_r dv_\theta, \\
 J &= J_\alpha = \frac{\Delta}{4r^4}, \\
 \varphi(r_0, \theta) &= \Phi_0, \quad \varphi(r_\infty, \theta) = 0.
 \end{aligned} \tag{I.3.14}$$

Или в более общем виде задача записывается как (I.3.9), (I.3.10)

Координаты  $r$  и  $\theta$  связаны с координатами  $x$  и  $y$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
 r &= (u^2 + v^2)^{1/2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}, \quad u + iv = w, \\
 w &= \xi + \left( \xi^2 - r^2 \right)^{1/2}, \quad \xi = x + iy.
 \end{aligned} \tag{I.3.15}$$

Если поток плазмы набегает на пластину по нормали к ней (рис. I.2.2), то  $\sigma(r, \theta) = \sigma(r, -\theta)$ ;  $\sigma(r, \theta) = \sigma(r, \theta + 2\pi)$ . Таким образом, задача (I.3.14) может решаться как задача о цилиндре, но с применением разложения в полный тригонометрический ряд:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= a_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(r) \cos k\theta + b_k(r) \sin k\theta, \\ \sigma(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sigma(r, \tilde{\theta}) d\tilde{\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\theta}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sigma(r, \tilde{\theta}) \cos k\tilde{\theta} d\tilde{\theta} + \\ &+ \frac{\sin k\theta}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sigma(r, \tilde{\theta}) \sin k\tilde{\theta} d\tilde{\theta}. \end{aligned} \quad (I.3.16)$$

После подстановки (I.3.16) в (I.3.14) имеем краевую задачу для нахождения коэффициентов ряда Фурье:

$$\begin{aligned} a_0'' + \frac{1}{r} a_0' &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sigma(r, \tilde{\theta}) d\tilde{\theta}, \\ a_k'' + \frac{1}{r} a_k' - \frac{k^2}{r^2} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sigma(r, \tilde{\theta}) \cos k\tilde{\theta} d\tilde{\theta}, \\ b_k'' + \frac{1}{r} b_k' - \frac{k^2}{r^2} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sigma(r, \tilde{\theta}) \sin k\tilde{\theta} d\tilde{\theta}, \end{aligned} \quad (I.3.17)$$

$$\begin{aligned} a_0(r_0) &= \varphi_0, \quad a_0(r_\infty) = 0, \\ a_k(r_0) &= a_k(r_\infty) = b_k(r_0) = b_k(r_\infty) = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи Дирихле для плоского тела представляется рядом (I.3.16), в котором надо сделать замену переменных  $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$  с помощью (I.3.15).

### I.3.3. Алгоритм решения системы Власова–Пуассона

Для решения задачи Власова–Пуассона в случае бесстолкновительной пристеночной плазмы использовался метод последовательных итераций по времени. В бесстолкновительную плазму вносится заряженное до потенциала  $\varphi_p$  проводящее тело с характерным размером  $r_p$ . Потенциал тела поддерживается постоянным с помощью внешнего источника питания. Вблизи поверхности тела формируются функции распределения заряженных частиц, поля концентраций, потенциалов, токов и других параметров. Установившаяся около тела возмущенная зона рассматривается как начальное условие задачи Власова–Пуассона. На фоне этого на-



чального условия потенциал тела импульсно меняется до значения  $\Phi_{p1}$ . Импульс потенциала может быть как положительным, так и отрицательным. После изменения потенциала тела возмущенная зона начинает эволюционировать от начального стационарного состояния, соответствующего потенциалу  $\Phi_p$ , до конечного стационарного состояния, соответствующего потенциалу  $\Phi_{p1}$ . Метод последовательных итераций по времени предполагает нахождение параметров пристеночной плазмы в момент времени  $t + \Delta t$ , если эти параметры известны в момент времени  $t$ . Процесс перемещения по времени происходит до тех пор, пока не завершится эволюционный процесс и система не придет в новое стационарное состояние, соответствующее потенциалу  $\Phi_{p1}$ .

Более подробно рассмотрим алгоритм решения системы Власова–Пуассона на примере плоского электрода ленточного типа. Блок-схема алгоритма метода последовательных итераций по времени представлена на рис. I.3.5.

Для проведения численного решения задачи необходимо систему (I.2.1)–(I.2.3), а также систему граничных и начальных условий привести к безмерному виду. Из опыта решения задач электродинамики пристеночной плазмы целесообразно выбрать следующую систему масштабов:

$$M_L = r_D = \left( \frac{\epsilon_0 k T_i}{e^2 n_{i\infty}} \right)^{1/2} \quad \text{– масштаб длины } (r_D \text{ – радиус Дебая});$$

$$M_v^\alpha = \left( \frac{2kT_\alpha}{m_\alpha} \right)^{1/2} \quad \text{– масштаб скорости частиц сорта } \alpha, \quad (I.3.18)$$

$$M_\Phi = \frac{kT_i}{e} \quad \text{– масштаб потенциала};$$

$$M_n = n_{i\infty} \quad \text{– масштаб концентрации.}$$

Остальные масштабы находятся по формулам размерностей, например:

$$M_t = \frac{M_L}{M_v^i}, \quad M_f^\alpha = \frac{M_n}{(M_v^\alpha)^3}, \quad M_E = \frac{M_\Phi}{M_L}, \quad (I.3.19)$$

$$M_j = e M_n M_v^i, \quad M_I = M_L^2 M_j \quad \text{и т. д.}$$



Рис. I.3.5. Блок-схема алгоритма метода последовательных итераций по времени

В результате обезразмеривания система Власова–Пуассона для зонда плоской геометрии (ленточного типа) будет иметь вид:

$$\frac{\partial \hat{f}_i}{\partial \hat{t}} + \hat{v}_x \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial \hat{x}} + \hat{v}_y \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2} \left( \hat{E}_x \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial \hat{v}_x} + \hat{E}_y \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial \hat{v}_y} \right) = 0, \quad (I.3.20)$$

$$\frac{\partial \hat{f}_e}{\partial t} + \delta_\alpha^{1/2} \left( \hat{v}_x \frac{\partial \hat{f}_e}{\partial \hat{x}} + \hat{v}_y \frac{\partial \hat{f}_e}{\partial \hat{y}} \right) - \frac{1}{2} \varepsilon_\alpha^{-1/2} \mu_\alpha^{-1/2} \left( \hat{E}_x \frac{\partial \hat{f}_e}{\partial \hat{v}_x} + \hat{E}_y \frac{\partial \hat{f}_e}{\partial \hat{v}_y} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{y}^2} = \hat{n}_e - \hat{n}_i, \quad \hat{E} = -\nabla \hat{\phi}, \quad (1.3.21)$$

где  $\varepsilon_\alpha = \frac{T_\alpha}{T_i}$ ,  $\mu_\alpha = \frac{m_\alpha}{m_i}$ ,  $\delta_\alpha = \frac{\varepsilon_\alpha}{\mu_\alpha}$ ,  $\alpha = i, e$ .

Начальное и граничное условия для функций распределения  $f_{i,e}(0, x, y, v_x, v_y)$  согласно условию (1.2.4) для электрода, ориентированного параллельно потоку, принимают вид

$$\hat{f}_{i,e} = \pi^{-1} \exp \left\{ - \left[ (\hat{v}_x + \hat{u}_0)^2 + \hat{v}_y^2 \right] \right\}; \quad (1.3.22)$$

граничные условия для потенциала имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{r} = \hat{r}_0 : \hat{\phi}(\hat{t}, \hat{x}_0, \hat{y}_0) &= \hat{\phi}_0; \\ \hat{r} = \hat{r}_\infty : \hat{\phi}(\hat{t}, \hat{x}_\infty, \hat{y}_\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

Если электрод ориентирован навстречу потоку, то начальные условия для функций распределения (1.3.22) запишется так:

$$\hat{f}_{i,e} = \pi^{-1} \exp \left\{ - \left[ \hat{v}_x^2 + (\hat{v}_y - \hat{u}_0)^2 \right] \right\}. \quad (1.3.24)$$

В дальнейшем изложении значок обезразмеривания  $\hat{\phantom{x}}$  будет опускаться.

Программный блок для расчета параметров пристеночной области [56, 57] вблизи электрода плоской геометрии, обтекаемого потоком бесстолкновительной плазмы, написан на языке программирования C++ и состоит из двух частей. Первая часть включает саму программу численного моделирования задачи. Исходные данные вводятся в программу непосредственно в ее тексте, для чего предусмотрена специальная процедура.

Далее программа компилируется и запускается на счет. При этом в процессе работы через заданные интервалы времени программа формирует типизированный файл, содержащий все результаты расчета для данного шага по времени, а также массив, в котором зафиксирован про-

цесс эволюции интегрального тока на единицу длины плоского электрода ленточного типа.

Работа программы предусмотрена в 2-х режимах.

### **1. Режим счета.**

В этом режиме осуществляется максимальная скорость счета. На экран монитора выводится только номер шага по времени и значение интегрального тока на единицу длины электрода.

### **2. Режим экрана контроля.**

В этом случае экран монитора устанавливается в графический режим. При этом нужные зависимости параметров пристеночной плазмы выводятся на экран в режиме реального времени счета, что позволяет визуально изучать ход эволюции пристеночной области. Имеется возможность наблюдать эволюцию электронного и ионного токов, распределения компонент плазмы и потенциала самосогласованного поля по координатам  $x$ ,  $y$ , а также поля скоростей ионов и электронов.

В программе предусмотрена возможность одновременного использования нескольких экранов контроля.

Вторая часть программного блока — это программа графической обработки полученных результатов. Она использует данные, сформированные расчетной программой. Имеется возможность вывести практически любую зависимость в любом виде в рамках введенных исходных данных и средств языка программирования. Программа позволяет добавлять графические страницы, если это необходимо, и убирать их. При проведении вычислительных экспериментов наиболее часто в качестве графической визуализации использовались следующие зависимости:

- изменение потенциала, концентраций ионов и электронов, а также их скоростей вдоль оси  $X$  (т. е. по ширине пластины);
- изменение потенциала, концентраций компонент, а также их скоростей вдоль оси  $Y$  (т. е. по нормали к пластине);
- изолинии потенциала и концентраций ионов и электронов;
- эволюционные кривые для интегральных токов ионов и электронов;
- функции распределения заряженных частиц в наиболее характерных точках вблизи электрода.

В программе предусмотрена возможность печати результатов в текстовом виде. В блок печати можно добавлять операторы печати лю-

бой информации в рамках загруженного в память ЭВМ типизированного файла с результатами.

Программы численного решения задач Власова–Пуассона для тел различной геометрии прошли государственную регистрацию и могут быть использованы на практике [60, 61].

### **1.3.4. Методические расчеты и сравнение с результатом работ других авторов**

Методические расчеты и сравнение с результатами работ других авторов проводились для тел малого размера, которые могли служить электрическими зондами. Использовались зонды плоской и цилиндрической геометрии. При заданном характерном размере зонда  $r_p$  и его потенциале  $\varphi_p$  идущий на зонд ток может быть получен как в вычислительном эксперименте, так и в натурном. Совпадение зондовых токов в вычислительном и натурном экспериментах свидетельствует о достоверности используемых физических, математических и численных моделей.

Проведем обсуждение методических расчетов и сравнение полученных авторами результатов с работами других авторов отдельно для тел плоской геометрии и тел цилиндрической геометрии.

#### **Случай тел плоской геометрии**

При формировании программного блока использовалась декартова система координат. Она, как известно [33, 34], обладает свойством однородности и изотропности вычислительного пространства. Это избавляет от возможных неконтролируемых ошибок при проведении вычислительных экспериментов, возникающих при использовании неоднородных и неизотропных вычислительных пространств.

Для выбора оптимального вычислительного алгоритма проводилась серия методических расчетов. Оптимизировались шаг по времени  $\Delta t$ , шаги  $h_x$  и  $h_y$  по координатам  $x$  и  $y$ , число узлов  $N_x$  и  $N_y$ , расчетной сетки по координатам  $x$  и  $y$ , граница обрезания максвелловского «хвоста», число гармоник в разложении Фурье. При наличии направленной скорости плазмы удалось достичь приемлемой устойчивости и точности

решения при следующих значениях перечисленных параметров, записанных в безразмерном виде:

- шаг по времени  $\Delta t \leq 0,01$ ;
- шаг по координатам  $h_x, h_y \leq 0,5$ ;
- шаг по скоростям  $h_{v_x}, h_{v_y} \leq 0,6$ ;
- число узлов расчетной сетки  $N_x \cdot N_y \cdot N_{v_x} \cdot N_{v_y} = 52 \times 20 \times 30 \times 30$ ;
- граница обрезания максвелловского «хвоста» (зависит от метода решения уравнения Пуассона).

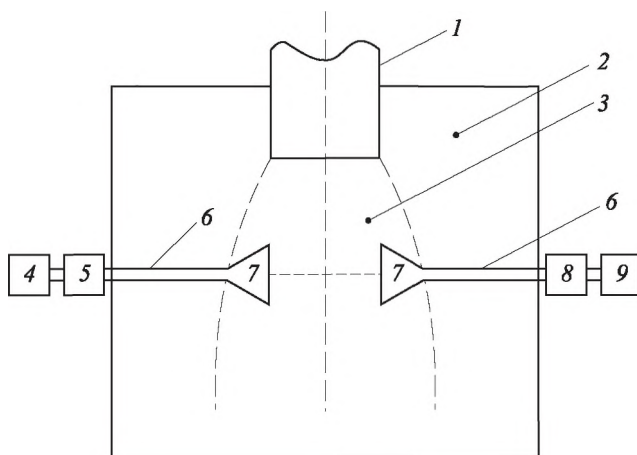
С ростом потенциала зонда  $\phi_0$  приходилось увеличивать число узлов расчетной сетки  $N_x$  и  $N_y$ , иначе возмущенная зона не умещалась в расчетную область. Шаг по времени приходилось уменьшать при положительных потенциалах тела, а также при увеличении его характерного размера  $r_p$ .

В ходе тестовых расчетов с помощью экранов контроля анализировалась кривая эволюции плотности зондового тока и интегрального тока на единицу длины зонда. После ступенчатого изменения потенциала эти кривые проходили через максимум и плавно выходили на новое стационарное значение, что совпадает с данными работ [3, 11]. Плотность тока росла с уменьшением ширины зонда, что также согласуется с результатами работ [3, 11].

В предельном случае, когда ширина пластины стремится к бесконечности, скорость перестает влиять на плотность тока (отсутствует концевой эффект, а краевой эффект становится относительно малым), поэтому результаты расчета совпадают с данными для покоящейся плазмы, полученными в [58]. Контролировалась также структура функций распределения ионов и электронов. В момент установления вдали от краев пластины она имеет характерный подковообразный вырез, подробно изученный в [11].

Проводилось также сравнение результатов зондового эксперимента с помощью плоского зонда большого размера, ориентированного вдоль потока, с результатами измерения концентрации заряженных частиц методом СВЧ-просвечивания [9]. Поток аргоновой плазмы истекал из сильноточного плазменного движителя в рабочую камеру с достаточно

низким давлением ( $P < 10^{-3}$  мм рт. ст.). Блок-схема экспериментальной установки приведена на рисунке I.3.6.



- 1 — источник плазмы;
- 2 — вакуумная камера;
- 3 — струя плазмы;
- 4 — генератор высокой частоты;
- 5 — волномер;
- 6 — волноводы;
- 7 — передающая и приемная антенны;
- 8 — детектор;
- 9 — индикатор

Рис. I.3.6. Блок-схема измерительной установки

Генератор 4 излучал СВЧ-сигналы мощностью  $\sim 1$  мВт и длиной волны в интервале  $2,8 \div 3,4$  см. В качестве индикатора 9 применялся электронный осциллограф. При использовании метода отсечки [44] момент «запирания» зондирующего сигнала наблюдался визуально на экране осциллографа. Поскольку длина волны СВЧ-сигнала изменялась в относительно небольших пределах, в процессе эксперимента приходилось подбирать параметры разряда таким образом, чтобы концентрация заряженных частиц равнялась критической. Этого удавалось добиться

изменением давления в разрядной и рабочей камерах, изменением напряжения и тока разряда, а также перемещениями антенны 7 вдоль оси струи. В момент фиксирования критической концентрации методом СВЧ-просвечивания в струю плазмы вводились ориентированные вдоль потока плоские зонды и проводились зондовые измерения.

Для полного исчезновения СВЧ-сигнала необходимо, чтобы размер области с критической концентрацией в несколько раз превышал длину волны СВЧ-сигнала. Это условие при проведении эксперимента выполнялось. Характерный размер зонда составлял  $(1 \div 4)$  мм, что соответствовало  $(3,00 \div 10,00) \cdot 10^2$  радиусам Дебая. Зонды такого размера можно рассматривать как зонды с пренебрежимо малым краевым и концевым эффектами, т. е. при обработке зондового эксперимента применять методику, разработанную для покоящейся плазмы. Зонд мог перемещаться по оси и радиусу струи, так что измерения проводились в нескольких точках. Результаты экспериментов приведены на рисунке I.3.7.

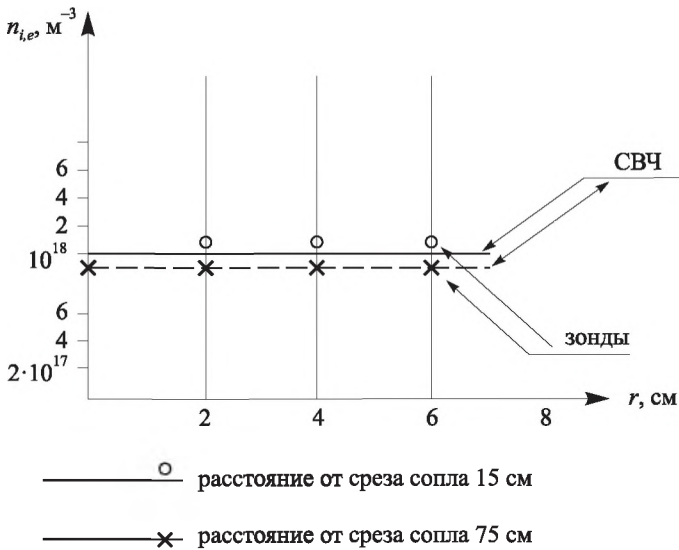


Рис. I.3.7. Сравнение концентраций заряженных частиц, измеренных плоскими зондами и методом СВЧ-просвечивания



Результаты, приведенные на рисунке I.3.7, свидетельствуют о хорошем совпадении данных, полученных ориентированными плоскими зондами и методом отсечки при СВЧ-просвечивании плазмы. Расхождение не превышало  $(10 \div 15)\%$ .

### Случай тел цилиндрических геометрий

Для описанной выше компьютерной программы проводились тестовые расчеты и сравнения с результатами работ других авторов.

Были проведены расчеты для предельного случая покоящейся плазмы и сделано сравнение с результатами работ Лафрамбуаза [58], которые описаны аппроксимационной формулой Телбота [58]. Данная формула непригодна в предельном случае орбитального движения [11], поэтому расчеты проводились при радиусах цилиндра  $r_0 > 5$ . Имело место совпадение в пределах 5 %.

Для сравнением с результатами, полученными в ранних работах в предельном случае орбитального движения в покоящейся плазме [11], проводились расчеты при относительно небольших радиусах цилиндра ( $r_0 < 5$ ). Соответственная формула, полученная для вышеуказанного случая Ленгмюром и Мотта–Смитом [11], в масштабах (I.3.18) имеет вид

$$I_i = 2r_0\{(-\varphi_0)^{1/2} + 0,5\pi^{1/2}\exp(-\varphi_0)\cdot[1 - \operatorname{erf}(-\varphi_0)^{1/2}]\}, \quad (\text{I.3.24})$$

где  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-x^2) dx$ .

При изменении безразмерного радиуса цилиндра в диапазоне от 5 до 1 значения интегрального ионного тока получались ниже, чем аналогичные значения, рассчитывались по формуле (I.3.24). Разница составляла 10–20 %. Этот результат соответствует тому факту, что формула (I.3.24) получена без учета влияния распределения самосогласованного электрического поля в пристеночной области. При этом если в плазме не реализуется предельный случай орбитального движения, то значение тока, полученное по этой формуле, можно рассматривать как верхнее предельное значение тока на тело в бесстолкновительном режиме [11]. По мере уменьшения радиуса цилиндра разница между результатами тестового эксперимента и расчета по формуле (I.3.24) уменьшалась и при

$r_0 < 0,1$  составила несколько процентов. Этого и следовало ожидать, так как при  $r_0 < 1$  реализуется предельный случай орбитального движения [11].

Тестовые расчеты для движущейся плазмы были ориентированы на другую формулу Ленгмюра и Мотта–Смита, также полученную для предельного случая орбитального движения. В масштабах (I.3.18) она имеет вид

$$I_i = 2r_0v_0(1 - \phi_0/u_0^2)^{1/2}. \quad (I.3.25)$$

При достаточно больших безразмерных скоростях потока плазмы ( $u_0 > 4$ ) и относительно небольших размерах цилиндра (например, при  $r_0 = 3$ ) получено практически полное совпадение. Это совпадение также следовало ожидать, поскольку фактор направленной скорости потока плазмы при достаточно больших скоростях оказывает доминирующее воздействие на величину интегрального тока на тело. При этом влияние самосогласованного электрического поля в пристеночной области ничтожно мало, поэтому реализуется предельный случай орбитального движения, для которого и получена формула (I.3.25).

При безразмерных скоростях потока  $0 \leq u_0 < 2$ ,  $\phi_0 = -6$  и  $r_0 = 3$  значения ионного тока сравнивались с результатами, полученными в работе [6]. И здесь получено удовлетворительное совпадение.

При уменьшении параметра  $\epsilon = T_i/T_e$ , что соответствует приближению к случаю «холодных ионов», был отмечен качественный рост ионного тока, описанный в работе [11].

В ходе тестовых расчетов в покоящейся плазме были получены функции распределения ионов характерной подковообразной формы, описанные в работе [11], а также распределения по радиусу концентраций ионов, электронов и потенциала самосогласованного электрического поля.

Непосредственно во время расчетов с помощью экранов контроля визуально контролировалось влияние фактора направленной скорости плазмы:

- наличие симметрии возмущенной зоны относительно плоскости, проходящей через вектор направленной скорости протока и ось симметрии цилиндра, а также факт формирования области следа в его теневой части;

- появление зависимости параметров возмущенной зоны от угловой координаты  $\theta$ ;
- соответствующая заданной направленной скорости потока форма поля скоростей ионов и т. д.

Во время тестирования программы при наличии магнитного поля визуально контролировалось ларморовское вращение электронов, а также поворот скоростей ионов в соответствии с направлением силы Лоренца при достаточно больших значениях величины магнитной индукции.

Для выбора оптимальных вычислительных параметров, таких как шаг по времени, размерность расчетной сетки, радиус внешней границы расчетной области, граница обрезания «максвелловского хвоста», число гармоник в разложении Фурье, проводились методические расчеты. При этом для случая движущейся плазмы удалось достичь приемлемой устойчивости и сходимости решения при следующих значениях вышеуказанных параметров (в безразмерном виде, см. (I.3.18)):

- шаг по времени  $\Delta t \leq 0,2$ ;
- радиус внешней границы расчетной области  $r_\infty \geq r_0 + 12$ ;
- число узлов по радиусу  $n_r \geq 20$ ;
- число узлов по угловой координате  $n_\theta \geq 40$ ;
- граница обрезания «максвелловского хвоста»  $v_M \geq 5$ ;
- число узлов по радиальной и азимутальной скорости  $n_{k,l} \geq 20$ ;
- число гармоник в разложении Фурье  $n_g = 5$ .

С ростом параметра  $\phi_0$  приходилось увеличивать  $r_\infty$ , чтобы возмущенная зона умещалась в расчетной области. Того же требовали расчеты при увеличении радиуса цилиндра. Шаг по времени приходилось уменьшать при положительных потенциалах тела, а также при относительно небольших значениях магнитной индукции. Величина параметра  $v_M$  зависит от того, использован ли в программе алгоритм «плавающей сетки» в пространстве скоростей. Однако данный алгоритм оказался недостаточно эффективным при расчетах с безразмерным параметром  $u_0 > 3$ , поскольку функция распределения в теневой части цилиндра симметрично деформировалась относительно оси радиальной скорости в обе стороны, оставляя при этом свой центр тяжести несмещенным относительно вышеуказанной оси. Параметр  $v_M$  в этих случаях приходилось брать равным 10 и выше.

В ряде работ [53, 54] в последнее время высказывалась идея о необходимости использования однородных и изотропных вычислительных пространств. Если эти условия не выполняются, то могут возникнуть неконтролируемые ошибки в вычислительных экспериментах. Использование цилиндрической системы координат, очевидно, ведет к неоднородности вычислительного пространства. Чтобы оценить возможные ошибки, связанные с этим, была составлена программа на языке C++ для цилиндрического тела, помещенного в поперечный поток разреженной плазмы, с использованием однородного и изотропного вычислительного пространства (использовалась прямоугольная система координат  $(x, y, v_x, v_y)$ ). Сравнение результатов расчетов в цилиндрической и прямоугольной системе координат показало хорошее совпадение (расхождение не превышало одного процента). Применение прямоугольной системы координат несколько осложнило программную реализацию граничного условия на поверхности цилиндра и внесло существенные ограничения на увеличение его радиуса: размер расчетной области должен превышать диаметр цилиндра, поэтому с ростом радиуса тела соответственно растет число узлов расчетной сетки, которое ограничено возможностями ЭВМ. В то же время использование прямоугольной системы координат позволило расширить область исследования следа за телом.

### **I.3.5. Некоторые результаты математического моделирования применительно к авиационно-космической технике**

В результате решения задачи Власова–Пуассона или Алексеева–Пуассона получаем функции распределения ионов (ФРИ) и электронов (ФРЭ) в плазме вблизи спутника или в струе плазмы, истекающей из ЭРД. Значение этих функций распределения позволяет найти поля концентраций ионов и электронов, плотности ионных и электронных токов, направленные скорости заряженных частиц или любой другой средний параметр, необходимый конструктору электроракетных двигателей, спутников, космических станций, электрических зондов. Ввиду важности функций распределения заряженных частиц ниже будут приведены примеры ФРИ и ФРЭ для различных условий.

Второй параметр, который непосредственно вытекает из решения системы Власова–Пуассона, — это распределение напряженности и потенциала в исследуемом плазменном образовании.

**Пример 1.** ФР в случае покоящейся плазмы вблизи заряженной поверхности цилиндра [9].

В этом случае ФР оказывается трехмерной в фазовом пространстве и для данной точки в геометрическом пространстве зависит от двух координат по скоростям  $(v_1, v_2)$ . Такие ФР удобно изображать в трехмерном пространстве: в плоскости — две оси по скоростям, а по третьей вертикальной оси — сама ФР. Эти ФР имеют, как правило, куполообразную форму и характеризуют распределения плотности вероятности попадания скорости частиц в единичный интервал по скоростям вблизи данной точки на плоскости  $(v_1, v_2)$ . Другой способ изображения ФР — с помощью изолиний. Изолиния — это проекция на плоскость  $(v_1, v_2)$  линий, возникающих при пересечении купола ФР с горизонтальной плоскостью, параллельной плоскости  $(v_1, v_2)$ . Иными словами, изолиния — это линия, соответствующая условию  $f(v_1, v_2) = \text{const}$ . Изолиния ФР напоминает, по сути, линии (или поверхности) равного потенциала в электростатике.

На рис. I.3.8, I.3.9 представлены ФРИ и ФРЭ вблизи поверхности цилиндра на разных расстояниях от него (координаты  $v_1 = v_r$ ,  $v_2 = v_\theta$ ). Графики приведены в безразмерном виде, с использованием масштабов (I.3.18). Вид ФР зависит от нескольких безразмерных параметров:

$r_0$  — безразмерный радиус цилиндра;

$\phi_0$  — безразмерный потенциал цилиндра;

$u_0$  — безразмерная направленная скорость (в потоке покоящейся плазмы  $u_0 = 0$ );

$\epsilon$  — отношение температур ионов и электронов;

$B_0$  — безразмерная индукция внешнего магнитного поля;

Значения этих параметров указаны под рисунками.

На рис. I.3.8 приведена трехмерная зависимость функции распределения ионов от расстояния до стенки цилиндра. Функция распределения вблизи стенки имеет характерный подковообразный вырез, что совпадает с результатами работы [11]. Как показано в [11], появление выреза в ФРИ есть следствие условия идеальной каталитичности поверхности цилиндра. Ионы, попавшие на поверхность, забирают электрон из нее и становятся нейтральной частицей, т. е. выбывают из рассмотрения. Это

приводит к тому, что со стороны поверхности потока ионов нет, что и вызывает появление подковообразного выреза в куполе ФРИ. По мере удаления от стенки цилиндра данный эффект уменьшается, подкова смещается в сторону положительных радиальных скоростей и достаточно далеко от стенки цилиндра становится максвелловской (соответствует невозмущенной плазме). По мере приближения к стенке концентрация ионов падает, и, соответственно, уменьшается объем под куполом ФРИ ионов. Кроме того, функция смещается в сторону отрицательных радиальных скоростей, так как по мере приближения к стенке частицы ускоряются радиальным электростатическим полем цилиндра, а в направлении оси азимутальной скорости ФР растягивается, что соответствует ускоряющимся ионам, движущимся мимо тела по направлениям, близким к касательной к цилиндру в рассматриваемой точке расчетной области.

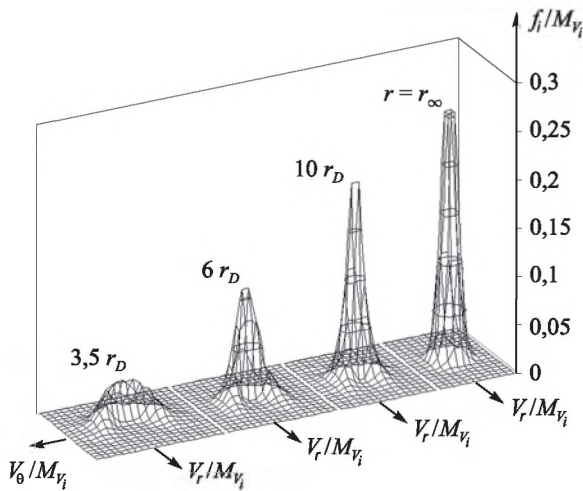


Рис. I.3.8. Зависимость ФРИ от расстояния до оси цилиндра ( $r_0 = 3$ ,  $\varphi_0 = -6$ ,  $u_0 = 0$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $B_0 = 0$ )

На рис. I.3.9 приведены ФР электронов при тех же условиях (в работе [11] данная функция показана только при положительных потенциалах тела). ФР электронов не имеет подковообразного выреза, поскольку в отличие от ионов, которые движутся ускоренно к стенке цилиндра, электроны, движущиеся к цилиндру, замедляются полем и могут

пройти через точку разворота. Возникающие при этом положительные радиальные скорости электронов компенсируют тот подковообразный провал, который характерен для ФР ионов. В силу понижения концентрации в пристеночной области объем под куполом ФР электронов уменьшается по мере приближения к стенке вплоть до практически нулевого значения.

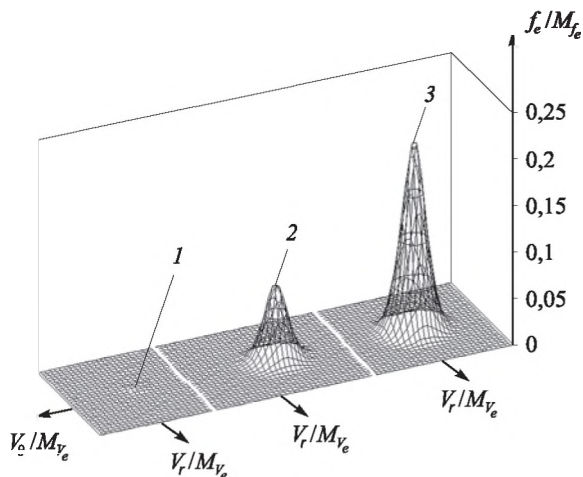


Рис. I.3.9. Зависимость функции распределения электронов от расстояния до оси цилиндра ( $r_0 = 3$ ,  $\varphi_0 = -6$ ,  $u_0 = 0$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $B_0 = 0$ ):

1 —  $r = 3,3$ , 2 —  $4,5$ , 3 —  $6$

На рис. I.3.10, I.3.11 даны ФРИ в плазме вблизи плоской поверхности в форме удлиненного прямоугольника. В первом случае этот прямоугольник расположен непосредственно в плазме, а во втором — находится на большой диэлектрической плоскости. Координаты:  $v_1 = v_x$ ,  $v_2 = v_y$ .

В процессе вычислительных экспериментов варьировались следующие характерные параметры задачи:

$2r_0 = \frac{2r_p}{M_r}$  — безразмерная ширина электрода,  $\varphi_0 = \frac{\Phi_E}{M_\varphi}$  — безраз-

мерный потенциал электрода,  $u_0 = \frac{u_\infty}{M_v}$  — безразмерное значение на-

правленной скорости потока,  $\varepsilon = \frac{T_{i\infty}}{T_{e\infty}}$  — отношение температур ионов и электронов в невозмущенной плазме.

В случае  $u_0 = 0$ ,  $2r_0 = 100$ ,  $\Phi_0 = -10$ ,  $\varepsilon = 1$  функция распределения ионов (ФРИ) приведена на рисунке I.3.10. В правой части рисунка указаны точки вблизи поверхности электрода, в которых получены ФРИ. При отсутствии направленной скорости структура ФРИ изучена достаточно подробно в более ранних работах [11] и др. Они имеют характерный подковообразный вырез (в плоскости  $(v_x, v_y)$ ), направленный в сторону оси  $v_y$ . Это связано с тем, что поверхность электрода идеально каталитична и нейтрализует все падающие на нее ионы, поэтому обратного потока от отрицательно заряженного зонда нет, что и является причиной указанного выше подковообразного выреза. В случае плоской геометрии электрода радиус кривизны «подковы» резко возрастает (в сравнение с электродом сферической и цилиндрической геометрии), и для бесконечно большой пластины радиус кривизны подковы стремится к бесконечности. На краях пластины  $x = \pm r_0$  (точки 1 и 2) высота купола ФРИ меньше, чем в центре пластины  $x = 0$  (точка 3). Это обусловлено тем обстоятельством, что на краях пластины большая напряженность электрического поля, следовательно, и большая плотность тока. А чем больше ионов уходит из пристеночной области в единицу времени, тем меньше их остается в единицу объема, поэтому уменьшается наполнение купола ФРИ. Аналогичный эффект имеет место и для электронов, для которых наполнение ФРЭ вблизи стенки меньше, чем на некотором удалении от нее. Однако причина здесь другая: пластина имеет отрицательный потенциал и отталкивает электроны.

Еще одна особенность ФРИ, приведенных на рисунках I.3.10, I.3.11, заключается в том, что в точке 1 центр тяжести ФРИ смещен относительно её центра тяжести в точке 2. Причина этого смещения следующая: электрическое поле на краях пластины имеет составляющую не только по оси  $Y$  (по нормали к пластине), но и по оси  $X$ . При этом в точке 1 ионы ускоряются в положительном направлении оси  $X$ , а в точке 2 — в обратном. Появление этих противоположно направленных движений и приводит к смещению центров тяжести ФРИ относительно друг друга на противоположных краях пластины.



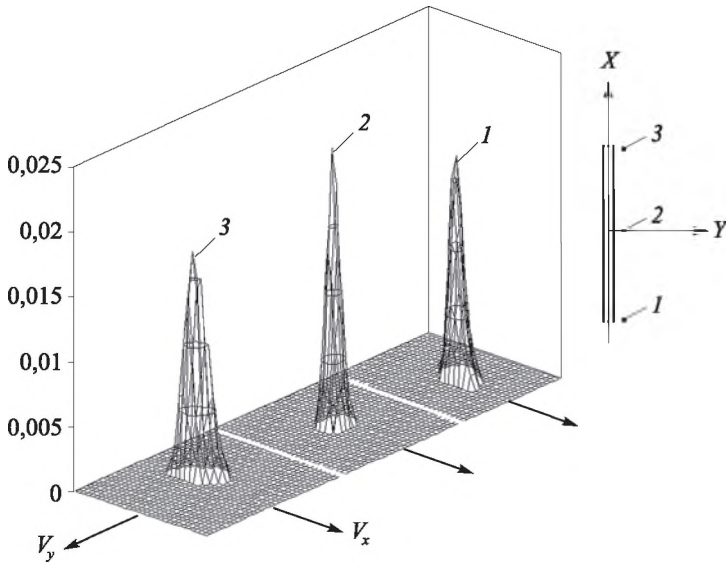


Рис. I.3.10. Функции распределения ионов ( $u_0 = 0$ ,  $2r_0 = 100$ ,  $\phi_0 = -10$ ,  $\epsilon = 1$ )

Рассмотрим далее ФРИ вблизи электрода, расположенного на большой диэлектрической поверхности.

Как и в случае изолированного зонда, параметрами задачи являются величины  $r_0 = r_p / M_r$ ,  $\phi_0 = \phi_p / M_\phi$ ,  $u_0 = u_\infty / M_{u_0}$ ,  $\epsilon = T_i / T_e$ .

Масштабы  $M_r$ ,  $M_\phi$ ,  $M_{u_0}$  и другие указаны в главе I.3 (раздел I.3.3).

Потенциал зонда  $\phi_0$  поддерживается постоянным за счет внешнего источника напряжения, а потенциал охранных электродов, если они имеются, равен, как правило, потенциалу зонда  $\phi_0$ ;  $\phi_{\text{оxp}}$  также считается заданным. Варьируя потенциал  $\phi_0$ , можно получить вольтамперную характеристику пристеночного электрода, являющуюся основным источником информации о параметрах плазмы.

В случае  $u_0 = 0$  функция распределения ионов (ФРИ) приведена на рисунке I.3.11 при значении отрицательного потенциала  $\phi_0 = -10$  и значении плавающего потенциала  $\phi_{\text{плав}} = -1$ . В правой стороне рисунка I.3.11 указаны точки вблизи поверхности зонда, в которых получены ФРИ.

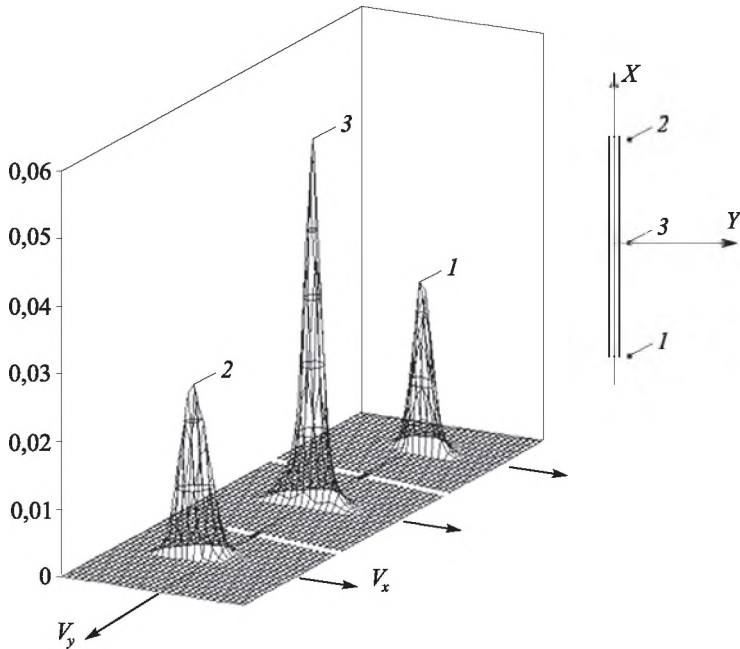


Рис. I.3.11. ФРИ плоского пристеночного электрода ( $2r_0 = 10, \varepsilon = 1, u_0 = 0$ )

Из рис. I.3.10, I.3.11 вытекают следующие выводы.

- ФРИ плоского пристеночного электрода в случае покоящейся плазмы близки к ФРИ выносных изолированных зондов.
- Наполнение купола ФРИ на краю пластины (точки 1, 2) меньше, чем в ее центре (точка 3), что связано с наличием краевого эффекта. Это различие сглаживается с уменьшением разности потенциалов между  $\Phi_0$  и  $\Phi_{\text{плav}}$ .
- Наполнение купола ФРИ снижается также с ростом отрицательного потенциала  $\Phi_0$ , так как при этом может возрастать зондовый ток, что ведет к уменьшению концентрации ионов в призондовой области.
- Центр тяжести ФРИ в точке 1 смещен вдоль оси  $v_x$  относительно ее центра тяжести в точке 3, поскольку на краю пластины имеется составляющая напряженности электрического поля  $E_x$ , которая ус-

коряет ионы в положительном направлении оси  $x$ , а в точке 3 таковой составляющей  $E_x$  нет.

Поскольку концевой эффект в покоящейся плазме отсутствует, приведенные на рисунке I.3.11 ФРИ позволяют в чистом виде оценить роль краевого эффекта и его влияние на зондовый ток.

**Пример 2.** ФР в случае движущейся плазмы вблизи заряженного цилиндра и плоскости [9].

Вначале рассмотрим ФРИ и ФРЭ вблизи заряженного цилиндра.

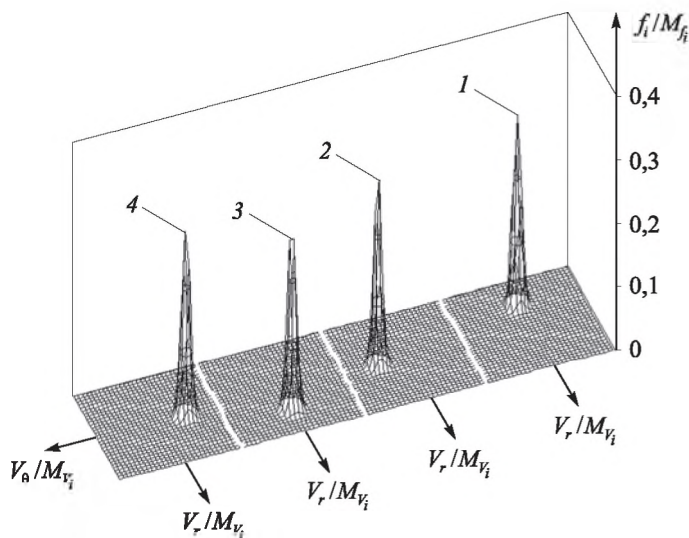


Рис. I.3.12. Начальная функции распределения ионов ( $u_0 = 5$ ):

1 —  $\theta = 0$ ; 2 —  $\pi/2$ ; 3 —  $\pi$ ; 4 —  $3\pi/2$

На рис. I.3.12, I.3.13 приведены ФР ионов и электронов при тех же условиях, что и на рис. I.3.8. Центр тяжести ФРЭ не имеет практически заметного сдвига относительно начала координат, так как в задаче используются парциальные масштабы для скоростей ионов и электронов. Отношение этих масштабов для водородной плазмы при  $\epsilon = 1$  имеет вид

$$M_{v_i} / M_{v_e} = \sqrt{\frac{T_e m_i}{T_i m_e}} \approx 42.$$

Отсюда следует, что скорость  $u_0 = 5$ , используемая в расчете, при переводе в электронный масштаб равна примерно 0,1 и не может оказать какого-либо заметного влияния на ФР электронов.

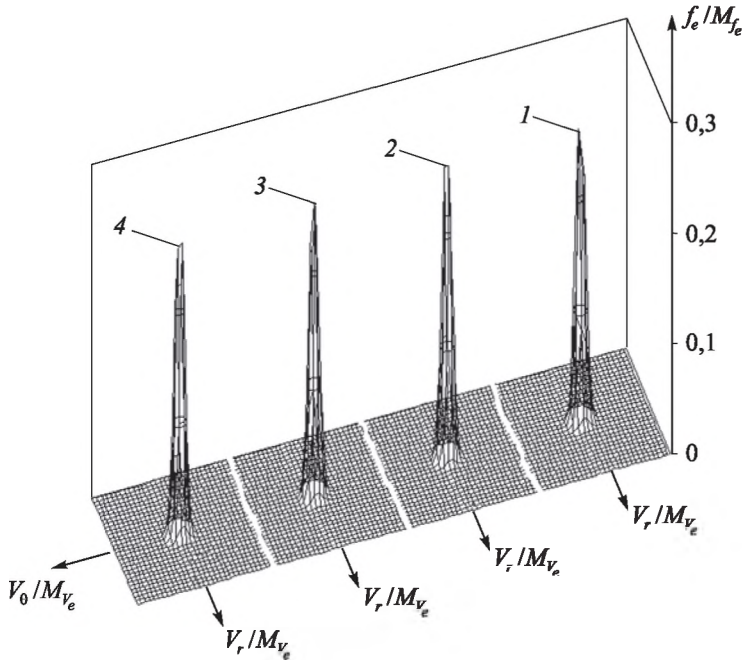


Рис. I.3.13. Начальная функции распределения электронов ( $u_0 = 5$ ):  
 1 —  $\theta = 0$ ; 2 —  $\pi/2$ ; 3 —  $\pi$ ; 4 —  $3\pi/2$

При обтекании тел потоком плазмы возникает характерное изменение параметров плазмы с теневой части за телом (след), которое может протянуться на десятки и даже сотни радиусов Дебая. Следующие графики посвящены особенностям ФР ионов в различных точках вышеуказанного следа. На рис. I.3.14 приведена зависимость функции распределения ионов от расстояния до стенки цилиндра при  $\theta = \pi$ . Обнаружено разделение ФР ионов в теневой части на два купола, причем оба купола симметричны относительно плоскости  $(u_{\infty}, z)$ . Существование ионов, имеющих координаты в фазовом пространстве, соответствующие области между отдельными частями ФР ионов, физически невозможно. Если провести

численное интегрирование по времени уравнений движения в сторону нулевого значения временной координаты для некоторой условной положительной частицы, расположенной в фазовом пространстве в точке, соответствующей области между двумя частями ФР ионов в пространстве скоростей, то мы в итоге попадаем в область расположения цилиндра, поэтому такие частицы не имеют физического смысла. Таким образом, наличие в движущейся плазме заряженного тела вызывает возникновение областей в фазовом пространстве (далее будем называть их запрещенными областями), в которых ионы, как фазовые частицы, физически могли бы находиться только в том случае, если бы само тело было бы их источником. Сами же горбы ФРИ соответствуют потокам ионов, которые огибают цилиндр с одной и с другой его боковой стороны, в чем можно убедиться, если провести численное интегрирование по времени уравнений движения в сторону нулевого значения временной координаты для положительной частицы, имеющей в фазовом пространстве координаты, соответствующие области горба ФР ионов в пространстве скоростей.

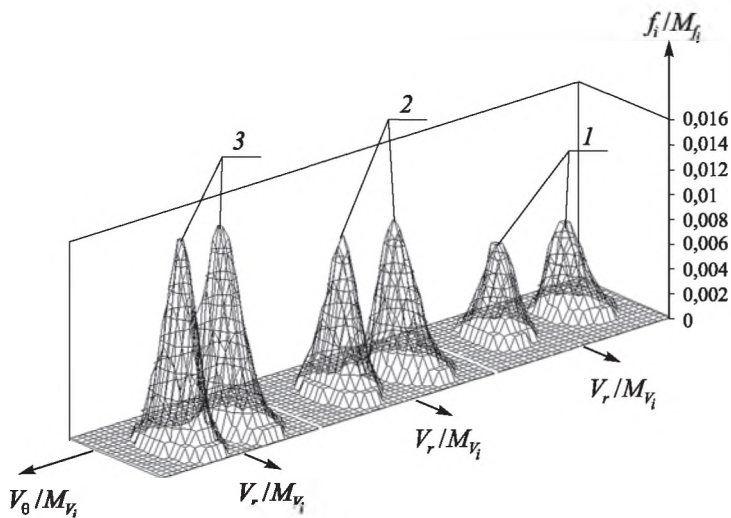


Рис. I.3.14. Зависимость функции распределения ионов от расстояния до стенки цилиндра ( $r_0 = 3$ ,  $\varphi_0 = -6$ ,  $u_0 = 5$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $B_0 = 0$ ,  $\theta = \pi$ ):  
 1 —  $r = 4,8$ ; 2 —  $8,4$ ; 3 —  $13,8$

Высота горбов и объем под графиком ФР уменьшаются по мере приближения к стенке цилиндра в соответствии с падением концентрации ионов. Сами горбы при этом смещаются в сторону уменьшения положительной радиальной скорости, поскольку по мере приближения к стенке становятся возможными меньшие положительные радиальные скорости ионов, а у самой стенки могут быть относительно небольшие по модулю отрицательные радиальные скорости, соответствующие тем ионам, которые в результате электростатического притяжения тела движутся в сторону цилиндра. Расстояние между горбами по мере приближения к стенке растет, так как растет ширина запрещенной области. Данный эффект аналогичен эффекту уменьшения загиба подковы ФР для сферического зонда в покоящейся плазме при увеличении радиальной координаты [11]. Но в отличие от того случая здесь вместо подковообразного возникает сквозной вырез, поскольку ФР ионов практически целиком сдвигается в зону положительных радиальных скоростей, а запрещенная область также находится в этой зоне. ФР ионов и запрещенная область накладываются друг на друга, и в результате возникает сквозной вырез и ФР делится на две части.

На рис. I.3.15 представлена зависимость функции распределения ионов от угловой координаты  $\theta$  в теневой части цилиндра. При смещении от фронтальной точки теневой области (ФР 1) в сторону уменьшения (или в силу симметрии увеличения) угловой координаты высота одной из частей ФР растет, другой — уменьшается. В итоге, выйдя за границу «следа», мы приходим к ФР ионов правильной округлой формы (один из горбов исчезнет совсем). Это явление объясняется тем, что при изменении угловой координаты взаимное расположение запрещенной области и ФР ионов изменяется и степень их наложения друг на друга уменьшается. ФР ионов в данном случае смещается в сторону положительных азимутальных скоростей, запрещенная область тоже меняет свое расположение и форму, но в меньшей степени.

При углах, близких к  $\pi/2$  в случае достаточно больших скоростей  $u_0$ , возможно полное отсутствие наложения ФР ионов и запрещенной области друг на друга. На рис. I.3.16 представлен соответствующий график зависимости функции распределения ионов от расстояния до стенки цилиндра при  $\theta = \pi/2$ . По мере приближения к стенке цилиндра объем

под куполом ФР ионов уменьшается в соответствии со снижением концентрации ионов.

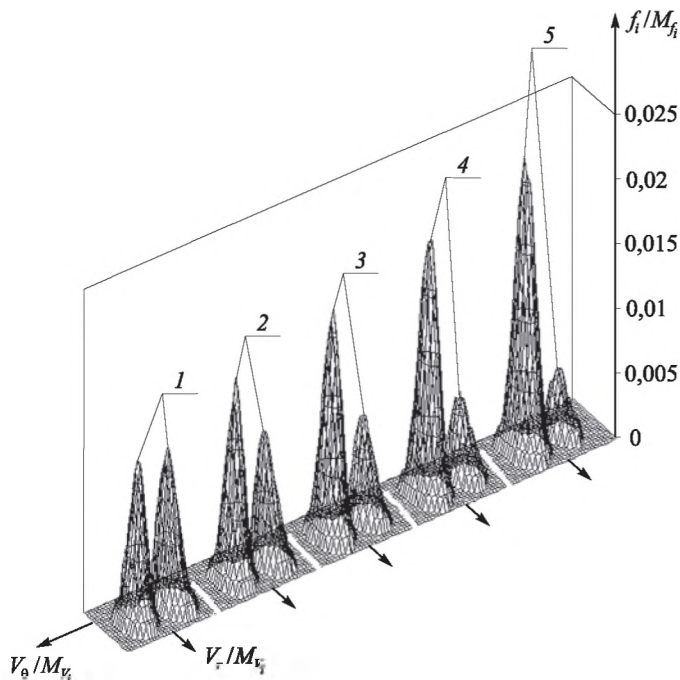


Рис. I.3.15. Зависимость функции распределения ионов от угла  $\theta$

$$(r_0 = 3, \varphi_0 = -6, u_0 = 5, \varepsilon = 1, B_0 = 0, r = 9 r_D):$$

$$1 — \theta = 180^\circ; 2 — 172^\circ; 3 — 164^\circ; 4 — 156^\circ; 5 — 148^\circ.$$

В лобовой части цилиндра возникает похожая ситуация, представленная на рис. I.3.17. Отличие от рис. I.3.16 заключается в том, что ФР ионов у стенки имеет больший объем под графиком в силу того, что концентрация в лобовой части выше, чем в боковой.

Кроме того, если ФР ионов у стенки на рис. I.3.16 несколько растянута по радиальной координате скорости, то соответствующая ФР ионов на рис. I.3.17 — по азимутальной, что соответствует ускоряющимся под воздействием электростатического поля тела ионам, движущимся мимо тела по направлениям, близким к касательной к цилиндру.

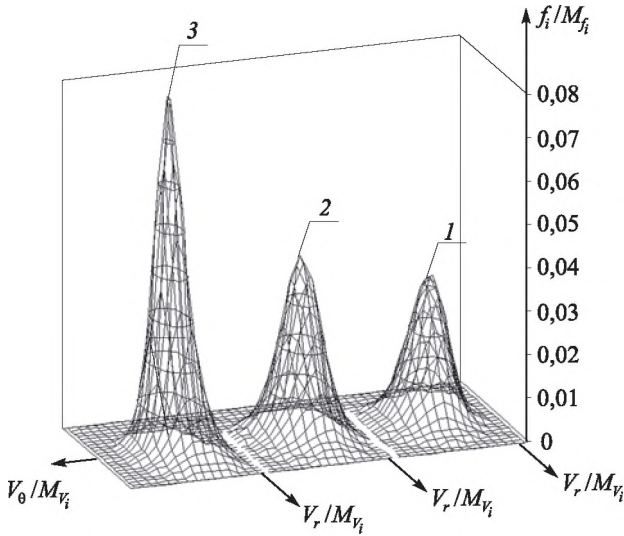


Рис. I.3.16. Зависимость функции распределения ионов от расстояния до стенки цилиндра, боковая область ( $r_0 = 3$ ,  $\varphi_0 = -6$ ,  $u_0 = 5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $B_0 = 0$ ,  $\theta = \pi/2$ ): 1 —  $r = 4,8$ ; 2 —  $5,5$ ; 3 —  $8$

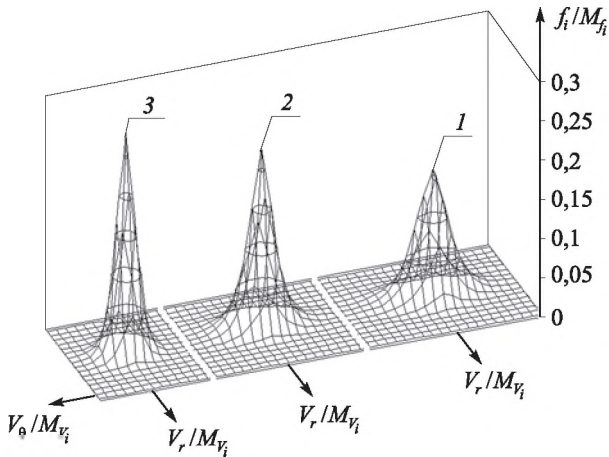


Рис. I.3.17. Зависимость функции распределения ионов от расстояния до стенки цилиндра, лобовая область ( $r_0 = 3$ ,  $\varphi_0 = -6$ ,  $v_0 = 5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $B_0 = 0$ ,  $\theta = 0$ ): 1 —  $r = 4,8$ ; 2 —  $8,4$ ; 3 —  $13,8$



Каких-либо существенных особенностей для ФР электронов вычислительный эксперимент не показал. Соответствующие графики представлены на рис. I.3.18–I.3.20.

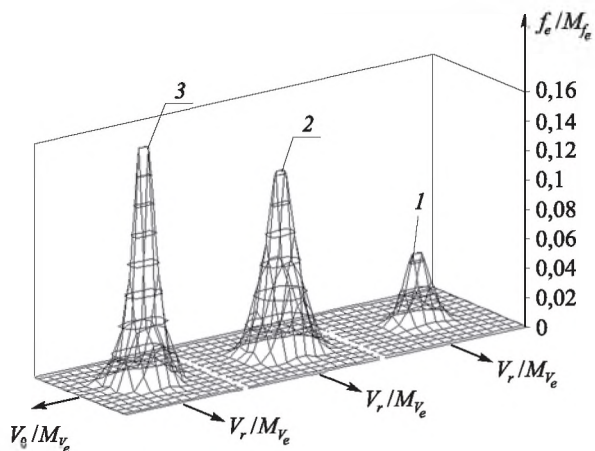


Рис. I.3.18. Зависимость функции распределения электронов от расстояния до стенки цилиндра, лобовая область ( $r_0 = 3$ ,  $\varphi_0 = -6$ ,  $u_0 = 5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $B_0 = 0$ ,  $\theta = 0$ ): 1 —  $r = 3,8$ ; 2 —  $8,4$ ; 3 —  $13,8$

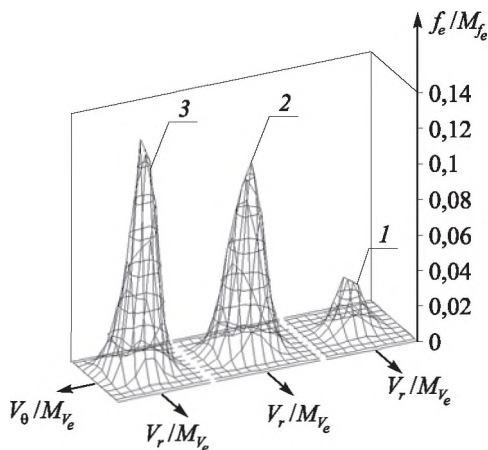


Рис. I.3.19. Зависимость функции распределения электронов от расстояния до стенки цилиндра, боковая область ( $r_0 = 3$ ,  $\varphi_0 = -6$ ,  $u_0 = 5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $B_0 = 0$ ,  $\theta = \pi/2$ ): 1 —  $r = 4,8$ ; 2 —  $8,4$ ; 3 —  $13,8$

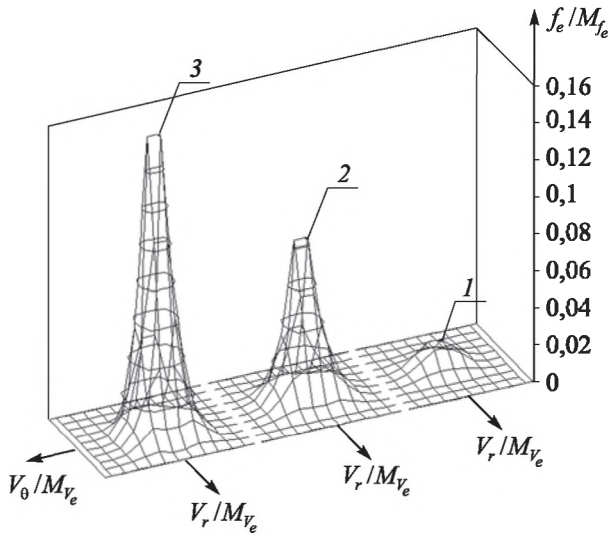


Рис. I.3.20. Зависимость функции распределения электронов от расстояния до стенки цилиндра, теньевая область ( $r_0 = 3$ ,  $\varphi_0 = -6$ ,  $u_0 = 5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $B_0 = 0$ ,  $\theta = \pi$ ): 1 —  $r = 4,8$ ; 2 —  $8,4$ ; 3 —  $13,8$

Объем под куполом ФР электронов уменьшается, если двигаться по обводу цилиндра от лобовой к теньевой части. При  $\theta = 0$  он выше, так как там выше концентрация электронов в результате набегания потока плазмы. При  $\theta = \pi/2$  концентрация уменьшается; соответственно, уменьшается и объем под графиком ФР электронов. При  $\theta = \pi$  в теньевой области тела он минимален. Для ФР электронов при отрицательных потенциалах тел не характерны какие-либо вырезы, поскольку в фазовом пространстве отсутствуют ярко выраженные области, в которых электрон, как фазовая частица, физически не может находиться. Наличие таких областей всегда было связано с невозможностью существования частиц, летящих от тела с соответствующими скоростями. Но для электронов при отрицательных потенциалах тела такие частицы вполне возможны, так как электрон, летящий к телу из бесконечности, тормозится электростатическим полем и может, пройдя через точку разворота, двигаться далее обратно в бесконечность.

Перейдем теперь к рассмотрению ФР плазмы вблизи плоской поверхности при наличии направленной скорости потока. Скорость потока предполагается направленной вдоль плоской поверхности либо перпендикулярно к ней. Плоская проводящая поверхность может быть изолированной либо находиться на большой диэлектрической поверхности.

На рисунке I.3.21 даны ФРИ при значении направленной скорости плазмы вдоль пластины  $u_0 = 5$  (пластина изолирована). Структура куполов ФРИ в основном напоминает рисунок I.3.10.

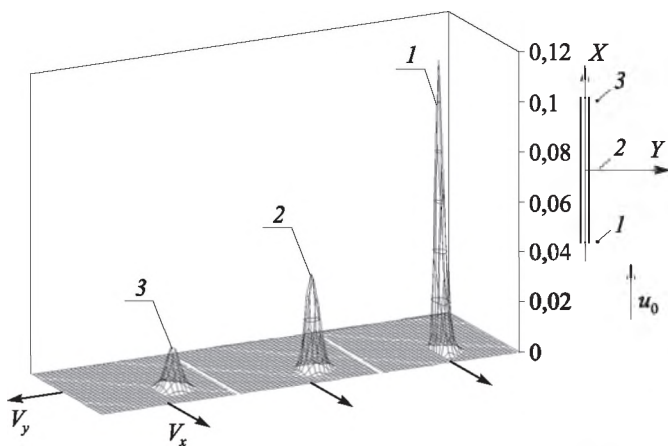


Рис. I.3.21. Функции распределения ионов ( $2r_0 = 100$ ,  $\varphi_0 = -10$ ,  $u_0 = 5$ ,  $\varepsilon = 1$ )

Под влиянием направленной скорости все представленные на рисунке I.3.21 ФРИ сдвинуты по оси  $V_x$  на величину  $u_0 = 5$ . Наполнение купола ФРИ в точке 1 больше, чем в точке 2, что связано с совместным влиянием направленной скорости (концевой эффект) и краевого эффекта. Направленный поток плазмы поступает в возмущенную зону плоскости. Под влиянием электрического поля пластины ионы притягиваются к пластине и создают ионный ток. На начальном участке пластины велика роль конвекции по сравнению с притяжением, и поэтому плотность ионного тока меньше, чем на более удаленных участках. Соответственно, концентрация ионов вблизи точки 1 оказывается больше, и наполнение купола ФРИ также больше, чем в более удаленных точках. С ростом

$u_0$  растет длина участка вдоль оси  $X$ , на котором наполнение купола ФРИ остается относительно высоким. Если параметр  $r_0$  небольшой, то этот начальный участок может распространяться на всю ширину пластины. В случае относительно больших значений  $r_0$  участок с высоким наполнением купола ФРИ составляет незначительную долю пластины, и влиянием краевого (и краевого) эффекта на зондовый ток можно пренебречь. С увеличением потенциала  $\phi_0$  растет величина напряженности электрического поля, притягивающего ионы к пластине, и размер начального участка с относительно большим наполнением купола ФРИ сокращается. Отметим еще одну особенность ФРИ, представленных на рисунке I.3.21. Наполнение купола ФРИ в точке 1 (есть концевой и краевой эффект) сильно отличается от наполнения ФРИ в точке 3 (есть только краевой эффект). Это означает, что при значении направлений скорости  $u_0 = 5$  роль краевого эффекта значительно больше, чем роль концевой эффект.

На рисунке I.3.22 приведены функции распределения электронов (ФРЭ) в точке 1.

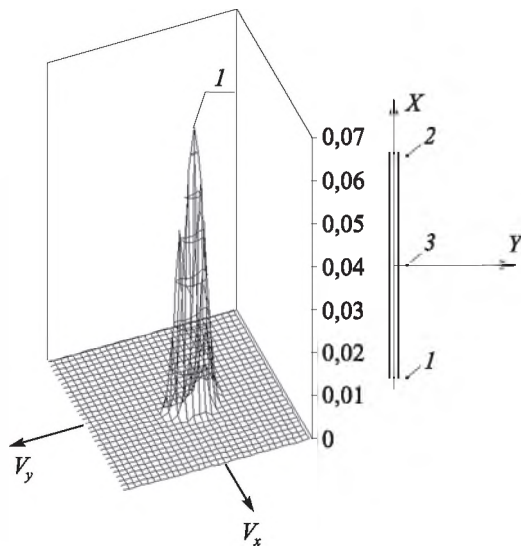


Рис. I.3.22. ФРЭ в точке 1 ( $u_0 = 0$ ,  $2r_0 = 100$  и  $\phi_0 = 5$ ,  $\varepsilon = 1$ )

Ввиду относительно большой тепловой скорости электронов ФРЭ в различных точках вблизи пластины и при разных скоростях потока близки.

Перейдем к рассмотрению плоского изолированного электрода, активная поверхность которого ориентирована навстречу вектору скорости плазмы. Электрод в виде удлиненного прямоугольника имеет ширину  $2r_p$  и потенциал  $\phi_p$ . Ось  $Y$  декартовой системы координат направлена по нормали к активной поверхности электрода и антипараллельна вектору направленной скорости  $u_\infty$ .

В случае  $u_0 = 0$  ФРИ в данном случае полностью совпадают с ФРИ, приведенными на рисунке I.3.10 для покоящейся плазмы. На рисунке I.3.23 даны ФРИ, полученные в результате численного решения задачи Власова–Пуассона при наличии направленной скорости потока плазмы.

Все представленные на рисунке I.3.23 ФРИ сдвинуты по оси  $Y$  на величину направленной скорости  $u_0 = 5$ . Наполнение купола ФРИ в точках 1 и 3 меньше, чем в точке 2, что связано с наличием краевого эффекта, который аналогичен случаю покоящейся плазмы. Однако влияние краевого эффекта на зондовый ток в данном случае снижается, поскольку с ростом величины  $u_0$  составляющая ионного тока, связанная со скоростью, растет пропорционально  $u_0$ , а составляющая, связанная с большой напряженностью электрического поля на краях пластины, изменяется мало. Роль краевого эффекта снижается также с увеличением ширины пластины  $r_0$  и уменьшением ее потенциала  $\phi_0$ . Параметр  $\epsilon$  может играть заметную роль, когда тепловая составляющая ионного тока сравнима с составляющей, вызываемой направленным движением. И даже в этом случае, как показано в работах [11], в интервале  $0,5 \leq \epsilon \leq 1$  его влиянием на ионный ток можно пренебречь.

Концевого эффекта в случае плоского зонда, ориентированного навстречу потоку, вообще не наблюдается.

На рис. I.3.24–I.3.25 приведены ФРИ плазмы вблизи пристеночных электродов.

На рисунке I.3.24 приведены ФРИ плоского пристеночного зонда при тех же параметрах задачи, что и на рисунке I.3.11, но при наличии направленной скорости потока  $u_0 = 5$ .

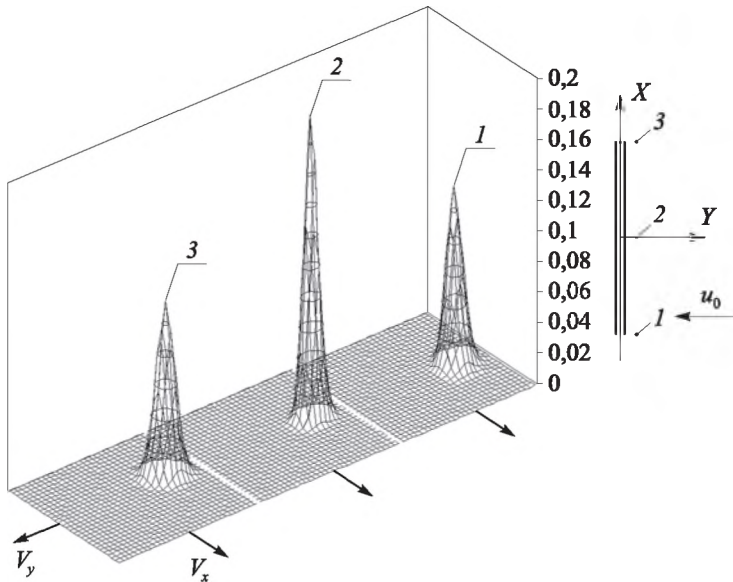


Рис. I.3.23. ФРИ вблизи электрода, ориентированного навстречу потоку  
 $(2r_0 = 100, \varphi_0 = -10, u_0 = 5, \varepsilon = 1)$

Аналогично случаю изолированного электрода, ориентированного вдоль потока, все ФРИ, приведенные на рисунке I.3.24, имеют сдвиг по оси  $x$  на величину направленной скорости  $u_0 = 5$ . Вследствие концевой эффекта наполнение ФРИ в точке 1 больше, чем в точках 2, 3. Как следует из численных экспериментов, концевой и краевой эффекты напрямую связаны с разностью потенциалов между зондом и  $\varphi_{\text{плav}}$ .

Проведенные вычислительные эксперименты при различных  $r_0$  ( $3 \leq 2r_0 \leq 100$ ) и  $u_0$  ( $0 \leq u_0 \leq 5$ ) позволяют сделать следующие заключения:

- при малых  $r_0$  наполнение ФРИ в точке 1 и наполнение в точке 2 близки, т. к. концевой и краевой эффекты оказывают влияние на поглощение ионов поверхностью и в точке 1, и в точке 2 почти в равной степени;

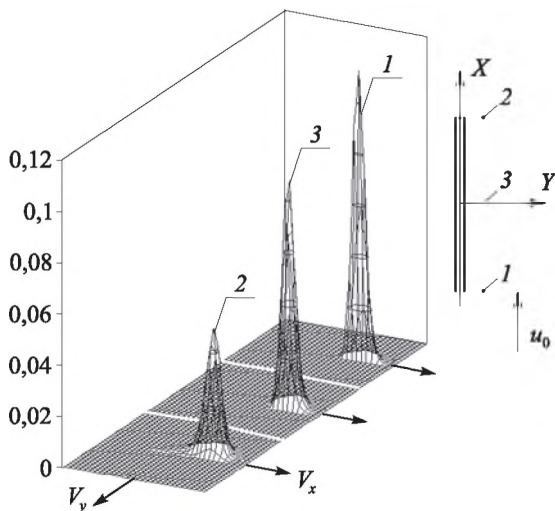


Рис. I.3.24. ФРИ плоского зонда ( $2r_0 = 10$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $u_0 = 5$ )

- при увеличении размера зонда ( $r_0 \geq 100$ ) влияние концевго эффекта не достигает центра пластины, поэтому наполнение купола ФРИ в точке 1 заметно больше, чем в точке 3;
- с ростом направленной скорости  $u_0$  область, захватываемая концевым эффектом, растет, поэтому при  $2r_0 = 10$ ,  $u_0 = 5$  отличие в наполнении куполов ФРИ в точках 1 и 3 менее выражено, чем в случае  $2r_0 = 10$ ,  $u_0 = 1$ .

Профили функций распределения электронов (ФРЭ) в случае пристеночных электродов близки к соответствующим ФРЭ для выносных изолированных электродов, поэтому в данном разделе не приводятся.

Перейдем к рассмотрению ФРИ плоских пристеночных электродов ленточного типа, расположенных в лобовой части спутника и поэтому ориентированных навстречу потоку. В случае  $u_0 = 0$  профили ФРИ полностью совпадают с ФРИ электродов, ориентированных параллельно потоку.

На рисунке I.3.25 представлены ФРИ в зависимости от параметров задачи.

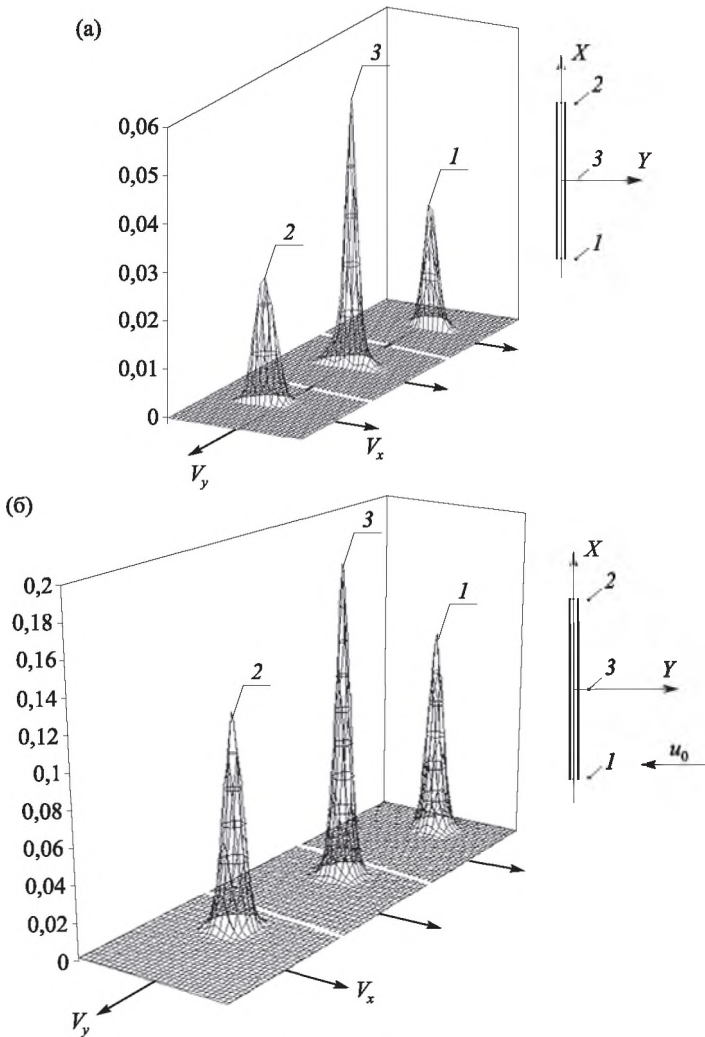


Рис. I.3.25. ФРИ электродов, ориентированных поперек потока:  
 (а)  $2r_0 = 10$ ,  $\varphi_0 = -10$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $u_0 = 0$ ; (б)  $2r_0 = 10$ ,  $\varphi_0 = -10$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $u_0 = 5$

Приведенные на рисунке I.3.25 ФРИ подтверждают те выводы, которые были сделаны относительно плоских изолированных электродов, ориентированных вдоль потока. Кратко их перечислим.



- На плоскости  $(v_x, v_y)$  центры тяжести ФРИ сдвинуты по оси  $v_y$  на величину направленной скорости  $u_0$ .
- Наполнение куполов ФРИ в точке 1 меньше, чем в точке 3, что связано с влиянием краевого эффекта.
- С ростом направленной скорости  $u_0$  роль краевого эффекта снижается, так как с увеличением  $u_0$  снижается относительный вклад краевого эффекта в зондовый ток.
- С повышением потенциала  $\phi_0$ , наоборот, роль краевого эффекта растет.
- С увеличением параметра  $r_0$  относительный вклад краевого эффекта в зондовый ток снижается, так как отношение площади электрода, где нет краевого эффекта, к площади, где он существует, увеличивается.
- Электрод, ориентированный поперек потока, позволяет в чистом виде оценить краевой эффект, поскольку в этом случае концевой эффект нет в принципе.
- Функции распределения электронов для электродов, ориентированных навстречу потоку, в данном случае мало отличаются от ФРЭ, приведенных на рис. I.3.22, поскольку хаотическая скорость электронов на несколько порядков превышает направленную скорость плазмы  $u_0$ .
- Особенности в профилях ФРИ и ФРЭ сказываются и на распределении концентрации ионов и электронов и плотности токов на электрод, поскольку они являются моментами ФРИ и ФРЭ.

**Пример 3.** Эволюция ФР в покоящейся и движущейся плазме вблизи цилиндрического электрода [62].

Рассматривается разреженная покоящаяся плазма с максвелловскими ФРИ и ФРЭ. В плазму вносится цилиндрическое тело радиусом  $r_0 = 3$  и потенциалом  $\phi_0 = -10$ . Выбираем точку вблизи цилиндра на расстоянии  $r = 4,8$ .

На рис. I.3.26 показана эволюция ФРИ от максвелловского распределения  $t = 0$  до момента установления  $t = t_{уст}$ . ФРИ представлены в форме изолиний, которые отличаются одна от другой оттенками цвета. Рисунок наглядно показывает на плоскости  $(v_r, v_\theta)$  последовательные стадии перехода ФР от осесимметричной при  $t = 0$  до подковообразной при  $t = t_{уст}$ .

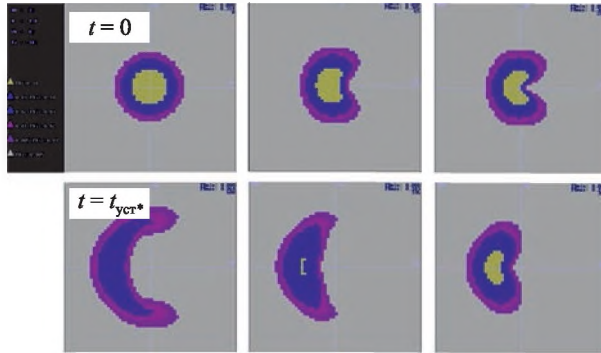


Рис. I.3.26. Эволюция функции распределения ионов в покоящейся плазме

На рис. I.3.27 показана эволюция ФРИ в движущейся плазме со скоростью  $u_0 = 5$  около цилиндрического тела радиусом  $r_0 = 3$  с потенциалом  $\varphi_0 = -10$ . Точка наблюдения выбрана в следе на расстоянии  $r = 4,8$ . ФРИ изображены в форме изолиний от момента внесения цилиндра в поток ( $t = 0$ ) до момента установления ( $t = t_{уст}$ ), когда ФРИ представляется в виде двух куполов, отстоящих один от другого.

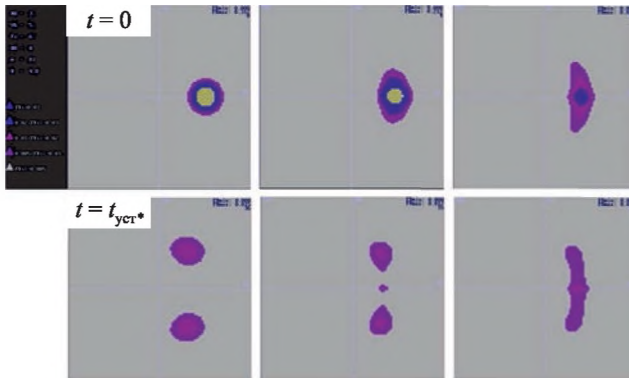


Рис. I.3.27. Эволюция функции распределения ионов в следе за цилиндром

На рис. 1.3.28 представлена зависимость установившихся ФРИ в среде за заряженным цилиндром на различных удалениях от поверхно-

сти цилиндра. ФРИ представлена в форме изолиний. Рисунок наглядно показывает, как по мере удаления от цилиндра расстояние между двумя горбами ФРИ в следе постепенно сокращается и происходит переход в одногорбую ФРИ в невозмущенной цилиндром плазме.

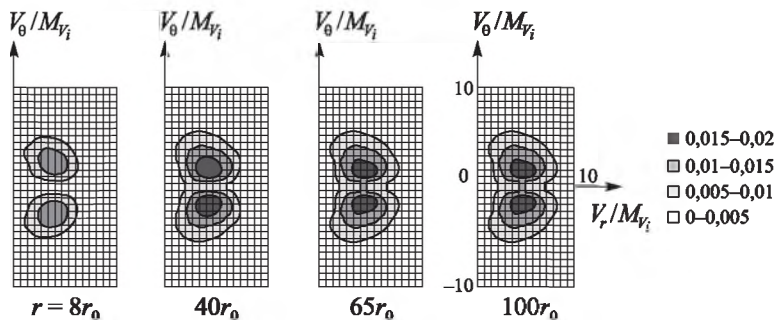


Рис. 1.3.28. Изолинии ФРИ при различных значениях радиальной координаты  $r$  в области следа за цилиндром ( $v_0 = 5, r_0 = 0,1, \Phi_0 = -6, \epsilon = 1, B_0 = 0, \theta = \pi$ )

**Пример 4.** ФР в потоке плазмы, истекающей из сопла ЭРД прямоугольной формы [1].

Рассматривается ЭРД с соплом в виде удлиненного прямоугольника. В декартовой системе координат ось  $Y$  совпадает со скоростью истекающего потока плазмы, ось  $X$  направлена вдоль короткой стороны прямоугольника, ось  $Z$  — вдоль удлиненной.

Полуширина короткой стороны  $r_0$  и направленная скорость потока  $u_0$  на срезе сопла считаются заданными.

На рис. 1.3.29,  $a-d$  приведены функции распределения ионов и электронов на оси потока ( $x=0$ ) при различных значениях координаты  $y$  в зависимости от параметров задачи  $r_0, u_0, \epsilon$ . Значения координаты  $y$  указаны на рисунках для каждой ФР в правом верхнем углу.

Поскольку полученные в численных экспериментах ФРИ и ФРЭ являются основным источником информации о полях концентраций заряженных частиц и их скоростей, проведем их анализ.

- На срезе сопла ФР в соответствии с граничными условиями представляет собой максвелловское распределение со сдвигом по скорости вдоль оси  $v_y$  на величину  $u_0$ . По мере удаления от среза сопла высота купола ФРИ снижается, и он становится более широким

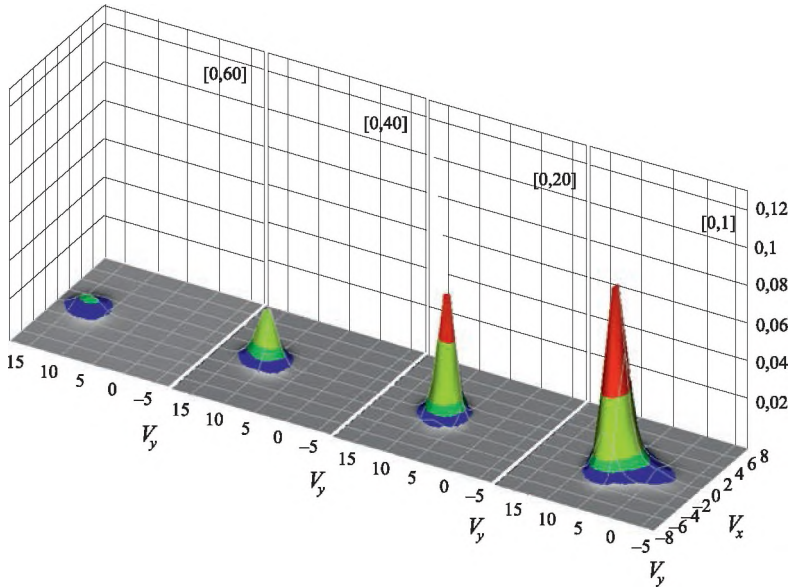
при основании. Это свидетельствует о перераспределении частиц в пространстве скоростей за счет взаимодействия с возникающим самосогласованным электрическим полем. При увеличении координаты  $y$  происходит уменьшение наполнения купола ФРИ, что свидетельствует о расширении потока плазмы и его постепенном «распаде». По мере удаления от оси потока вдоль оси  $x$  высота купола ФРИ и его наполнение уменьшается, что свидетельствует о понижении концентрации заряженных частиц на краях потока.

- Рассмотрим влияние на ФРИ характерных параметров задачи.
  1. При относительно небольших скоростях ( $u_0 \leq 4$ ) струя может «распадаться» уже на расстоянии  $y \sim 60$  (рис. I.3.29, *a, б*). При  $u_0 = 8 \div 10$  (рис. I.3.29, *г, д*) «распад» струи происходит на значительно больших расстояниях от сопла.
  2. С увеличением параметра  $r_0$  при удалении от среза сопла возрастает роль перераспределения частиц по скоростям, поскольку растёт область положительного объемного заряда и связанного с ним потенциала (рис. I.3.30). Вследствие этого ФРИ оказывается шире в проекции на плоскость  $(v_x, v_y)$ .
  3. Параметр  $\epsilon$  равен отношению температур ионов и электронов. Его уменьшение означает рост электронной температуры. Высокотемпературные электроны с большей вероятностью покидают поток плазмы и образуют около него электронное облако. Это способствует более быстрому «распаду» струи. Сравнение рисунков I.3.29, *б* и I.3.29, *в* свидетельствует, что при  $2r_0 = 13, u_0 = 4, \epsilon = 0,5$  на расстоянии  $y \sim 60$  струя практически распалась (наполнение ФРИ небольшое), а при  $\epsilon = 1$  и тех же значениях  $2r_0$  и  $u_0$  на том же расстоянии на срезе сопла струя еще существует (наполнение ФРИ существенно).

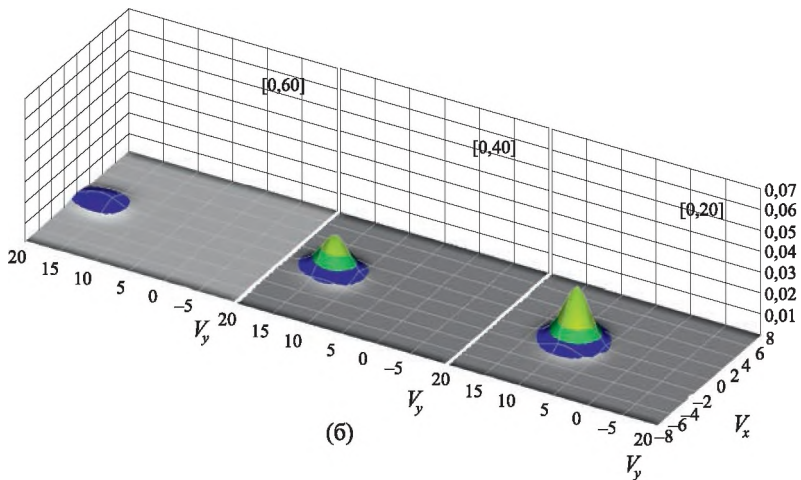
Функция распределения электронов в зависимости от координаты  $y$  мало меняется по сравнению с ее конфигурацией на срезе сопла. Это связано с тем, что направленная скорость электронов мала по сравнению с их тепловой скоростью.

На рис. I.3.30 приведены распределения потенциала вдоль оси  $y$  для потока, истекающего из ЭРД с прямоугольным соплом. Значения параметров  $2r_0, u_0, \epsilon$ , при которых производился расчет, указаны на рисун-

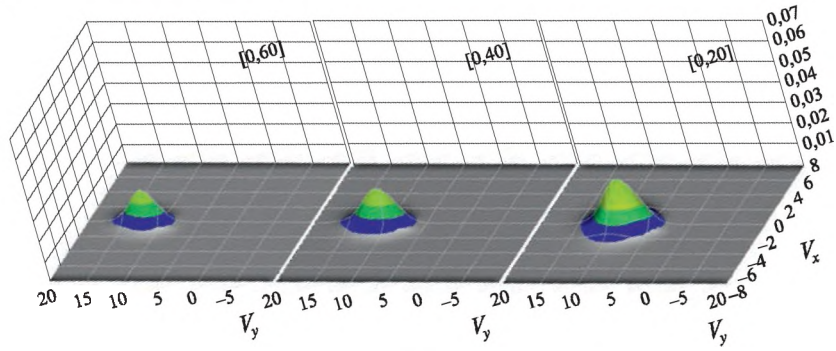
ке. Потенциал имеет характерный положительный скачок вблизи среза сопла, что связано с истечением электронов из сопла со скоростями, существенно превышающими скорость ионов.



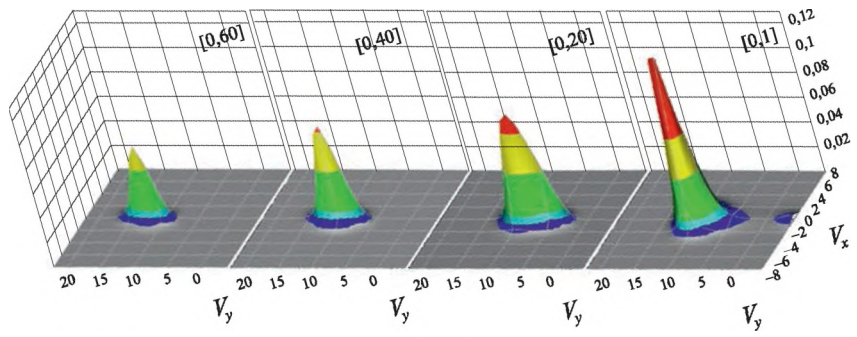
(a)



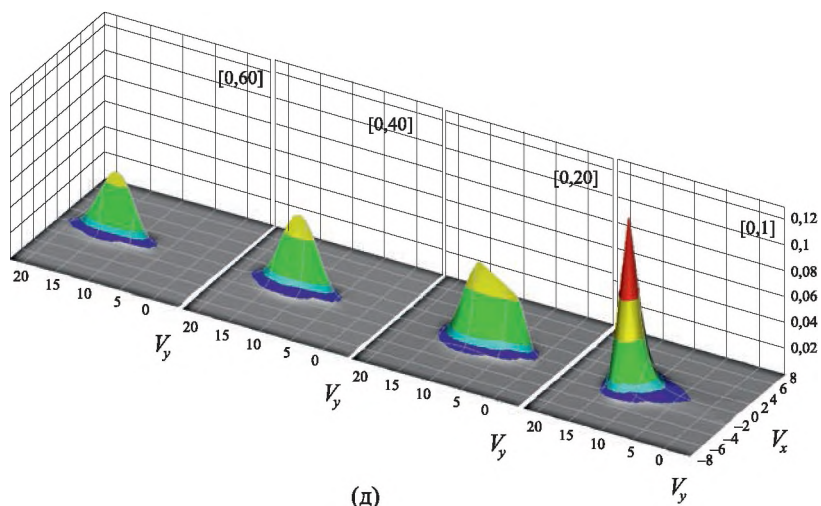
(б)



(b)



(r)



(д)

Рис. 1.3.29. а, б, в, г, д. ФРИ в зависимости от координаты  $y$  (при  $x=0$ ):

а) ( $u_0=4, 2r_0=7, \varepsilon=0,02$ ); б) ( $u_0=4, 2r_0=13, \varepsilon=0,5$ );

в) ( $u_0=4, 2r_0=13, \varepsilon=1,0$ ); г) ( $u_0=8, 2r_0=7, \varepsilon=1,0$ ); д) ( $u_0=10, 2r_0=13, \varepsilon=1,0$ )

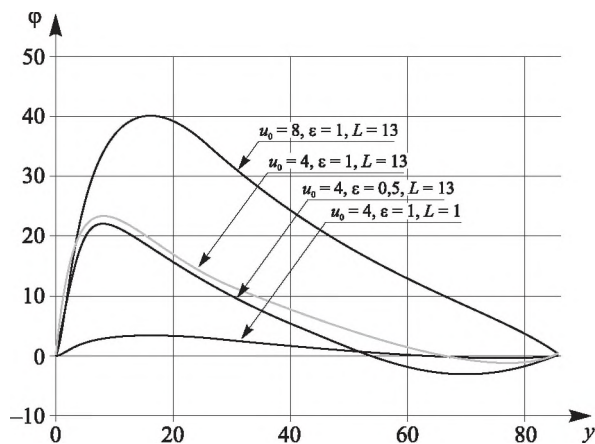


Рис. 1.3.30. Распределение потенциала вдоль оси  $Y$

Если параллельно оси  $Z$ , направленной вдоль удлиненной стороны сопла ЭРД, создать однородное магнитное поле индукции  $B_0$ , то под

действием силы Лоренца возникает поворот потока плазмы, что наглядно видно на рис. 1.3.31–1.3.33.

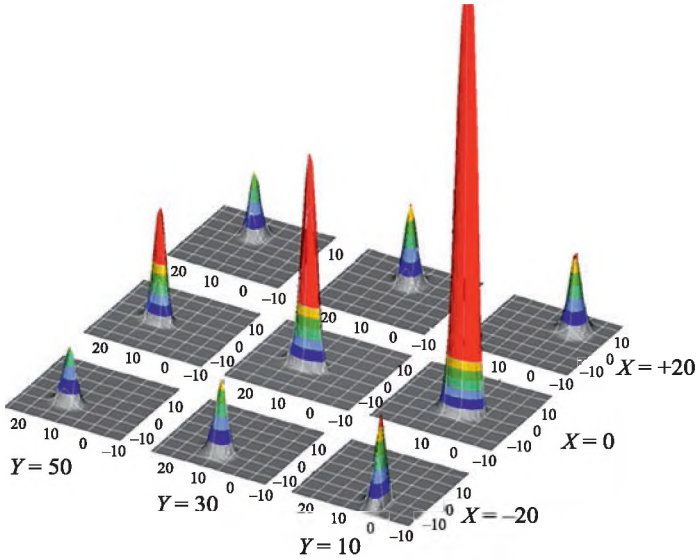


Рис. 1.3.31. Функции распределения ионов ( $B = 0,05$ ,  $u_0 = 4,0$ ,  $\varepsilon = 0,5$ ,  $2r_0 = 13$ )

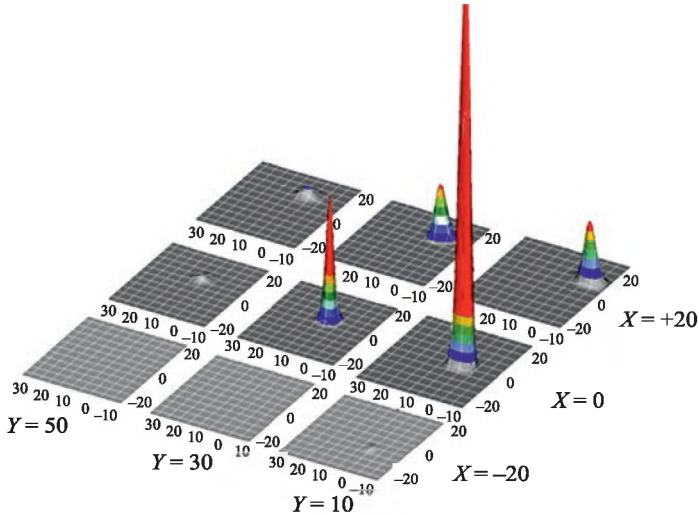


Рис. 1.3.32. Функции распределения ионов ( $B = 0,20$ ,  $u_0 = 4,0$ ,  $\varepsilon = 0,5$ ,  $2r_0 = 13$ )



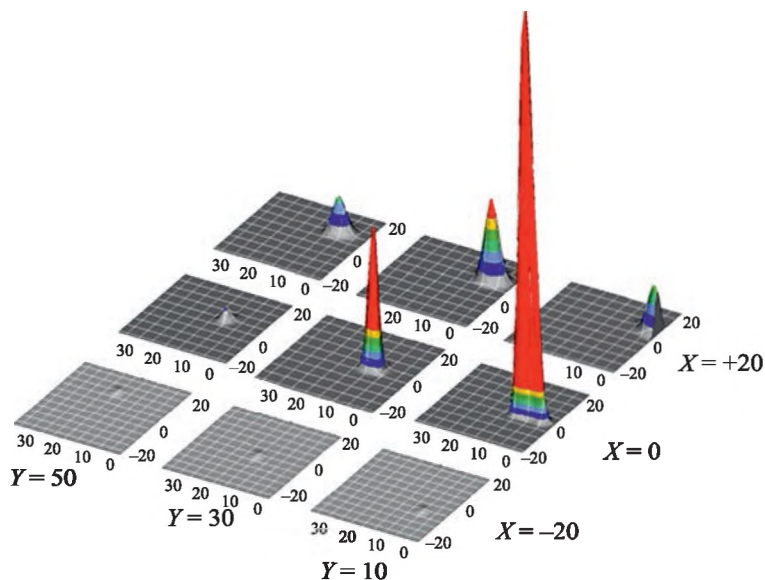


Рис. 1.3.33. Функции распределения ионов ( $B_0 = 0,25$ ,  $u_0 = 8,0$ ,  $\varepsilon = 1,0$ ,  $2r_0 = 13$ )

### Контрольные вопросы к главе 1.3

1. Каков алгоритм решения уравнения Власова методом крупных частиц Ю. М. Давыдова?
2. Каков алгоритм решения уравнения Власова методом характеристик?
3. В чем преимущество и недостатки усовершенствованного метода характеристик?
4. Каков алгоритм решения уравнения Пуассона?
5. Каков алгоритм метода установления применительно к решению системы Власова–Пуассона?
6. Каков физический смысл функций распределения ионов и электронов и каковы особенности ФРИ и ФРЭ в покоящейся плазме?
7. Каковы особенности ФРИ и ФРЭ в лобовой части при движении спутника в ионосфере?
8. Каковы особенности ФРИ и ФРЭ в боковой области при движении спутника в ионосфере?

---

9. Каковы особенности ФРИ и ФРЭ в теневой части спутника (в следе)?

10. Каковы особенности ФРИ и ФРЭ в потоке разреженной плазмы, истекающей из ЭРД?

11. Каковы особенности ФРИ и ФРЭ в потоке разреженной плазмы, если наложено поперечное магнитное поле?

# ЧАСТЬ II. ФИЗИЧЕСКИЕ, МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПРИСТЕНОЧНОЙ ПЛАЗМЫ

## Глава II.1. Физические модели столкновительной пристеночной плазмы

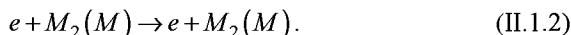
### II.1.1. Элементарные процессы в объёме столкновительной пристеночной плазмы

В большинстве приложений столкновительной плазмы в авиационно-космической технике имеет место слабая степень ионизации:

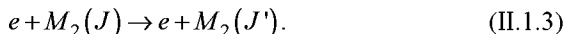
$$\frac{n_i}{n_i + n_\alpha} \approx \frac{n_i}{n_\alpha} \ll 1. \quad (\text{II.1.1})$$

Поэтому дальнейшее изложение будет ограничено условием (II.1.1). Это означает, что не будут рассматриваться столкновения между заряженными частицами. Приведем основные типы столкновений электронов с другими частицами, основываясь на данных работы [63].

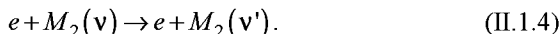
- 1) Упругое рассеяние электрона на молекуле (атоме):



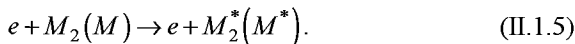
- 2) Возбуждение вращательных уровней молекул электронным ударом:



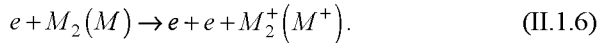
- 3) Возбуждение колебательных уровней молекул электронным ударом:



- 4) Возбуждение электронных уровней атомов и молекул электронным ударом:



- 5) Ионизация молекул (атомов) электронным ударом:



б) Диссоциация молекул электронным ударом:

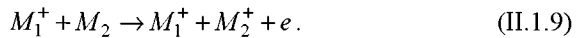


Из столкновений ионов с нейтральными атомами отметим процесс перезарядки:



Этот элементарный процесс важен в некоторых типах ускорителей, когда ускоренные до больших скоростей ионы  $M_1^+$  отрывают электрон у покоящейся молекулы  $M_2$ , и далее движется с большой скоростью поток нейтральных атомов. В таком потоке отсутствуют кулоновские силы отталкивания, ведущие к рассеянию потока.

Отметим еще ионизацию молекул (атомов) ионным ударом:



Каждому из указанных здесь процессов столкновений соответствует обратный процесс. Сечения процессов девозбуждения частиц электронным ударом находятся из принципа детального равновесия. Для реакций ионизации и диссоциации обратными процессами являются трехчастичные столкновения. Вследствие того, что пристеночная плазма часто бывает неравновесной, в ней более эффективными могут быть и другие каналы рекомбинации.

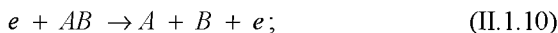
Задачам теоретического определения сечений процессов (II.1.2–II.1.7) посвящено очень большое число работ (см. обзор в [63]). Вместе с тем надо отметить, что квантовомеханические методы их расчета весьма сложны для большинства молекул и доведены до пригодных к использованию интегралов столкновений и констант скоростей реакций для немногих частных случаев, как правило соответствующих невозбужденным состояниям молекул. Поэтому зачастую используются полуклассические или эмпирические формулы, погрешность которых может быть весьма значительной.

Практически все экспериментальные методы определения сечений являются косвенными. При этом на ошибки измерений накладываются неточности, обусловленные ограниченным диапазоном применимости

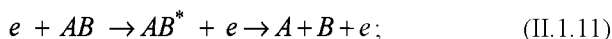
соотношений, по которым из измеренных величин восстанавливаются сечения. Кроме того, сечения, измеренные различными методами, зачастую в некоторых диапазонах изменения энергии различаются в несколько раз и более. Поэтому принципиально важен метод тестирования наборов соответствующих сечений. Одним из наиболее распространенных методов тестирования является варьирование величин сечений в пределах их разброса, известного из литературы. При этом средние характеристики электронов, такие как дрейфовая скорость и характеристическая температура, оказываются в наилучшем согласии с экспериментом.

В диапазоне энергий электронов ( $\epsilon \leq 100$  эВ) существует несколько механизмов диссоциации молекул электронами, которые могут реализовываться в пристеночной плазме. Согласно классификации Хастеда можно выделить следующие процессы столкновений электронов с молекулами, которые приводят к диссоциации последних:

- диссоциация при прямом переходе ядер, составляющих молекулу, в непрерывный спектр без изменения электронного состояния,



- диссоциация в результате возбуждения метастабильных и преддиссоциирующих состояний (электронно-колебательных) молекул электроном,



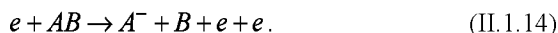
- диссоциативное прилипание,



- полярная диссоциация,



- диссоциативная ионизация,



Методы измерения сечений диссоциации молекул электронным ударом во многом аналогичны рассмотренным выше методам определения сечений других реакций: эксперименты с монокинетическими электронными пучками и эксперименты с электронным роём. Кроме того,

для определения сечений используются спектральные методы измерения концентрации образовавшихся продуктов диссоциации.

Обзор квантовомеханических и полуэмпирических методов расчета сечений диссоциации молекул электронным ударом дан в [63].

### **II.1.2. Элементарные процессы на стенке в столкновительной плазме**

Среди многочисленных элементарных процессов, происходящих при взаимодействии плотной плазмы с находящимся в ней заряженным телом, отметим следующие:

- рекомбинация и поглощение заряженных частиц,
- отражение нейтральных и заряженных частиц,
- тушение возбужденных частиц,
- эмиссия электронов и инжекция заряженных и нейтральных частиц,
- пристеночная проводимость.

Многие из перечисленных процессов связаны с появлением дополнительных потоков тепла на тело и повышением его температуры. Возможны условия, когда повышение температуры может привести к разрушению поверхности. Чтобы сохранить работоспособность устройства, контактирующего с плазмой в этих условиях, приходится применять принудительное охлаждение.

В авиационно-космической технике важное значение играет эмиссия. Термоэмиссия с катода в технологических плазмотронах является важной частью источников; потоки отрицательно заряженных ионов с поверхности ГЛА могут использоваться для создания радиопрозрачных каналов; взаимодействие плотной плазмы с поверхностью важно в плазмохимических реакторах; в системах для нанесения специальных покрытий на детали узлов авиационно-космической техники.

### **II.1.3. Элементарная теория процессов переноса**

В процессе обтекания заряженных тел, как и в молекулярном режиме, вблизи тел формируется возмущенная зона, состоящая из слоя объемного заряда и квазинейтральной области. Процессы переноса в пристеночной зоне связаны с потоками нейтральных и заряженных частиц, ко-

торые складываются из конвективных, диффузионных и дрейфовых потоков. Результирующий поток имеет вид

$$\mathbf{J}_{i,e} = \mathbf{J}_{i,e(\text{конв})} + \mathbf{J}_{i,e(\text{дифф})} + \mathbf{J}_{i,e(\text{дрейф})},$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}_{i,e(\text{конв})} &= \mathbf{u}n_{i,e}, \\ \mathbf{J}_{i,e(\text{дифф})} &= -D_{i,e}\nabla n_{i,e}, \\ \mathbf{J}_{i,e(\text{дрейф})} &= \pm b_{i,e}n_{i,e}\nabla\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.1.15})$$

В (II.1.15)  $\mathbf{u}$  — скорость направленного движения частиц,  $n_{i,e}$  — концентрация ионов и электронов,  $D_{i,e}, b_{i,e}$  — их коэффициенты диффузии и подвижности. Связь между коэффициентами диффузии и подвижностью имеет вид

$$D = b \frac{kT}{e}.$$

Взаимодействие заряженных тел с набегающим потоком плотной плазмы зависит от таких безразмерных параметров, как число Маха  $M$ , электрическое число Рейнольдса  $Re_e$ , числа Шмидта для ионов  $Sc_i$  и других.

Выражения (II.1.15) можно получить из элементарных соображений, причем при этом получаются формулы, близкие к вытекающим из строгой теории.

### Вывод формулы для конвективного потока

Считаем заданными направленную скорость потока  $\mathbf{u}$  и концентрацию частиц  $n$ . Рассмотрим объем газа в виде цилиндра с основанием  $S$  и длиной  $l = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}$ .

Количество частиц в объеме  $N = n \cdot V = n \cdot S \cdot l$ . Все эти частицы движутся вдоль оси цилиндра со скоростью  $\mathbf{u}$  и поэтому за время  $t$  пересекать сечение  $S$ . Полный поток частиц равен их числу в объеме цилиндра

$$I = n \cdot S \cdot l = n \cdot S \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}.$$

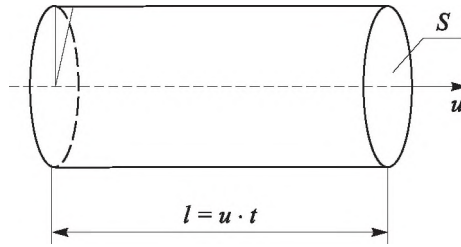


Рис. II.1.1. К выводу формулы для конвективного потока

Отсюда удельный поток (т. е. поток через единицу площади за единицу времени):

$$J = \frac{I}{S \cdot t} = \frac{n \cdot S \cdot u \cdot t}{S \cdot t} = nu,$$

или в векторной форме:

$$\mathbf{J} = n\mathbf{u}.$$

### Вывод формулы для диффузионного потока

Для простоты рассмотрим одномерный случай. Допустим, что вдоль оси  $X$  меняется концентрация частиц.

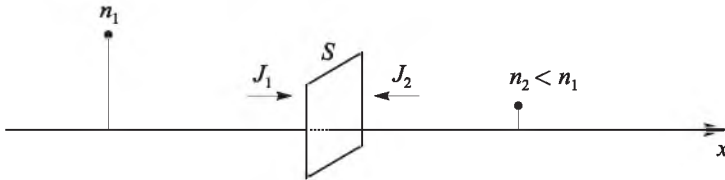


Рис. II.1.2. К выводу формулы для диффузионного потока

Поставим перпендикулярно оси  $X$  площадку  $S$ . В результате теплового движения часть частиц пересекает площадку слева направо, аналогично другая часть — в обратном направлении. Поскольку слева концентрация больше, то и поток  $|J_1| > |J_2|$ .

Результирующий поток  $J$  отличаются от потока конвективного тем, что в конвективном потоке все частицы имели одну скорость по



оси  $X$ , а в нашем случае — тепловая скорость. Частица, участвующая в хаотическом движении, может лететь равновероятно в любом направлении. Сделаем грубое предположение, что в декартовой системе координат  $(x, y, z)$   $\frac{1}{6}$  часть частиц движется в направлении  $(+x)$ ,  $\frac{1}{6}$  — в направлении  $(-x)$ ,  $\frac{1}{6}$  — в направлении  $(+y)$  и т. д. по всем осям. Отсюда ясно, что поток  $J_1 = \frac{1}{6} n v_{\text{cp}}$ , где  $v_{\text{cp}}$  — тепловая скорость частиц. Итак,

$$J = J_1 - J_2 = \frac{1}{6} n_1 v_{\text{cp}} - \frac{1}{6} n_2 v_{\text{cp}} = \frac{1}{6} v_{\text{cp}} (n_1 - n_2).$$

Воспользуемся приближенной формулой из матанализа:

$$\frac{dn}{dx} \approx \frac{\Delta n}{\Delta x},$$

откуда  $\Delta n = n_1 - n_2 \approx \frac{dn}{dx} \Delta x$ . Очевидно, что поток слева направо могут создать только частицы, находящиеся на расстоянии среднего пробега  $\lambda$  от  $S$ . То же самое и для потока в обратном направлении. Следовательно,  $\Delta x = 2\lambda$ ,

$$\Delta n \approx \frac{dn}{dx} 2\lambda.$$

Подставляя это выражение в формулу для  $J$ , имеем  $J = \frac{1}{6} v_{\text{cp}} \frac{dn}{dx} 2\lambda = \frac{1}{3} \lambda v_{\text{cp}} \frac{dn}{dx}$ . Обозначив  $\frac{1}{3} \lambda v_{\text{cp}} = D$ , получим формулу для диффузионного потока. В трехмерном случае производная  $\frac{dn}{dx}$  заменяется  $\nabla n$ . Осталось только учесть, что  $\nabla n$  направлен в сторону увеличения функции, а поток  $\mathbf{J}$  — в сторону уменьшения:

$$\mathbf{J}_{\text{дифф}} = -D \nabla n,$$

где коэффициент диффузии  $D = \frac{1}{3} \lambda v_{\text{cp}}$ .

### Вывод формулы для дрейфового потока

Коэффициент подвижности по определению вводится как коэффициент пропорциональности между направленной скоростью заряженных частиц и напряжённостью электрического поля:

$$u_{i,e} = b_{i,e} \cdot E.$$

Если умножить левую и правую части этого равенства на концентрацию заряженных частиц  $n_{i,e}$ , то получим дрейфовый поток:

$$J_{i,e(\text{дрейф})} = n_{i,e} u_{i,e} = n_{i,e} b_{i,e} \cdot E = -b_{i,e} n_{i,e} \nabla \varphi,$$

где использована формула связи между напряжённостью и потенциалом электрического поля:

$$E = -\nabla \varphi.$$

#### II.1.4. Плотная плазма в авиационно-космической технике

Приведем несколько характерных примеров, когда плотная плазма используется в качестве рабочего тела либо в качестве среды обитания объектов авиационно-космической техники.

**Пример 1.** Плазма продуктов сгорания, истекающих из сопел жидкостных ракетных двигателей (ЖРД), ракетных двигателей твёрдого топлива (ТРД), воздушно-ракетных двигателей (ВРД).

Как показали теоретические и экспериментальные исследования [64–68], в камерах сгорания и в струях продуктов сгорания ЖРД, ТРД, ВРД температура может достигать  $(2-4) \cdot 10^3 \text{K}$ . В связи с этим в указанных системах имеет место термическая ионизация и возникает слабоионизированная плотная плазма. Концентрация заряженных частиц имеет максимальное значение на фронте сгорания и достигает  $10^{18}-10^{19} \text{ м}^{-3}$ . В потоке после камеры сгорания эта концентрация уменьшается на 3–5 порядков.

Авторам учебного пособия довелось участвовать в проведении зондовых измерений концентрации заряженных частиц  $n_{i,e}$  на боковой поверхности ракет различного класса [7]. Зонд измерил концентрацию  $n_{i,e}$  в момент старта, когда поток ионизованного газа, истекающий из

двигателя первой ступени, отразившись от стенок пусковой шахты, попал на зонд. Второй всплеск концентрации был отмечен в момент включения двигателей второй ступени, когда поток плазмы, отразившись от элементов конструкции первой ступени, попал на зонд. Измеренные значения концентраций  $n_{i,e}$  составляли  $10^{13} - 10^{15} \text{ м}^{-3}$ .

Еще один эксперимент по измерению концентраций заряженных частиц в потоке плотной плазмы был проведен в ЦАГИ [69–72].

Эксперимент проводился на лабораторной установке, созданной на базе плазменного фотометра FLAPHO4 (производство ГДР), в плазме продуктов сгорания смеси ацетилен и воздуха. Горелка состояла из 11 трубочек диаметром 1,5 мм, расположенных по окружности диаметром 15 мм. Конструкция плазменного источника обеспечивала хорошую воспроизводимость и стабильность режима горения. Через специальный распылитель в пламя горелки подавались водные растворы солей различных щелочных металлов. Для измерения атомов присадки использовался метод интегрального коэффициента поглощения спектральных линий.

Температура пламени измерялась методом обращения спектральных линий. Скорость направленного движения плазменного потока также измерялась оптическим методом.

По известным значениям концентрации атомов присадки и температуры по формуле Саха определялась концентрация заряженных частиц. На основании оптических и зондовых измерений были получены результаты (с присадками солей натрия), представленные в таблице П.1.1.

Таблица П.1.1

	$n_a, \text{см}^{-3}$	$n_{i,e}, \text{см}^{-3}$	Средняя температура, К	Средняя скорость, м/с
Режим 1	$10^{11}$	$1,8 \cdot 10^{10}$	2370	$4,4 \pm 0,5$
Режим 2	$1,8 \cdot 10^{11}$	$2,4 \cdot 10^{10}$	2370	$4,4 \pm 0,5$
Режим 3	$4,3 \cdot 10^{11}$	$3,8 \cdot 10^{10}$	2370	$4,4 \pm 0,5$

Все измерения (оптические и зондовые) проводились на расстоянии 20–25 мм от среза сопла в зоне, где имело место химическое и термодинамическое равновесие. Диаметр струи в этой зоне составлял 20 мм.

Зонды цилиндрической геометрии изготавливались из тугоплавкого вольфрам-рениевого сплава. Диаметр зондов изменялся в пределах 0,5–3 мм, длина зондов составляла 9 мм. Одиночный зонд кратковременно ( $\sim 2$  с) вводился в струю с помощью специального устройства. Для снятия ВАХ его потенциал варьировался в пределах от  $-20$  до  $+20$  В относительно заземленного корпуса горелки. Ток зонда регистрировался с помощью самопишущего потенциометра, большая чувствительность которого позволяла измерять токи до десятых долей мкА.

Физические процессы, возникающие в струях слабоионизованной столкновительной плазмы, истекающих из сопла ракетных и реактивных двигателей, очень похожи на физические процессы в потоках разреженной плазмы, истекающих из электрореактивных двигателей (ЭРД). ЭРД изучены более детально как в теоретическом плане, так и экспериментально [1, 2, 20].

Вблизи стенки сопла возникает положительный объемный заряд, поскольку электроны, как более легкие частицы, быстрее попадают на стенку сопла и заряжают ее отрицательным потенциалом. Величина потенциала соответствует потенциалу «плавающего тела». Под действием этого отрицательного потенциала электроны притормаживаются, а ионы ускоряются, образуя равные потоки на стенку. Эта ситуация носит название амбиполярной диффузии. Величина «плавающего» потенциала зависит от молярной массы продуктов сгорания, температуры и скорости потока и составляет, как правило, доли вольта. Размер слоя объемного заряда у стенки составляет десятки (иногда сотни) радиусов Дебая. Величина радиуса Дебая при концентрации заряженных частиц  $n_i \sim 10^8 \text{ см}^{-3}$  и температуре  $\sim 3 \cdot 10^3 \text{ К}$  составляет  $r_D \sim 0,3 \text{ мм}$ . Поэтому размер слоя объемного заряда у стенки сопла составляет  $\Delta \sim 3 - 30 \text{ мм}$ . Вне этого слоя поток плазмы будет невозмущенным.

Если предположить, что на срезе сопла поток квазинейтрален, то далее в струе возникают следующие процессы. Электроны, как более легкие частицы, быстрее ионов и нейтралов покидают сопло и образуют отрицательно заряженную область, по размеру существенно превышающую диаметр сопла. Обедненная электронами струя приобретает положительный заряд и положительный потенциал. Электроны в дальнейшем не могут уходить из струи, поскольку этому мешает возникающее само-

согласованное поле. В струе могут возникать колебания потенциала. Согласно расчётам, сделанными для разреженных струй, частота колебания составляет  $\sim 10^7 - 10^8$  Гц.

В работах [64–68] представлена новая система диагностики рабочего процесса в ракетных и реактивных двигателях по характеристикам собственного электромагнитного поля продуктов сгорания, в частности:

- контроль коэффициента избытка окислителя и полноты сгорания топлива;
- контроль процесса эрозии элементов концентрации ракетных и реактивных двигателей и ранней диагностики отказа;
- увеличение быстродействия системы аварийной защиты в 2 и более раз.

Очевидно, что для повышения качества и надежности диагностики необходимо повышать концентрацию заряженных частиц в струе плазмы. Для этого рекомендуется добавлять в камеру сгорания легко ионизируемые добавки.

От авторов пособия добавим, что при достаточно большой степени ионизации продуктов сгорания можно предложить методы управления вектором тяги ракетных и реактивных двигателей с помощью поперечного магнитного поля. Расчет таких систем для ЭРД проведен в [1].

**Пример 2.** Пристеночная плазма вблизи гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА).

При движении гиперзвукового летательного аппарата в плотных слоях атмосферы со скоростью, большей скорости звука, около его головной части возникает ударная волна, вследствие чего повышется температура и происходит термическая ионизация воздуха. Корпус ГЛА как бы обволакивается слоем слабоионизованной столкновительной плазмы. Конструктору ГЛА необходимо знать параметры пристеночной плазмы, поскольку из него на стенку поступают потоки тепла, массы, импульса и заряда. Кроме того, электроны, находящиеся в пристеночном слое, поглощают электромагнитные волны и тем самым могут нарушать связь между наземными станциями управления полетом и ГЛА. При заданной частоте электромагнитной волны существует критическая концентрация электронов, выше которой волна не проходит через пристеночный слой.

Проблема радиосвязи была решена только в самом конце прошлого столетия.

Концентрация заряженных частиц в пристеночном слое зависит от скорости полета, геометрических характеристик ГЛА, параметров атмосферы. Упомянутый в примере 1 опыт с измерением радиофизических параметров вблизи боковой поверхности двухступенчатой ракеты позволил измерить концентрации заряженных частиц  $n_e$  в пристеночном слое. Рассмотрим условия этого эксперимента более подробно.

Плоские пристеночные зонды, расположенные на боковой поверхности гиперзвукового летательных аппарата, являются основными источником информации о радиофизических параметрах плазмы, возникающих вблизи поверхности ГЛА. Такие зонды не нарушают аэродинамику ГЛА, мало подвержены воздействию тепловых потоков со стороны пристеночной плазмы по сравнению с выносными зондами. На рисунке II.1.3 приведена фотография зондового блока, состоящего из четырех плоских пристеночных зондов в форме диска. Зонды диаметром 5 мм крепятся в диэлектрической вставке из прессованного кварца. Сами зонды представляют собой торцы графитовых стержней, покрытых снаружи нитридом циркония.



Рис. II.1.3. Фотография блока с пристеночными плоскими зондами

Расстояние между соседними зондами составляло порядка 1 см. К приборам, устанавливаемым на ГЛА, со стороны заказчиков предъявляются достаточно жесткие требования.

- ввиду большой стоимости и уникальности экспериментов аппаратура должна обладать высокой надежностью и информативностью;
- должны быть минимизированы габаритные, весовые, мощностные и другие характеристики прибора;
- электронная схема должна быть развязана по напряжению с бортовым источником питания и телеметрией;
- число используемых каналов телеметрии должно быть минимальным;
- прибор должен выдерживать максимальные режимы ускорения, вибрации, температурные нагрузки, механические напряжения и т. д.

Разработанный прибор, внешний вид которого представлен на рисунке II.1.3, прошел все необходимые испытания, имел максимальный размер не более 5 см, вес — порядка 100 г.

Надежность его работы гарантировалось наличием четырех параллельных каналов измерения ионного тока при достаточно больших отрицательных потенциалах.

Прибор использовался на российских ГЛА различного назначения.

Приведем некоторые данные одного из таких экспериментов. Зондовый ток впервые появился на четвертой секунде после запуска двигателей ГЛА. Вероятно, это связано с ионизацией истекающих из сопла продуктов сгорания, которые отражались от элементов стартовой площадки. Максимальная концентрация заряженных частиц достигала  $10^{13} - 10^{14} \text{ м}^{-3}$ . Второй всплеск ионного тока наблюдался на 25–30 секунде полета, вероятно, в момент включения двигателей второй ступени, продукты сгорания которых отражались от элементов конструкций первой ступени. Концентрации ионов достигали  $10^{14} - 10^{15} \text{ м}^{-3}$ . Далее, по мере набора скорости ГЛА, возникала ионизация воздуха в головной ударной волне, возрастала концентрация заряженных частиц в пограничном слое, и поэтому увеличивался зондовый ток. Его максимум достигался между 40-й и 50-й секундами полета. Концентрация ионов достигала  $10^{16} \text{ м}^{-3}$ . Затем она плавно спадала по мере торможения ГЛА и на 80-й секунде полета становилась ниже предела чувствительности зондовых датчиков.

Ниже приводятся результаты вычислительных экспериментов, связанных с решением проблемы радиосвязи.

1. Идея создания радиопрозрачного канала путем инъекции потока отрицательных ионов принадлежит авторам пособия, что подтверждено авторским свидетельством [73].

Один из вариантов такого инжектора отрицательных ионов рассмотрен в работе [74]. Источник работал на водороде и позволял инжектировать поток заряженных частиц с энергией  $\sim 1$  МэВ, концентрацией ионов  $n_i \sim 7 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$  и интенсивностью  $\sim 10^{23} (\text{м}^2 \cdot \text{с})^{-1}$ .

Авторами пособия проведено математическое моделирование воздействия потока отрицательных ионов на пристеночную плазму [3], в результате которого получены следующие выводы:

- поток отрицательных ионов создает вблизи поверхности ГЛА яму отрицательного потенциала, благодаря которой происходит удаление электронов из области расположения пучка;
- эффект удаления электронов оказывается больше, если потенциал сопла инжектора отрицателен;
- при заданной плотности потока инъекции увеличение концентрации ионов в потоке дает больший эффект, чем увеличение их скорости;
- взаимодействие пучка с пристеночной плазмой ведет к появлению осцилляции параметров задачи с частотой, превышающей плазменную; с увеличением скорости ионов пучка частота осцилляций возрастает.
- из приведенных в [3] численных экспериментов следует, что концентрация электронов в одном из расчетов на расстоянии  $30 r_D$  от стенки уменьшается в 9 раз, а на расстоянии  $45 r_D$  — в 6 раз.

2. Создание радиопрозрачного канала путем возбуждения вблизи стенки ГЛА импульсного магнитного поля.

Идея создания радиопрозрачного канала с помощью импульсного магнитного поля также принадлежит авторам пособия [75]. Математическое моделирование этой задачи [3] проводилось в следующей постановке. Диэлектрическая пластина с острой передней кромкой обтекается потоком плотной слабоионизованной плазмы. На поверхности пластины параллельно острой передней кромке располагается электрод ленточного типа, длинная сторона которого перпендикулярна вектору скорости потока плазмы. Характерный размер электрода —  $r_p$ , его потенциал —  $\Phi_p$ .



Магнитное поле создается внешним источником в области расположения электрода в виде импульса заданной формы. Вектор магнитного поля  $\mathbf{B}$  параллелен удлиненной стороне электрода. Величина магнитной индукции подбирается так, чтобы электроны оказались замагниченными, а ионы — нет. В этих условиях электроны тормозятся, а ионы продолжают свое движение вдоль электрической поверхности, вследствие чего возникает самосогласованное электрическое поле  $\mathbf{E}$ , направленное перпендикулярно вектору  $\mathbf{B}$ . Возникает дрейфовое движение заряженных частиц со скоростью  $u_d = \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{B^2}$ . Можно ожидать, что со скоростью дрейфа произойдет выброс плазменного образования из пристеночной области и, следовательно, обеднение этой области электронами.

Порядок величины вектора  $\mathbf{B}$ , необходимого для достижения положительного эффекта, можно оценить, приравняв кинетическую энергию движения в пограничном слое энергии магнитного поля:

$$\frac{\rho u^2}{2} \approx \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Если скорость ГЛА  $u \sim 5-7$  км/с, то на высотах полёта  $h \sim 25-30$  км из данного равенства имеем:  $B \sim 0,5-1$  Тл.

Приведенные численные эксперименты [3] показали, что при реально достижимых магнитных полях можно достичь снижения  $n_e$  на порядок и более.

### Примеры решения задач

П.1. Рассчитать коэффициенты диффузии и подвижности в струе плазмы, истекающей из сопла ЖРД, если давление  $P = 1$  атм, температура  $T = 3 \cdot 10^3$  К, эффективный диаметр молекул газа  $d_{\text{эф}} = 5 \cdot 10^{-10}$  м, молярная масса газа  $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

*Решение.*

1. Средний пробег частиц:

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d_{\text{эф}}^2 P} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^3}{1,4 \cdot 3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5} = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

2. Средняя скорость:

$$v_{\text{ср}} = \left( \frac{8RT}{\pi\mu} \right)^{1/2} = \left( \frac{8 \cdot 8,31 \cdot 3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 29 \cdot 10^{-3}} \right)^{1/2} \approx 1,4 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

3. Коэффициент диффузии (примерно одинаков для ионов и нейтралов):  $D = \frac{1}{3} \lambda v_{\text{ср}} = \frac{1}{3} \cdot 0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 1,4 \cdot 10^3 = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с.}$

4. Подвижность:  $b = \frac{De}{kT} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^3} \approx 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с.}$

II.2. Оценить величину индукции магнитного поля, при которой можно создать радиопрозрачный канал, если ГЛА летит на высоте 3 км над поверхностью земли со скоростью 5 км/с. Принять давление в погранслое  $P = 1 \text{ атм}$ ,  $T = 3 \cdot 10^3 \text{ К}$ ,  $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .

*Решение.*

1. Находим плотность  $\rho = \frac{P\mu}{RT} = \frac{10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 3 \cdot 10^3} \approx 10^{-1} \text{ кг/м}^3$ .

2. Из формулы  $\frac{\rho u^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}$  находим

$$B = (\rho u^2 \mu_0)^{1/2} = (10^{-1} \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12})^{1/2} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ Тл.}$$

### Контрольные вопросы к главе II.1

1. Какие элементарные процессы могут происходить в объеме столкновительной пристеночной плазмы?

2. Какие элементарные процессы могут происходить на металлической поверхности, ограничивающей столкновительную плазму?

3. Как подсчитать диффузионный поток из столкновительной плазмы на стенку?

4. Как подсчитать поток, связанный с подвижностью, на стенку из столкновительной плазмы?

5. Где встречается слабоионизованная столкновительная плазма в авиационно-космическом комплексе и в технологии?

6. Что называется степенью ионизации газа?

7. Каков смысл числа Кнудсена и каков его порядок в струях ЖРД?

## Глава II.2. Математические модели столкновительной пристеночной плазмы

Дифференциальные уравнения, описывающие перенос молекулярных признаков в столкновительной плазме, получаются из кинетического уравнения Больцмана (или Алексева) путем умножения всех слагаемых уравнения на молекулярный признак  $\psi$  и последующего интегрирования по скоростям  $\mathbf{v}$ .

Если  $\psi = m_{e,i,a}$ , то получаем уравнение неразрывности для электронов, ионов и нейтральных частиц.

Если  $\psi = m\mathbf{v}_{e,i,a}$ , получаем уравнение движения для электронов, ионов и нейтральных частиц.

Если  $\psi = W_{e,i,a}$ , получаем уравнение сохранения энергии для электронов, ионов и нейтральных частиц.

$$\text{В простейшем случае } W_{e,i,a} = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} \Big|_{e,i,a}.$$

Если молекулы газа имеют сложное строение, то  $W = W_{\text{кин.}} + W_{\text{колеб.}} + W_{\text{вращ.}}$ .

В общем случае в трехкомпонентной плазме имеем 9 уравнений переноса молекулярных признаков и 4 уравнения Максвелла. К системе уравнений добавляется система начальных и граничных условий. Дальнейшее изложение будет начинаться с самых простых моделей с их постепенным усложнением. Выводы уравнений, ввиду их громоздкости, будут опущены. При желании эти выводы можно найти в [15, 28].

### II.2.1. Слабоионизированная покоящаяся плазма с постоянными свойствами и замороженными химическими реакциями

Плазма считается плотной, если характерный размер задачи  $r_p$  велик в сравнении со средней длиной свободного пробега  $\lambda$  частиц, составляющих плазму. Это означает, что число Кнудсена  $Kn = \lambda / r_p \ll 1$ .

Слабая ионизация плазмы предполагает выполнение неравенств

$$n_i v_{ia} \ll n_a v_{aa}, \quad n_e v_{ea} \ll n_a v_{aa},$$

где  $n$  — концентрация,  $\nu$  — частота столкновений, а индексы  $a, i, e$  обозначают соответственно нейтральные частицы, ионы и электроны.

В предположении слабой степени ионизации можно пренебречь влиянием ионов и электронов на движение нейтральной компоненты. Это позволяет расщепить задачу о взаимодействии плазмы со стенкой на газодинамическую и электродинамическую части, которые могут решаться независимо [1].

Методы решения газодинамической части задачи достаточно хорошо проработаны [76, 77]. В результате ее решения получают поля скоростей, температур и концентраций нейтральных компонент (в общем случае — нестационарные). В процессе решения электродинамической части задачи информация о параметрах нейтральной компоненты считается известной.

Температура ионов полагается равной температуре нейтральных частиц, в связи с чем уравнение для энергии ионов выпадает из системы уравнений. Если конвективный перенос мал и отсутствует инжекция частиц со стенки, то выпадают и уравнения движения заряженных частиц.

Если предположить, что время релаксации температур ионов и электронов много больше характерного времени задачи, то можно считать, что отношение их температур — величина постоянная:  $T_i/T_e = \text{const}$ . В этом случае уравнение для энергии электронов также выпадает из системы уравнений.

Самосогласованное электромагнитное поле описывается системой уравнений Максвелла. Если внешнее и собственное магнитные поля малы, то система уравнений Максвелла сводится к уравнению Пуассона для потенциала электрического поля [11].

Система граничных условий чаще всего включает условие идеальной каталитичности на стенке и условие постоянства ее потенциала. На внешней границе расчетной области потенциал считается равным нулю вследствие экранирования плазмой потенциала стенки, а концентрации заряженных частиц соответствуют невозмущенной плазме и считаются заданными.

Опыт проведения численных экспериментов показывает, что начальные условия задачи оказывают слабое влияние на установившееся решение. Поэтому в качестве начальных распределений концентраций

заряженных частиц могут быть взяты достаточно произвольные зависимости, например:

$$n_{i,e}(r) = n_{i,e\infty} (1 - \exp(-r/r_D)),$$

где  $r$  — координата, направленная по нормали от стенки.

Если решается нестационарная задача и существенным является переходный процесс от одного стационарного состояния к другому, то в качестве начального условия необходимо брать реально возникающий профиль концентраций  $n_{i,e}(\mathbf{r})$ . В качестве такого профиля может использоваться установившееся решение задачи о взаимодействии плазмы со стенкой, выполненное при произвольном начальном условии.

Отметим, что средняя длина пробега для электронов  $\lambda_e$ , как правило, превосходит длину пробега для ионов  $\lambda_i$ , поэтому возможен такой случай, когда ионы находятся в режиме сплошной среды, а электроны — в бесстолкновительном режиме. Если обозначить через  $\lambda_w$  длину энергетической релаксации электронного газа, то, как показано в [78],  $\lambda_w$  может значительно превосходить  $\lambda_e$ :

$$\lambda_w = \frac{\lambda_e}{\sqrt{\delta}} = 10^2 \lambda_e, \quad (\text{П.2.1})$$

где  $\delta = 2m_e/m_i \sim 10^{-5} + 10^{-4}$  — относительная доля потери энергии при упругом столкновении электрона с тяжелой частицей. Если создаются условия, когда  $\lambda_w$  велика по сравнению с толщиной пристеночного слоя плазмы  $\Delta$ , а  $\lambda_e \ll \Delta$ , то электроны, находясь в диффузионном режиме, через электронный ток несут информацию о функции распределения электронов по энергиям (ФРЭЭ) в невозмущенной плазме. По известной ФРЭЭ можно судить об электронной температуре.

Приведем систему уравнений для расчета электродинамики плазмы вблизи заряженных тел в случае слабоионизованной плазмы с постоянными свойствами и замороженными химическими реакциями в нестационарном случае [11]. Она включает только уравнения неразрывности для заряженных компонент и уравнение Пуассона для электрического поля, а также систему начальных и граничных условий:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_i = 0, \quad \mathbf{J}_i = -D_i \left( \nabla n_i - \frac{Z e n_i}{k T_i} \mathbf{E} \right), \quad (\text{II.2.2})$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_e = 0, \quad \mathbf{J}_e = -D_e \left( \nabla n_e + \frac{e n_e}{k T_e} \mathbf{E} \right), \quad (\text{II.2.3})$$

$$\Delta \varphi = -(Z n_i - n_e) e / \varepsilon_0, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi. \quad (\text{II.2.4})$$

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} n_{i,e}(r_\infty, t) &= n_{\infty i,e}(t), \\ n_{i,e}(r_p, t) &= 0, \\ \varphi(r_\infty, t) &= 0, \\ \varphi(r_p, t) &= \varphi_p(t). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2.5})$$

Начальное условие:

$$n_{i,e}(\mathbf{r}, t=0) = n_{i,e}^0(\mathbf{r}). \quad (\text{II.2.6})$$

Распределение  $\varphi(r)|_{t=0}$  определяется решением уравнения (II.2.4).

В системе (II.2.2)–(II.2.4) индексами  $i$  и  $e$  обозначают соответственно ионы и электроны, символами  $n$ ,  $D$ ,  $\varphi$ ,  $\mathbf{E}$  обозначены концентрация, коэффициент диффузии, потенциал и напряженность электрического поля, индексами  $p$  и  $\infty$  — значения величин на теле и на внешней границе рассматриваемой области; в условиях (II.2.2)–(II.2.4) правые части — известные функции.

При выводе системы (II.2.2)–(II.2.4) пренебрегалось влиянием механизма термодиффузии и изменением полного давления в направлении диффузии.

## II.2.2. Слабоионизированная покоящаяся плазма с переменными свойствами и замороженными химическими реакциями

При сохранении условия слабой степени ионизации сохраняется равенство температур ионов и нейтральных атомов:  $T_i = T_a$ . Однако в данном случае электронная температура уже не может считаться по-

стоянной. Под влиянием электрического поля, возникающего вблизи заряженных тел, тепловая энергия электронной компоненты может изменяться. Другая причина изменения  $T_e$  в пристеночной области — это охлаждающее действие самого тела, которое имеет обычно существенно меньшую температуру  $T_p$ , чем температура электронов. Поэтому к системе уравнений, описывающих динамику пристеночного слоя плазмы, необходимо добавить уравнение для энергии электронов. Изменяются также граничные условия задачи. На поверхности тела необходимо задать тепловой поток, приносимый на стенку электронами. Этот поток определяется энергией хаотического и направленного движения и той работой, которую совершает над электронами пристеночное электрическое поле. На внешней границе задается условие ее сшивания с невозмущенной плазмой. В системе начальных условий должно быть задано начальное распределение  $T_e$ . Поскольку оно заранее неизвестно, то его можно получить в результате численного решения задачи при произвольном начальном условии  $T_e(\mathbf{r}, t=0) = T^0(\mathbf{r})$ . В качестве  $T^0(\mathbf{r})$  можно взять произвольную гладкую кривую, имеющую при  $r=r_p$  значение температуры тела  $T_p$ , а при  $r=r_\infty$  — значение температуры невозмущенной плазмы  $T_\infty$ .

Итак, система уравнений электродинамики в данном случае включает уравнение неразрывности для заряженных компонент, уравнение для энергии электронов и уравнения Максвелла, из которых в случае слабых магнитных полей остается лишь уравнение для потенциала электрического поля [11]:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_i = 0, \quad \mathbf{J}_i = -D_i \left( \frac{1}{T_i} \nabla n_i T_i - \frac{Z e n_i}{k T_i} \mathbf{E} \right), \quad (\text{II.2.7})$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_e = 0, \quad \mathbf{J}_e = -D_e \left( \frac{1}{T_e} \nabla n_e T_e + \frac{e n_e}{k T_e} \mathbf{E} \right), \quad (\text{II.2.8})$$

$$\Delta \varphi = -(Z n_i - n_e) e / \varepsilon_0, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi. \quad (\text{II.2.9})$$

$$n_e \frac{\partial H_e}{\partial t} - \frac{e n_e}{m_e} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{k}{m_e} \frac{\partial n_e T_e}{\partial t} + \mathbf{J}_e \cdot \nabla H_e = \frac{1}{m_e} \left( \operatorname{div} (\Lambda_e \nabla T_e) + Q_e^{\text{ct}} \right). \quad (\text{II.2.10})$$

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} n_{i,e}(r_\infty, t) &= n_{\infty i,e}(t), \\ \varphi(r_\infty, t) &= 0, \\ T_e(r_\infty, t) &= T_{\infty e}(t); \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2.11})$$

$$\left. \begin{aligned} \langle u_e \rangle n_e H_e &= \Lambda_e \nabla T_e, \\ \varphi(r_p, t) &= \varphi_p(t), \\ n_{i,e}(r_p, t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2.12})$$

Начальное условие:

$$\left. \begin{aligned} n_{i,e}(\mathbf{r}, t=0) &= n_{i,e}^0(\mathbf{r}), \\ T_e(\mathbf{r}, t=0) &= T^0(\mathbf{r}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2.13})$$

Распределение  $\varphi(\mathbf{r}, t=0)$  определяется решением уравнения Пуассона, правые части в условиях (II.2.11)–(II.2.13) — известные функции.

К системе (II.2.7)–(II.2.13) добавим уравнение для энергии нейтральных частиц в простейшей форме [80]:

$$\text{div}(\Lambda_a \nabla T_a) = 0. \quad (\text{II.2.14})$$

Уравнение для энергии электронов записано в предположении отсутствия реакций ионизации, рекомбинации и диссипации энергии за счет сил вязкости. Среди членов, связанных с диффузионным переносом энергии, сохранен только один, наибольший по сравнению с остальными.

В (II.2.10)  $H_e = h_e + e\varphi/m_e$ , где  $h_e$  — энтальпия электронной компоненты,  $\Lambda_e$  — коэффициент теплопроводности,  $Q_e^{\text{ст}}$  — энергия, связанная со столкновениями электронов с другими сортами частиц. Все остальные обозначения соответствуют системе (II.2.2)–(II.2.6). Уравнение (II.2.14) может решаться независимо от остальной системы уравнений. Его решение позволяет получить профиль температуры для нейтральной компоненты. В случае осесимметричных или плоских тел оно допускает аналитические решения. В дальнейшем функция  $T_a(\mathbf{r})$  рассматривается



как заданная, при которой осуществляется решение системы (II.2.7)–(II.2.13).

### II.2.3. Слабоионизированная покоящаяся плазма с учётом реакций ионизации и рекомбинации

В данном параграфе рассматривается слабоионизированная покоящаяся плазма с постоянными свойствами при наличии элементарных процессов в объеме. Далее будет рассмотрен более общий случай, когда химические реакции будут учитываться при условии переменных свойств плазмы и наличии среднemasсовой скорости. Обзор основных типов элементарных процессов в пристеночной плазме дан в гл. II.1, там же имеются ссылки на справочный материал по эффективным сечениям взаимодействия и константам скоростей реакций.

Учет тех или иных элементарных процессов зависит от конкретных условий задачи: параметров плазмы, ее состава, условий на поверхности тела и внешней границе расчетной области. В практически важных случаях из большого числа элементарных процессов в плотной слабоионизированной плазме, как правило, преобладают ионизация электронным ударом и рекомбинация в тройных столкновениях:



Эти реакции будем учитывать ниже при вычислении правых частей в уравнениях неразрывности.

Запишем систему уравнений, составляющих математическую модель задачи для данного случая:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J}_i = w_i, \quad \mathbf{J}_i = -D_i \left( \nabla n_i - \frac{Z e n_i}{k T_i} \mathbf{E} \right), \quad (\text{II.2.18})$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J}_e = w_e, \quad \mathbf{J}_e = -D_e \left( \nabla n_e + \frac{e n_e}{k T_e} \mathbf{E} \right), \quad (\text{II.2.19})$$

$$\Delta \varphi = -(Z n_i - n_e) e / \varepsilon_0, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi. \quad (\text{II.2.20})$$

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} n_{i,e}(r_\infty, t) &= n_{\infty, i,e}(t), \\ n_{i,e}(r_p, t) &= 0, \\ \varphi(r_\infty, t) &= 0, \\ \varphi(r_p, t) &= \varphi_p(t). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2.21})$$

Начальное условие:

$$n_{i,e}(\mathbf{r}, t=0) = n_{i,e}^0(\mathbf{r}). \quad (\text{II.2.22})$$

Все обозначения в системе (II.2.18)–(II.2.22) аналогичны использованным ранее.

Рассмотрим более подробно правые части уравнений неразрывности (II.2.18), (II.2.19). В соответствии с изложенной выше физической моделью число актов ионизации в единице объема за единицу времени равно [11]

$$Z_{\text{ион}} = K_i n_e n_a, \quad (\text{II.2.23})$$

где  $K_i$  — константа скорости реакции ионизации.

Аналогично число актов рекомбинации

$$Z_{\text{рек}} = K_p n_i n_e^2 = b n_i n_e, \quad (\text{II.2.24})$$

где  $K_p$  — константа скорости реакции рекомбинации,  $b = K_p n_e$  — коэффициент рекомбинации.

Константы  $K_i$  и  $K_p$  связаны между собой принципом детального равновесия:

$$K_i/K_p = F(T_e). \quad (\text{II.2.25})$$

Константа равновесия  $F(T_e)$  определяется формулой Саха:

$$F(T_e) = \frac{g_i}{g_0} \frac{2(2\pi m_e k T_e)^{3/2}}{h^3} \exp(-I/kT_e). \quad (\text{II.2.26})$$

В (II.2.26)  $\frac{g_i}{g_0}$  — отношение статистических весов ионов и атомов,

$I$  — потенциал ионизации,  $h$  — постоянная Планка.

Выразим эффективные сечения взаимодействия электрона с атомом приближенной линейной зависимостью [81]

$$\sigma_e = CkT_e, \quad (\text{II.2.27})$$

где константа  $C$  затабулирована в [81].

Тогда для констант скоростей ионизации и рекомбинации можно получить следующие выражения:

$$K_i = CkT_e \langle u_e \rangle (I/kT_e + 2) \exp(-I/kT_e), \quad (\text{II.2.28})$$

$$K_p = \frac{g_0}{g_i} (I/kT_e + 2) \frac{h^3}{2\pi^2 m_e^2 kT_e} CkT_e, \quad (\text{II.2.29})$$

где  $\langle u_e \rangle$  — среднее значение тепловой скорости электронов.

С учетом (II.2.23), (II.2.24), (II.2.28), (II.2.29) правые части уравнений (II.2.18), (II.2.19) примут вид

$$\begin{aligned} w_i = w_e &= K_i n_e n_0 - K_p n_i n_e^2 = \\ &= n_e CkT_e (I/kT_e + 2) \left[ n_0 \langle u_e \rangle \exp(-I/kT_e) - \frac{g_a}{g_i} \frac{h^3 n_i n_e}{2\pi^2 m_e^2 kT_e} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Концентрации заряженных частиц на внешней границе расчетной области могут быть найдены из решения задачи Коши.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn_e}{dt} &= w_e, \\ n_{i\infty} &= n_{e\infty}, \\ n_a &= n_a(0) - (n_{e\infty} - n_{e\infty}(0)). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.31})$$

## II.2.4. Слабоионизованная движущаяся плазма (ламинарное течение)

### II.2.4.1. Система уравнений

Рассматриваемые модели максимально обобщены, насколько это позволяет современный уровень развития методов вычислительной физики и ЭВМ, а также возможность решения поставленных задач исследо-

вания с минимальными затратами вычислительных ресурсов. Поэтому для исследования были выбраны физические модели, напоминающие бесстолкновительный случай.

1. Бесконечно длинный цилиндр радиуса  $r_p$  и потенциала  $\Phi_p$ , помещенный в поперечный поток слабоионизованной плазмы. Если внешнее магнитное поле имеется, то его индукция направлена параллельно оси цилиндра. Химические реакции в пристеночной области заморожены. Задача является достаточно общей, поскольку в ней учитываются все три процесса переноса: конвекция, диффузия и подвижность. В вычислительном плане задача оказывается двумерной нестационарной. Она позволяет выявить основные нелинейные эффекты в структуре возмущенной зоны, возникающей вблизи обтекаемых плазмой тел, и обнаружить новые, не известные ранее.

2. Плоский пристеночный электрод ленточного типа шириной  $r_p$  и с потенциалом  $\Phi_p$ , расположенный на диэлектрической поверхности, обтекаемой слабоионизованной плазмой. Эта задача также оказывается двумерной нестационарной, что ведет к экономии необходимых вычислительных ресурсов, и в то же время достаточно общей для выяснения особенностей процессов переноса в пристеночной плазме. Ее решение позволяет уточнить теорию плоского пристеночного зонда, предназначенного для установки на боковой поверхности ГЛА. Кроме того, такой электрод можно рассматривать как элемент конструкции самого летательного аппарата.

При выборе физических моделей решались также и трехмерные нестационарные задачи, однако никаких новых физических эффектов они не выявили, а расход необходимых ресурсов ЭВМ значительно возрос.

Рассмотрим математическую модель задачи для цилиндрического электрода. Она включает в себя:

- систему уравнений Эйлера (или Навье–Стокса) для нейтральной компоненты плазмы,
- уравнения неразрывности для заряженных компонент,
- уравнения движения для заряженных компонент,
- систему уравнений Максвелла для самосогласованных электромагнитных полей (в простейшем случае эта система сводилась к уравнению Пуассона).

Уравнение энергии для ионов не использовалось, так как ввиду слабой степени ионизации  $T_i = T_a$ . Уравнение энергии для электронов заменялось соотношением  $\epsilon = T_i/T_e = \text{const}$ , причем величина  $\epsilon$  варьировалась.

В представленной ниже математической модели для тела цилиндрической формы учтены также следующие допущения:

- химические реакции заморожены,
- вязкостью пренебрегается,
- собственное магнитное поле мало.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div}(n_i \mathbf{u}_i) &= 0, \\
 \frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e \mathbf{u}_e) &= 0, \\
 m_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} &= -\frac{kT_i}{n_i} \nabla n_i + Ze\mathbf{E} - \mu_{ia} \nu_{ia} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_a), \\
 m_e \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} &= -\frac{kT_e}{n_e} \nabla n_e - e\mathbf{E} - \mu_{ea} \nu_{ea} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_a), \\
 \Delta\phi &= e(n_e - Zn_i) / \epsilon_0, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi, \\
 \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \text{div}(\rho_a \mathbf{u}_a) &= 0, \\
 \frac{\partial(\rho_a \mathbf{u}_a)}{\partial t} + \text{div}(\rho_a \mathbf{u}_a \mathbf{u}_a) &= -\nabla P_a, \\
 \frac{\partial(\rho_a E_a)}{\partial t} + \text{div}(\rho_a \mathbf{u}_a E_a) &= -\text{div}(\mathbf{u}_a P_a), \\
 P_a &= (E_a - u_a^2 / 2) \rho_a (\gamma - 1), \quad E_a = C_v T_a + u_a^2 / 2.
 \end{aligned} \tag{II.2.32}$$

В приведенной системе уравнений  $n$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $T$ ,  $\rho$ ,  $P$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\phi$ ,  $E$  — концентрация, скорость, температура, плотность, давление, приведенная масса, частота столкновений, потенциал и напряженность электрического поля. Остальные обозначения общепринятые. Индексы  $i$ ,  $e$ ,  $a$  относятся к ионам, электронам и нейтральным частицам.

Если принять допущение о малости  $\frac{d\mathbf{u}_{i,e}}{dt}$ , что равнозначно допущению о малости времени между столкновениями по сравнению со време-

нем изменения направленной скорости, то систему (II.2.32) можно преобразовать к виду [3]

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_i(\mathbf{u}_a + \mathbf{a}_i)) &= 0, \\
 \frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_e(\mathbf{u}_a + \mathbf{a}_e)) &= 0, \\
 \Delta\varphi &= e(n_e - Zn_i) / \varepsilon_0, \\
 \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_a) &= 0, \\
 \frac{\partial(\rho_a \mathbf{u}_a)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_a \mathbf{u}_a) &= -\nabla P_a, \\
 \frac{\partial(\rho_a E_a)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_a E_a) &= -\operatorname{div}(\mathbf{u}_a P_a), \\
 \mathbf{a}_i &= -D_i \left( \frac{\nabla n_i}{n_i} + \frac{Z_e}{kT_i} \nabla\varphi \right), \quad \mathbf{a}_e = -D_e \left( \frac{\nabla n_e}{n_e} - \frac{e}{kT_e} \nabla\varphi \right), \\
 D_i &= \frac{kT_i}{\mu_{ia} \nu_{ia}}, \quad D_e = \frac{kT_e}{\mu_{ea} \nu_{ea}}.
 \end{aligned} \tag{II.2.33}$$

Математическая модель задачи, кроме системы (II.2.33), включает также систему начальных и граничных условий. На границе втекания задавались параметры плазмы, на границе вытекания ставились условия свободного вытекания. Потенциал на удаленных границах полагался равным нулю, на цилиндре он считался постоянным. На теле ставятся условие непротекания для нейтральных частиц и условие абсолютной каталитичности для заряженных компонент плазмы. Более подробно анализ начальных и граничных условий дан в разделе II.2.1.

Перейдем теперь к формулировке математической модели для случая плоского пристеночного электрода ленточного типа. Ширина ленты  $r_p$  много меньше ее длины, поэтому в математической модели лента считается бесконечно длинной. Система уравнений включает уравнения неразрывности для ионов и электронов и уравнение Пуассона для самосогласованного электрического поля. Суммарная скорость заряженных частиц складывается из трех компонент: конвективной, диффузионной и составляющей, связанной с электрическим полем.

$$\begin{aligned}
 \partial n_i / \partial t + \partial(n_i u_{ix}) / \partial x + \partial(n_i u_{iy}) / \partial y &= 0, \\
 \partial n_e / \partial t + \partial(n_e u_{ex}) / \partial x + \partial(n_e u_{ey}) / \partial y &= 0, \\
 \partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 &= e(n_e - n_i) / \epsilon_0, \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}_D + \mathbf{u}_E,
 \end{aligned}
 \tag{II.2.34}$$

где  $\mathbf{u}_\infty = \mathbf{u}_\infty(y)$  — скорость набегающего потока в пограничном слое,  $\mathbf{u}_D = (D_a / n_a) ([\partial n_a / \partial x] \mathbf{e}_x + [\partial n_a / \partial y] \mathbf{e}_y)$  — диффузионная составляющая скорости,  $\mathbf{u}_E = \text{sign}(-q_\alpha) e D_\alpha ([\partial \varphi / \partial x] \mathbf{e}_x + [\partial \varphi / \partial y] \mathbf{e}_y) / (k T_\alpha)$ ,  $\alpha = i, e$ . Функция  $\mathbf{u}_\infty(y)$  получается решением уравнений пограничного слоя для нейтральной компоненты. Кроме того, сохраняются все предположения, сформулированные для системы (II.2.33).

#### II.2.4.2. Начальные и граничные условия

**Начальные условия.** При внесении проводящего тела в плазму за время порядка характерного времени релаксации около тела формируется возмущенная зона, состоящая из слоя объемного заряда и прилегающей к нему квазинейтральной области. Если тело изолировано, то оно приобретает «плавающий потенциал», который, как правило, ниже потенциала пространства. В этом случае токи ионов и электронов из плазмы на тело равны. Если на теле с помощью внешней электрической цепи поддерживается постоянный потенциал, отличный от «плавающего», то возмущенная зона будет зависеть от этого потенциала, а токи электронов и ионов оказываются не равны, т. е. на тело будет идти результирующий электрический ток, равный разности ионного и электронного. Этот ток далее замыкается через внешнюю цепь и плазму. В стационарном случае ток должен быть достаточно мал, чтобы не нарушать стационарное состояние плазмы.

В качестве начального распределения концентраций ионов и электронов следует брать установившиеся распределения в возмущенной зоне, однако они заранее неизвестны. Из опыта математического моделирования задач пристеночной плазмы предложены следующие два подхода к выбору начальных условий [3]:

$$n_i(\mathbf{r}, 0) = n_e(\mathbf{r}, 0) = n_{i, e\infty}(\mathbf{r}, 0) = \text{const}.$$

Такой выбор заведомо ошибочен и приводит к искажению переходного процесса. Однако численные эксперименты показывают, что установившееся решение близко к истинному. Поэтому такой подход допустим, если нас не интересует переходный процесс, а только установившееся решение.

Для получения реального переходного процесса решение задачи нужно проводить в два этапа. На первом этапе задача решается с произвольными начальными распределениями концентраций. Полученные при этом установившиеся распределения  $n_{i,e}(\mathbf{r}, t_{\text{уст}})$  берутся за начальные распределения, на фоне которых развивается новый переходный процесс. В этом случае решение на всем этапе моделирования оказывается близким к реальному.

Начальное распределение электрического потенциала  $\varphi(\mathbf{r}_p, 0)$  получается в случае первого подхода путем решения уравнения Лапласа при следующих граничных условиях:  $\varphi(\mathbf{r}, 0) = \varphi_{p0}$ ,  $\varphi(\mathbf{r}_\infty, 0) = 0$ , где  $\varphi_{p0}$  — потенциал тела, предшествующий его ступенчатому изменению.

В случае второго подхода используется начальное распределение  $\varphi(\mathbf{r}, 0)$  полученное как стационарное решение задачи на первом этапе при следующих граничных условиях:  $\varphi(\mathbf{r}, 0) = \varphi_p$ ,  $\varphi(\mathbf{r}_\infty, 0) = 0$ , где  $\varphi_p$  — новый потенциал тела в результате его ступенчатого изменения.

Начальные распределения для электронных и ионных температур (если они требуются) будут анализироваться при рассмотрении конкретных примеров.

**Граничные условия** будут рассматриваться более подробно применительно к конкретным примерам. Ниже будут изложены лишь общие соображения.

Расчетная область вблизи заряженного тела должна превышать возмущенную зону, создаваемую телом. Поэтому на внешней границе потенциал принимается равным нулю (относительно потенциала пространства), а концентрации заряженных частиц и их температуры — значениям в невозмущенной плазме:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}_\infty, t) &= 0, \\ n_{i,e}(\mathbf{r}_\infty, t) &= (n_{i,e})_\infty, \\ T_{i,e}(\mathbf{r}_\infty, t) &= (T_{i,e})_\infty. \end{aligned} \tag{II.2.35}$$



При задании условий на внешней границе расчетной области возможны следующие особенности.

1. Поскольку температура электронов может существенно превышать температуру ионов ( $T_{e\infty} > T_{i\infty}$ ), а масса электронов много меньше массы ионов, то и средний пробег электронов может существенно превышать средний пробег ионов. Отсюда следует, что размер возмущенной зоны для электронов может превосходить соответствующий размер возмущенной зоны для ионов. Если в качестве  $r_\infty$  выбрать максимальное значение, то условие (II.2.35) выполняется.

2. Если в плазме имеется направленное движение, то геометрический размер возмущенной зоны вблизи тел оказывается зависящим от угловой координаты. В теневой области развивается след, размеры которого могут на порядки превышать параметр  $r_\infty$ , пригодный для неподвижной плазмы. В этих условиях приходится увеличивать размер расчетной области. Если установление решения успеваеет произойти раньше того момента, когда след достигает внешней границы, то расчет заканчивается. В противном случае приходится увеличивать  $r_\infty$ , что нежелательно, поскольку приводит к росту необходимых ресурсов ЭВМ.

3. В некоторых случаях в процессе эволюции происходит заметное увеличение размера возмущенной зоны (например, в задачах с возникновением следа). Необходимые ресурсы ЭВМ можно уменьшить, если на каждом временном слое отслеживать возрастание размера возмущенной зоны и в соответствии с этим увеличивать размер расчетной области  $r_\infty$ .

Рассмотрим теперь граничные условия на поверхности тела. Для полностью каталитической и абсорбирующей поверхности тела в большинстве работ [11, 80] принимают следующие:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_p(r_p, t) \text{ — заданная функция времени,} \\ n_{i,e}(r_p, t) &= 0, \\ n_e \mathbf{u}_e \left( \frac{5}{2} kT_e - e\Phi \right)_p &= \chi_e \nabla(T_e)_p, \end{aligned} \quad (\text{II.2.36})$$

где  $\langle p \rangle$  — индекс тела,  $\chi$  — коэффициент теплопроводности. Остальные обозначения общеприняты. Как отмечено в [80], граничное условие  $n_{i,e}(r_p, t) = 0$  является приемлемым для случая режима сплошной среды,

так как концентрации частиц у поверхности оказываются крайне малы по сравнению с их значениями на большом расстоянии от тела. Однако имеется ссылка на работу [82], в которой на основе кинетической теории показано, что существует нижнее предельное значение  $n_{i,e}(\mathbf{r}_p, t)$  у стенки. Информацию о том, как отыскать это значение и каково его влияние на решение задач обтекания тел слабоионизированной столкновительной плазмой, в литературе найти не удалось. Поэтому авторами был проведен детальный анализ граничного условия для  $n_{i,e}(\mathbf{r}_p, t)$  и его влияния на решение задачи. Вначале приведем соображения общего характера.

В задачах обтекания тел плотной плазмой имеется несколько характерных геометрических размеров:

$r_p$  — размер тела, или  $\delta$ -толщина пограничного слоя,

$\lambda$  — средняя длина свободного пробега частиц в плазме,

$r_D$  — радиус Дебая, характеризующий порядок толщины слоя объемного заряда.

Если выполняется неравенство

$$r_p \gg r_D \gg \lambda, \quad (\text{II.2.37})$$

то режим сплошной среды имеет место как в невозмущенной плазме, так и внутри слоя объемного заряда. В этих условиях с большой вероятностью выполняются равенства  $n_{i,e}(r_p, t) = 0$ .

Если выполняется другое неравенство:

$$r_p \gg \lambda \gg r_D, \quad (\text{II.2.38})$$

то режим сплошной среды выполняется в невозмущенной области, а в слое объемного заряда имеет место молекулярный режим.

Как показано в [11], концентрация на границе тел в покоящейся разреженной плазме зависит от трех безразмерных комплексов:  $r_0 = r_p / r_D$ ,  $\Phi_0 = e\Phi / kT_i$ ,  $\varepsilon = T_{i\infty} / T_{e\infty}$ , а также от геометрического фактора и знака потенциала. При  $|\Phi_0| > 10$  отталкиваемые частицы имеют пренебрежимо малую концентрацию у поверхности, чего нельзя сказать о притягиваемых частицах. Концентрации вблизи сферических тел в 1,5–2 раза выше, чем вблизи тел цилиндрической геометрии. Приведем некоторые характерные значения  $n_i(\mathbf{r}_p, t_{\text{уст}})$  для сферы, взятые из [11]:

$$0, 2n_{i\infty} \leq n_{i,p} \leq 1, 5n_{i\infty}. \quad (\text{II.2.39})$$

(II.2.39) выполняется, если безразмерные комплексы менялись в следующих пределах:

$$2 \leq r_0 \leq 250,$$

$$-30 \leq \Phi_0 \leq 0,$$

$$\varepsilon = 1.$$

С уменьшением  $r_0$   $n_{i,p}$  резко возрастает и может в несколько раз превышать значения концентрации  $n_{i\infty}$ .

При проведении численных экспериментов в режиме сплошной среды в покоящейся слабоионизированной плазме [11] были получены распределения концентрации ионов и электронов вдоль радиуса вблизи сферического тела. В расчетах использовались граничные условия типа (II.2.36). Расчеты показали, что при  $\Phi_0 < -10$  в процессе самосогласованного решения естественным образом вблизи стенки возникает скачок концентрации положительно заряженных частиц, несмотря на то, что на границе поддерживается значение  $n_{i,p} = 0$ . Переход в ноль наблюдается вблизи самой стенки на расстоянии порядка шага расчетной сетки. Скачок составлял  $(0.2 \div 0.3)n_{i\infty}$ , что никак не укладывается в предположение, сделанное в [80] о крайне малом значении концентрации у стенки по сравнению с ее значением на больших расстояниях от тела. В [11] приведены результаты численных экспериментов, в которых начальное условие при  $r = r_p$  варьировалось в пределах  $0 \leq n_{i,p} \leq 1$ . Эксперименты показали влияние граничного условия на структуру возмущенной зоны и характер эволюции, однако величина установившегося значения ионного тока на тело изменялась не сильно. Поэтому в [11] сделан вывод о том, что в задачах обтекания заряженных тел плотной плазмой значение  $(n_{i,e})_p$  малосущественно и можно брать  $(n_{i,e})_p = 0$ , если исследуются только стационарные процессы переноса заряда.

Однако если исследуется распределение концентраций вблизи электрода или переходный процесс, то модельное условие (II.2.36) должно быть заменено на более корректное.

Учитывая выше сказанное, в работе предложен следующий способ нахождения граничной концентрации. Рассмотрение проведем на приме-

ре тела плоской геометрии, что не уменьшает общности метода. На рис. II.2.1, *a* изображен плоский заряженный электрод в виде бесконечной полосы вдоль оси  $Z$  с указанием слоев с различными режимами течения.

Если перемещаться от плоскости электрода по нормали, то (см. рис. II.2.1, *a*) вначале имеет место свободномолекулярная область (1), затем переходная область (2) и после нее — континуальная область (3). Очевидно, что деление на указанные области достаточно условно. В первой области необходимо использовать уравнения для свободномолекулярного режима, во второй области — уравнения для переходного режима, а в третьей области — уравнения (II.2.34) для режима сплошной среды. На границах областей необходимо проводить сшивание решения.

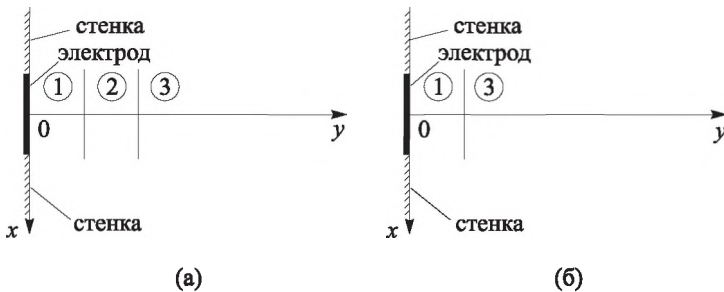


Рис. II.2.1. Структура пристеночной области:

1 — свободномолекулярная область ( $Kn \gg 1$ ); 2 — переходная область ( $Kn \approx 1$ ); 3 — континуальная область ( $Kn \ll 1$ )

Для упрощения алгоритма расчета задача, соответствующая рис. II.2.1, *a*, была заменена на задачу, соответствующую рис. II.2.1, *б*. Было предположено, что переходная область (2) мала и ею можно пренебречь. Уравнения Власова для ионов и электронов совместно с уравнением Пуассона для области (1) решались по алгоритму, изложенному в главе I.3. Концентрации заряженных частиц на стенке электрода определялись как моменты функции распределения. Определенные на границе свободномолекулярной области концентрации частиц являются граничными условиями для задачи в следующей континуальной области ((3) на рис. II.2.1, *б*). Уравнения континуальной модели включали урав-

нения неразрывности, уравнения движения для всех компонент плазмы, а также уравнение Пуассона. Алгоритм решения подробно изложен в главе II.3.

Стыковка двух зон обеспечивается общим электрическим полем для обеих зон и равенством концентраций заряженных частиц на границе в процессе установления. Проверялось также равенство производных  $d\phi/dr$  и  $dn_{i,e}/dr$  на границе зон.

Решение осуществлялось на координатной сетке  $N_t \times N_x \times N_y$  в зоне (3) и на сетке  $N_t \times N_x \times N_y \times N_{V_x} \times N_{V_y}$  в зоне (1). Из опыта математического моделирования полагали  $N_t = 200$ ,  $N_x = 30$ ,  $N_y = 20$ ,  $N_{V_x} = 10$ ,  $N_{V_y} = 10$ .

В численных экспериментах характерные безразмерные комплексы варьировались в следующих диапазонах:

$$5 \leq r_0 = \frac{r_p}{r_D} \leq 25,$$

$$-30 \leq \phi_0 = \frac{e\Phi_p}{kT_i} \leq 10,$$

$$2 \leq \frac{\lambda}{r_D} \leq 5.$$

На рис. II.2.2 представлены установившиеся распределения концентраций ионов и электронов для случая  $r_0 = 10$ ,  $\frac{\lambda}{r_D} = 2$  при трех значениях потенциалов:  $\phi_0 = -9$  (кривая 1);  $\phi_0 = -6$  (кривая 2);  $\phi_0 = -3$  (кривая 3). Кривые проведены вдоль оси  $y$ , исходящей из центральной точки электрода ( $x=0$ ).

Из рис. II.2.2 следует, что граничные значения для концентраций ионов при отрицательном потенциале тела не нулевые. Они оказались в интервале  $0,3n_{i\infty} \leq n_{ip} \leq 0,75n_{i\infty}$ .

Результаты математического моделирования подтвердили сделанное выше предположение о том, что граничное значение концентрации

притягивающихся к телу частиц не может быть равным нулю. Его можно найти предложенным в работе методом.

В заключение отметим, что граничные условия на поверхности тела могут осложняться наличием эмиссии электронов и инжекцией потоков заряженных или нейтральных частиц. Подробное исследование этих эффектов можно найти в работах [3, 11].

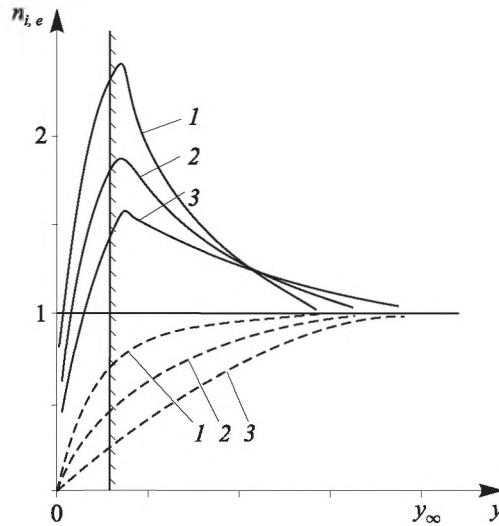


Рис. II.2.2. Распределение концентраций ионов и электронов  
 $n_0=10$ , 1 —  $\phi_0=-9$ , 2 —  $\phi_0=-6$ , 3 —  $\phi_0=-3$

—————  $n_i$       - - - - -  $n_e$

----- граница раздела свободномолекулярной и континуальной областей

### II.2.5. Слабоионизированная движущаяся плазма (турбулентное течение)

Турбулентное течение вблизи обтекаемых плазмой тел возникает при достаточно высоких скоростях набегающего потока. Оно характеризуется хаотическими изменениями параметров в пространстве и времени вокруг некоторых средних значений [83–87].

Вследствие неустойчивости, наличия возмущений и самоорганизации течения возбуждается огромное число степеней свободы (по порядку величины равное  $Re^{9/4}$  для трехмерных течений), что делает решение практически невозможным.

Для слабоионизированной плазмы процессы переноса в пристеночной плазме сводятся к решению задачи о нелинейной диффузии в самосогласованном поле массовых сил в турбулентном потоке нейтрального газа. Для турбулентности с пульсациями небольшой частоты (небольшой для численного расчета — когда изменение на следующем шаге по времени концентрации и самосогласованного поля невелико) задача моделирования процессов переноса для случая слабой ионизации фактически отличается от моделирования при ламинарном потоке лишь расчетом поля скорости нейтральной компоненты.

Применимость различных теорий описания турбулентности определяется в первую очередь масштабами пульсаций. Для крупномасштабных процессов можно проводить прямое численное моделирование, обусловленное слабой зависимостью в таких задачах крупномасштабного движения от мелкомасштабных пульсаций. Получаемые результаты в этом случае, как правило, более правильно передают динамику турбулентного потока, чем результаты расчета с применением моделей замыкания [88, 89]. Для мелкомасштабных процессов возможно развитие моделей замыкания и расчет полей усредненных величин.

Теория пульсаций среднего масштаба не может быть получена из локальной физики [90–92]. Средством исследования являются натурные эксперименты или численное моделирование.

Только с конца прошлого столетия, когда появилась нелокальная физика, развитая Б. В. Алексеевым, была развита строгая теория турбулентности, объединяющая пульсации крупномасштабные, мелкомасштабные и пульсации среднего масштаба [93, 94].

В настоящей монографии для крупномасштабной турбулентности применен метод прямого численного моделирования турбулентного движения нейтрального газа, для случая пульсаций среднего масштаба предложен метод моделирования диффузии пассивной примеси (которой здесь являются заряженные частицы по определению слабоионизированной плазмы), для мелкомасштабной турбулентности построена модель замыкания с применением результатов работы [95].

Моделирование крупномасштабных пульсаций возможно, если поток проявляет неустойчивость к возмущениям и существует механизм поддержания автоколебаний. Такими свойствами обладает, например, поток при поперечном обтекании цилиндрического тела. При этом за телом возникает нестационарный вихревой след — дорожка Кармана. Развивающееся в следе вихревое течение не зависит от вида начального возмущения, устойчиво к возмущениям и сохраняется в ходе дальнейшего расчета [96, 97].

Для рассмотрения случая турбулентности с крупномасштабными пульсациями пригодна система (II.2.32), включающая газодинамическую и электродинамическую часть. Решение газодинамической части хорошо изучено [76, 77] и может рассматриваться как фон, на котором решается часть электродинамическая.

Система (II.2.32) записана в консервативной форме, удобной для численных расчетов. При выводе были сделаны допущения о слабой степени ионизации плазмы, о применимости уравнения состояния идеального газа для нейтральной компоненты, а также пренебрегалось вязкостью газа.

В случае когда вихри имеют промежуточный масштаб, применено стохастическое моделирование: поле скорости нейтральной компоненты представляется суммой поля средней скорости и поля пульсаций, определяемых экспериментально или с помощью некоторых моделей (например,  $k - \varepsilon$ -модели).

Параметрами модели являются характерный размер вихрей (размер пульсаций, длина корреляции)  $l'$  и средняя величина пульсационной скорости  $v'$ . Характерное время жизни вихря  $T'$  определяется как  $l'/\langle u_a \rangle$ , что отличается от принятого в работе [98]. В рассматриваемых течениях  $l'$  порядка толщины пограничного слоя  $\delta$ , т. е. на порядок больше, чем пульсации масштаба длины пути смещения (приблизительно равные  $0,0755\delta$  [85]), для которых возможно было построить модель замыкания, но меньшие, чем крупные вихри, которые можно рассчитать при наличии механизма автоколебаний в течении.

Поле пульсаций генерируется стохастически, векторы пульсаций скорости направлены равновероятно по всем направлениям. Через промежутки  $T'$  задается новое распределение вихрей.



В проведенных численных экспериментах рассматривалось течение плазмы в полупространстве над плоской стенкой с электродом, имеющим потенциал. В этом случае, в силу простоты геометрии и симметрии, поле средней скорости плоскопараллельно и вне пограничного слоя скорость постоянна. Для размера вихрей и величины пульсаций скорости можно использовать экспериментальные данные [95]. В расчетах поле средней скорости во всей области плоскопараллельно и не меняется, пульсации скорости вблизи стенки варьировались около характерных значений  $v' \approx (2 \div 4)\% v_{cp}$  [95] с учетом анизотропии пульсаций по экспериментальным данным.

Для моделирования процессов переноса в турбулентном пограничном слое при мелкомасштабной турбулентности использовалась модель, предложенная в работе [99]. Уравнения модели имеют вид

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} \left( n_i \left( \mathbf{u}_a - D_i \left( \frac{1}{n_i} \nabla n_i + \frac{Ze}{kT_i} \nabla \varphi \right) - \frac{1}{n_i} D_T \nabla n_i \right) \right) = 0, \quad (\text{II.2.40})$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} \left( n_e \left( \mathbf{u}_a - D_e \left( \frac{1}{n_e} \nabla n_e - \frac{e}{kT_e} \nabla \varphi \right) - \frac{1}{n_e} D_T \nabla n_e \right) \right) = 0, \quad (\text{II.2.41})$$

$$\Delta \varphi = e(n_e - Zn_i) / \epsilon_0. \quad (\text{II.2.42})$$

Здесь  $D_T$  — тензор турбулентной диффузии, определяемый по модели Прандтля–Буссинеска [95]:

$$D_{T_{ik}} = \delta_{ik} l' u_i'. \quad (\text{II.2.43})$$

Эта модель адекватно передает динамику пассивной примеси, которой в данном случае являются, по определению слабоионизованной плазмы, заряженные частицы.

Здесь через  $D_T \nabla \bar{n}_i$  выражено слагаемое  $\overline{n_i' v_0'}$ , получающееся при осреднении уравнений динамики частиц. Также при осреднении появляется второе слагаемое — корреляции пульсации концентрации и градиента пульсаций потенциала. В [99, 100] доказана следующая теорема:

$$\operatorname{div}(\overline{-Zb_i n_i' \nabla \varphi'}) = 0, \quad \operatorname{div}(\overline{b_e n_e' \nabla \varphi'}) = 0.$$

Поля пульсаций можно разложить на сумму плоских волн со случайными, некоррелированными между собой амплитудами [95]:

$$n'_i(\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dS'_i(\mathbf{k}),$$

$$n'_e(\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dS'_e(\mathbf{k}),$$

$$\varphi'_i(\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dS'_\varphi(\mathbf{k}),$$

где справедливы равенства

$$\overline{dS(\mathbf{k})} = 0,$$

$$\overline{dS_i(\mathbf{k}_1)dS_i(\mathbf{k}_2)} = \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)F(\mathbf{k}_1)d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2,$$

$$\overline{dS_i(\mathbf{k}_1)dS_e(\mathbf{k}_2)} = \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)B(\mathbf{k}_1)d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2.$$

Получаем из уравнения Пуассона уравнение для спектральных амплитуд:

$$dS_{\varphi'}(\mathbf{k}) = \frac{e}{k^2\epsilon_0}(dS_e(\mathbf{k}) - Z dS_i(\mathbf{k})).$$

Имеем

$$\overline{div(n'_i\nabla\varphi')} = \overline{\nabla n'_i \cdot \nabla\varphi'} + \overline{n'_i \cdot \Delta\varphi'} = \overline{\nabla n'_i \cdot \nabla\varphi'} + \overline{n'_i(n'_e - Zn'_i)e/\epsilon_0}.$$

Проводя выкладки [254, 189], получаем доказательство теоремы, которое позволяет построить модель (11.51)–(11.53).

Величина средней скорости определялась сшивкой линейного и логарифмического профилей:

$$\bar{u} = \frac{yu_\tau^2}{v}, \quad y < 11,1v/u_\tau, \quad (\text{II.2.44})$$

$$\bar{u} = 2,5u_\tau \ln \frac{yu_\tau^2}{v} + 5,1u_\tau, \quad y > 11,1v/u_\tau. \quad (\text{II.2.45})$$

Размер пульсаций (длина пути смешения)  $l'$  определялся по формуле Ван-Дрифта

$$l' = 0,4y \left( 1 - \exp\left(-\frac{yu_\tau}{26v}\right) \right). \quad (\text{II.2.46})$$

Распределение пульсаций скорости можно приближенно задать по результатам Клебанова и Лауфера, приведенным в [95].

Здесь  $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho_0}$  — характерная скорость,  $\tau_w$  — напряжение трения на стенке.

### II.2.6. Слабоионизованная столкновительная плазма в магнитном поле

Рассматриваются математические модели, сформулированные в разделе II.2.4, с добавлением внешнего магнитного поля. Магнитное поле Земли имеет место при движении гиперзвукового летательного аппарата, внешнее магнитное поле используется в плазменных движителях, в системах управления потоками плазмы, при проведении различных физических экспериментов, в МГД-генераторах, в некоторых технологических установках, использующих плазму в качестве рабочего тела.

В случае цилиндрического тела, обтекаемого поперечным потоком слабоионизованной столкновительной плазмы (рис. II.2.4), магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$  направим вдоль оси цилиндра. В этом случае сохраняется размерность задачи и проявляются все физические эффекты, связанные с магнитным полем. Собственными магнитными полями будем пренебрегать по сравнению с внешними. Система уравнений в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_i \mathbf{u}_i) &= 0, \\
 \frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_e \mathbf{u}_e) &= 0, \\
 m_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} &= -\frac{kT_i}{n_i} \nabla n_i + Ze(\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) - \mu_{ia} \nu_{ia} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_a), \\
 m_e \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} &= -\frac{kT_e}{n_e} \nabla n_e - e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \mu_{ea} \nu_{ea} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_a), \\
 \Delta \varphi &= e(n_e - Zn_i) / \varepsilon_0, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \\
 \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_a) &= 0, \\
 \frac{\partial (\rho_a \mathbf{u}_a)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_a \mathbf{u}_a) &= -\nabla P_a, \\
 \frac{\partial (\rho_a E_a)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_a E_a) &= -\operatorname{div}(\mathbf{u}_a P_a), \\
 P_a &= (E_a - u_a^2 / 2) \rho_a (\gamma - 1), \quad E_a = C_v T_a + u_a^2 / 2.
 \end{aligned}
 \tag{II.2.47}$$

Если принять допущение о малости  $\frac{d\mathbf{u}_{i,e}}{dt}$ , как это было сделано в разделе II.2.4, то систему (II.61) можно преобразовать к виду [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\frac{n_i}{1+\beta_i^2}(\mathbf{u}_a + \mathbf{a}_i + \beta_i(\mathbf{u}_a + \mathbf{a}_i) \times \mathbf{e})\right) &= 0, \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\frac{n_e}{1+\beta_e^2}(\mathbf{u}_a + \mathbf{a}_e - \beta_e(\mathbf{u}_a + \mathbf{a}_e) \times \mathbf{e})\right) &= 0, \\ \Delta\varphi &= e(n_e - Zn_i) / \varepsilon_0, \\ \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_a) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho_a \mathbf{u}_a)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_a \mathbf{u}_a) &= -\nabla P_a, \end{aligned} \quad (\text{II.2.48})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_a E_a)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_a E_a) &= -\operatorname{div}(\mathbf{u}_a P_a), \\ \mathbf{a}_i &= -D_i \left( \frac{\nabla n_i}{n_i} + \frac{Z_e}{kT_i} \nabla \varphi \right), \quad \mathbf{a}_e = -D_e \left( \frac{\nabla n_e}{n_e} - \frac{e}{kT_e} \nabla \varphi \right), \\ \beta_i &= 2\omega_i / v_{ia}, \quad \beta_e = \omega_e / v_{ea}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{B}/B, \quad D_i = \frac{kT_i}{\mu_{ia} v_{ia}}, \end{aligned}$$

$$D_e = \frac{kT_e}{\mu_{ea} v_{ea}},$$

где  $\omega_{i,e} = \frac{eB}{m_{i,e}}$  — ларморовские частоты вращения ионов и электронов,

$v_{ia}, v_{ea}$  — частоты столкновений  $i-a$ ,  $e-a$ ,  $\beta_i = \frac{2\omega_i}{v_{i,e}}$  — параметр Холла,

остальные обозначения соответствуют системе (II.2.33). Система начальных и граничных условий также сохраняется.

Перейдем теперь к рассмотрению обтекания электрода ленточного типа, расположенного на диэлектрической стенке (рис. II.2.1). В этом случае масштабированная система уравнений совпадает с системой (II.2.34), за исключением третьего уравнения, которое имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = n_e - n_i. \quad (\text{II.2.49})$$

**Контрольные вопросы к главе II.2**

1. Как формируется математическая модель столкновительной покоящейся плазмы с постоянными свойствами и замороженными химическими реакциями?

2. Как формулируется математическая модель столкновительной покоящейся плазмы с переменными свойствами и замороженными химическими реакциями?

3. Как формулируется математическая модель столкновительной плазмы с учетом химических реакций?

4. Как формулируется математическая модель столкновительной движущейся плазмы (ламинарное течение)?

5. Как формулируется математическая модель столкновительной движущейся плазмы (турбулентное течение)?

6. Как формулируется математическая модель столкновительной движущейся плазмы в магнитном поле?

7. При каких условиях можно использовать граничное условие на теле в виде  $n_i(r_p) = n_e(r_p) = 0$ ?

## Глава II.3. Численные модели столкновительной пристеночной плазмы

Численные модели столкновительной пристеночной плазмы имеют ряд общих моментов с численными моделями бесстолкновительной плазмы, в частности:

- для решения уравнений неразрывности удобен метод крупных частиц Давыдова, который успешно применяется для решения уравнений Власова. В таком совпадении нет ничего удивительного. Кинетическое уравнение Власова может быть записано в дивергентной форме [3]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_{x,v}(\bar{v}_f) = 0,$$

где  $\bar{v}_f$  — вектор скорости фазовой среды.

Таким образом, мы получили уравнение неразрывности потока фазовой жидкости, текущего в фазовом пространстве. В математическом аспекте это уравнение аналогично уравнению неразрывности сплошной среды;

- в обоих случаях в математическую модель входят уравнения Максвелла или уравнения Пуассона;
- в обоих случаях удобно решать систему методом последовательных итераций по времени. Потенциал тела импульсно меняется от начального значения до конечного, что вызывает эволюцию возмущенной пристеночной зоны, которая и моделируется методом последовательных итераций по времени.

### II.3.1. Метод крупных частиц Давыдова применительно к задачам столкновительной плазмы

Система уравнений (II.2.33), (II.2.34) с соответствующей системой начальных и граничных условий решалась различными численными методами [3, 11]. Наиболее удобным оказался метод последовательных итераций по времени. Согласно этому методу в момент времени  $t = 0$  осуществляется импульсное изменение потенциала тела от начального значения  $\Phi_{01}$  до конечного значения  $\Phi_{02}$ . При этом происходит эволюция

возмущенной зоны от начального до конечного стационарного состояния. Последнее рассматривается как искомое решение задачи. При обтекании пластины с расположенным на ней пристеночным электродом ленточного типа вначале решается задача обтекания пластины потоком нейтрального газа. Задача расчета пограничного слоя вблизи пластины хорошо разработана и изложена в ряде монографий [101, 102]. В результате решения получаются поля скоростей, концентраций и температур нейтральной компоненты, которые рассматриваются как фон, на котором осуществляется решение электродинамической части задачи (система (II.2.33), (II.2.34)). Уравнения неразрывности для ионов и электронов решаются методом крупных частиц Давыдова [27–31]. При этом на каждом временном слое определяется самосогласованное электрическое поле путем решения уравнения Пуассона. Преимущества метода крупных частиц подробно обсуждены в главе I.3 пособия. Перечислим некоторые из них.

1. Метод удобен для решения нестационарных и многомерных задач с учетом многообразных физических процессов, происходящих в пристеночной плазме и на границе с активной поверхностью зонда.
2. Вычислительная схема метода консервативна, что особенно важно в ионизованных средах.
3. Метод удобен для организации параллельного счета.
4. Метод позволяет обеспечить однородность вычислительного алгоритма как во внутренних областях расчетной области, так и на границах.
5. Метод естественным образом позволяет рассчитывать процессы переноса, а также процессы перемешивания и гомогенизации различных компонент под действием конвекции, диффузии и подвижности.
6. Теоретическое обоснование метода и особенности его применения в задачах обтекания заряженных тел столкновительной плазмой достаточно хорошо разработаны [3–11].

В работах Ю. М. Давыдова и его учеников [53, 54] обоснована необходимость использования однородных и изотропных вычислительных пространств. Такими свойствами обладает декартова система координат, в которой осуществляется решение задач обтекания электродов плоской геометрии.

Оптимальное число крупных частиц с точки зрения имеющихся вычислительных ресурсов и точности решения определяется методическими расчетами. Размер расчетной области должен превышать размер возмущенной зоны вблизи зонда. Он также определяется методическими расчетами. Для оценки величины расчетной области можно воспользоваться данными рисунка II.3.1, на котором приведен ее размер, полученный в численных экспериментах для слабоионизованной покоящейся плазмы с постоянными свойствами и замороженными химическими реакциями для тел кругового сечения. Как следует из рисунка, размер расчетной области в достаточно широком диапазоне изменения характерного геометрического размера задачи составляет  $(100 \div 200)r_d$ . При  $r_p/M_r > 10^3$  тело кругового сечения становится похожим на плоское, с тонким слоем объемного заряда (для зонда ленточного типа это означает, что зонд можно считать бесконечно большим). Зависимость величины возмущенной зоны от других параметров задачи можно найти в работах [3–11].

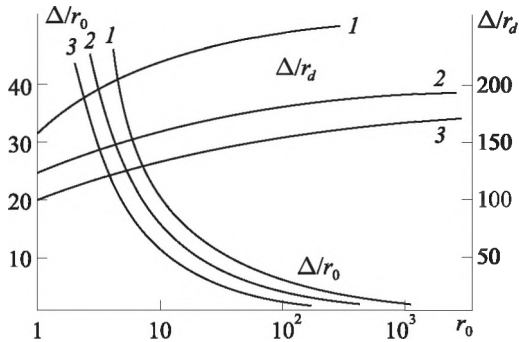


Рис. II.3.1. Размер возмущенной зоны для тел кругового сечения:

1 —  $\varepsilon = 0,1$ ; 2 —  $\varepsilon = 0,5$ ; 3 —  $\varepsilon = 1,0$

Рассмотрим теперь вопрос о выборе шага по времени  $\Delta t$ . Как показано в [103], условие устойчивости Неймана применительно к гиперболическим уравнениям будет выполняться, если использовать известную схему Лакса [104]. Анализ устойчивости схемы, проведенный в [103] для случая линейных дифференциальных уравнений, приводит к неравенству

$$|u \Delta t / \Delta x| \leq 1, \quad (\text{II.3.1})$$



где  $u$  — физическая скорость среды,  $\Delta t$  — шаг по времени,  $\Delta x$  — шаг по пространственной координате. Из (II.64) вытекает ограничение на шаг по времени:

$$\Delta t \leq \Delta x / |u_{\max}|, \quad (\text{II.3.2})$$

где  $u_{\max}$  — максимальная скорость центров крупных частиц.

Условие (II.3.2) известно в литературе как условие Куранта–Фридрихса–Леви (КФЛ) [104] применительно к линейным гиперболическим уравнениям. В наших условиях уравнения неразрывности, входящие в систему (II.2.33), (II.2.34), оказываются нелинейными. Однако, учитывая наглядный физический смысл условия (II.3.2), многие авторы [3–11] используют его для выбора шага по времени. Мы также будем использовать неравенство (II.3.2) как оценочное для проведения методических расчетов по выбору оптимального шага по времени.

Неравенство (II.3.2) означает, что в явном методе крупных частиц рекомендовано выбирать шаг по времени  $\Delta t$  как наименьшее характерное физическое время, за которое скорость  $u$  приводит к переносу на расстояние  $\Delta x$ . Условие КФЛ включает требование, чтобы физическая скорость  $u$  была меньше сеточной скорости  $\Delta x / \Delta t$ .

Многочисленные вычислительные эксперименты с нелинейными системами дифференциальных уравнений применительно к зондовым задачам [3–11] как в молекулярном, так и в континуальном режимах показали, что условие (II.3.2) оказывается слишком жестким. Как правило, кривая распределения потенциала в возмущенной зоне зонда имеет максимальный градиент вблизи поверхности. Зачастую вблизи поверхности максимален также градиент концентрации заряженных частиц. Поэтому вблизи активной поверхности зонда также максимален перенос заряженных частиц, а значит, максимальна и их скорость, входящая в условие (II.3.2), т. е. минимален шаг по времени  $\Delta t$ . Подтвердим этот вывод вычислительным экспериментом. Эффект возрастания скорости притягивающихся частиц по нормали к поверхности зонда в случае плоской геометрии еще более усиливается за счет краевых эффектов. На рис. II.3.2 вблизи поверхности плоского зонда, помещенного в поток континуальной плазмы, приведены значения безразмерной скорости крупных частиц (их нормальная составляющая). Численные значения скорости соответствуют скоростям центров ячеек эйлеровой сетки, использованной в расчетах.

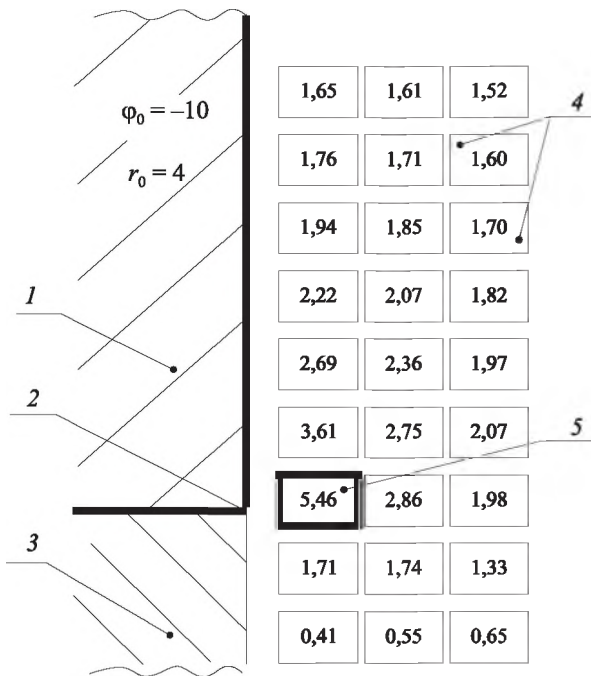


Рис. II.3.2. Распределение нормальных составляющих скорости ионов  
вблизи плоского электрода:

- 1 — плоский электрод;
- 2 — край электрода с малым радиусом кривизны;
- 3 — диэлектрическая пластина, на которой расположен электрод;
- 4 — ячейки Эйлеровой сетки с указанием величины безразмерной скорости среды;
- 5 — ячейка с максимальной скоростью

Учитывая каталитические свойства поверхности зонда, можно ожидать, что самые высокоскоростные притягивающиеся частицы за несколько шагов по времени поглощаются (или нейтрализуются) на зонде и выбывают из рассмотрения. Иными словами, в условии КФЛ входят скорости очень малого числа короткоживущих частиц, не отражающих динамику всего массива.

Вычислительные эксперименты и методические расчеты показали, что шаг по времени может быть увеличен в 3–5 раз по сравнению с его

величиной, вытекающей из (II.3.2), без нарушения устойчивости и точности решения. Этот вывод относится как к континуальному, так и к молекулярному режиму.

Приведем результаты еще одного вычислительного эксперимента, подтверждающего справедливость сделанного вывода.

На рис. II.3.3, II.3.4 рассматривается заряженный цилиндр, помещенный в поперечный поток слабоионизированной столкновительной плазмы. Расчеты проведены при числе Маха  $M = 0,6$ , электрическом числе Рейнольдса  $Re_s = 25$ , безразмерном потенциале цилиндра  $\phi_0 = \phi/M_\phi = -45$  и двух значениях безразмерного радиуса  $r_0 = r/M_r = 3$  и  $10$ ; ( $M_\phi = kT_i/e$  — масштаб потенциала,  $M_r = r_D = (\epsilon_0 kT_i / (n_{i\infty} e^2))^{1/2}$  — масштаб длины).

На рис. II.3.3, II.3.4 показаны Эйлерова сетка по радиусу и угловой координате, а также профиль скоростей ионов. В таблицах приведены безразмерные значения радиальной скорости в нескольких характерных ячейках. Из рисунков видно, что максимальная радиальная составляющая физической скорости среды имеет место вблизи стенки. Сгущение линий тока ионов вблизи сороковой ячейки по углу объясняется влиянием концевого эффекта, а достаточно высокая радиальная скорость в теневой области — вихревым движением нейтральной компоненты, которая увлекает за собой ионы.

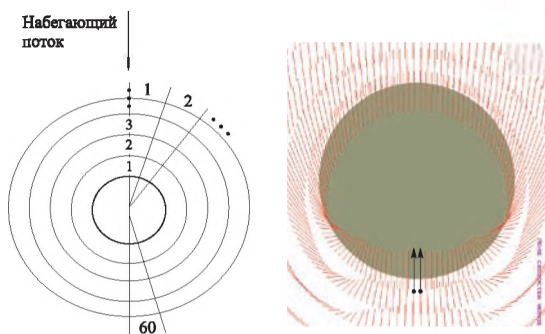


Рис. II.3.3. Радиальная скорость ионов в пристеночной области цилиндрического электрода  
( $r_0 = 3, Re_s = 25, M = 0,6, \phi_0 = -45$ )

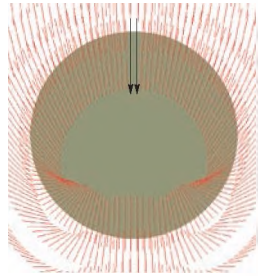
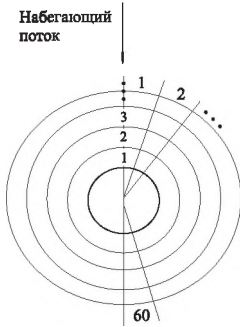
Таблица II.3.1

$N_\theta \backslash N_r$	1	2	3	4	5
1	-1,65	-1,51	-1,43	-1,34	-1,27
20	-1,32	-1,26	-1,03	-0,98	-0,85
40	-0,94	-0,51	-0,22	-0,09	-0,06
60	-1,68	-1,55	-1,48	-1,39	-1,29

$$r_0 = 3, Re_s = 25,$$

$$M = 0,6, \phi_0 = -45$$

Таблица II.3.2



$N_r \backslash N_\theta$	1	2	3	4	5
1	-2,78	-2,20	-1,76	-1,35	-1,05
20	-2,32	-1,88	-1,36	-1,04	-0,71
40	-1,66	-0,99	-0,47	-0,18	-0,08
60	-2,17	-1,87	-1,66	-1,45	-1,26

$$r_0 = 10, Re_s = 25, \\ M = 0,6, \varphi_0 = -45$$

Рис. II.3.4. Радиальная скорость ионов в пристеночной области цилиндрического электрода  
( $r_0 = 10, Re_s = 25, M = 0,6, \varphi_0 = -45$ )

### II.3.2. Методы решения уравнения Пуассона

В большинстве рассматриваемых задач со столкновительной слабоионизованной пристеночной плазмой система уравнений Максвелла сводится к уравнению Пуассона. Методы решения уравнения Пуассона, изложенные в гл. I.3, применимы и в данном случае. Поэтому ниже приведены лишь некоторые подробности и особенности, встречающиеся при решении задач электродинамики пристеночной плотной плазмы.

#### II.3.2.1. Спектральные методы решения уравнения Пуассона

Спектральные методы используют разложение искомой функции по собственным функциям дифференциального оператора [105–112]. Тогда конечно-разностная задача сводится к системе линейных дифференциальных уравнений или даже к обычным алгебраическим уравнениям. Одно из достоинств такого подхода — точное выполнение граничных условий при соответствующем выборе функций.

Рассмотрим двумерные расчетные области. Так, в прямоугольной области функции

$$s_{ij}(k, l) = F(k, l) \sin \frac{\pi k j}{N_j} \sin \frac{\pi k i}{N_i}$$

являются собственными для уравнения Пуассона при задании нулевых граничных условий.

При решении задачи можно разлагать входящие в уравнение функции в ряд Фурье как по обоим направлениям, так и по одному. В первом случае получаются независимые алгебраические уравнения для определения амплитуд всех гармоник, число арифметических операций при этом составляет примерно  $4N_1N_2(N_1 + N_2)$ . Во втором случае задача сводится к решению системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, для которой существует эффективный метод решения — метод прогонки. Метод требует примерно  $N_1N_2 \log_2 N_2$  арифметических операций и применим, например, в цилиндрических областях, так как разложение проводится в одном измерении.

Рассмотрим примеры.

#### 1. Прямоугольная область.

Во всех граничных точках сетки потенциал равен нулю, кроме части одной из границ; ситуация соответствует области вблизи плоского стеночного электрода, когда рассматриваются процессы в двумерной постановке — в плоскости, перпендикулярной длинной стороне прямоугольного электрода.

В данной ситуации удобнее разложить искомую функцию и распределение источников в ряд по направлению вдоль стенки, что, с учетом граничных условий, даст

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} &= \sum_k \Phi_j(k) \sin \frac{\pi k i}{N_i}, \\ \rho_{ij} &= \sum_k P_j(k) \sin \frac{\pi k i}{N_i}. \end{aligned}$$

Подстановка в пятиточечную разностную аппроксимацию уравнения Пуассона

$$(\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i-1,j}) + (\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i,j-1}) = -\Delta^2 \rho_{ij}$$

даёт систему уравнений для каждого волнового числа с трехдиагональной матрицей:

$$\Phi_{j+1}(k) - \left(4 - 2 \cos \frac{\pi k}{N_i}\right) \Phi_j(k) + \Phi_{j-1}(k) = -\Delta^2 P_j(k),$$

где правая часть вычисляется по формуле

$$P_j(k) = \frac{2}{N_i} \sum_i \rho_{ij} \sin \frac{\pi k i}{N_i}.$$

## 2. Цилиндрическая область.

Расчетная область — круговой сегмент, геометрия соответствует задаче с длинным цилиндрическим электродом. Здесь можно использовать либо разложение в полный ряд по синусам и косинусам по угловой координате с учетом периодичности функции, либо разложение по радиальной координате по синусам для нулевых граничных условий и добавление решения уравнения Лапласа для заданных граничных значений на поверхности цилиндра. В расчетах использовался первый метод.

Разностный аналог уравнения Пуассона в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_i \Delta r} \left( r_{i+1/2} \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{ij}}{\Delta r} - r_{i-1/2} \frac{\Phi_{ij} - \Phi_{i-1,j}}{\Delta r} \right) + \\ & + \frac{1}{r_i^2} \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i,j+1}}{\Delta \varepsilon^2} = -\Delta^2 \rho_{ij}. \end{aligned}$$

Представляя периодические по угловой координате (индекс  $j$ ) функции в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} &= \frac{1}{2} \Phi_i(0) + \sum_{k=1}^{N_i/2} \Phi_i^c(k) \cos \frac{2\pi k j}{N_j} + \Phi_i^s(k) \sin \frac{2\pi k j}{N_j}, \\ \rho_{ij} &= \frac{1}{2} P_i(0) + \sum_{k=1}^{N_i/2} P_i^c(k) \cos \frac{2\pi k j}{N_j} + P_i^s(k) \sin \frac{2\pi k j}{N_j} \end{aligned}$$

и приравнивая амплитуды при одинаковых гармониках в обеих частях, получаем систему с трехдиагональной матрицей:

$$\frac{1}{r_i \Delta r^2} (r_{i+1/2} (\Phi_{i+1}(0) - \Phi_i(0)) - r_{i-1/2} (\Phi_i(0) - \Phi_{i-1}(0))) = -\Delta^2 P_i(0),$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_i \Delta r^2} \left( r_{i+1/2} \left( \Phi_{i+1}^c(k) - \Phi_i^c(k) \right) - r_{i-1/2} \left( \Phi_i^c(k) - \Phi_{i-1}^c(k) \right) \right) + \\ & + \frac{1}{r_i^2 \Delta \varepsilon^2} 2\Phi_i^c(k) \left( \cos \frac{2\pi k j}{N_j} \right) - 1 = -\Delta^2 P_i^c(k), \\ & \frac{1}{r_i \Delta r^2} \left( r_{i+1/2} \left( \Phi_{i+1}^s(k) - \Phi_i^s(k) \right) - r_{i-1/2} \left( \Phi_i^s(k) - \Phi_{i-1}^s(k) \right) \right) + \\ & + \frac{1}{r_i^2 \Delta \varepsilon^2} 2\Phi_i^s(k) \left( \cos \frac{2\pi k j}{N_j} \right) - 1 = -\Delta^2 P_i^s(k). \end{aligned}$$

Коэффициенты в разложении Фурье (например, потенциала) определяются так:

$$\begin{aligned} \Phi_i^c(k) &= \frac{2}{N_j} \sum_{j=1}^{N_i-1} \varphi_{ij} \cos \frac{2\pi k j}{N_j}, \quad k=0, N_i/2, \\ \Phi_i^s(k) &= \frac{2}{N_j} \sum_{j=1}^{N_i-1} \varphi_{ij} \sin \frac{2\pi k j}{N_j}, \quad k=1, N_i/2. \end{aligned}$$

Заметим, что алгоритм разложения можно сделать еще производительнее, воспользовавшись быстрым разложением Фурье [105–112].

### ***II.3.2.2. Итерационный метод верхней релаксации решения уравнения Пуассона***

Если расчетная область имеет сложную форму или размерность задачи равна трём, то выгоднее использовать итерационные методы. Так как задача решается методом установления и за шаг по времени распределение заряженных частиц меняется слабо, то, выбирая в качестве начального приближения решение с предыдущего шага, можно добиться хорошей точности делая 5–10 итераций, что быстрее точного решения прямыми методами на каждом шаге.

Общий алгоритм решения линейной системы уравнений

$$Au = w$$

можно записать как решение эволюционного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Au + w$$

или в разностной форме в виде итерационного алгоритма

$$u^{k+1} = u^k - \delta Au^k + \delta w^k,$$

который будет эффективен, если диагональные элементы матрицы  $A$  будут достаточно велики по сравнению с остальными.

Применяя эту процедуру к уравнению Пуассона, получаем

$$\varphi_{ij}^{k+1} = (1 - \delta)u_{ij}^k + \frac{1}{4}\delta(\varphi_{i+1,j}^k + \varphi_{i-1,j}^k + \varphi_{i,j+1}^k + \varphi_{i,j-1}^k) + \delta\Delta^2\rho_{ij}^k.$$

Условие сходимости для шага  $\delta$  по «воображаемому» времени имеет вид

$$0 \leq \delta \leq 1.$$

Часто скорость сходимости растет, если параметр  $\delta$  превышает единицу. Тогда метод называется методом верхней релаксации.

Заметим, что сходимость можно еще улучшить, изменяя значение  $\delta$  на каждом шаге [105–112].

Рассмотрим в качестве примера решение уравнения Пуассона в параллелепипеде. В расчётах было определено наилучшее (для рассматриваемого класса задач) значение  $\delta = 1,3$ .

При реализации по стандартной схеме было выявлено нарушение симметрии решения. Это происходит при вычислении, например, с увеличением номеров ячейки  $i, j, k$ , т. е., когда влияние граничных условий распространялось с одного угла параллелепипеда до противоположного по диагонали. Алгоритм был симметризован: на каждом шаге выполнялось 1–3 цикла по 4 итерации:

- 1)  $i = 1, N_i - 1, \quad j = 1, N_j - 1, \quad k = 1, N_k - 1;$
- 2)  $i = N_i - 1, 1, \quad j = N_j - 1, 1, \quad k = 1, N_k - 1;$
- 3)  $j = N_j - 1, 1, \quad i = 1, N_i - 1, \quad k = 1, N_k - 1;$
- 4)  $j = 1, N_j - 1, \quad i = N_i - 1, 1, \quad k = 1, N_k - 1.$

### II.3.2.3. Итерационный метод квазилинеаризации для решения нелинейного уравнения Пуассона

Когда для концентрации электронов можно принять распределение Больцмана

$$n_e = n_{e0} \exp(-e\varphi/(kT_e)),$$



уравнение Пуассона для потенциала принимает вид

$$\Delta\varphi = e\left(n_{e0} \exp\left(-e\varphi/(kT_e)\right) - n_e\right)/\epsilon_0. \quad (\text{II.3.3})$$

Принимая во внимание, что заряд электрона отрицателен, на удаленных границах потенциал равен нулю, а концентрация частиц равна концентрации на бесконечности, уравнение (II.3.3) для безразмерных величин имеет вид

$$\Delta\varphi = \exp\varphi - n_i.$$

Решение этого нелинейного уравнения достигается итерациями линеаризованного уравнения [113]

$$\Delta\varphi^{s+1} = \exp\left(\varphi^s\right)\left(1 + \varphi^{s+1} - \varphi^s\right) - n_i.$$

Для решения этой системы алгебраических уравнений применим также итерационный метод верхней релаксации. Полагая  $d_{i,j}^s = \delta\Delta h^2 \exp\left(\varphi_{i,j}^s\right)$  для каждого значения  $s = 1, S$  выполняем  $R$  итераций по индексу  $r$  для уравнения

$$\varphi_{i,j}^{s+1,r+1} = \frac{1}{1 + d_{i,j}^s} \left( (1 - 4\delta + d_{i,j}^s) \varphi_{i,j}^{s+1,r+1} + \right. \\ \left. + \delta \left( \varphi_{i-1,j}^{s+1,r+1} + \varphi_{i,j-1}^{s+1,r+1} + \varphi_{i+1,j}^{s+1,r} + \varphi_{i,j+1}^{s+1,r} \right) + \delta\Delta h^2 n_i - d_{i,j}^s \right).$$

Возникает вопрос об оптимальном выборе числа итераций  $r$  и  $s$ . Заметим, что решать точно уравнение для каждого  $s$  не имеет смысла. Более того, расчеты показали, что предпочтительнее делать больше итераций по  $s$ , увеличение  $R$  может даже приводить к неустойчивости счета ввиду сильного различия правых частей на соседних по  $s$  итерациях. Численные эксперименты позволяют рекомендовать  $r = 1 - 3$  и  $s = 5 - 10$  для каждого шага по времени. В качестве начального приближения берется решение предыдущего шага.

### II.3.3. Алгоритм численного решения задачи Эйлера–Пуассона в случае столкновительной пристеночной плазмы

Как нестационарные, так и стационарные задачи динамики плазмы решались методом установления: в начальный момент времени задается начальное распределение полей искомым величин, затем импульсно из-

меняется потенциал тела и проводится численное моделирование процесса. В результате развития переходного процесса достигается стационарное состояние, которое рассматривается как искомое решение задачи. Выбор начальных распределений и законов изменения характерных параметров задачи влияет на переходный процесс, но не на конечное стационарное состояние. Если изучается переходный процесс, то начальные распределения должны быть заданы корректно. В этом случае для их нахождения задача решается дважды. Вначале при достаточно произвольных начальных условиях получают стационарное решение задачи, а затем это решение выбирается за начальное условие при исследовании переходного процесса.

Удобно использовать импульсный закон изменения потенциала тела, поскольку при этом заведомо выполняется неравенство: характерное время изменения потенциала мало по сравнению с характерным временем релаксации в плазме. В представленных в разделе II.3.5 результатах численных экспериментов использовался, как правило, именно такой закон изменения потенциала тел.

Рассмотрим более подробно алгоритм решения задачи электродинамики пристеночной плазмы на простейшем примере цилиндрического тела радиусом  $r_p$ , находящегося в слабоионизированной покоящейся плазме с постоянными свойствами и замороженными химическими реакциями. Математическая модель задачи сформулирована в разделе I.2.1. Уравнения приводятся к безразмерному виду. В данном случае в качестве масштаба длины удобно взять радиус Дебая  $r_D = \sqrt{\epsilon_0 k T_i / (n_{i\infty} e^2)}$ , в качестве масштаба потенциала — величину  $M_\phi = k T_{i\infty} / e$ , масштаба времени —  $M_t = M_L^2 / D_i$ , масштаба концентрации —  $M_n = n_{i\infty}$ . Масштабы остальных величин выражались по формулам размерностей. Например, масштаб плотности тока, в соответствии с формулой  $j_i = en_i u_i$ , равен  $M_j = e M_n M_L / M_t = en_{i\infty} D_i / r_D$ . (В задачах обтекания заряженных тел турбулентной плазмой оказалось целесообразно применять иную систему масштабов, см. раздел II.2.5.)

После приведения к безразмерному виду система уравнений приняла следующий вид:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_i = 0, \quad \mathbf{J}_i = -\nabla n_i + n_i \mathbf{E}, \quad (\text{II.3.4})$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_e = 0, \quad \mathbf{J}_e = -D(\nabla n_e + \varepsilon n_e \mathbf{E}), \quad (\text{II.3.5})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = n_i - n_e, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (\text{II.3.6})$$

где

$$D = \frac{D_e}{D_i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_i T_e}{m_e T_i}} = D_0 \varepsilon^{-1/2}, \quad \varepsilon = T_i / T_e, \quad D_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}. \quad (\text{II.3.7})$$

В (II.3.7) коэффициенты диффузии рассчитывались с помощью модели твердых сфер.

Система граничных и начальных условий для случая цилиндрической геометрии тела радиусом  $r_0 = r_p / r_D$  в безразмерном виде следующая:

$$\begin{aligned} n_i(r_0, t) &= n_e(r_0, t) = 0, \\ \varphi(r_0, t) &= \varphi_0(t), \\ n_i(r_\infty, t) &= n_e(r_\infty, t) = 1, \\ \varphi(r_\infty, t) &= 0, \\ n_i(r, 0) &= n_i(r), \\ n_e(r, 0) &= n_e(r), \\ \varphi(r, 0) &= \varphi(r). \end{aligned} \quad (\text{II.3.8})$$

Здесь  $r_\infty$  — радиус внешней границы расчетной области,  $n_i(r)$ ,  $n_e(r)$ ,  $\varphi(r)$  — начальные распределения концентраций и потенциала.

Систему уравнений (II.3.4)–(II.3.8) будем решать численно методом последовательных итераций по времени, используя метод крупных частиц первого порядка точности [50]. Узлы фиксированной эйлеровой сетки определяются по формуле

$$r_j = r_0 + h_r(j-1), \quad j = 1, \dots, N_r.$$

Рассмотрим последовательно все этапы расчетного цикла по методу крупных частиц для одного шага по времени  $t^s$  [50].

1. *Эйлеров этап.* На этом этапе предполагаем, что в исходной системе уравнений не учитываются конвективные члены:  $\mathbf{J}_i = 0$ ,  $\mathbf{J}_e = 0$ . Система сводится к уравнению Пуассона для потенциала

$$\Delta\phi = n_e - n_i.$$

2. *Лагранжев этап.* На данном этапе вычисляются эффекты переноса массы и заряда, учитывающие обмен между ячейками при их перестройке на прежнюю эйлерову сетку. Под действием вычисленных градиентов электрического поля и градиентов концентраций крупные частицы перемещаются в течение шага по времени  $\Delta t$ . Из условия, что диффузионные потоки определяются соотношением

$$\mathbf{J}_{i,e} = n_{i,e} \mathbf{u}_{i,e}$$

следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= -\frac{1}{n_i} \nabla n_i + \mathbf{E}, \\ \mathbf{u}_e &= -D_0 \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon} n_e} \nabla n_e + \sqrt{\epsilon} \mathbf{E} \right). \end{aligned}$$

Перемещение крупной частицы за время  $\Delta t$  определяется как произведение ее скорости на данный интервал времени. Если отрицательно заряженная частица соприкасается со стенкой, она поглощается, внося вклад в электронный ток. Если положительно заряженная частица соприкасается со стенкой, она нейтрализуется, внося вклад в ионный ток. После завершения эволюционного процесса результирующий ток на тело устанавливается. Это означает, что в точности такой же величины поток должен пересечь внешнюю границу расчетной области.

3. *Заключительный этап.* Здесь происходит окончательный пересчет концентраций заряженных частиц в ячейках эйлеровой сетки для следующего момента времени:  $\Delta t^{s+1} = t^s + \Delta t$ .

Уравнения (II.3.4), (II.3.5) можно переписать в форме интегральных законов сохранения:

$$\int_{V(t)} \frac{\partial n_{i,e}}{\partial t} dV = - \int_{S(t)} \mathbf{J}_{i,e} dS,$$

где  $S(t)$  — поверхность, ограничивающая объем  $V(t)$ .

Для ячейки приведенное интегральное выражение сводится к следующему:

$$Q_{i,e}^{s+1} = Q_{i,e}^s + \sum \Delta Q_{i,e},$$

где  $Q_{i,e}$  — заряд ионов или электронов в ячейке, а  $\Delta Q_{i,e}$  — заряд ионов или электронов, пересекающих границу ячейки за время  $\Delta t$ . Реально заряд в ячейке сетки определяется суммированием вкладов в данную ячейку (с соответствующими весовыми коэффициентами) от тех крупных частиц, что наложились на ячейку в процессе движения. Если закон распределения заряда по ячейке выбран равномерным, то

$$Q_{i,e}^{s+1} = \sum_k \left( \frac{\Delta S_{i,e}}{S_{i,e}} Q_{i,e} \right)_k,$$

где  $\frac{\Delta S_{i,e}}{S_{i,e}}$  — доля площади  $k$ -й крупной частицы, наложившейся на рассматриваемую ячейку сетки.

Приведенная разностная схема вычислений является консервативной, поскольку в ней заложены законы сохранения массы и заряда как для каждой ячейки, так и для всей расчетной области в целом. Поскольку исходная система уравнений соответствует случаю отсутствия химических реакций, внутри расчетной области отсутствуют источники и стоки зарядов и массы. Они имеют место лишь на границах расчетной области.

### III.3.4. Методические исследования и тестовые задачи

Методические исследования и решение тестовых задач необходимы для оптимизации вычислительного процесса и обоснования достоверности полученных результатов.

С точки зрения оптимизации вычислительного алгоритма размер расчетной области и число крупных частиц надо уменьшать, а шаг по времени — увеличивать. Однако это ограничено условиями устойчивости, сходимости решения и другими особенностями задачи. Поэтому оптимальный размер расчетной области, число крупных частиц и шаг по времени находятся из компромиссных соображений. Для выполнения граничных условий на внешней границе расчетной области

$n_{i,e}(r_{\infty}, t) = 1; \varphi(r_{\infty}, t) = 0$  необходимо, чтобы размер  $r_{\infty}$  был больше величины возмущенной зоны вблизи зонда. Рекомендации по выбору  $r_{\infty}$ , вытекающие из методических расчетов, приведены на рис. II.3.1. Оптимальное число узлов расчетной сетки по координатам  $X, Y$  для плоского зонда ленточного типа на основании методических расчетов составило  $N_x \times N_y = 200 \times 50$ . Как показано в гл. II.3, шаг по времени  $\Delta t$  может быть увеличен в 3–4 раза по сравнению со значениями, вытекающими из условия КФЛ (формула (II.3.2)), без потери устойчивости и сходимости решения.

Компьютерная программа позволяет контролировать результаты расчета и непосредственно сам процесс расчета с помощью специальной графической оболочки [114, 115]. Данная оболочка в процессе расчета переводит монитор в графический режим, что позволяет в любой момент времени визуализировать эволюцию возмущенной зоны по следующим зависимостям:

- эволюция потенциала, концентраций компонентов плазмы, компонентов их скорости;
- эволюция плотности тока компонентов плазмы;
- изолинии потенциала, изоконцентрали для ионов и электронов, а также нейтральной компоненты плазмы;
- поля скоростей ионов, электронов и нейтральных атомов;
- эволюция интегрального тока на зонд.

Оператор имеет возможность любую из перечисленных зависимостей вывести на экран монитора непосредственно во время счета. При этом соответствующая кривая заново перестраивается в конце каждого шага по времени, чем достигается эффект фильма.

Графическая часть программы позволяет добавлять в нее новые графические зависимости или вносить изменения в имеющиеся. Графический экран может быть скопирован и распечатан на принтере.

Использование данной графической оболочки позволяет:

- визуально контролировать эволюцию параметров возмущенной зоны и своевременно выявлять и устранять ошибки,
- контролировать окончание счета по установлению интегрального тока на зонд,

– существенно ускорить и повысить эффективность отладки программы и анализа результатов.

В процессе отладки программы были проведены сравнения с результатами расчетов других авторов. Если проэкстраполировать результаты расчетов на случай  $u_0 = 0$ , то получаются результаты для покоящейся плазмы, известные по работе [11]. Сравнение показало практически полное совпадение результатов.

В целях дополнительной проверки правильности выбранной вычислительной схемы для решения этой же задачи был использован также конечно-разностный алгоритм, основанный на методе сеток [116]. Уравнения (II.3.4)–(II.3.6) преобразовывались к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} &= \frac{\partial^2 n_i}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial n_i}{\partial r} - n_i (n_i - n_e) + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial n_i}{\partial r}, \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} &= D_0 \left[ \frac{\partial^2 n_e}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial n_e}{\partial r} + \varepsilon n_e (n_i - n_e) - \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial n_e}{\partial r} \right], \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= n_e - n_i, \\ E &= \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.3.9})$$

Была выбрана простейшая явная трехточечная схема, мнемоническое изображение которой имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для принятой схемы выражения для производных имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} \Big|_j^k &= \frac{n_{j+1}^k - 2n_j^k + n_{j-1}^k}{h^2}, \\ \frac{\partial n}{\partial r} \Big|_j^k &= \frac{n_{j+1}^k - n_{j-1}^k}{2h}, \\ \frac{\partial n}{\partial r} \Big|_j^k &= \frac{n_j^{k+1} - n_j^k}{\Delta t}, \end{aligned} \right\}$$

где верхний индекс обозначает шаг по времени, нижний — шаг по пространству. Уравнения (II.3.9) решались методом прогонки [106].

Шаг по времени  $\Delta t$  подбирался экспериментально и в большинстве расчетов составлял  $10^{-3}$ . До выхода на установление требовалось примерно  $2 \cdot 10^4$  шагов по времени.

Полученные распределения полей концентрации, напряженности, потоков заряженных частиц полностью совпали с аналогичными результатами, полученными методом установления с использованием алгоритма метода крупных частиц.

Результаты численных экспериментов с плоскими пристеночными зондами сравнивались также с расчетами Руссо [117] и экспериментальными данными Бойера и Турыяна [118], Бурке [119], Лидермана и Эвидора [120], Шерфмана и Бредфельда [11], В. А. Горелова [11], Чана, Телбота, Турыяна [80]. Все перечисленные сравнения дали удовлетворительные результаты.

### **II.3.5. Некоторые результаты математического моделирования применительно к авиационно-космической технике**

В качестве иллюстрации численного моделирования задач пристеночной плотной плазмы приведем следующие три примера:

- 1) цилиндрическое тело в поперечном потоке ламинарной столкновительной плазмы без магнитного поля;
- 2) цилиндрическое тело в ламинарном потоке плазмы в магнитном поле;
- 3) цилиндрическое тело в поперечном потоке турбулентной плазмы.

В авиационно-космической технике цилиндрическое тело может быть элементом конструкции ГЛА, может быть антенной, может быть частью диагностического прибора.

**Пример 1.** Цилиндрическое тело в поперечном потоке ламинарной столкновительной плазмы без магнитного поля.

Рассматривается заряженное цилиндрическое тело радиусом  $r_p$  и с потенциалом  $\Phi_p$ , помещенное в поперечный поток слабоионизованной столкновительной плазмы (рис. II.2.4). Направленная скорость пото-



ка равна  $u_\infty$ . Математическая модель задачи соответствует гл. II.2, а численная модель — гл. II.3. Система (II.2.32) приводилась к безразмерному виду с помощью следующей системы масштабов:

$$\begin{aligned}
 \text{масштаб концентрации заряженных частиц:} & \quad M_{n_{i,e}} = n_\infty; \\
 \text{масштаб скорости:} & \quad M_u = u_\infty; \\
 \text{масштаб потенциала:} & \quad M_\varphi = kT_i/e; \\
 \text{масштаб длины:} & \quad M_L = r_p; \\
 \text{масштаб плотности нейтрального газа:} & \quad M_\rho = \rho_\infty; \\
 \text{масштаб давления:} & \quad M_p = M_\rho M_u^2; \\
 \text{масштаб времени:} & \quad M_t = M_L/M_u.
 \end{aligned} \tag{II.3.10}$$

Остальные масштабы находятся по формулам размерностей.

В случае применения решения системы (II.2.32) для исследования процессов подвижности, профиля потенциала электрического поля, концентраций заряженных частиц и переноса электрического заряда на тело предпочтительнее другая система масштабов:

$$\begin{aligned}
 \text{масштаб концентрации} & \quad M_{n_{i,e}} = n_\infty; \\
 \text{заряженных частиц} & \\
 \text{масштаб длины} & \quad M_L = r_D = \left( \varepsilon_0 kT_i / (n_{i\infty} e^2) \right)^{1/2}; \\
 \text{масштаб потенциала} & \quad M_\varphi = kT_{i\infty} / e; \\
 \text{масштаб времени} & \quad M_t = M_L^2 / D_i; \\
 \text{масштаб скорости} & \quad M_u = M_L / M_t; \\
 \text{масштаб плотности тока} & \quad M_j = e M_n M_u = e n_{i\infty} D_i / r_D. \\
 \text{заряженных частиц} &
 \end{aligned} \tag{II.3.11}$$

Безразмерная система уравнений с использованием масштабов (II.3.11) имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_i(\mathbf{u}_0 + \mathbf{a}_i)) &= 0, \\
\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_e(\mathbf{u}_0 + \mathbf{a}_e)) &= 0, \\
\Delta\varphi &= \delta(n_e - n_i), \\
\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{u}_0) &= 0, \\
\frac{\partial(\rho_0 \mathbf{u}_0)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0) &= -\nabla P_0, \\
\frac{\partial(\rho_0 E_0)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{u}_0 E_0) &= -\operatorname{div}(\mathbf{u}_0 P_0), \\
\mathbf{a}_i &= -\frac{1}{\operatorname{Re}_i} \left( \frac{\nabla n_i}{n_i} + \nabla\varphi \right), \quad \mathbf{a}_e = -\frac{1}{\operatorname{Re}_e} \left( \frac{\nabla n_e}{n_e} - \varepsilon \nabla\varphi \right), \\
P_0 &= (E_0 - u_0^2/2) \rho_0 (\gamma - 1), \quad E_0 = \frac{u_0^2}{\gamma(\gamma - 1)M_0^2} + u_0^2/2.
\end{aligned} \tag{II.3.12}$$

Система начальных и граничных условий остается без изменения.

Задача многопараметрическая, имеет много безразмерных характерных параметров:

- $r_0 = r_p/r_D$  — безразмерный радиус цилиндра ( $r_D$  — радиус Дебая),
- $\varphi_0 = \varphi_p/(kT_i/e)$  — безразмерный потенциал цилиндра,
- $\varepsilon = T_i/T_e$  — отношение температур ионов и электронов,
- $D = D_e/D_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(m_i/m_e)^{1/2}(T_e/T_i)^{1/2}$  — отношение коэффициентов диффузии электронов и ионов,
- $u_0 = u_\infty/(D_i/r_D)$  — безразмерная направленная скорость.

Ниже приводятся результаты численных экспериментов на основании системы (II.3.12) [122].

### Профиль скорости нейтральной компоненты

На рис. II.3.5, II.3.6 приведено поле скоростей нейтральной компоненты, полученное по математической модели, приведенной в работе [1], где рассматривалось безвихревое обтекание цилиндра и поле скоростей, полученное на основании численного решения уравнений Эйлера (система (II.3.12)). На рисунках II.3.5 и II.3.6 стрелки векторов скоростей

опущены. При безвихревом обтекании вихри в теневой области отсутствуют, что приводит к некорректному учету конвективной составляющей в процессах переноса. Согласно модели, предложенной в главе II.2, получена корректная картина обтекания цилиндра, в частности, в области следа отчетливо прослеживается вихревое движение нейтральных частиц. Характер вихревого движения зависит от чисел Маха  $M$ , Рейнольдса  $Re$ , и других параметров задачи. В условиях слабой степени ионизации нейтральный компонент увлекает за собой заряженные компоненты, что может вызвать рост тока в теневой области. Данный эффект в более ранних работах не изучался.

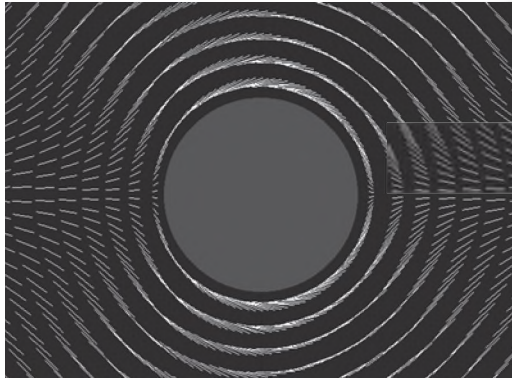


Рис. II.3.5. Поле скоростей нейтрального газа (безвихревое обтекание цилиндра)

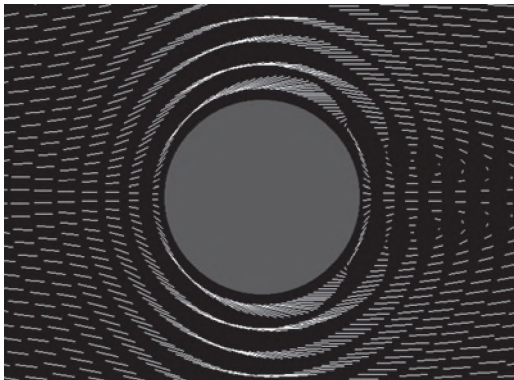


Рис. II.3.6. Поле скоростей нейтрального газа (решение системы (II.3.12))

### Поле скоростей электронов и ионов по обводу цилиндра

На рис. II.3.7–II.3.10 представлены поля скоростей ионов по обводу цилиндра в отсутствие магнитного поля, если его радиус  $r_p = 3r_D$ , заряд  $\varphi_0 = -45$ , число Маха  $M = 0,5$ , а электрическое число Рейнольдса изменяется в интервале  $10 \leq Re_s \leq 500$ . Учитывая симметрию относительно плоскости, проходящей через вектор направленной скорости потока и ось цилиндра, показаны только нижние половины профилей скорости.

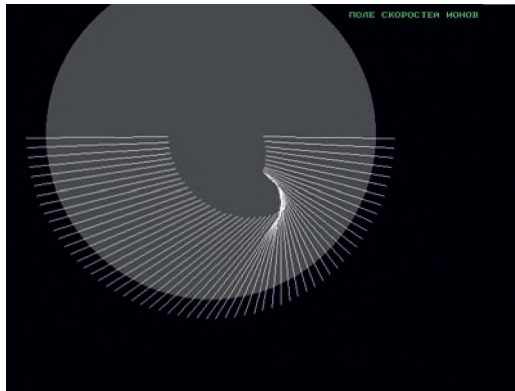


Рис. II.3.7. Скорость ионов по обводу цилиндра  
( $r_p = 3r_D$ ,  $\varphi_0 = -45$ ,  $M = 0,5$ ,  $Re_s = 10$ )

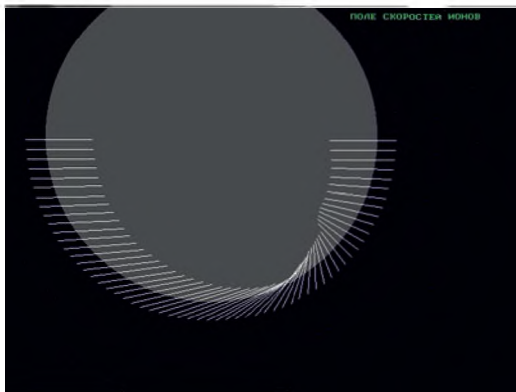


Рис. II.3.8. Скорость ионов по обводу цилиндра  
( $r_p = 3r_D$ ,  $\varphi_0 = -45$ ,  $M = 0,5$ ,  $Re_s = 25$ )

Графики наглядно демонстрируют сгущение линий тока на боковую поверхность цилиндра в точке, соответствующей значению угловой координаты  $\theta$  порядка  $100^\circ$ , и увлечение ионов вихревым движением нейтральных частиц в теневой области. Соответствующие профили для скоростей электронов даны на рис. П.3.11–П.3.14, которые в данных условиях являются отгалкивающимися от цилиндра частицами.

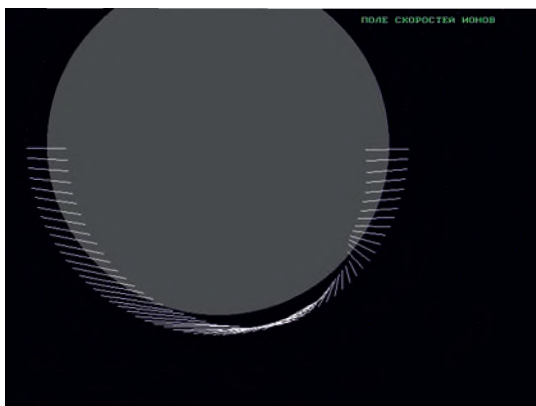


Рис. П.3.9. Скорость ионов по обводу цилиндра  
( $r_p = 3r_D$ ,  $\varphi_0 = -45$ ,  $M = 0,5$ ,  $Re_3 = 50$ )



Рис. П.3.10. Скорость ионов по обводу цилиндра  
( $r_p = 3r_D$ ,  $\varphi_0 = -45$ ,  $M = 0,5$ ,  $Re_3 = 200$ )

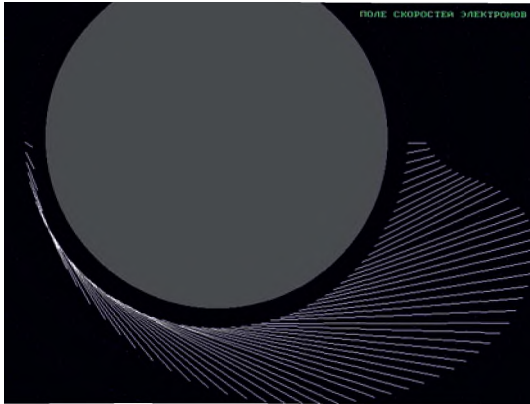


Рис. II.3.11. Скорость электронов по обводу цилиндра  
 $(r_p = 3r_D, \varphi_0 = -45, M = 0,5, Re_s = 10)$

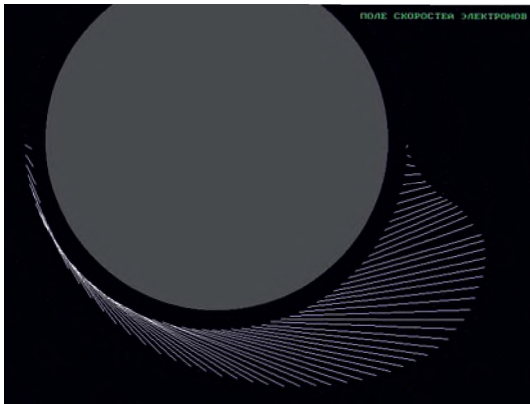


Рис. II.3.12. Скорость электронов по обводу цилиндра  
 $(r_p = 3r_D, \varphi_0 = -45, M = 0,5, Re_s = 25)$

### Поле концентраций заряженных частиц

Примеры изолиний концентраций ионов и электронов вблизи заряженного цилиндра даны на рис. II.3.15–II.3.16 для следующего набора характерных параметров задачи:  $M = 0,6, Re_s = 25, \varphi_0 = -45, r_p = 10r_D$ . Значение индукции магнитного поля равнялось нулю.

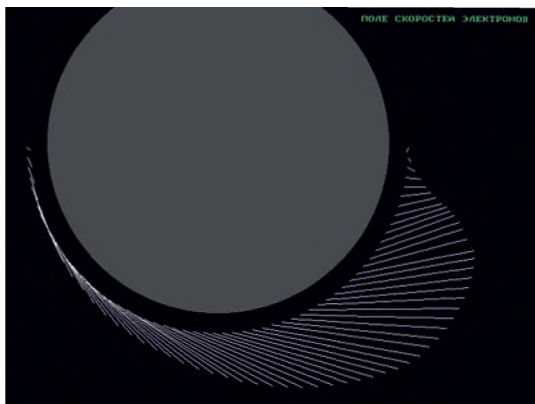


Рис. П.3.13. Скорость электронов по обводу цилиндра  
 $(r_p = 3r_D, \varphi_0 = -45, M = 0,5, Re_s = 50)$

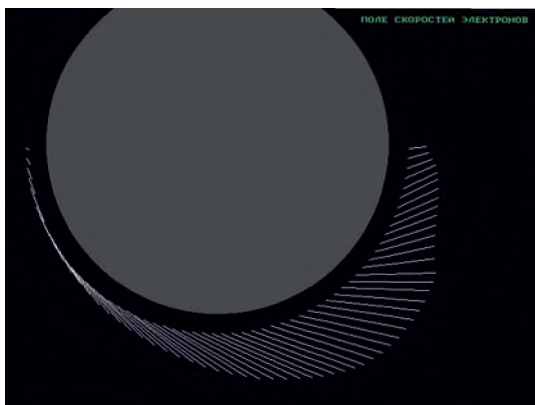


Рис. П.3.14. Скорость электронов по обводу цилиндра  
 $(r_p = 3r_D, \varphi_0 = -45, M = 0,5, Re_s = 200)$

Рисунки имеют плоскость симметрии, проходящую через вектор направленной скорости и ось цилиндра. Имеет место накопление частиц в лобовой части и их разрежение в теневой части, где образуется характерный след. Из рис. П.3.16 следует, что наименьшая концентрация  $n_t = 0,15n_\infty$  наблюдается в теневой области тела. В боковой области при значениях угла  $\theta$  (рис. П.2.4) порядка  $100^\circ$  и  $260^\circ$  наблюдается всплеск кон-

центрации ионов. Этот эффект наблюдается впервые. Причина его появления будет объяснена ниже. Для отталкиваемых от тела частиц — электронов — такого эффекта не наблюдается. Концентрация вдоль радиуса нарастает монотонно. Кроме того, значение концентрации электронов вблизи тела ниже, чем значение концентрации ионов, что связано с отрицательным потенциалом тела и возникновением около него положительного объемного заряда.

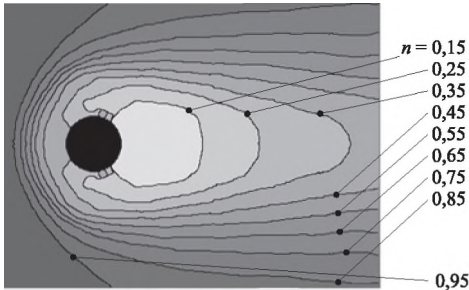


Рис. II.3.15. Изолинии концентрации ионов  
( $r_0 = 10, Re_s = 25,$   
 $M = 0,6, \varphi_0 = -45$ )

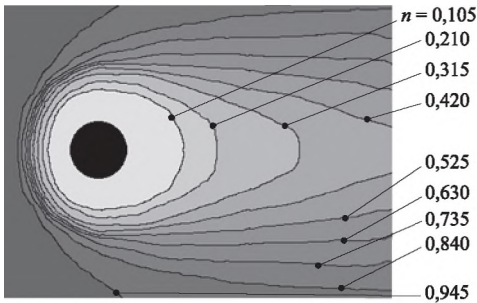


Рис. II.3.16. Изолинии концентрации электронов  
( $r_0 = 10, Re_s = 25,$   
 $M = 0,6, \varphi_0 = -45$ )

### Изолинии потенциала и распределение напряженности электрического поля

В случае покоящейся плазмы изолинии потенциала представляют собой концентрические окружности. При достаточно больших отрицательных (или положительных) потенциалах поверхности цилиндра кривая зависимости  $\varphi(r)$  имеет монотонный характер, плавно выходя на нулевое граничное значение на расстоянии нескольких десятков (иногда



и сотен) радиусов Дебая от поверхности. При потенциалах поверхности, близких к потенциалу плавающего тела, зависимость  $\varphi(r)$  может проходить через максимум. Линии напряженности электрического поля направлены вдоль радиуса. Величина граничной напряженности при  $r = r_p$ , в зависимости от  $\varphi_p$  и  $r_p$ , исследована в [11]. Включение направленной скорости потока нарушает центральную симметрию (рис. II.3.17) изолиний потенциала. При отсутствии магнитного поля сохраняется только плоскость симметрии, проходящая через вектор направленной скорости и ось цилиндра. Нарушение центральной симметрии приводит к появлению азимутальной составляющей электрического поля. Распределение  $E_\theta$  по обводу цилиндра приведено на рис. II.3.18 для значений  $r_0 = 10$ ,  $Re = 25$ ,  $M = 0,6$ ,  $\varphi_0 = -45$ . На рис. II.3.19 даны распределения потенциала вдоль радиуса в лобовой, боковой и теневой областях при тех же параметрах задачи.

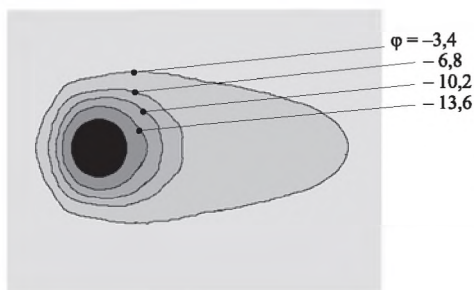


Рис. II.3.17. Изолинии потенциала  
( $r_0 = 10, Re_s = 25$ ,  
 $M = 0,6, \varphi_0 = -45$ )

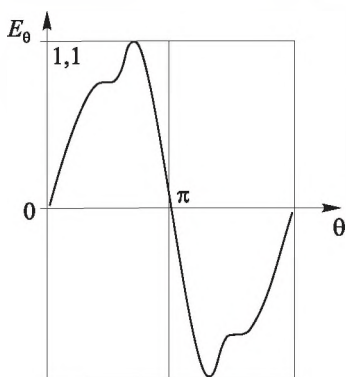


Рис. II.3.18. Распределение азимутальной составляющей напряженности электрического поля по обводу цилиндра  
( $r_0 = 10, Re_s = 25$ ,  
 $M = 0,6, \varphi_0 = -45$ )

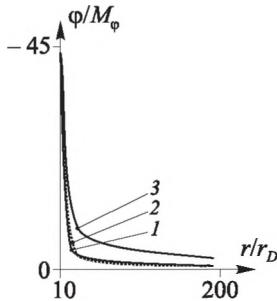


Рис. II.3.19. Распределение потенциала электрического поля вдоль радиуса

( $r_0 = 10, Re_0 = 25,$

$M = 0,6, \phi_0 = -45$ )

1 — лобовая часть ( $\theta = 0^\circ$ )

2 — боковая часть ( $\theta = 90^\circ$ )

3 — теневая часть ( $\theta = 180^\circ$ )

### Распределение плотности тока по обводу цилиндра

Плотность тока по обводу цилиндра пропорциональна произведению концентрации заряженных частиц вблизи поверхности на радиальную составляющую их направленной скорости. При больших отрицательных потенциалах тела на него поступает ионный ток. Если направленная скорость относительно невелика (например, число Маха  $M = 0,05$ ), распределение тока по обводу тела имеет монотонный характер. Максимальная плотность наблюдается со стороны лобовой части тела, поскольку на эту часть набегающий поток. Минимальная плотность наблюдается в теневой части, поскольку происходит экранировка набегающего потока телом (рис. II.3.20). С увеличением числа Маха развивается вихревое течение, вследствие чего в теневой части может появиться всплеск ионного тока. Кроме того, в боковой области могут возникнуть локальные максимумы и минимумы (рис. II.3.21). Физическую причину появления бокового максимума можно объяснить распределением концентрации ионов и их скорости по обводу цилиндра (рис. II.3.8, II.3.15). Из графиков видно, что в областях боковых максимумов имеют место сгущение линий тока ионов и рост концентрации ионов. Физическая причина их возникновения состоит в следующем.

1. Ионы движутся вместе с потоком вдоль боковой поверхности цилиндра и одновременно испытывают электростатические притяжения со стороны тела. В результате их траектории отклоняются в сторону поверхности цилиндра.

2. В теневой области ионы вместе с вихрями приближаются к поверхности цилиндра и за счет притяжения также отклоняются в сторону поверхности.

Эти два потока ионов, накладываясь друг на друга, дают всплеск концентрации и плотности тока, образуя локальные максимумы и минимумы.

Радиальная скорость ионов на боковую поверхность цилиндра может иметь локальный максимум в теневой области, связанный с вихрями. Плотность ионного тока, пропорциональная произведению концентрации на радиальную скорость, в основном повторяет профиль концентрации ионов.

Появление локального максимума плотности тока на боковой поверхности цилиндра возможно лишь в ограниченном интервале изменения характерных параметров задачи. На рис. П.3.22 приведена зависимость плотности ионного тока по обводу цилиндра при различных значениях его радиуса, из которого следует, что при  $M = 0,6$ ,  $Re_s = 25$ ,  $\varphi_0 = -45$  и  $r_0 > 30$  этот эффект пропадает.

При проведении вычислительных экспериментов исследовалась также зависимость распределения плотности ионного тока по обводу от параметра  $\varepsilon = T_i/T_e$ , результаты которого представлены на рис. П.3.33. Из рисунка следует, что в интервале  $0,2 < \varepsilon < 1$  влияние  $\varepsilon$  незначительно.

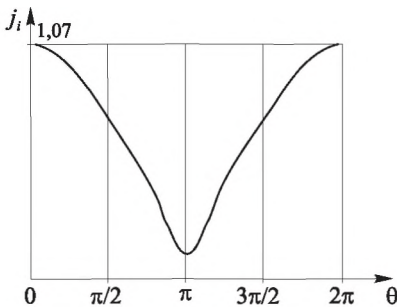


Рис. П.3.20. Безразмерная плотность тока ионов по обводу цилиндра  
( $r_0 = 10, Re_s = 25$ ,  
 $M = 0,05, \varphi_0 = -45$ )

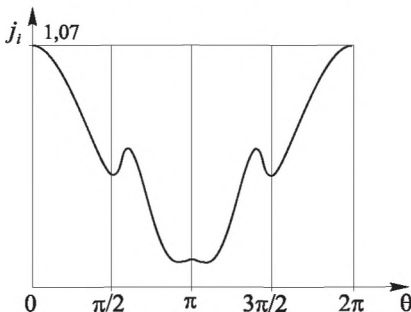


Рис. П.3.21. Безразмерная плотность тока по обводу цилиндра  
( $r_0 = 10, Re_s = 25$ ,  
 $M = 0,6, \varphi_0 = -45$ )

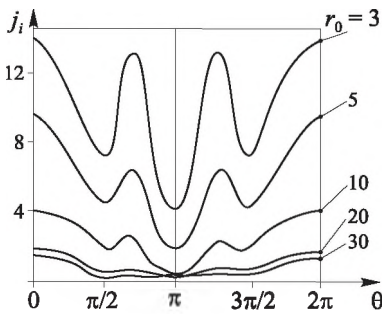


Рис. П.3.22. Распределение плотности ионного тока по обводу цилиндра  
( $M = 0,6, \varphi_0 = -45,$   
 $Re_s = 25, \varepsilon = 3$ )

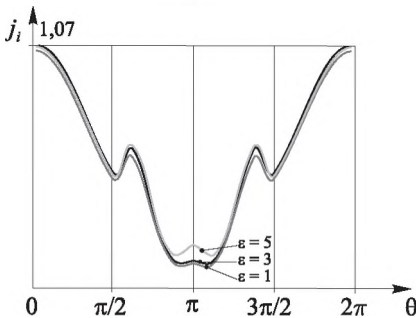


Рис. П.3.23. Распределение плотности ионного тока по обводу цилиндра при различных значениях параметра  $\varepsilon$   
( $r_0 = 10, M = 0,6,$   
 $\varphi_0 = -45, Re_s = 25$ )

**Пример 2.** Цилиндрическое тело в ламинарном потоке плазмы в магнитном поле.

Геометрия заряженного тела и его расположение в потоке плазмы соответствуют примеру 1. Дополнительно добавляется внешнее однородное магнитное поле с индукцией  $\mathbf{V}$ , направленное вдоль оси цилиндра. Математическая модель задачи соответствует гл. II.2, а численная модель — гл. II.3. Рассмотрим вначале случай отрицательного потенциала тела, при котором притягивающимися частицами являются ионы, а электроны отталкиваются. Линии тока нейтрального компонента аналогичны примеру 1, поскольку в условиях слабой степени ионизации движение нейтрального компонента не зависит от движения заряженных частиц. На рис. П.3.24 дано поле скоростей ионов, из которого следует, что симметрия по угловой координате  $\theta$  пропадает.

На рис. П.3.25–П.3.27 приведены изолинии концентраций ионов и электронов, а также электрического потенциала при тех же условиях.

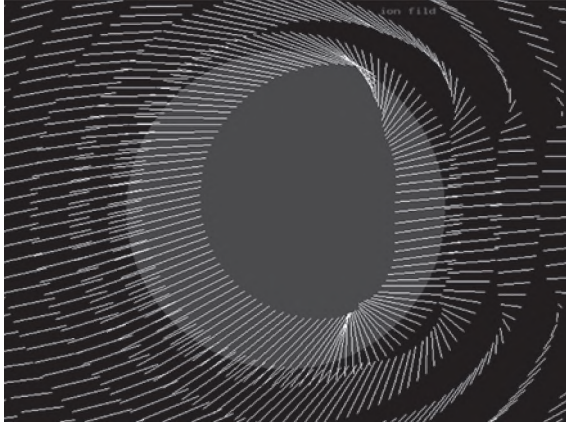


Рис. П.3.24. Поле скоростей ионов  
 $(r_0 = 10, \varphi_0 = -45, Re_s = 25, M = 0,6, \beta_l = 0,05)$

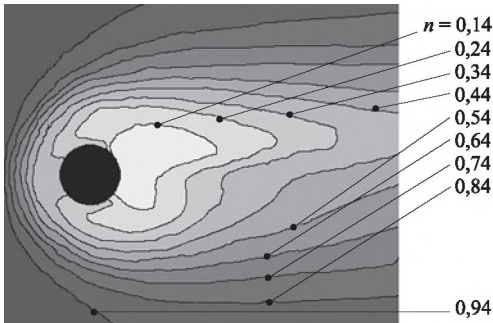


Рис. П.3.25. Изолинии  
 концентрации ионов  
 $(r_0 = 10, Re_s = 25, M = 0,6,$   
 $\varphi_0 = -45, \beta = 0,05)$

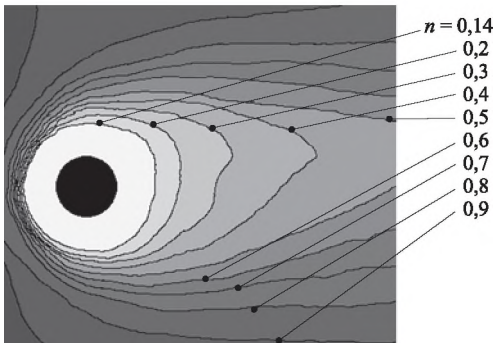


Рис. П.3.26. Изолинии  
 концентрации электронов  
 $(r_0 = 10, Re_s = 25, M = 0,6,$   
 $\varphi_0 = -45, \beta = 0,05)$

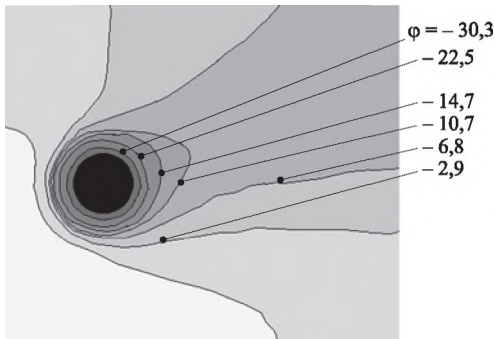


Рис. II.3.27. Изолинии потенциала  
 $(r_0 = 10, Re_s = 25, M = 0,6,$   
 $\phi_0 = -45, \beta = 0,05)$

На рис. II.3.28–II.3.30 приведены безразмерные плотности тока ионов по обводу цилиндра при двух значениях числа Маха (0,05 и 0,6) и при различных значениях параметра Холла<sup>1</sup>.

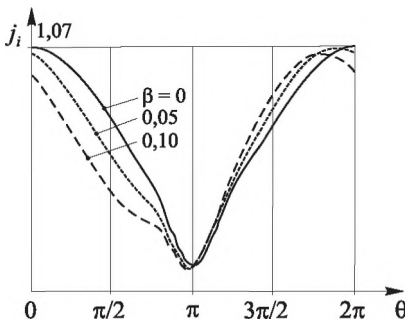


Рис. II.3.28. Безразмерная плотность тока ионов по обводу цилиндра  
 $(r_0 = 10, Re_s = 25, M = 0,05, \phi_0 = -45)$

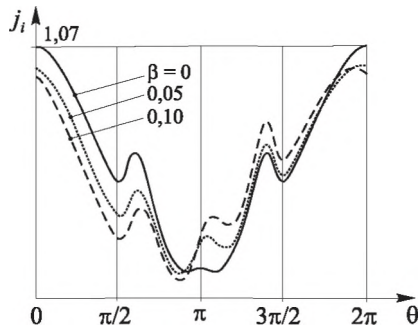


Рис. II.3.29. Безразмерная плотность тока ионов по обводу цилиндра  
 $(r_0 = 10, Re_s = 25, M = 0,6, \phi_0 = -45)$

Из рисунков следует, что в боковой области имеют место локальные максимумы и минимумы плотности тока, если число Маха достаточно велико, а безразмерный радиус  $r_0$  меньше некоторого предельного значения. Однако максимумы слева и справа смещаются друг относительно друга тем больше, чем больше параметр Холла.

<sup>1</sup> Параметр Холла  $\beta = \frac{2\omega_i}{v_{ia}}$ , где  $\omega_i = \frac{eB}{m_i}$  — ленгмюровская частота,  $v_{ia}$  — частота столкновений ионов с атомами.

Влияние осевого магнитного поля на характер обтекания заряженного цилиндра можно физически объяснить, используя графики на рис. П.3.25– П.3.29 и учитывая приведенный выше анализ аналогичных графиков без магнитного поля. Как было показано в примере 1, при наличии направленной скорости потока возникает азимутальное электрическое поле, которое также зависит (в меньшей степени) от величины индукции магнитного поля. В скрещенных полях  $\mathbf{E}_\theta$  и  $\mathbf{B}_Z$  возникает

дрейфовое движение со скоростью  $\mathbf{u}_d = \frac{[\mathbf{E}_\theta, \mathbf{B}_Z]}{B_Z^2}$ . Учитывая, что вектор

$\mathbf{E}_\theta$  слева и справа от цилиндра направлен вдоль потока, а вектор  $\mathbf{B}$  направлен вдоль оси  $Z$ , дрейфовая скорость в интервале  $0 \leq \theta \leq \pi$  направлена по радиусу от цилиндра, а в интервале  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$  — по радиусу к цилиндру. Вследствие этого нарушается симметрия в распределении концентрации заряженных частиц и плотности тока. В интервале  $0 \leq \theta \leq \pi$  он уменьшается, а в интервале  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$  — возрастает при включении индукции магнитного поля. Все локальные максимумы и минимумы, имевшие место при отсутствии поля  $\mathbf{B}$ , сохраняются, но смещаются либо вверх, либо вниз в зависимости от направления скорости дрейфа относительно поверхности цилиндра (рис. П.3.28–П.3.29). Изменяется также положение локального максимума в теневой области, связанного с вихревым движением.

Рассмотрим теперь случай, когда цилиндр заряжен положительно относительно потенциала пространства. В этом случае ток на тело определяется электронами. Основные закономерности, отмеченные выше для ионного тока, сохраняются и для электронного. В частности,

- при наличии направленной скорости возникает азимутальное электрическое поле  $\mathbf{E}_\theta$ ;
- при включении магнитного поля  $\mathbf{B}_Z$  возникает дрейфовая скорость, направленная в противоположные стороны с левой и правой стороны цилиндра;
- при  $\mathbf{B} = 0$  имеет место плоскость симметрии, проходящая через вектор скорости  $\mathbf{u}_n$  и ось цилиндра, а при  $B > 0$  плоскость симметрии отсутствует;

- в теневой области имеет место локальный максимум, связанный с вихревым движением, и др.

Однако следует учесть относительно малую массу электронов и по этой причине высокую скорость их теплового движения. Если в случае ионов направленная скорость сравнима с хаотической скоростью, то в случае электронов выполняется неравенство

$$u_{\text{напр.}} \ll u_{\text{тепл.}}$$

Учитывая это неравенство, можно было бы ожидать, что направленная скорость должна играть значительно меньшую роль в процессах переноса электронов в сравнении с ионами. Исследования показали, что это не совсем так. Ионы совместно с электронами образуют в пристеночной области подчиняющееся уравнению Пуассона самосогласованное электрическое поле, которое сильно влияет на электроны. Поэтому электроны через поле подвергаются более существенному влиянию направленной скорости, чем это можно было бы ожидать, учитывая приведенное выше неравенство.

Еще один нелинейный эффект был обнаружен в зависимости средней плотности электронного тока  $j_{e \text{ ср.}}$  на поверхность цилиндра (и интегрального тока на единицу длины цилиндра) от параметров  $\beta$  и  $Re_s$  при прочих равных условиях (рис. II.3.30).

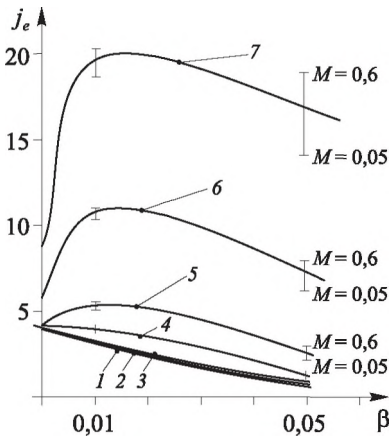


Рис. II.3.30. Зависимость средней плотности электронного тока от  $\beta$  ( $r_0 = 10, M = 0,05 - 0,6$ ,  $\varphi_0 = 5, \epsilon = 3$ )  
 1 —  $Re_s = 10$ ; 2 —  $Re_s = 25$ ; 3 —  $Re_s = 50$ ; 4 —  $Re_s = 100$ ; 5 —  $Re_s = 200$ ; 6 —  $Re_s = 500$ ; 7 —  $Re_s = 1000$



При значениях  $Re_e < 100$  средняя плотность электронного тока  $j_{e \text{ ср.}}$  с ростом магнитного поля уменьшается, что согласуется с известным в литературе [123] эффектом уменьшения поперечной диффузии заряженных частиц в магнитном поле. Однако в области  $Re_e > 100$  на участке  $\beta_i < 10^{-2} j_{e \text{ ср.}}$  растет с ростом индукции  $B$ , а при  $\beta_i > 10^{-2}$  начинает уменьшаться по тому же закону, что и при  $Re_e < 100$ .

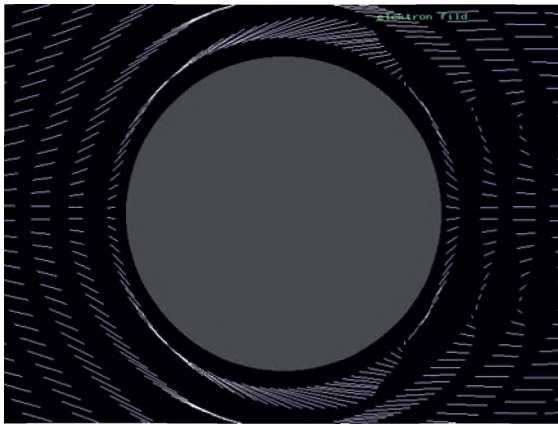
Анализ распределений плотности электронного тока  $j_e$  по обводу цилиндра позволяет объяснить этот эффект. При относительно больших числах  $Re_e$  эффекты, связанные с конвекцией, преобладают над диффузией и подвижностью. Вследствие этого плотность тока на боковую поверхность тела незначительна (заряженные частицы, участвующие в конвективном движении, пролетают мимо цилиндра). Имеет место ток только на лобовую часть цилиндра и на теневую за счет вихревого движения. При включении магнитного поля возникающие пондеромоторные силы в интервале  $0 < \theta < \pi$  приводят к существенному росту тока на боковую поверхность цилиндра, который превышает уменьшение тока на лобовую и теневую области. При дальнейшем росте индукции  $B$  ( $\beta_i > 10^{-2}$ ) растет степень замагниченности электронов, и это приводит к уменьшению  $j_e$  так же, как это имело место при  $Re_e < 100$ .

Для иллюстрации приведенной физической интерпретации эффекта достижения максимума плотности электронного тока на рис. II.3.31 даны линии тока электронов вблизи поверхности цилиндра в области  $0 < \theta < \pi$  при значении  $Re_e = 10^4$  и четырех величинах параметра Холла  $\beta = 0; 0,01; 0,025; 0,1$ . При  $\beta = 0$  линии тока электронов почти параллельны вектору скорости потока. При  $\beta = 0,01$  под действием пондеромоторных сил появляется составляющая вектора скорости электронов, направленная к поверхности цилиндра. При  $\beta = 0,025$  эта составляющая достигает максимума, а при  $\beta = 0,1$  она снова уменьшается за счет замагниченности электронов. В области  $\pi < \theta < 2\pi$  вектор скорости электронов во всех случаях направлен от тела.

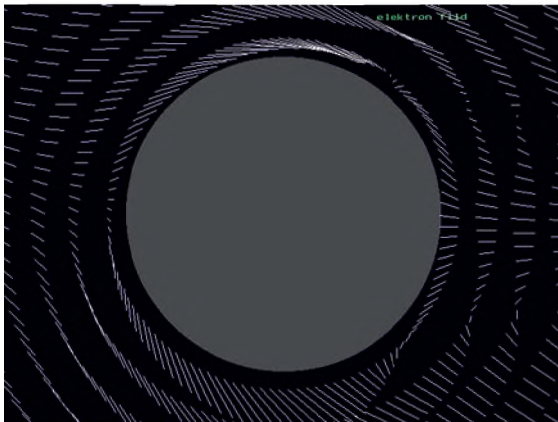
**Пример 3.** Цилиндрическое тело в поперечном потоке турбулентной плазмы.

Расположение цилиндрического тела в потоке слабоионизированной столкновительной плазмы соответствует рис. II.2.4. Магнитное поле может быть направленно вдоль оси  $Z$ . Предполагается, что электрическое число Рейнольда  $Re_e$  достаточно велико. Неустойчивость потока к ко-

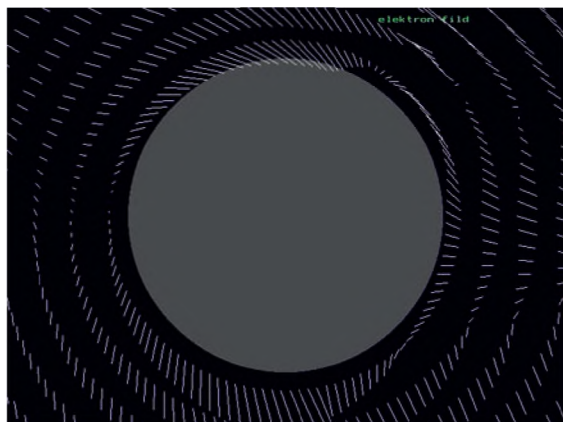
нечным возмущениям при обтекании цилиндра приводит к формированию вихревого следа — дорожки Кармана. Это крупномасштабное вихревое течение обладает свойствами турбулентного потока и вызывает уменьшение плотности тока на тело по сравнению с ламинарным случаем [3]. Дорожка Кармана не зависит от вида возмущения и сохраняется все время счета. Математическая модель задачи соответствует гл. II.2, а численная модель — гл. II.3. На рис. II.3.32–II.3.34 представлены некоторые результаты математического моделирования данной задачи без



$$\beta_i = 0$$



$$\beta_i = 0,01$$



$$\beta_i = 0,025$$



$$\beta_i = 0,1$$

Рис. П.3.31. Поле скоростей электронов ( $Re_s = 10^4$ ,  $M = 0,6$ ,  $r_0 = 10$ ,  $\varphi_0 = 5$ )

магнитного поля. На рис. П.3.32 приведены линии тока и концентрации нейтральной компоненты при турбулентном обтекании цилиндра. Четко прослеживается устойчивая дорожка Кармана. При уменьшении числа Маха обтекание становится ламинарным и симметричным относительно плоскости, содержащей ось цилиндра и вектор скорости потока. Поле концентраций нейтрального компонента  $n_0$  соответствует профилю линии тока. Двумерные профили распределения концентраций электронов

и ионов для различных наборов характерных параметров приведены на рис. П.3.33 (П.3.33, *a* — ламинарный режим, П.3.33, *б* — турбулентный режим).

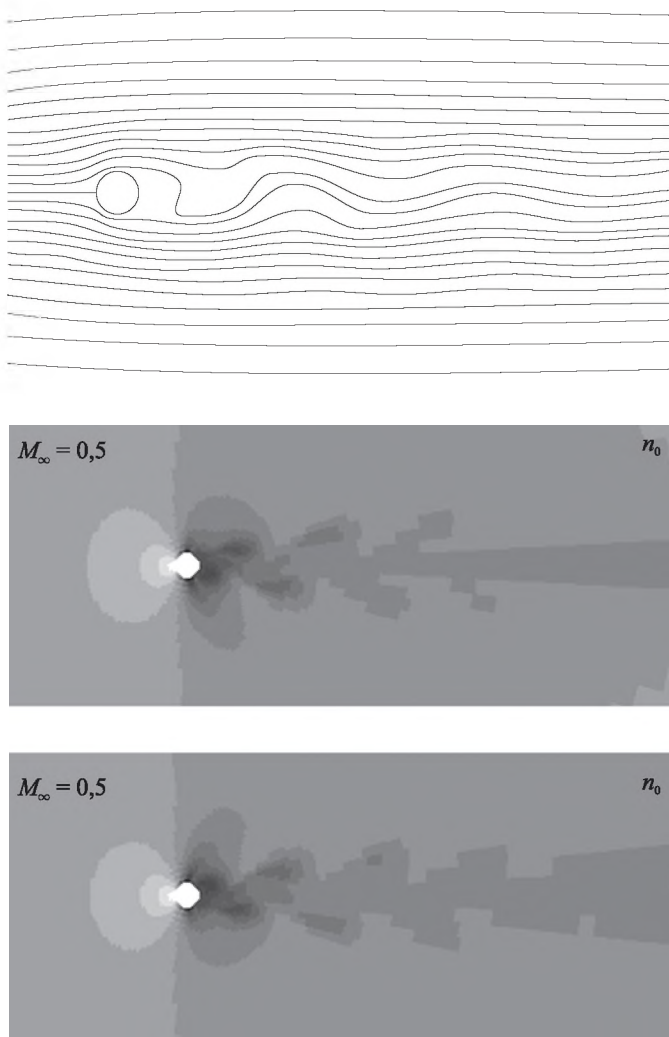


Рис. П.3.32. Линии тока и концентрации газа при турбулентном обтекании цилиндра

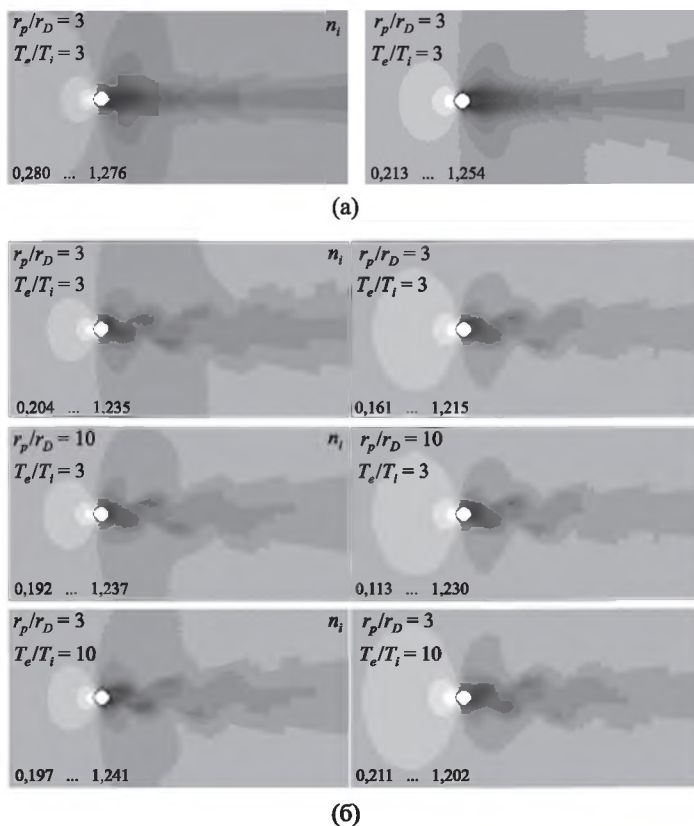


Рис. П.3.33. Концентрации заряженных частиц ( $\varphi_0 = -30$ ,  $M_0 = 0,8$ ):  
 (а) ламинарное обтекание; (б) турбулентное обтекание

Черный цвет соответствует минимуму концентрации, белый — максимуму. Границы между областями различной плотности являются изолиниями концентрации. Цифры в левом нижнем углу определяют значения  $(n_{ie})_{\min}$  и  $(n_{ie})_{\max}$ . Основные закономерности в распределении полей концентраций и потенциалов совпадают с закономерностями, отмеченными для случая ламинарного обтекания. В лобовой части имеет место накопление заряженных частиц, в теневой части — их заметное уменьшение. За телом образуется характерный след, зависящей от набора определяющих параметров задачи. В данном случае след не имеет

плоскости симметрии и в определенной степени повторяет профиль линии тока. При турбулентном обтекании для всех исследованных режимов  $(n_{ie})_{\min}$  снижается по сравнению с его значением в ламинарном режиме. Возможно снижение в 2 раза и более. Рост температуры электронов (уменьшение параметра  $\varepsilon$ ) ведет к размыванию слоя объемного заряда как в лобовой, так и в теневой областях. Рост отрицательного потенциала  $\Phi_0$  ведет к вымыванию электронов из области ближнего следа и некоторому росту в нем концентрации ионов.

Концентрации  $n_{ie}$  в ближнем следе уменьшаются также с ростом характерного размера тела  $r_0$ . На рис. II.3.34 даны кривые зависимости плотности токов ионов и электронов на цилиндрический электрод от времени в процессе эволюции после импульсного изменения потенциала. Начальный участок эволюции с характерным максимумом опущен, показаны лишь колебательные процессы, связанные с турбулентностью потока. С целью исследования зависимости токов от угловой координаты  $\theta$  сечение цилиндра поделено на три сегмента, что позволяет получить информацию о токах на каждый из сегментов. На рис. II.3.35 приведены безразмерные усредненные плотности токов  $(j_{ie})_{\Sigma}$  и плотности токов на сегмент №1  $(j_{ie})_1$ . На том же рисунке приведены усредненные плотности токов  $j_{ie}$  для ламинарного режима обтекания (отрезки прямых линий вблизи оси ординат). Из сравнения кривых следует, что влияние крупномасштабных пульсаций ведет к уменьшению плотности токов примерно на 10 %, что связано с взаимодействием вихрей со слоем объемного заряда. Амплитуда колебаний суммарного тока вследствие турбулентности потока составляет 6–10 % от его среднего значения, причем токи ионов и электронов колеблются в одной фазе. Однако на теневые сегменты цилиндра, где средние значения токов относительно невелики, амплитуда колебаний может достигать 100 % и более.

В условиях турбулентного обтекания, когда электрическое число Рейнольдса  $Re_e$  достаточно велико, конвективный перенос значительно превосходит эффекты, связанные с диффузией и подвижностью. Поэтому зависимость суммарной плотности ионного тока от параметров  $\Phi_0$  и  $r_0$  ослабляется. Этого нельзя сказать о плотности электронного тока, поскольку хаотическая скорость электронов много больше направленной.

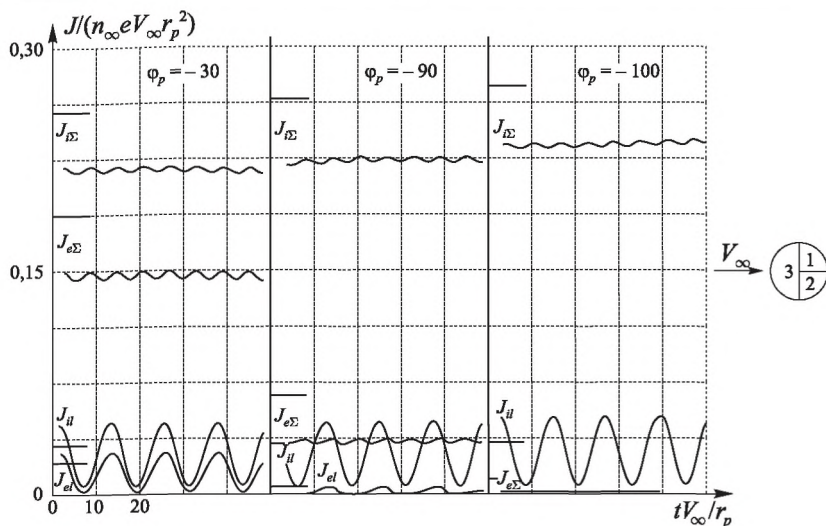
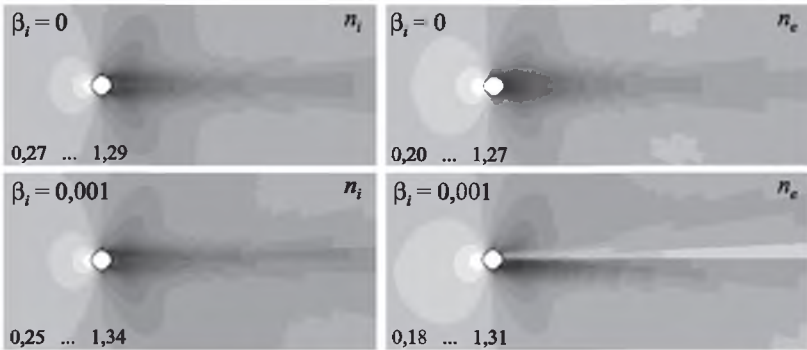


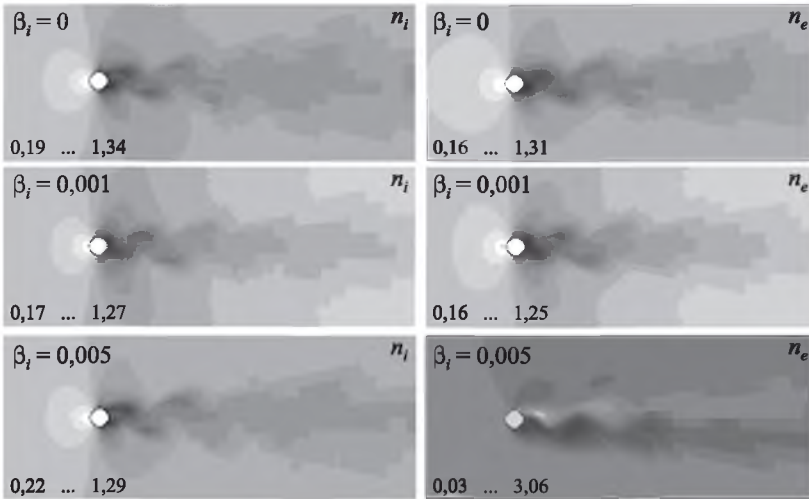
Рис. П.3.34. Токи на цилиндрическое тело при ламинарном и турбулентном обтекании ( $M = 0,5$ ,  $r_p/r_D = 3$ ,  $T_e/T_i = 3$ )

На рис. П.3.35 представлены профили концентраций ионов и электронов при ламинарном и турбулентном обтекании в магнитном поле.

Белому цвету соответствует максимум концентрации, черному — минимум. Изолинии концентраций — это границы между областями с различной плотностью почернения. Диапазон изменения безразмерных концентраций указан в левом нижнем углу рисунков. Если в случае  $B = 0$  при ламинарном обтекании след за телом симметричен относительно плоскости, содержащей вектора  $\mathbf{u}_\infty$  и ось цилиндра, то при  $B > 0$  в следе образуются области с несимметричным расположением концентраций, что ведет к появлению аксиального электрического поля. При турбулентном обтекании вследствие перемешивания вихрями указанный эффект несколько смазывается. Асимметрия в профилях концентрации приводит к асимметрии плотности тока по обводу цилиндра. Вторая причина, влияющая на плотность тока, — это направленная скорость заряженных частиц, которая определяется процессами конвекции, диффузии и подвижности.



(a)



(б)

Рис. II.3.35. Концентрации заряженных частиц ( $\varphi_0 = -30$ ,  $M_0 = 0,8$ ):  
 (а) ламинарное обтекание; (б) турбулентное обтекание

На рис. II.3.36 даны плотности токов ионов и электронов при ламинарном и турбулентном обтекании на различные сегменты цилиндра в зависимости от величины магнитного поля. Ламинарный режим отмечен прямыми отрезками вблизи начала координат. Турбулентный режим приводит к колебаниям  $j_e$  и  $j_i$  по времени.



Из кривых следует, что ионный ток насыщения и в ламинарном, и в турбулентном режимах практически не зависит от параметра  $\beta_i$  (при  $\beta_i \leq 0,0075$ ). Это связано с тем обстоятельством, что в указанном интервале изменения магнитного поля ионы не замагничены. Как следует из рис. II.3.36, заметная асимметрия в  $J_i$  проявляется при более сильных полях. Как и в случае  $B = 0$ , среднее значение ионного тока в турбулентном режиме ниже его значения в ламинарном режиме. С увеличением отрицательного потенциала зонда  $J_i$  незначительно возрастает по величине, что вызвано ростом толщины слоя объемного заряда.

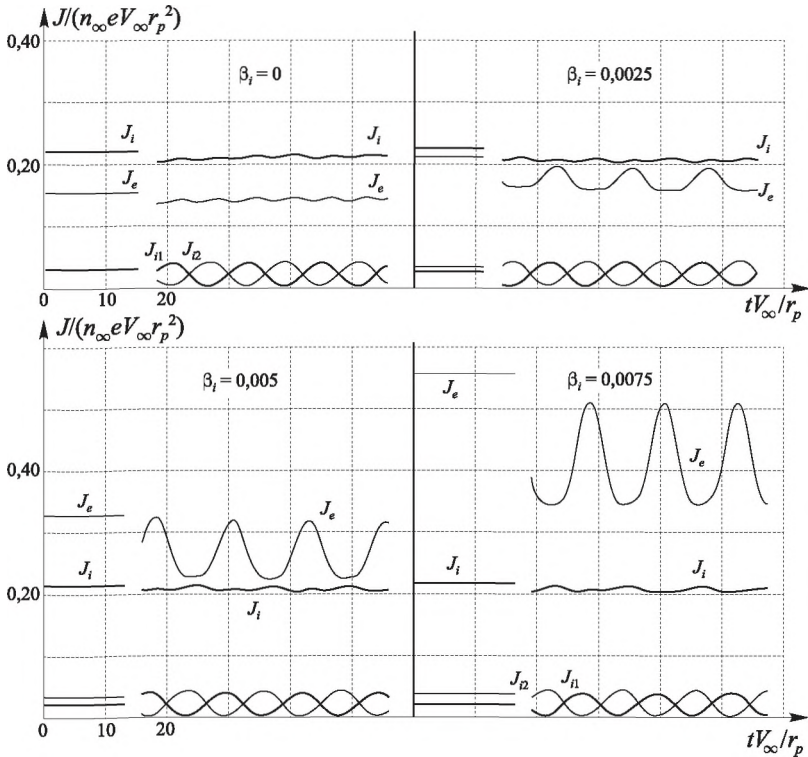


Рис. II.3.36. Влияние величины магнитного поля на токи  
(цилиндр,  $r_0 = 3$ ,  $\Phi_0 = -30$ ,  $M_0 = 0,8$ )

**Контрольные вопросы к главе II.3**

1. Каковы преимущества метода крупных частиц в сравнении с другими численными методами?
2. Каковы основные этапы в алгоритме метода крупных частиц?
3. Какова блок-схема решения задач столкновительной пристеночной плазмы.
4. В чем заключается метод верхней релаксации применительно к решению уравнения Пуассона?
5. В чем заключается метод последовательных итераций по времени применительно к задачам столкновительной пристеночной плазмы?
6. Как выбрать шаг по времени по геометрическим координатам? Как выбрать размер расчетной области?
7. В каких задачах в авиационно-космической технике встречается столкновительная пристеночная плазма?
8. Объясните смысл и расчетную формулу для безразмерных критериев:
  - a) число Кнудсена  $Kn$ ,
  - b) число Маха  $M$ ,
  - c) число Рейнольдса  $Re_3$ .

# **ЧАСТЬ III. ФИЗИЧЕСКИЕ, МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ ПРИСТЕНОЧНОЙ ПЛАЗМЫ ПРИ $Kn \sim 1$**

## **Глава III.1. Физические модели пристеночной плазмы при $Kn \sim 1$**

В частях I и II книги рассмотрены предельные значения числа  $Kn$ :  $Kn \gg 1$  — молекулярный режим и  $Kn \ll 1$  — режим сплошной среды. Промежуточные значения числа  $Kn$  (условно  $Kn \sim 1$ ) не позволяют делать те упрощения, которые были сделаны в частях I, II. Необходимо использовать кинетическое уравнение Больцмана с интегралом столкновений в правой части совместно с уравнениями Максвелла или уравнение Алексева совместно с уравнениями Максвелла, если существенны процессы на масштабах порядка масштаба столкновений. Система уравнений в данном случае включает сложные нестационарные интегродифференциальные уравнения, дополненные нетривиальными начальными и граничными условиями, часть которых являются существенно нелинейными или разрывными. Сложность задачи значительно усугубляется наличием направленных скоростей плазмы и внешних магнитных полей, приводящих к асимметрии возмущенной зоны и многомерности фазового пространства. Кроме того, задача оказывается многопараметрической.

Строгое решение такой задачи в настоящее время не получено. Существующие аналитические методы служат для исследования свойств уравнений, а также образуют теоретическую базу для создания численно-аналитических методов. Существующие аналитические методы решения системы Больцмана–Пуассона или Алексева–Пуассона по своей сути являются приближенными и позволяют получить представление о решении задачи лишь в частных случаях. Это либо методы теории возмущений, либо методы для линеаризованного уравнения Больцмана, либо методы решения модельных кинематических уравнений.

Асимптотические методы теории возмущений пригодны, если уравнение содержит малый параметр. Так, для случая малого числа  $Kn$  были разработаны метод Гильберта, метод Чепмена–Энскога, метод

Черчиньяни и другие. Основным результатом этих методов является вывод о возможности замены кинетических уравнений уравнениями сплошной среды.

При больших числах  $Kn$  асимптотическое разложение по степеням  $\frac{1}{Kn}$  позволяет перейти к уравнению Власова. При учете членов более высокого порядка в этом разложении можно получить цепочку более точных кинетических уравнений, позволяющих учитывать влияние межчастичных столкновений. Эти уравнения имеют в правой части вместо интеграла столкновений члены типа источника. Поэтому само уравнение оказывается значительно проще уравнения Больцмана.

Линеаризованные кинетические уравнения имеют в правой части вместо интеграла столкновений линейный интегральный оператор. Они применимы в том случае, если отклонение начальных и граничных условий от максвелловской функции распределения мало.

Методы модельных уравнений основаны на замене интеграла столкновений  $J_{ст}$  более простым выражением, сохраняющим только качественные и средние свойства истинного оператора столкновений. Наиболее известной и простой моделью является модель БГК (Бхантгара, Гроса, Крука) и ее обобщения [124]:

$$J_{ст} = \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - f^M}{\tau}, \quad (\text{III.1.1})$$

где  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — функция, подлежащая нахождению,  $f^M$  — максвелловская ФР,  $\tau$  — время релаксации. Оператор (III.1.1) переводит уравнение Больцмана в квазилинейное дифференциальное уравнение. Представление интеграла столкновений в форме (III.1.1) справедливо, если ФР мало отличается от максвелловской.

Большой класс составляют вариационные методы, основанные на построении функционала, зависящего от интегральных характеристик течения, вариации которого обращаются в ноль на решении уравнения Больцмана. Однако этот метод применительно к практическим задачам слишком сложен.

Рассмотрим более подробно те упрощенные кинетические уравнения, которые являются не интегродифференциальными, а квазилиней-

ными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка. Это бесстолкновительное уравнение Власова, кинетические уравнения с источником в правой части, модельное уравнение БГК. Общий вид этих уравнений следующий [124]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^N a_i(x, v) \frac{\partial f}{\partial x_i} + b_i(t, x, v, f) \frac{\partial f}{\partial v_i} = J(t, x, v, f), \quad (\text{III.1.2})$$

$$f(0, x, v) = f^0(x, v), \quad (\text{III.1.3})$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — координаты,  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  — скорости,  $J(t, x, v, f)$  — функция источника заряженных частиц или модельный интеграл столкновений. В случае уравнения Власова  $J(t, x, v, f) \equiv 0$ . Зависимость коэффициента  $b_i$  от  $f$  появляется вследствие самосогласованного характера распределения частиц в плазме. В этом случае сама  $f$  определяет силы, действующие на частицы. Общая теория решения уравнений такого вида разработана в [125, 126]. Согласно теории уравнению (III.1.2) соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений характеристик:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i^*}{dt^*} &= a_i(x^*, v^*), i = \overline{1, n}, \\ \frac{dv_i^*}{dt^*} &= b_i(t^*, x^*, v^*, f^*), i = \overline{1, n}, \\ \frac{df_i^*}{dt^*} &= J(t^*, x^*, v^*, f^*). \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.1.4})$$

Нахождение решений квазилинейного уравнения (III.1.2) сводится к нахождению его характеристик, т.е. к решению системы (III.1.4). К системе (III.1.4) следует добавить начальные условия

$$\left. \begin{aligned} x_i^*(0) &= x_i, i = \overline{1, n}, \\ v_i^*(0) &= v_i, i = \overline{1, n}, \\ f^*(0) &= f(x, v). \end{aligned} \right\}. \quad (\text{III.1.5})$$

Решение задачи (III.1.4), (III.1.5) имеет вид

$$f^* = F \left[ t^*, X(t^*, x^*, v^*), V(t^*, x^*, v^*), f^0(X(t^*, x^*, v^*)) \right]. \quad (\text{III.1.6})$$

В части I книги широко использовалось уравнение Власова для решения задач пристеночной плазмы применительно к движущемуся в ионосферной плазме спутнику, к потокам плазмы, истекающим из ЭРД, к методам зондовой диагностики этих потоков и др.

На высотах  $\sim (50-70)$  км над поверхностью земли средний пробег частиц может оказаться сравним с характерным размером задачи, т. е. выполняются условия, когда число Кнудсена  $Kn \sim 1$ . Функции распределения заряженных частиц вблизи поверхности летательного аппарата в этих условиях существенно отличаются от максвелловских. В этих случаях большинство методов, обзор которых дан выше, малопригодны для расчета практических задач. Более привлекательными оказались методы молекулярной динамики, разработанные Бёрдом [127] применительно к задачам газовой динамики. Эти методы предполагают использование статистических подходов, основанных на законах теории вероятности. Рассмотрим основные типы столкновений.

### III.1.1. Столкновения типа «ион–нейтрал»

Рассмотрим столкновение между частицей сорта « $i$ » (ион) и частицей сорта « $a$ » (атом). Будем использовать модель твердых сфер (рис. III.1.1). Расчет столкновения проведем в соответствии с работой [124].

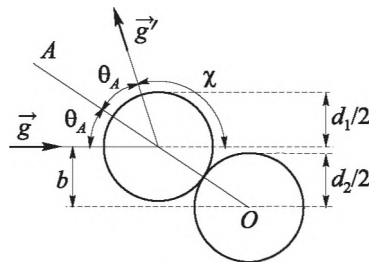


Рис. III.1.1. Схема столкновения иона с атомом по модели твердых сфер

Считаются заданными скорости частиц до столкновения  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ , диаметры твердых сфер  $d_1$  и  $d_2$  и прицельный параметр  $b$ .

Требуется определить скорости частиц после столкновений  $\mathbf{v}'_1$  и  $\mathbf{v}'_2$ . Обозначим  $\mathbf{g} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ , а  $\mathbf{v}_m$  — скорость центра масс. Запишем законы сохранения при упругом ударе двух шаров. Закон сохранения импульса:

$$m_i \mathbf{v}_i + m_a \mathbf{v}_a = m_i \mathbf{v}'_i + m_a \mathbf{v}'_a.$$

Учитывая, что  $m_i \approx m_a$ , находим

$$\mathbf{v}_i - \mathbf{v}'_i = -(\mathbf{v}_a - \mathbf{v}'_a).$$

Закон сохранения энергии запишем с учетом того, что потенциальная энергия при абсолютно упругом ударе сохраняется:

$$\frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{m_a v_a^2}{2} = \frac{m_i v_i'^2}{2} + \frac{m_a v_a'^2}{2},$$

откуда

$$v_i^2 - v_i'^2 = v_a'^2 - v_a^2,$$

или

$$\left(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i\right)\left(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}'_i\right) = \left(\mathbf{v}_a + \mathbf{v}'_a\right)\left(\mathbf{v}'_a - \mathbf{v}_a\right),$$

откуда

$$\left(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i\right) = +\left(\mathbf{v}_a + \mathbf{v}'_a\right).$$

Решая систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i &= +\mathbf{v}_a + \mathbf{v}'_a, \\ \mathbf{v}_i - \mathbf{v}'_i &= -\mathbf{v}_a + \mathbf{v}'_a, \end{aligned} \right\}$$

находим

$$\mathbf{v}_i = +\mathbf{v}'_a; \quad \mathbf{v}_a = +\mathbf{v}'_i, \quad \text{откуда } \mathbf{g} = -\mathbf{g}' \text{ и } |\mathbf{g}| = |\mathbf{g}'|.$$

Скорость центра масс отсчета:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_m = \text{const} &= \frac{m_i \mathbf{v}_i + m_a \mathbf{v}_a}{m_i + m_a} = \frac{\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_a}{2} = \frac{\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}'_a}{2} = \\ &= \frac{2\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}'_a}{2} = \mathbf{v}'_i - \frac{1}{2}\mathbf{g}' = \mathbf{v}_i - \frac{1}{2}\mathbf{g}. \end{aligned}$$

Откуда

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_m + \frac{1}{2} \mathbf{g}', \quad \mathbf{v}'_a = \mathbf{v}_m + \frac{1}{2} \mathbf{g} = \mathbf{v}_m - \frac{1}{2} \mathbf{g}'. \quad (\text{III.1.7})$$

Направление вектора  $\mathbf{g}'$  относительно вектора  $\mathbf{g}$  определяется углом  $\chi$ :

$$\chi = \pi - 2\theta_A, \quad \sin \theta_A = \frac{b}{d_1 + d_2} = \frac{b}{2d_{12}}. \quad (\text{III.1.8})$$

### III.1.2. Столкновения типа «электрон–нейтрал»

Столкновение между электроном и атомом в рамках модели твердых сфер с учетом неравенства  $m_e \ll m_a$  происходит по закону отражения от сферического зеркала (импульс электрона при столкновении изменяется только по направлению, но не по величине (рис. III.1.2)).

Выразим скорость электрона после столкновения ( $V'_{ex}$ ,  $V'_{ey}$ ) через скорость до столкновения ( $V_{ex}$ ,  $V_{ey}$ ) и параметр столкновений  $a$ . Из рис. III.1.2 следует

$$V'_{ex} = V'_e \cos \delta,$$

$$V'_{ey} = V'_e \sin \delta.$$

Поскольку модуль скорости электрона при соударении не изменяется, то

$$V'_e = V_e = \sqrt{V_{ex}^2 + V_{ey}^2}.$$

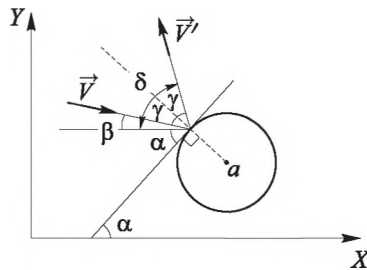


Рис. III.1.2. Схема столкновения электрона с атомом по модели твердых сфер



Из рис. III.1.2 следует

$$\delta = \beta + 2\gamma; \quad \beta = \arctg(V_{ey}/V_{ex}); \quad \gamma = (\pi/2) - \alpha - \beta. \quad (\text{III.1.9})$$

Следовательно

$$\delta = \pi - 2\alpha - \beta = \pi - 2\alpha - \arctg(V_{ey}/V_{ex}).$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} V'_{ex} &= -\sqrt{V_{ex}^2 + V_{ey}^2} \cos(2\alpha - \arctg(V_{ey}/V_{ex})), \\ V'_{ey} &= +\sqrt{V_{ex}^2 + V_{ey}^2} \sin(2\alpha - \arctg(V_{ey}/V_{ex})). \end{aligned} \quad (\text{III.1.10})$$

Значения угла  $\alpha$  зависят от места попадания электрона в атом. Поскольку области попадания электрона в атом равновероятны, следует концентрации сталкивающихся частиц распределить равномерно по всем направлениям.

### III.1.3. Столкновения типа «ион–ион», «ион–электрон»

Поскольку на данном этапе развития авиационно-космической техники в пристеночных слоях плазмы имеет место только слабоионизированная плазма, столкновениями заряженных частиц между собой можно пренебречь. Поэтому данный раздел имеет ознакомительную ценность и будет представлен достаточно конспективно.

Столкновения между заряженными частицами начинают играть существенную роль, если степень ионизации достаточно высокая. На практике столкновения типа «ион–ион» и «ион–электрон» могут играть заметную роль уже при степенях ионизации в несколько процентов. С целью выяснения роли столкновений между заряженными частицами будем предполагать, что роль других типов столкновений мала. Будем также считать, что химические реакции заморожены, а направленные скорости и внешние магнитные поля отсутствуют. Собственные магнитные поля предполагаются достаточно слабыми, так что ими также будем пренебрегать.

В сформулированных условиях ион совершает движение в коллективном электрическом поле, образованном всеми остальными заряжен-

ными частицами и заряженными макротелами, внесенными в плазму. Математическая модель задачи в данных условиях включает уравнения Фоккера–Планка для ионов и электронов и уравнение Пуассона для самосогласованного электрического поля, а также систему начальных и граничных условий. С учетом кулоновских столкновений эволюция функций распределения ионов и электронов описывается кинетическим уравнением Больцмана со столкновительным оператором Фоккера–Планка [130]:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha \mathbf{E}}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{F.P.}, \quad \text{где } \alpha = i, e, \quad (\text{III.1.11})$$

$\left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{F.P.}$  — оператор Фоккера–Планка, определяющий изменения

функции распределения за счет кулоновских столкновений. Оператор столкновений впервые был выведен в работе Розенблюта М. Н. и др. [130]

$$\frac{1}{\Gamma_\alpha} \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{F.P.} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} \cdot \left( f_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \mathbf{V}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{V} \partial \mathbf{V}} : \left( f_\alpha \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial \mathbf{V} \partial \mathbf{V}} \right), \quad (\text{III.1.12})$$

где  $g, h$  — так называемые потенциалы Розенблюта,

$$\begin{aligned} g_\alpha(\mathbf{V}) &= \sum_b \int f_b(\mathbf{V} - \mathbf{V}') d\mathbf{V}', \\ h_\alpha(\mathbf{V}) &= \sum_b \frac{m_\alpha + m_b}{m_b} \int \frac{f_b d\mathbf{V}'}{|\mathbf{V} - \mathbf{V}'|}, \end{aligned} \quad (\text{III.1.13})$$

$$\Gamma_a = \frac{4\pi e^4}{m_a^2} \ln D_a; \quad D_a = \frac{3kT_a}{2e^2} \left( \frac{\epsilon_0 kT_e}{n_e e^2} \right)^{1/2} = \frac{2w_a r_d}{e^2},$$

$r_d$  — радиус Дебая,

$\ln D_a = \Lambda$  — кулоновский логарифм,

$w_a$  — средняя энергия частицы сорта «а».

Если сделать предположение об изотропности потенциалов Розенблюта и разложить функции  $g$  и  $h$  в ряды по полиномам Лежандра, оставив только нулевые члены, то получим [131]

$$\begin{aligned}
\Gamma_a^{-1} \frac{\partial f_a}{\partial t} &= \frac{\partial^2 f_a}{\partial V^2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial V^2} \right] + \frac{\partial f_a}{\partial V} \left[ -\frac{\partial h_a}{\partial V} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial g}{\partial V} + \frac{2}{V} \frac{\partial^2 g}{\partial V^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial V^3} \right] + \\
&\quad + f_a \left[ -\frac{2}{V} \frac{\partial h_a}{\partial V} - \frac{\partial^2 h_a}{\partial V^2} + \frac{2}{V} \frac{\partial^3 g}{\partial V^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 g}{\partial V^4} \right], \\
g_\alpha(v, t) &= 4\pi \sum_b \left[ \int_0^V v^2 v \left( 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{v'}{v} \right)^2 \right) F_b(v', t) dv' + \right. \\
&\quad \left. + \int_V^\infty v'^3 \left( 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{v}{v'} \right)^2 \right) F_b(v', t) \cdot dv' \right], \\
h_\alpha(v, t) &= 4\pi \sum_b \frac{m_\alpha + m_b}{m_b} \left[ \int_0^V \frac{v'^2}{v} F_b(v', t) dv' + \int_V^\infty v' F_b(v', t) dv' \right],
\end{aligned} \tag{III.1.14}$$

где  $F_b(v) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f_b(v', \mu, t) d\mu$  — изотропная функция распределения.

Приближение изотропных потенциалов Розенблюта выполняется тем лучше, чем ближе функция распределения к изотропной. Если рассматривается пристеночная плазма, то вблизи поверхности функции распределения притягивающихся частиц за счет поглощения на поверхности имеют подковообразный вырез, т. е. их изотропность нарушается. Она тем более нарушается в теневой области обтекаемого плазмой тела. Функции распределения отталкивающихся частиц могут быть изотропными.

В [131] получено уравнение Фоккера–Планка для двумерных не-изотропных задач в сферической системе координат. Переменными в пространстве скоростей могут быть  $(V_r, V_\theta)$  или  $(V, \gamma = \cos \theta)$ . Приведем из [80] уравнение для  $f_i$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma_i} \frac{\partial f_i}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_i}{\partial v^2} \frac{d^2 f_i}{dv^2} + \left[ \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g_i}{\partial v \partial \theta} - \frac{1}{v^3} \frac{\partial g_i}{\partial \theta} \right] \frac{\partial^2 f_i}{dv d\theta} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{v^4} \frac{\partial^2 g_i}{\partial^2 \theta} + \frac{1}{v^3} \frac{\partial g_i}{\partial \theta} \right] \frac{\partial^2 f_i}{\partial \theta^2} + \left[ \frac{1}{2v^3} \frac{\partial^2 g_i}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg } \theta}{2v^3} \frac{\partial g_i}{\partial \theta} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial g_i}{\partial \theta} \right] \frac{\partial f_i}{\partial v} + \\
&\quad + \left[ \frac{1}{v^4 \sin^2 \theta} \left( 1 - \frac{\cos^2 \theta}{2} \right) \frac{\partial g_i}{\partial \theta} - \frac{1}{v^3} \frac{\partial^2 g_i}{\partial v \partial \theta} + \frac{\text{ctg } \theta}{2v^3} \frac{\partial g_i}{\partial v} \right] \frac{\partial f_i}{\partial \theta} + \\
&\quad + \frac{\partial c}{\partial v} \frac{\partial f_i}{\partial v} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial c}{\partial \theta} \frac{\partial f_i}{\partial \theta} + 4\pi(\gamma_i f_e + f_i) f_i,
\end{aligned} \tag{III.1.15}$$

где

$$g_i(v, \theta) = \int_0^{\infty} v'^2 dv' \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' [f_e(v', \theta') + f_i(v', \theta')] \Omega(v', \theta', v, \theta), \quad (\text{III.1.16})$$

$$c(v_i, \theta) = (1-\gamma) \int_0^{\infty} v'^2 dv' \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' f_e(v', \theta') \Lambda(v', \theta', v, \theta).$$

Функции  $\Lambda$  и  $\Omega$  определяются через полные эллиптические интегралы:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{4}{q} K\left(\frac{p}{q}\right), \quad \Omega = 4qE\left(\frac{p}{q}\right), \\ p &= (4v' \sin \theta \sin \theta')^{1/2}, \\ q &= [v^2 + v'^2 - 2vv'(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta')]^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{III.1.17})$$

Уравнение (III.1.15) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 f_i}{\partial v^2} + a_2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial v \partial \theta} + a_3 \frac{\partial^2 f_i}{\partial \theta^2} + b_1 \frac{\partial f_i}{\partial v} + b_2 \frac{\partial f_i}{\partial \theta} + c \cdot f_i. \quad (\text{III.1.18})$$

Это уравнение параболического типа в двумерном пространстве  $(v, \theta)$ . Аналогично  $f_i$  записывается уравнение Фоккера–Планка и для  $f_e$ .

### III.1.4. Пристеночная плазма при $Kn \sim 1$ в авиационно-космической технике

Рассмотрим некоторые случаи, когда в образцах авиационно-космической техники используется плазма при промежуточных значениях числа Кнудсена.

- При запуске на орбиту МКС космического корабля типа «Союз» или при возвращении космонавтов с МКС на Землю промежуточные значения числа  $Kn$  возникают неизбежно, поскольку вблизи МКС  $Kn \gg 1$ , а около земли в плотных слоях атмосферы  $Kn \ll 1$ .
- Оценочно промежуточный режим имеет место на высотах  $\sim(50-70)$  км.
- В плазменных двигателях на срезе сопла имеет место молекулярный режим, а внутри двигателя, где подается рабочее вещество, в области фронта ионизации существенную роль играют столкно-

вения, т. е. имеет место режим сплошной среды. Очевидно, что между молекулярным и столкновительным участками рабочей камеры существует переходный режим.

Наличие трех режимов внутри плазменного движителя существенно усложняет физическую, математическую и численную модели расчета плазменных движителей.

Существующие работы по численному моделированию динамики плазмы в некоторых типах двигателей, как правило, не полностью учитывают реальную физическую картину.

Для примера рассмотрим работу «Численное моделирование динамики плазмы в холловском двигателе» (ХД) [128, 129].

В качестве моделируемого двигателя был выбран ХД малой мощности КМ-37, в котором разрядная камера имеет прианодное расширение и может быть изготовлена как из керамики, так и из металла. Современные зондовые измерения параметров плазмы в ХД показывают, что падение потенциала между анодом и катодом имеет место не только в канале и снаружи ХД. Также влияние на разряд оказывает плазма, примыкающая к катоду. Структура и параметры прианодной и прикатодной плазмы представляют большой интерес, поскольку позволяют определить структуру области ускорения ионов. Таким образом, предполагается, что модель должна описывать помимо области канала и область, примыкающую к срезу ХД. В моделируемом ХД диаметр средней линии канала достаточно мал, что требует решать задачу в двумерной осесимметричной постановке. В модели рассматриваются электроны, однократно заряженные ионы и нейтральные атомы. ФРЭ каждой компоненты является двумерной в пространстве координат и трехмерной в пространстве скоростей.

ФРЭ для нейтральных атомов удовлетворяет кинетическому уравнению, дополненному модельными слагаемыми, описывающими процессы ионизации, рекомбинации и гибели нейтралов вследствие ионизации:

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + v_{nj} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} = -n_e \langle \sigma_i v_e \rangle f_n + n_n \langle \sigma_{\Pi} v_{ion} \rangle f_i - n_i \langle \sigma_{\Pi} v_{ion} \rangle f_n, \quad (\text{III.1.19})$$

где  $f_n$  — функция распределения нейтральных атомов,  $f_{ion}$  — ФР ионов,  $\sigma_{\Pi}$  — сечение перезарядки,  $\sigma_i$  — сечение ионизации,  $v_e$  — скорость электрона,  $v_{ion}$  — скорость ионов,  $v_n$  — скорость нейтральных атомов.

В модели учитываются только однократно заряженные ионы. Кинетическое уравнение для ионов дополнено членами, описывающими изменение ФР ионов вследствие процессов рекомбинации и рождения ионов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + v_{ion} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{e}{M_{Xe}} \left( E_j + [\bar{v}_{ion} \times \bar{B}]_j \right) \frac{\partial f_i}{\partial v_{ionj}} = \\ = n_e \langle \sigma_i v_e \rangle f_n + n_i \langle \sigma_{II} v_{ion} \rangle f_n - n_n \langle \sigma_{II} v_{ion} \rangle f_i, \end{aligned} \quad (\text{III.1.20})$$

где  $E_j$  — компоненты вектора электрического поля,  $\bar{B}$  — вектор магнитной индукции,  $M_{Xe}$  — масса атома плазмообразующего газа — ксенона.

ФР электронов описывается при помощи кинетического уравнения, дополненного модельными слагаемыми, описывающими рождение электронов, а также изменение их ФРИ при столкновении с нейтральными атомами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} + v_{ej} \frac{\partial f_e}{\partial x_j} - \frac{e}{m_e} \left( E_j + [\bar{v}_e \times \bar{B}]_j \right) \frac{\partial f_e}{\partial v_{ej}} = \\ = I + n_n \langle \sigma_i v_e \rangle (f'_{e-i} - f_e) + n_n \langle \sigma_i v_e \rangle f_e^0 + \\ + n_n \langle \sigma_0 v_e \rangle (f'_{e-0} - f_e) + n_n \langle \sigma_B v_e \rangle (f'_{e-B} - f_e), \end{aligned} \quad (\text{III.1.21})$$

где  $f_e$  — ФР электронов,  $f_e^0$  — ФР вторичных электронов,  $\sigma_i$ ,  $\sigma_0$ ,  $\sigma_B$  — сечение ионизации, сечение упругих столкновений электронов с нейтральными атомами и сечение возбуждения электронами нейтральных атомов,  $I$  — интеграл кулоновских столкновений электронов. Штрихами обозначены ФР первичных электронов после соответствующих процессов. Усреднение в уравнениях (III.1.1)–(III.1.3) производится по ФР соответствующих частиц.

В модели различаются пять типов границ области моделирования: 1) свободная граница, 2) непроницаемая диэлектрическая стенка, 3) непроницаемая металлическая стенка, 4) анод ХД, 5) ось симметрии. При пересечении оси симметрии все частицы отражаются от нее зеркально, а производная потенциала плазмы на ней равна нулю. Частицы могут покидать область моделирования через свободные границы.

В качестве граничного условия на непроницаемой стенке для нейтралов используется условие диффузного отражения с равновероятно направленной в полупространстве скоростью, определяемой температурой стенки.

На непроницаемых стенках для ионов используется условие рекомбинации. Считается, что ион гибнет на стенке и передает ей положительный заряд. В месте падения иона на стенку эмитируется нейтральный атом с равновероятно направленной в полупространстве скоростью и энергией, соответствующей температуре стенки.

Для электронов задаются следующие граничные условия. При пересечении границы, совпадающей с анодом, электрон уничтожается, а переносимый заряд усредняется по ионному временному интервалу и составляет ток разряда. По достижении непроницаемых стенок электроны уничтожаются и по коэффициенту вторичной электронной эмиссии  $k_s = (E_e/E_1)^a$ , где  $E_e$  — энергия электрона,  $E_1$  — первый порог разmultiplication,  $a$  — экспериментальный коэффициент, рождается требуемое количество вторичных электронов.

На металлической непроницаемой поверхности пристеночный слой падения потенциала определяется самосогласованно. По суммарному заряду, накопленному на поверхности, и ее емкости определяется плавающий потенциал поверхности, который затем используется в качестве граничного условия при решении уравнения Пуассона.

На диэлектрической непроницаемой стенке считается, что нормальная составляющая электрического поля равна нулю — слой пристеночного падения потенциала напрямую не моделируется. Однако пристеночный скачок потенциала находится в приближении плоского конденсатора по локально накопленному заряду и используется в качестве граничного условия для электронов. Если нормальная к стенке энергия электрона меньше пристеночного скачка потенциала  $\Delta U_w$ , то он отражается от нее зеркально, в противном случае считается, что электрон достиг стенки.

Для моделирования катодной плазмы используется модель квазинейтральности. На каждом шаге итераций на границах области моделирования, совпадающих с катодной плазмой, загружается количество электронов, необходимое для того, чтобы выполнялось условие

$\sum n_e \approx \sum n_i$ . Если имеется избыток электронов, то электроны не загружаются. Положение загружаемых электронов определяется случайно, а их температура считается равной 2 эВ.

Столкновения частиц моделируются методом Монте-Карло. Для электронов учитываются упругое рассеяние на атоме ксенона, возбуждение атома ксенона и его ионизация электронным ударом. Для ионов учитывается процесс перезарядки. Считается, что в результате перезарядки ион и нейтральная частица обмениваются скоростями. Кулоновские взаимодействия электронов и ионов моделируются также при помощи метода Монте-Карло. При этом модель рассматривает кулоновские взаимодействия как парные столкновения с рассеянием на большой угол. Сечения реакций взяты из экспериментальных работ других авторов.

По авторскому тексту, заимствованному из [128, 129], можно сделать несколько замечаний.

- Согласно классификации, изложенной выше, кинетические уравнения (III.1.12)–(III.1.14) отличаются от уравнения Больцмана тем, что в правой части вместо интеграла столкновений стоит выражение типа источника. Такая замена ведет к систематическим ошибкам, величину которых трудно оценить.
- Выражение «при пересечении оси симметрии все частицы отражаются от нее зеркально». Поскольку ось симметрии — это воображаемая ось, от нее не может быть отражение. Требуется пояснение.
- Фраза «электроны загружаются». Этот термин требует разъяснения. Может быть, имеет место термоэмиссия, или ионизация электронным ударом, или что? Кроме того, не ясно, почему выбрано  $T_e = 2\text{эВ}$ ?
- Если учитываются столкновения типа «ион–ион», то они должны моделироваться не при помощи метода Монте-Карло, а путем использования оператора столкновений Фоккера–Планка, как это сделано в разделе III.1.3.

В заключение этого раздела сформулируем несколько задач для самостоятельного решения.

**Задача 1.** Рассчитать число Кнудсена, если тело с характерным размером  $d = 0,1$  м движется на высоте  $h_1 = 1$  км,  $h_2 = 70$  км,  $h_3 = 500$  км



над поверхностью Земли. Эффективный диаметр молекул принять равным  $5 \cdot 10^{-10}$  м. Параметры атмосферы Земли на высоте  $h_1 = 1$  км считать нормальными. Температуры на высотах  $h_2$  и  $h_3$  взять из таблицы I.1.1.

**Задача 2.** Происходит упругое столкновение между атомом водорода и атомом гелия. До столкновения молекула гелия покоится, а молекула водорода налетает на нее со скоростью  $v_1$ . Найти скорости молекул H и He после столкновения по величине и по направлению, если прицельный параметр  $b = \frac{d_H + d_{He}}{2}$ ,  $d_H = 3 \cdot 10^{-10}$  м,  $d_{He} = 4 \cdot 10^{-10}$  м. Молярные массы водорода и гелия:  $\mu_H = 10^{-3}$  кг/моль,  $\mu_{He} = 4 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

### Контрольные вопросы к главе III.1

1. В каких образцах авиационно-космической техники может наблюдаться переходный режим?
2. Что означают следующие термины:
  - а) «модель твёрдых сфер»;
  - б) «модель максвелловских молекул»;
  - в) «эффективный диаметр молекул»?
3. Как рассчитать конечные скорости после упругого удара «ион-атом»? Даны скорости частиц до удара, их массы, прицельный параметр.
4. Как рассчитать скорости после упругого удара «электрон-атом»? Известны скорости частиц до удара, их массы, прицельный параметр.

## Глава III.2. Математические модели пристеночной плазмы при $Kn \sim 1$

Для упрощения математических моделей рассмотрим отдельно модели с учетом столкновений типа «ион–нейтрал», типа «электрон–нейтрал» и типа «ион–ион».

### III.2.1. Математическая модель задачи с учетом столкновений типа «ион–нейтрал»

Рассматривается слабоионизированная плазма, в которой основную роль играют столкновения ионов с нейтральными молекулами. Предполагаем также, что роль тройных столкновений мала, а химические реакции заморожены. В этих условиях функция распределения ионов по скоростям подчиняется кинетическому уравнению Больцмана (см. гл. I.1):

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = J_{ia}, \quad (\text{III.2.1})$$

где  $J_{ia}$  — интеграл столкновений ионов с нейтральными частицами сорта «а». В рассматриваемых условиях интеграл столкновений может быть записан в виде

$$J_{ia} = \int (f'_i f'_a - f_i f_a) g_{ia} b d b d \varepsilon d \mathbf{V}_a, \quad (\text{III.2.2})$$

где  $f'_{i,a}$  — функции распределения ионов и нейтральных частиц сорта «а» до столкновения,  $f_{i,a}$  — функции распределения ионов и нейтральных частиц сорта «а» после столкновения,  $g$  — относительная скорость сталкивающихся частиц,  $b$  — прицельный параметр,  $\varepsilon$  — азимутальный угол,  $\mathbf{F}_i = q_i \mathbf{E}$  — сила, действующая на ионы в электрическом поле, возникающем в пристеночной области. Это поле подчиняется уравнению Пуассона

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} e(n_e - n_i); \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi. \quad (\text{III.2.3})$$

Поскольку столкновениями электронов с нейтральными частицами пренебрегаем, функция распределения электронов по скоростям подчиняется уравнению Власова

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{V}_e \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_e}{m_e} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{V}} = 0. \quad (\text{III.2.4})$$

Система уравнений (III.2.1)–(III.2.4) составляет математическую модель задачи взаимодействия заряженных тел с потоками плазмы с учетом столкновений типа «ион–нейтрал». Система начальных и граничных условий стандартна.

### III.2.2. Математическая модель задачи с учетом столкновений типа «электрон–нейтрал»

Как и в разделе III.2.1, рассматривается слабоионизированная плазма, тройными столкновениями пренебрегается, а химические реакции считаются замороженными. Однако в данном разделе будем считать, что основную роль играют столкновения электронов с атомами, а все остальные столкновения несут незначительный вклад. Такой подход может показаться несколько искусственным, однако он позволяет оценить влияние столкновений типа «электрон–нейтрал» на процессы переноса в пристеночной плазме, в частности на перенос заряда. Ввиду малости массы электрона при столкновении он резко изменяет направление своего движения и частично теряет скорость в направлении электрического поля, которую он приобрел на длине свободного пробега. Будем рассматривать только упругие столкновения. Как правило, скорость электронов много больше скорости атомов и ионов, поэтому положение центра масс совпадает с практически неподвижным атомом.

Математическая модель задачи включает в себя:  
уравнение Власова для ионов:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{V}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{V}} = 0, \quad (\text{III.2.5})$$

уравнение Больцмана для электронов:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{V}_e \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_e}{m_e} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{V}} = J_{e,a}^{\text{ст}}, \quad (\text{III.2.6})$$

уравнение Пуассона для самосогласованного электрического поля:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\epsilon} e(n_e - n_i), \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (\text{III.2.7})$$

Система начальных и граничных условий аналогична разделу III.2.1.

### III.2.3. Математическая модель задачи с учетом столкновений типа «ион–ион», «ион–электрон»

Математическая модель задачи включает уравнения Фоккера–Планка для ионов и электронов и уравнение Пуассона для самосогласованного электрического поля, а также систему начальных и граничных условий. С учетом кулоновских столкновений эволюция функций распределения ионов и электронов описывается кинетическим уравнением Больцмана со столкновительным оператором Фоккера–Планка [130]

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha \mathbf{E}}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{F.P.}, \quad \text{где } \alpha = i, e, \quad (\text{III.2.8})$$

$\left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{F.P.}$  — оператор Фоккера–Планка, определяющий изменения

функции распределения за счет кулоновских столкновений. Оператор столкновений впервые был выведен в работе Розенблота М. Н. и др. [130]:

$$\frac{1}{\Gamma_\alpha} \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{F.P.} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} \cdot \left( f_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \mathbf{V}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{V} \partial \mathbf{V}} : \left( f_\alpha \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial \mathbf{V} \partial \mathbf{V}} \right), \quad (\text{III.2.9})$$

где  $g, h$  — потенциалы Розенблота:

$$g_\alpha(\mathbf{V}) = \sum_b \int f_b(\mathbf{V} - \mathbf{V}') d\mathbf{V}',$$

$$h_\alpha(\mathbf{V}) = \sum_b \frac{m_\alpha + m_b}{m_b} \int \frac{f_b d\mathbf{V}'}{|\mathbf{V} - \mathbf{V}'|}, \quad (\text{III.2.10})$$

$$\Gamma_a = \frac{4\pi e^4}{m_a^2} \ell n D_a, \quad D_a = \frac{3kT_a}{2e^2} \left( \frac{\epsilon_0 kT_e}{n_e e^2} \right)^{1/2} = \frac{2w_a r_d}{e^2},$$

$r_d$  — радиус Дебая,

$\ln D_a = \Lambda$  — кулоновский логарифм,

$w_a$  — средняя энергия частицы сорта «а».

**Контрольные вопросы к главе III.2**

1. Как формулируется математическая модель пристеночной плазмы при учёте столкновений типа «ион–нейтрал»?
2. Как формулируется математическая модель пристеночной плазмы при учёте столкновений типа «электрон–нейтрал»?
3. Каков физический смысл оператора Фоккера–Планка?
4. Как записывается интеграл столкновений в слабоионизированной плотной плазме?
5. Каковы начальные и граничные условия в задачах пристеночной плотной плазмы?

## Глава III.3. Численные модели пристеночной плазмы при $Kn \sim 1$

### III.3.1. Алгоритм численного решения задачи при $Kn \sim 1$

#### III.3.1.1. Учитываются только столкновения типа «ион–нейтрал»

Предложенная численная модель основана на разбиении траектории движения иона на две части: движение между столкновениями на длине свободного пробега и непосредственно само столкновение. Движение между столкновениями изучается по методике, разработанной в гл. I.3 для свободномолекулярного режима. В этом случае динамика функции распределения подчиняется уравнению Власова. Алгоритм его решения основан на методе крупных частиц либо на методе характеристик. На каждом временном слое уточняется значение самосогласованного электрического поля, определяемого уравнением Пуассона.

Система уравнений приводится к безразмерному виду с помощью стандартной системы масштабов, изложенной в гл. I.3. В качестве примера рассмотрим безразмерную систему для тела в виде удлинённого прямоугольника шириной  $2r$ , находящегося под потенциалом  $\Phi$  (рис. I.2.1) В этом случае в фазовом пространстве задача оказывается 4-мерной с координатами  $(x, y, v_x, v_y)$  и имеет следующий вид (в безразмерном виде):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_i}{\partial y} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial v_x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial f_i}{\partial v_y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial f_e}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_e}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_e}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{2\mu_e} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial f_e}{\partial v_x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial f_e}{\partial v_y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= n_e - n_i, \\ \mu_e &= m_e / m_i, \\ \varepsilon &= T_i / T_e. \end{aligned} \tag{III.3.1}$$

Система начальных и граничных условий стандартная (см. раздел I.2.2).

Система дополняется формулами для моментов функций распределения:

$$\begin{aligned}
 n_\alpha &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(x, y, v_x, v_y) dv_x dv_y, \\
 j_\alpha &= \left| \sum_\alpha q_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(x, y, v_x, v_y) v_y dv_x dv_y \right|, \\
 \alpha &= i, e.
 \end{aligned} \tag{III.3.2}$$

Моделируемый объем фазового пространства разбивается на ячейки, размер которых  $\Delta V$  должен быть таким, чтобы изменение параметров в каждой ячейке было малым. Эволюция возмущенной зоны начинается после импульсного изменения потенциала тела. Временной шаг  $\Delta t$  выбирается малым по сравнению со средним временем между столкновениями частиц.

Число шагов по времени зависит от отношения  $\frac{\lambda_{ia}}{\langle v_i \rangle}$ , где  $\lambda_{ia}$  — длина пробега иона до столкновения с атомом,  $\langle v_i \rangle$  — тепловая скорость иона, зависящая от температуры и молярной массы иона. Величина  $\lambda_{ia}$  выбирается статистическими методами.

На втором подшаге вычислительного алгоритма рассматривается процесс столкновений. Существуют различные методы моделирования этого процесса [127]. Из этого многообразия выбираем следующий.

Каждый компонент плазмы разобьем по скорости на  $S$  интервалов (ионам присвоим индекс « $i$ », а атомам « $a$ »). Следовательно, эти индексы пробегают значение от 1 до  $S$ .

Например,

$$\begin{aligned}
 i = 1 &\rightarrow V_x \in [V_{\min x}; V_{\min x} + \Delta V_x], \\
 &V_y \in [V_{\min y}; V_{\min y} + \Delta V_y], \\
 &\dots \dots \dots \\
 &\dots \dots \dots \\
 i = S &\rightarrow V_x \in [V_{\max x} - \Delta V_x; V_{\max x}], \\
 &V_y \in [V_{\max y} - \Delta V_y; V_{\max y}].
 \end{aligned}$$

Аналогично для атомов (по индексу « $a$ »).

Далее рассматриваются столкновения «ион–атом», в результате которого определяются скорости частиц после столкновения  $v'_i$  и  $v'_a$  (см. раздел III.1.1):

$$\begin{aligned} v'_i &= v_m + \frac{1}{2}g', \\ v'_a &= v_m - \frac{1}{2}g', \end{aligned} \quad (\text{III.3.3})$$

где штрихами обозначены скорости частиц после столкновений,  $v_m$  — скорость центра масс,  $|g'| = |g| = v_i - v_a$ , направление  $v'_i$  составляет угол  $\chi$  относительно  $v_i$ , значение которого определено в разделе III.1.1.

Полное сечение столкновений:  $\sigma = \pi d_{ia}^2 = \frac{\pi}{4}(d_i + d_a)^2$ . Средняя длина свободного пробега иона [132]:

$$\lambda_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}d_{ia}^2 n_a} = \frac{\langle v_i \rangle}{v_{ia}}, \quad (\text{III.3.4})$$

где  $\langle v_i \rangle = \left(\frac{8kT_i}{\pi m_i}\right)^{1/2}$  — средняя скорость ионов,  $v_{ia}$  — частота столкновений иона с атомами.

Из (III.3.4) имеем

$$v_{ia} = 2\pi^{1/2} \left(\frac{4kT_i}{m_i}\right)^{1/2} n_a d_{ia}^2. \quad (\text{III.3.5})$$

Из физических соображений вводятся ограничения на шаг по времени  $\Delta t$  и размер координатной сетки  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ . Шаг по времени должен быть выбран таким, чтобы ион претерпел на нем не более одного столкновения:

$$\Delta t < \frac{1}{v_{ia}}. \quad (\text{III.3.6})$$

Размер возмущенной области должен быть таким, чтобы частица, претерпев столкновение, не могла бы за время  $\Delta t$  вылететь за пределы области:

$$\begin{aligned} x_\infty &\geq V_{\max, x} \Delta t, \\ y_\infty &\geq V_{\max, y} \Delta t, \end{aligned}$$



откуда

$$\begin{aligned}\Delta x &\geq \frac{V_{\max x} \Delta t}{N_x}, \\ \Delta y &\geq \frac{V_{\max y} \Delta t}{N_y},\end{aligned}\tag{III.3.7}$$

где  $N_x, N_y$  — число шагов расчетной сетки по осям  $x$  и  $y$ .

Рассчитаем теперь число частиц (в расчете на единицу объема), которые покидают ячейку  $[x, x + \Delta x]$ ,  $[y, y + \Delta y]$  за время  $\Delta t$  за счет столкновений:

$$\Delta n_i^{\text{столк}} = n_i v_{ia} \Delta t.\tag{III.3.8}$$

Эти частицы следует изъять из функции распределения ионов и, придав им новые скорости, перераспределить по другим ячейкам. Расчет новых скоростей частиц производится по формулам (III.3.7).

Концентрация частиц, покидающих данную ячейку, определяется соотношением  $\Delta n_i^{\text{столк}} = \Delta f_i \Delta V_x \Delta V_y$ .

Новая функция распределения в ячейке  $(x, y)$  определяется так:

$$\begin{aligned}f_{i \text{ новая}} &= f_{i \text{ старая}} - \Delta f_i \\ \Delta f_i &= \frac{v_{ia}}{N_x^2 N_y^2} f_{i \text{ старая}}.\end{aligned}\tag{III.3.9}$$

Ушедшие из старой ячейки частицы попадают в новую ячейку с координатами

$$\begin{aligned}x_{\text{нов}} &= x_{\text{стар}} + V_{x \text{ нов}} \Delta t, \\ y_{\text{нов}} &= y_{\text{стар}} + V_{y \text{ нов}} \Delta t.\end{aligned}\tag{III.3.10}$$

В результате прихода ионов в новую ячейку с координатами  $(x_{\text{нов}}, y_{\text{нов}})$  функция распределения в ней изменится:

$$f_{\text{нов}} = f_{\text{стар}} + \Delta f.\tag{III.3.11}$$

Изменение концентрации ионов в новой ячейке происходит по формуле

$$n_{i \text{ нов}} = \int \int_{v_x v_y} f_{i \text{ нов}} dv_x dv_y.\tag{III.3.12}$$

Расчет концентраций следует проводить после розыгрыша столкновений на каждом шаге  $\Delta t$ .

Учитывая сказанное выше, приведем последовательность действий при составлении программы расчета с учетом столкновений типа «ион-нейтрал».

1. На фоне заданного начального условия в момент времени  $t = 0$  осуществляется импульсное изменение потенциала от начального до конечного состояния, вследствие чего начинается эволюция возмущений зоны, как это делалось в частях I, II, используется метод установления.

2. Выбираем размер расчетной области из условия:

а) ион после одного столкновения не выходит за предел области;

б) этот размер должен быть больше размера возмущенной области вблизи внесенного в плазму тела;

в) шаг по времени:

$$\Delta t < \frac{1}{v_{ia}},$$

$$\Delta x = \frac{x_{\infty}}{N_x} = \frac{v_{\max x} \Delta t}{N_x},$$

$$\Delta y = \frac{y_{\infty}}{N_y} = \frac{v_{\max y} \Delta t}{N_y};$$

г) число узлов по координатам  $N_x, N_y$  выбирается методическими расчетами. Из опыта численных расчетов  $\Delta x, \Delta y < r_D$ , где  $r_D$  — радиус Дебая.

3. Временной интервал  $\Delta t$  расщепляется на 2 части: на время движения без столкновений и на само столкновение.

а) На длине пробега иона  $\lambda_{ia}$  он движется без столкновений. Его перемещение рассчитывается по методике части I книги.

б) Рассчитывается столкновение «i-a». При известных начальных скоростях и параметрах столкновений. Расчет осуществляется статистически.

- По известному  $(\lambda_{cp})_{i,a}$  задается распределение плотности вероятности  $\lambda_{ia}$  (например, в виде закона Гаусса) и разыгрывается данное значение  $\lambda_{ia}$ .

- Скорость иона  $v_i$  и атома  $v_a$  разбивается на  $S$  интервалов с шагом  $\Delta v_i, \Delta v_a$ .
- Для иона из первого интервала статистически выбирается атом, разыгрывается столкновение и определяется его скорость после удара  $v'_i$ . Аналогично осуществляется процесс столкновения для иона  $2, \dots, S$ . Таким образом находится распределение ионов по скоростям после столкновений.

4. Находится число частиц в единице объема, которое попадает в ячейку  $\Delta x \Delta y$  за время  $\Delta t$  вследствие столкновений на длине пробега  $\lambda_{ia}$

$$\Delta n_i^{\text{CT}} = v_{ia} \cdot n_i \cdot \Delta t = \Delta f_i^{\text{CT}} \cdot n_i \cdot \Delta v_x \cdot \Delta v_y.$$

Эти частицы следует изъять из старых ФРИ и, придав им новые скорости  $v'_i$ , перераспределить по другим ячейкам.

5. Новая ФР в старой ячейке с координатами  $(x, y)$ :

$$(f_{i \text{ нов}})_{\text{стар}} = f_{i \text{ стар}} - \Delta f_i^{\text{CT}}, \text{ где } \Delta f_i^{\text{CT}} = \frac{v_{ia} n_i \Delta t}{\Delta v_x \cdot \Delta v_y} = \frac{v_{ia} f_{i \text{ стар}}}{N_{v_x}^2 \cdot N_{v_y}^2}.$$

6. Ушедшие из старой ячейки частицы попадают в новую ячейку с координатами

$$x_{\text{нов}} = x_{\text{стар}} + v'_x \Delta t,$$

$$y_{\text{нов}} = y_{\text{стар}} + v'_y \Delta t.$$

ФРИ в новой ячейке принимает значение

$$f_{i \text{ нов}} = f_{i \text{ стар}} + \Delta f_i^{\text{CT}}.$$

7. Концентрация ионов в новой ячейке определяется по формуле

$$n_{i \text{ нов}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{i \text{ нов}} dv_x dv_y.$$

Далее расчет повторяется для следующего момента времени  $t + \Delta t$  до установления.

### III.3.1.2. Учитываются только столкновения «электрон–нейтрал»

Идеология алгоритма расчета слабоионизированной пристеночной плазмы с учетом электрон-нейтральных столкновений близка к изложен-

ной в разделе III.3.1.1 идеологии расчета с учетом столкновений «ион-нейтрал». Поэтому в этом разделе обратим внимание лишь на отличия и особенности алгоритма.

Первый этап расчета сохраняется полностью. На втором этапе моделируются столкновения между электроном и нейтральным атомом и вносятся изменения в функцию распределения электронов. Для этого электронный и нейтральный компоненты рассматриваются как смеси, состоящие из  $S$  сортов. Разбиение осуществляется по скорости. Каждый сорт для электронов отмечается индексом « $e$ » ( $e = 1, 2, \dots, S$ ), а для нейтральных атомов — индексом « $a$ » ( $a = 1, 2, \dots, S$ ).

Например,

$$\begin{aligned} e = 1 &\rightarrow V_x \in [V_{\min x}; V_{\min x} + \Delta V_x], \\ &V_y \in [V_{\min y}; V_{\min y} + \Delta V_y], \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ e = S &\rightarrow V_x \in [V_{\max x} - \Delta V_x; V_{\max x}], \\ &V_y \in [V_{\max y} - \Delta V_y; V_{\max y}]. \end{aligned}$$

При рассмотрении динамики столкновения между электроном (сорт  $e$ ) и атомом (сорт  $a$ ) эффективный диаметр электрона ввиду его малости примем равным нулю. Эффективный диаметр атома обозначим как  $d_a$ . Полное сечение столкновений будет равно

$$\sigma_{ea} = \frac{\pi d_a^2}{4}.$$

Средняя частота столкновений:

$$v_{ea} = 2\pi^{1/2} d_a \cdot n_a \left( \frac{2kT_e}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (\text{III.3.13})$$

Ограничения на шаг по времени  $\Delta t$  и координаты  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  аналогичны тем, что представлены в разделе III.3.1.1.

Плотность частиц, претерпевших столкновения в ячейке  $[x, x + \Delta x]$ ,  $[y, y + \Delta y]$  за время  $\Delta t$ , равна

$$\Delta n_e^{\text{столк}} = n_e v_{ea} \Delta t. \quad (\text{III.3.14})$$

Эти частицы вычитаем из функции распределения электронов и, после придания им новых скоростей, перераспределяем между другими ячейками в расчетной области, как в разделе III.3.1.1.

Концентрация покидающих данную ячейку электронов определяется соотношением  $\Delta n_e^{\text{столк}} = \Delta f_e \Delta V_x \Delta V_y$ . Поэтому изменения функции распределения в старой ячейке имеют вид

$$f_{e \text{ нов}} = f_{e \text{ стар}} - \Delta f_e, \quad \Delta f_e = \frac{v_{ex}}{N_{vx}^2} \frac{v_{ey}}{N_{vy}^2} f_{e \text{ стар}}. \quad (\text{III.3.15})$$

Эти частицы попадают в новую ячейку с координатами

$$\begin{aligned} x_{\text{нов}} &= x_{\text{стар}} + V'_{x \text{ нов}} \Delta t, \\ y_{\text{нов}} &= y_{\text{стар}} + V'_{y \text{ нов}} \Delta t. \end{aligned} \quad (\text{III.3.16})$$

В результате прихода электронов в новую ячейку функция распределения электронов в ней изменяется:

$$f_{e \text{ нов}} = f_{e \text{ стар}} + \Delta f_e.$$

Изменение концентрации в новой ячейке происходит по формуле

$$n_e = \int_{V_x} \int_{V_y} f_{e \text{ нов}} dv_x dv_y.$$

### III.3.1.3. Учитываются только столкновения «ион–ион», «ион–электрон»

Учитывая сложность столкновительного оператора Фоккера–Планка, исследование задачи о влиянии ион-ионных и ион-электронных столкновений на процессы переноса в пристеночной плазме начнем с простейшего случая, когда в плазме находится бесконечная плоскость с заданным потенциалом  $\phi_p$ . В этом случае функция распределения  $f_\alpha$  будет зависеть только от двух фазовых переменных ( $v_x, v_y$ ) и времени  $t$  (ось  $y$  направлена по нормали к поверхности). Математическая модель задачи в этом случае упрощается. Правая часть уравнения Фоккера–Планка для ионов в операторной записи имеет вид [131]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_i} \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{F.P.} &= \frac{1}{2} (\nabla_v \nabla_v g_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)) : (\nabla_v \nabla_v f_i) + \\ &+ \nabla_v C_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \nabla_v f_i + 4\pi (\gamma_e + f_i) f_i, \end{aligned} \quad (\text{III.3.17})$$

где  $\nabla_v \nabla_v g_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — ковариантная тензорная производная второго ранга, в которой

$$g_i = \int f_i |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| d\mathbf{v}' + \frac{1}{x^2} \int f_e |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| d\mathbf{v}', \quad (III.3.18)$$

$$C_i = (1 - \gamma) \int \frac{f_e d\mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}, \quad \gamma = \frac{m_i}{m_e}.$$

Аналогичное выражение имеет место для правой части в операторной форме для электронов:

$$\frac{1}{\Gamma_e} \left( \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{FP} = \frac{1}{2} (\nabla_v \nabla_v g_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)) : (\nabla_v \nabla_v f_e) + \quad (III.3.19)$$

$$+ \nabla_v C_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \nabla_v f_e + 4\pi \left( \frac{f_i}{\gamma} + f_e \right) f_e,$$

$$g_e = \int f_e |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| d\mathbf{v}' + \int f_i |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| d\mathbf{v}',$$

$$C_e = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \int \frac{f_i}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} d\mathbf{v}'. \quad (III.3.20)$$

Учитывая геометрию задачи, приводящую к зависимости функций распределения только от двух переменных ( $y, v_y$ ), математическая модель упрощается:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + V_y \frac{\partial f_\alpha}{\partial y} + \frac{F_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_y} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial v_y^2} \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial v_y^2} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_y} \frac{\partial c_\alpha}{\partial v_y} + H_\alpha, \quad \alpha = i, e, \quad (III.3.21)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e), \quad E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (III.3.22)$$

После масштабирования с использованием системы масштабов главы III.1 система (III.3.21)–(III.3.22) принимает вид (индекс обезразмеривания опущен)

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + A_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y} + B_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial V_y} = D_\alpha \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial V_y^2} + K_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial V_y} + H_\alpha, \quad \alpha = i, e,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = n_e - n_i, \quad E = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (III.3.23)$$

$$\text{где } A_\alpha = \sqrt{\delta_\alpha} \cdot V_y, \quad B_\alpha = \sqrt{\delta_\alpha} \frac{1}{2\epsilon_\alpha}, \quad \delta_\alpha = \frac{\epsilon_\alpha}{\mu_\alpha}, \quad \epsilon_\alpha = \frac{T_{\alpha\infty}}{T_{i\infty}}, \quad \mu_\alpha = \frac{m_\alpha}{m_i},$$

$$\begin{aligned}
 D_\alpha &= \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_o m_i}{2e^2 n_{i\infty}} \right)^{1/2} \frac{m_a}{2kT_{a\infty}} \left\{ \frac{n_{i\infty}}{\left( \frac{2kT_{i\infty}}{m_i} \right)^{1/2}} + \frac{n_{e\infty}}{\left( \frac{2kT_{e\infty}}{m_e} \right)^{1/2}} \right\} \frac{\partial^2 g_a}{\partial V_y^2}, \\
 K_\alpha &= \begin{cases} \left( \frac{\varepsilon_o m_i}{2e^2 n_{i\infty}} \right)^{1/2} \frac{n_{e\infty}}{\left( \frac{2kT_{i\infty}}{m_i} \right)^{1/2} \left( \frac{2kT_{e\infty}}{m_e} \right)^{1/2}} \frac{\partial C_i}{\partial V_y}, & \alpha = i; \\ \left( \frac{\varepsilon_o m_i}{2e^2 n_{i\infty}} \right)^{1/2} \frac{n_{i\infty}}{\left( \frac{2kT_{i\infty}}{m_i} \right)^{1/2} \left( \frac{2kT_{e\infty}}{m_e} \right)^{1/2}} \frac{\partial C_e}{\partial V_y}, & \alpha = e. \end{cases} \quad (\text{III.3.24}) \\
 H_\alpha &= \begin{cases} 4\pi \left( \frac{\varepsilon_o m_i}{2e^2 n_{i\infty}} \right)^{1/2} \left( \frac{\gamma f_e n_{i\infty}}{\left( \frac{2kT_{e\infty}}{m_e} \right)^{1/2}} + f_i \frac{n_{i\infty}}{\left( \frac{2kT_{i\infty}}{m_i} \right)^{1/2}} \right) f_i, & \alpha = i; \\ 4\pi \left( \frac{\varepsilon_o m_i}{2e^2 n_{i\infty}} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{\gamma} f_i \frac{n_{i\infty}}{\left( \frac{2kT_{i\infty}}{m_i} \right)^{1/2}} + f_e \frac{n_{i\infty}}{\left( \frac{2kT_{e\infty}}{m_e} \right)^{1/2}} \right) f_e, & \alpha = e. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Для решения уравнения Фоккера–Планка, входящего в систему (III.3.23), используется метод дробных шагов [94]. Для этого оператор правой части уравнения необходимо представить в виде суммы двух операторов, отвечающих за два физических процесса (перенос и столкновение частиц):

$$Q_1 f_a = - \left( A_a \frac{\partial f_a}{\partial y} + B_a \frac{\partial f_a}{\partial v_y} \right), \quad Q_2 f_a = \left( D_a \frac{\partial^2 f_a}{\partial v_y^2} + K_a \frac{\partial f_a}{\partial v_y} + H_a \right).$$

Тогда первое уравнение системы в операторной форме запишется в виде

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} = Q_1 f_a + Q_2 f_a. \quad (\text{III.3.25})$$

При этом задача (III.3.25) разбивается на две вспомогательные задачи: введение промежуточного слоя по переменной  $t$ , соответствующего значению  $t=t^{n+1/2}$ , и затем переход от слоя  $t=t^{n+1/2}$  к слою  $t=t^{n+1}$ .

Первая задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_a(y, v_y, t)}{\partial t} &= Q_1 w_a(y, v_y, t), \quad \alpha = i, e, \\ w_a(y, v_y, t^n) &= f_a(y, v_y, t^n), \quad n = 0, \dots, N-1, \\ w_a(0, v_y, t) &= 0, \\ w_a(y_\infty, v_y, t) &= f_a^{\text{максв}}. \end{aligned} \quad (\text{III.3.26})$$

Вторая задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_a(y, v_y, t)}{\partial t} &= Q_2 q_a(y, v_y, t), \quad \alpha = i, e, \\ q_a\left(y, v_y, t^{n+\frac{1}{2}}\right) &= w_a\left(y, v_y, t^{n+\frac{1}{2}}\right), \quad n = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (\text{III.3.27})$$

Приведем алгоритм решения задачи (III.3.23)–(III.3.24) [94–95].

1. Задать  $L, J, N$  — количество шагов по пространственной переменной  $y$ , скорости  $v_y$  и времени  $t$ , ширину возмущенной зоны  $y_{\max}$ , верхний предел скорости  $v_{\max}$ , границу  $t_{\max}$  интервала времени, на котором ищется решение; начальное значение вектора скорости —  $v_\infty$ . Обычно ширину возмущенной зоны выбирают кратной радиусу Дебая  $r_D$ , а верхний предел значений модуля вектора скорости находят из соотношения  $v_{\max} = 3 \sqrt{\frac{2kT_{i\infty}}{m_i}}$ .

2. Найти значения шагов по пространственной переменной, скорости и времени:

$$h_y = \frac{y_{\max}}{L}, \quad h_{v_y} = \frac{2v_{\max}}{J}, \quad \tau = \frac{t_{\max}}{N}.$$

3. Задать разностную сетку:

$$y_l = l \cdot h_y, \quad v_y^j = j \cdot h_{v_y}, \quad t = n \cdot \tau, \quad 0 \leq l \leq L, \quad 0 \leq j \leq J, \quad 0 \leq n \leq N.$$



4. Положить  $n = 0$ .

5. Вычислить сеточное представление начальных распределений

$f_{a_j}^{\text{максв}}$ :

$$f_{i_j}^{\text{максв}} = \pi^{-1/2} \exp\left[-\left(v_y^j - v_\infty\right)^2\right], \quad 0 \leq j \leq J,$$

$$f_{e_j}^{\text{максв}} = \pi^{-1/2} \exp\left[\left(\frac{T_{e_\infty} m_i}{T_{i_\infty} m_e}\right)^{1/2} \left(v_y^j - v_\infty\right)^2\right], \quad 0 \leq j \leq J.$$

6. Решить уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -(n_i - n_e), \quad (\text{III.3.28})$$

используя метод сеток [94].

• Вычислить правую часть уравнения (III.3.28):

$$P_\ell^n = -\left[\sum_{j=0}^J \left(\frac{f_{i_\ell, j-1}^n - f_{e_\ell, j-1}^n}{2} + \frac{f_{i_\ell, j}^n - f_{e_\ell, j}^n}{2}\right) \cdot h_{v_y}\right], \quad 0 \leq \ell \leq L,$$

где  $P_\ell^n = -(n_{i_\ell}^n - n_{e_\ell}^n)$ ,  $0 \leq \ell \leq L$ .

• Получить конечно-разностный аналог уравнения (III.3.28):

$$\frac{\Phi_{\ell+1}^n - 2\Phi_\ell^n + \Phi_{\ell-1}^n}{h_y^2} = P_\ell^n, \quad 0 \leq \ell \leq L. \quad (\text{III.3.29})$$

• Составить систему:

$$\frac{\Phi_{\ell+1}^n - 2\Phi_\ell^n + \Phi_{\ell-1}^n}{h_y^2} = P_\ell^n, \quad 0 \leq \ell \leq L,$$

$$\begin{aligned} \Phi_0^n &= \Phi_p, \\ \Phi_L^n &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III.3.30})$$

• Вычислить  $\Phi_\ell^n$ ,  $0 \leq \ell \leq L$ , решив систему (III.3.30) методом прогонки [94].

7. Вычислить напряженность электрического поля:

$$E_0^n = -\frac{1}{2h_y} \left( -3\varphi_0^n + 4\varphi_1^n - \varphi_2^n \right),$$

$$E_\ell^n = -\frac{\varphi_{\ell+1}^n - \varphi_{\ell-1}^n}{2h_y}, \quad 0 < \ell < L,$$

$$E_L^n = -\frac{1}{2h_y} \left( \varphi_{L-2}^n - 4\varphi_{L-1}^n + 3\varphi_L^n \right).$$

8. Решить задачу (III.3.23)–(III.3.24) методом дробных шагов:

- Перейти от задачи (III.3.23)–(III.3.24) к задаче (III.3.26)–(III.3.27).
- Получить разностную аппроксимацию (III.3.26)–(III.3.27).
- Решить задачи (III.3.23)–(III.3.24) после получения их разностной

аппроксимации методом исключения Гаусса. Получить

$$q_a(y, v_y, t^{n+1}) = f_a(y, v_y, t^{n+1}), \quad a = i, e.$$

9. Вычислить моменты функции распределения  $f_a(y, v_y, t^{n+1})$  для  $t = t^{n+1}$ :

$$n_{a,\ell}^{n+1} = \sum_{j=0}^J \left( \frac{f_{a,t,j-1}^{n+1} + f_{a,t,j}^{n+1}}{2} \right) \cdot h_{v_y}, \quad 0 \leq \ell \leq L,$$

$$j_{a,\ell}^{n+1} = \sqrt{\delta_a} \cdot q \cdot \left[ \sum_{j=0}^J \left( \frac{f_{a,t,j-1}^{n+1} \cdot v_y^{j-1} + f_{a,t,j}^{n+1} \cdot v_y^j}{2} \right) \cdot h_{v_y} \right], \quad 0 \leq \ell \leq L,$$

$$\delta_a = \frac{\varepsilon_a}{\mu_a}, \quad \varepsilon_a = \frac{T_{a\infty}}{T_{i\infty}}, \quad \mu_a = \frac{m_a}{m_i}, \quad a = i, e.$$

10. Если  $n = N$ , вычисления завершить. Иначе  $n = n + 1$  и перейти к п. 6.

### III.3.2. Методические расчеты и сравнение с результатами других авторов

Результаты численного моделирования для сферических и цилиндрических тел сравнивались с экспериментальными данными [133]. Изме-

рения проводились в гелиевой плазме тлеющего разряда при давлении 133 Па с помощью двойных цилиндрических зондов с безразмерным радиусом  $r_0 = 10$  и  $r_0 = 100$  при безразмерном потенциале  $\phi_0 = -5$ . Результаты сравнения теории и эксперимента приведены на рис. III.3.1, III.3.2. На рисунках даны результаты измерений цилиндрическим зондом при  $r_0 = 10$  и отношении длины зонда к его радиусу  $l/r_0 = 20$  и 40. Во всех экспериментах степень ионизации плазмы была порядка  $10^{-6}$ , что удовлетворяет условию слабой степени ионизации. Сравнение экспериментальных и теоретических данных указывает на их удовлетворительное согласие.

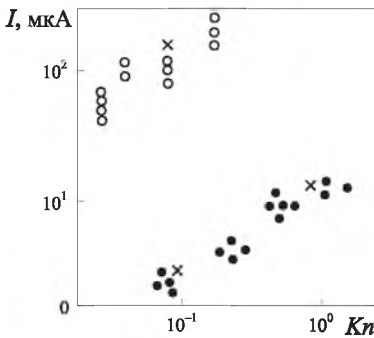


Рис. III.3.1

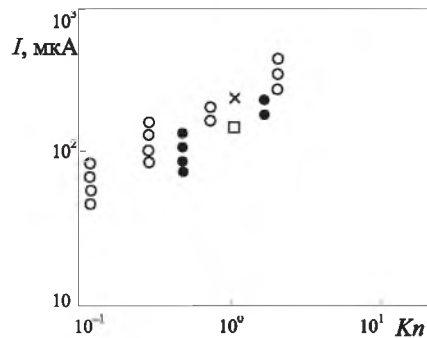


Рис. III.3.2

Сравнение теоретических расчетов с экспериментальными данными:

- $r_0 = 10$  — эксперимент;
- $r_0 = 100$  — эксперимент;
- × расчетные данные.
- $r_0 = 10, l/r_0 = 40$  — эксперимент;
- $r_0 = 10, l/r_0 = 20$  — эксперимент;
- ×  $r_0 = 10, l/r_0 = 40$  — расчетные данные;
- $r_0 = 10, l/r_0 = 20$  — расчетные данные.

### III.3.3. Некоторые результаты математического моделирования пристеночной плазмы при $Kn \sim 1$

#### III.3.3.1. Влияние столкновений «ион–нейтрал»

На рис. III.3.3 приведены в безразмерном виде эволюционные кривые для плотности ионного тока на сферический электрод с радиусом  $r_0 = 20$  и потенциалом  $\phi_0 = -16$ , а число Кнудсена менялось в пределах

$10 \leq Kn \leq 10^4$ . Эволюция осуществлялась после импульсного изменения потенциала сферы. На приведенных кривых не указаны плотности токов смещения, которые затухают на безразмерных временах, не превышающих 0,1. Максимумы токов проводимости, как и в молекулярном режиме, приходятся на момент безразмерного времени  $t \sim (2-4)$ .

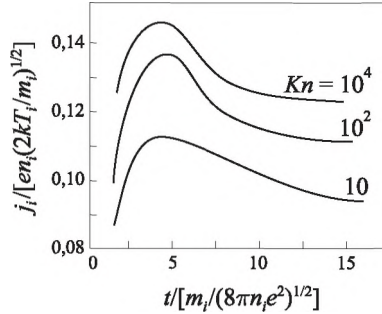


Рис. III.3.3. Эволюция ионного тока ( $r_0 = 20$ ,  $\phi_0 = -16$ ,  $\epsilon = 1$ , сфера)

Характерные времена релаксации в плазме под влиянием столкновений ионов с нейтральными атомами растут.

Перейдем теперь к рассмотрению результатов вычислительных экспериментов с плоскими пристеночными электродами в виде удлиненной полосы (ленты) (III.2.1). Расчет проводился по алгоритму, изложенному в разделе III.3.1.1. Были получены функции распределения ионов и электронов по скоростям, их моменты (концентрации и плотности токов), потенциал и напряженность электрического поля в возмущенной зоне.

Некоторые результаты представлены на рис. III.3.4–III.3.7. Результаты получены для значения  $r_0 = 2$ . Число Кнудсена определяется выражением

$$Kn = \frac{\lambda_{ia}}{r_p} = \frac{\langle v_i \rangle}{v_{ia} r_p} = \frac{\sqrt{8kT_i / \pi n_0}}{v_{ia} r_p}$$

Рис. III.3.4 иллюстрирует общий вид функции распределения ионов в момент установления ( $t = \tau$ ) при потенциале электрода  $\phi_0 = -5$  и значении числа Кнудсена  $Kn = 2$ . Точка, в которой получена функция распределения, имеет координаты  $x = x_0$ ,  $y = y_\infty / 10$ .

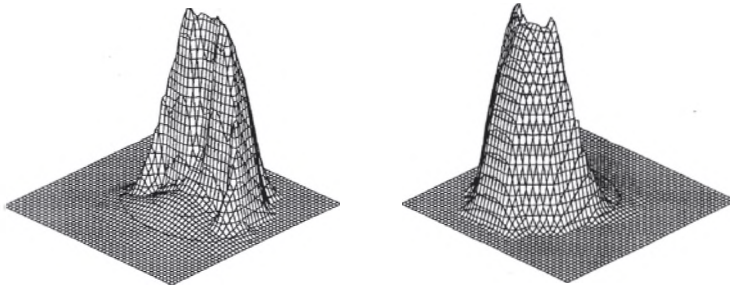


Рис. III.3.4. Функция распределения ионов с учетом столкновений типа «ион–нейтрал» ( $r_0 = 2$ ,  $\varphi_0 = -5$ ,  $Kn = 2$ )

Функция распределения ионов в данных условиях имеет подковообразный вырез, направленный в сторону положительной оси  $v_y$ . Однако в отличие от молекулярного режима имеется некоторое наполнение носителя внутри подковы, что напрямую связано с влиянием столкновений. Часть ионов в результате столкновений замедляет свои скорости, а часть приобретает скорости в направлении противоположном действию электрического поля.

На рис. III.3.5 даны кривые распределения вдоль оси  $x$  концентраций ионов (1) и электронов (2) для установившегося режима ( $t = \tau$ ) при потенциале  $\varphi_0 = -3$  и  $Kn = 0,7$ . Кривые напоминают аналогичные распределения в молекулярном режиме. Распределение ионов вдоль оси  $y$  приведено на рис. III.3.6.

Зависимость плотности ионного тока от числа Кнудсена и потенциала для плоского пристеночного электрода ленточного типа при наличии столкновений типа «ион–нейтрал» приведены на рис. III.3.7. По вертикальной оси отложена безразмерная плотность ионного тока, по горизонтальной — безразмерный потенциал  $\varphi_0$ .

Как и в случае зонда сферической геометрии, в данном случае наблюдается существенная зависимость плотности ионного тока от числа  $Kn$ . Уменьшение ионного тока с ростом числа  $Kn$  вызвано тем, что часть ионов, двигавшихся под действием электрического поля к зонду, изменило направление своего движения вследствие рассеяния на нейтральных атомах. По этой причине средняя скорость направленного

движения ионов уменьшается. Чем меньше число Кнудсена, тем чаще происходят такие столкновения и тем меньше ионный ток.

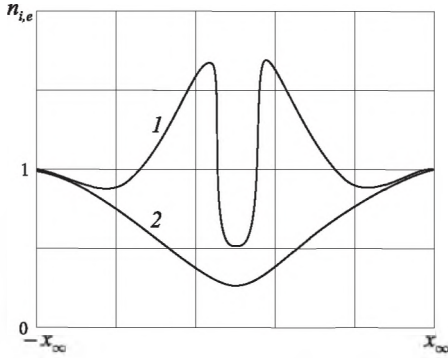


Рис. III.3.5. Распределение  $n_{i,e}$  вдоль оси  $x$   
( $r_0 = 2$ ,  $\varphi_0 = -3$ ,  $Kn = 0,7$ )  
1 —  $n_i$ ; 2 —  $n_e$

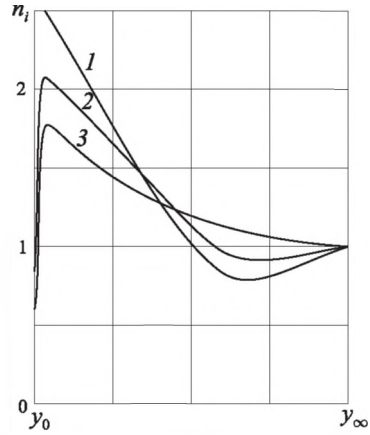


Рис. III.3.6. Распределение  $n_i$   
вдоль оси  $y$  ( $r_0 = 2$ ,  $Kn = 0,7$ ).  
1 —  $\varphi_0 = -9$ ; 2 —  $\varphi_0 = -6$ ;  
3 —  $\varphi_0 = -3$

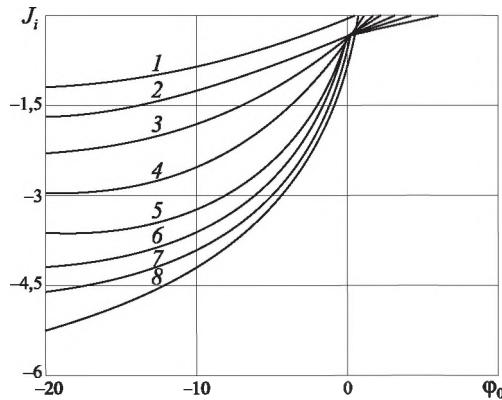


Рис. III.3.7. Зависимость плотности ионного тока от числа Кнудсена и потенциала для плоского пристеночного зонда ленточного типа при наличии столкновений типа «ион–нейтрал» ( $r_0 = 2$ ):

1 —  $Kn = 0$ ; 2 — 0,15; 3 — 0,3; 4 — 0,5; 5 — 0,7; 6 — 0,8; 7 — 1,0; 8 —  $\infty$

### III.3.3.2. Влияние столкновений «электрон–нейтрал»

Рассматривается диэлектрическая стенка, на которой находится электрод в виде удлиненного прямоугольника толщиной  $r_p$  и с потенциалом  $\phi_p$ . Математическая модель задачи соответствует разделу III.2.2, а численная модель — разделу III.3.1.2. В результате расчетов получены функции распределения заряженных компонентов, распределения потенциала и напряженности электрического поля, эволюционные кривые электрических токов после импульсного изменения потенциала, а также вольт-амперные характеристики стеночного электрода ленточной формы. Некоторые из этих результатов представлены на рис. III.3.8–III.3.9. Как и в разделе III.3.3.1, результаты получены для толщины пластины  $r_0 = \frac{r_p}{r_D} = 2$ . Число Кнудсена определялось по формуле

$$Kn = \frac{\lambda_{ea}}{r_p} = \frac{\langle v_e \rangle}{v_{ea} r_p} = \frac{\sqrt{8kT_e / \pi m_e}}{v_{ea} r_p}.$$

На рис. III.3.8 приведен типичный вид функции распределения электронов вблизи заряженного электрода с учетом электрон-атомных столкновений ( $x = 0, y = 0, 1, y_{\max}$ ).

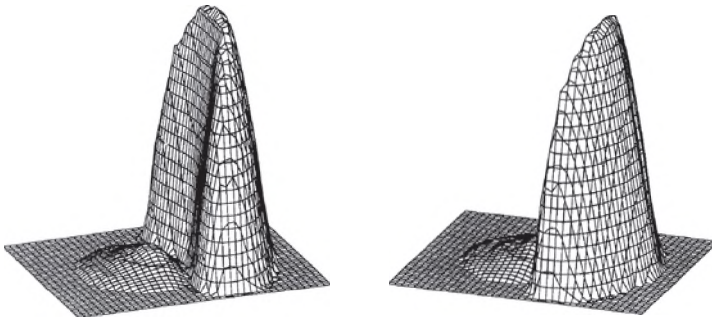


Рис. III.3.8. Функция распределения электронов с учетом столкновений типа «электрон–нейтрал» ( $r_0 = 2$ )

Функция распределения электронов в основном похожа на функцию распределения ионов. В проекции на плоскость ( $V_x, V_y$ ) она имеет

форму подковы со сглаженными углами. С внутренней стороны подковы появился невысокий подъем, которого не наблюдалось в молекулярном режиме. Он формируется электронами, отраженными от атомов после столкновений.

На рис. III.3.9, III.3.10 представлены распределения электронов вдоль оси  $Y$  в момент установления при различных потенциалах электрода, указанных на рисунке. Отметим, что концентрация электронов на стенке не равна нулю как при положительных, так и при отрицательных потенциалах, что подтверждает высказанную в главе III.1 мысль о том, что полагать значение концентрации на стенке равным нулю не всегда корректно.

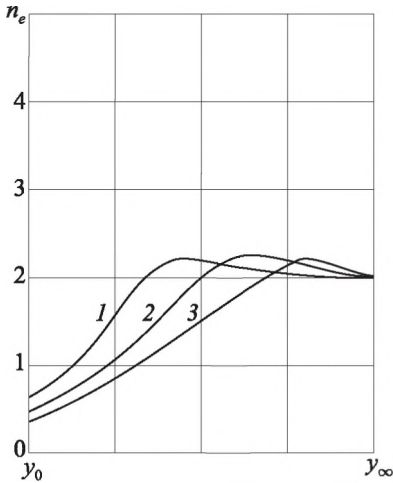


Рис. III.3.9. Распределение  $n_e$  вдоль оси  $Y$  ( $r_0 = 2$ ,  $\epsilon = 1$ ):

1 —  $\varphi_0 = -3$ ; 2 —  $\varphi_0 = -6$ ; 3 —  $\varphi_0 = -9$

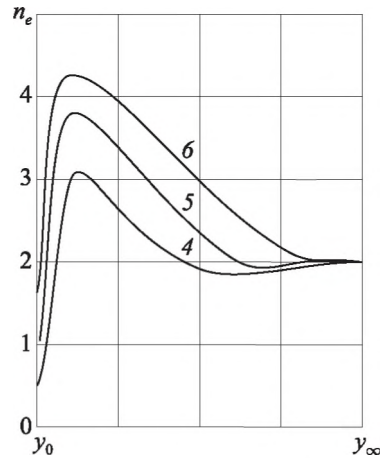


Рис. III.3.10. Распределение  $n_e$  вдоль оси  $Y$  ( $r_0 = 2$ ,  $\epsilon = 1$ ):

4 —  $\varphi_0 = 3$ ; 5 —  $\varphi_0 = 6$ ; 6 —  $\varphi_0 = 9$

На рис. III.3.11 представлены электронные ветви вольт-амперных характеристик плоского пристеночного электрода ленточного типа с учетом столкновений типа «электрон–нейтрал». По вертикальной оси отложена безразмерная плотность электронного тока, по горизонтальной — безразмерный потенциал. Расчеты проведены для ленты толщиной  $r_0 = 2$



и значением  $\varepsilon = 1$ . Число Кнудсена варьировалось от 0 до  $\infty$ , т. е. от режима сплошной среды до молекулярного режима. Как и для случая ионного тока, при данном потенциале с уменьшением числа Кнудсена ток существенно уменьшается, что связано с влиянием столкновений. В результате столкновений электронов с атомами часть электронов изменяет свои скорости и рассеивается, не достигая зонда, что и ведет к уменьшению электронного тока. При отрицательных потенциалах электрода столкновения, наоборот, могут привести к рассеянию в сторону зонда и тем самым увеличить электронный ток. Таких электронов тем больше, чем больше число Кнудсена.

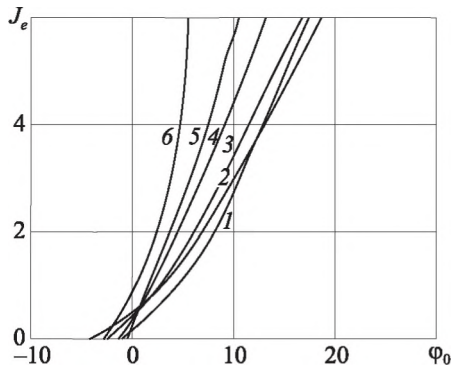


Рис. III.3.11. Электронная ветвь ВАХ зонда ленточного типа с учетом столкновений типа «электрон–нейтрал» ( $r_0 = 2$ ,  $\varepsilon = 1$ ):

1 —  $Kn = 0$ ; 2 —  $Kn = 0,3$ ; 3 —  $Kn = 0,7$ ; 4 —  $Kn = 0,8$ ; 5 —  $Kn = 1$ ; 6 —  $Kn = \infty$

### III.3.3.3. Влияние столкновений «ион-ион» и «ион-электрон»

Рассматривается бесконечная плоскость с потенциалом  $\varphi_p$ , помещенная в достаточно сильно ионизованную плазму, в которой основную роль играют столкновения между заряженными частицами. Математическая модель в этом случае соответствует уравнениям (III.3.21)–(III.3.22) с соответствующими начальными и граничными условиями, а численная модель — разделу III.3.1.3.

На рис. III.3.12 представлены эволюционные кривые для плотности ионного тока на бесконечную заряженную плоскость при различных

значениях числа заряженных частиц в дебаевской сфере  $n_D = 10^2 - 10^4$ . Анализ результатов показывает, что столкновения между заряженными частицами ведут к росту взаимного отталкивания ионов, вследствие чего в пристеночной области уменьшается плотность объемного заряда и снижается напряженность электрического поля. Это ведет к уменьшению плотности ионного тока на плоскость с увеличением роли столкновений [134]. В [134] рассмотрены также зонды сферической и цилиндрической геометрии с учетом столкновений заряженных частиц.

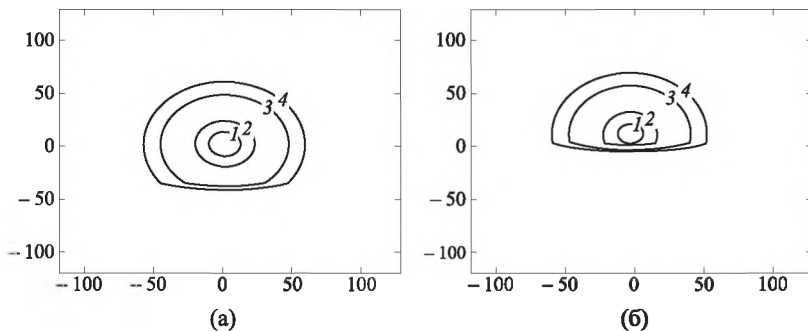


Рис. III.3.12. Линии уровня ФРИ: (а)  $t = 0,1$ ; (б)  $t = 0,5$ ;  
 1 —  $f_i = 0,015$ ; 2 —  $f_i = 0,01$ ; 3 —  $f_i = 0,005$ ; 4 —  $f_i = 0,001$

### Контрольные вопросы к главе III.3

1. В чем заключается метод установления применительно к задачам пристеночной плазмы при  $Kn \sim 1$ .
2. В чем заключается метод расщепления шага по времени?
3. Каков алгоритм численного решения задач при  $Kn \sim 1$ ?
4. Каково влияние столкновений на ФРИ и ФРЭ?
5. Как влияет число  $Kn$  на плотность тока, идущего из пристеночной плазмы на поверхность электрода?

## **ПРИЛОЖЕНИЕ.**

# **ИСТОРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ФИЗИКИ. ЕЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ**

Приложение составлено по материалам монографии Алексеева Б. В. «Нелинейная теория плазмOIDов и шаровых молний» [32].

В последние годы ситуация в фундаментальной физике приобрела беспрецедентный характер. Сложилось мнение, что 96 % материи и энергии во Вселенной неизвестного происхождения. Локальная физика оставляет нам лишь 4 % вещества — энергии для исследования — и не оставляет надежд для прямой диагностики остальных 96 %.

Но даже это не было бы столь удручающим фактом, если бы не убеждение, что эта темная материя и темная энергия не диагностируемы, и лишь по косвенным влияниям на космические объекты можно судить о существовании темной материи и темной энергии. Приходилось даже сталкиваться с мнением религиозно настроенных людей, утверждавших, что четыре процента — это всё, что оставил Создатель для исследования человеку.

Практически наука столкнулась с самым серьезным вызовом с тех пор, как была опубликована в 1687 году фундаментальная монография И. Ньютона «Математические принципы натуральной философии» (I. Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy). В Интернете можно обнаружить реакцию на сложившееся положение, граничащую с отчаянием.

Невозможно поверить, что через более чем триста лет после Ньютона мировая наука пришла к столь неутешительному результату. Тогда возникает вопрос: где ошибка? Ответ на этот вопрос дает нелокальная физика.

*Иначе говоря, происхождение всех трудностей кроется в тотальном переупрощении, следующем из принципиальных недостатков локальной статистической теории процессов переноса.*

На самом деле кризис развивался в течение многих лет. Тяжелым ударом на этом пути нерешенных проблем было самоубийство великого физика Л. Больцмана, по убеждению многих (в том числе акад. М. А. Ле-

онтовича) связанное с нерешенными проблемами и критикой кинетической теории Больцмана, первой из последующего перечня нерешенных проблем фундаментальной физики (локальной физической кинетики диссипативных процессов):

1. Кинетическая теория энтропии и проблема «первичной» флуктуации.
2. Строгая теория турбулентности.
3. Квантовая нерелятивистская и релятивистская гидродинамика, теория разделения зарядов в атомных структурах и ядрах.
4. Теория шаровой молнии.
5. Теория темной материи.
6. Теория темной энергии. Хаббловское расширение Вселенной.
7. PCT-инвариантность и судьба антиматерии после Большого взрыва.
8. Единая теория диссипативных структур — от атомных структур до космологии.

Эти проблемы и не могут быть решены в рамках локальной физики, но находят свое естественное разрешение как частный случай решения проблемы 8 — создания единой теории диссипативных структур — от атомных структур до космологии. Эта теория составляет основное содержание монографий (Алексеев Б. В. Нелокальная физика. Нерелятивистская теория, Lambert, 2011; Alexeev B. V. Generalized Boltzmann Physical Kinetics, Elsevier, 2004). В указанных монографиях рассматриваются фундаментальные принципы обобщенной больцмановской физической кинетики как составной части нелокальной физики.

Установлено, что теория процессов переноса (включая квантовую механику) может быть представлена в рамках универсальной теории (единой теории диссипативных систем, ЕТДС), основанной на нелокальном физическом описании. Показано, в частности, что уравнения нелокальной физики приводят к появлению солитонов, что поддерживает мнение Шрёдингера, трактовавшего квантовую механику с позиции существования волн материи. Уравнение Шрёдингера не является диссипативным уравнением. Поэтому обобщенная квантовая гидродинамика является инструментом для решения задач в теории диссипативных наносистем.

Как видим, речь идет о теории, работающей в гигантском диапазоне изменения характерных масштабов — от галактических структур до элементарных частиц. Монография «Нелокальная теория плазмOIDов и шаровых молний. Проблема Тунгусского тела. Версия гибели Гагарина» содержит приложение созданной Б. В. Алексеевым ЕТДС к решению проблемы 4 — теории плазмOIDов. Однако изложение теории плазмOIDов (менее удачное название — шаровых молний) невозможно без изложения соответствующего математического аппарата.

Представляется целесообразным в приложении отразить математический аппарат и аспекты теории на качественном уровне, указав, где именно допущена ошибка в традиционной статистической теории диссипативных процессов.

Идеи кинетической теории газов появились много лет назад. Не вдаваясь в глубокий исторический экскурс, уводящий в эпоху античности, мы отметим, что современная кинетическая теория, а точнее ее основания, была создана прежде всего трудами Людвига Больцмана. В 1872 году Л. Больцман опубликовал свое знаменитое кинетическое уравнение относительно одночастичной функции распределения:

$$\frac{Df}{Dt} = J^B, \quad (\text{П.1})$$

где  $\frac{D}{Dt}$  есть субстациональная производная:

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}, \quad (\text{П.2})$$

а  $J^B$  — столкновительный интегральный член; как обычно, через  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{r}$  обозначены скорость и радиус-вектор частицы. Для нас сейчас не существенен явный вид интеграла столкновений, определяющий изменение функции распределения  $f$  в результате парных столкновений. Однако отметим, что интеграл столкновений должен удовлетворять законам сохранения. В частности, в простейшем случае упругих столкновений в однокомпонентном газе выполняются соотношения

$$\int J^B \psi_i d\mathbf{v} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (\text{П.3})$$

где  $\Psi_i$  — инварианты столкновений.  $\Psi_1 = m$ ,  $\Psi_2 = m\mathbf{v}$ ,  $\Psi_3 = m\mathbf{v}^2/2$  связаны с законами сохранения массы ( $m$  — масса частицы), импульса и энергии в элементарных процессах. Интегралы от функции распределения, ее моменты, определяют макроскопические гидродинамические характеристики системы: числовую плотность  $n$ :

$$n = \int f d\mathbf{v}, \quad (\text{П.4})$$

температуру  $T$  ( $k_B$  — постоянная Больцмана):

$$\frac{3}{2}k_B T n = \frac{1}{2} \int f(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2 m d\mathbf{v}, \quad (\text{П.5})$$

где  $\mathbf{v}_0$  — гидродинамическая скорость течения. Следовательно, если умножить почленно уравнение Больцмана (П.1) на инварианты столкновений  $\Psi_i$ , проинтегрировав по всем скоростям частиц, и воспользоваться законами сохранения в форме (П.3), то из интегродифференциального уравнения Больцмана (УБ) следуют дифференциальные уравнения гидродинамики, общая форма которых называется гидродинамическими уравнениями Энского (ГУЭ).

Внешняя простота символической записи УБ (П.1), конечно, является обманчивой. Лишь в немногих случаях частного характера удается найти решение УБ. Одним из таких случаев является распределение Максвелла, устанавливающееся в термодинамически равновесном газе в отсутствие внешних сил  $\mathbf{F}$ . Для указанного случая выполняется

$$\mathbf{J}^B = 0, \quad (\text{П.6})$$

откуда следует распределение Максвелла ( $\mathbf{v}_0 = 0$ ):

$$f^{(0)} = n \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m\mathbf{v}^2}{2k_B T} \right). \quad (\text{П.7})$$

Много позже, уже после смерти Больцмана, был разработан аналитический метод решения УБ с целью расчета транспортных коэффициентов. Метод, созданный в 1916, 1917 годах Чепменом и Энскогом [136–139], позволил при наличии в системе малого параметра (каковым для рассматривавшегося ими не реагирующего газа было число Кнудсена — отношение средней длины пробега частиц к характерному гидродинами-

ческому размеру) получить явные представления для коэффициентов вязкости, теплопроводности, диффузии, а позже и термодиффузии.

Однако уже и современникам Больцмана было совершенно ясно, что речь идет о фундаментальном уравнении физики, и это объясняет то ревностное внимание, которым оно пользовалось, и те дискуссии, которые оно вызывало. Одним из наиболее сильных результатов, установленных Больцманом на основе его кинетического уравнения, является молекулярно-кинетическое истолкование второго начала термодинамики и выяснение статистического смысла понятия энтропии. А именно, оказалось, что можно ввести такую функцию

$$H = \int f \ln f dv, \quad (\text{П.8})$$

которая монотонно изменяется в неравновесной изолированной системе. Если установить связь между энтропией  $S$  единицы объема идеального газа и  $H$ -функцией ( $h$  — начальная буква в английском слове *heat* — теплота и в немецком *die Heizung* — нагрев) в виде

$$S = k_B H + \text{const}, \quad (\text{П.9})$$

то доказывается, что

$$\frac{dS}{dt} > 0, \quad (\text{П.10})$$

т. е. энтропия идеального газа для упомянутых неравновесных условий монотонно возрастает во времени.

С момента своего создания больцмановская физическая кинетика, уравнение Больцмана подвергались весьма серьезной критике, актуальность которой во многом сохранилась и до настоящего времени. Рассмотрим эти вопросы подробнее. Прежде всего современникам Больцмана была не ясна связь уравнения Больцмана с классической механикой и, в частности, с уравнениями Ньютона. Уравнение Больцмана было выведено феноменологическим путем из разумных физических соображений. Этот вывод с тех пор часто называют физическим выводом УБ, имея в виду, что имеется и другой, строгий подход, основанный на использовании уравнения Лиувилля. Этот подход, в наиболее яркой и последовательной форме реализованный Боголюбовым [140] в 1946 году, позволил в конечном счете установить пределы применимости уравнения Больц-

мана. Критики УБ отмечали, что уравнения классической механики Ньютона содержали вторую производную по времени и, следовательно, уравнения Ньютона не меняются при замене временной переменной  $t$  на  $(-t)$ , т. е. уравнения классической механики обратимы по времени. В 1876 г. Лопшmidt обратил внимание на то обстоятельство, что  $H$ -теорема была доказана из УБ, содержащего только первую производную по времени, в то время как уравнение Ньютона содержит вторую производную по времени (квадрат времени), что приводит к обратимости уравнений движения. Это означает, что если для системы частиц — твердых сфер — в какой-то момент времени начинается попятное движение системы в результате обращения направления движения всех частиц на противоположное, то система проходит все предшествующие первоначальные состояния вплоть до начального. Этот процесс должен вести к росту функции  $H$ , изменение которой изначально обусловлено обратимыми уравнениями движения. При этом наблюдатель не может отдать предпочтение одной из рассмотренных ситуаций как соответствующей движению «вперед» по времени и отвергнуть вторую возможность — движение назад. Иначе говоря, возникает проблема обратимости времени.

В иной формулировке, но в той же концепции по существу это возражение прозвучало в 1896 г. у Цермело (ученика Макса Планка). Цермело обратил внимание на противоречие между  $H$ -теоремой и доказанной в 1890 г. возвратной теоремой Пуанкаре, утверждающей, что любая физическая система даже при наличии в ней необратимых термодинамических процессов имеет конечную, отличную от нуля вероятность вернуться в первоначальное состояние.

Сам Больцман вполне осознавал такую возможность и во втором томе «Лекций по теории газов» писал [141, п. 87, с. 251]: «В результате движения газовых молекул  $H$ -функция всегда уменьшается. Содержащаяся в этом односторонность процесса не является следствием уравнений движения, которым подчиняются молекулы. Действительно, эти уравнения не меняются, если время изменяет свой знак». Дискуссии с Цермело, Максом Планком, Оствальдом иногда принимали весьма острый характер. В качестве аргумента Больцман приводил известный пример теории вероятностей. Пусть производится 6000 бросаний игральной кости; следует ожидать, что при такой выборке каждая из граней окажется наверху примерно 1000 раз. Вероятность, что, скажем, шестерка вы-



падает 6000 раз подряд, исчезающе мала и равна  $(1/6)^{6000}$ . На самом деле, этот пример не проясняет ситуации, как не объясняют ее и две статьи Пауля Эренфеста (ученика Больцмана) и Т. А. Афанасьевой-Эренфест, написанные уже после смерти великого австрийского физика. Изложение первой статьи Эренфестов было осуществлено Т. А. Афанасьевой-Эренфест 12 февраля 1908 г. на заседании Русского физико-химического общества. Речь шла о трактовке  $H$ -теоремы для «плоского» движения газа.

Пусть имеются прозрачные друг для друга  $P$ -частицы, исходящие по нормали к оси  $Y$  и движущиеся с одинаковыми скоростями в направлении оси  $X$ .  $P$ -молекулы испытывают упругие столкновения с непроницаемыми для молекул неподвижными  $Q$ -частицами, представляющими собой квадраты, стороны которых ориентированы под углом в  $45^\circ$  по отношению к оси  $Y$ . Нетрудно убедиться, что вскоре все частицы разбиваются на четыре группы частиц. При этом не составляет труда записать изменение числа  $P$ -частиц в каждой группе за некоторое время  $\Delta t$  и затем ввести аналог  $H$ -функции для плоского газа:

$$H = \sum_{i=1}^4 f_i \ln f_i, \quad (\text{П.11})$$

где  $f_i$  — число молекул данного сорта, т. е. число молекул, движущихся по одному из четырех возможных в данном случае направлений. Тогда при обращении направлений всех скоростей  $H$ -функция начнет возрастать и вернется к тому значению, которое соответствовало моменту старта  $P$ -частиц с оси  $Y$ . Тем самым подтверждается на простейшей модели теорема Пуанкаре–Цермело, но вовсе не объясняется неизбежность убывания  $H$ -функции при использовании несравненно более сложной модели Больцмана.

Вторую модель Эренфестов [142] называют лотерейной моделью. Речь идет о двух урнах  $A$  и  $B$  и  $N$  пронумерованных шаров, которым соответствуют лотерейные билеты, содержащиеся в некоем ящике. Первоначально все шары содержались в одном ящике  $A$  и изымались поштучно из  $A$  и помещались в  $B$  в соответствии с номером лотерейного билета, выгащенного наугад. Билет не изымается, а возвращается назад. В случае если вновь выгащенный билет соответствует шару, содержащемуся в  $B$ , то шар возвращается в  $A$ . В итоге каждый из ящиков будет содержать примерно по  $N/2$  шаров. Пусть  $N$  — полное число шаров, тогда если

в одном из ящиков на каком-то шаге  $s$ , соответствующем этапу розыгрыша, содержится  $n$  шаров, то в другом будет  $N - n$ . В результате можно образовать функцию  $\Delta$ , определяющую разность шаров в урнах  $\Delta = n - (N - n) = -N + 2n$ . В статистическом равновесии  $\Delta = 0$  и  $n = N/2$ . Если построить зависимость  $\Delta(s)$ , то она будет имитировать поведение  $H$ -функции в больцмановском газе. Но и этот пример не является достаточно убедительным, поскольку продолжение подобной лотереи неизбежно ведет к флуктуации  $\Delta$ -функции, в то время как флуктуации  $H$ -функции в больцмановской кинетической теории (БКТ) полностью исключены. К концу жизни Л. Больцман встал на позицию флуктуационной теории, трактующей убывание  $H$  со временем лишь как наиболее вероятный процесс. Но эта трактовка не подкрепляется БКТ, поскольку не ясно, как образовалась первичная флуктуация (включая галактический масштаб подобной флуктуации).

Одним из первых, кто понял необходимость видоизменения УБ с целью устранения возникающих противоречий, был Максвелл, который исключительно высоко ценил результаты Больцмана. Больцман, в свою очередь, многое сделал для популяризации электродинамики Максвелла и ее экспериментального обоснования. Рассмотрим аргументацию Максвелла. Уравнения гидродинамики являются следствием уравнения Больцмана. Если обратиться к уравнению энергии и пренебречь некоторыми механизмами передачи энергии, в частности конвективной теплопередачей, то из уравнения энергии следует хорошо известное уравнение теплопроводности

$$\frac{dT}{dt} = a^2 \frac{d^2T}{dx^2}, \quad (\text{П.12})$$

записанное нами для простоты для одномерного случая при постоянном коэффициенте температуропроводности  $a$ . Фундаментальное решение этого уравнения с точностью до размерной постоянной,

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right), \quad (\text{П.13})$$

представляет температуру в точке  $x$  в момент времени  $t$ , если в начальный момент времени  $t = 0$  в начале координат выделяется некоторое ко-

личество теплоты  $c\rho$ . Естественно, что в силу закона сохранения энергии количество теплоты в одномерном пространстве для последующих моментов времени  $t > 0$  сохраняется:

$$c\rho \int_{-\infty}^{+\infty} T(x,t) dx = \frac{c\rho}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) dx = \frac{c\rho}{2\sqrt{\pi a^2 t}} 2a\sqrt{t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-l^2} dl, \quad (\text{П.14})$$

где  $l = \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ ,  $\rho$  — плотность,  $c$  — теплоемкость,  $a$  — температуропроводность среды. Если принять во внимание, что интеграл Пуассона имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-l^2} dl = \sqrt{\pi}, \quad (\text{П.15})$$

то из (П.14) следует

$$c\rho \int_{-\infty}^{+\infty} T dx = c\rho. \quad (\text{П.16})$$

Непосредственной подстановкой легко проверить, что функция (П.13) удовлетворяет уравнению (П.12). Действительно,

$$T_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \left[ -\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{x^2}{4a^2 t^2 \sqrt{t}} \right] \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right), \quad (\text{П.17})$$

$$T_x = -\frac{x}{4a^3 \sqrt{\pi t^{3/2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right), \quad (\text{П.18})$$

$$T_{xx} = -\frac{1}{t^{3/2} 4\sqrt{\pi a^3}} \left[ -1 + \frac{2x^2}{4a^2 t} \right] \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right). \quad (\text{П.19})$$

Подставляя (П.17), (П.19) в (П.12), находим, что уравнение теплопроводности (П.12) удовлетворяется тождественно. Если ввести аргумент функции  $T$  как  $\Theta = a^2 t$ , имеющий размерность квадрата координаты, то

$$T = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\Theta}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\Theta}\right). \quad (\text{П.20})$$

С физической точки зрения соотношение (П.20), отражающее распределение температуры, не является удовлетворительным. При малых  $\Theta$  температура в точке  $x = 0$ , где выделяется теплота, неограниченно велика; действительно,

$$T_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\Theta}}. \quad (\text{П.21})$$

С другой стороны, из (П.20) следует, что в любой сколь угодно удаленной точке  $x$  температура, созданная мгновенным точечным источником теплоты, будет отлична от нуля для сколь угодно малых моментов времени. Это отличие может быть малым, но принципиально важно, что оно имеет конечную величину. Это значит, что имеет место бесконечно быстрое распространение тепла, что абсурдно с молекулярно-кинетической точки зрения. Обычно в курсах математической физики этот результат объясняют как следствие феноменологического вывода уравнения теплопроводности, при котором пренебрегается молекулярно-кинетическим механизмом распространением теплоты.

Но это как раз и не так, и это понимал Максвелл. Ведь параболическое уравнение (П.12), как уже отмечалось, является следствием уравнения Больцмана. Появляется естественное желание придать уравнению распространения тепла гиперболические свойства, используя следующее феноменологическое представление:

$$\tau_R = \frac{d^2T}{dt^2} + \frac{dT}{dt} = a^2 \frac{d^2T}{dx^2}, \quad (\text{П.22})$$

где  $\tau_R$  трактуется как некоторый релаксационный кинетический параметр, имеющий размерность времени. Уравнение (П.22) уже принадлежит к волновым уравнениям, уравнениям гиперболического типа, и приводит к конечным скоростям распространения термических возмущений.

Мы не будем далее углубляться в теорию телеграфных уравнений, поскольку последующая строгая теория не приводит к телеграфному уравнению. Но понятен соблазн угадать, а затем обосновать уравнение, приводящее к затухающему решению с тепловой волной, распространяющейся с конечной скоростью. Реальные уравнения оказываются гораздо сложнее. Тем не менее сформулированная выше идея Максвелла, имеющая чисто феноменологическое интуитивное обоснование, по-

прежнему многим исследователям кажется привлекательной, и существует цикл работ этого направления, который пополняется и поныне.

Одной из иницилирующих работ указанного направления была статья Б. И. Давыдова [143], которая привела к появлению большого цикла исследований по гиперболическому уравнению теплопроводности. Однако уже в работе 1935 года Б. И. Давыдов указывал, что его метод «на трехмерный случай не обобщается». И далее: «Здесь предположение о том, что все частицы движутся с одинаковой скоростью, из шестимерного фазового пространства выделило бы пятимерное многообразие, так что задача не может быть ограничена координатным пространством». В июне 1958 года в журнале Французской академии «Comptes rendus» появилась статья Пьера Вернота, представленная академиком Густавом Рибо. В статье предлагалось обсуждавшееся выше гиперболизированное уравнение теплопроводности типа (П.22). Уже в июле того же года последовала реакция на статью в виде заметки Карло Каттанео, которая была представлена в том же журнале академиком де Ферье. Из заметки следовало, что гиперболическое уравнение теплопроводности было получено Каттанео еще в 1948 г. [142] и было доложено им в Коллеж де Франс в мае 1957 года, о чем Вернот должен был знать и дать соответствующую ссылку. Вернот попросил представить Ферье другую свою работу [143], в которой Вернот был вынужден перечислить многих своих предшественников, которые так или иначе высказывали подобные идеи.

Для гиперболического уравнения теплопроводности разрабатываются специальные численные схемы, обеспечивающие устойчивый счет высокой точности (см., например, [144]). Укажем также исследования двухтемпературных моделей нелокальной теплопроводности [145] и телеграфного уравнения как возможной парадигмы обобщенной гидродинамики [146]. Эти работы имеют общий принципиальный недостаток, о котором уже упоминалось и который заключается в их феноменологическом интуитивном характере. Отметим, однако, что и квазилинейные параболические уравнения также могут приводить к волновым решениям. Поэтому феноменологическая гиперболизация уравнения теплопроводности без строгого кинетического обоснования не является оправданной.

Вместе с тем один принципиальный вывод следует с непреложностью: попытка «исправить» уравнение теплопроводности неизбежно ведет к новой гидродинамической теории, которая, в свою очередь, обязана

быть следствием кинетического уравнения, отличного от уравнения Больцмана.

Многие вопросы, возникавшие у оппонентов Больцмана, были связаны не только с очевидной сложностью теории, но и с отсутствием целостного систематического изложения разработанной физической кинетики. Друзья Больцмана, к которым принадлежал Максвелл, настоятельно рекомендовали ему написать учебник по теории газов. Больцман вспоминает, что особенную настойчивость проявлял профессор Вроблевский. В 1873 году во время Всемирной выставки в Вене у них состоялся памятный разговор об учебнике. Больцман (тогда еще совсем молодой (29-летний) человек) сказал, что у него совсем плохо с глазами и вряд ли он сможет написать книгу. Замечателен ответ Вроблевского: «Ein Grund mehr sich zu beeilen» («Одной причиной больше, чтобы поторопиться»). Этот двухтомный учебник «Лекции по теории газов» появился в свет лишь в 1895 году [141]. Эпиграф книги звучал так: «Alles Vergangliche ist nur ein Gleichniss!» («Всё прошедшее лишь только предание»). С тех пор учебник выдержал много переизданий и до сих пор является одной из лучших книг по кинетической теории. С удивительной проницательностью Больцман предугадал многие направления развития кинетической теории, в частности кинетической теории реагирующих газов [141], получившей свое развитие лишь в недавние годы [147].

Физика вообще и физическая кинетика в частности многое выиграли в результате сотрудничества Максвелла и Больцмана. Максвелл высоко ценил больцмановскую физическую кинетику. Равновесное распределение скоростей молекул газа, полученное Максвеллом в рамках первого доказательства в 1859 году [148], наиболее естественным образом следовало из УБ. Больцман, в свою очередь, немало сделал для пропаганды и развития электродинамики Максвелла не только в теоретическом, но и экспериментальном плане.

После смерти Максвелла от рака 5 ноября 1879 года Больцману на склоне лет было уже трудно выдерживать тяжелые дискуссии, в которые он был вовлечен, возражать не всегда добросовестным оппонентам. На некоторые принципиальные вопросы так и не нашлось удовлетворительного ответа. В совсем вольном переводе многозначный эпиграф книги Больцмана («Alles Vergangliche ist nur ein Gleichniss!») может звучать и так: «Никогда не жалеете о прошлом!», всё прошедшее уже не вер-

нешь. Но Больцман уже исчерпал свои душевные силы. Все это привело к трагедии; 5 сентября 1906 года Людвиг Больцман повесился в гостиничном номере на шнуре от оконной шторы, пока жена и дочь были на пляже. Это произошло в бывшей австрийской провинции Истрия, в местечке Дунио близ Аббацци, где обычно он отдыхал с семьей. Последнее место упокоения Больцмана — небольшой городок Аббацци (1192 жителя, по данным на 1890 год) — расположено у подножия горы Маджиоре (1396 м). В те годы Аббацци в составе провинции Истрия принадлежала Австрии и была излюбленным местом отдыха австрийской интеллигенции, в том числе семьи Больцмана.

Уравнение Больцмана, несомненно, принадлежит к числу фундаментальных уравнений физики, приложения или частные случаи этого уравнения ведут в акустику, газовую динамику, физику плазмы и даже физику твердого тела и космологию. Достижения этих наук — это (прямо или косвенно) успехи и больцмановской кинетической теории (БКТ), поражения и неудачи зачастую связаны с недостатками БКТ. По сути, БКТ прошла путь, характерный для революционной физической теории: после периода острой критики, дискуссий, в которых стороны исчерпали свои аргументы, наступил период признания, а затем, до известной степени, — канонизации теории. Уравнение Больцмана известно более 140 лет, и, несмотря на известные трудности ставшей уже классической теории, до недавних лет реальной альтернативы УБ, как основы физической кинетики, не было.

Слабым местом классической больцмановской кинетической теории является трактовка динамических свойств взаимодействующих частиц. С одной стороны, как следует из так называемого физического вывода УБ [141], больцмановские частицы рассматриваются как материальные точки; с другой стороны, интеграл столкновений в УБ приводит к появлению сечения столкновений. Строгий подход к выводу кинетического уравнения относительно одночастичной функции распределения  $f_1$  ( $KU_{f_1}$ ) основан на использовании иерархии уравнений Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГИ). Уравнение Больцмана (УБ) описывает изменение функции распределения  $f_1$  на временах порядка среднего времени между столкновениями и газодинамического времени течения. Если  $KU_{f_1}$  выводится с помощью метода многих масштабов, то

$KU_{f_1}$  превращается в УБ, если не учитывается изменение функции распределения (ФР) на временах порядка времени столкновения (или, что то же самое, на длинах порядка радиуса взаимодействия частиц). Важно отметить [30–33], что учет этого третьего из упомянутых масштабов приводит к любым аппроксимациям, направленным на расщепление цепочки Боголюбова, к появлению дополнительных и, вообще говоря, однопорядковых членов в УБ. Если  $KU_{f_1}$  выводится из ББККИ методом корреляционных функций, то переход к УБ означает отказ от учета эффекта нелокальности и запаздывания.

Указанные трудности Больцмановской кинетической теории (БКТ) приводят к необходимости ответа на следующие связанные между собой вопросы: 1) что такое физически бесконечно малый объем и каким образом его введение (и, как следствие, неизбежное сглаживание ФР) отражается на кинетическом уравнении? 2) К каким изменениям уравнения Больцмана приводит последовательный учет собственного диаметра частиц при выводе  $KU_{f_1}$ ? Соответствующее уравнение  $KU_{f_1}$  в развиваемой нами теории будем называть обобщенным уравнением Больцмана (ОУБ). В литературе это уравнение обычно называют уравнением Алексева. По понятным причинам автору неудобно использовать этот термин. Поэтому для обобщенного кинетического уравнения сохраняется название ОУБ. Для уравнений единой теории диссипативных структур (ЕТДС), имеющих гидродинамическую форму, применяем термин «фундаментальные уравнения» (ФУ).

В данном разделе мы изложим, используя по возможности простые качественные представления, суть физического обобщения УБ.

Уравнение Больцмана играет роль фундаментального уравнения в теории процессов переноса (ТПП). Поэтому введение альтернативного  $KU_{f_1}$ , вообще говоря, приводит к перестройке всей теории процессов переноса, включая ее макроскопические (например, гидродинамические) аспекты. И наоборот, изменение макроскопического описания неизбежно отражается на кинетическом уровне описания. В силу трудности проблемы такая взаимосвязь прослеживается не всегда при решении конкретных задач ТПП. Следует подчеркнуть, что речь идет не об изменениях классических уравнений физической кинетики и гидродинамики, связанных с учетом некоторых дополнительных механизмов переноса



(например, в реагирующих средах), а о ситуации, когда, по мнению исследователей, адекватное эксперименту исправление теории лежит за рамками классического описания. Альтернативные ТПП условно можно разделить следующим образом: 1) ТПП, связанные с изменением макроэкономического (гидродинамического) описания без учета возможных изменений кинетического описания; 2) ТПП, приводящие к изменению кинетического описания на уровне  $KU_{fi}$ , не согласованному со структурой всей цепочки уравнений БГКИ; 3) кинетические и гидродинамические альтернативные теории процессов переноса, согласованные с иерархией БГКИ.

К работам первого направления относятся уже обсуждавшиеся исследования по гиперболическому уравнению теплопроводности. К серьезным трудностям привел вопрос о существовании и единственности решений уравнений Навье – Стокса. В работах О. А. Ладыженской [149] было показано, что для трехмерных течений задача однозначно разрешима при гладких начальных условиях только на конечном интервале времени. Ладыженская даже ввела поправку в уравнения Навье – Стокса, с тем чтобы его однозначная разрешимость была доказана. Оказалось, что в этом случае приходится допустить зависимость коэффициента вязкости от поперечных градиентов скорости потока. Однако при этом изменяется не только исходный смысл введения кинетических коэффициентов, но и само кинетическое уравнение.

Итак, возникает проблема адекватного описания диссипативных статистических систем и корректности уравнения Больцмана. Здесь мы проведем исследование на качественном уровне, не прибегая к сложному математическому аппарату. Цель — показать, в чем же заключается последующее обобщение больцмановской кинетической теории.

В физической кинетике рассматриваются процессы переноса в открытых диссипативных системах. Поэтому кинетическое статистическое описание неизбежно связано с диагностикой системы. Таким элементом диагностики при теоретическом описании в физической кинетике является понятие физически бесконечно малого объема (ФМО). Связь теоретического описания с диагностикой системы общеизвестна в физике. Достаточно вспомнить роль пробного заряда в электростатике или пробного контура в физике магнитных явлений.

Традиционное определение ФМО содержит утверждение, что ФМО  $V_M$  содержит достаточное число частиц для введения статистического описания, но вместе с тем ФМО много меньше объема  $V$  рассматриваемой физической системы, что обеспечивает локальный подход при исследовании процессов переноса. Именно поэтому в классической гидродинамике предполагается, что сначала устанавливается локальное термодинамическое равновесие (ЛТР) в пределах ФМО и лишь затем наступает переход к глобальному термодинамическому равновесию, если оно вообще возможно для изучаемой системы. Тем самым неявно предполагается, что роль приграничных частиц в открытой термодинамической системе, каковой является ФМО, ничтожна. Зачастую приходится сталкиваться с убеждением, что возможные поправки, связанные с граничными эффектами, порядка диаметра частицы и уточнение концепции ФМО, например в теории разреженных газов, не может приводить к эффектам, имеющим практическое значение. Покажем, что подобная трактовка классического определения ФМО ошибочна.

Рассмотрим эту трактовку подробнее, поставив вопрос, как иногда говорят в физической кинетике, «о размере точки». Пусть частица конечного диаметра характеризуется по-прежнему положением  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  ее центра масс, движущегося со скоростью  $\mathbf{v}$ . Рассматриваем два соседних физически бесконечно малых объема  $V_{m,1}$  и  $V_{m,2}$  в неравновесной системе. Объему  $V_{m,1}$  отвечает одночастичная функция распределения (ФР)  $f_{m,1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  а объему  $V_{m,2}$ , соответственно,  $f_{m,2}$ . В первом приближении можно считать, что  $f_{m,1}$  не изменяется в пределах  $V_{m,1}$ , так же как  $f_{m,2}$  не изменяется в пределах соседнего объема  $V_{m,2}$ . Именно это предположение и содержится неявно в теории Больцмана.

Однако предположение является слишком грубым. Действительно, частица на границе двух объемов, испытавшая последнее столкновение в  $V_{m,1}$  и направляющаяся в сторону  $V_{m,2}$ , вносит информацию о ФР  $f_{m,1}$  в соседний объем  $f_{m,2}$ . Аналогично: частица на границе двух объемов, испытавшая последнее столкновение в  $V_{m,2}$  и направляющаяся в сторону  $V_{m,1}$ , вносит информацию о ФР  $f_{m,2}$  в соседний объем  $V_{m,1}$ . Даже точечные частицы (начавшие движение после последнего столкновения

вблизи прозрачной границы между упомянутыми объемами) могут изменить функцию распределения в соседнем объеме. Релаксация по поступательным степеням свободы динамических характеристик частицы в соседнем объеме требует нескольких столкновений даже в простейшем случае релаксации частиц одинаковой массы.

В частности, тот факт, что центр масс некоторой частицы, находящейся вблизи границы ФМО<sub>1</sub>, находится в ФМО<sub>1</sub>, не означает, что вся частица находится в этом объеме. Тогда возможна ситуация, когда в некоторый момент времени  $t$  частица располагается на границе раздела двух объемов. При этом возможен эффект опережения (скажем, для  $V_{m,2}$ ), когда центр масс частицы, направляющейся в соседний объем  $V_{m,2}$ , еще находится в  $V_{m,1}$ . Но имеет место и эффект запаздывания, когда центр масс частицы, направляющейся в соседний объем (скажем,  $V_{m,2}$ ), уже находится в  $V_{m,2}$ , но часть частицы еще принадлежит  $V_{m,1}$ . В поверхностном слое соседних ФМО всегда будут находиться частицы конечного диаметра, принадлежащие и первому, и второму физически малым объемам.

В результате на границах ФМО появляются кнудсеновские слои. Этот факт неизбежно приводит к флуктуациям массы и других гидродинамических величин в ФМО. Существование подобных кнудсеновских слоев не связано с выбором пространственной сетки и целиком обусловлено редуцированным описанием ансамбля частиц конечного диаметра. По сути — использованием концепции ФМО, или, что то же самое, выбором метода измерения гидродинамических величин. Этот комплекс динамических процессов определяет существование нелокальных эффектов во времени и пространстве.

Характерный размер кнудсеновских слоев — порядка длины пробега. Следовательно, в ФР в ФМО должна быть введена поправка, пропорциональная среднему времени *между* столкновениями и субстанциональной производной от измеряемой ФР.

Нелокальные эффекты могут быть продемонстрированы с помощью анимации движения частиц — твердых сфер в нейтральном газе. Пусть в некотором объеме содержится однокомпонентный разреженный газ, в котором в основном происходят парные столкновения. С помощью пространственной сетки разобьем неравновесную физическую систему

на открытые подсистемы — набор физически бесконечно малых объемов. Выделим один из этих малых объемов. Для наблюдения эволюции частиц в выделенном объеме и соседних малых объемах окрасим частицы и проследим за их движением. В выделенном объеме частицы окрашены в синий цвет; их достаточно много, для того чтобы говорить о возможности локального статистического описания на уровне одночастичной функции распределения (ФР)  $f$ . В соседних прилегающих малых объемах частицы окрашены в другие цвета, отвечающие другим функциям распределения, отличным от  $f$ . Частицы соседних объемов являются носителями информации о других ФР и, проникнув в «синий» объем, подстраиваются под «синюю» ФР (если речь идет о релаксации по поступательным степеням свободы) после нескольких столкновений. Пусть для простоты процесс релаксации требует лишь одного столкновения.

Иначе говоря, частица, проникая в «синий» объем, меняет свой цвет на синий после первого же столкновения с «синей» частицей.

Воочию можно наблюдать, как в выделенном физически бесконечно малом объеме («синем» объеме) появляется приграничная «разноцветная» область, характерный размер которой порядка *средней длины пробега*. Ясно, что этот приграничный эффект будет существовать всегда при избранном методе диагностики, независимо от способа разбиения системы набором физически бесконечно малых открытых подсистем.

Этот факт и отражает существование нелокальных эффектов, пропорциональных средней длине пробега, числу Кнудсена или среднему времени  $\tau$  между столкновениями частиц. Уравнение Больцмана (УБ) (П.1) полностью игнорирует нелокальные эффекты и содержит только локальный интеграл столкновений  $J^B$ . Но указанные нелокальные эффекты несущественны только в равновесных системах, где кинетический подход переходит в методы статистической механики. Отсюда и происходят трудности классической больцмановской физической кинетики.

Слабым местом классической больцмановской кинетической теории является и трактовка динамических свойств взаимодействующих частиц. С одной стороны, как следует из так называемого физического вывода УБ, больцмановские частицы рассматриваются как материальные точки; с другой стороны, интеграл столкновений в УБ приводит к появлению сечений столкновений.

Строгий подход к выводу кинетического уравнения относительно одночастичной ФР  $f(KU_f)$  основан на использовании иерархии уравнений Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ) [140]. Классическое уравнение Больцмана справедливо на двух масштабах, связанных, например, с гидродинамическим временем и средним временем между столкновениями частиц. Полученное уравнение  $KU_f$  превращается в УБ, если не учитывается изменение ФР на временах порядка времени столкновения (или, что то же самое, на длинах порядка радиуса взаимодействия частиц). Важно отметить, что учет этого третьего из упомянутых масштабов приводит к введению любых аппроксимаций, направленных на расщепление цепочки Боголюбова, к появлению дополнительных и, вообще говоря, однопорядковых членов в УБ [150].

Если  $KU_f$  выводится из ББГКИ методом корреляционных функций, то переход к УБ означает отказ от учета нелокальных эффектов. Структура  $KU_f$ , вообще говоря, выглядит следующим образом:

$$Df / Dt = J^B + J^{nl}, \quad (\text{П.23})$$

где  $J^{nl}$  — нелокальный интегральный член.

*Поскольку нелокальные эффекты пропорциональны числу Кнудсена, то появляется возможность описания нелокальных эффектов в рамках двухмасштабной аппроксимации.*

По сути, в обобщенной больцмановской физической кинетике предлагается локальная аппроксимация для второго интеграла столкновений [150]:

$$J^{nl} = \frac{D}{Dt} \left( \tau \frac{Df}{Dt} \right), \quad (\text{П.24})$$

где  $\tau$  есть среднее время между столкновениями частиц. Можно провести аналогию с аппроксимацией Бхатнагара – Гросса – Крука (БКГ) для  $J^B$ :

$$J^B = \left( f^{(0)} - f \right) / \tau, \quad (\text{П.25})$$

популярность которой для больцмановского интеграла столкновений объясняется тем колоссальным упрощением, которое достигается при ее использовании. Порядок величины отношения второго и первого членов правой части (П.23) имеет вид

$$J^{nl} / J^B \approx O(Kn^2), \quad (\text{П.26})$$

и при больших числах Кнудсена эти члены становятся однопорядковыми. Казалось бы, при малых числах Кнудсена, отвечающих гидродинамическому описанию, вкладом второго члена правой части (П.23) можно пренебречь. *Однако это не так.*

При переходе к гидродинамическому приближению (после умножения кинетического уравнения на инварианты столкновений и последующего интегрирования по скоростям) больцмановская интегральная часть обращается в нуль, а второй член правой части (П.23) после указанного интегрирования *не обращается в нуль* и дает однопорядковый вклад при обобщенном навье-стоксовском описании. С математической точки зрения пренебрежение членом, содержащим малый параметр при старшей производной, недопустимо. С физической точки зрения возникающие дополнительные члены, пропорциональные вязкости, соответствуют колмогоровской мелкомасштабной турбулентности. Итак, оказывается, что интегральный член  $J^{nl}$  становится существенным в теории процессов переноса и при малых, и при больших числах Кнудсена.

*Этот факт определяет революционную ситуацию в теории процессов переноса, поскольку дополнительные члены, введенные в уравнение Больцмана, не могут быть опущены даже в предельных случаях теории.*

Тем самым уравнение Больцмана даже не соответствует классу минимальных моделей физики, являясь лишь правдоподобной моделью. Правдоподобные модели могут приводить к приемлемым результатам (зачастую после корректировки с помощью экспериментальных данных), но могут давать и провальные результаты (например, в теории турбулентности, теории темной материи).

Отметим трактовку ОУБ с позиции теории флуктуаций:

$$Df^a/Dt = J^B(f), \quad (\text{П.27})$$

$$f^a = f - \tau Df/Dt. \quad (\text{П.28})$$

Уравнения (П.27), (П.28) имеют правильный свободномолекулярный предел. Таким образом,  $\tau Df/Dt$  есть флуктуация функции распределения, а запись в форме (П.27) без учета (П.28) делает УБ незамкнутым. С точки зрения теории флуктуаций Больцман использовал простейшую процедуру замыкания:

$$f^a = f. \quad (\text{П.29})$$

Итак, кинетическая теория с учетом нелокальных эффектов принципиально ведет к флуктуационным эффектам, пропорциональным среднему времени между столкновениями. Этот факт имеет общетеоретическое значение и не связан с конкретной аппроксимацией (П.24). Флуктуационные эффекты имеют место в любой открытой системе, ограниченной прозрачной для частиц контрольной поверхностью. Отметим, что ОУБ позволяет включить в рассмотрение и высшие производные от ФР [150].

Важным методическим вопросом является взаимосвязь ОУБ с классическими законами сохранения. Макроскопический вывод законов сохранения в механике сплошной среды основан на введении контрольного объема, окруженного бесконечно тонкой поверхностью. Материальные точки (частицы газа) могут при их движении располагаться либо внутри контрольного объема, либо снаружи, что и приводит при записи баланса массы, потоков импульса и энергии к классическим уравнениям неразрывности, движения и энергии. В частности, к уравнению неразрывности в форме

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0)^a = 0, \quad (\text{П.30})$$

где  $\rho^a$  — плотность газа,  $\mathbf{v}_0^a$  — гидродинамическая скорость движения потока,  $(\rho \mathbf{v}_0)^a$  — плотность потока импульса без учета флуктуаций. Таким образом, бoльцмановские частицы полностью упакованы в контрольный объем. Казалось бы, в механике сплошной среды можно было бы вообще отказаться от принципа дискретности материи, рассматривая среду как сплошную в буквальном смысле этого термина. Такой подход, конечно, возможен, и в гидродинамике он приводит к уравнениям Эйлера. Но если мы собираемся учесть эффекты вязкости и теплопроводности, то положение радикально меняется. Как известно, динамическая вязкость пропорциональна среднему времени  $\tau$  между столкновениями частиц и сплошная среда в эйлеровской модели при  $\tau = 0$  означает отсутствие вязкости и теплопроводности. Появление частиц с конечным радиусом в контрольном контуре приводит к новым эффектам.

Важно отметить два обстоятельства. Первое: флуктуации будут пропорциональны среднему времени между столкновениями (а не вре-

мени столкновения). В результате в гидродинамических уравнениях появятся в явном виде флуктуации, пропорциональные  $\tau$ . Например, уравнение неразрывности видоизменяется и будет содержать члены, пропорциональные вязкости [150]. Если же контрольный объем занимает всю полость (и это второе из упомянутых обстоятельств), то должны выполняться классические законы сохранения, что и доказано в [150]. Однако здесь мы постараемся угадать структуру обобщенного уравнения неразрывности исходя из изложенных выше соображений.

Уравнение неразрывности должно иметь классическую форму (В.47), при этом

$$\begin{aligned}\rho^a &= \rho - \tau A, \\ (\rho \mathbf{v}_0)^a &= \rho \mathbf{v}_0 - \tau \mathbf{B}.\end{aligned}\tag{П.31}$$

Строго говоря, множители  $A$  и  $B$  могут быть получены из обобщенного кинетического уравнения, в нашем случае — из ОУБ. Тем не менее вид множителей  $A$  и  $B$  может быть угадан и без обращения к  $KV_A$ . Действительно, запишем обобщенное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho - \tau A) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\rho \mathbf{v}_0 - \tau \mathbf{B}) = 0,\tag{П.32}$$

в безразмерном виде, используя в качестве масштаба длины  $l$  расстояние от пробного контура до твердой стенки (см. рис. П.1).

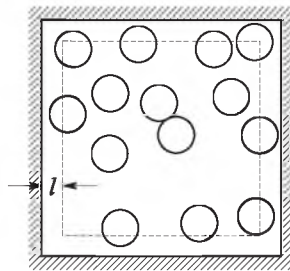


Рис. П.1. Замкнутая полость и контрольный контур, содержащий частицы конечного диаметра

Тогда вместо  $\tau$  в качестве коэффициентов при (уже безразмерных)  $A$  и  $B$  появится множитель — число Кнудсена  $Kn_l = \lambda/l$ . При  $l \rightarrow 0$



$Kl_l \rightarrow \infty$ , контур занимает всю полость, ограниченную твердыми стенками, а флуктуации на стенке исчезают. Иначе говоря, на стенке должны выполняться классические уравнения неразрывности и движения. Используя гидродинамическую терминологию, отмечаем, что условия

$$A = 0, \quad \mathbf{B} = 0 \quad (\text{П.33})$$

соответствуют ламинарному подслою в турбулентном течении. Если теперь использовать локально максвелловское распределение, то обобщенное уравнение неразрывности в приближении Эйлера записывается так:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho - \tau \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0) \right] \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \rho \mathbf{v}_0 - \tau \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0) + \bar{I} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} - \rho \mathbf{a} \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{П.34})$$

где  $\bar{I}$  — единичный тензор. В гидродинамическом приближении среднее время между столкновениями  $\tau$  связано с вязкостью  $\mu$ ,  $\tau \rho = \Pi \mu$ , где множитель  $\Pi$  определяется моделью столкновения частиц, для нейтрального газа твердых сфер  $\Pi \approx 0,8$  [151]. Угадать подобным образом обобщенные уравнения движения и энергии уже гораздо труднее и без ОУБ уже не обойтись. Для локального максвелловского распределения возможна запись

$$(\rho - \rho^a) / \tau = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0), \quad (\text{П.35})$$

$$(\rho \mathbf{v}_0 - (\rho \mathbf{v}_0)^a) / \tau = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0) + \bar{I} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} - \rho \mathbf{a}, \quad (\text{П.36})$$

где, как и выше,  $\bar{I}$  — единичный тензор,  $\mathbf{a}$  — ускорение, обусловленное действием массовых сил. Отсутствие флуктуаций гидродинамических величин на твердой поверхности является источником дополнительных граничных условий для ОГУ.

Структура записи уравнений (П.35), (П.36) весьма примечательна. Она может быть распространена на остальные обобщенные гидродинамические уравнения и напоминает уравнения двухжидкостной модели в теории сверхтекучести.

Известные уравнения Навье – Стокса приводят к весьма сложным проблемам существования и единственности решений. О. А. Ладыженской установлено, что даже при мягких начальных условиях для трехмерных течений единственное решение существует только на конечном временном интервале. Более того, как упоминалось, Ладыженская даже предложила ввести в уравнения Навье – Стокса дополнительные члены с целью устранения этого недостатка классических гидродинамических уравнений. Обобщенные гидродинамические уравнения содержат вторые производные по времени и перекрестные производные «время – координаты» и лишены упомянутого недостатка.

Переход к классическим гидродинамическим уравнениям вблизи твердой поверхности соответствует ламинарному подслою в турбулентном течении, а флуктуации гидродинамических величин — колмогоровским мелкомасштабным флуктуациям, которые табулируются из первых принципов физики [150].

Это означает, что создана строгая теория турбулентности, не требующая привлечения эмпирических моделей для расчета турбулентных течений.

С точки зрения теории флуктуаций появление флуктуационных членов в ОУБ (и, в виде следствия, в ОГУ) обусловлено введением контрольного объема как элемента измерения в системе частиц конечного диаметра при сохранении ФР в виде, используемом для описания точечных бесструктурных частиц. Остается лишь отметить, что перечисленные эффекты всегда будут иметь место в кинетической теории при редуцированном одночастичном описании, в том числе в жидкости, электродинамике и теории гравитации сплошных сред, в плазме, где введение самосогласованных сил и обрезания радиуса их действия приводит к расширению возможностей ОУБ. В частности, в систему уравнений Максвелла должны быть введены флуктуации плотности заряда и плотности тока [150].

Отметим, что реализация указанных принципов приводит и к модификации уравнений Максвелла. Ее традиционная формулировка не содержит уравнения неразрывности, однако получена с явным использованием уравнения

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{j}^a = 0, \quad (\text{П.37})$$

где  $\rho^a$  — заряд единицы объема,  $\mathbf{j}^a$  — плотность тока, вычисленные без учета флуктуаций. В результате система уравнений Максвелла, записанная в стандартных обозначениях (здесь  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$  — вектор магнитной индукции и вектор электрического смещения),

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{B} = 0; \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{D} = \rho^a; \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{H} = \mathbf{j}^a + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{П.38})$$

содержит  $\rho^a = \rho - \rho^{fl}$ ,  $\mathbf{j}^a = \mathbf{j} - \mathbf{j}^{fl}$ . Флуктуации  $\rho^{fl}$ ,  $\mathbf{j}^{fl}$ , вычисленные в рамках ОУБ, содержатся, например, в [150]. Обратимся теперь к подходам, связанным с возможным изменением  $KV_{f_1}$ , как правило не согласованным с иерархией ББГКИ. Неоднократно отмечалось, что использование различных функций распределения заряженных частиц может иметь катастрофическое влияние на макропараметры слабоионизированного газа. Приведем примеры такого влияния.

Как известно, первые исследования температурной зависимости числовой плотности атомов, ионизированных в различной степени, в плазме были проведены Саха [152] и Эггертом. Полученное ими уравнение для состояния термодинамического равновесия имеет вид

$$\frac{n_{j+1}n_e}{n_j} = \frac{s_{j+1}}{s_j} \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\epsilon_j}{k_B T}\right), \quad (\text{П.39})$$

где  $n_j$  — число  $j$ -кратно ионизированных атомов и  $n_e$  — число свободных электронов на кубический сантиметр,  $m_e$  — масса электрона,  $k_B$  и  $h$  — константы Больцмана и Планка соответственно,  $s_j$  — сумма состояний для  $j$ -кратно ионизированного атома,  $\epsilon_j$  — потенциал  $j$ -кратной ионизации. Уравнение Саха (П.39) выведено для случая максвелловского распределения и неизбежно должно быть модифицировано, если в плазме существует другое распределение частиц по скоростям. Этот вопрос был изучен в [153]. В качестве примера в [153] рассматривается сравнение величин  $\frac{n_{j+1}n_e}{n_j}$ , вычисленных по максвелловской функции распределения и по функции распределения Дрювестейна, когда средняя энергия распределения Дрювестейна равна средней энергии максвелловского

распределения. Пусть  $T = 10^4 \text{ К}$ ,  $n_e = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ,  $\epsilon_j = 10 \text{ эВ}$ , зарядовое число

$Z = 1$ ,  $\frac{s_{j+1}}{s_j} = 1$ . Тогда  $\frac{n_{j+1} n_e}{n_j} = 6 \cdot 10^2$  (расчет с использованием распреде-

ления Дрювестейна),  $\frac{n_{j+1} n_e}{n_j} = 4.53 \cdot 10^{16}$  (расчет с использованием рас-

пределения Максвелла, формула Саха). Как пишет Э. М. Дивэн [153], «различие на четырнадцать порядков, полученное выше, очевидно, обусловлено тем, что в отличие от максвелловского распределения у распределения Дрювестейна нет “хвоста”».

К необходимости использования самосогласованных с кинетическими уравнениями сечений столкновений приводит и известная теория Энского умеренно плотных газов. Энског предпринял попытку описания свойств умеренно плотных газов, выделив нелокальную часть из локального (!) по сути интеграла столкновений Больцмана. Полученные коэффициенты переноса при использовании модели твердых сфер приводили к неверной температурной зависимости кинетических коэффициентов. Для исправления ситуации была введена модель мягких сфер, позволившая подогнать расчетные данные к экспериментальным значениям.

В теории так называемых кинетически согласованных разностных схем [155] используется разложение ФР во временной ряд, отвечающий неполному второму приближению при физическом выводе уравнения Больцмана [150]. Таким образом, полученные разностные схемы содержат лишь специально выбранную искусственную схемную вязкость. В ряде работ, следуя идеям Давыдова, предлагается дополнить кинетические уравнения членом  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$  для описания быстрых процессов.

А. С. Бакай и Ю. С. Сигов обсуждают возможность использования подобного члена в уравнении, описывающем флуктуации ФР в турбулентной плазме. При этом в уравнение вводится параметр упорядочения, меняющий тип уравнения. Для описания пространственной нелокальности предлагается дополнить кинетическое уравнение членом  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$  и производными более высокого порядка, включая перекрестные производные «время–координаты», что, возможно, обеспечит описание негауссовых

случайных источников в уравнениях Ланжевена. Интересно отметить, что ОУБ позволяет включить в рассмотрение и высшие производные от ФР [150].

Очевидно, подходы к модификации  $KU_{f_1}$  и должны базироваться на некоторых принципах, которые мы кратко сформулируем. Наиболее последовательным является третий из указанных подходов, когда явно прослеживается связь альтернативных  $KU_{f_1}$  с иерархией ББГКИ. Обобщенное  $KU_{f_1}$  должно удовлетворять некоторым общим требованиям.

1) Поскольку искусственное расщепление иерархии ББГКИ неизбежно при переходе к одночастичному описанию, вывод обобщенного  $KU_{f_1}$  должен прослеживаться в рамках известных методов в теории кинетических уравнений: в рамках метода многих масштабов, метода корреляционных функций, итеративных методов и т. д., а также их комбинаций. Каждый из этих подходов высвечивает свои особенности альтернативного  $KU_{f_1}$ .

2) Должна существовать явная связь  $KU_{f_1}$  с трактовкой физически бесконечно малого объема, а следовательно, с флуктуациями моментов в контрольном контуре с прозрачными границами из-за конечного размера частиц.

3) В нерелятивистском случае  $KU_{f_1}$  должно удовлетворять преобразованию Галилея.

4)  $KU_{f_1}$  должно приводить к связи с классической  $H$ -теоремой и ее обобщениями.

5)  $KU_{f_1}$  должно приводить к разумному усложнению теории.

Последнее требование нуждается в дополнительных комментариях. Интегральные столкновительные члены весьма сложны — больцмановский локальный интеграл в частности, а нелокальный интеграл в особенности. Используя образное выражение Ю. Л. Климонтовича, «карикатура» БГК на больцмановский интеграл столкновений оказалась весьма удачной, и эта алгебраическая аппроксимация больцмановского интеграла столкновений широко используется в кинетической теории нейтральных и ионизированных газов. Обобщенное уравнение Больцмана вводит локальную дифференциальную аппроксимацию для нелокаль-

ного интеграла столкновений с запаздыванием. По сути, мы имеем дело с экономической проблемой «цена–качество». Иначе говоря, какую цену мы согласны заплатить в виде усложнения кинетического уравнения за новое качество теории? Ответ на этот вопрос может дать только опыт решения практических задач.

Последовательная теория, отвечающая перечисленным выше требованиям, создана Алексеевым и транскрибируется как теория ОУБ.

А. А. Власов предлагал для описания нелокальных эффектов ввести дополнительные независимые динамические переменные (производные от скорости) в одночастичную функцию распределения [156]. Однако прежде всего в силу требования разумного усложнения теории при решении прикладных задач этот подход нам представляется преждевременным, пока не исчерпаны резервы традиционного описания ФР.

Остается лишь отметить, что перечисленные эффекты всегда будут иметь место в кинетической теории при одночастичном описании, в том числе и в жидкости, и в плазме, где введение самосогласованных сил и соответствующего обрезания радиуса их действия приводит к расширению возможностей ОУБ. В общем случае параметр  $\tau$  есть параметр нелокальности, и в квантовой гидродинамике его величина связана с соотношением неопределенности «время–энергия». В результате на квантовом уровне обобщенные гидродинамические уравнения переходят в уравнения квантовой гидродинамики, а уравнение Шрёдингера оказывается глубоким частным случаем обобщенных гидродинамических уравнений [157].

Как известно, основное уравнение квантовой механики — уравнение Шрёдингера (УШ) — является, по сути, постулатом. УШ угадывается исходя из разумных физических соображений, основные этапы подобного вывода могут быть охарактеризованы следующим образом.

а) Вводится комплексная функция  $\psi(x, t)$  как характеристика физических объектов, обладающих корпускулярными и волновыми свойствами. Простейшая волновая функция представляется в виде

$$\psi = \exp[-i(\omega t - kx)] \quad (\text{П.40})$$

с дополнительными условиями:

$$\omega = E_k/\hbar, \quad k = 2\pi/\lambda = p/\hbar, \quad (\text{П.41})$$

где использованы традиционные обозначения для частоты  $\omega$ , кинетической энергии  $E_k$ , волнового числа  $k$  и импульса  $p$ .

б) В результате последующих дифференцирований (однократного по времени и двукратного по координате) и очевидного обобщения на трехмерный случай (E. Schrodinger, 1926) уравнение записывается в виде

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + U\Psi, \quad (\text{П.42})$$

где  $U(x, y, z, t)$  есть потенциальная энергия системы.

Недостатки уравнения Шрёдингера:

1. Уравнение Шрёдингера есть постулат. Иное дифференцирование функции  $\Psi$  приводит к другим уравнениям, например к уравнениям, содержащим вторую производную по времени.

2. Уравнение Шрёдингера не описывает диссипативные процессы.

3. Уравнение Шрёдингера не в состоянии описать в целом комплекс «ядро – электронная оболочка».

4. Уравнение Шрёдингера не в состоянии описать пространственную электронную оболочку без использования дополнительных предположений, таких как принцип Паули.

5. В значительной мере результат квантования есть результат обрезания бесконечных рядов и превращения их в полиномы. Этот процесс напоминает превращение бегущей волны в систему стоячих волн, если вводится отражение от препятствия.

Следующий очевидный шаг был сделан Э. Маделунгом [158, 159] в 1926 году: вывод специальной формы уравнения Шрёдингера после представления волновой функции  $\Psi$  в виде

$$\Psi(x, y, z, t) = \alpha(x, y, z, t) e^{i\Phi(x, y, z, t)}. \quad (\text{П.43})$$

После использования (П.43) и разделения действительной и мнимой частей Маделунг получил два гидродинамических уравнения: уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{П.44})$$

и уравнение движения Эйлера для потенциального течения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = -\frac{1}{m} \frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{r}}, \quad (\text{П.45})$$

где эффективный потенциал имеет вид

$$U^* = U + U_{qu} = U - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{\rho}} \Delta \sqrt{\rho} = U - \frac{\hbar^2}{4m\rho} \left[ \Delta \rho - \frac{1}{2\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right]. \quad (\text{П.46})$$

Идентификации

$$\rho = \alpha^2, \quad (\text{П.47})$$

$$v = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\beta \hbar / m) \quad (\text{П.48})$$

введены в уравнения (П.44), (П.45). Существование условия (П.48) означает, что поток имеет потенциал

$$\varphi = \beta \hbar / m. \quad (\text{П.49})$$

Аннотация классической статьи [159] Маделунга содержит только одну гениальную фразу: “It is shown that the Schrödinger equation for one-electron problems can be transformed into the form of hydrodynamic equations” («установлено, что уравнение Шрёдингера для проблемы уединенного электрона может быть трансформировано в систему гидродинамических уравнений»).

*Это означает, что единственный электрон может быть «размазан» в гидродинамику!*

Неудивительно, что обобщенная гидродинамическая теория работает и для больших чисел Кнудсена. УШ трансформируется в гидродинамическую форму без дополнительных предположений. Численные методы гидродинамики хорошо развиты. В результате еще в конце семидесятых годов прошлого века мы реализовали систематические расчеты [15] задач квантовой механики, используя уравнения квантовой гидродинамики. Однако практически гидродинамика Маделунга была забыта. Существовало (ошибочное) мнение, что квантование не может быть введено в гидродинамику Маделунга. Интересно отметить, что в известной книге Давида Боба (“Quantum Theory”, New York, Prentice-Hall, Inc.,



1952), содержащей 728 страниц в русском переводе, имя Маделунга даже не упоминается.

УШ сводится к системе уравнений, состоящей из уравнения неразрывности и частного случая уравнения Шрёдингера с дополнительным квантовым потенциалом  $U_{qu}$ , пропорциональным  $\hbar^2$ . Физический смысл и происхождение квантового потенциала обсуждаются в [157]. УШ получено в рамках классической теории комплексных переменных и не может содержать независимого уравнения энергии в принципе. В результате во многих случаях используется паллиативный подход, когда решение диссипативных проблем квантовой механики находится путем формального введения  $U_{qu}$  в систему классических гидродинамических уравнений. Несмотря на недиссипативную форму уравнений в виде уравнений Эйлера, уравнение Шрёдингера становится обратимым относительно замены направления времени  $t \rightarrow -t$  только после перехода в УШ к комплексно-сопряженным величинам. Иными словами, вывод УШ с использованием волновой функции в виде  $\psi = e^{i(\omega t - kx)}$  приводит к другой системе гидродинамических уравнений:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{П.50})$$

$$-\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = -\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U^*. \quad (\text{П.51})$$

Это означает, что УШ содержит в неявной форме аппроксимацию против направления стрелы времени. Теория необратимых процессов отрицает возможность существования подобных процессов. Однако теорема Пуанкаре–Цермело допускает, в принципе, возвращение системы в первоначальное состояние, если эволюция системы подчиняется динамике Ньютона. Следующий вопрос принципиального значения: можно ли получить уравнение Шрёдингера из *локального* уравнения Лиувилля, а именно из уравнения Лиувилля, записанного относительно одночастичной функции распределения  $f(x, p, t)$ ?

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial x} + F(x) \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad (\text{П.52})$$

где  $F(x) = -\partial U(x)/\partial x$  есть внешняя сила, действующая на частицу массы  $m$ . Ответ на этот вопрос отрицателен. В сущности, уравнение (П.52) есть бесстолкновительное локальное уравнение Больцмана. Установлено, что уравнение Лиувилля может быть трансформировано в УШ только после искусственного введения пространственной нелокальности без введения нелокальности во времени (E. Camovalli Jr., H. M. Franca, B. V. Alexeev [157]).

В заключение могут быть сделаны выводы принципиального значения.

1. Квантовая гидродинамика Маделунга эквивалентна уравнению Шрёдингера и приводит к описанию эволюции квантовой частицы в форме уравнения Шрёдингера и уравнения неразрывности. УШ есть следствие нелокального уравнения Лиувилля в результате локальной пространственной аппроксимации нелокальных уравнений.

2. Обобщенная больцмановская физическая кинетика содержит строгий учет нелокальных эффектов в пространстве и времени и после предельного перехода к локальной аппроксимации приводит к параметру нелокальности  $\tau$ , который на квантовом уровне согласуется с принципом неопределенности Гейзенберга.

3. Обобщенные гидродинамические уравнения (ОГУ) должны содержать УШ как глубокий частный случай.

Программа пункта 3 была реализована в статье [157]. Иными словами, мы сформулировали в явной форме все предположения (все шаги), которые должны быть реализованы для получения УШ из ОГУ. На окончательном этапе для простоты была получена нестационарная 1D-модель Маделунга–Шрёдингера без учета внешних сил. Итак, мы можем констатировать: УШ есть глубокий частный случай обобщенных гидродинамических уравнений. *Это означает, что создана новая квантовая механика диссипативных процессов.* Отметим, что уравнение Шрёдингера и его эквивалентная гидродинамическая форма Маделунга не описывают диссипативные процессы и, следовательно, не могут эффективно использоваться в нанотехнологии. Уравнение Больцмана принципиально не работает на расстояниях порядка радиуса взаимодействия частиц и, следовательно, также не может эффективно использоваться при теоретическом исследовании проблем нанотехнологии даже в рамках «правдоподобных» моделей. ОГУ имеют исключительно важные для астрофизики ча-

стные случаи, когда плотность  $\rho \rightarrow 0$  (начальная стадия эволюции Вселенной, Большой взрыв) и когда плотность  $\rho \rightarrow \infty$  (эволюция черной дыры). Оба предельных случая не имеют ни физического, ни математического смысла в классической гидродинамике. Таким образом, мы имеем единую статистическую теорию диссипативных структур, имеющую гидродинамическую форму. Соответствующую систему уравнений мы будем, как уже упоминалось, именовать как фундаментальные уравнения единой теории (УЕТ). Теперь мы можем воспроизвести структуру теории процессов переноса.



*Для локальных статистических теорий установлено нарушение неравенств Белла и переход к нелокальному описанию неизбежен.*

*Физика двадцать первого века — это нелокальная физика.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Котельников В. А., Котельников М. В., Морозов А. В. Математическое моделирование взаимодействия потока разреженной плазмы с магнитным полем. — М.: Изд-во МАИ, 2015. — 169 с.
2. Котельников В. А., Котельников М. В., Морозов А. В. Компьютерное моделирование струи разреженной плазмы, истекающей из сопла плазменного двигателя // ТВТ. — 2016. — Т. 54, № 3. — С. 323–327.
3. Котельников В. А., Ульданов С. В., Котельников М. В. Процессы переноса в пристеночных слоях плазмы. — М.: Наука, 2004. — 422 с.
4. Котельников В. А., Котельников М. В., Гидаспов В. Ю. Математическое моделирование обтекание тел потоками столкновительной и бесстолкновительной плазмы. — М.: Физматлит, 2010, — 266 с.
5. Котельников В. А., Гурина Т. А., Демков В. П., Повов Г. А. Математическое моделирование электродинамики летательного аппарата в разреженной плазме. — М.: Издательство Академии прикладных наук, 1998. — 255 с.
6. Котельников М. В. Механика и электродинамика пристеночной плазмы // Дисс. ... д. ф.-м. наук. — М.: МАИ, 2008. — 276 с.
7. Котельников В. А. Зондовые измерения в движущейся плазме // Дисс. ... канд. тех. наук. — М.: Изд-во МАИ, 1965. — 113 с.
8. Котельников М. В. Плоские электрические зонды: теория и приложения. — М.: Изд-во МАИ, 2014. — 183 с.
9. Котельников В. А., Котельников М. В. Зондовая диагностика плазменных потоков. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2016. — 440 с.
10. Котельников В. А., Котельников М. В., Филиппов Г. С. Диагностика плазменных потоков с помощью ориентированных зондов. — Lap LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, Germany, 2016. — 360 с.

11. Алексеев Б. В. Нелокальная физика. — Lap LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, Germany, 2011. — 499 с.
12. Котельников В. А., Котельников М. В. Использование формулы Бома и ее аналогов в зондовой диагностике // ТВТ. — 2017. — Т. 55, № 4. — С. 493–497.
13. Иванов Ю. А., Лебедев Ю. А., Полак Л. С. Методы контактной диагностики в неравновесной плазмохимии. — М.: Наука, 1981. — 190 с.
14. Достанко А. П., Грушецкий С. В., Киселевский Л. И. и др. Плазменная металлизация в вакууме. — М.: Наука и техника, 1983. — 279 с.
15. Дементьев В. А., Сдобырев В. В., Пономарев В. А. и др. Плазменное выращивание монокристаллов  $TiB_2$ ,  $ZrB_2$ ,  $NbB_2$  // Высокочистые и монокристаллические материалы. — М.: Наука, 1987. — С. 71–74.
16. Хусаинов Р. Р., Молчанов А. А., Максютин А. В. Результаты применения технологии плазменно-импульсного воздействия на нефтегазовом месторождении Жданице // Геология, география и глобальная энергия. — № 2. — Астрахань: АГУ, 2013. — С. 27–34.
17. Хусаинов Р. Р., Молчанов А. А., Максютин А. В. Оценка продолжительности влияния плазменно-импульсного воздействия на реологические свойства высоковязких нефтей // Записки Горного института. — Т. 195. — СПб.: СПГТУ, 2012. — С. 61–63.
18. Шалимов М. П., Панов В. И. Сварка вчера, сегодня, завтра / Под научной редакцией В. В. Запарий. — Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2006. — 227 с.
19. Маров М. Я., Колесниченко А. В. Введение в планетную аэронавию. — М.: Наука, 1987. — 457 с.
20. Котельников В. А., Котельников М. В., Ким В. П. О зондовых измерениях в следе спутника // ЖТФ, 2009.
21. Crofton M. A Comprehensive Test and Evaluation Program for the UK-10 Ion Engine // Proceedings of the 23<sup>rd</sup> International Electric Propulsion Conference. — Seattle, 1993. — P. 956–963.
22. Kim V., Kozubsky K. N., Murashko V. M., Semenko A. V. History of the Hall Thrusters Development in USSR. Paper IEPC-2007-142 // 30<sup>rd</sup>

- International Electric Propulsion Conference, September 17–20, 2007, Florence, Italy.
23. Абдоханов М. А., Гришин С. Д., Ерофеев В. С. и др. Ионные ускорители с анодным слоем: обзор. — М.: ГОНТИ № 1, 1975. — С. 5–181.
  24. Козубский К. Н., Мурашко В. М., Рылов Ю. П., Трифонов Ю. В., Хонденко В. П., Ким В., Попов Г. А., Обухов В. А. СПД работают в космосе // Физика плазмы. — 2003. — Т. 29, № 3. — С. 277–292.
  25. Райзер Ю. П., Яценко Н. В. и др. Высоочастотный емкостной разряд. — М.: Наука, 1995.
  26. Гайнуллин Р. Н., Кирпичников А. П. Расчет параметров низкотемпературной плазмы высоочастотного индукционного разряда // Вестник Казанского технологического университета. — 2007. — № 3–4. — С. 154–160.
  27. Герасимов А. В., Кирпичников А. П. Высоочастотный индукционный разряд в потоке газа // Теплофизика высоких температур. — 2001. — Т. 39, № 4. — С. 671–674.
  28. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. — М.: Мир, 1978. — 495 с.
  29. Alexeev V. V. Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A394. 417. — 1994.
  30. Алексеев Б. В. Физические принципы обобщенной кинетической теории ионизованных газов // УФН. — 2003. — Т. 173, № 2. — С. 145–174.
  31. Алексеев Б. В. Физические основы обобщенной Больцмановской кинетической теории газов // УФН. — 2000. — Т. 170, № 6. — С. 649–679.
  32. Алексеев Б. В. Нелокальная теория плазмOIDов и шаровых молний. Проблема Тунгусского тела. Версия гибели Гагарина. — Lap LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, Germany, 2017. — 523 с.
  33. Алексеев Б. В. Математическая кинетика реагирующих газов. — М.: Наука, 1982.
  34. Найфе А. Х. Метод возмущений. — М.: Мир, 1976.
  35. Тамм И. Е. Электричество. — М.: Академкнига, 1949. — 420 с.

36. Демков В. П. Математическое моделирование процессов переноса в плазме с учетом поверхностных эффектов // Дисс. ... канд. ф.-м. наук. — М., 1989.
37. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 510 с.
38. Курант Р. Уравнения в частных производных. — М.: Мир, 1964. — 830 с.
39. Арнольд В. Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984. — 272 с.
40. Новиков В. Н. Об одном методе решений самосогласованных кинетических уравнений // Журнал выч. мат. и мат. физики. — 1986. — Т. 2, № 12. — С. 1855–1867.
41. Алексеев Б. В., Новиков В. Н. Эволюция параметров плазмы в приэлектродной области сферического зонда // ТВТ. — 1984. — Т. 22, вып. 4. — С. 814–818.
42. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980. — 280 с.
43. Alexeev B. V., Kotelnikov V. A., Gurina T. A. Distribution function of charged particles in satellite tract. // Proc. Int. Conf. "Plasma physics". — Kiev, 1987. — Vol. 4. — С. 217–219.
44. Котельников В. А., Котельников М. В. Усовершенствованный метод характеристик // Математическое моделирование. — 2017. — Т. 29, № 5. — С. 85–95.
45. Новиков В. Н. Об одном методе решения самосогласованных кинетических уравнений // Вычислительная математика и математическая физика. — 1986. — Т. 26, № 12. — С. 1855–1867.
46. Котельников М. В., Гаранин С. Б. О применимости условия Куранта – Фридрихса – Леви к задачам электродинамики пристеночной плазмы // Вестник МАИ. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 37–40.
47. Давыдов Ю. М. Исследование трансзвуковых и сверхзвуковых течений методом крупных частиц // Исследование современных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1974. — С. 89–181.
48. Давыдов Ю. М. Численный эксперимент в гидродинамике по исследованию срывных вязких потоков методом «крупных частиц» // Нелинейные волны. — М.: Наука, 1979. — С. 227–239.

49. Давыдов Ю. М. Дифференциальные приближения и представления разностных схем. — М.: МФТИ, 1981. — 131 с.
50. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. — М.: Наука, 1982. — 392 с.
51. Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц // Математическая энциклопедия. — Т. 3. — М.: Сов. Энциклопедия, 1985. — С. 125–129.
52. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. — М.: Мир, 1975. — 392 с.
53. Давыдов Ю. М., Скотников В. П. Метод «крупных частиц»: вопросы аппроксимации, схемной вязкости и устойчивости. — М.: ВЦ АН СССР, 1978 — 71 с.
54. Давыдов Ю. М., Скотников В. П. Исследование дробных ячеек в методе «крупных частиц». — М.: ВЦ АН СССР, 1978. — 71 с.
55. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. — М.: Мир, 1987. — 640 с.
56. Котельников М. В., Нгуен С. Т. Оптимизация программного блока в задачах механики и электротехники пристеночной плазмы // Электронный журнал «Труды МАИ». — 2012. — Вып. 50.
57. Котельников М. В., Нгуен С. Т. Методы использования компьютерной графики в вычислительных экспериментах // Электронный журнал «Труды МАИ». — 2012. — Вып. 53.
58. Чан П., Толбот Л., Турян К. И. Электрический зонд в неподвижной и движущейся плазме. Теория и применение. — М.: Мир, 1972. — 202 с.
59. Гинзбург В. А. Теория распространения радиоволн в ионосфере. — М.: Гостехиздат, 1949.
60. Котельников В. А., Котельников М. В., Нгуен Суан Тхау. Программа расчета обтекания цилиндрического тела, помещённого в поток разреженной плазмы // Свидетельство о государственной регистрации программы на ЭВМ № 2011617540. Зарегистрированная в реестре программ для ЭВМ от 17.06.2011.
61. Котельников В. А., Котельников М. В. Программа расчета обтекания плоского пристеночного электрода ленточного типа, помещенного параллельно потоку разреженной плазмы // Свидетельство



- о государственной регистрации программы на ЭВМ № 2014618625. Зарегистрированная в реестре программ для ЭВМ от 26.08.2014.
62. Скоблова А. А. Плоский зонд в разреженной и плотной плазме // *Дипломная работа магистра*. — М.: МАИ, 2017.
  63. Бычков В. А., Гордеев О. А. Сечения электрон-молекулярных столкновений, приводящих к диссоциации молекул, входящих в состав воздуха // *Хим. физика*. — 1992. — Т. 11, № 8. — С. 1064–1074.
  64. Черепнин С. Н. Исследование электрофизических явлений в камерах сгорания реактивных двигателей // *Физика горения и взрыва*. — 1990. — Т. 26, № 2. — С. 58.
  65. Ватажин А. Б., Казаков А. Ф., Лихтер В. А. и др. Исследование электрических характеристик реактивных струй, истекающих из двигателей самолетов // *Тр. ЦИАМ*. — 1974. — Вып. 628. — 4 с.
  66. Линчук В. А., Грибакин В. А., Болдырев А. С. Диагностирование технического состояния жидкостных ракетных двигателей на основе электрофизических измерений // *Мехатроника, автоматизация, управление*. — 2007. — № 11. — С. 17.
  67. Ягодников Д. А., Бобров А. Н., Филимонов Л. А. Экспериментально-теоретическое исследование и разработка электрофизических методов контроля и диагностики ЖРД // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение*. — 2009. — № 3. — С. 67.
  68. Ягодников Д. А., Воронежский А. В., Пушкин Н. М. Исследование электризации сопла жидкостного ракетного двигателя // *Физика горения и взрыва*. — 1995. — Т. 31, № 4. — С. 54.
  69. Егорова З. М., Кашеваров А. В., Фомина Е. М., Цхай Н. С. Об измерении концентрации заряженных частиц цилиндрическим зондом Ленгмюра в плазме пламени // *ТВТ*. — 1988. — Т. 26, № 3. — С. 577–581.
  70. Егорова З. М., Кашеваров А. В., Цхай Н. С. Об ионном токе насыщения на электрические зонды в плазме пламени со щелочной присадкой // *ТВТ*. — 1992. — Т. 30, № 3. — С. 448–456.
  71. Кашеваров А. В. Вольт-амперная характеристика цилиндрического зонда Ленгмюра в плазме с присадкой // *ТВТ*. — 1994. — Т. 32, № 1. — С. 12–15.

72. Кашеваров А. В. О зондовых измерениях в плазме пламени // ТВТ. — 1992. — Т. 30, № 6. — С. 1220–1223.
73. Котельников В. А., Козулицын В. Т. Метод управления параметрами погранслоя с помощью инъекции в него потока отрицательно заряженных ионов. А. с. 4510419/09 от 06.01.89.
74. Семашко Н. Н. и др. Инжектор быстрых атомов водорода. — М.: Энергоатомиздат, 1981. — 168 с.
75. Котельников В. А. и др. Метод управления параметрами погранслоя с помощью импульсного магнитного поля. А. с. 4510420/09 от 08.01.89.
76. Лойцянский Л. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987. — 840 с.
77. Черный Г. Г. Газовая динамика. — М.: Наука, 1988. — 424 с.
78. Демидов В. И., Колоколов Н. Б., Кудрявцев А. А. Зондовые методы исследования низкотемпературной плазмы. — М.: Энергоатомиздат, 1996. — 239 с.
79. Фельдман У., Асбридж Жд., Бейм С., Гослинг Дж. Поток энергии Солнца и его наблюдения / Под ред. О. Уайта. — М.: Мир, 1980. — 337 с.
80. Чан П., Телбот Л., Турян К. Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме. Теория и применение. — М.: Мир, 1978. — 202 с.
81. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1996. — 688 с.
82. Persson K. V. // *Phys. Fluids*. — 1962. — Vol. 5. — P. 1625.
83. Колесниченко А. В., Маров М. Я. Турбулентность многокомпонентных сред. — М.: Наука, 1998. — 336 с.
84. Миллионщиков М. Д. Турбулентное движение в пограничном слое и трубах. — М.: АН СССР. ИАЭ им. И. В. Курчатова, 1969. — 51 с.
85. Турбулентность / Под редакцией П. Брэдшоу. — М.: Мир, 1980.
86. Алексеев Б. В. Кинетическая и гидравлическая теория турбулентности. Деп. В ВИНТИ, № 4122-В89, 4123-В89. — М.: 1989.

87. Цыгович В. Н. Теория турбулентной плазмы. — М.: Атомиздат, 1971.
88. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. — М.: Наука, 1994.
89. Иевлев В. М. Турбулентное течение высокотемпературных сред. — М.: Наука, 1975.
90. Alekseev B. V. *Matematicheskaya Kinetika Reagiruyushchikh Gazov* (Mathematical Theory of Reacting Gases). — Moscow: Nauka, 1982.
91. Alexeev B. V. The Generalized Boltzmann Equation, Generalized Hydrodynamic Equations and Their Applications // *Phil. Trans. Roy. Soc.* — 1994. — Vol. 349. — P. 417–443.
92. Alexeev B. V. The Generalized Boltzmann Equation // *Physica A.* — 1995. — Vol. 216. — P. 459–168.
93. Alekseev B. V. Generalized Boltzmann Physical Kinetics // *High Temperature.* — 1997. — № 1. — P. 129–146.
94. Alekseev B. V. Physical Principles of the Generalized Boltzmann Kinetic Theory of Gases // *Physics-Uspekhi.* — 2000. — Vol. 43 (6). — P. 601–629.
95. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая газодинамика. — М.: Наука, 1965.
96. Струминский В. В. Теоретические основы турбулентных течений // *Докл. АН СССР.* — 1984. — Т. 280, № 3.
97. Бабаков А. В. О возможности численного моделирования нестационарных вихревых структур в ближнем следе // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* — 1988. — Т. 28, № 2.
98. Gosman A. D., Ionnides E. Aspects of computer simulation of liquid-fueled combustors // *AIAA Pap.* — 1981, № 81-0323.
99. Ульданов С. В. Математическое моделирование процессов переноса вблизи заряженных тел в турбулентном потоке плазмы // *Дисс. ... канд. ф.-м. наук.* — М.: Изд-во МАИ, 2001. — 102 с.
100. Ульданов С. В. Модель замыкания для процессов переноса заряженных частиц в турбулентной слабоионизованной плазме // *Тр. МАИ.* — 2000. — № 1.
101. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: ИЛ, 1956.

102. Вержбицкий В. М. Основы численные методов: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 2002.
103. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. — М.: Мир, 1975. — 392 с.
104. Петров И. Б., Лобанов А. И. Лекции по вычислительной математике. — М.: Интернет-университет информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
105. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1989 — 608 с.
106. Самарский А. А., Николаев Е. С. Метод решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1977.
107. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.
108. Березин Ю. А., Федорчук М. П. Моделирование нестационарных плазменных процессов. — М.: Наука, 1993.
109. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / Пер. с англ. — М.: Мир, 1980.
110. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2 т. — М.: Мир, 1990.
111. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 608 с.
112. Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику. — М.: МФТИ, 1994. — 526 с.
113. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. — М.: Мир, 1968.
114. Котельников М. В., Нгуен С. Т. Оптимизация программного блока в задачах механики и электротехники пристеночной плазмы // Электронный журнал «Труды МАИ». — 2012. — Вып. 50.
115. Котельников М. В., Нгуен С. Т. Методы использования компьютерной графики в вычислительных экспериментах // Электронный журнал «Труды МАИ». 2012. — Вып. 53.
116. Пирумов У. Г., Росляков Г. С. Газовая динамика. — М.: Наука, 1990. — 386 с.
117. Руссо А. Дж., Турян К. И. Экспериментальные и численные исследования стеночных электрических зондов в сверхзвуковых потоках // РТК. — 1972, № 12. — С. 153–158.

118. Бойер Д. В., Турян К. И. Экспериментальные и численные исследования стеночных электрических зондов в сверхзвуковых ионизованных потоках. I. Эксперимент // РТК. — 1972. — Т. 10, № 12. — С. 143–153.
119. Burke A. F. // AIAA, Paper N68-116, 6th Aerospace Sciences Meeting, New York, 1968.
120. Liderman S., Avidor J. // Izzael J. Tech, 9, 1971.
121. Шарфман В. Е., Бредфелдт Х. Р. Экспериментальные исследования электрических пристеночных зондов // РТК. — 1972. — Т. 8, № 4. — С. 67–71.
122. Котельников М. В., Котельников В. А. Цилиндрический электрод в потоке слабоионизованного столкновительного газа в магнитном поле // ДАН. — 2007. — Т. 14, № 6. — С. 1–5.
123. Франк-Каменецкий Д. А. Лекции по физике плазмы. — М.: Атомиздат, 1968. — 286 с.
124. Неравновесные явления. Уравнение Больцмана / Под ред. Дж. Л. Либовица, Е. У. Монтролла. — М.: Наука, 1978. — 304 с.
125. Курант Р. Уравнения в частных производных. — М.: Мир, 1964. — 830 с.
126. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 304 с.
127. Берд Г. Молекулярная газовая динамика. — М.: Мир, 1981. — 319 с.
128. Иришков С. В. Кинетическое моделирование динамики плазмы в холловском двигателе // НТС «Ракетно-космическая техника». Сер. 12: Расчет, проектирование, конструирование и испытания космических систем, 2006.
129. Иришков С. В. Численная модель динамики плазмы в холловском двигателе // Исследовано в России. — 2006.
130. Rosenbluth M. N., MacDonald W., Judd D. Fokker-Planck equation for an inverse-square force // Phys. Rev. — 1957. — Vol. 107. — P. 1–6.
131. Полетаев Д. Л. Разработка кинетических моделей и численный анализ малорадиоактивного амбиполярного реактора // Дисс. ... канд. т. н. — М.: Изд. гос. унив. им. Баумана, 1991. — 184 с.

132. Савельев И. В. Курс общей физики. Том I. Механика, колебания и волны, молекулярная физика. — М.: Наука, 1970.
133. Черепанов В. В. Математическое моделирование динамики ионизованного газа в окрестности заряженных тел // Дисс. ... канд. ф.-м. н. — М.: Изд-во МАИ, 1984. — 161 с.
134. Кудрявцева И. А., Пантелеев А. В. Применение метода крупных частиц для анализа поведения двухкомпонентной плазмы с учетом столкновений между заряженными частицами // Научный Вестник МГТУ ГА. Сер. Математика и физика. — М.: МГТУ ГА. — № 114. — С. 67–74.
135. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2006. — 376 с.
136. Chapman S. On the law of distribution of velocities and on the theory of viscosity and thermal conduction in a non-uniform simple monoatomic gas // Phil. Trans. Roy. Soc. — 1916. — Vol. A216. — P. 279–348.
137. Chapman S. On the theory of a gas. Part 2. A composite monotomic gas, diffusion, viscosity and thermal conduction // Phil. Trans. Roy. Soc. — 1918. — Vol. A217. — P. 115–197.
138. Enskog D. The kinetic theory of phenomena in fairly rare gases: Dissertation. — Upsala, Sweden, 1917.
139. Enskog D. The numerical calculation of phenomena in fairly rare gases // Svensk. Vet. Akad. (Arkiv. f. Math., Ast. och Fys.). — 1921. — Vol. 16. — P. 1.
140. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. — М.-Л.: Гостехиздат, 1946. — 120 с.
141. Boltzmann L. Vorlesungen iiber Gastheorie. — Leipzig: Verlag von Johann Barth. Zweiter unveraenderten Abdruck, 1912. — 2 Teile.
142. Ehrenfest P. Collected Scientific Papers / Ed. M. J. Klem. — Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1959.
143. Давыдов Б. И. О распределении скоростей электронов, движущихся в электрическом поле // Журн. эксперим. и теорет. физики. — 1936. — Т. 6, № 5. — С. 463–487.
144. Jarzebski A. B., Thulli J. W. A stable highly accurate ADI method for hyperbolic heat conduction equation // J. Comput. Physics. — 1986. — Vol. 63. — P. 236–239.

145. Sobolev S. L. Two-temperature discrete model for non-loca heat conduction // *J. Phys. France*. — 1993. — Vol. 3. — P. 2261–2269.
146. Rosenau Ph. Random walker and the telegrapher's equation: a paradigm of a generalized hydrodynamics // *The Amer. Phys. Soc.* — 1993. — Vol. 48, № 7. — P. 655–657.
147. Алексеев Б. В. Математическая кинетика реагирующих газов. — М.: Наука, 1982. — 420 с.
148. Maxwell J. C. Illustrations of the dynamical theory of gases. I. On the motion and collisions of perfectly elastic spheres. II. On the process of diffusion of two or more kinds of moving particles among one another. III. On the collision of perfectly elastic bodies of any form // *Phil. Mag.* 1860. — Vol. 19. — P. 19–21, 33.
149. Ладыженская О. А. О некоторых направлениях исследований, проведенных в лаборатории математической физики ЛОМИ // *Труды математического института имени В. А. Стеклова*. — 1986. — Т. CLXXV. — С. 217–245.
150. Alexeev B. V. *The Generalized Boltzmann Physical Kinetics* — NY: Elsevier, 2004. — 368 p.
151. Chapman S., Cowling T.G. *The mathematical theory of non-uniform gases*. — Cambridge: University Press, 1952. — 423 p. [Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 510 с.
152. Saha M. N. Ionization in the Solar chromo-sphere // *Phil. Mag.* — 1920. — Vol. 40. — P. 472–488.
153. Dewan E. M. Generalizations of the Saha equation // *Phys. Fluids*. 1961. — Vol. 4, № 6. — P. 759–764.
154. Enskog K. // *Svenska Vetenskaps Akademiens Handl.* — 1921. — Vol. 63. — P. 4.
155. Четверушкин Б. Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике: Новая модель вязкого газа, алгоритмы, параллельная реализация, приложения. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — 231 с.
156. Власов А. А. Нелокальная статистическая механика. — М.: Наука, 1978. — 264 с.

- 
157. Alexeev B. V. Generalized quantum hydrodynamics and principles of non-local physics // J. Nanoelectron. Optoelectron. — 2008. — Vol. 3. — P. 143–158.
  158. Madelung E. Eine anschauliche Deutung der Gleichung von Schrodinger // Naturwissenschaften. — 1926. — Bd. 14. — S. 1004–1004.
  159. Madelung E. Quantentheorie in hydrodynamischer Form // Z. Phys. — 1927. — Bd. 40. — S. 322–326.



*Научное издание*

В. А. Котельников, М. В. Котельников, Г. С. Филиппов

**Физические, математические и численные  
модели пристеночной плазмы  
применительно к системам авиационно-космической  
техники и волновым технологиям**

Технический редактор А. В. Бакиев

Корректор Е. В. Огородникова

Дизайнер А. А. Гурьянова

Подписано в печать 18.02.2018. Формат 60 × 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,21. Уч.-изд. л. 18,31.

Гарнитура «Таймс». Бумага офсетная № 1. Тираж 500 экз. Заказ № 18-17.

АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»

426057, г. Ижевск, ул. К. Маркса, д. 250, кв. 55

E-mail: [mail@red.ru](mailto:mail@red.ru) Тел./факс: +7 (3412) 50-02-95