



издательство

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

А.В. КОЗЛОВ

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИЮ. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Москва • 2017

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.В. Козлов

ЗАДАЧИ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
МОДЕЛИРОВАНИЮ

Динамические системы

Учебное пособие к практическим занятиям

Под редакцией профессора А.В. Шаронова

Утверждено
на заседании редсовета
6 марта 2017 г.

Москва
Издательство МАИ
2017

Козлов А.В.

Задачи по математическому моделированию: Динамические системы: Учеб. пособие к практическим занятиям. — М.: Изд-во МАИ, 2017. — 52 с.: ил.

Учебное пособие содержит часть практических материалов по дисциплине «Математическое моделирование систем», а именно задания для закрепления навыков использования практических методов моделирования: численного интегрирования уравнений движения, преобразований теории размерности и подобия, а также методов фракционного анализа математических моделей. Каждый раздел включает один пример решения задачи, один вариант задания с ответами для самопроверки и варианты без ответов.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 09.03.02 «Информационные системы и технологии», программа подготовки которых включает в себя создание и анализ численных моделей динамических систем, и для аспирантов.

Рецензенты:

кафедра электротехники и информационно-измерительных систем МИСИС (зав. кафедрой д-р. техн. наук, профессор С.З. Шкундин);

д-р техн. наук, профессор В.Ф. Кострюков

ISBN 978-5-4316-0449-2

© Московский авиационный институт
(национальный исследовательский
университет), 2017

Предисловие

Математическое моделирование различных систем и процессов традиционно является одним из важных обязательных этапов разработки и анализа результатов эксплуатации авиационно-космических информационных систем и комплексов. При этом на практике критически важным всегда оказывается сочетание теоретических предположений и конкретных инженерных расчётов. Базовыми необходимыми навыками при этом являются навыки вычислительного программирования, оценки требуемой и фактической точности вычислений, численного интегрирования дифференциальных уравнений движения динамических систем, свободное владение переходами между различными единицами измерения физических величин и анализ графиков. Кроме того, иногда оказывается значительно более важным умение строить упрощённые приближённые уравнения движения, чем анализировать точные, но более сложные системы. Для этого требуется умение обоснованно пренебречь несущественными по величине эффектами, что позволит сконцентрироваться на анализе основных, наиболее значимых в рассматриваемой конкретной системе в данных конкретных условиях явлений. Такого рода методам посвящён фракционный анализ [11]. Настоящий сборник задач предназначен для отработки практической части указанных исследований.

Материал сборника соответствует программе дисциплины «Математическое моделирование систем» по направлению 09.03.02 «Информационные

системы и технологии» (профили «Информационные системы аэрокосмических комплексов» и «Информационные системы испытаний космических летательных аппаратов»), преподаваемой в Московском авиационном институте [6]. Вместе с тем приведённые здесь задания не требуют никаких специальных знаний, не касаются глубоко специфики аэрокосмической отрасли и являются прежде всего тренировочными упражнениями. Каждая из специализированных задач, как правило, требует для своего решения привлечения дополнительного теоретического и справочного материала, размещать который в настоящем сборнике нецелесообразно. Практические примеры должны рассматриваться непосредственно на занятиях в аудитории с соответствующими пояснениями. Следует понимать, что применение рассматриваемых методов в реальной инженерной работе настолько разнообразно, что самым важным в подготовке специалиста является практическое освоение именно общих принципов моделирования и базовых упражнений. Конечно, примеры их применения в реальных задачах также важны, но опыт показывает, что практически бесполезно пытаться ознакомить будущего инженера со всем разнообразием конкретных бортовых информационных комплексов, приборов и систем, существующих в настоящее время. Во-первых, в практической деятельности поначалу ему придётся иметь дело всего лишь с несколькими из них. А во-вторых, значительная часть аппаратуры, существующая на момент написания книги, со временем неизбежно устареет. Стремительное развитие информационных технологий делает освоение базовых методов и принципов инженерной деятельности не менее, а то и более важным, чем работа с конкретной аппаратурой и изучение её особенностей. Естественно, что электронно-вычислительные машины используются повсеместно в инженерной практике, и потому они также необходимы при решении задач из настоящего сборника.

Для успешного решения задач читатель должен быть знаком с основ-

ными понятиями и методами линейной алгебры и аналитической геометрии [3, 8, 9], математического анализа [4, 15], а также дифференциальных уравнений [1, 13, 14] на уровне первых курсов технического вуза. Необходимо также иметь навыки программирования на любом языке достаточно высокого уровня, например в специализированных программных пакетах MATLAB/Octave [7, 10]. Синтаксис и функционал этих пакетов будут использоваться в примерах настоящего сборника, однако читатель может выбрать любую знакомую ему программную среду, позволяющую выполнять матричные, циклические и условные вычисления, осуществлять простейший текстовый вывод результатов вычислений, а также строить графики. Примеры программного кода для MATLAB/Octave будут выделяться специальным шрифтом.

Желательно также иметь доступ к системам символьных математических вычислений, позволяющим, в частности, дифференцировать сложные функции, вычислять определённые интегралы с параметрами и решать системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, в том числе с параметрами. Такие возможности имеются в MATLAB и Octave, в онлайн-системе Wolfram Alpha и др. Несмотря на то что все аналитические вычисления при выполнении заданий настоящего сборника могут быть сделаны и без использования ЭВМ, системы символьных математических вычислений позволяют избежать случайных ошибок и быстро проверить результаты.

Обозначения

В сборнике используются обозначения и теоретический материал из пособия [6]. В частности, если не оговорено иное, то компоненты вектора состояния системы записываются в столбец и нумеруются нижним индексом

у обозначающей его переменной:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

В программах компоненты вектора состояния могут сохраняться в строке (y^T), так как традиционно данные о состоянии системы за всё время моделирования хранятся в виде матрицы или текстового файла, в каждой строке которых записывается состояние системы на текущий момент времени, и компоненты вектора состояния оказываются записаны в строку.

Заглавными буквами обозначаются размерные физические величины, теми же буквами со звёздочкой — единицы их измерения, а строчными буквами — соответствующие безразмерные числовые меры, например:

$$X = X_*x, \quad T = T_*t \quad \text{и т.д.}$$

Точка над переменной всегда обозначает производную (выражаясь точнее — полную производную) по безразмерному времени t . Производные по другим переменным, в том числе по размерному времени, обозначаются традиционно как отношение дифференциалов, например dX/dT .

Для безразмерных величин знаки \sim , \lesssim , \gtrsim обозначают соответственно «величину того же порядка», «величину того же порядка или меньше» и «величину того же порядка или больше». Под величинами одного порядка традиционно понимают величины, различающиеся меньше чем приблизительно в десять раз. Это понятие не является точно определённым, но повсеместно используется в инженерной практике. Для строгости будем считать величинами одного порядка величины, никакая из которых не больше других по модулю более чем в 5 раз, а величинами разных порядков —

величины, отличающиеся в 9 и более раз по модулю. Для промежуточных соотношений (от 5 до 9) результат сравнения по порядку величины не определён. Соответственно, малым параметром назовём безразмерную положительную величину, меньшую $1/9$. На практике не существует таких чётких границ для понятий «малый параметр», «величины разных порядков», «величины одного порядка», и указанные граничные значения приведены здесь лишь в целях унификации в рамках данного сборника задач. При сравнении положительных величин разных порядков используется знак \ll :

$$\mu \ll 1, \quad \varepsilon \ll 1, \quad |x_1| \ll |x_2| \ll 1 \quad \text{и т.д.}$$

1. Нормализация и численное интегрирование модельных уравнений

В большинстве моделей одновременно встречаются величины различных размерностей, например: время, длина, масса, скорость и т.д. И почти всегда требуется сравнивать вклад в изменение состояния системы величин различной размерности. Скажем, при численном интегрировании модельных уравнений движения необходимо выбрать шаг интегрирования, имеющий размерность времени, который обеспечит заданную точность вычисления компонент вектора состояния системы, например координат, имеющих размерность длины. Другой пример подобного сравнения возникает, когда требуется оценить, насколько существенное влияние на движение летательного аппарата оказывает аэродинамическое сопротивление, которое выражается в виде силы, но зависит от линейных размеров и массы аппарата, коэффициентов трения и прочих величин разных размерностей. Известно, что вклад аэродинамического сопротивления также существенно зависит от скорости движения.

Во всех таких случаях необходима нормализация модельных уравнений движения системы — приведение всех входящих в них величин к безразмерному виду [16, 11, 6]. Безразмерные величины можно сравнивать между собой независимо от их физического смысла: $1/10$ всегда на порядок меньше, чем 1 , и т.п. Для размерных величин сравнение производить затруднительно, например $1/10$ км — это больше, чем 1 м, а массу $1/10$ кг с силой в 1 Н сравнивать нельзя вообще. Кроме того, при нормализации в уравнениях движения остаётся минимальное число параметров, влияющих на движение системы независимо друг от друга. Это приводит к упрощению уравнений [12].

Пример нормализации модельных уравнений движения системы и их численного интегрирования

Дано: пусть имеются модельные уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= V, & X(0) &= 0, \\ M \frac{dV}{dT} &= -F \sin \frac{2\pi T}{T^0}, & V(0) &= V^0, \end{aligned}$$

где X — координата, V — скорость, $M = 40$ г — масса тела, $F = 0.2$ Н — амплитуда действующей на тело периодической силы, $T^0 = 0.4$ с — период колебаний силы, $V^0 = 0.3$ м/с — начальная скорость. Время, на котором исследуется движение системы, $T^1 = 0.2$ с, а допустимая погрешность предсказания координаты — порядка $\Delta X = 1$ мм.

Требуется:

- а) нормализовать уравнения движения, указав выбранные единицы измерения;
- б) найти аналитическое решение нормализованных уравнений;
- в) выписать решение уравнений движения в размерных физических величинах;
- г) определить максимальный допустимый шаг по безразмерному и размерному времени для численного интегрирования методом Эйлера и методом Рунге–Кутты 4-го порядка;
- д) построить графики аналитического и численного решения по методу Эйлера в безразмерных числовых мерах и в исходных размерных физических величинах.

Решение:

- а) для уменьшения количества параметров представим уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= V, & X(0) &= 0, \\ \frac{dV}{dT} &= -P \sin \frac{2\pi T}{T^0}, & V(0) &= V^0, & P = \frac{F}{M} &= 0.2 \text{ Н/кг}. \end{aligned}$$

В этих уравнениях вместо амплитуды силы F и массы M остаётся один параметр P ; далее заметим, что из первого уравнения следует взаимозависимость единиц измерения X_* , T_* и V_* координаты, времени и скорости соответственно:

$$\frac{X_*}{T_*} = V_*,$$

а значит, из трёх единиц измерения независимыми могут быть только две; кроме того, из второго уравнения следует взаимозависимость единиц измерения скорости, времени и параметра P :

$$\frac{V_*}{T_*} = P_*;$$

в условии задачи величиной с размерностью времени, стоящей в числителе, является T , причём $T \leq T^1$. Выберем за единицу измерения времени

$$T_* = T^1 = 0.2 \text{ с};$$

для координаты в условии задачи нет явно заданных величин, которые можно было бы принять за единицу измерения, а вот для скорости такая величина имеется:

$$V_* = V^0 = 0.3 \text{ м/с};$$

так как единицы измерения для координаты X и параметра P зависят от выбранных единиц измерения, получим

$$X_* = V_* T_* = 0.06 \text{ м}, \quad P_* = \frac{V_*}{T_*} = 1.5 \text{ м/с}^2 = 1.5 \text{ Н/кг};$$

поскольку все величины являются произведением своей безразмерной числовой меры на единицу измерения, т.е.

$$X = X_* x, \quad T = T_* t, \quad V = V_* v, \quad P = P_* p \text{ и т.д.},$$

то для безразмерных числовых мер получим нормализованные уравнения

$$\begin{array}{l} \dot{x} = v, \quad x(0) = 0, \\ \dot{v} = -\frac{2}{15} \sin \pi t, \quad v(0) = 1, \\ 0 \leq t \leq 1, \quad \Delta x = \frac{\Delta X}{X_*} = \frac{1}{60}, \end{array}$$

где точка над переменной $\dot{}$, как обычно, означает производную по безразмерному времени t ;

- б) нормализованные уравнения движения имеют аналитическое решение

$$\begin{array}{l} x(t) = \left(1 - \frac{2}{15\pi}\right) t + \frac{2 \sin \pi t}{15\pi^2}, \\ v(t) = \frac{2 \cos \pi t}{15\pi} + 1 - \frac{2}{15\pi}, \end{array}$$

получить которое несложно методами теории дифференциальных уравнений;

- в) в размерных физических величинах решение записывается, исходя из определения числовой меры, как произведение безраз-

мерных числовых мер на соответствующие единицы измерения:

$$\begin{aligned} X(T) &= \left(6 - \frac{4}{5\pi}\right) \frac{T}{T^1} + \frac{4}{5\pi^2} \sin \pi \frac{T}{T^1} \text{ см,} \\ V(T) &= \frac{4}{\pi} \left(\cos \pi \frac{T}{T^1} - 1\right) + 30 \text{ см/с;} \end{aligned}$$

г) максимальный шаг численного интегрирования Δt для безразмерного времени и ΔT для размерного времени определяется допустимой погрешностью численного интегрирования и составляет:

- для метода Эйлера, который имеет первый порядок точности в безразмерных переменных, с учётом того, что безразмерное время изменяется на отрезке $[0, 1]$,

$$\Delta x \sim \Delta t^1 \Rightarrow \Delta t_E \lesssim \frac{1}{60} \Rightarrow \Delta T_E = T_* \Delta t = \frac{1}{300} \text{ с};$$

- для метода Рунге–Кутты 4-го порядка точности

$$\begin{aligned} \Delta x \sim \Delta t^4 \Rightarrow \Delta t_{RK} \lesssim \sqrt[4]{\frac{1}{60}} \approx 0.36 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta T_{RK} = T_* \Delta t \approx 0.07 \text{ с}; \end{aligned}$$

д) в системах MATLAB и Octave программный код для численного интегрирования и построения графиков может выглядеть следующим образом:

```

V_ = 0.3; % м/с - единица измерения скорости
T_ = 0.2; % с - единица измерения времени
X_ = V_ * T_; % м
% нормализованные величины
dt = 1/60; t = [0:dt:1]';
x = 0; v = 1;
y = [x v]; % вектор состояния
for i = 2:size(t,1)
    x = y(i-1,1); v = y(i-1,2);
    % Формула Эйлера численного интегрирования
    y(i,:) = y(i-1,:) + ...
        [v -2/15*sin(pi*t(i-1))]*dt;
end
% сравнение численного и аналитического решений
x_num = y(:,1); v_num = y(:,2);
x_an = (1 - 2/15/pi)*t + 2*sin(pi*t)/15/pi^2;
v_an = 2*cos(pi*t)/15/pi + 1 - 2/15/pi;
% нормализованные координата и скорость
plot(t,x_num,'*-',t,x_an,t,v_num,'x-',t,v_an,'--');
figure; % размерная координата (м)
plot(T_*t,X_*x_num,'*-',T_*t,X_*x_an);
figure; % размерная скорость (м/с)
plot(T_*t,V_*v_num,'x-',T_*t,V_*v_an,'--');

```

В результате работы программы получаются графики, приведённые на рис. 1.1. Они позволяют проконтролировать совпадение с достаточной точ-

ностью численного и аналитического решений модельных уравнений движения системы.

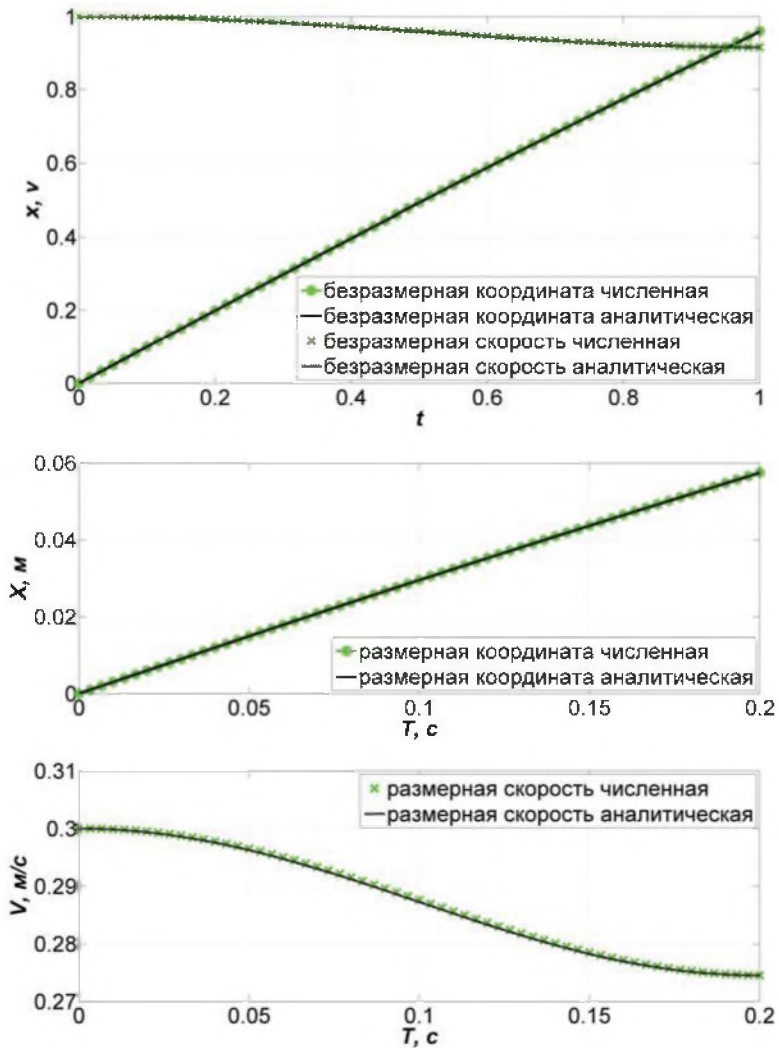


Рис. 1.1. Графики безразмерных координаты и скорости (вверху) при численном интегрировании и аналитическом решении уравнений движения и их размерные величины (внизу)

Варианты заданий. Во всех вариантах даны модельные уравнения движения некоторой динамической системы и величины входящих в них параметров. Время, на котором исследуется движение системы, обозначено T_1 , а допустимая погрешность предсказания координаты — порядка 1 см. Требуется:

- а) нормализовать уравнения и привести выбранные единицы измерения;
- б) найти аналитическое решение нормализованных модельных уравнений движения;
- в) выписать решение уравнений движения в размерных физических величинах;
- г) определить максимальный шаг по безразмерному и размерному времени для численного интегрирования методом Эйлера и методом Рунге–Кутты 4-го порядка;
- д) построить графики аналитического и численного решений по методу Эйлера в безразмерных числовых мерах и в размерных физических величинах.

$$1.1. \quad \begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= V, & X(0) &= 0, \\ M \frac{dV}{dT} &= -KX, & V(0) &= V^0, \\ V^0 &= 0.2 \text{ м/с}, & M &= 20 \text{ кг}, & K &= 2 \text{ Н/м}, & T_1 &= 5 \text{ с}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{а) } \dot{x} &= v, & x(0) &= 0, \\ \dot{v} &= -\frac{5x}{2}, & v(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$T_* = 5 \text{ с}, \quad X_* = 1 \text{ м}, \quad V_* = 1/5 \text{ м/с};$$

$$\text{б) } x(t) = \sqrt{\frac{2}{5}} \sin \sqrt{\frac{5}{2}} t,$$

$$v(t) = \cos \sqrt{\frac{5}{2}} t;$$

$$\text{в) } X(T) = \sqrt{\frac{2}{5}} \sin \frac{T}{\sqrt{10}} \text{ м,}$$

$$V(T) = \frac{1}{5} \cos \frac{T}{\sqrt{10}} \text{ м/с;}$$

$$\text{г) } \Delta t_E \lesssim 0.01, \quad \Delta T_E \lesssim 0.05 \text{ с,}$$

$$\Delta t_{RK} \lesssim 0.32, \quad \Delta T_{RK} \lesssim 1.6 \text{ с.}$$

$$1.2. \quad \frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = 0,$$

$$M \frac{dV}{dT} = -KX, \quad V(0) = V^0,$$

$$V^0 = 0.1 \text{ м/с, } M = 200 \text{ г, } K = 2.5 \text{ Н/м, } T_1 = 0.2 \text{ с.}$$

$$1.3. \quad \frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = 0,$$

$$M \frac{dV}{dT} = -F \frac{T^0}{T + T^0}, \quad V(0) = V^0,$$

$$V^0 = 0.2 \text{ м/с, } M = 2 \text{ кг, } F = 2 \text{ Н, } T^0 = 25 \text{ с, } T_1 = 0.3 \text{ с.}$$

$$1.4. \quad \frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = X^0,$$

$$M \frac{dV}{dT} = -KX, \quad V(0) = 0,$$

$$X^0 = 3 \text{ м, } M = 15 \text{ кг, } K = 1.5 \text{ Н/м, } T_1 = 0.2 \text{ с.}$$

$$1.5. \quad \frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = X^0,$$

$$M \frac{dV}{dT} = -KX, \quad V(0) = 0,$$

$$X^0 = 4 \text{ м, } M = 15 \text{ кг, } K = 2 \text{ Н/м, } T_1 = 4 \text{ с.}$$

$$1.6. \quad \frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = 0,$$

$$M \frac{dV}{dT} = -KV, \quad V(0) = V^0,$$

$$V^0 = 0.3 \text{ м/с, } M = 15 \text{ кг, } K = 2 \text{ кг/с, } T_1 = 0.3 \text{ с.}$$

- 1.7. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = X^0,$
 $M\frac{dV}{dT} = +F \cos \frac{2\pi T}{T^0}, \quad V(0) = 0,$
 $X^0 = 4 \text{ м}, M = 2 \text{ кг}, F = 4 \text{ Н}, T^0 = 25 \text{ с}, T_1 = 0.2 \text{ с}.$
- 1.8. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = 0,$
 $M\frac{dV}{dT} = -F \sin \frac{2\pi T}{T^0}, \quad V(0) = V^0,$
 $V^0 = 0.3 \text{ м/с}, M = 1 \text{ кг}, F = 2 \text{ Н}, T^0 = 20 \text{ с}, T_1 = 0.3 \text{ с}.$
- 1.9. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = 0,$
 $M\frac{dV}{dT} = -KX, \quad V(0) = V^0,$
 $V^0 = 0.2 \text{ м/с}, M = 15 \text{ кг}, K = 2 \text{ Н/м}, T_1 = 0.2 \text{ с}.$
- 1.10. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = 0,$
 $M\frac{dV}{dT} = -KV, \quad V(0) = V^0,$
 $V^0 = 0.1 \text{ м/с}, M = 200 \text{ г}, K = 2.5 \text{ кг/с}, T_1 = 0.2 \text{ с}.$
- 1.11. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = 0,$
 $M\frac{dV}{dT} = -KX, \quad V(0) = V^0,$
 $V^0 = 0.3 \text{ м/с}, M = 20 \text{ кг}, K = 1.5 \text{ Н/м}, T_1 = 5 \text{ с}.$
- 1.12. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = X^0,$
 $M\frac{dV}{dT} = +F e^{-T/T^0}, \quad V(0) = 0,$
 $X^0 = 4 \text{ м}, M = 1.5 \text{ кг}, F = 2 \text{ Н}, T^0 = 20 \text{ с}, T_1 = 0.2 \text{ с}.$
- 1.13. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = X^0,$
 $M\frac{dV}{dT} = -F \cos \frac{2\pi T}{T^0}, \quad V(0) = 0,$
 $X^0 = 4 \text{ м}, M = 1 \text{ кг}, F = 3 \text{ Н}, T^0 = 30 \text{ с}, T_1 = 0.4 \text{ с}.$

- 1.14. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = X^0,$
 $M \frac{dV}{dT} = -KX, \quad V(0) = 0,$
 $X^0 = 3 \text{ м}, M = 20 \text{ кг}, K = 2 \text{ Н/м}, T_1 = 0.3 \text{ с}.$
- 1.15. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = 0,$
 $M \frac{dV}{dT} = +F \frac{T^0}{T + T^0}, \quad V(0) = V^0,$
 $V^0 = 0.1 \text{ м/с}, M = 1 \text{ кг}, F = 2 \text{ Н}, T^0 = 20 \text{ с}, T_1 = 0.2 \text{ с}.$
- 1.16. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = 0,$
 $M \frac{dV}{dT} = -KV, \quad V(0) = V^0,$
 $V^0 = 0.1 \text{ м/с}, M = 15 \text{ кг}, K = 2 \text{ кг/с}, T_1 = 6 \text{ с}.$
- 1.17. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = X^0,$
 $M \frac{dV}{dT} = -KX, \quad V(0) = 0,$
 $X^0 = 4 \text{ м}, M = 150 \text{ г}, K = 3 \text{ Н/м}, T_1 = 0.2 \text{ с}.$
- 1.18. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = X^0,$
 $M \frac{dV}{dT} = +F \sin \frac{2\pi T}{T^0}, \quad V(0) = 0,$
 $X^0 = 4 \text{ м}, M = 1.5 \text{ кг}, F = 4 \text{ Н}, T^0 = 30 \text{ с}, T_1 = 0.4 \text{ с}.$
- 1.19. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = X^0,$
 $M \frac{dV}{dT} = +F e^{-T/T^0}, \quad V(0) = 0,$
 $X^0 = 3 \text{ м}, M = 40 \text{ г}, F = 200 \text{ мН}, T^0 = 0.5 \text{ с}, T_1 = 0.2 \text{ с}.$
- 1.20. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = X^0,$
 $M \frac{dV}{dT} = -F \cos \frac{2\pi T}{T^0}, \quad V(0) = 0,$
 $X^0 = 4 \text{ м}, M = 30 \text{ г}, F = 300 \text{ мН}, T^0 = 0.4 \text{ с}, T_1 = 0.3 \text{ с}.$

- 1.21. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = 0,$
 $M \frac{dV}{dT} = -KX, \quad V(0) = V^0,$
 $V^0 = 0.2 \text{ м/с}, M = 150 \text{ г}, K = 2 \text{ Н/м}, T_1 = 0.4 \text{ с}.$
- 1.22. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = X^0,$
 $M \frac{dV}{dT} = -F \frac{T^0}{T + T^0}, \quad V(0) = 0,$
 $X^0 = 3 \text{ м}, M = 1 \text{ кг}, F = 3 \text{ Н}, T^0 = 30 \text{ с}, T_1 = 0.2 \text{ с}.$
- 1.23. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = X^0,$
 $M \frac{dV}{dT} = -KX, \quad V(0) = 0,$
 $X^0 = 2 \text{ м}, M = 100 \text{ г}, K = 3 \text{ Н/м}, T_1 = 0.2 \text{ с}.$
- 1.24. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = 0,$
 $M \frac{dV}{dT} = -F \cos \frac{2\pi T}{T^0}, \quad V(0) = V^0,$
 $V^0 = 0.1 \text{ м/с}, M = 1 \text{ кг}, F = 2 \text{ Н}, T^0 = 20 \text{ с}, T_1 = 0.2 \text{ с}.$
- 1.25. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = X^0,$
 $M \frac{dV}{dT} = -F \sin \frac{2\pi T}{T^0}, \quad V(0) = 0,$
 $X^0 = 3 \text{ м}, M = 2 \text{ кг}, F = 4 \text{ Н}, T^0 = 25 \text{ с}, T_1 = 0.3 \text{ с}.$
- 1.26. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = 0,$
 $M \frac{dV}{dT} = -KX, \quad V(0) = V^0,$
 $V^0 = 0.1 \text{ м/с}, M = 150 \text{ г}, K = 2 \text{ Н/м}, T_1 = 0.2 \text{ с}.$
- 1.27. $\frac{dX}{dT} = V, \quad X(0) = 0,$
 $M \frac{dV}{dT} = +F e^{-T/T^0}, \quad V(0) = V^0,$
 $V^0 = 0.2 \text{ м/с}, M = 1 \text{ кг}, F = 4 \text{ Н}, T^0 = 20 \text{ с}, T_1 = 0.2 \text{ с}.$

2. Регулярно возмущённые по малому параметру системы

В случае, когда в нормализованных модельных уравнениях движения некоторой системы один из параметров оказался малой величиной, уравнения движения часто можно упростить для приближённого исследования. Упрощение производится путём разделения движения на «фракции», различающиеся по тому или иному признаку. Такого рода приближённым исследованиям посвящён фракционный анализ [11]. Однако наиболее простые из стандартных методов фракционного анализа применимы только для так называемых регулярно возмущённых систем. В регулярно возмущённых по малому параметру системах при уменьшении малого параметра решения исходной системы и соответствующей ей невозмущённой системы, не содержащей малого параметра, асимптотически сближаются. В так называемых сингулярно возмущённых системах, напротив, сближения решений возмущённой и невозмущённой систем не происходит при асимптотическом приближении малого параметра к нулю [6].

Пример исследования системы на наличие регулярного возмущения по малому параметру

Дано: пусть имеются нормализованные модельные уравнения движения:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, \mu) &= v(t, \mu), & x(0, \mu) &= 0, \\ \dot{v}(t, \mu) &= \frac{1 + \sin 4\pi t}{2 - \mu t}, & v(0, \mu) &= 1, \quad \mu \ll 1, \end{aligned}$$

которые рассматриваются на отрезке $0 \leq t \leq 1/2$, а допустимая безразмерная погрешность вычислений составляет 10^{-8} .

Требуется:

- а) выписать невозмущённую систему и её решение;

- б) построить численное решение исходной (возмущённой) системы;
- в) построить график зависимости максимального квадрата нормы разности между решениями возмущённой и невозмущённой систем от малого параметра;
- г) сделать предположение, является ли система регулярно или сингулярно возмущённой по малому параметру, и обосновать его по построенному графику.

Решение:

- а) невозмущённая система уравнений имеет вид ($\mu = 0$)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, 0) &= v(t, 0), & x(0, 0) &= 0, \\ \dot{v}(t, 0) &= \frac{1 + \sin 4\pi t}{2}, & v(0, 0) &= 1, \end{aligned}$$

и может быть решена аналитически:

$$\begin{aligned} x(t, 0) &= \frac{t^2}{4} + \left(\frac{1}{8\pi} + 1\right)t - \frac{\sin(4\pi t)}{32\pi^2}, \\ v(t, 0) &= \frac{t}{2} + \frac{1}{8\pi} + 1 - \frac{\cos(4\pi t)}{8\pi}; \end{aligned}$$

- б) возмущённая система уравнений не имеет аналитического решения в элементарных функциях, поэтому результат может быть получен только численно; так как для получения заданной точности численного интегрирования порядка 10^{-8} методом Эйлера потребовалось бы очень много — порядка 50 миллионов ($1/2 \cdot 10^8$) — шагов интегрирования, то в данной задаче следует выбрать метод интегрирования Рунге–Кутты 4-го порядка, который обеспечивает ту же точность уже при 50 шагах интегрирования;
- в) выберем последовательность значений малого параметра от 0.1 до 10^{-8} с равномерным уменьшением порядка: 0.1, 0.01, ..., 10^{-8} ; для этих значений μ построим численные решения возмущённой

системы и вычислим величины $\Delta(\mu)$, характеризующие их отличие от решения невозмущённой системы; в программной среде MATLAB/Octave программа может выглядеть так:

```
function sample
    mu_all = 10.^(-[1:8]); dt = 1e-2;
    t = [0:dt:1/2]';
    for k = 1:8
        y = [0 1]; mu = mu_all(k); D = 0;
        for i = 2:size(t,1)
            x0 = t(i)^2/4+t(i)*(1+1/8/pi)-...
                sin(4*pi*t(i))/32/pi^2;
            v0 = t(i)/2+1/8/pi+1-...
                cos(4*pi*t(i))/8/pi;
            y0 = [x0 v0];
            k1 = f(t(i-1),y,mu);
            k2 = f(t(i-1)+dt/2,y+dt/2*k1,mu);
            k3 = f(t(i-1)+dt/2,y+dt/2*k2,mu);
            k4 = f(t(i-1)+dt ,y+dt *k3,mu);
            y = y + dt/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
            d = (y - y0)*(y - y0)';
            if d > D      D = d;      end
        end
        D_all(k) = D;
    end
end
```

```

loglog(mu_all, sqrt(D_all),'*-'); grid on;
end
function dydt = f(t, y, mu)
    v = y(2);
    dydt = [v (1 + sin(4*pi*t))/(2 - mu*t)];
end

```

г) в результате выполнения программы получим искомый график, приведённый на рис. 2.1; можно предположить, что с точностью до допустимой погрешности 10^{-8} при $0 \leq t \leq 1/2$ выполнено

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \Delta(\mu) \approx 0,$$

а значит, система предположительно является регулярно возмущённой по малому параметру.

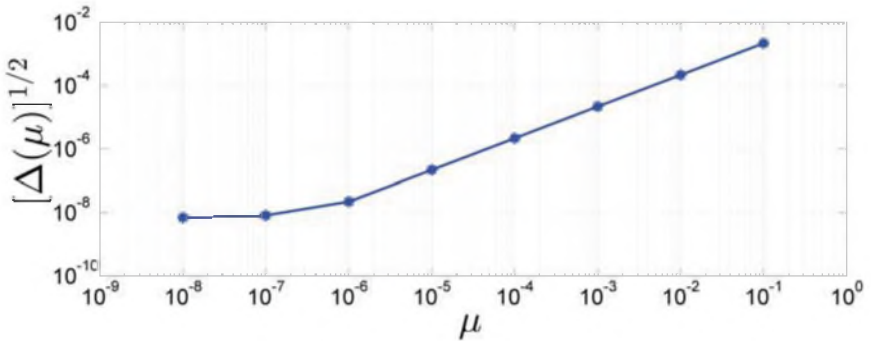


Рис. 2.1. График зависимости разницы между решениями возмущённой и невозмущённой систем от величины малого параметра

Заметим, что ввиду отсутствия аналитического решения в элементарных функциях у возмущённой системы математически строгое доказательство

регулярности возмущения требует отдельного исследования, но для практических целей почти всегда достаточно приведённого выше численного анализа.

Варианты заданий. Во всех вариантах приведены нормализованные модельные уравнения движения некоторой системы, содержащие малый параметр $\mu \ll 1$. Они рассматриваются на конечном отрезке времени $t \in [0, 1] = D$ с допустимой безразмерной погрешностью 10^{-12} . Требуется:

- а) выписать невозмущённую систему и её решение;
- б) построить численное решение исходной (возмущённой) системы;
- в) при помощи численных экспериментов построить график зависимости от малого параметра величины

$$\Delta(\mu, D) = \sup_{t \in D} \|y(t, \mu) - y(t, 0)\|^2,$$

где $y(t, \mu)$ и $y(t, 0)$ — решения возмущённой и невозмущённой систем соответственно;

- г) на основе графика сделать предположение о регулярности или сингулярности возмущения системы по малому параметру.

$$2.1. \quad \dot{x} = v, \quad x(0) = 0,$$

$$\dot{v} = \frac{1 - e^{-2t}}{3 - \mu t}, \quad v(0) = \frac{1}{3}.$$

$$а) \quad \dot{x}(t, 0) = v(t, 0), \quad x(0, 0) = 0, \quad x(t, 0) = \frac{2t(t+1) - e^{-2t} + 1}{12},$$

$$\dot{v}(t, 0) = \frac{1 - e^{-2t}}{3}, \quad v(0, 0) = \frac{1}{3}, \quad v(t, 0) = \frac{2t + e^{-2t} + 1}{6};$$

- б) программа аналогична разобранному примеру с заменой `mu_all`, `dt`, `t`, начального значения `y`, `x0`, `v0`, и `f(t, y, mu)`;

в) искомая зависимость приведена на рис. 2.2;

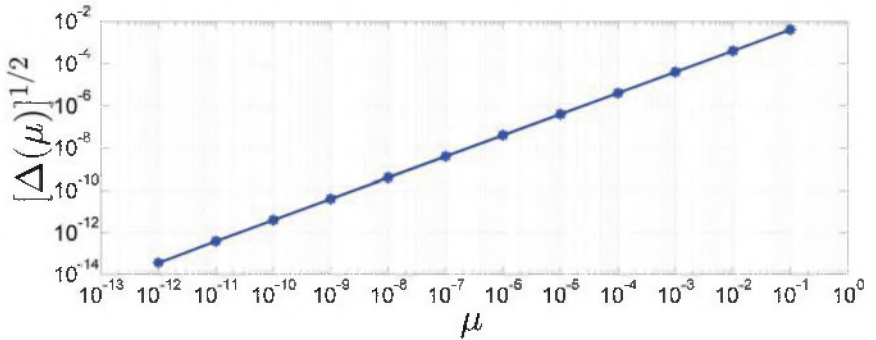


Рис. 2.2. Ответ к пункту «в» варианта 2.1

г) с точностью до 10^{-13} система является регулярно возмущённой.

$$2.2. \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v, & x(0) &= 4, \\ \dot{v} &= \frac{3-t}{2+\mu e^{-3t}}, & v(0) &= 0. \end{aligned}$$

$$2.3. \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v, & x(0) &= 0, \\ \dot{v} &= \frac{3+t}{1-\mu \sin 3\pi t}, & v(0) &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$2.4. \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v, & x(0) &= \frac{1}{2}, \\ \dot{v} &= -\mu(x^2 + x), & v(0) &= 0. \end{aligned}$$

$$2.5. \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v, & x(0) &= \frac{1}{2}, \\ \dot{v} &= \frac{3+\sin 4\pi t}{2-\mu t}, & v(0) &= 0. \end{aligned}$$

$$2.6. \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v, & x(0) &= 0, \\ \dot{v} &= -\mu(v^2 + v), & v(0) &= 4. \end{aligned}$$

$$2.7. \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v, & x(0) &= 1, \\ \dot{v} &= \frac{2+t}{1+\mu e^{-2t}}, & v(0) &= 0. \end{aligned}$$

$$2.8. \quad \dot{x} = v, \quad x(0) = \frac{1}{4},$$

$$\dot{v} = -\mu(x^2 - v), \quad v(0) = 0.$$

$$2.9. \quad \dot{x} = v, \quad x(0) = 1,$$

$$\dot{v} = \frac{1 - e^{-4t}}{2 - \mu t}, \quad v(0) = 0.$$

$$2.10. \quad \dot{x} = v, \quad x(0) = 0,$$

$$\dot{v} = \frac{3 + \sin 4\pi t}{2 + \mu t}, \quad v(0) = \frac{1}{2}.$$

$$2.11. \quad \dot{x} = v, \quad x(0) = \frac{1}{2},$$

$$\dot{v} = \frac{1 + t}{3 - \mu \sin 3\pi t}, \quad v(0) = 0.$$

$$2.12. \quad \dot{x} = v, \quad x(0) = \frac{1}{2},$$

$$\dot{v} = \frac{2 - t}{3 - \mu \sin 3\pi t}, \quad v(0) = 0.$$

$$2.13. \quad \dot{x} = v, \quad x(0) = 0,$$

$$\dot{v} = \frac{3 - t}{2 - \mu \sin 3\pi t}, \quad v(0) = 1.$$

$$2.14. \quad \dot{x} = v, \quad x(0) = 3,$$

$$\dot{v} = -\mu(x^2 + v), \quad v(0) = 0.$$

$$2.15. \quad \dot{x} = v, \quad x(0) = 0,$$

$$\dot{v} = -\mu(v^2 - v), \quad v(0) = \frac{1}{4}.$$

$$2.16. \quad \dot{x} = v, \quad x(0) = 0,$$

$$\dot{v} = \frac{3 - e^{-2t}}{2 + \mu t}, \quad v(0) = 1.$$

$$2.17. \quad \dot{x} = v, \quad x(0) = 0,$$

$$\dot{v} = -\mu(x^2 - x), \quad v(0) = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 2.18. \quad \dot{x} &= v, & x(0) &= 0, \\
 \dot{v} &= -\mu(x^2 - v), & v(0) &= 4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.19. \quad \dot{x} &= v, & x(0) &= 0, \\
 \dot{v} &= -\mu(v^2 + x), & v(0) &= 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.20. \quad \dot{x} &= v, & x(0) &= 0, \\
 \dot{v} &= \frac{1-t}{3 + \mu e^{-4t}}, & v(0) &= 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.21. \quad \dot{x} &= v, & x(0) &= 3, \\
 \dot{v} &= -\mu(x^2 - x), & v(0) &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.22. \quad \dot{x} &= v, & x(0) &= 0, \\
 \dot{v} &= \frac{2+t}{1 + \mu e^{-3t}}, & v(0) &= \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.23. \quad \dot{x} &= v, & x(0) &= 4, \\
 \dot{v} &= \frac{3 - e^{-2t}}{2 + \mu t}, & v(0) &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.24. \quad \dot{x} &= v, & x(0) &= 0, \\
 \dot{v} &= -\mu(x^2 + x), & v(0) &= \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.25. \quad \dot{x} &= v, & x(0) &= 0, \\
 \dot{v} &= -\mu(x^2 + v), & v(0) &= 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.26. \quad \dot{x} &= v, & x(0) &= 0, \\
 \dot{v} &= -\mu(v^2 - x), & v(0) &= 4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.27. \quad \dot{x} &= v, & x(0) &= 1, \\
 \dot{v} &= \frac{3 + \sin 3\pi t}{3 + \mu t}, & v(0) &= 0.
 \end{aligned}$$

3. Асимптотическое разложение Пуанкаре

Для регулярно возмущённых по малому параметру систем (см. предыдущий раздел) в случае, если в правой части дифференциальных модельных уравнений движения исследуемой системы находятся аналитические функции, не превышающие величины порядка единицы, можно упростить зависимость траектории движения от малого параметра. Это делается при помощи асимптотического разложения Пуанкаре. Оно основано на разделении траектории движения системы на основную (порождающую) компоненту и второстепенную (малую), имеющую величину порядка малого параметра. Это разделение основано на разложении решения в ряд Тейлора по малому параметру в нуле. Далее, правые части модельных уравнений раскладываются в ряд Тейлора как по малому параметру в нуле, так и по второстепенной компоненте решения около порождающей компоненты. Приравнявая коэффициенты при различных степенях малого параметра в разложении, можно получить асимптотическое приближение любой степени точности.

На практике, как правило, ограничиваются первым или вторым приближением Пуанкаре. Тем самым сохраняется зависимость движения системы от малого параметра, а значит, и от эффекта, который с ним связан в исходных (не нормализованных) уравнениях движения. Однако вид этой зависимости может оказаться значительно проще исходной функции, содержащей малый параметр, так как зависимость становится линейной (в первом приближении) или квадратичной (во втором приближении).

Асимптотическое разложение Пуанкаре является одним из основных, наиболее простых и эффективных методов фракционного анализа. В большинстве случаев его достаточно для качественного описания поведения исследуемой системы, содержащей малый параметр.

Пример асимптотического разложения Пуанкаре

Дано: пусть известны нормализованные модельные уравнения движения некоторой системы

$$\dot{y}_1 = -y_2^2 \cos(\mu y_2), \quad y_1(0) = 1,$$

$$\dot{y}_2 = -t^3 + \sin(\mu t), \quad y_2(0) = 0,$$

которые рассматриваются на отрезке безразмерного времени $0 \leq t \leq 1$.

Требуется:

- а) выписать порождающую систему;
- б) найти решение порождающей системы;
- в) составить систему уравнений для поправки первой степени по малому параметру;
- г) найти поправку первой степени по малому параметру;
- д) построить первое приближение Пуанкаре;
- е) вывести графики нулевого и первого асимптотических приближений Пуанкаре, а также численного решения при $\mu = 0.1$;
- ж) вычислить максимальные погрешности асимптотических приближений по каждой компоненте.

Решение:

- а) порождающая система образуется первыми членами разложения обеих частей исходных уравнений в ряд Тейлора по μ и \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 (где $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{y}}$) в точке $\mu = 0, \mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}$, с исходными начальными условиями; порождающая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}}_1 = -\bar{y}_2^2, & \bar{y}_1(0) = 1, \\ \dot{\bar{y}}_2 = -t^3, & \bar{y}_2(0) = 0, \end{cases}$$

и может быть решена аналитически;

б) решением порождающей системы являются функции $\bar{y}_1(t)$, $\bar{y}_2(t)$

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{y}_1(t) &= -\frac{t^9}{16 \cdot 9} + 1, \\ \bar{y}_2(t) &= -\frac{t^4}{4};\end{aligned}}$$

в) система уравнений для поправки первой степени по малому параметру получается приравниванием коэффициентов в соответствующих рядах Тейлора при μ , с нулевыми начальными условиями; для этого сначала необходимо найти все частные производные первого порядка (градиенты) в указанной выше точке

$$\nabla_y^T \Big|_{\mu=0, y=\bar{y}} \left[-y_2^2 \cos(\mu y_2) \right] = \begin{bmatrix} 0 & -2\bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t^4/2 \end{bmatrix},$$

$$\nabla_y^T \Big|_{\mu=0, y=\bar{y}} \left[-t^3 + \sin(\mu t) \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0, y=\bar{y}} \left[-y_2^2 \cos(\mu y_2) \right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0, y=\bar{y}} \left[-t^3 + \sin(\mu t) \right] = t,$$

что приводит к системе уравнений

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\tilde{y}}_1^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & t^4/2 \end{bmatrix} \tilde{y}^{(1)} + 0 = \frac{t^4 \tilde{y}_2^{(1)}}{2}, & \tilde{y}_1^{(1)}(0) &= 0, \\ \dot{\tilde{y}}_2^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{y}^{(1)} + t = t, & \tilde{y}_2^{(1)}(0) &= 0,\end{aligned}}$$

из которой легко найти поправку первой степени, а именно

г)
$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{y}_1^{(1)} &= \frac{t^7}{7 \cdot 4}, \\ \tilde{y}_2^{(1)} &= \frac{t^2}{2};\end{aligned}}$$

д) решение порождающей системы и поправка первой степени по малому параметру составляют вместе первое приближение Пуанкаре

$$y_1^{(1)} = 1 - \frac{t^9}{144} + \mu \frac{t^7}{7 \cdot 4},$$

$$y_2^{(1)} = -\frac{t^4}{4} + \mu \frac{t^2}{2};$$

е) для построения графиков численного решения (например, методом Рунге–Кутты 4-го порядка) и асимптотических приближений Пуанкаре при $\mu = 0.1$ необходимо составить программу следующего вида:

```
function sample

mu = 0.1; dt = 1e-2; t = [0:dt:1]'; y = [1 0];
Y = zeros(size(t,1),7); Y(1,2:7) = [y y y];
for i = 2:size(t,1)
    y10 = 1 - t(i)^9/16/9;
    y20 = -t(i)^4/4;
    y11 = y10 + mu*t(i)^7/7/4;
    y21 = y20 + mu*t(i)^2/2;
    k1 = f(t(i-1) , y , mu);
    k2 = f(t(i-1)+dt/2, y + dt/2*k1, mu);
    k3 = f( t(i-1)+dt/2, y + dt/2*k2, mu);
    k4 = f( t(i-1)+dt , y + dt *k3, mu);
    y = y + dt/6*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    Y(i,:) = [t(i) y(1) y(2) y10 y20 y11 y21];
end

plot(Y(:,1), Y(:, [2 4 6]));

figure; plot(Y(:,1), Y(:, [3 5 7]));
```



```

% максимальные разности по компонентам
disp(max(abs([Y(:,2)-Y(:,4) Y(:,3)-Y(:,5)])));
disp(max(abs([Y(:,2)-Y(:,6) Y(:,3)-Y(:,7)])));
end

function dydt = f(t, y, mu)
    dydt = [-y(2)^2*cos(mu*y(2)), -t^3+sin(mu*t)];
end

```

По результатам работы программы строятся графики численного решения по методу Рунге–Кутты 4-го порядка с безразмерным шагом интегрирования по времени 0.01, а также графики нулевого и первого приближений Пуанкаре (рис. 3.1); заметим, что шаг численного интегрирования $dt = 0.01$ выбирается таким, чтобы погрешность численного интегрирования, не превышающая в данном случае по порядку величины $0.01^4 = 10^{-8}$, была заведомо меньше ожидаемой погрешности асимптотических приближений, которая для наиболее точного первого приближения может иметь порядок квадрата малого параметра μ , т.е. $0.1^2 = 10^{-2}$;

- ж) в результате работы программы вычисляются максимальные разности между численным решением и его приближениями по каждой из компонент вектора состояния системы, приведённые в таблице, из которой следует, что точности обоих асимптотических приближений соответствуют теоретически ожидаемым значениям в пределах величины порядка малого параметра и его квадрата для нулевого и первого приближения соответственно.

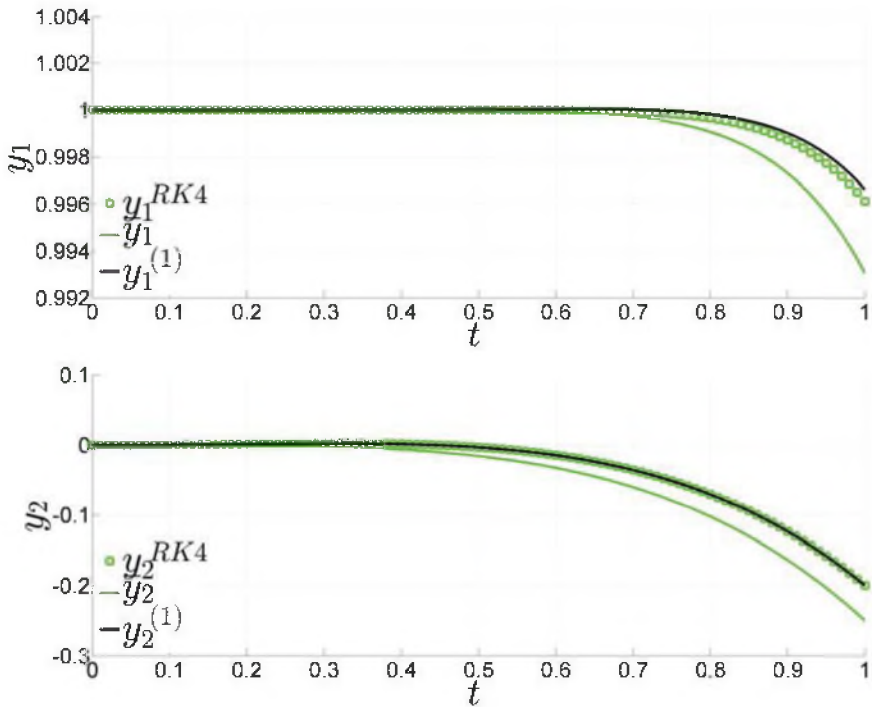


Рис. 3.1. Графики численного решения по методу Рунге–Кутты 4-го порядка ($y_{1,2}^{RK4}$), а также нулевого ($\bar{y}_{1,2}$) и первого ($y_{1,2}^{(1)}$) асимптотических приближений Пуанкаре

Максимальные погрешности асимптотических приближений по каждой компоненте вектора состояния системы

$\max_{0 \leq t \leq 1} \Delta y_i $	y_1	y_2	Ожидаемая погрешность	Результат сравнения
$ y^{RK4} - \bar{y} $	0.003	0.05	$\mu = 0.1$	$\ \Delta y\ < 0.6\mu$
$ y^{RK4} - y^{(1)} $	$5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$\mu^2 = 0.01$	$\ \Delta y\ < 0.06\mu^2$

Варианты заданий. Во всех вариантах в условии даны нормализованные модельные уравнения движения некоторой системы, которые содержат малый параметр $\mu \ll 1$ и рассматриваются на конечном отрезке времени. Требуется:

- а) выписать порождающую систему;
- б) найти её решение;
- в) составить систему уравнений для поправки Пуанкаре первой степени по малому параметру;
- г) найти из неё поправку первой степени по малому параметру;
- д) выписать первое приближение Пуанкаре;
- е) построить графики нулевого и первого асимптотических приближений Пуанкаре, а также численного решения при $\mu = 0.1$;
- ж) определить максимальные погрешности асимптотических решений по каждой компоненте при $\mu = 0.1$.

3.1. $\dot{y}_1 = -2y_2^2 \sin(\mu t), \quad y_1(0) = 1/3,$
 $\dot{y}_2 = -4t^3 + \cos(\mu y_1), \quad y_2(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1/2.$

а) $\dot{\bar{y}}_1 = 0, \quad \bar{y}_1(0) = 1/3,$
 $\dot{\bar{y}}_2 = 1 - 4t^3, \quad \bar{y}_2(0) = 0;$

б) $\bar{y}_1 = 1/3,$
 $\bar{y}_2 = -t^4 + t;$

в) $\dot{\hat{y}}_1^{(1)} = -2t(-t^4 + t)^2, \quad \hat{y}_1^{(1)}(0) = 0,$
 $\dot{\hat{y}}_2^{(1)} = 0, \quad \hat{y}_2^{(1)}(0) = 0;$

г) $\hat{y}_1^{(1)} = -t^{10}/5 + (4t^7)/7 - t^4/2,$
 $\hat{y}_2^{(1)} = 0;$

$$\begin{aligned} \text{д) } y_1^{(1)} &= 1/3 - (t^4 \mu (14t^6 - 40t^3 + 35))/70, \\ y_2^{(1)} &= -t^4 + t; \end{aligned}$$

е) см. результаты работы программы;

$$\begin{aligned} \text{ж) } \max_t |y^{(0)} - y^{RK4}| &= [2.7\text{e-}003, 1.1\text{e-}004], \\ \max_t |y^{(1)} - y^{RK4}| &= [1.2\text{e-}005, 1.1\text{e-}004]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2. \dot{y}_1 &= +2t^3 + \sin(\mu y_2), & y_1(0) &= 0, \\ \dot{y}_2 &= -4y_1^2 \cos(\mu t), & y_2(0) &= 1/4, \quad 0 \leq t \leq 1/4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.3. \dot{y}_1 &= -4y_2^2 + \sin(\mu y_2), & y_1(0) &= 1/4, \\ \dot{y}_2 &= +3t^3 \cos(\mu t), & y_2(0) &= 0, \quad 0 \leq t \leq 1/4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4. \dot{y}_1 &= +2t^2 \cos(\mu t), & y_1(0) &= 1/4, \\ \dot{y}_2 &= -3y_1^3 + \sin(\mu y_1), & y_2(0) &= 0, \quad 0 \leq t \leq 3/4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.5. \dot{y}_1 &= +4t^3 + \cos(\mu y_2), & y_1(0) &= 1/2, \\ \dot{y}_2 &= -4y_1^2 \sin(\mu t), & y_2(0) &= 0, \quad 0 \leq t \leq 1/2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.6. \dot{y}_1 &= +2t^3 + \cos(\mu t), & y_1(0) &= 0, \\ \dot{y}_2 &= +4y_1^2 \sin(\mu y_1), & y_2(0) &= 1/3, \quad 0 \leq t \leq 1/4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.7. \dot{y}_1 &= +3t^2 \sin(\mu y_2), & y_1(0) &= 0, \\ \dot{y}_2 &= +2y_1^3 + \cos(\mu t), & y_2(0) &= 1/4, \quad 0 \leq t \leq 1/4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.8. \dot{y}_1 &= +3y_2^2 + \cos(\mu t), & y_1(0) &= 0, \\ \dot{y}_2 &= -2t^3 \sin(\mu y_1), & y_2(0) &= 1/4, \quad 0 \leq t \leq 1/2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.9. \dot{y}_1 &= +3y_2^2 + \sin(\mu t), & y_1(0) &= 0, \\ \dot{y}_2 &= -4t^3 \cos(\mu y_1), & y_2(0) &= 1/3, \quad 0 \leq t \leq 1/2. \end{aligned}$$

- 3.10. $\dot{y}_1 = -2t^2 \cos(\mu t), \quad y_1(0) = 0,$
 $\dot{y}_2 = -4y_1^3 + \sin(\mu y_1), \quad y_2(0) = 1/3, \quad 0 \leq t \leq 1/2.$
- 3.11. $\dot{y}_1 = -3y_2^2 + \sin(\mu y_2), \quad y_1(0) = 0,$
 $\dot{y}_2 = +4t^3 \cos(\mu t), \quad y_2(0) = 1/4, \quad 0 \leq t \leq 3/4.$
- 3.12. $\dot{y}_1 = +4y_2^2 + \sin(\mu t), \quad y_1(0) = 1/4,$
 $\dot{y}_2 = -2t^3 \cos(\mu y_1), \quad y_2(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1/2.$
- 3.13. $\dot{y}_1 = -2t^3 \cos(\mu y_2), \quad y_1(0) = 1/4,$
 $\dot{y}_2 = -3y_1^2 + \sin(\mu t), \quad y_2(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1/2.$
- 3.14. $\dot{y}_1 = +3y_2^3 + \sin(\mu t), \quad y_1(0) = 0,$
 $\dot{y}_2 = -2t^2 \cos(\mu y_1), \quad y_2(0) = 1/4, \quad 0 \leq t \leq 3/4.$
- 3.15. $\dot{y}_1 = -2t^3 \cos(\mu t), \quad y_1(0) = 1/4,$
 $\dot{y}_2 = +3y_1^2 + \sin(\mu y_1), \quad y_2(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 3/4.$
- 3.16. $\dot{y}_1 = +4t^3 \cos(\mu t), \quad y_1(0) = 0,$
 $\dot{y}_2 = -3y_1^2 + \sin(\mu y_1), \quad y_2(0) = 1/3, \quad 0 \leq t \leq 1/4.$
- 3.17. $\dot{y}_1 = +2y_2^3 + \sin(\mu t), \quad y_1(0) = 1/3,$
 $\dot{y}_2 = -4t^2 \cos(\mu y_1), \quad y_2(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1/4.$
- 3.18. $\dot{y}_1 = -2y_2^3 \cos(\mu y_2), \quad y_1(0) = 0,$
 $\dot{y}_2 = +3t^2 + \sin(\mu t), \quad y_2(0) = 1/4, \quad 0 \leq t \leq 1/4.$
- 3.19. $\dot{y}_1 = -3t^2 \cos(\mu y_2), \quad y_1(0) = 1/4,$
 $\dot{y}_2 = -3y_1^3 + \sin(\mu t), \quad y_2(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1/2.$
- 3.20. $\dot{y}_1 = +4y_2^2 + \cos(\mu y_2), \quad y_1(0) = 1/4,$
 $\dot{y}_2 = +4t^3 \sin(\mu t), \quad y_2(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1/2.$

- 3.21. $\dot{y}_1 = +3t^2 \sin(\mu t), \quad y_1(0) = 1/4,$
 $\dot{y}_2 = -2y_1^3 + \cos(\mu y_1), \quad y_2(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1/2.$
- 3.22. $\dot{y}_1 = -3t^3 \sin(\mu t), \quad y_1(0) = 0,$
 $\dot{y}_2 = +2y_1^2 + \cos(\mu y_1), \quad y_2(0) = 1/2, \quad 0 \leq t \leq 1/4.$
- 3.23. $\dot{y}_1 = +2t^2 + \sin(\mu t), \quad y_1(0) = 1/2,$
 $\dot{y}_2 = +2y_1^3 \cos(\mu y_1), \quad y_2(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1/4.$
- 3.24. $\dot{y}_1 = -3y_2^3 + \cos(\mu t), \quad y_1(0) = 0,$
 $\dot{y}_2 = -2t^2 \sin(\mu y_1), \quad y_2(0) = 1/4, \quad 0 \leq t \leq 3/4.$
- 3.25. $\dot{y}_1 = +2t^3 \cos(\mu y_2), \quad y_1(0) = 0,$
 $\dot{y}_2 = -4y_1^2 + \sin(\mu t), \quad y_2(0) = 1/4, \quad 0 \leq t \leq 1/4.$
- 3.26. $\dot{y}_1 = -4y_2^3 + \sin(\mu y_2), \quad y_1(0) = 1/2,$
 $\dot{y}_2 = +3t^2 \cos(\mu t), \quad y_2(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1/2.$
- 3.27. $\dot{y}_1 = -3t^3 \sin(\mu y_2), \quad y_1(0) = 1/4,$
 $\dot{y}_2 = +3y_1^2 + \cos(\mu t), \quad y_2(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 3/4.$
- 3.28. $\dot{y}_1 = -3y_2^2 \cos(\mu t), \quad y_1(0) = 0,$
 $\dot{y}_2 = +2t^3 + \sin(\mu y_1), \quad y_2(0) = 1/3, \quad 0 \leq t \leq 1/4.$

4. Осреднение в системах с быстрой фазой

В некоторых случаях, когда нормализованные уравнения движения моделируемой системы являются периодическими по одной из переменных, производная которой имеет порядок единицы, периодические функции в модельных уравнениях движения малы по величине, а остальные переменные имеют малую производную, движение системы можно разделить на две фракции — малую быструю периодическую часть и медленную [11, 6]. Далее быстрыми периодическими колебаниями можно пренебречь и исследовать упрощённые, т.е. осреднённые, уравнения движения. Они имеют погрешность порядка малого параметра на асимптотически большом промежутке безразмерного времени $t \in [0, 1/\varepsilon]$, где ε — малый параметр. Переменная с производной порядка единицы при этом называется быстрой фазой, так как все остальные компоненты вектора состояния, имея малые производные, изменяются значительно медленнее.

Пример осреднения в системе с быстрой фазой

Дано: пусть нормализованные модельные уравнения движения некоторой системы содержат малый параметр и имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \varepsilon \frac{-y_1^2 + \sin 2\pi y_2}{2 + \sin \pi y_2}, & y_1(0) &= 1/2, \\ \dot{y}_2 &= -1/2 + \varepsilon \frac{y_1^3}{2 - \cos 3\pi y_2}, & y_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

Поскольку одна из переменных имеет производную порядка единицы, правые части системы уравнений являются периодическими по этой переменной с периодом порядка единицы, периодические функции входят в уравнения с малым коэффициентом, а вторая переменная имеет малую производную, то можно сказать, что система представляет собой систему с быстрой

фазой, к которой можно применить метод осреднения.

Требуется:

- а) определить быструю фазу, периодические коэффициенты при малом параметре и период правой части уравнений движения по быстрой фазе;
- б) выписать упрощённую (осреднённую) систему уравнений для нахождения главной составляющей решения;
- в) найти главную составляющую решения;
- г) построить графики численного и осреднённого решений при $\varepsilon = 0.1$, на отрезке безразмерного времени $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$;
- д) вывести графики разностей численного и осреднённого решений и их максимальные величины по каждой компоненте.

Решение:

- а) быстрая фаза должна иметь производную порядка единицы, а значит, в рассматриваемой системе это y_2 ; при малом параметре в уравнениях движения для медленной и быстрой фазы стоят соответственно функции

$$\begin{aligned} Y(y_1, y_2, \varepsilon) &= \frac{-y_1^2 + \sin 2\pi y_2}{2 + \sin \pi y_2}, \\ Z(y_1, y_2, \varepsilon) &= \frac{+y_1^3}{2 - \cos 3\pi y_2}; \end{aligned}$$

период правой части по y_2 равен $\tau = 2$ как общему кратному периодов входящих в Y и Z гармонических по y_2 функций, равных 1 для $\sin 2\pi y_2$, 2 для $\sin \pi y_2$ и $2/3$ для $\cos 3\pi y_2$, в чём можно убедиться, обратившись к графикам $Y(y_2)$ и $Z(y_2)$, приведённым на рис. 4.1;

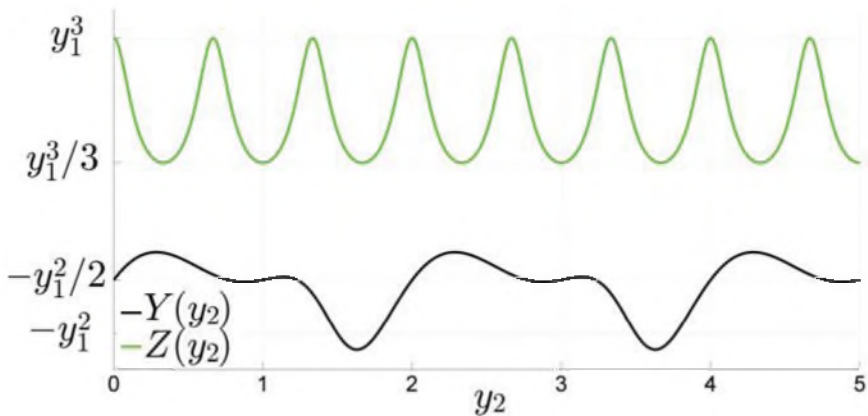


Рис. 4.1. Графики зависимости правых частей модельных уравнений движения от быстрой фазы y_2

- б) чтобы составить систему уравнений для нахождения главной составляющей решения, необходимо вычислить средние значения функций Y и Z по периоду быстрой фазы, считая медленную переменную y_1 константой на интервале осреднения

$$\bar{Y}^{(0)}(\bar{y}_1) = \frac{1}{2} \int_0^2 Y(\bar{y}_1, y_2) dy_2 = \frac{-\bar{y}_1^2}{\sqrt{3}},$$

$$\bar{Z}^{(1)}(\bar{y}_1) = \frac{1}{2} \int_0^2 Z(\bar{y}_1, y_2) dy_2 = \frac{\bar{y}_1^3}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}}_1 = \varepsilon \frac{-\bar{y}_1^2}{\sqrt{3}}, & \bar{y}_1(0) = 1/2, \\ \dot{\bar{y}}_2 = -1/2 + \varepsilon \frac{\bar{y}_1^3}{\sqrt{3}}, & \bar{y}_2(0) = 1; \end{cases}$$

- в) главная составляющая решения исходной системы удовлетворяет приведённой выше задаче Коши — системе обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями — и име-

ет вид:

$$\bar{y}_1(t) = \frac{1}{\varepsilon t / \sqrt{3} + 2} = \frac{\sqrt{3}}{\varepsilon t + 2\sqrt{3}},$$
$$\bar{y}_2(t) = -\frac{t}{2} - \frac{1}{\varepsilon^2/3 \cdot 2(t + 2\sqrt{3}/\varepsilon)^2} + C = \frac{9}{8} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2(\varepsilon t + 2\sqrt{3})^2};$$

г) для получения численного решения при $\varepsilon = 0.1$ на отрезке безразмерного времени $0 \leq t \leq 1/\varepsilon = 10$ методом Рунге–Кутты 4-го порядка и графического сравнения численного и осреднённого решений системы составляется программа следующего вида:

```
function sample
    ep = 0.1; y = [1/2 1];
    dt = 1e-2; t = [0:dt:1/ep]';
    Y = zeros(size(t,1),5); Y(1,2:5) = [y y];
    for i = 2:size(t,1)
        y1_ = 1/(ep*t(i)/sqrt(3) + 2);
        y2_ = 9/8-t(i)/2 ...
            - 3/(2*(ep*t(i)+2*sqrt(3))^2);
        k1 = f( t(i-1) , y , ep);
        k2 = f( t(i-1)+dt/2, y + dt/2*k1, ep);
        k3 = f( t(i-1)+dt/2, y + dt/2*k2, ep);
        k4 = f( t(i-1)+dt , y + dt *k3, ep);
        y = y + dt/6*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
        Y(i,:) = [t(i) y(1) y(2) y1_ y2_];
    end
    plot(Y(:,1), Y(:, [2 4]));
```

```

figure; plot(Y(:,1), Y(:,[3 5]));
end

function dydt = f(t, y, ep)
    y1 = y(1); y2 = y(2);
    dydt = [-ep*(y1^2+sin(2*pi*y2))/...
            (2 + sin(pi*y2)), ...
            -1/2 + ep*y1^3/(2 - cos(3*pi*y2))];
end

```

результатом работы программы будут графики, приведённые на рис. 4.2;

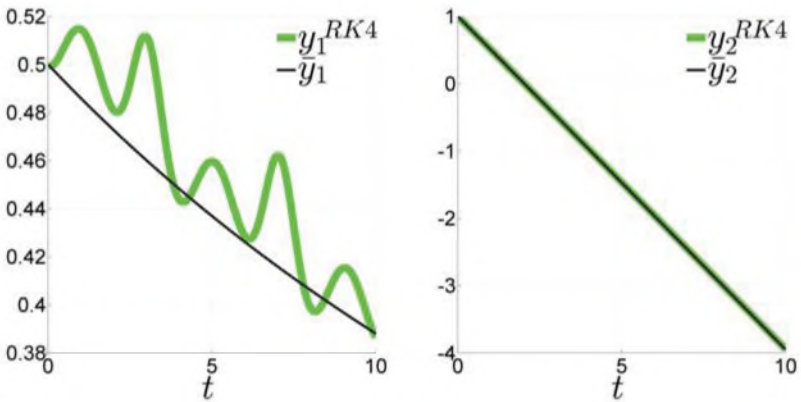


Рис. 4.2. Численное решение ($y_{1,2}^{RK4}$) и его главные компоненты

д) для построения разностей численного и осреднённого решений, а также для нахождения их максимальной величины в программу следует добавить приведённые ниже строки:

```
figure; plot(Y(:,1), Y(:,2:3) - Y(:,4:5));
disp(max(abs(Y(:,2:3) - Y(:,4:5))));
```

Представленные на рис. 4.3 разности осреднённого и численного решения, а также вычисленные их максимальные значения, составляющие приблизительно 0.05 и 0.006 по первой и второй компоненте соответственно, показывают, что погрешность осреднения соответствует допустимой теоретической величине порядка малого параметра $\varepsilon = 0.1$ на отрезке времени длины $1/\varepsilon = 10$.

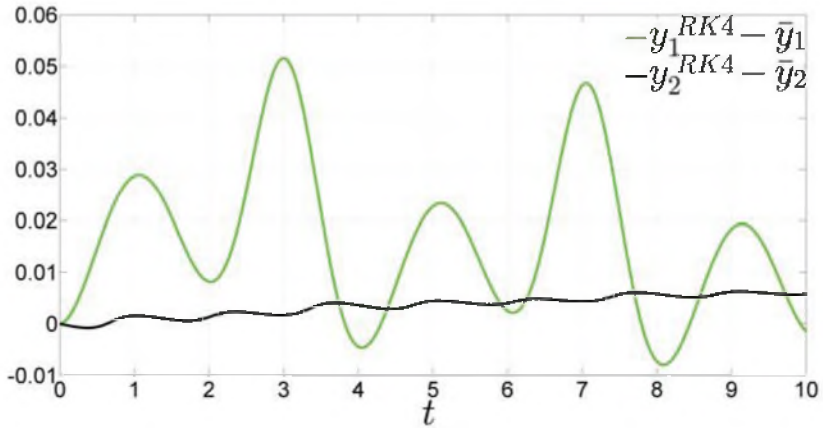


Рис. 4.3. Разности численного ($y_{1,2}^{RK4}$) и осреднённого ($\bar{y}_{1,2}$) решений

Варианты заданий. Во всех вариантах в условии даны нормализованные модельные уравнения движения некоторой системы, которые содержат малый параметр $\varepsilon \ll 1$, рассматриваются на асимптотически большом отрезке безразмерного времени $[0, 1/\varepsilon]$ и допускают применение метода осреднения. Требуется:

- а) определить быструю фазу, периодические коэффициенты при малом параметре и период правой части уравнений движения по быстрой фазе;
- б) составить осреднённую (упрощённую) систему уравнений для нахождения главной составляющей решения;
- в) выписать главную (осреднённую) составляющую решения;
- г) построить графики численного решения и его главной компоненты при $\varepsilon = 0.1$;
- д) построить графики разности численного и осреднённого решений, определить её максимальную величину по каждой компоненте.

$$4.1. \quad \dot{y}_1 = -\frac{\varepsilon (3 \sin(3 \pi \sqrt{2} y_2) - y_1^2)}{\cos(2 \pi \sqrt{2} y_2) - 3}, \quad y_1(0) = 1/2,$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{\varepsilon y_1^3}{\cos(4 \pi \sqrt{2} y_2) + 2} - \frac{1}{3}, \quad y_2(0) = 1.$$

$$а) \quad Y(y_1, y_2) = -\frac{3 \sin(3 \pi \sqrt{2} y_2) - y_1^2}{\cos(2 \pi \sqrt{2} y_2) - 3}, \quad |\dot{y}_2| \sim 1,$$

$$Z(y_1, y_2) = -\frac{y_1^3}{\cos(4 \pi \sqrt{2} y_2) + 2}, \quad \tau = \sqrt{2};$$

$$б) \quad \bar{Y}^{(0)}(\bar{y}_1) = -\frac{\sqrt{2} y_1^2}{4},$$

$$\bar{Z}^{(1)}(\bar{y}_1) = -\frac{\sqrt{3} y_1^3}{3};$$

$$в) \quad \dot{\bar{y}}_1 = -\varepsilon \frac{y_1^2}{2\sqrt{2}}, \quad \bar{y}_1(0) = 1/2,$$

$$\dot{\bar{y}}_2 = -1/3 - \varepsilon \frac{y_1^3}{\sqrt{3}}, \quad \bar{y}_2(0) = 1;$$

$$\begin{aligned}
\text{r) } \bar{y}_1 &= \frac{4}{\varepsilon\sqrt{2}t+8}, \\
\bar{y}_2 &= \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{3}(\varepsilon\sqrt{2}t+8)^2} - \frac{t}{3} - \frac{1}{2\sqrt{6}} + 1; \\
\text{п) } \max_t |y_i - \bar{y}_i| &\approx [0.05, 0.004].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.2. \dot{y}_1 &= \frac{\varepsilon(2\sin(6y_2) - y_1^2)}{\cos(4y_2) - 2}, & y_1(0) &= 1, \\
\dot{y}_2 &= -\frac{\varepsilon y_1^3}{\cos(8y_2) + 3} - \frac{1}{3}, & y_2(0) &= 1/2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.3. \dot{y}_1 &= -\frac{\varepsilon(y_1^2 + 2\sin(3\pi\sqrt{2}y_2))}{\cos(2\pi\sqrt{2}y_2) - 2}, & y_1(0) &= 1, \\
\dot{y}_2 &= -\frac{\varepsilon y_1^3}{\sin(4\pi\sqrt{2}y_2) - 3} - 3, & y_2(0) &= 1/2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.4. \dot{y}_1 &= \frac{\varepsilon y_2^2}{\sin(8y_1) + 2} + \frac{1}{3}, & y_1(0) &= 1/2, \\
\dot{y}_2 &= \frac{\varepsilon(y_2^3 + 2\sin(6y_1))}{\cos(4y_1) + 2}, & y_2(0) &= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.5. \dot{y}_1 &= \frac{\varepsilon y_2^2}{\sin(8y_1) + 2} + \frac{1}{2}, & y_1(0) &= 1, \\
\dot{y}_2 &= -\frac{\varepsilon(2\sin(6y_1) - y_2^3)}{\cos(4y_1) - 2}, & y_2(0) &= 1/2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.6. \dot{y}_1 &= \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon y_2^2}{\sin(4\pi\sqrt{2}y_1) - 2}, & y_1(0) &= 1/2, \\
\dot{y}_2 &= \frac{\varepsilon(2\sin(3\pi\sqrt{2}y_1) - y_2^3)}{\cos(2\pi\sqrt{2}y_1) - 3}, & y_2(0) &= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.7. \dot{y}_1 &= 2 - \frac{\varepsilon y_2^2}{\cos(8y_1) - 2}, & y_1(0) &= 1, \\
\dot{y}_2 &= \frac{\varepsilon(y_2^3 + 3\sin(6y_1))}{\cos(4y_1) + 3}, & y_2(0) &= 1/2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.8. \dot{y}_1 &= -\frac{\varepsilon(3\sin(6y_2) - y_1^2)}{\cos(4y_2) - 3}, & y_1(0) &= 1, \\
\dot{y}_2 &= \frac{\varepsilon y_1^3}{\cos(8y_2) + 3} + 3, & y_2(0) &= 1/2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.9. \dot{y}_1 &= \frac{\varepsilon(2\sin(3\pi\sqrt{2}y_2) - y_1^2)}{\cos(2\pi\sqrt{2}y_2) + 2}, & y_1(0) &= 1, \\
\dot{y}_2 &= \frac{\varepsilon y_1^3}{\cos(4\pi\sqrt{2}y_2) - 2} + \frac{1}{3}, & y_2(0) &= 1/2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.10. \dot{y}_1 &= -\frac{\varepsilon y_2^2}{\cos(4\pi\sqrt{2}y_1) - 3} - 2, & y_1(0) &= 1, \\
\dot{y}_2 &= \frac{\varepsilon(y_2^3 + 2\sin(3\pi\sqrt{2}y_1))}{\cos(2\pi\sqrt{2}y_1) + 3}, & y_2(0) &= 1/2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.11. \dot{y}_1 &= -\frac{\varepsilon(2\sin(6y_2) - y_1^3)}{\cos(4y_2) - 3}, & y_1(0) &= 1, \\
\dot{y}_2 &= \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon y_1^2}{\sin(8y_2) + 3}, & y_2(0) &= 1/2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.12. \dot{y}_1 &= \frac{\varepsilon(3\sin(6y_2) - y_1^2)}{\cos(4y_2) - 2}, & y_1(0) &= 1/2, \\
\dot{y}_2 &= 3 - \frac{\varepsilon y_1^3}{\cos(8y_2) - 3}, & y_2(0) &= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.13. \dot{y}_1 &= -\frac{\varepsilon y_2^3}{\cos(8y_1) - 2} - \frac{1}{3}, & y_1(0) &= 1, \\
\dot{y}_2 &= \frac{\varepsilon(y_2^2 + 2\cos(6y_1))}{\sin(4y_1) + 2}, & y_2(0) &= 1/2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.14. \dot{y}_1 &= -\frac{\varepsilon(y_1^3 + 2\cos(3\pi\sqrt{2}y_2))}{\sin(2\pi\sqrt{2}y_2) + 2}, & y_1(0) &= 1, \\
\dot{y}_2 &= 2 - \frac{\varepsilon y_1^2}{\cos(4\pi\sqrt{2}y_2) - 3}, & y_2(0) &= 1/2.
\end{aligned}$$

$$4.15. \quad \dot{y}_1 = \frac{\varepsilon (3 \sin(3\pi\sqrt{2}y_2) - y_1^2)}{\cos(2\pi\sqrt{2}y_2) + 3}, \quad y_1(0) = 1,$$

$$\dot{y}_2 = \frac{\varepsilon y_1^3}{\sin(4\pi\sqrt{2}y_2) - 3} + 3, \quad y_2(0) = 1/2.$$

$$4.16. \quad \dot{y}_1 = \frac{\varepsilon y_2^2}{\sin(4\pi\sqrt{2}y_1) + 3} + 3, \quad y_1(0) = 1/2,$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{\varepsilon (y_2^3 + 2 \sin(3\pi\sqrt{2}y_1))}{\cos(2\pi\sqrt{2}y_1) - 2}, \quad y_2(0) = 1.$$

$$4.17. \quad \dot{y}_1 = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon y_2^2}{\sin(4\pi\sqrt{2}y_1) - 3}, \quad y_1(0) = 1/2,$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{\varepsilon (3 \cos(3\pi\sqrt{2}y_1) - y_2^3)}{\sin(2\pi\sqrt{2}y_1) - 3}, \quad y_2(0) = 1.$$

$$4.18. \quad \dot{y}_1 = \frac{\varepsilon y_2^2}{\cos(8y_1) - 3} + \frac{1}{3}, \quad y_1(0) = 1,$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{\varepsilon (2 \cos(6y_1) - y_2^3)}{\sin(4y_1) - 2}, \quad y_2(0) = 1/2.$$

$$4.19. \quad \dot{y}_1 = -\frac{\varepsilon y_2^3}{\cos(8y_1) - 2} - 3, \quad y_1(0) = 1,$$

$$\dot{y}_2 = \frac{\varepsilon (2 \cos(6y_1) - y_2^2)}{\sin(4y_1) - 3}, \quad y_2(0) = 1/2.$$

$$4.20. \quad \dot{y}_1 = \frac{\varepsilon (3 \sin(3\pi\sqrt{2}y_2) - y_1^3)}{\cos(2\pi\sqrt{2}y_2) - 2}, \quad y_1(0) = 1/2,$$

$$\dot{y}_2 = \frac{\varepsilon y_1^2}{\cos(4\pi\sqrt{2}y_2) + 2} - 2, \quad y_2(0) = 1.$$

$$4.21. \quad \dot{y}_1 = -\frac{\varepsilon y_2^3}{\cos(8y_1) + 3} - 3, \quad y_1(0) = 1/2,$$

$$\dot{y}_2 = \frac{\varepsilon (y_2^2 + 3 \cos(6y_1))}{\sin(4y_1) + 2}, \quad y_2(0) = 1.$$

$$4.22. \quad \dot{y}_1 = -\frac{\varepsilon (y_1^2 + 3 \cos(3\pi\sqrt{2}y_2))}{\sin(2\pi\sqrt{2}y_2) + 3}, \quad y_1(0) = 1,$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{\varepsilon y_1^3}{\cos(4\pi\sqrt{2}y_2) + 2} - \frac{1}{2}, \quad y_2(0) = 1/2.$$

$$4.23. \quad \dot{y}_1 = -\frac{\varepsilon (2 \cos(6y_2) - y_1^2)}{\sin(4y_2) + 3}, \quad y_1(0) = 1/2,$$

$$\dot{y}_2 = 2 - \frac{\varepsilon y_1^3}{\sin(8y_2) - 3}, \quad y_2(0) = 1.$$

$$4.24. \quad \dot{y}_1 = 3 - \frac{\varepsilon y_2^2}{\sin(8y_1) - 3}, \quad y_1(0) = 1/2,$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{\varepsilon (y_2^3 + 3 \sin(6y_1))}{\cos(4y_1) - 2}, \quad y_2(0) = 1.$$

$$4.25. \quad \dot{y}_1 = \frac{1}{3} - \frac{\varepsilon y_2^3}{\cos(4\pi\sqrt{2}y_1) + 2}, \quad y_1(0) = 1/2,$$

$$\dot{y}_2 = \frac{\varepsilon (y_2^2 + 2 \cos(3\pi\sqrt{2}y_1))}{\sin(2\pi\sqrt{2}y_1) - 3}, \quad y_2(0) = 1.$$

$$4.26. \quad \dot{y}_1 = \frac{\varepsilon y_2^3}{\cos(8y_1) - 2} - \frac{1}{2}, \quad y_1(0) = 1/2,$$

$$\dot{y}_2 = \frac{\varepsilon (3 \cos(6y_1) - y_2^2)}{\sin(4y_1) + 3}, \quad y_2(0) = 1.$$

$$4.27. \quad \dot{y}_1 = -\frac{\varepsilon (y_1^2 + 3 \sin(3\pi\sqrt{2}y_2))}{\cos(2\pi\sqrt{2}y_2) - 2}, \quad y_1(0) = 1/2,$$

$$\dot{y}_2 = 2 - \frac{\varepsilon y_1^3}{\sin(4\pi\sqrt{2}y_2) - 3}, \quad y_2(0) = 1.$$

$$4.28. \quad \dot{y}_1 = \frac{\varepsilon (3 \sin(3\pi\sqrt{2}y_2) - y_1^2)}{\cos(2\pi\sqrt{2}y_2) - 3}, \quad y_1(0) = 1/2,$$

$$\dot{y}_2 = 3 - \frac{\varepsilon y_1^3}{\cos(4\pi\sqrt{2}y_2) - 3}, \quad y_2(0) = 1.$$

Библиографический список

1. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: МЦНМО, 2012. — 341 с.
2. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы: Учебник. — Изд. 7-е. — М.: Бином. ЛЗ, 2012. — 636 с.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — Изд. 5-е. — М.: Физматлит, 2004. — 560 с.
4. *Зорич В.А.* Математический анализ. Том 1. — Изд. 6-е, доп. — М.: МЦНМО, 2012. — 700 с.
5. *Калиткин Н.Н.* Численные методы: учебное пособие. — Изд. 2-е, испр. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 586 с.
6. *Козлов А.В.* Моделирование динамических и стохастических систем. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 180 с.
7. *Кондрашов В.Е.* МАТЛАБ как система программирования научно-технических расчетов. — М.: Мир, 2002. — 351 с.
8. *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. — Изд. 4-е, стер. — СПб.: Лань, 2008. — 303 с.
9. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. — Изд. 19-е, стер. — СПб.: Лань, 2013. — 432 с.

10. *Мироновский Л.А., Петрова К.Ю.* Введение в MATLAB: Учебное пособие. — СПб.: СПбГУАП, 2005. — 47 с.
11. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. — М.: Изд-во МГУ, 1995. — 190 с.
12. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1987. — 432 с.
13. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. — 4-е изд. — М.: Физматлит, 2005. — 256 с.
14. *Филлипов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — 2-е изд. — М.: КомКнига, 2007. — 240 с.
15. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Том 1. — Изд. 9-е, стер. — СПб.: Лань, 2008. — 440 с.
16. *Чертов А.Г.* Физические величины. — М.: Высшая школа, 1990. — 335 с.

Оглавление

Предисловие	3
Обозначения	5
1. Нормализация и численное интегрирование модельных уравнений	8
2. Регулярно возмущённые по малому параметру системы	20
3. Асимптотическое разложение Пуанкаре	28
4. Осреднение в системах с быстрой фазой	38
Библиографический список	49

Тем. план 2017, ч. 2, поз. 10

Козлов Александр Владимирович
Задачи по математическому моделированию
Динамические системы

Редактор Е.Л. Мочина
Компьютерная вёрстка А.В. Козлов

Подписано в печать 14.12.17. Бумага писчая. Формат $60 \times 84^{1/16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 3,25. Тираж 150 экз.
Заказ 831/539.

Издательство МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993

Отпечатано с готового оригинал-макета
Типография Издательства МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993