



Е.Б. Кузнецов, С.С. Леонов

МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ
ПО ПАРАМЕТРУ В ЗАДАЧАХ
НЕОБРАТИМОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Е.Б. КУЗНЕЦОВ, С.С. ЛЕОНОВ

**МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ
В ЗАДАЧАХ НЕОБРАТИМОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ**

Москва
Издательство МАИ
2020

ББК 22.161.1
К89

К89 Кузнецов Е.Б., Леонов С.С.

Метод продолжения решения по параметру в задачах необратимого деформирования. – М.: Изд-во МАИ, 2020. – 160 с.: ил.

ISBN 978-5-4316-0690-8

В монографии разрабатываются методы численного решения начальных задач, описываемых плохо обусловленными системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с несколькими предельными особыми точками, которые моделируют деформирование металлических конструкций при ползучести вплоть до разрушения. Для решения данного класса задач применяются традиционные явные и неявные методы численного интегрирования задачи Коши, а также метод продолжения решения по наилучшему аргументу. Предложен новый модифицированный наилучший аргумент, устраняющий некоторые недостатки наилучшего аргумента.

Монография предназначена для научных работников и инженеров, специализирующихся в области вычислительной и прикладной математики и механики, а также для аспирантов и студентов.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *А.Н. Данилин*;
доктор физико-математических наук, профессор *Е.А. Лопаницын*

ISBN 978-5-4316-0690-8

© Московский авиационный
институт (национальный
исследовательский университет), 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	8
Глава 1. Традиционные методы решения задач ползучести	19
1.1 Ползучесть и длительная прочность металлов .	19
1.1.1 Теория структурных параметров Ю. Н. Работнова	20
1.1.2 Определяющие уравнения в энергетической форме	23
1.2 Дифференциальные уравнения с одной предельной особой точкой	26
1.2.1 Модель чистого растяжения трубок из стали X18H10T	26
1.2.2 Моделирование процесса ползучести для образцов из сплава ОТ-4	34
1.2.3 Анализ полученных расчетных данных .	44
1.3 Дифференциальные уравнения с двумя предельными особыми точками	47
1.3.1 Модель растяжения образцов из стали 45	47
1.3.2 Модель растяжение образцов из сплава ЗВ	55
1.3.3 Анализ полученных расчетных данных .	61
Глава 2. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация	65
2.1 Метод продолжения решения по параметру для систем ОДУ	66
2.1.1 Традиционный подход	66
2.1.2 Параметризация решения. Общий подход	68
2.1.3 Наилучшая параметризация	69
2.2 Наилучшая параметризация в задачах ползучести	72
2.2.1 Наилучшая параметризация задачи растяжения образцов из стали 45	72
2.2.2 Наилучшая параметризация задачи растяжения образцов из сплава ЗВ	75

2.2.3	Наилучшая параметризация задачи растяжения образцов из сплава ОТ-4	78
2.2.4	Анализ результатов наилучшей параметризации	82
Глава 3. Продолжение решения по модифицированному наилучшему аргументу		86
3.1	Модификация наилучшего аргумента продолжения для систем ОДУ	88
3.1.1	О направлениях отсчета аргументов λ и κ в окрестности точки интегральной кривой	88
3.1.2	Суммирование локальных отклонений между направлениями отсчета аргументов λ и κ в рассматриваемой области	110
3.1.3	Эквивалентность аргументов λ и κ	114
3.2	Модифицированный наилучший аргумент в задачах ползучести	119
3.2.1	Аргумент κ для задачи растяжения образцов из стали 45	120
3.2.2	Аргумент κ для задачи растяжения образцов из сплава ЗВ	128
3.2.3	Аргумент κ для задачи растяжения образцов из сплава ОТ-4	132
3.2.4	Анализ применения модифицированного наилучшего аргумента	138
Библиографический список		141
Приложение. Результаты экспериментов		154
Список сокращений		159

ПРЕДИСЛОВИЕ

Монография написана на основе теоретических исследований, проведенных авторами за последние восемь лет в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

В данной монографии рассматриваются плохо обусловленные начальные задачи ползучести, интегральные кривые которых содержат несколько предельных особых точек, и даются новые подходы к их решению на основе метода продолжения решения по наилучшему аргументу и его модификациям.

Монография состоит из введения, трех глав, библиографического списка и приложения.

Во *введении* обосновывается актуальность и новизна рассматриваемых задач, а также дается обзор работ, посвященных ползучести элементов конструкций и решению жестких и плохо обусловленных задач.

В *первой главе* даны основные сведения о ползучести и длительной прочности металлических конструкций. Приведены определяющие соотношения теории структурных параметров Ю. Н. Работнова и энергетического варианта теории ползучести в форме систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с несколькими предельными особыми точками. Эти соотношения используются для описания процесса деформирования в условиях ползучести вплоть до разрушения. Рассмотрено применение традиционных явных и неявных методов решения начальных задач для систем ОДУ к расчету ползучести и длительной прочности металлических конструкций. Показаны особенности и вычислительные трудности, возникающие при расчете деформационно-

прочностных характеристик упрочняющихся и неупрочняющихся конструкций.

Во *второй главе*, для устранения особенностей определяющих уравнений ползучести и длительной прочности, предложен общий алгоритм метода продолжения решения по параметру, заключающийся в смене исходного аргумента задачи ползучести – времени – на новый. При этом исходная задача преобразуется в задачу без особенностей. Среди всех аргументов продолжения решения выделен наилучший аргумент, доставляющий исходной системе ОДУ наилучшую обусловленность, и дан алгоритм преобразования к нему – наилучшая параметризация (λ -преобразование). Показаны преимущества и недостатки наилучшей параметризации применительно к решению задач ползучести.

В *третьей главе* для сглаживания некоторых недостатков наилучшей параметризации предложен новый модифицированный наилучший аргумент, получаемый из наилучшего путем нелинейного преобразования. Модифицированный аргумент по свойствам близок к наилучшему, но дает более простой вид преобразованной им задачи. Доказаны локальные условия, при которых направление отсчета модифицированного аргумента будет бесконечно мало отличаться от касательного направлению к интегральной кривой рассматриваемой задачи. В классе модифицированных аргументов специального вида, применяемых к задачам ползучести, доказана единственность наилучшего аргумента. Также дана мера, позволяющая сопоставлять обусловленности задач, преобразованных к модифицированному аргументу, с наилучшей. На примере решения практических задач показана эффективность применения модифицированных аргументов разного вида.

В *приложении* представлены результаты экспериментов, проводимых О. В. Сосниным, Б. В. Горевым, А. Ф. Никитенко и их учениками в Институте гидродинамики СО РАН для образцов из стали 45 и титановых сплавов ОТ-4 и ЗВ. Все данные взяты из материалов, опубликованных в открытой печати.

Основные научные результаты, представленные в моногра-

фии, получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-19-00474).

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам монографии профессорам Александру Николаевичу Данилину и Евгению Анатольевичу Лопаницыну за обсуждение полученных результатов.

Также авторы хотели бы поблагодарить своих коллег Александра Николаевича Васильева, Дмитрия Альбертовича Тархова, Алексея Александровича Семенова и Владимира Васильевича Карпова за ценные замечания, сделанные в процессе совместной работы.

Особую благодарность авторы выражают своему учителю Владимиру Ивановичу Шалапилину. Также особую благодарность один из соавторов книги хотел бы выразить своим родителям Галине Владимировне Леоновой и Сергею Алексеевичу Леонову за любовь и поддержку.

ВВЕДЕНИЕ

В последние несколько лет в России все более остро ощущается потребность в быстрой и эффективной модернизации военно-промышленного комплекса. Но не стоит понимать модернизацию только как создание новых конструкций и механизмов, также необходимо уделять должное внимание следующим направлениям:

- 1) получению, исследованию и внедрению новых материалов и сплавов, в особенности композитов;
- 2) экспериментальному изучению физических свойств элементов конструкций при различных внешних и внутренних воздействиях и формированию на этой основе общезначимых физических теорий и моделей;
- 3) созданию эффективных алгоритмов исследования полученных общезначимых моделей, на базе которых разрабатываются программные комплексы;
- 4) сопоставлению экспериментальных и программных результатов исследования с целью повышения качества моделей, алгоритмов и программных комплексов.

В монографии рассматриваются задачи механики деформируемого твердого тела и разрабатываются эффективные методы их решения. Конечно же, подобные задачи являются лишь малой частью описанной выше проблематики, но тем не менее они играют значительную роль в машиностроении, авиационной и космической отраслях. Основное внимание уделяется задачам определения напряженно-

деформированного состояния элементов конструкций, сделанных из металлов, в широком диапазоне температурно-силовых нагрузок при учете ползучести материала.

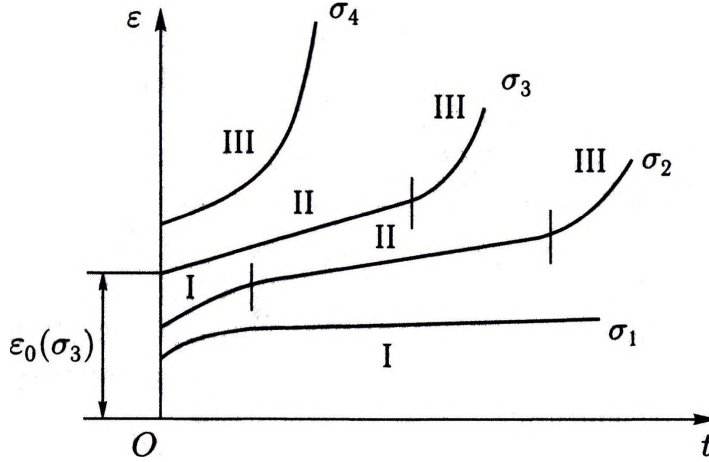
Термином «ползучесть», согласно известной монографии Ю. Н. Работнова [64, с. 9], «будем называть всю совокупность явлений, которые можно объяснить, допустив, что зависимость между напряжениями и деформациями содержит время, явно или через посредство некоторых операторов». Более узкое определение в работе [58, с. 241] дает Н. Н. Малинин, оно заключается в следующем: «Напряжения и деформации, возникшие при нагружении деталей, изменяются во времени, даже если нагрузки остаются постоянными. Это явление называют ползучестью материала. Одну сторону этого явления – изменение во времени деформаций – называют собственно ползучестью или последствием, а другую – изменение во времени напряжений – релаксацией».

Свойства ползучести обнаруживают материалы различной природы: металлы, пластмассы, горные породы, бетон, естественные и искусственные камни, лед и другие [64, с. 9]. Ползучесть у металлических материалов в холодном состоянии практически отсутствует. Но во многих практических задачах различные конструкции эксплуатируются в условиях высокотемпературной ползучести при сложном напряженном состоянии [24]. Примерами таких конструкций могут служить трубопроводы, диски и лопатки газовых турбин, элементы энергосиловых установок, детали авиационных конструкций и т. д.

На рисунке приведены кривые, изображающие зависимости деформации от времени при различных напряжениях. На кривой $\varepsilon(t)$, соответствующей напряжению σ_2 , можно выделить три четко выраженных участка (стадии ползучести) [64, с. 168; 50, с. 20]:

- I – неустановившаяся ползучесть, т. е. участок, на котором скорость ползучести монотонно уменьшается до своего наименьшего значения;
- II – установившаяся ползучесть, т. е. участок, на котором скорость ползучести сохраняет постоянное наименьшее значение;

III – участок ускоряющейся ползучести, предшествующий разрушению.



Зависимости деформации ε от времени t

В предположении, что время нагружения до заданного значения напряжения мало по сравнению с длительностью испытания, кривые $\varepsilon(t)$ начинаются со значения деформации ε_0 , соответствующего мгновенному нагружению. Мгновенная деформация складывается из упругой ε^e и пластической ε^p составляющих. Разность между полной и мгновенной деформациями есть деформация ползучести ε^c (в дальнейшем верхний индекс c при обозначении деформации ползучести будет опускаться) [50, с. 19-20].

В зависимости от значения напряжения, на кривой $\varepsilon(t)$ могут отсутствовать некоторые стадии ползучести, как это показано на рисунке.

Впервые ползучесть наблюдалась еще в начале XIX века в экспериментах Клода Луи Мари Анри Навье (Navier, 1826), Густава Гаспара Кориолиса (Coriolis, 1830) и Луи Жозефа Вика (Vicat, 1834) [3, с. 64-65; 4, с. 7-14]. Систематические экспериментальные и теоретические исследования всех стадий пол-

зучести начались только в середине XX века и вплоть до сегодняшнего дня проводились такими учеными, как А. А. Ильющин, Ю. Н. Работнов, Л. М. Качанов, Б. Е. Победря, Н. Н. Малинин, С. А. Шестериков, О. В. Соснин, Н. Х. Арутюнян, А. М. Локощенко, С. Т. Милейко, И. И. Трунин, А. Л. Аршакуни, А. Ф. Никитенко, Б. В. Горев, И. Ю. Цвелодуб, А. М. Симонян, А. А. Поздеев, А. А. Лебедев, Г. С. Писаренко, Г. М. Хажинский, П. А. Павлов, В. П. Радченко, W. Prager, A. Nadai, F. G. Odqvist, R. W. Bailey, A. E. Johnson, J. Marin, C. R. Soderberg, D. R. Hayhurst, H. Altenbach, D. Krajcinovic, F. A. Leckie, F. Garofalo, J. Betten, P. V. Davies, B. F. Dyson, G. W. Greenwood, W. Trampczynski, J. T. Henderson, и другими исследователями.

В работах указанных ученых теория ползучести оформилась в эффективный инструмент исследования элементов конструкций на длительную прочность при деформировании под действием различных температурно-силовых нагрузок. Под длительной прочностью элемента конструкции понимается время, в течение которого рассматриваемый элемент конструкции под действием заданных внешних нагрузок не разрушится. Подробнее развитие теории ползучести вплоть до сегодняшнего дня рассмотрено в обзоре А. Е. Johnson'a [94] и цикле работ С. А. Шестерикова и А. М. Локощенко [49, 52–55, 57, 88]. Широкий по охвату теоретический и экспериментальный материал в области ползучести металлов представлен в справочнике [31] под редакцией С. А. Шестерикова.

В последние десятилетия в России и за рубежом появляется большое количество работ, посвященных экспериментальным исследованиям процесса ползучести, направленным на обоснование используемых в теориях ползучести гипотез, исследованию деформирования при сложном напряженном состоянии [49, 53, 55], эффекта виброползучести [48], влиянию агрессивной среды на процесс деформирования [51, 52] и т. д.

Таким образом, актуальность исследования ползучести металлических конструкций, моделирования этого процесса и разработки эффективных методов расчета полученных моделей обуславливается требованиями надежности при эксплуатации элементов конструкций, работающих при высоких и

умеренных температурах под действием различных силовых нагрузок.

Также в последние годы наиболее перспективной технологией обработки материалов и формообразования деталей является деформирование как в условиях высокотемпературной ползучести, так и при медленном режиме ползучести. Подобным исследованиям посвящены диссертационные работы Б. В. Горева [20] и К. С. Бормотина [8]. Кроме того, при расчете деформационно-прочностных характеристик конструкции при высоких температурах, в том числе близких к температуре плавления, неучет ползучести материала может привести к значительному отклонению полученных значений от реальных, наблюдаемых в эксперименте. Это можно видеть, например, при сравнении результатов, представленных в книге С. П. Тимошенко и Дж. Гудьера по теории упругости [82], с результатами монографии О. В. Соснина с соавторами [78]. Все это говорит о том, что задачи ползучести возникают в различных областях машиностроения и на различных этапах эксплуатации элементов конструкций от создания до разрушения. Однако само описание ползучести элементов конструкций сопряжено с некоторыми сложностями:

1. Теория ползучести сформировалась как отдельная ветвь механики деформируемого твердого тела в 40-х годах XX века, но и на данный момент нет единого подхода к описанию этого явления. Существует несколько десятков различных теорий ползучести, каждая из которых использует свои гипотезы и допущения [67].
2. Уравнения любой теории ползучести обязательно содержат набор материальных констант, так называемых характеристик ползучести. Эти параметры зависят не только от свойств используемого материала и состояния конструкции, но и от условий нагружения, таких, как уровень нагрузки, температура, режим нагружения. По этой причине задача определения значений характеристик ползучести может оказаться весьма трудоемкой.
3. Исходя из физического смысла, можно сделать вывод,

что в момент разрушения конструкции скорости деформации должны неограниченно возрастать. Таким образом, решение задачи определения напряженно-деформированного состояния конструкции в условиях ползучести вплоть до разрушения сводится к решению начальной или граничной задачи для системы ОДУ с предельными особыми точками, т. е. такими точками, в которых правые части ОДУ обращаются в бесконечность. Поскольку используется множество материалов и способов нагружения, у рассматриваемой системы ОДУ может быть несколько предельных особых точек.

В связи с вышесказанным, все еще остро ощущается потребность в разработке эффективных методов расчета моделей, базирующихся на уравнениях известных теорий ползучести. Так, уже моделирование установившейся и ускоренной ползучести вплоть до разрушения приводит к плохо обусловленной задаче Коши для системы ОДУ с одной предельной особой точкой. Это происходит из-за неограниченного возрастания скорости деформации ползучести в момент разрушения. Для численного расчета подобных задач возможно применение традиционных методов решения задачи Коши (например, явных методов семейства Рунге–Кутты), но погрешность вблизи предельной особой точки может достигать десятков процентов.

В работе [81] подчеркивается, что большинство конструкционных материалов при умеренных температурно-силовых режимах имеют явно выраженную начальную стадию (неустановившуюся ползучесть), неучет которой при моделировании ползучести и длительной прочности может привести к существенным погрешностям. Описание же всех трех стадий ползучести уравнениями кинетической теории [64] приводит к плохо обусловленным начальным задачам для систем ОДУ с двумя предельными особыми точками: в начальный момент времени и при разрушении. Расчет таких задач явными методами малоэффективен. Методы же решения жестких задач на основе неявных схем имеют ряд недостатков, связанных с необходимостью решения систем нелинейных уравнений. По-

этому разработка новых численных методов решения плохо обусловленных задач весьма актуальна.

Многие практические задачи физики и механики моделируются жесткими задачами Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Явные методы для решения таких задач могут оказаться малоэффективными, необходимы специальные методы решения жестких задач, к числу которых относятся и плохо обусловленные задачи.

Уже в конце 40-х – начале 50-х годов XX века в вычислительной практике появился ряд задач, решение которых при помощи традиционных явных методов численного интегрирования задачи Коши сталкивалось со значительными затруднениями. Это задачи моделирования процесса переноса квазилинейным уравнением теплопроводности, электрических цепей с затуханием, процессов горения и химического взаимодействия различных веществ. Начиная с 50-х годов вопросами моделирования и расчета подобных задач занимались многие ученые: Е. В. Ракитский, О. Б. Арушанян, В. В. Бобков, Н. Н. Калиткин, Л. М. Скворцов, Г. В. Демидов, В. И. Лебедев, Е. А. Новиков, С. С. Артемьев, С. W. Gear, G. Dahlquist, Н. Н. Rosenbrock, J. D. Lambert, Ch. Lubich, G. Wanner, E. Hairer, D. F. Griffiths, B. Lindberg, J. G. Verver и другие. Наиболее фундаментальной работой по методам решения жестких задач является книга Э. Хайрера и Г. Ваннера [84], также стоит упомянуть книги К. Деккера, Я. Вервера [29] и Дж. Холла, Дж. Уатта [74]. Среди отечественных авторов выделим монографии Е. А. Новикова [62] и Ю. В. Ракитского с соавторами [65].

В последнее время появилось множество публикаций, посвященных различным подходам к решению жестких задач. В работе [32] А. М. Зубановым, Н. И. Коконковым и П. Д. Ширковым предложено обобщение одностадийной схемы Розенброка с комплексными коэффициентами. Помимо этого, П. Д. Ширковым показана невозможность построения LN -устойчивых методов Розенброка–Ваннера для расчета жестких задач [89]. Большое количество статей в рассматриваемой области принадлежит Л. М. Скворцову Им построены явные стабилизированные (имеющие расширенные вдоль ве-

щественной оси области устойчивости) методы Рунге–Кутты 2-го и 3-го порядков и исследована их точность при решении жестких задач [72], рассмотрены явные адаптивные методы Рунге–Кутты (коэффициенты которых настраиваются на решение конкретной задачи) и показана эффективность их применения при решении жестких и осциллирующих задач [70, 71], получены эффективные реализации неявных методов Рунге–Кутты 2-го порядка и диагонально-неявных методов Рунге–Кутты 3-го и 4-го порядков [68, 69, 73]. В работах Г. Ю. Куликова с соавторами разработан новый класс неявных (диагональных и симметричных) гнездовых схем численного решения жестких задач [47, 96, 97], а также предложен ряд подходов к оценке локальной и глобальной погрешности численного решения задачи Коши [10, 98, 106]. В работах Н. Н. Калиткина совместно с его коллегами и учениками исследована применимость обратных схем Рунге–Кутты и метода длины дуги для решение жестких задач для систем ОДУ и дифференциально-алгебраических уравнений, также рассмотрено решение сверхжестких задач [5, 34, 35], в том числе с контрастными структурами [6, 7]. Различным вопросам, связанным с решением жестких задач для систем ОДУ, посвящены работы Е. А. Новикова и А. Е. Новикова [60, 61], Ю. А. Сигунова и И. Р. Диденко [66], а также М. В. Булатова с соавторами [9].

В зависимости от спектра матрицы Якоби жесткие задачи разделяют на жесткие (интегральные кривые быстро сходятся), осциллирующие (присутствуют собственные числа с большими мнимыми частями) и плохо обусловленные (интегральные кривые быстро расходятся) [34]. Решение плохо обусловленных и сингулярно возмущенных задач рассматривали многие авторы, в числе которых А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, Ю. Е. Бояринцев, В. И. Шалашилин, Е. Б. Кузнецов, В. Ф. Бугузов, S. L. Campbell, Ch. Lubich, M. Roche, P. Lotstedt, K. Nipp, D. Stoffer, R. E. O'Malley и другие.

Одним из наиболее эффективных подходов к решению плохо обусловленных задач является метод продолжения решения по параметру и наилучшей параметризации [87], также известный как метод длины дуги. Идея данного мето-

да восходит к работам М. Е. Лаэя [100, 101] и Д. Ф. Давиденко [27, 28], в которых рассматривалось численное решение систем нелинейных уравнений с использованием процедуры смены параметра. Позднее, в работах Э. И. Григोलюка и В. И. Шалашилина для решения систем трансцендентных и алгебраических уравнений в задачах механики деформируемого твердого тела, прохождения предельных особых точек и построения замкнутых кривых множества решений вводится параметр λ , названный наилучшим и отсчитываемый по касательной вдоль кривой множества решений рассматриваемой задачи [26]. Впервые в работе И. И. Воровича и В. Ф. Зипаловой [17] сформулирована гипотеза о том, что параметр λ будет наилучшим. Доказательство данной гипотезы было намечено в статье Э. Рикса [103], полное же доказательство дано лишь в работах В. И. Шалашилина и Е. Б. Кузнецова для систем алгебраических и трансцендентных уравнений [87]. Впоследствии В. И. Шалашилиным, Е. Б. Кузнецовым и их учениками было рассмотрено множество задач и показана эффективность наилучшей параметризации при решении начальных и граничных задач для систем дифференциальных, дифференциально-алгебраических, интегродифференциально-алгебраических уравнений с предельными особыми точками, уравнений с запаздывающим аргументом и задач, множества решений которых содержат точки бифуркации [38–40]. В работах этих авторов показано, что для плохо обусловленных задач переход к наилучшему параметру дает значительное преимущество при численном решении по сравнению с другими методами. Однако, в общем случае, для жестких задач такая параметризация может не давать каких-либо улучшений. Помимо Е. Б. Кузнецова и его учеников, метод продолжения решения по параметру в своих работах использовали Н. Н. Калиткин, С. С. Гаврюшин, Е. А. Лопаницын, В. В. Карпов, И. П. Пошивайло, А. А. Семенов, E. Riks, A. E. Crisfield, E. L. Allgower, K. Georg, E. Ramm, E. Carrera, Y. F. Luo, J. G. Teng и другие ученые.

В последнее время метод продолжения решения по параметру (метод длины дуги) находит широкое применение в различных теоретических и прикладных исследованиях как рос-

сийских, так и зарубежных ученых. Кроме применения продолжения решения по параметру к решению жестких задач в статьях Н. Н. Калиткина [5, 35], этот подход успешно использовался при исследовании устойчивости панелей конических оболочек из ортотропных материалов при деформировании [104], при решении гиперболических систем с предельными особыми точками и физически нелинейных задач [102, 105] и т. д. Специальные виды параметров продолжения используются в своих работах Е. А. Лопаницын при расчете тонких полых оболочек с учетом конечных прогибов [25] и С. С. Гаврюшин при расчете напряжений и деформаций сложных стержневых и оболочечных элементов конструкций [18].

Авторы рассматривают решение плохо обусловленных начальных и краевых задач ползучести металлов, связанных с определением деформационно-прочностных характеристик конструкций, работающих при высоких температурах в условиях сложного напряженного состояния. В качестве метода численного решения используются продолжение решения по наилучшему аргументу и его модификации. В работах [43, 45, 46] исследовано применение наилучшей параметризации к задачам растяжения стержней и чистого изгиба балок в условиях ползучести при однородном и неоднородном напряженно-деформированном состоянии. Показано, что для конструкций из упрочняющихся материалов переход к наилучшему аргументу дает значительные преимущества в быстродействии и точности. В то же время для неупрочняющихся конструкций эффективность наилучшего аргумента незначительна. Для повышения быстродействия традиционных численных методов решения задачи Коши предложено использовать аргументы продолжения решения более общего вида, называемые модифицированными наилучшими [41, 44]. Использование различных видов модифицированных аргументов позволяет упрощать вид преобразованных определяющих соотношений ползучести, что дает возможность сократить время счета [42].

Другим направлением исследований является применение нейросетевых методов к моделированию процессов ползучести и разрушения металлических конструкций [12]. Основ-

ные полученные результаты легли в основу главы монографии [16]. Среди вариантов нейросетевых методов выбран подход, основанный на применении полносвязных многослойных сетей прямого распространения. Для задач математической физики применение данного типа сетей исследуется в работах А. Н. Васильева и Д. А. Тархова [14–16]. С использованием методов нейросетевого моделирование авторами разработана методология идентификации материальных констант, входящих в определяющие уравнения ползучести и длительной прочности [11, 13]. Также показана возможность применения нейронных сетей при решении некорректных и недоопределенных краевых задач [92, 99], к которым относится задача определения установившегося напряженно-деформированного состояния в сплошном вращающемся диске постоянной толщины в условиях ползучести [76].

Полученные результаты находятся в русле мировых исследований применения искусственных нейронных сетей к задачам исследования структуры и поведения различных материалов при деформировании, в том числе и в условиях ползучести, проводящихся с 90-х годов XX века [91]. В отечественной литературе публикаций по данной тематике нет, но за рубежом вышел ряд статей, посвященных применению нейросетевого моделирования к решению задач ползучести. Здесь следует отметить работы L. Val и F. Buyle-Bodin [90], S. Kmet, P. Sincak и P. Stehlik [95].

В монографии представлены основные результаты разработки новых эффективных методов численного решения плохо обусловленных задач Коши для систем ОДУ с несколькими предельными особыми точками, в основе которых лежит метод продолжения решения по параметру. В качестве приложения предложенных методов рассматриваются тестовые задачи расчета длительной прочности металлических конструкций в условиях ползучести.

Глава 1. ТРАДИЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ

Как отмечалось во введении, в течение последних пятидесяти лет большое внимание уделяется исследованию ползучести материала применительно к расчету деформационно-прочностных характеристик элементов конструкций, эксплуатируемых при различных температурно-силовых режимах. Во многих случаях процесс ползучести моделируется начальными задачами для систем нелинейных ОДУ, аналитическое решение которых возможно только в исключительных случаях. При этом численное решение подобных задач осложнено тем, что используемые определяющие уравнения ползучести могут быть с предельными особыми точками. Традиционно при расчете конструкций на ползучесть применяются численные методы, например явные методы семейства Рунге–Кутты, или численно-аналитические методы, дополняемые упрощающими гипотезами для преодоления предельных особых точек. В данной работе также начнем исследование с рассмотрения применения явных и неявных методов решения задачи Коши для вычисления длительной прочности элементов конструкций, работающих в условиях ползучести. Но вначале кратко остановимся на моделях, используемых в монографии для описания процесса ползучести вплоть до разрушения.

1.1 ПОЛЗУЧЕСТЬ И ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ МЕТАЛЛОВ

Основной проблемой, возникающей при расчете элементов конструкций на прочность, является недопущение их разру-

шения, поэтому особое значение приобретает проблема длительной прочности металлов, из которых изготовлены эти конструкции.

Общепринятая схема расчета на длительную прочность конструкции разбивается на две самостоятельные задачи [24]: 1) определение напряженно-деформированного состояния конструкции с использованием одной из теорий ползучести; 2) определение долговечности конструкции с использованием одного из критериев длительной прочности.

В конце 50-х годов XX века Л. М. Качанов [36] и Ю. Н. Работнов [63] пришли к выводу, что применявшиеся в то время термины механики деформируемого твердого тела (тензоры напряжений и деформаций, вектор перемещений) недостаточно для описания процесса длительного разрушения материалов и элементов конструкций в условиях ползучести. Ими был предложен новый подход к исследованию длительной прочности, названный кинетическим. Этот подход основан на использовании введенного параметра поврежденности ω . Исходному состоянию материала ($t = 0$) соответствует значение $\omega = 0$, при разрушении параметр поврежденности ω становится равным единице [53].

При использовании уравнений кинетической теории ползучести задачи определения напряженно-деформированного состояния и длительной прочности конструкции совмещаются. Рассмотрим далее два варианта кинетической теории ползучести.

1.1.1 Теория структурных параметров Ю. Н. Работнова

Одним из наиболее распространенных подходов к моделированию процессов ползучести и разрушения металлических конструкций является использование уравнений теории структурных параметров Ю. Н. Работнова [64, с. 363-364; 22], которые в одномерном случае с одним скалярным параметром поврежденности можно записать в виде системы ОДУ второго порядка относительно деформации ползучести ε и скалярного параметра поврежденности ω :

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{f_1(\sigma, T)}{\Psi(\omega, T)}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{f_2(\sigma, T)}{\Omega(\omega, T)}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где σ – действующее напряжение, в общем случае переменное, t – время, T – температура; функциональные зависимости, входящие в правые части, определяются по результатам эксперимента.

В работе [93] с феноменологической позиции обоснована возможность конкретизации системы ОДУ (1.1) в виде

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{f_1(\sigma, T)}{\Psi(\omega, T)}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{f_2(\sigma, T)}{\Psi(\omega, T)}. \end{cases} \quad (1.2)$$

В случае постоянной температуры $T = \text{const}$ уравнения системы (1.2) упрощаются:

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{f_1(\sigma)}{\Psi(\omega)}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{f_2(\sigma)}{\Psi(\omega)}. \end{cases} \quad (1.3)$$

В качестве начальных условий для системы ОДУ (1.3) берутся однородные

$$\varepsilon(0) = 0, \omega(0) = 0. \quad (1.4)$$

Искомыми функциями в задаче (1.3)-(1.4) являются $\varepsilon(t)$ и $\omega(t)$, $\sigma(t)$ – известная функция времени, в частности постоянная величина. Решение задачи ищется в области $V = \{(\varepsilon, \omega, t) \mid 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*, 0 \leq \omega \leq 1, 0 \leq t \leq t^*\}$, где ε^* – значение деформации ползучести в момент разрушения, t^* – длительная прочность конструкции.

Отметим некоторые особенности системы (1.3). Рассматриваются процессы деформирования, для которых $\dot{\varepsilon} \geq 0$ и $\dot{\omega} \geq 0$, т. е. процессы деформирования и накопления повреждений в материале предполагаются монотонными. Функции $f_1(\sigma)$ и $f_2(\sigma)$ будем считать монотонными положительными, $\sigma(t)$ будем полагать непрерывной функцией аргумента t . В качестве $\Psi(\omega)$ будем рассматривать неотрицательные функции, причем для неупрочняющихся материалов, т. е. таких материалов, для которых стадия неустановившейся ползучести отсутствует, будем применять монотонно убывающие функции, такие, что $\Psi(1) = 0$, а для упрочняющихся материалов – немонотонные унимодальные функции, для которых $\Psi(0) = 0$, $\Psi(1) = 0$.

Точное аналитическое решение задачи (1.3)-(1.4) может быть найдено, если удастся проинтегрировать второе уравнение системы (1.3):

$$\int_0^{\omega} \Psi(\omega) d\omega = \int_0^t f_2[\sigma(t)] dt. \quad (1.5)$$

После выполнения интегрирования решение может быть записано в неявном виде:

$$F(\omega) = R(t).$$

Используем условие $F'(\omega) = \Psi(\omega) \geq 0$. По теореме о неявной функции [37, с. 312], в открытой области $V_0 = \{(\varepsilon, \omega, t) \mid 0 < \varepsilon < \varepsilon^*, 0 < \omega < 1, 0 < t < t^*\}$ существует обратная функция $\omega = F^{-1}(t)$. По начальным условиям (1.4) можно определить обратную функцию и при $t = 0$, а учитывая, что в момент разрушения $\omega(t^*) = 1$, можно также установить существование обратной функции $\omega = F^{-1}(t)$ при $t = t^*$. Таким образом, решение для параметра поврежденности может быть записано в явном виде:

$$\omega = F^{-1}[R(t)] = H(t). \quad (1.6)$$

Проведя аналогичные рассуждения для функции $R(t)$, найдем явное выражение для времени

$$t = R^{-1} [F(\omega)],$$

а полагая $\omega = 1$ в момент разрушения, получим соотношение для длительной прочности

$$t^* = R^{-1} [F(1)]. \quad (1.7)$$

Деформацию ползучести ε можно выразить в виде

$$\varepsilon(t) = \int_0^\omega \frac{f_1[\sigma(t)]}{f_2[\sigma(t)]} d\omega = \int_0^t \frac{f_1[\sigma(t)]}{f_2[\sigma(t)]} \dot{H}(t) dt$$

или (1.8)

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{f_1[\sigma(t)]}{\Psi[H(t)]} dt,$$

где $\dot{H}(t)$ – первая производная функции $H(t)$ из равенства (1.6) по времени t .

Таким образом, полное решение задачи (1.3)-(1.4) в интегральном виде дается соотношениями (1.6), (1.7) и (1.8).

1.1.2 Определяющие уравнения в энергетической форме

В начале 70-х годов XX века О. В. Сосниным была предложена и экспериментально обоснована конкретизация кинетических уравнений теории структурных параметров Ю. Н. Работнова [64, с. 223-224]. В качестве параметра поврежденности ω О. В. Соснин предложил использовать величину удельной работы рассеяния A , и в качестве меры интенсивности процесса ползучести – величину удельной мощности рассеяния W . Эта теория получила название энергетического варианта теории ползучести (ЭВТП). Дальнейшее развитие ЭВТП получил в работах О. В. Соснина и его учеников [23, 59, 78]. Основные гипотезы, на которых базируется данная теория, следующие [78, с. 18-19; 77]:

1. Процессы ползучести и разрушения есть два сопутствующих и влияющих друг на друга процесса.
2. За меру интенсивности процесса ползучести принимается величина удельной мощности рассеяния W , которая в линейном случае определяется выражением $W = \sigma_{kl}\eta_{kl}$, где $\eta_{kl} = d\varepsilon_{kl}/dt$ – компоненты тензора скоростей деформации ползучести ε_{kl} , σ_{kl} – компоненты тензора напряжений. Здесь предполагается суммирование по повторяющимся индексам. За меру повреждаемости материала принимается величина удельной работы рассеяния A , которая в линейном случае определяется выражением $\int_0^t W dt$. Разрушение материала наступает при достижении удельной работой рассеяния критического значения A_* , являющегося функцией температуры.
3. Предполагается существование уравнения состояния, связывающего оба процесса ползучести и разрушения по выбранным выше мерам, в виде [77]

$$W = F(\sigma_i, A, T, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k), \quad (1.9)$$

где $\sigma_i = \sqrt{3s_{kl}s_{kl}/2}$ – интенсивность напряжений, $s_{kl} = \sigma_{kl} - \sigma_0\delta_{kl}$ – компоненты девиатора тензора напряжений, $\sigma_0 = \sigma_{kl}\delta_{kl}/3$ – гидростатическая (шаровая) составляющая тензора напряжений, δ_{kl} – символы Кронекера, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ отождествляются с параметрами поврежденности.

4. Далее ограничимся одним параметром поврежденности ω , кинетическое уравнение для которого запишем в виде [77]

$$\frac{d\omega}{dt} = \Psi(\sigma_i, A, T, \omega), \quad \omega(x_k, 0) = 0, \quad \omega(x_k^*, t^*) = 1. \quad (1.10)$$

Считается, что в случае неповрежденного материала параметр ω во всех точках конструкции равен нулю. Если в какой-либо точке с координатами x_k^* в момент времени

$t = t^*$ параметр ω достигает значения, равного единице, то говорят, что в этой точке произошло разрушение, а время t^* называют временем начала разрушения конструкции, т. е. длительной прочностью конструкции.

5. Предполагается справедливым закон течения вплоть до разрушения в виде

$$\eta_{kl} = \lambda \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_{kl}},$$

где σ_e – эквивалентное напряжение.

6. Материал считается пластически несжимаемым вплоть до разрушения:

$$\eta_{kl} \delta_{kl} = 0.$$

Экспериментально показано [78, с. 11-17; 77], что кривые ползучести $A = A(t)$ подобны при различных уровнях напряжений и температур. Учитывая этот факт, в одномерном случае можно конкретизировать зависимости (1.9)-(1.10) и представить их в виде

$$\frac{dA}{dt} = \frac{F_1(\sigma, T)}{U_1(A)U_2(\omega)}, \quad (1.11)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{F_2(\sigma, T)}{U_3(A)U_4(\omega)}, \quad (1.12)$$

где функциональные зависимости $F_1, F_2, U_1, \dots, U_4$ определяются в экспериментах [77].

Вместе с уравнением для определения деформации ползучести

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dA}{dt} \quad (1.13)$$

и начальными условиями

$$\varepsilon(0) = 0, \omega(0) = 0, A(0) = 0 \quad (1.14)$$

получим начальную задачу (1.11)-(1.14) в энергетической форме для определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций вплоть до разрушения.

Отметим, что задача (1.11)-(1.14) интегрируется аналитически только в исключительных случаях. Однако для определяющих соотношений энергетического варианта теории ползучести справедливо соотношение [77]

$$\omega = \frac{A}{A_*},$$

связывающее безразмерный параметр поврежденности ω и удельную работу рассеяния A . Используя это соотношение, можно преобразовать задачу (1.11)-(1.14) к виду (1.3)-(1.4). Решение описано в параграфе 1.1.1.

1.2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ОСОВОЙ ТОЧКОЙ

В предыдущем разделе были рассмотрены определяющие соотношения теории структурных параметров Ю. Н. Работнова и их конкретизация в энергетической форме, для которых описана процедура аналитического решения. Но в большинстве случаев точное вычисление интегралов, входящих в соотношения (1.5) и (1.8), невозможно или нецелесообразно. Поэтому основными инструментами расчета моделей ползучести и длительной прочности являются численные и численно-аналитические методы.

Вначале исследуем применение традиционных численных методов решения задачи Коши применительно к двум задачам расчета деформационно-прочностных характеристик элементов конструкций из неупрочняющихся материалов, т. е. таких материалов, у кривых ползучести которых отсутствует начальная стадия неустановившейся ползучести.

1.2.1 Модель чистого растяжения трубок из стали X18H10T

В качестве первой задачи рассмотрим деформирование трубчатых образцов из нержавеющей стали X18H10T под действием постоянной одноосной растягивающей нагрузки при постоянной температуре в условиях ползучести вплоть до разруше-

ния. Для описания данной задачи будем использовать уравнения теории структурных параметров Ю. Н. Работнова вида (1.3), которые, в случае отсутствия упрочнения, запишем в форме [56]

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{A\sigma^n}{(1 - \omega^{r_1})^n}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{B\sigma^k}{(1 - \omega^{r_2})^k}, \end{cases} \quad (1.15)$$

где A, B, n, k, r_1, r_2 – характеристики ползучести и разрушения конструкции.

При анализе деформирования конструкции в условиях ползучести под действием постоянных нагрузок, введем гипотезу о равномерном распределении деформации по длине образца. Тогда, в случае малых деформаций, выражение для напряжения примет вид

$$\sigma(t) = \sigma_0(1 + \varepsilon(t)). \quad (1.16)$$

Здесь σ_0 – начальное напряжение.

Полагая $r_1 = r_2 = r, n = k$ и учитывая соотношение (1.16), перейдем от системы (1.15) к системе

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{A\sigma_0^n(1 + \varepsilon)^n}{(1 - \omega^r)^n}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{B\sigma_0^n(1 + \varepsilon)^n}{(1 - \omega^r)^n}. \end{cases} \quad (1.17)$$

В качестве начальных условий для системы (1.17) будем использовать условия (1.4).

Аналитическое решение задачи (1.17), (1.4) в общем случае невозможно. На это указывает тот факт, что даже при постоянном напряжении $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ задача (1.15), (1.4) интегрируется аналитически только при определенных ограничениях на параметры задачи. Это следует из того, что при

$\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ решение задачи (1.15), (1.4) сводится к интегрированию дифференциального бинома вида $\int_0^t (1 - \xi^r)^{-n} d\xi$.

Из результатов исследований П. Л. Чебышева, посвященных интегрированию иррациональных дифференциалов [86], следует

Утверждение 1.1. *Задача (1.15), (1.4) при постоянных напряжениях $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ интегрируется аналитически тогда и только тогда, когда параметры модели $k = n$ и $r_1 = r_2 = r$ удовлетворяют одному из следующих условий: 1) параметр n – целое число, 2) число $1/r$ является целым, 3) число $n + 1/r$ является целым.*

Для задачи (1.17), (1.4) ситуация только усложнится, что указывает на необходимость применения численных методов решения задачи Коши.

Несмотря на то что в общем случае точное аналитическое решение задач (1.17), (1.4) найти не удастся, можно видеть, что деформация ползучести ε и параметр поврежденности ω пропорциональны:

$$\varepsilon = A/B \cdot \omega, \quad \varepsilon^* = A/B. \quad (1.18)$$

Используя соотношения (1.18), можно получить явное интегральное выражение времени t для задачи (1.17), (1.4):

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{A\sigma_0^n} \int_0^\varepsilon [1 - (B\xi/A)^r]^n (1 + \xi)^{-n} d\xi = \\ &= \frac{1}{B\sigma_0^n} \int_0^\omega (1 - \zeta^r)^n [1 + (A\zeta/B)]^{-n} d\zeta. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Учитывая, что в момент разрушения $\omega = 1$ и $\varepsilon^* = A/B$, из выражения (1.19) найдем соотношения для вычисления длительной прочности рассматриваемой конструкции:

$$\begin{aligned}
t^* &= \frac{1}{B\sigma_0^n} \int_0^1 (1 - \zeta^r)^n [1 + (A\zeta/B)]^{-n} d\zeta = \\
&= \frac{1}{A\sigma_0^n} \int_0^{A/B} [1 - (B\xi/A)^r]^n (1 + \xi)^{-n} d\xi.
\end{aligned}
\tag{1.20}$$

Приведенные результаты получены в работе [56], в ней же представлены результаты испытаний на ползучесть при чистом растяжении 21 образца одной плавки нержавеющей стали X18H10T. Испытывались трубки с внешним диаметром 12 мм, толщиной стенки 0.5 мм и рабочей длиной 70-100 мм при постоянных растягивающей нагрузке (с начальными напряжениями $\sigma_0 = 39.2, 49$ и 58.8 МПа) и температуре 850°C . Экспериментальные результаты обозначены на рис. 1.1 сплошными линиями. Здесь и далее все величины переводятся из системы единиц МКГСС в СИ.

По экспериментальным данным, приведенным на рис. 1.1, в работе [56] определены характеристики ползучести для задачи (1.17), (1.4):

$$\begin{aligned}
n &= 3.2, \quad r = 2.1, \quad A = 6.731 \cdot 10^{-9} \text{ ч}^{-1} \text{ МПа}^{-3.2}, \\
B &= 6.394 \cdot 10^{-8} \text{ ч}^{-1} \text{ ч}^{-1} \text{ МПа}^{-3.2}.
\end{aligned}
\tag{1.21}$$

При значениях материальных констант (1.21) для задачи (1.17), (1.4) в работе [56] получены кривые одноосной ползучести ϵ при начальных напряжениях $\sigma_0 = 39.2, 49$ и 58.8 МПа, обозначенные на рис. 1.1 штриховыми линиями.

В таблице 1.1 приведены теоретико-экспериментальные данные о процессе деформирования трубок из стали X18H10T, где t_e^* и ϵ_e^* – средние для каждого напряжения σ_0 экспериментальные значения длительной прочности и соответствующей ему деформации ползучести, t_a^* – значение длительной прочности, рассчитанное по первой формуле (1.20), ϵ_a^* – значение деформации ползучести в момент разрушения, рассчитанное по второй формуле (1.18).

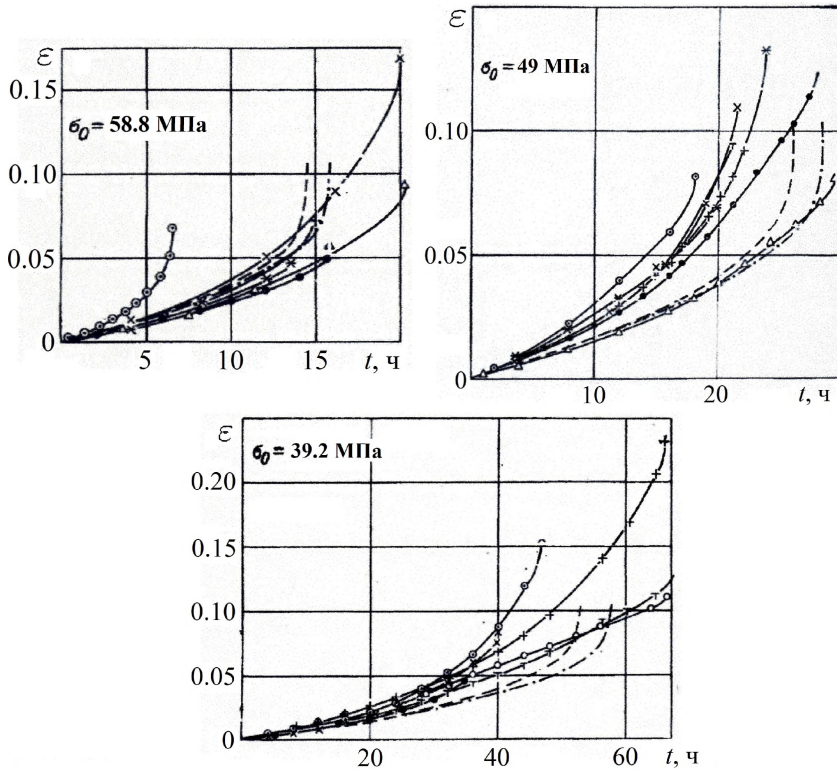


Рис. 1.1. Теоретико-экспериментальные кривые одноосной ползучести для стали X18H10T

Отметим, что задача (1.17), (1.4) имеет особенность. В момент разрушения, т. е. при значении $\omega = 1$, правые части системы (1.17) теряют смысл. Таким образом, момент разрушения является предельной особой точкой, что делает рассматриваемую задачу плохо обусловленной. Это может привести к затруднениям в процессе численного решения.

Рассмотрим применение для решения задачи (1.17), (1.4) традиционных явных методов численного интегрирования задачи Коши [83, с. 154-162]: **1)** метода Эйлера (ЭЯ), **2)** метода Эйлера-Коши (ЭКЯ), **3)** метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности (РК4Я).

Таблица 1.1. Основные теоретико-экспериментальные данные для стали X18H10T

σ_0 , МПа	t_e^* , ч	ε_e^*	t_a^* , ч	ε_a^*
39.2	54.0	0.126	53.0	0.105
49	23.5	0.100	26.0	
58.8	15.5	0.082	14.5	

Вначале используем для численного решения постоянный шаг интегрирования. В таблице 1.2 приведены результаты численного решения задачи (1.17), (1.4) для трех значений начального напряжения $\sigma_0 = 39.2, 49$ и 58.8 МПа с шагом интегрирования h^t по аргументу t , равным 10^{-4} ч, где ε_n^* и ω_n^* – расчетные значения деформации ползучести и параметра поврежденности в момент разрушения соответственно, t_n^* – расчетное значение длительной прочности конструкции, N_s – количество шагов по независимой переменной, t_c – время счета.

Указанные методы реализованы в форме комплекса программ в среде Matlab R2015a. Вычисления, здесь и далее, проводились на персональном компьютере Intel Core i5 – 2410M CPU 2.30 ГГц, 4.00 ГБ ОЗУ, видеокарта NVIDIA GeForce GT540M 2 ГБ, 32 – разрядная операционная система Windows 7 Домашняя базовая Service Pack 1.

Таблица 1.2. Расчетные данные для стали X18H10T при постоянном шаге интегрирования

σ_0 , МПа	ε_n^*	ω_n^*	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод ЭЯ					
39.2	0.1049	0.9961	52.5778	525778	1627
49	0.1045	0.9932	25.7451	257451	786.6
58.8	0.1042	0.9901	14.3655	143655	441.3
Метод ЭКЯ					
39.2	0.1025	0.9736	52.5772	525772	2666
49	0.1037	0.9848	25.7446	267446	1296
58.8	0.1023	0.9722	14.365	143650	723.5

Окончание табл. 1.2

σ_0 , МПа	ε_n^*	ω_n^*	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод РК4Я					
39.2	0.1026	0.9743	52.5772	525772	3945
49	0.1016	0.9654	25.7445	257445	1924
58.8	0.1029	0.9776	14.365	143650	1078

Можно видеть, что расчетные данные, представленные в таблице 1.2, удовлетворительно согласуются с результатами работы [56], отраженными в таблице 1.1 и на рис. 1.1. Но для достижения высокой точности численного решения необходимо значительно уменьшить шаг интегрирования, что делает применение постоянного шага интегрирования малоэффективным. Для преодоления этого недостатка будем использовать переменный шаг интегрирования [85, с. 175-178; 1, с. 71-76] с контролем точности вычислений при оценке локальной погрешности решения по методу Рунге–Ромберга–Ричардсона (метод РРР). Для реализации контроля точности по методу РРР задаются параметры θ_1 , отвечающий за уменьшение шага при чрезмерном увеличении локальной погрешности, и θ_2 , применяемый для увеличения шага интегрирования при чрезмерном уменьшении локальной погрешности.

В таблице 1.3 даны результаты численного решения задачи (1.17), (1.4) для трех значений начального напряжения $\sigma_0 = 39.2, 49$ и 58.8 МПа с переменным шагом при значениях параметров $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = \theta_1/2$, где h_{\min}^t и h_{\max}^t – минимальное и максимальное значения шага интегрирования соответственно, остальные обозначения аналогичны используемым в таблице 1.2. Величина начального шага $h_s^t = 1$ ч.

Таблица 1.3. Расчетные данные для стали X18H10T при переменном шаге интегрирования

σ_0 , МПа	ε_n^*	ω_n^*	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод ЭЯ, $h_{\min}^t = 7 \cdot 10^{-15}$ ч, $h_{\max}^t = 0.0078$ ч					
39.2	0.1053	0.9999	52.5818	14420	80.94
49	0.1053	1	25.7468	14365	80.98

Окончание табл. 1.3

σ_0 , МПа	ε_n^*	ω_n^*	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
58.8	0.1053	0.9999	14.3662	14699	82.17

Метод ЭКЯ, $h_{\min}^t = 4 \cdot 10^{-16}$ ч, $h_{\max}^t = 0.0313$ ч

39.2	0.1053	1	52.5772	4775	47.09
49	0.1053	0.9999	25.7446	4786	47.11
58.8	0.1053	0.9999	14.365	4750	46.93

Метод РК4Я, $h_{\min}^t = 7 \cdot 10^{-12}$ ч, $h_{\max}^t = 0.125$ ч

39.2	0.1052	0.9994	52.5772	985	15.6
49	0.1051	0.9983	25.7446	978	15.6
58.8	0.1052	0.9994	14.365	996	15.75

На рис. 1.2 изображены кривые ползучести для задачи чистого растяжения трубок из стали X18H10T, полученные методом РК4Я с переменным шагом интегрирования при контроле точности вычислений по методу PPP с параметрами $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = \theta_1/2$. Кривые ползучести, полученные с использованием постоянного шага интегрирования, имеют аналогичный вид. Здесь и далее на графиках около кривых отмечено значение начального напряжения σ_0 в мегапаскалях.

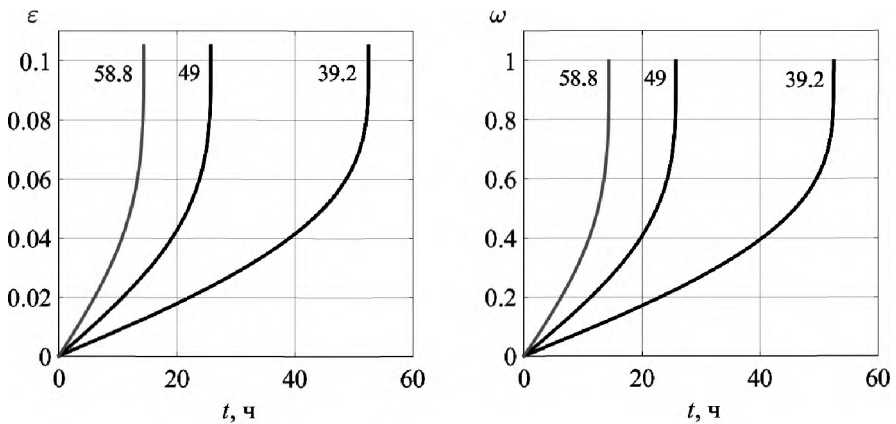


Рис. 1.2. Кривые ползучести для стали X18H10T

На рис. 1.3 даны зависимости шага интегрирования от аргумента t при использовании контроля точности вычислений по методу РРР с параметрами $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = \theta_1/2$. Введены следующие обозначения: а – метод ЭЯ, b – метод ЭКЯ, с – метод РК4Я.

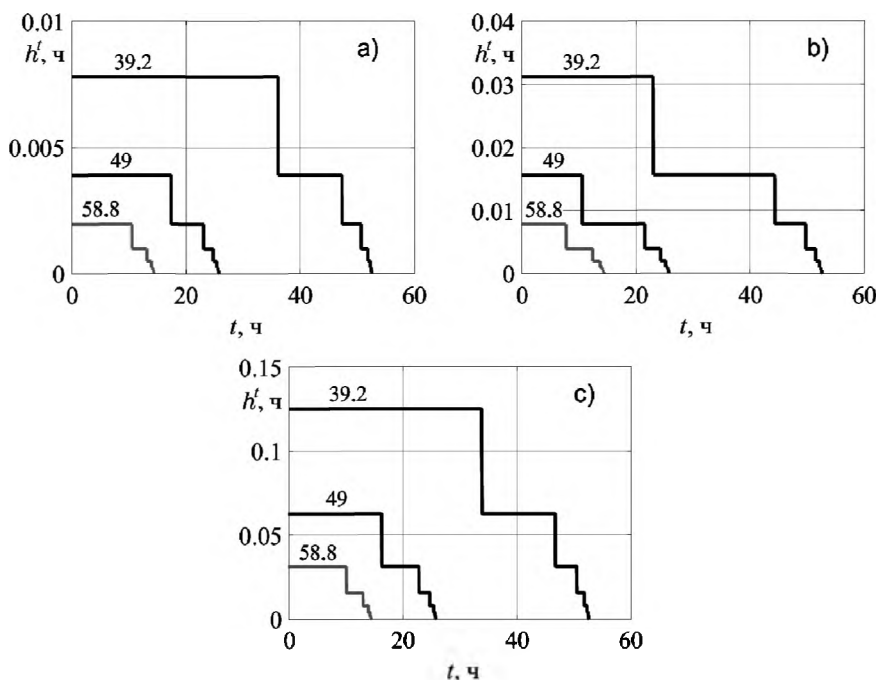


Рис. 1.3. Зависимость шага интегрирования h^t от времени t для задачи (1.17), (1.4)

1.2.2 Моделирование процесса ползучести для образцов из сплава ОТ-4

Существенным недостатком при численном решении задачи (1.17), (1.4) является невозможность нахождения ее аналитического решения, т. е. нельзя оценить абсолютную или относительную погрешность полученного приближенного решения.

Далее рассмотрим задачу, допускающую аналитическое решение. В качестве таковой выберем задачу одноосного растяжения плоских образцов (толщина 1.5 мм, общая длина 180 мм, длина рабочей части 60 мм) из титанового сплава ОТ-4 при постоянных напряжениях и температуре 500 °С [75]. Для ее описания будем использовать конкретизацию определяющих соотношений энергетического варианта теории ползучести (1.11)-(1.13) вида

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dA}{dt}, \\ \frac{dA}{dt} = \frac{f(\sigma)}{\Psi(A)}. \end{cases} \quad (1.22)$$

В качестве функции напряжения будем использовать экспоненциальную зависимость

$$f(\sigma) = Ke^{\beta\sigma}, \quad (1.23)$$

а функцию удельной энергии рассеяния A , учитывая отсутствие упрочнения материала, примем в форме

$$\Psi(A) = (A_* - A)^{-m}. \quad (1.24)$$

Здесь K , β , m – характеристики материала.

Подставляя функции (1.23)-(1.24) в систему (1.22), при $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$, получим

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\sigma_0} \cdot \frac{dA}{dt} = \frac{Ke^{\beta\sigma_0}}{\sigma_0(A_* - A)^m}, \\ \frac{dA}{dt} = \frac{Ke^{\beta\sigma_0}}{(A_* - A)^m}. \end{cases} \quad (1.25)$$

В качестве начальных условий для системы (1.25) примем

$$\varepsilon(0) = 0, A(0) = 0. \quad (1.26)$$

Найдем аналитическое решение задачи (1.25)-(1.26), используя результаты диссертации Б.В. Горева [20] и статьи [23]. Из второго уравнения системы (1.25) получим

$$\int_0^A (A_* - A)^m dA = \int_0^t K e^{\beta \sigma_0 t} dt = K e^{\beta \sigma_0 t}.$$

Вычисляя интеграл, стоящий слева,

$$\int_0^A (A_* - A)^m dA = \int_{A_* - A}^{A_*} \xi^m d\xi = \frac{1}{m+1} [A_*^{m+1} - (A_* - A)^{m+1}],$$

найдем выражение для удельной энергии рассеяния, которое запишем в форме

$$A(t) = A_* - [A_*^{m+1} - K(m+1)e^{\beta \sigma_0 t}]^{1/(m+1)}. \quad (1.27)$$

Используя соотношение (1.27), получим деформацию ползучести

$$\varepsilon(t) = \frac{A(t)}{\sigma_0} = \varepsilon_* - \left[\varepsilon_*^{m+1} - \frac{K(m+1)e^{\beta \sigma_0 t}}{\sigma_0^{m+1}} \right]^{1/(m+1)}, \quad (1.28)$$

$$\varepsilon_* = A_*/\sigma_0.$$

При подстановке в формулу (1.27) вместо удельной энергии рассеяния ее критического значения A_* можно найти длительную прочность конструкции

$$t^* = A_*^{m+1} \cdot [K(m+1)e^{\beta \sigma_0}]^{-1}. \quad (1.29)$$

Отметим также, что в случае переменных напряжений аналитическое решение задачи (1.25)-(1.26) удается получить очень редко.

В начале 70-х годов О. В. Сосниным с коллегами был проведен ряд экспериментов на ползучесть плоских образцов из титанового сплава ОТ-4 при постоянных и переменных напряжениях в диапазоне температур $T = 400 - 550^\circ \text{C}$ [79, 80].

По результатам экспериментов, для уравнений (1.25) были определены характеристики ползучести, которые для температуры $T = 500^\circ \text{C}$ имеют значения [75]

$$\begin{aligned} A_* &= 88.2 \text{ МДж/м}^3, \quad m = 3, \quad \beta = 0.036 \text{ МПа}^{-1}, \\ K &= 1023.829 \text{ МПа}^4 \text{ ч}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

В таблице 1.4 приведены теоретико-экспериментальные данные о процессе деформирования плоских образцов из титанового сплава ОТ-4 для трех значений начального напряжения $\sigma_0 = 98, 112.7$ и 147 МПа, где t_a^* , ε_a^* , A_a^* – аналитические значения, рассчитанные по формулам (1.27)-(1.29), для длительной прочности, деформации ползучести и удельной энергии рассеяния в момент разрушения соответственно, остальные обозначения аналогичны используемым в таблице 1.1.

Таблица 1.4. Основные теоретико-экспериментальные данные для титанового сплава ОТ-4

σ_0 , МПа	t_e^* , ч	ε_e^*	t_a^* , ч	ε_a^*	A_a^* , МДж/м ³
98	444	0.71	446.2276	0.9	88.2
112.7	211	0.51	263.9683	0.7826	
147	65	0.6	77.5427	0.6	

Как и при моделировании растяжения образцов из стали Х18Н10Т, задача (1.25)-(1.26) имеет одну предельную особую точку, приходящуюся на момент разрушения. Можно также ожидать, что приближение к особой точке вызовет затруднение при численном решении с использованием явных методов.

Рассмотрим приближенное решение задачи (1.25)-(1.26) с характеристиками ползучести (1.30). В качестве методов чис-

ленного интегрирования задачи Коши, используем методы ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я.

В таблице 1.5 приведены результаты численного решения задачи (1.25)-(1.26) для трех значений начального напряжения $\sigma_0 = 98, 112.7$ и 147 МПа с шагом интегрирования $h^t = 10^{-4}$ ч. Обозначения аналогичны приведенным в таблице 1.2, A_n^* – расчетное значение удельной энергии рассеяния в момент разрушения.

Таблица 1.5. Расчетные данные для титанового сплава ОТ-4 при постоянном шаге

σ_0 , МПа	ε_n^*	A_n^* , МДж/м ³	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод ЭЯ, $h^t = 10^{-4}$ ч					
98	0.8938	87.5903	446.228	4462282	12575
112.7	0.7724	87.0491	263.969	2639689	7173
147	0.5928	87.1449	77.543	775433	2157.3
Метод ЭКЯ, $h^t = 10^{-4}$ ч					
98	0.883	86.5367	446.228	4462275	18870
112.7	0.7706	86.8503	263.968	2639683	10945
147	0.5851	86.0025	77.543	775427	3260.7
Метод РК4Я, $h^t = 10^{-4}$ ч					
98	0.8835	86.5788	446.228	4462275	28387
112.7	0.7741	87.2374	263.968	2639683	16786
147	0.5863	86.1794	77.543	775427	4926.2

В таблице 1.6 приведены результаты численного решения задачи (1.25)-(1.26) для трех значений начального напряжения $\sigma_0 = 98, 112.7$ и 147 МПа с переменным шагом интегрирования при оценке точности вычислений по методу РРР с параметрами $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = \theta_1/2$. Величина начального шага $h_s^t = 1$ ч. Обозначения аналогичны используемым в таблицах 1.3 и 1.5.

Таблица 1.6. Расчетные данные для титанового сплава ОТ-4 при переменном шаге

σ_0 , МПа	ε_n^*	A_n^* , МДж/м ³	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод ЭЯ, $h_{\max}^t = 10^{-23}$ ч, $h_{\min}^t = 5 \cdot 10^{-4}$ ч					
98	0.9	88.2	446.228	2838416	13999
112.7	0.7826	88.2	263.969	2836479	13972
147	0.6	88.2	77.543	2815748	13886
Метод ЭКЯ, $h_{\max}^t = 10^{-22}$ ч, $h_{\min}^t = 0.0039$ ч					
98	0.9	88.1999	446.228	421889	3282.1
112.7	0.7826	88.1999	263.968	426036	3321.3
147	0.6	88.1999	77.543	426692	3324.2
Метод РК4Я, $h_{\max}^t = 3 \cdot 10^{-20}$ ч, $h_{\min}^t = 0.0156$ ч					
98	0.9	88.1998	446.228	85722	1040.3
112.7	0.7826	88.1995	263.968	84981	1032.6
147	0.6	88.1987	77.543	84371	1020.2

На рис. 1.4 изображены кривые ползучести для задачи деформирования образцов из сплава ОТ-4, полученные методом РК4Я с переменным шагом интегрирования с контролем точности вычислений по методу РРР с параметрами $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = 5 \cdot 10^{-5}$. Точками отмечены экспериментальные данные [75]. Квадратными маркерами отмечены кривые, соответствующие точным аналитическим решениям (1.27)- (1.29). Треугольными маркерами отмечены приближенные решения задачи (1.25)-(1.26). Конец кривой отмечается последним маркером соответствующего типа. Фактически кривые, соответствующие расчетным и аналитическим решениям, сливаются в одну. Кривые ползучести, полученные с использованием постоянного шага интегрирования, имеют аналогичный вид. Результаты эксперимента для сплава ОТ-4 приведены в приложении.

На рис. 1.5 даны зависимости шага интегрирования от аргумента t для задачи (1.25)-(1.26) при использовании контро-

для точности вычислений по методу РРР с параметрами $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = 5 \cdot 10^{-5}$. Введены следующие обозначения: а – метод ЭЯ, б – метод ЭКЯ, с – метод РК4Я.

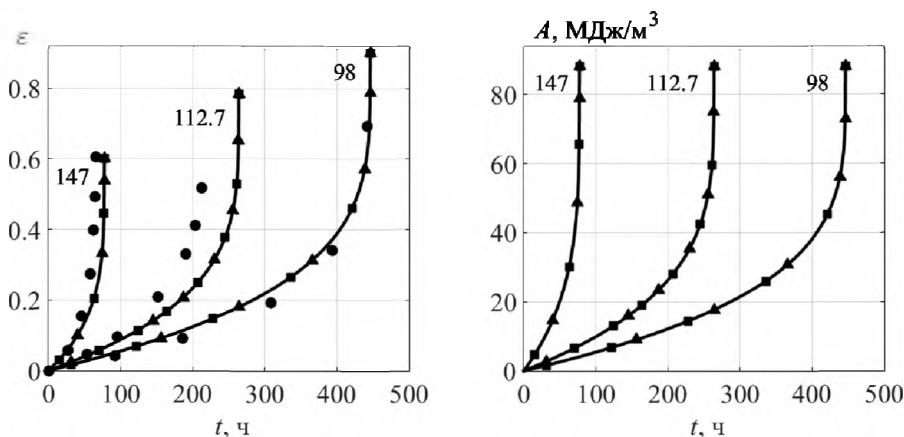


Рис. 1.4. Кривые ползучести для сплава ОТ-4

Используя аналитическое решение (1.27)-(1.30) задачи (1.25)-(1.26), рассчитаем относительную погрешность деформации ползучести $\delta\varepsilon_i$ и удельной работы рассеяния δA_i в i -й точке по формулам [2, с. 22-25]

$$\delta\varepsilon_i = \frac{\Delta\varepsilon_i}{\varepsilon(t_n^{(i)})} \cdot 100\%, \quad \delta A_i = \frac{\Delta A_i}{A(t_n^{(i)})} \cdot 100\%, \quad (1.31)$$

где $\Delta\varepsilon_i = \left| \varepsilon(t_n^{(i)}) - \varepsilon_n^{(i)} \right|$ и $\Delta A_i = \left| A(t_n^{(i)}) - A_n^{(i)} \right|$ – абсолютные погрешности деформации ползучести и удельной работы рассеяния соответственно, $\varepsilon_n^{(i)}$ и $A_n^{(i)}$ – расчетные значения деформации ползучести и удельной энергии рассеяния в момент времени $t_n^{(i)}$ соответственно, $\varepsilon(t_n^{(i)})$ и $A(t_n^{(i)})$ – точные значе-

ния деформации ползучести и удельной энергии рассеяния в момент времени $t_n^{(i)}$, рассчитанные по формулам (1.27)-(1.30).

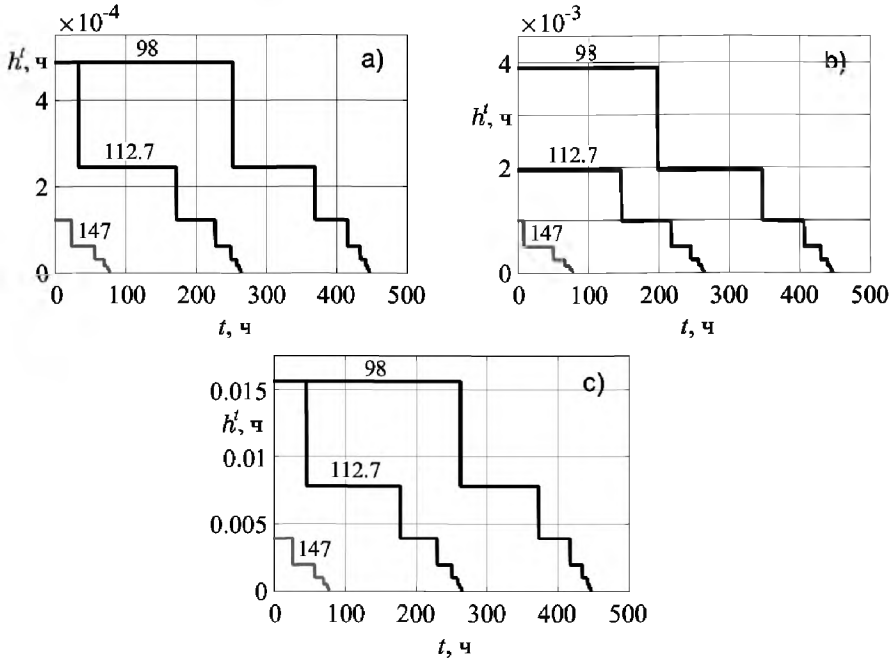


Рис. 1.5. Зависимость шага интегрирования h^t от времени t для задачи (1.25)-(1.26)

На рис. 1.6 даны зависимости относительной погрешности δA от аргумента t для задачи (1.25)-(1.26) при использовании метода РК4Я: сплошные линии – переменный шаг ($\theta_1 = 10^{-3}$ и $\theta_2 = \theta_1/2$), штрихпунктирная линия – постоянный шаг ($h^t = 10^{-3}$ ч). При значениях точности $\theta_1 = 10^{-4}$, $\theta_2 = 5 \cdot 10^{-5}$ и постоянного шага $h^t = 10^{-4}$ зависимости относительной погрешности δA имеют аналогичный характер изменения.

В таблице 1.7 приведена относительная погрешность удельной работы рассеяния при расчете задачи (1.25)-(1.26) методами ЭЯ, ЭКЯ, РК4Я с постоянным и переменным ша-

гами, где для относительной погрешности удельной работы рассеяния вычислены следующие величины [30, с. 32-33, 36]: δA_{\max} – максимальное значение, δA_{av} – среднее значение и δA_{dev} – среднее квадратическое отклонение от среднего значения. Указанные величины используются для оценки точности полученных численных решений и будут проанализированы в параграфе 1.2.3.

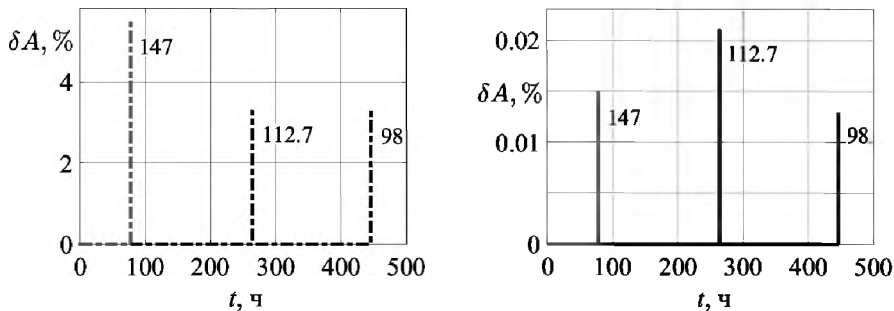


Рис. 1.6. Зависимость относительной погрешности δA от времени t для задачи (1.25)-(1.26)

Относительная погрешность деформации ползучести не выписывается, так как она с точностью до округления равна относительной погрешности удельной энергии рассеяния.

Замечание 1.1. По аналогии с относительной погрешностью можно также рассчитать абсолютную погрешность деформации ползучести и удельной работы рассеяния и использовать ее для оценки точности решения. Однако для задачи (1.25)-(1.26) и в дальнейших исследованиях абсолютная погрешность не дает новой информации о погрешности приближенного решения.

Таблица 1.7. Относительная погрешность δA при численном решении задачи (1.25)-(1.26)

σ_0 , МПа	Постоянный шаг $h^t = 10^{-4}$			Переменный шаг, $\theta_1 = 10^{-4}$		
	δA_{\max} , %	δA_{av} , %	δA_{dev} , %	δA_{\max} , %	δA_{av} , %	δA_{dev} , %
Метод ЭЯ						
98	3.099	$5 \cdot 10^{-5}$	0.003	2.975	0.079	0.389
112.7	3.184	$9 \cdot 10^{-5}$	0.005	2.987	0.08	0.393
147	4.63	$3 \cdot 10^{-4}$	0.012	3.004	0.082	0.397
Метод ЭКЯ						
98	1.886	$4 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-4}$	0.159	$2 \cdot 10^{-4}$	0.005
112.7	1.53	$9 \cdot 10^{-7}$	10^{-3}	0.157	$2 \cdot 10^{-4}$	0.005
147	2.492	$4 \cdot 10^{-6}$	0.003	0.158	$2 \cdot 10^{-4}$	0.005
Метод РК4Я						
98	1.838	$4 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-4}$	0.016	$6 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-4}$
112.7	1.091	$5 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-4}$	0.023	$7 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-4}$
147	2.291	$3 \cdot 10^{-6}$	0.003	0.017	$6 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-4}$

1.2.3 Анализ полученных расчетных данных

При анализе результатов численного решения задачи чистого растяжения образцов из нержавеющей стали X18H10T, описываемой уравнениями (1.17) с начальными условиями (1.4), и задачи деформирования плоских образцов из титанового сплава OT-4, описываемой уравнениями (1.25) с начальными условиями (1.26), можно отметить следующее:

1. Результаты решения обеих указанных задач методами ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я, представленные в таблицах 1.2, 1.3, 1.5, 1.6 и на рис. 1.2, 1.4, удовлетворительно согласуются как с экспериментальными [56, 79, 80], так и с расчетными данными, полученными в работах [56, 75].
2. При решении рассматриваемых задач с постоянным шагом интегрирования не удается близко подойти к предельной особой точке, приходящейся на момент разрушения. Фактически при большом шаге происходит перескок через предельную особую точку. В случае же уменьшения шага многократно возрастают вычислительные затраты и время счета (см. таблицы 1.2, 1.5).
3. Использование переменного шага позволяет ближе подойти к моменту разрушения. Для стали X18H10T в пять и более раз уменьшаются количество шагов по независимой переменной и время счета. Для сплава OT-4 применение методов ЭКЯ и РК4Я также дает уменьшение вычислительных затрат до десятков раз. Однако метод ЭЯ, наоборот, дает увеличение количества шагов и времени счета до шести раз, что можно объяснить жесткостью задачи (см. таблицы 1.5 и 1.6).
4. На рис. 1.3, 1.5 видно, что шаг интегрирования монотонно убывает при приближении к особой точке (вплоть до величин порядка 10^{-23}). Это показывает малоэффективность и ресурсоемкость применения постоянного шага интегрирования для данного класса задач при необходимости высокой точности решения.

Сравним времена счета (см. таблицы 1.2, 1.3, 1.5, 1.6) для различных методов:

1. При постоянном шаге наименьшее время счета показывает метод ЭЯ, наибольшее – метод РК4Я. При переменном шаге наоборот. Это объясняется тем, что метод РК4Я является самым трудоемким из используемых, однако он имеет четвертый порядок точности, что при переменном шаге интегрирования дает возможность использовать больший шаг.
2. Для рассматриваемых задач при постоянном шаге интегрирования наблюдается уменьшение времени счета при увеличении значения начального напряжения, что связано с уменьшением длительной прочности конструкции. При переменном шаге время счета практически не зависит от начального напряжения.

Проанализируем относительную погрешность, рассчитанную для удельной работы рассеяния (см. таблицу 1.7, рис. 1.6):

1. В целом, средние значения относительной погрешности адекватно соответствуют задаваемому значению точности (шагу интегрирования) для каждого метода.
2. При увеличении точности (уменьшении шага) относительная погрешность уменьшается. Отметим, что для метода РК4Я погрешность, соответствующая точности $\theta_1 = 10^{-4}$, остается на данном уровне даже при уменьшении значения θ_1 , а для некоторых значений σ_0 может превышать его.
3. С увеличением порядка точности применяемого численного метода, уменьшается относительная погрешность результата. Это подтверждают данные таблицы 1.7: наименьшую относительную погрешность дает метод РК4Я, наибольшую – метод ЭЯ.
4. Для обеих задач основная погрешность накапливается в малой окрестности предельной особой точки (см.

рис. 1.6). Размер окрестности зависит от определяющих соотношений, а именно от скорости роста интегральной кривой в окрестности предельной особой точки. Это справедливо как для постоянного, так и для переменного шага интегрирования.

5. Вне окрестности предельной особой точки относительная погрешность может быть на порядки меньше своего среднего значения.
6. При постоянном шаге интегрирования в окрестность предельной особой точки попадает лишь малое число расчетных значений, в случае использования переменного шага количество расчетных значений в окрестности предельной особой точки значительно увеличивается. По этой причине, при переменном шаге погрешность, скапливающаяся в окрестности предельной особой точки, приводит к значительному увеличению среднего значения и среднего квадратического отклонения относительной погрешности. Для постоянного шага это влияние не столь существенно.

Обобщим сказанное. Применение явных методов численного решения задачи Коши с постоянным шагом интегрирования для расчета длительной прочности конструкций из неупрочняющихся материалов может требовать значительных вычислительных ресурсов. При этом постоянный шаг позволяет получить решение высокой точности вне некоторой окрестности предельной особой точки, но не дает возможности близко подойти к ней. Более рациональным является применение переменного шага интегрирования с оценкой локальной погрешности в каждой точке по методу РРР, который в большинстве случаев позволяет существенно уменьшить вычислительные затраты (в том числе и время счета), а также дает возможность получить решения с заданной точностью. Применения специальных методов решения плохо обусловленных задач Коши не требуется.

1.3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПРЕДЕЛЬНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

В разделе 1.2 показано, что явные методы численного решения задачи Коши являются эффективным инструментом расчета длительной прочности элементов конструкций из упрочняющихся материалов в условиях ползучести. Однако, как уже упоминалось во введении, у многих используемых на практике конструкционных материалов имеется ярко выраженная начальная стадия неустановившейся ползучести, иными словами, упрочнение материала [81]. Неучет начальной стадии ползучести может привести к значительному расхождению экспериментальных и расчетных данных. Для конструкций из упрочняющихся материалов проведем расчет длительной прочности в условиях ползучести с использованием традиционных методов численного интегрирования начальной задачи.

1.3.1 Модель растяжения образцов из стали 45

Рассмотрим задачу одноосного растяжения цилиндрических образцов из стали 45, широко используемой в авиации (например, для создания деталей трубопроводной арматуры после закалки и отпуска), при постоянных напряжениях и температуре [22]. Для описания данной задачи будем использовать уравнения теории структурных параметров Ю. Н. Работнова вида (1.3), в которых функции напряжения примем в виде степенных зависимостей

$$f_1(\sigma) = B_\varepsilon \sigma^n, \quad f_2(\sigma) = B_\omega \sigma^k, \quad (1.32)$$

а функцию параметра поврежденности запишем в форме

$$\Psi(\omega) = \omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m. \quad (1.33)$$

Здесь B_ε , B_ω , n , k , α , m – характеристики ползучести материала.

Подставляя соотношения (1.32), (1.33) в систему уравнений (1.3), для случая постоянных напряжений получим [22]

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}. \end{cases} \quad (1.34)$$

В качестве начальных условий для системы (1.34) выберем (1.4).

Характеристики ползучести для системы уравнений (1.34) определены по результатам эксперимента в статье [22] для образцов диаметра $d = 42$ мм из стали 45 при температуре $T = 850^\circ \text{C}$ и имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.849, m = 2.83, B_\varepsilon = 9.967 \cdot 10^{-19} \text{ МПа}^{-n} \text{ с}^{-1}, \\ n &= 8.1, B_\omega = 9.689 \cdot 10^{-17} \text{ МПа}^{-k} \text{ с}^{-1}, k = 6.97. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Задача (1.34), (1.4) допускает аналитическое решение, которое можно получить тем же способом, что и в параграфе 1.2.2. Так, проинтегрировав второе уравнение системы (1.34), получим выражение для параметра поврежденности

$$\omega(t) = \left\{ 1 - [1 - (m+1)(\alpha+1)B_\omega \sigma_0^k t]^{\frac{1}{m+1}} \right\}^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (1.36)$$

Можно видеть, что деформация ползучести и параметр поврежденности пропорциональны. Учитывая это, выпишем выражение для деформации ползучести в форме

$$\varepsilon(t) = \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{B_\omega \sigma_0^k} \cdot \omega(t). \quad (1.37)$$

Выразим из соотношения (1.36) время

$$t = [(m+1)(\alpha+1)B_\omega \sigma_0^k]^{-1} \cdot [1 - (1 - \omega^{\alpha+1})^{m+1}]. \quad (1.38)$$

При подстановке в выражение (1.38) значения $\omega = 1$ найдем длительную прочность

$$t^* = [(m + 1)(\alpha + 1)B_\omega \sigma_0^k]^{-1}. \quad (1.39)$$

Основные теоретико-экспериментальные данные о процессе деформирования образцов из стали 45 приведены в таблице 1.8, где ε_a^* и t_a^* – аналитические значения деформации ползучести в момент разрушения и длительной прочности, рассчитанные по формулам (1.37) и (1.39). Остальные обозначения аналогичны используемым в таблице 1.1.

Таблица 1.8. Основные теоретико-экспериментальные данные для стали 45

σ_0 , МПа	t_e^* , ч	ε_e^*	t_a^* , ч	ε_a^*
35	6.706	0.516	7.00049	0.57159
40	2.98	0.616	2.7601	0.66468
45	1.224	0.633	1.21448	0.7593

Таким образом, получено решение начальной задачи (1.34), (1.4), которое выражается соотношениями (1.36), (1.37) и (1.39) [20, 23]. Но отметим, что это исключительный случай. Большинство задач ползучести не могут быть проинтегрированы в явном виде, что приводит к необходимости применения численных методов. Но при численном решении задач, подобных (1.34), (1.4), стоит учитывать то, что они имеют две предельные особые точки – в начальный момент времени и при разрушении. Наличие особой точки в начальный момент времени делает явные методы решения задачи Коши малоэффективными.

Можно предложить также использовать многошаговые явные методы с расчетом разгоночных значений неявными методами, но и у этого подхода есть ряд недостатков: **1)** необходимость выбора начального приближения для реализации неявного метода, **2)** необходимость проверки условий сходимости итерационного процесса решения системы нелинейных уравнений, возникающая при реализации неявного метода,

3) усложнение процедуры изменения величины шага для многошаговых методов. Указанные недостатки значительно затрудняют реализацию различных вариантов явных многошаговых методов и делают неявные методы более привлекательными для данного класса задач.

Для численного решения задачи (1.34), (1.4) будем использовать два неявных метода решения задачи Коши [84, с. 11, 88]: **1)** метод Эйлера (ЭНЯ), **2)** гауссов метод четвертого порядка точности (Г4НЯ). Применение постоянного шага интегрирования в данном случае нецелесообразно, так как необходимо изначально выбирать малую величину шага. Поэтому будем использовать только переменный шаг с контролем точности вычислений при оценке локальной погрешности по методу РРР.

Два указанных метода были реализованы в составе программного комплекса, написанного в среде Matlab R2015a. Для решения систем нелинейных уравнений, полученных при использовании неявных схем, был выбран метод простых итераций [33, с. 170-172] с точностью θ_1 , используемой в методе РРР. Условия сходимости итерационного процесса метода простых итераций дает следующая

Теорема 1.1. *Итерационные процессы по методу простых итераций решения систем нелинейных уравнений, полученных на i -м шаге неявными методами ЭНЯ и Г4НЯ численного интегрирования задачи (1.34), (1.4), сходятся, если шаг интегрирования h^t по аргументу t удовлетворяет неравенству*

$$h^t < \frac{C_{1,i}^{(0)}}{[B_\varepsilon \sigma_0^n + B_\omega \sigma_0^k] |C_{2,i}^{(0)}|} \quad (1.40)$$

для метода ЭНЯ и неравенству

$$h^t < \frac{D_{1,i}^{(0)} D_{2,i}^{(0)} \cdot (B_\varepsilon \sigma_0^n + B_\omega \sigma_0^k)^{-1}}{\left[\frac{1}{2} |H_{1,i}^{(0)}| D_{2,i}^{(0)} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) |H_{2,i}^{(0)}| D_{1,i}^{(0)} \right]} \quad (1.41)$$

для метода Г4НЯ. Здесь

$$- C_{1,i}^{(0)} = \left(\omega_i^{(0)}\right)^{\alpha+1} \left[1 - \left(\omega_i^{(0)}\right)^{\alpha+1}\right]^{m+1},$$

$$- C_{2,i}^{(0)} = \alpha \left[1 - \left(\omega_i^{(0)}\right)^{\alpha+1}\right] - m(\alpha + 1) \left(\omega_i^{(0)}\right)^{\alpha+1},$$

$$- D_{1,i}^{(0)} = C_{1,i}^{(0)} \Big|_{\omega_i^{(0)}=\omega_{1,i}^{(0)}} \text{ и } D_{2,i}^{(0)} = C_{1,i}^{(0)} \Big|_{\omega_i^{(0)}=\omega_{2,i}^{(0)}},$$

$$- H_{1,i}^{(0)} = C_{2,i}^{(0)} \Big|_{\omega_i^{(0)}=\omega_{1,i}^{(0)}} \text{ и } H_{2,i}^{(0)} = C_{2,i}^{(0)} \Big|_{\omega_i^{(0)}=\omega_{2,i}^{(0)}},$$

$$- \omega_{1,i}^{(0)} = \omega_{i-1} + \frac{1}{4}L_{1,i}^{(0)} + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)L_{2,i}^{(0)},$$

$$- \omega_{2,i}^{(0)} = \omega_{i-1} + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)L_{1,i}^{(0)} + \frac{1}{4}L_{2,i}^{(0)},$$

- ω_{i-1} - значение параметра поврежденности на предыдущем шаге,

- $\omega_i^{(0)}$ - начальное приближение параметра поврежденности для итерационного процесса на i -м шаге.

Неравенства (1.40) и (1.41) непосредственно следуют из достаточного условия сходимости метода простых итераций [33, с. 171-172] при использовании методов ЭНЯ и Г4НЯ.

При решении систем нелинейных уравнений в рассматриваемой задаче можно также применять метод Ньютона, но его реализация и проверка условий сходимости гораздо сложнее, чем для метода простых итераций. Помимо традиционных для метода Ньютона недостатков, таких, как необходимость обращения матрицы Якоби и преобразования решаемой

системы уравнений (чего не требует метод простых итераций при использовании неявных схем), возникает еще одно затруднение. Применительно к нежестким задачам Коши критерием сходимости метода Ньютона является отличие якобиана рассматриваемой задачи от нуля [33, с. 173]. Но в окрестности предельных особых точек отличие якобиана от нуля будет лишь необходимым условием. Для доказательства сходимости требуется проверка и достаточных условий, что значительно усложняет использование метода Ньютона. При этом в вычислительном плане методы Ньютона и простых итераций мало отличаются для данного класса задач.

В таблице 1.9 даны результаты численного решения задачи (1.34), (1.4) с характеристиками ползучести (1.35) для трех значений начального напряжения $\sigma_0 = 35, 40$ и 45 МПа с переменным шагом при значениях параметров $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = \theta_1/2$. Обозначения аналогичны используемым в таблице 1.3. Начальное приближение на первом шаге: $h_0^t = 3 \cdot 10^{-7}$ ч, $\varepsilon_0^{(0)} = 2 \cdot 10^{-5}$ и $\omega_0^{(0)} = 4 \cdot 10^{-5}$ для метода ЭНЯ; $h_0^t = 3 \cdot 10^{-7}$ ч, $\varepsilon_0^{(0)} = 2 \cdot 10^{-5}$, $\omega_0^{(0)} = 4 \cdot 10^{-5}$, $K_1^{(0)} = K_2^{(0)} = L_1^{(0)} = L_2^{(0)} = 10^{-5}$ для метода Г4НЯ. После прохождения начальной точки выставлялся шаг $h_s^t = 3 \cdot 10^{-7}$ ч для метода ЭНЯ и $h_s^t = 3 \cdot 10^{-5}$ ч для метода Г4НЯ. Затем шаг изменялся автоматически.

Таблица 1.9. Расчетные данные для стали 45 при переменном шаге интегрирования

σ_0 , МПа	ε_n^*	ω_n^*	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод ЭНЯ, $h_{\min}^t = 2 \cdot 10^{-15}$ ч, $h_{\max}^t = 0.0011$ ч					
35	0.5715	0.9999	7.0005	17938	322.5
40	0.6646	0.9999	2.7601	17143	311.49
45	0.7593	1	1.2145	17499	320.79
Метод Г4НЯ, $h_{\min}^t = 10^{-13}$ ч, $h_{\max}^t = 0.0142$ ч					
35	0.5714	0.9997	7.0006	1083	62.681
40	0.6647	1	2.7601	1228	74.867

Окончание табл. 1.9

σ_0 , МПа	ε_n^*	ω_n^*	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
45	0.7592	0.9998	1.2145	1213	72.269

На рис. 1.7 изображены кривые ползучести для задачи одноосного растяжения образцов из стали 45, полученные методом ЭНЯ с переменным шагом интегрирования при контроле точности вычислений по методу РРР с параметрами $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = 5 \cdot 10^{-5}$. Обозначения аналогичны применяемым на рис. 1.4. Можно видеть, что кривые, полученные методом ЭНЯ, практически совпадают с точным решением. Для метода ГЧНЯ кривые ползучести имеют аналогичный вид. Результаты эксперимента для стали 45 приведены в приложении.

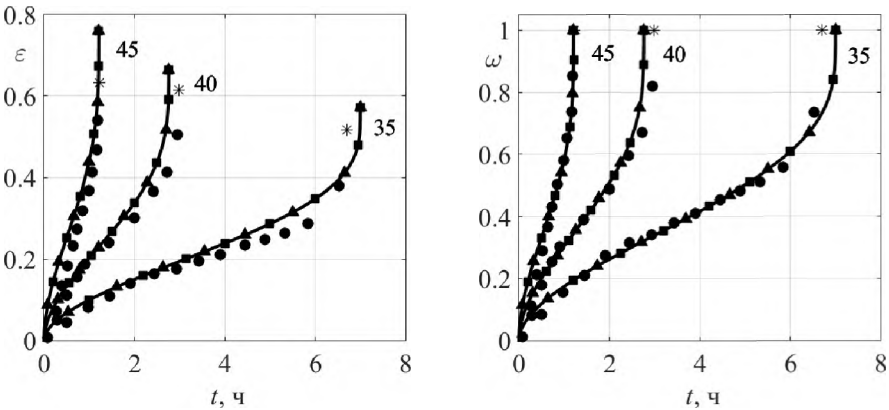


Рис. 1.7. Кривые ползучести для стали 45, метод ЭНЯ, переменный шаг, $\theta_1 = 10^{-4}$

На рис. 1.8 даны зависимости шага интегрирования от аргумента t для задачи (1.34), (1.4) при использовании контроля точности вычислений по методу РРР с параметрами $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = 5 \cdot 10^{-5}$: а – метод ЭНЯ, б – метод ГЧНЯ.

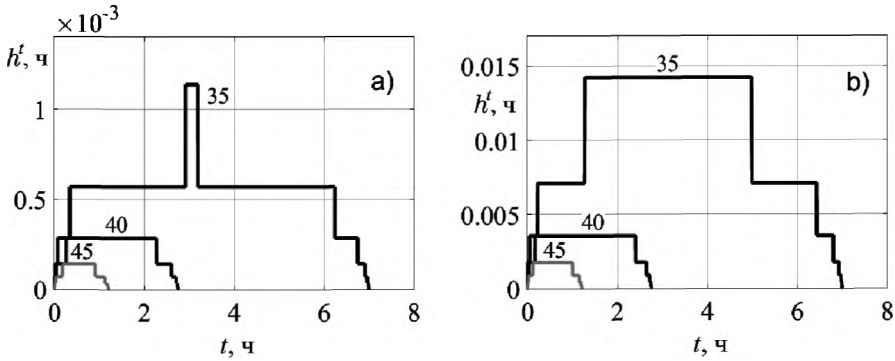


Рис. 1.8. Зависимость шага интегрирования h^t от времени t для задачи (1.34), (1.4)

В таблице 1.10 представлена относительная погрешность параметра поврежденности при расчете задачи (1.34), (1.4) методами ЭНЯ и Г4НЯ с переменным шагом, где для относительной погрешности параметра поврежденности вычислены следующие величины [30, с. 32-33, 36]: $\delta\omega_{\max}$ – максимальное значение, $\delta\omega_{av}$ – среднее значение и $\delta\omega_{dev}$ – среднее квадратическое отклонение от среднего значения. Относительная погрешность параметра поврежденности вычисляется по формуле, аналогичной (1.31).

Таблица 1.10. Относительная погрешность $\delta\omega$ при численном решении задачи (1.34), (1.4)

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{av}, \%$	$\delta\omega_{dev}, \%$
Метод ЭНЯ, $\theta_1 = 10^{-4}$			
35	36.812	0.044	0.336
40	7.754	0.044	0.191
45	6.663	0.041	0.173
Метод Г4НЯ, $\theta_1 = 10^{-4}$			
35	79.186	0.185	2.446

Окончание табл. 1.10

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{av}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
40	87.418	0.181	2.53
45	91.929	0.2	2.678

Вид зависимости относительной погрешности $\delta\omega$ от аргумента t для задачи (1.34), (1.4) приведен на рис. 1.9, где а – метод ЭНЯ ($\theta_1 = 10^{-2}$ и $\theta_2 = \theta_1/2$), б – метод Г4НЯ ($\theta_1 = 10^{-2}$ и $\theta_2 = \theta_1/8$). При значениях точности $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = 5 \cdot 10^{-5}$ зависимости относительной погрешности $\delta\omega$ имеют аналогичный характер изменения.

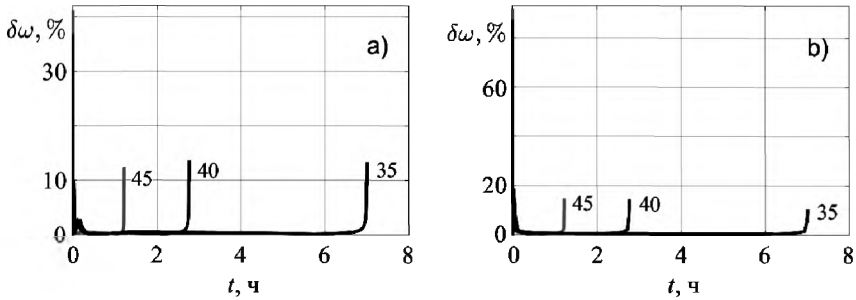


Рис. 1.9. Зависимость относительной погрешности $\delta\omega$ от времени t для задачи (1.34), (1.4)

1.3.2 Модель растяжение образцов из сплава ЗВ

Можно видеть, что расчетные данные, полученные методами ЭНЯ и Г4НЯ, имеют значительную погрешность, достигающую десятков процентов в окрестностях особых точек. Одной из возможных причин большой погрешности может быть высокая интенсивность процесса ползучести. Целесообразно исследовать также задачи, для которых длительная прочность составляет тысячи часов.

Рассмотрим задачу расчета ползучести и длительной прочности круглых стержней из анизотропного титанового

сплава ЗВ, нашедшего свое применение в авиации, ракетостроении и космической технике (изготовление обшивки, деталей крепления, силового набора, деталей шасси, различных агрегатов и т. д.), при одноосном растяжении [21]. Для описания данной задачи воспользуемся уравнениями ЭВТП (1.11)-(1.13), которые, в случае постоянных напряжения и температуры, запишем в виде системы ОДУ второго порядка [21]

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \frac{B_A \sigma_0^n}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m} \end{cases} \quad (1.42)$$

с начальными условиями

$$A(0) = 0, \omega(0) = 0 \quad (1.43)$$

и уравнения для определения деформации ползучести

$$\varepsilon(t) = \sigma_0^{-1} \cdot A(t). \quad (1.44)$$

Характеристики ползучести для системы уравнений (1.42) определены в статье [21] для круглых стержней из титанового сплава ЗВ при комнатной температуре ($T = 20^\circ \text{C}$) по обработанным экспериментальным данным работы [81] и имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha &= 2.5, m = 7, B_A = 1.46 \cdot 10^{-151} \text{ МПа}^{-n+1} \text{с}^{-1}, \\ n &= 51.8, B_\omega = 2.205 \cdot 10^{-153} \text{ МПа}^{-k} \text{с}^{-1}, k = 51.8. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Как и для задачи одноосного растяжения образцов из стали 45, найдем аналитическое решение задачи (1.42)-(1.44). Для этого достаточно проинтегрировать начальную задачу (1.42)-(1.43) и использовать соотношение (1.44) [23]:

$$\omega(t) = \left(1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega \sigma_0^k t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (1.46)$$

$$A(t) = \frac{B_A \sigma_0^n}{B_\omega \sigma_0^k} \cdot \omega(t). \quad (1.47)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{B_A \sigma_0^{n-1}}{B_\omega \sigma_0^k} \cdot \omega(t). \quad (1.48)$$

$$t^* = [(m+1)(\alpha+1)B_\omega \sigma_0^k]^{-1}. \quad (1.49)$$

При этом задача (1.42)-(1.43) имеет те же особенности, что и (1.34), (1.4).

Основные теоретико-экспериментальные данные о процессе деформирования образцов из сплава ЗВ приведены в таблице 1.11, где ε_a^* , A_a^* и t_a^* – аналитические значения деформации ползучести, удельной работы рассеяния в момент разрушения и длительной прочности, рассчитанные по формулам (1.47)-(1.49), A_e^* – экспериментальное значение критической удельной работы рассеяния. Остальные обозначения аналогичны используемым в таблице 1.1.

Таблица 1.11. Основные теоретико-экспериментальные данные для титанового сплава ЗВ

Эксперимент			
σ_0 , МПа	t_e^* , ч	ε_e^*	A_e^* , МДж/м ³
603	3452.068	0.091	54.584
618	1247.814	0.095	58.545
638	249.88	0.102	65.368
Аналитическое решение			
σ_0 , МПа	t_a^* , ч	ε_a^*	A_a^* , МДж/м ³
603	4292.3399	0.1098	66.2132
618	1202.0648	0.1071	66.2132
638	230.8978	0.1038	66.2132

Рассмотрим численное решение задачи (1.42)-(1.43) методами ЭНЯ и ГЧНЯ. Условия сходимости итерационного процесса метода простых итераций решения нелинейных систем уравнений, полученных при использовании неявных методов, для задачи (1.42)-(1.43) те же, что даются теоремой 1.1, но с заменой B_ε на B_A .

В таблице 1.12 даны результаты численного решения задачи (1.42)-(1.43) с параметрами (1.45) для трех значений $\sigma_0 = 603, 618$ и 638 МПа с переменным шагом при значениях параметров $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = \theta_1/2$. Обозначения аналогичны используемым в таблицах 1.3 и 1.5. Начальное приближение для метода ЭНЯ: $h_0^t = 3 \cdot 10^{-15}$ ч, $\varepsilon_0^{(0)} = 10^{-5}$ и $\omega_0^{(0)} = 10^{-5}$; для метода Г4НЯ: $h_0^t = 3 \cdot 10^{-22}$ ч, $\varepsilon_0^{(0)} = \omega_0^{(0)} = K_1^{(0)} = K_2^{(0)} = L_1^{(0)} = L_2^{(0)} = 10^{-5}$. После прохождения начальной точки выставлялся шаг $h_s^t = 3 \cdot 10^{-23}$ ч для метода ЭНЯ и $h_s^t = 3 \cdot 10^{-19}$ ч для метода Г4НЯ. Затем шаг изменялся автоматически. Расчет проводился до значения $\omega_n^* = 1$.

Таблица 1.12. Расчетные данные для титанового сплава ЗВ при переменном шаге

σ_0 , МПа	ε_n^*	A_n^* , МДж/м ³	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод ЭНЯ, $h_{\min}^t = 10^{-38}$ ч, $h_{\max}^t = 0.0164$ ч					
603	0.1098	66.2131	4292.34	970700	17494
618	0.1071	66.2131	1202.065	937694	16923
638	0.1038	66.2129	230.898	975823	17581
Метод Г4НЯ, $h_{\min}^t = 3 \cdot 10^{-41}$ ч, $h_{\max}^t = 0.1601$ ч					
603	0.1098	66.2124	4292.34	63584	3107.5
618	0.1071	66.2124	1202.065	65123	3190.4
638	0.1038	66.2125	230.898	62421	3037.3

На рис. 1.10 изображены кривые ползучести для задачи одноосного растяжения образцов из титанового сплава ЗВ, полученные методом ЭНЯ с переменным шагом интегрирования при контроле точности вычислений по методу РРР с параметрами $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = 5 \cdot 10^{-5}$. Обозначения аналогичны используемым на рис. 1.4. Можно видеть, что кривые, полученные методом ЭНЯ, практически совпадают с точным решением. Для метода Г4НЯ кривые ползучести имеют аналогичный вид. Экспериментальные данные для титанового

сплава ЗВ даны в приложении.

На рис. 1.11 даны зависимости шага интегрирования от аргумента t для задачи (1.42)-(1.43) при использовании контроля точности вычислений по методу РРР с параметрами $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = 5 \cdot 10^{-5}$: а - метод ЭНЯ, б - метод Г4НЯ.

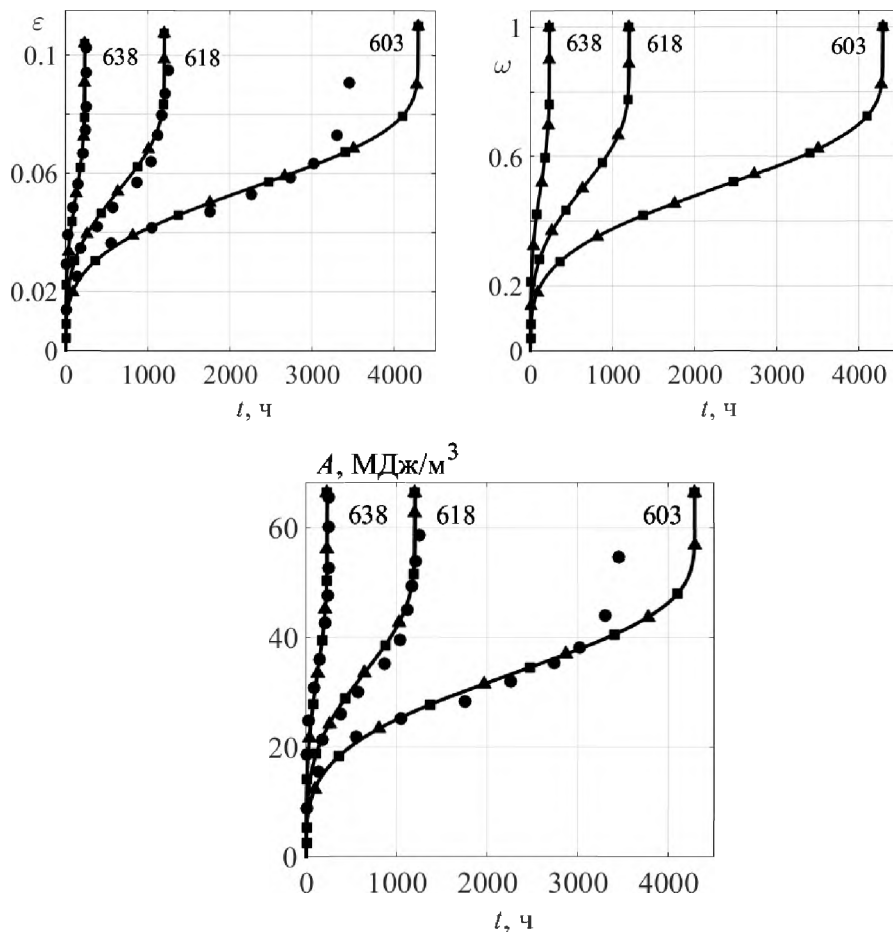


Рис. 1.10. Кривые ползучести для сплава ЗВ, метод ЭНЯ, переменный шаг, $\theta_1 = 10^{-4}$

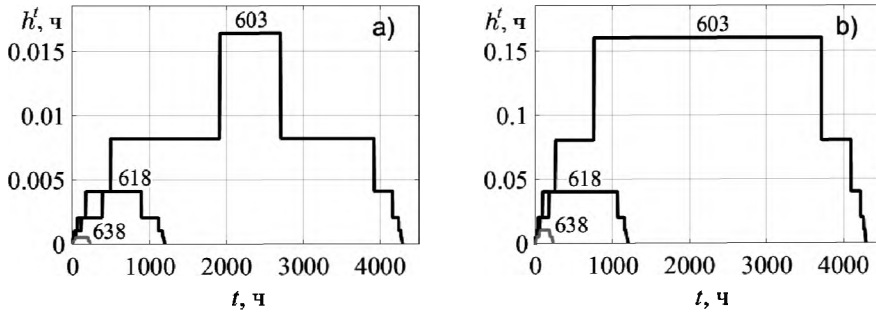


Рис. 1.11. Зависимость шага интегрирования h^t от времени t для задачи (1.42)-(1.43)

В таблице 1.13 представлена относительная погрешность параметра поврежденности при расчете задачи (1.42)-(1.43) методами ЭНЯ и ГНЯ с переменным шагом, обозначения аналогичны используемым в таблице 1.10.

Таблица 1.13. Относительная погрешность $\delta\omega$ при численном решении задачи (1.42)-(1.43)

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{av}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
Метод ЭНЯ, $\theta_1 = 10^{-4}$			
603	17.784	0.013	0.111
618	17.937	0.014	0.112
638	20.588	0.013	0.113
Метод ГНЯ, $\theta_1 = 10^{-4}$			
603	11.988	0.056	0.325
618	14.665	0.054	0.321
638	12.477	0.057	0.329

Вид зависимости относительной погрешности $\delta\omega$ от аргумента t для задачи (1.42)-(1.43) при $\theta_1 = 10^{-1}$ и $\theta_2 = \theta_1/2$ приведен на рис. 1.12, где а – метод ЭНЯ, б – метод ГНЯ. При значениях точности $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = 5 \cdot 10^{-5}$ зависимости

относительной погрешности $\delta\omega$ имеют аналогичный характер изменения.

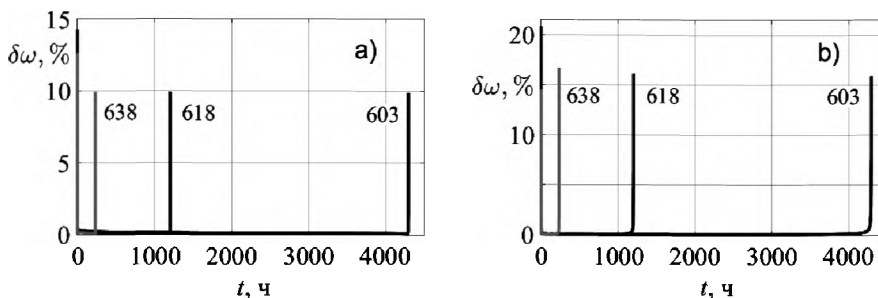


Рис. 1.12. Зависимость относительной погрешности $\delta\omega$ от времени t для задачи (1.42)-(1.43)

1.3.3 Анализ полученных расчетных данных

При рассмотрении задач одноосного растяжения образцов из стали 45 и титанового сплава ЗВ становится видна основная особенность исследования деформирования конструкций из упрочняющихся материалов в условиях ползучести – малоэффективность явных методов интегрирования задачи Коши при расчете длительной прочности подобных конструкций. Это приводит к необходимости использования специальных методов решения жестких и плохо обусловленных задач, в качестве которых выбраны неявные методы.

Неявные методы позволяют проводить расчет упрочняющихся конструкций на ползучесть и длительную прочность, что является главным достоинством этих методов применительно к рассматриваемым задачам. Но существует и ряд собственных неявным схемам недостатков:

1. На каждом шаге неявные схемы сводятся к решению системы нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений.

2. Итерационные методы решения систем нелинейных уравнений требуют задания начального приближения и доказательства сходимости итерационного процесса к решению рассматриваемой задачи.
3. Существуют методы решения систем нелинейных уравнений, которые помимо нахождения значений функций системы требуют вычисления матрицы Якоби и ее обращения (например, метод Ньютона).

Применительно к задачам ползучести это означает:

1. Ограничение величины шага интегрирования.
2. Необходимость выбора приближения для начального момента времени (так как нулевые начальные условия обращают определяющие уравнения ползучести в бесконечность). При этом неудачный выбор начального приближения может привести к росту погрешности в начальной точке до сотен и тысяч процентов.

Многие выводы и замечания, сделанные в параграфе 1.2.3, можно без изменений перенести и на результаты решения задач с начальным упрочнением. Но наличие второй предельной особой точки вносит значимые изменения в процесс решения и полученные результаты. При анализе расчетных данных для задач (1.34), (1.4) одноосного растяжения образцов из стали 45 и (1.42), (1.43) одноосного растяжения образцов из титанового сплава ЗВ можно отметить следующее:

1. Результаты решения обеих задач методами ЭНЯ и ГЧНЯ, представленные в таблицах 1.9, 1.12 и на рис. 1.7, 1.10, удовлетворительно согласуются как с экспериментальными, так и с расчетными данными работ [21, 22].
2. Используемые неявные методы позволили успешно преодолеть предельную особую точку в начальный момент времени и близко подойти ко второй предельной особой точке, приходящейся на момент разрушения. Это можно видеть из таблиц 1.9, 1.12 и на рис. 1.7, 1.10.

3. На рис. 1.8, 1.11 видно, что шаг h^t принимает малые значения (вплоть до величин порядка 10^{-41}) в окрестностях обеих предельных особых точек, изменяясь немонотонно. Постоянный шаг интегрирования малоэффективен для данного класса задач.
4. Вне окрестностей предельных особых точек ограничения шага (1.40) и (1.41) выполняются за счет требований точности по методу РРР. Однако в окрестностях предельных особых точек приходится дополнительно уменьшать шаг для удовлетворения условий сходимости.
5. Как и в случае неупрочняющихся материалов, время счета для рассматриваемых задач мало зависит от начального напряжения. По результатам дальнейших исследований (главы 2 и 3) будет проведен дополнительный анализ времени счета данных задач.

Проанализируем относительную погрешность параметра поврежденности, рассчитанную для задач (1.34), (1.4) и (1.42), (1.44):

1. Как и для рассматриваемых в разделе 1.2 задач, при расчете упрочняющихся конструкций средние значения относительной погрешности адекватно соответствуют задаваемому значению точности для каждого метода.
2. Помимо окрестности момента разрушения, погрешность скапливается и в окрестности начальной точки, что можно видеть на рис. 1.9 и 1.12. Значение погрешности может достигать десятков процентов. Максимум погрешности приходится на начальную точку, но абсолютная погрешность в ней не превышает значения точности θ_1 .
3. Вне окрестностей предельных особых точек относительная погрешность может быть на порядки меньше своего среднего значения. При этом для рассматриваемых задач средняя относительная погрешность на порядки превосходит аналогичные показатели для задач без начального упрочнения.

4. Из таблиц 1.10, 1.13 видно, что метод ЭНЯ для обеих задач дает относительную погрешность в разы меньшую, чем метод Г4НЯ. Это можно объяснить тем, что вне окрестностей предельных особых точек при малой точности погрешности решения для обоих методов мало различаются, а при повышении точности погрешность для метода Г4НЯ убывает быстрее. Но в окрестностях предельных особых точек метод Г4НЯ дает большую погрешность, чем метод ЭНЯ. Это и влияет на увеличение средней погрешности решения для метода Г4НЯ по сравнению с методом ЭНЯ.

Глава 2. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ И НАИЛУЧШАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ

Рассмотренные в разделе 1.3 главы 1 задачи Коши (1.34), (1.4) и (1.42), (1.44), описывающие процессы деформирования в условиях ползучести вплоть до разрушения конструкций из упрочняющихся стали 45 и титанового сплава ЗВ, показывают, что явные методы малоэффективны при их расчете. Неявные методы также нельзя назвать эффективными применительно к рассматриваемым задачам, несмотря на то что они позволяют получать приближенные решения с высокой точностью. Это связано с тем, что реализация неявных схем сводится к решению систем нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений, сопряженному с известными трудностями, описанными в параграфе 1.3.3. Для более эффективных методов расчета упрочняющихся конструкций на длительную прочность в условиях ползучести потребуем выполнения следующих условий:

1. Отсутствие ограничений шага интегрирования.
2. Возможность применения явных методов решения задачи Коши.
3. Уменьшение времени счета.
4. Точность приближенного решения не ниже полученной при использовании неявных методов.

Всем этим условиям удовлетворяют метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация [87], применению которых посвящена данная глава.

2.1 МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ ДЛЯ СИСТЕМ ОДУ

Во введении было указано, что начиная с 50-х годов прошлого века исследуются жесткие начальные задачи и разрабатываются методы их решения. Несмотря на большой арсенал имеющихся методов решения жестких задач [84], в последние годы появились десятки работ в данной области. Одним из направлений исследования является применение явных схем ((m, k) -метод, многостадийные схемы семейства Розенброка, метод конечных суперэлементов и др.) для решения жестких задач [19, 32, 62, 70–72]. Но явные методы, как правило, применимы только для узкого класса жестких задач и не могут быть использованы для жестких и плохо обусловленных задач в общем случае. Более эффективны методы на основе неявных или полуявных (диагонально неявных) схем [34, 68, 69, 73, 84], но их реализация по трудоемкости намного превосходит реализацию явных схем. Также стоит упомянуть, что неявные методы малоэффективны для плохо обусловленных задач в случае, когда предельная особая точка лежит внутри интервала изменения аргумента. Для рассматриваемых в монографии задач целесообразно использовать метод на основе замены исходного аргумента задачи на новый, при котором исходная задача не имела бы особенностей и могла бы быть проинтегрирована при помощи явных методов. Укажем некоторые подходы к осуществлению данной идеи.

2.1.1 Традиционный подход

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы ОДУ, задаваемой в общем виде

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \dots, y_m), \quad t \in [t_0, T], \quad i = \overline{1, m}, \quad t_0 < T < \infty \quad (2.1)$$

с начальными условиями

$$y_1(t_0) = y_{10}, \dots, y_m(t_0) = y_{m0}. \quad (2.2)$$

Отметим, что все переменные в задаче (2.1)-(2.2) являются равноправными, т. е. вместо аргумента t можно выбрать

в качестве независимой любую из переменных y_1, y_2, \dots, y_m . Это наблюдение (по аналогии с системами алгебраических и трансцендентных уравнений [27, 28]) позволяет обходить предельные особые точки, лежащие внутри отрезка изменения переменной t .

Если в процессе решения при $t = \tilde{t}$ хотя бы одна функция f_j , $1 \leq j \leq m$, неограниченно возрастает, то дальнейшее решение затруднено. В этом случае выберем в качестве нового аргумента одну из переменных y_p , $1 \leq p \leq m$, для которой в окрестности точки $M(\tilde{t}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)$ все функции f_i ограничены, а $f_p \neq 0$, где $y_i(\tilde{t}) = \tilde{y}_i$, и перейдем к ней в системе (2.1)

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dy_p} = \frac{f_i(t, y_1, \dots, y_m)}{f_p(t, y_1, \dots, y_m)}, & i = 1, \dots, m, i \neq p, \\ \frac{dt}{dy_p} = \frac{1}{f_p(t, y_1, \dots, y_m)}, & y_p \in [\tilde{y}_p, y_{p*}], \tilde{y}_p < y_{p*} < \infty, \end{cases} \quad (2.3)$$

приняв за начальные условия для нее

$$\begin{cases} y_1(\tilde{y}_p) = \tilde{y}_1, \\ \vdots \\ y_{p-1}(\tilde{y}_p) = \tilde{y}_{(p-1)}, \\ y_{p+1}(\tilde{y}_p) = \tilde{y}_{(p+1)}, \\ \vdots \\ y_m(\tilde{y}_p) = \tilde{y}_m, \\ t(\tilde{y}_p) = \tilde{t}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Если можно найти такую переменную y_p , то удастся пройти через предельную особую точку при $t = \tilde{t}$. Далее, приближаясь к другим предельным особым точкам, мы можем снова заменить аргумент, проделывая вышеописанную процедуру нужное число раз.

Таким образом, исходная задача (2.1)-(2.2) может быть сведена к последовательности задач Коши вида (2.3)-(2.4) с ограниченными правыми частями. Но процесс смены аргумента плохо формализуем и выполняется фактически вручную, поэтому хотелось бы выработать другой путь для реализации описанной идеи.

Отметим также, что указанный метод замены аргумента не работает, если интегральная кривая задачи (2.1)-(2.2) содержит точки бифуркации [87, с. 196-216], в этом случае требуются другие подходы (см., например, монографию [40]).

2.1.2 Параметризация решения. Общий подход

Модифицируем подход, рассмотренный в параграфе 2.1.1, учитывая, что при смене аргумента продолжения решения не обязательно двигаться исключительно по одной из переменных y_1, \dots, y_m или t . Обозначив переменную t как y_{m+1} , будем определять новый аргумент продолжения решения локально, в окрестности каждой точки интегральной кривой в виде [87, с. 51]

$$d\mu = \alpha_1 dy_1 + \alpha_2 dy_2 + \dots + \alpha_m dy_m + \alpha_{m+1} dy_{m+1} = (\bar{\alpha}, d\bar{\lambda}), \quad (2.5)$$

где $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1})^T$, $d\bar{\lambda} = (dy_1, \dots, dy_{m+1})^T$.

Полагая, что все переменные задачи (2.1)-(2.2) зависят от аргумента μ :

$$y_1 = y_1(\mu), y_2 = y_2(\mu), \dots, y_{m+1} = y_{m+1}(\mu),$$

перепишем систему (2.1) в виде

$$\frac{dy_i}{d\mu} = f_i(y_1, \dots, y_{m+1}) \frac{dy_{m+1}}{d\mu}, \quad \mu \in [\mu_0, \mu_*], \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.6)$$

Дополняя систему (2.6) уравнением

$$\alpha_1 \frac{dy_1}{d\mu} + \alpha_2 \frac{dy_2}{d\mu} + \dots + \alpha_m \frac{dy_m}{d\mu} + \alpha_{m+1} \frac{dy_{m+1}}{d\mu} = 1, \quad (2.7)$$

получим замкнутую систему ОДУ.

В качестве начальных условий для системы (2.6)-(2.7) примем

$$\begin{cases} y_1(\mu_0) = y_{10}, \\ \vdots \\ y_{m+1}(\mu_0) = t_0. \end{cases}$$

Так как аргумент μ не входит явно в систему (2.6)-(2.7), то положим μ_0 равным нулю.

Выбирая вектор $\bar{\alpha}$ тем или иным образом, можно получить различные аргументы продолжения. В частности, если положить $\bar{\alpha} = \bar{e}_p$, где компоненты вектора \bar{e}_p равны $e_{pi} = \delta_{pi}$, $i = \overline{1, m+1}$, то в качестве нового аргумента продолжения получим переменную y_p . Здесь δ_{pi} – символы Кронекера.

При решении удобно использовать такие аргументы продолжения, которые не требуют смены во всей рассматриваемой области. На существование таких аргументов указывает тот факт, что в окрестности каждой рассматриваемой точки можно выбрать значение вектора $\bar{\alpha}$ так, чтобы все правые части были ограничены. В результате будет получен вектор $\bar{\alpha}$ как функция точек рассматриваемой области, которому соответствует аргумент продолжения, обладающий требуемыми свойствами.

2.1.3 Наилучшая параметризация

Можно видеть, что в каждой точке интегральной кривой аргумент продолжения определяется неоднозначно. Вместе с тем для некоторых аргументов продолжения новая система обусловлена лучше по сравнению с другими. Исходя из этого соображения, можно ставить задачу о поиске наилучшего аргумента продолжения.

В монографии [87, с. 17-30, 52] доказано, что задача Коши для нормальной системы ОДУ преобразуется к наилучшему аргументу тогда и только тогда, когда в качестве такового выбраны длина дуги, отсчитываемая вдоль интегральной кривой этой задачи.

Иными словами, вектор $\bar{\alpha}$ в (2.5) для наилучшего аргумента следует принять в виде

$$\bar{\alpha} = \left(\frac{dy_1}{d\mu}, \frac{dy_2}{d\mu}, \dots, \frac{dy_{m+1}}{d\mu} \right)^T. \quad (2.8)$$

Определение 2.1. Аргумент продолжения, для которого вектор $\bar{\alpha}$ имеет вид (2.8), будем называть наилучшим и обозначать буквой λ .

В скалярной форме дифференциал наилучшего аргумента можно записать в виде

$$(d\lambda)^2 = (dy_1)^2 + (dy_2)^2 + \dots + (dy_{m+1})^2. \quad (2.9)$$

Исходя из соотношений (2.8) и (2.9), можно утверждать, что для вектора $\bar{\alpha}$ справедливо равенство

$$\|\bar{\alpha}\|_2 = 1,$$

где $\|\cdot\|_2$ – евклидова (квадратичная) норма вектора [33, с. 24].

Система уравнений (2.1)-(2.2), преобразованная к аргументу λ , запишется в виде

$$\frac{dy_i}{d\lambda} = \pm \frac{f_i(y_1, \dots, y_{m+1})}{\sqrt{Q(y_1, \dots, y_{m+1})}}, \quad \lambda \in [0, \lambda_*], \quad i = \overline{1, m+1}, \quad (2.10)$$

где $Q(y_1, \dots, y_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} f_i^2(y_1, \dots, y_{m+1})$, а функция, стоя-

щая в числителе $m+1$ -го уравнения, $f_{m+1}(y_1, \dots, y_{m+1}) \equiv 1$.

Знак правой части показывает направление движения вдоль нового аргумента. В дальнейшем будем считать, что знак правой части (2.10) положительный.

Начальные условия для системы (2.10) запишем следующим образом:

$$y_1(0) = y_{10}, \dots, y_{m+1}(0) = t_0. \quad (2.11)$$

Определение 2.2. Переход от задачи (2.1)-(2.2) к задаче (2.10)-(2.11) будем называть λ -преобразованием.

Анализируя задачу (2.10)-(2.11), можно отметить следующие преимущества:

1. Квадратичная норма правой части системы (2.10) равна единице. Это говорит о том, что для задачи не существует точек, в которых правые части системы (2.10) теряют смысл, и это дает возможность использовать при ее численном решении любые методы интегрирования задачи Коши, в частности и явные.
2. Нет необходимости производить смену аргумента, что облегчает процесс решения.

Вместе с тем существует и ряд недостатков данного подхода:

1. Увеличение размерности задачи на единицу.
2. Усложнение вида уравнений преобразованной системы. В случае задачи большой размерности ($m \gg 1$) параметризованная система становится значительно сложнее исходной [35, 46]. По этой причине выгода от применения наилучшей параметризации может исчезнуть.
3. Для некоторых задач значения знаменателей λ -преобразованной системы в некоторый момент времени могут оказаться близкими к нулю. Формально знаменатели отличны от нуля, но фактически они могут принимать очень малые значения. Это может привести к возрастанию вычислительной ошибки.
4. Аналитическое решение параметризованной задачи можно найти только в исключительных случаях. В общем случае это сделать не удается.

Замечание 2.1. В монографии [87] аргумент λ носит название наилучшего параметра, что объясняется его применением к решению нелинейных алгебраических уравнений, для которых неприменимо понятие аргумента. Поэтому наилучший аргумент λ будем называть также наилучшим параметром, а процедуру перехода к нему – наилучшей параметризацией.

2.2 НАИЛУЧШАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Для задачи (1.3)-(1.4) вектор $\bar{\alpha}$ (2.8) примет вид

$$\bar{\alpha} = \left(\frac{d\varepsilon}{d\lambda}, \frac{d\omega}{d\lambda}, \frac{dt}{d\lambda} \right)^T.$$

Тогда дифференциал наилучшего аргумента запишется в скалярной форме

$$(d\lambda)^2 = (d\varepsilon)^2 + (d\omega)^2 + (dt)^2. \quad (2.12)$$

С использованием параметра λ (2.12) задача (1.3)-(1.4) преобразуется к виду системы

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{f_1(\sigma)}{\sqrt{\Psi^2(\omega) + f_1^2(\sigma) + f_2^2(\sigma)}}, \\ \frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{f_2(\sigma)}{\sqrt{\Psi^2(\omega) + f_1^2(\sigma) + f_2^2(\sigma)}}, \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\Psi(\omega)}{\sqrt{\Psi^2(\omega) + f_1^2(\sigma) + f_2^2(\sigma)}} \end{cases} \quad (2.13)$$

с начальными условиями

$$\varepsilon(0) = 0, \omega(0) = 0, t(0) = 0. \quad (2.14)$$

Применим полученные результаты к расчету ползучести и длительной прочности образцов из стали 45 и титанового сплава ЗВ.

2.2.1 Наилучшая параметризация задачи растяжения образцов из стали 45

Преобразованная к аргументу λ (2.12) задача (1.34), (1.4), описывающая процесс деформирования цилиндрических образцов из стали 45 при одноосном растяжении в условиях ползучести, запишется в виде системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{\sqrt{\omega^{2\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{2m} + B_\varepsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}}, \\ \frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{\omega^{2\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{2m} + B_\varepsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}}, \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}{\sqrt{\omega^{2\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{2m} + B_\varepsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}}, \end{array} \right. \quad (2.15)$$

с начальными условиями (2.14).

Можно видеть, что правые части уравнений системы (2.15) не обращаются в бесконечность, более того, они по модулю не превосходят единицы. И для численного решения задачи (2.15), (2.14) может быть использован любой известный метод.

Для численного решения задачи (2.15), (2.14) будем использовать методы ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я. В качестве материальных констант для задачи (2.15), (2.14) используются (1.35).

В таблице 2.1 даны результаты численного решения задачи (2.15), (2.14) для трех значений начального напряжения $\sigma_0 = 35, 40, 45$ МПа с переменным шагом интегрирования при значениях параметров $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = \theta_1/2$. Обозначения аналогичны используемым в таблице 1.3.

Таблица 2.1. Расчетные данные для стали 45 при переменном шаге, λ -преобразование

σ_0 , МПа	ε_n^*	ω_n^*	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод ЭЯ, $h_{\min}^\lambda = 10^{-6}$, $h_{\max}^\lambda = 2.0972$					
35	0.5716	1	7.0005	17947	185.2
40	0.6647	1	2.7601	17018	176.6
45	0.7593	1	1.2145	17468	181.7

Окончание табл. 2.1

σ_0 , МПа	ε_n^*	ω_n^*	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод ЭКЯ, $h_{\min}^\lambda = 10^{-6}$, $h_{\max}^\lambda = 8.3886$					
35	0.5715	0.9998	7.0005	5444	108.1
40	0.6646	0.9999	2.7601	5666	112
45	0.7592	0.9998	1.2145	6393	126.1
Метод РК4Я, $h_{\min}^\lambda = 10^{-6}$, $h_{\max}^\lambda = 33.554$					
35	0.5713	0.9995	7.0005	1197	42.61
40	0.6646	0.9999	2.7601	1152	40.88
45	0.7587	0.9992	1.2145	1195	42.44

Шаг интегрирования в параметризованных задачах, отсчитываемый вдоль направления отсчета аргумента λ , будем обозначать h^λ , h_{\min}^λ и h_{\max}^λ – минимальное и максимальное значение шага по аргументу λ . Начальное значение шага h_s^λ по аргументу λ принималось равным 10^{-6} .

В таблице 2.2 представлена относительная погрешность параметра поврежденности при расчете задачи (2.15), (2.14) методами ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я с переменным шагом. Обозначения в таблице 2.2 аналогичны используемым в таблице 1.10. Для расчета относительной погрешности использовалось аналитическое решение для параметра поврежденности (1.36).

Таблица 2.2. Относительная погрешность $\delta\omega$ для численного решения задачи (2.15), (2.14)

σ_0 , МПа	$\delta\omega_{\max}$, %	$\delta\omega_{\text{av}}$, %	$\delta\omega_{\text{dev}}$, %
Метод ЭЯ, $\theta_1 = 10^{-4}$			
35	43.256	0.041	0.489
40	46.586	0.043	0.53
45	47.65	0.042	0.545
Метод ЭКЯ, $\theta_1 = 10^{-4}$			
35	8.182	0.009	0.132

Окончание табл. 2.2

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{av}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
40	4.735	0.007	0.084
45	4.395	0.006	0.071

Метод РК4Я, $\theta_1 = 10^{-4}$

35	0.709	0.004	0.038
40	0.656	0.004	0.038
45	0.534	0.003	0.03

Кривые ползучести, полученные при решении задачи (2.15), (2.14), имеют вид, аналогичный приведенному на рис. 1.7. Характер изменения шага интегрирования и относительной погрешности параметра поврежденности для λ -преобразованной задачи (2.15), (2.14) совпадает с характером изменения кривых, изображенных на рис. 1.8 и 1.9.

2.2.2 Наилучшая параметризация задачи растяжения образцов из сплава ЗВ

По аналогии с задачей растяжения образцов из стали 45, запишем преобразованную задачу (1.42)-(1.44), описывающую процесс деформирования круглых стержней из титанового сплава ЗВ при одноосном растяжении в условиях ползучести, в виде системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{d\lambda} = \frac{B_A \sigma_0^n}{\sqrt{\omega^{2\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{2m} + B_A^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}}, \\ \frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{\omega^{2\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{2m} + B_A^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}}, \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}{\sqrt{\omega^{2\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{2m} + B_A^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}} \end{array} \right. \quad (2.16)$$

с начальными условиями

$$A(0) = 0, \omega(0) = 0, t(0) = 0. \quad (2.17)$$

Выражение для определения деформации ползучести (1.44) останется в прежнем виде, но с заменой аргумента t на λ .

Для задачи (1.42)-(1.44) используется наилучший параметр, записываемый в скалярной форме

$$(d\lambda)^2 = (dA)^2 + (d\omega)^2 + (dt)^2. \quad (2.18)$$

Правые части уравнений системы (2.16) также не обращаются в бесконечность. Для численного решения задачи (2.16), (2.17) будем использовать методы ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я. В качестве материальных констант для системы (2.16) используются (1.45).

В таблице 2.3 даны результаты численного решения задачи (2.16), (2.17) для трех значений начального напряжения $\sigma_0 = 603, 618, 638$ МПа с переменным шагом интегрирования при значениях параметров $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = \theta_1/2$. Обозначения аналогичны используемым в таблицах 1.12 и 2.1. Начальное значение шага h_s^λ по аргументу λ принималось равным 10^{-5} . Все расчеты проводились до значения параметра поврежденности $\omega_n = 1$.

Таблица 2.3. Расчетные данные для сплава ЗВ при переменном шаге, λ -преобразование

σ_0 , МПа	ε_n^*	A_n^* , МДж/м ³	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод ЭЯ, $h_{\min}^\lambda = 10^{-5}$, $h_{\max}^\lambda = 41.943$					
603	0.1098	66.2131	4292.34	936890	9770.3
618	0.1071	66.2131	1202.07	952806	9943.3
638	0.1038	66.2131	230.898	927232	9678.4
Метод ЭКЯ, $h_{\min}^\lambda = 10^{-5}$, $h_{\max}^\lambda = 167.77$					
603	0.1098	66.2131	4292.34	318546	7458.4
618	0.1071	66.2131	1202.07	314197	7366.3
638	0.1038	66.2131	230.898	333880	7839.1

Окончание табл. 2.3

σ_0 , МПа	ε_n^*	A_n^* , МДж/м ³	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод РК4Я, $h_{\min}^\lambda = 10^{-5}$, $h_{\max}^\lambda = 671.09$					
603	0.1098	66.213	4292.34	62004	2119.9
618	0.1071	66.2124	1202.07	62701	2146.6
638	0.1038	66.2129	230.898	61876	2119.7

Кривые ползучести, полученные при решении задачи (2.16), (2.17), имеют вид, аналогичный приведенному на рис. 1.10. Характер изменения шага интегрирования и относительной погрешности параметра поврежденности для преобразованной к аргументу λ задачи (2.16), (2.17) совпадает с характером изменения кривых, изображенных на рис. 1.11 и 1.12.

В таблице 2.4 представлена относительная погрешность параметра поврежденности при расчете задачи (2.16), (2.17) методами ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я с переменным шагом. Обозначения в таблице 2.4 аналогичны используемым в таблице 1.10. Для расчета относительной погрешности использовалось аналитическое решение для параметра поврежденности (1.46).

Таблица 2.4. Относительная погрешность $\delta\omega$ для численного решения задачи (2.16), (2.17)

σ_0 , МПа	$\delta\omega_{\max}$, %	$\delta\omega_{\text{av}}$, %	$\delta\omega_{\text{dev}}$, %
Метод ЭЯ, $\theta_1 = 10^{-4}$			
603	17.503	0.01	0.093
618	17.503	0.006	0.063
638	17.503	0.009	0.089
Метод ЭКЯ, $\theta_1 = 10^{-4}$			
603	13.133	0.008	0.076
618	13.133	0.009	0.084
638	13.133	0.011	0.093
Метод РК4Я, $\theta_1 = 10^{-4}$			
603	1.784	0.003	0.035

Окончание табл. 2.4

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{av}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
618	1.784	0.002	0.032
638	1.784	0.001	0.021

2.2.3 Наилучшая параметризация задачи растяжения образцов из сплава ОТ-4

Определенный интерес представляет исследование применения наилучшей параметризации к расчету неупрочняющихся конструкций, даже с учетом того, что подобный расчет уже возможен с использованием явных методов и не представляет существенных затруднений. Маловероятно, что наилучшая параметризация позволит уменьшить время счета для неупрочняющихся конструкций, поскольку переход к наилучшему аргументу усложняет уравнения исходной задачи. Но стоит рассмотреть возможность уменьшения максимальной и средней погрешности при использовании аргумента λ .

Для задачи расчета длительной прочности в условиях ползучести для плоских образцов из титанового сплава ОТ-4, рассмотренной в параграфе 1.2.2 и описываемой начальной задачей (1.25)-(1.26), выберем наилучший аргумент в виде

$$(d\lambda)^2 = (d\varepsilon)^2 + (dA)^2 + (dt)^2. \quad (2.19)$$

Тогда, используя процедуру λ -преобразования по аргументу (2.19), запишем параметризованную задачу в виде системы

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{Ke^{\beta\sigma_0}}{\sqrt{\sigma_0^2 \cdot (A_* - A)^{2m} + (1 + \sigma_0^2) \cdot K^2 e^{2\beta\sigma_0}}}, \\ \frac{dA}{d\lambda} = \frac{\sigma_0 \cdot Ke^{\beta\sigma_0}}{\sqrt{\sigma_0^2 \cdot (A_* - A)^{2m} + (1 + \sigma_0^2) \cdot K^2 e^{2\beta\sigma_0}}}, \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\sigma_0 \cdot (A_* - A)^m}{\sqrt{\sigma_0^2 \cdot (A_* - A)^{2m} + (1 + \sigma_0^2) \cdot K^2 e^{2\beta\sigma_0}}} \end{cases} \quad (2.20)$$

с однородными начальными условиями

$$\varepsilon(0) = 0, A(0) = 0, t(0) = 0. \quad (2.21)$$

Задача (2.20), (2.21) уже не имеет особенностей в момент разрушения. Для ее численного решения будем использовать методы ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я. В качестве материальных констант для системы (2.20) используются (1.30).

В таблице 2.5 даны результаты численного решения задачи (2.20), (2.21) для трех значений начального напряжения $\sigma_0 = 98, 112.7$ и 147 МПа с постоянным шагом интегрирования $h^\lambda = 10^{-4}$. Обозначения аналогичны используемым в таблице 1.5.

Таблица 2.5. Расчетные данные для сплава ОТ-4 при постоянном шаге, λ -преобразование

σ_0 , МПа	ε_n^*	A_n^* , МДж/м ³	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод ЭЯ, $h^\lambda = 10^{-4}$					
98	0.9	88.1999	446.228	4791775	17210
112.7	0.7826	88.1999	263.969	3026757	10930
147	0.6	88.1999	77.543	1322996	4721.9
Метод ЭКЯ, $h^\lambda = 10^{-4}$					
98	0.9	88.2	446.228	4791774	26431
112.7	0.7826	88.1999	263.968	3026756	16793
147	0.6	88.1999	77.543	1322995	7252.3
Метод РК4Я, $h^\lambda = 10^{-4}$					
98	0.9	88.2	446.228	4791774	50302
112.7	0.7826	88.1999	263.968	3026756	31985
147	0.6	88.1999	77.543	1322995	13877

В таблице 2.6 даны результаты численного решения задачи (2.20), (2.21) для трех значений начального напряжения $\sigma_0 = 98, 112.7$ и 147 МПа с переменным шагом интегрирования при значениях параметров $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = \theta_1/2$. Обозначения аналогичны используемым в таблицах 1.6 и 2.3. Начальное значение шага h_s^λ по аргументу λ принималось равным единице.

Кривые ползучести, полученные при решении задачи (2.20), (2.21) с постоянным и переменным шагом, аналогичны приведенным на рис. 1.4. Характер изменения шага интегрирования по аргументу λ совпадает с характером изменения кривых, изображенных на рис. 1.5.

Таблица 2.6. Расчетные данные для сплава ОТ-4 при переменном шаге, λ -преобразование

σ_0 , МПа	ε_n^*	A_n^* , МДж/м ³	t_n^* , Ч	N_s	t_c , мс
Метод ЭЯ, $h_{\min}^\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$, $h_{\max}^\lambda = 0.002$					
98	0.9	88.1999	446.228	1341672	8277.4
112.7	0.7826	88.1999	263.969	1336702	8254.5
147	0.6	88.2	77.543	1365911	8426.6
Метод ЭКЯ, $h_{\min}^\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$, $h_{\max}^\lambda = 0.0039$					
98	0.9	88.1998	446.228	407698	3851.6
112.7	0.7826	88.1999	263.968	409275	3864.4
147	0.6	88.2	77.543	400103	3776.7
Метод РК4Я, $h_{\min}^\lambda = 10^{-3}$, $h_{\max}^\lambda = 0.0156$					
98	0.9	88.1993	446.228	88138	1542.7
112.7	0.7826	88.1991	263.968	87831	1535.2
147	0.6	88.1992	77.543	88630	1553.6

В таблице 2.7 представлена относительная погрешность удельной работы рассеяния при расчете задачи (2.20), (2.21) методами ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я с переменным шагом. Обозначения в таблице 2.7 аналогичны используемым в таблице 1.7. Для расчета относительной погрешности использовалось аналитическое решение для удельной работы рассеяния (1.27). Характер изменения погрешности δA в зависимости от аргумента t аналогичен характеру изменения кривых, приведенных на рис. 1.6.

Таблица 2.7. Относительная погрешность δA для численного решения задачи (2.20), (2.21)

σ_0 , МПа	Постоянный шаг $h^\lambda = 10^{-4}$			Переменный шаг, $\theta_1 = 10^{-4}$, $\theta_2 = \theta_1/2$		
	δA_{\max} , %	δA_{av} , %	δA_{dev} , %	δA_{\max} , %	δA_{av} , %	δA_{dev} , %
Метод ЭЯ						
98	2.584	0.011	0.138	3.641	0.128	0.544
112.7	2.841	0.021	0.2	3.676	0.131	0.553
147	3.438	0.071	0.398	3.666	0.128	0.545
Метод ЭКЯ						
98	0.071	$4 \cdot 10^{-12}$	$6 \cdot 10^{-4}$	0.159	$2 \cdot 10^{-4}$	0.005
112.78	0.071	$4 \cdot 10^{-12}$	$8 \cdot 10^{-4}$	0.158	$2 \cdot 10^{-4}$	0.005
147	0.086	$3 \cdot 10^{-11}$	0.002	0.159	$2 \cdot 10^{-4}$	0.005
Метод РК4Я						
98	0.045	$5 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-4}$	0.022	$5 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-4}$
112.7	0.044	$3 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-4}$	0.03	$9 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-4}$
147	0.053	$2 \cdot 10^{-12}$	$6 \cdot 10^{-4}$	0.026	$4 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-4}$

2.2.4 Анализ результатов наилучшей параметризации

Применение метода продолжения решения по параметру и наилучшей параметризации к расчету длительной прочности упрочняющихся конструкций в условиях ползучести позволяет перейти от исходных задач (1.34), (1.4) для стали 45 и (1.42)-(1.43) для титанового сплава ЗВ, которые имеют две предельные особые точки, к преобразованным задачам без особенностей (2.15), (2.14) и (2.16), (2.17) соответственно. Таким образом, наилучшая параметризация позволила применять для расчета длительной прочности упрочняющихся конструкций явные методы решения задачи Коши, что привело к устранению всех трудностей, возникающих при использовании неявных методов решения начальных задач (см. раздел 1.3). Для точности $\theta_1 = 10^{-4}$ это позволило уменьшить время счета в среднем на 35-40 процентов для стали 45 и титанового сплава ЗВ. Для более низкой точности время счета для параметризованных задач может быть меньше в разы. Выделим следующие особенности применения наилучшей параметризации к расчету упрочняющихся конструкций:

1. Полученные приближенные решения параметризованных задач так же хорошо согласуются с аналитическими и экспериментальными данными, как и результаты, полученные в разделе 1.3.
2. Из таблиц 2.1 и 2.3 видно, что для стали 45 и титанового сплава ЗВ шаг интегрирования не опускается ниже значения начального шага h_s^λ . При этом длина рассматриваемого интервала по λ мало отличается от длины интервала по аргументу t , измеряемому в секундах. Количество шагов по аргументу t и λ также различается всего на несколько процентов. Это говорит о том, что характер изменения шагов по t и λ мало различается как количественно, так и качественно, но для сплава ЗВ удается избежать уменьшения шага до порядка 10^{-41} в окрестностях предельных особых точек.

3. При сравнении погрешностей расчетных данных, приведенных в таблицах 2.2 и 2.4, можно отметить, что для параметризованных задач метод ЭЯ дает большую максимальную погрешность, чем метод ЭНЯ для исходных задач, что влияет на увеличение среднего значения и среднего квадратичного отклонения погрешности решений параметризованных задач. Однако среднее значение и среднее квадратическое отклонение погрешности для методов ЭЯ и ЭНЯ различаются незначительно. Значит, решения, полученные методами ЭЯ и ЭНЯ, сопоставимы по точности.
4. Для параметризованных задач повышение порядка точности используемых численных методов позволяет существенно уменьшить погрешность решения. Уже метод ЭКЯ дает погрешность меньшую, чем методы Г4НЯ и ЭНЯ. Наименьшая же средняя погрешность получена методом РК4Я, она более чем на порядок меньше средней погрешности, полученной неявными методами для обеих задач.

В остальном, для параметризованных задач справедливы выводы, сделанные в параграфе 1.3.3.

Замечание 2.2. При $\theta_1 = 10^{-4}$ для титанового сплава ЗВ как в параметризованном, так и в непараметризованном случае наблюдается возрастание максимальной погрешности численного решения. Это можно связать как со специфическими свойствами рассматриваемой задачи, так и с особенностями применяемых методов (для методов Г4НЯ и РК4Я возрастания не наблюдается). Для параметризованной задачи максимальную погрешность можно контролировать выбором начального шага.

Замечание 2.3. В окрестности начальной точки деформация ползучести и параметр поврежденности принимают близкие к нулю значения. Абсолютная погрешность численного решения в окрестности начальной точки не превосходит заданного значения точности, но относительная погрешность может принимать значения в сотни и тысячи процентов, что

сильно искажает средние значения погрешности. Выбор малых значений начального шага $h_s^\lambda = 10^{-6}$ для стали 45 и $h_s^\lambda = 10^{-5}$ для сплава ЗВ предотвращает рост относительной погрешности в окрестности начальной точки.

Для задачи расчета длительной прочности образцов из сплава ОТ-4 (см. таблицы 2.5 и 2.6) при постоянном шаге интегрирования время счета возросло в среднем в 1.5–2.5 раза, что объясняется усложнением вида преобразованной задачи по сравнению с исходной. При этом количество шагов по независимой переменной возрастает незначительно. Для параметризованной задачи, даже при использовании постоянного шага, удается близко подойти к моменту разрушения, что объясняется улучшением обусловленности данной задачи.

При переменном шаге интегрирования для метода ЭЯ величина шага увеличивается, что позволяет уменьшить количество шагов по параметру λ вдвое и сократить время счета в среднем на 40 процентов. Для методов ЭКЯ и РК4Я вычислительное преимущество исчезает. Для этих двух методов количество шагов по независимой переменной может отличаться на 10–15 процентов в обе стороны по сравнению с непараметризованной задачей. Время счета увеличивается на 15 процентов для метода ЭКЯ и на 45–50 процентов для метода РК4Я.

При анализе результатов таблицы 2.7 можно отметить, что с ростом порядка точности численного метода погрешность уменьшается. Метод ЭЯ для параметризованной задачи дает увеличенную погрешности по сравнению с исходной задачей как при постоянном, так и при переменном шаге. Это объясняется возрастанием количества точек, попадающих в окрестность момента разрушения, для которых погрешность имеет большие значения. Для метода ЭКЯ средние значения погрешности решений параметризованной и непараметризованной задач мало отличаются. Метод РК4Я при постоянном шаге позволяет значительно снизить как максимальную, так и среднюю погрешность решения параметризованной задачи по сравнению с исходной. Но при переменном шаге погрешность для метода РК4Я мало отличается от значений,

полученных для непараметризованной задачи. В среднем же для рассматриваемых методов значения погрешностей решений параметризованной и непараметризованной задач сопоставимы.

В остальном для параметризованной задачи одноосного растяжения образцов из сплава ОТ-4 справедливы выводы параграфа 1.2.3.

Глава 3. ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПО МОДИФИЦИРОВАННОМУ НАИЛУЧШЕМУ АРГУМЕНТУ

На практике, при решении конкретной задачи наилучший аргумент может оказаться неудобным в использовании. Вместо наилучшего аргумента часто применяют его усеченные варианты или аргументы продолжения других видов. Например, в монографии Э. И. Григолюка и Е. А. Лопаницына [25] используется параметр продолжения специального вида, позволяющий при расчете пологих оболочек методом конечных элементов получать симметричные матрицы жесткости. В данной работе для ослабления недостатков, возникающих при λ -преобразовании, введем новый аргумент κ , вектор $\bar{\alpha}$ (2.8) для которого представим в виде

$$\bar{\alpha}' = \left(\tilde{K}_1 \cdot \frac{dy_1}{d\lambda}, \dots, \tilde{K}_{m+1} \cdot \frac{dy_{m+1}}{d\lambda} \right)^T. \quad (3.1)$$

Здесь \tilde{K}_i – функции аргументов y_1, \dots, y_{m+1} . Для сохранения одного направления отсчета нового аргумента κ и наилучшего аргумента λ будем полагать функции \tilde{K}_i неотрицательными, т. е. $\tilde{K}_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m + 1$. Других ограничений на выбор функций \tilde{K}_i накладывать не будем.

Домножая и деля каждую компоненту вектора (3.1) на $d\kappa$, получим

$$\bar{\alpha}' = \left(\tilde{K}_1 \cdot \frac{d\kappa}{d\lambda} \frac{dy_1}{d\kappa}, \dots, \tilde{K}_{m+1} \cdot \frac{d\kappa}{d\lambda} \frac{dy_{m+1}}{d\kappa} \right)^T.$$

Здесь $0 \leq \frac{d\kappa}{d\lambda} < \infty$ – функция, зависящая от y_1, y_2, \dots, y_{m+1} .
 Обозначая далее

$$K_i(y_1, \dots, y_{m+1}) = \tilde{K}_i(y_1, \dots, y_{m+1}) \frac{d\kappa}{d\lambda},$$

запишем $\bar{\alpha}'$ в форме

$$\bar{\alpha}' = \left(K_1 \cdot \frac{dy_1}{d\kappa}, \dots, K_{m+1} \cdot \frac{dy_{m+1}}{d\kappa} \right)^T.$$

Не ограничивая общности дальнейших рассуждений, примем

$$K_i(y_1, \dots, y_{m+1}) = g_i^{-2}(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}) \quad (3.2)$$

и окончательно получим

$$\bar{\alpha}' = \left(\frac{1}{g_1^2} \cdot \frac{dy_1}{d\kappa}, \dots, \frac{1}{g_{m+1}^2} \cdot \frac{dy_{m+1}}{d\kappa} \right)^T, \quad (3.3)$$

где $g_1(y_1, \dots, y_{m+1}), \dots, g_{m+1}(y_1, \dots, y_{m+1})$ – неотрицательные функции.

Запись функций $K_i(y_1, \dots, y_{m+1})$ в виде (3.2) не влияет на свойства параметра κ . Данный выбор сделан исключительно для удобства проведения дальнейших выкладок.

В отличие от вектора $\bar{\alpha}$ (2.8) для наилучшего аргумента λ , квадратичная норма вектора $\bar{\alpha}'$ (3.3) для аргумента κ уже не равна единице, а является переменной величиной, зависящей от выбора функций $g_i(y_1, \dots, y_{m+1})$.

Определение 3.1. Аргумент, определяемый вектором $\bar{\alpha}'$ (3.3), будем называть модифицированным наилучшим и обозначать κ .

Подставляя вектор $\bar{\alpha}'$ (3.3) в соотношение (2.5), получим аргумент κ , дифференциал которого имеет вид

$$(d\kappa)^2 = \left(\frac{dy_1}{g_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{dy_{m+1}}{g_{m+1}} \right)^2. \quad (3.4)$$

Система уравнений (2.1)-(2.2), преобразованная к аргументу κ , запишется в виде

$$\frac{dy_i}{d\kappa} = \pm \frac{f_i(y_1, \dots, y_{m+1})}{\sqrt{Q'(y_1, \dots, y_{m+1})}}, \quad \kappa \in [0, \kappa_*], \quad (3.5)$$

где $Q'(y_1, \dots, y_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} \left(\frac{f_i(y_1, \dots, y_{m+1})}{g_i(y_1, \dots, y_{m+1})} \right)^2$, а значение функции $f_{m+1}(y_1, \dots, y_{m+1}) \equiv 1$.

В дальнейшем будем считать, что знак правой части системы (3.5) положительный.

В качестве начальных условий для системы (3.5) выберем (2.11).

Определение 3.2. *Переход от задачи (2.1)-(2.2) к задаче (3.5), (2.11) будем называть κ -преобразованием.*

Выбирая функции $g_i(y_1, \dots, y_{m+1})$ тем или иным образом, можно получать различные параметры продолжения κ вида (3.4), для которых задача (3.5), (2.11) может быть как хорошо, так и плохо обусловленной. Важной проблемой является определение обусловленности задач вида (3.5), (2.11) при различных параметрах κ . Для решения данной задачи целесообразно использовать тот факт, что параметр λ дает задаче (2.10)-(2.11) наилучшую обусловленность. Исследуем условия, налагаемые на функции $g_i(y_1, \dots, y_{m+1})$, для близости параметров λ и κ при их сопоставлении.

3.1 МОДИФИКАЦИЯ НАИЛУЧШЕГО АРГУМЕНТА ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ОДУ

Существенным недостатком при использовании аргумента κ является то, что на сегодняшний день нет доказанных утверждений, касающихся обусловленности κ -преобразованных задач. Исследуем этот вопрос, начав с рассмотрения способа отсчета аргумента κ .

3.1.1 О направлениях отсчета аргументов λ и κ в окрестности точки интегральной кривой

Ограничиваясь случаем системы из двух ОДУ, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = F_1(u, v, x), \\ \frac{dv}{dx} = F_2(u, v, x), \\ u(x_0) = u_0, v(x_0) = v_0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Будем в дальнейшем полагать, что для задачи (3.6) выполнены условия существования решения в рассматриваемой области $W = \{(u, v, x) | u_0 \leq u \leq u_*, v_0 \leq v \leq v_*, x_0 \leq x \leq x_*\}$. Также допускается возможность неограниченного возрастания функций $F_1(u, v, x)$ и $F_2(u, v, x)$ в конечном числе точек из W .

Для параметризации задачи (3.6) будем использовать аргумент λ

$$(d\lambda)^2 = (du)^2 + (dv)^2 + (dx)^2 \quad (3.7)$$

и аргумент κ специального вида

$$(d\kappa)^2 = (du)^2 + (dv)^2 + \left(\frac{dx}{f(u, v, x)} \right)^2, \quad (3.8)$$

где функция $f(u, v, x)$ полагается произвольной неотрицательной. При этом процесс параметризации и вид параметризованных этими аргументами задач аналогичны приведенным выше. Выбор параметра κ в специальном виде (3.8) диктуется как соображениями простоты, так и удобством применения данной формы параметра κ в приложениях.

Заметим, что задание аргументов продолжения в виде (3.7) и (3.8) дает нам право отождествить их с переменными, отсчитываемыми в окрестности каждой точки интегральной кривой в направлениях, задаваемых векторами

$$d\bar{\lambda} = (du, dv, dx)^T \quad (3.9)$$

и

$$d\bar{\kappa} = \left(du, dv, \frac{dx}{f(u, v, x)} \right)^T. \quad (3.10)$$

Свяжем обусловленность κ -преобразованной задачи с отклонением, возникающим между векторами (3.9) и (3.10) при движении вдоль интегральной кривой l задачи (3.6). Исследуем вначале механизм возникновения отклонений между направлениями отсчета аргументов λ и κ . Для этого рассмотрим участок интегральной кривой l задачи (3.6), заключенный между начальной $M_0(x_0, u_0, v_0)$ и конечной $M_*(x_*, u_*, v_*)$ точками. Разобьем рассматриваемый участок интегральной кривой на n интервалов точками $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n = M_*$. При движении вдоль интегральной кривой по аргументам λ и κ , поставим в соответствие каждой точке $M_i(x_i, u_i, v_i)$, $i = \overline{1, n}$, следующие векторы: \bar{E}_i , длина которого $E_i = \|\bar{E}_i\|_2$ является суммарным отклонением направления отсчета аргумента κ от наилучшего (направления отсчета наилучшего аргумента λ) при движении от точки M_0 до M_i , $d\bar{E}_{i+}$ и $d\bar{E}_{i-}$, длины которых $dE_{i+} = \|d\bar{E}_{i+}\|_2$ и $dE_{i-} = \|d\bar{E}_{i-}\|_2$ являются отклонениями направления отсчета аргумента κ от наилучшего в правой и левой полукрестностях точки M_i соответственно. Связь между указанными векторами определим соотношениями

$$\begin{aligned} d\bar{E}_{i-} &= \lim_{\|\overline{M_i M_{i-1}}\|_2 \rightarrow 0} (\bar{E}_i - \bar{E}_{i-1}), \\ d\bar{E}_{i+} &= \lim_{\|\overline{M_i M_{i+1}}\|_2 \rightarrow 0} (\bar{E}_{i+1} - \bar{E}_i), \quad i = 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $\overline{M_i M_{i-1}}$ и $\overline{M_i M_{i+1}}$ – векторы с началом в точке M_i и концами в точках M_{i-1} и M_{i+1} соответственно. В точках M_0 и M_* определены только векторы $d\bar{E}_{0+}$ и $d\bar{E}_{*-}$. При совпадении отклонений в правой и левой полукрестностях точки M_i будем обозначать их $d\bar{E}_{i+} = d\bar{E}_{i-} = d\bar{E}_i$.

Таким образом, отклонение между направлениями отсчета аргументов λ и κ в точке M_i интегральной кривой однозначно определяется суммарным отклонением E_i , складывающимся из локальных отклонений dE_i в каждой точке интегральной кривой вплоть до точки M_i . Поэтому, прежде чем переходить к определению суммарных отклонений E_i , остановимся по-

дробнее на вычислении локальных отклонений dE_i . Докажем следующую лемму.

Лемма 3.1. *Пусть в некоторой окрестности точки M_i существуют конечные или бесконечные односторонние пределы*

$$\begin{aligned} K_+ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{|f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)|}, \\ K_- &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{|f(u_i - \Delta u, v_i - \Delta v, x_i - \Delta x)|}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta x^2}$. Тогда отклонение направления отсчета аргумента κ от наилучшего в правой и левой полуокрестностях точки M_i при $\rho \rightarrow 0$ равны соответствующим значениям K_+ и K_- , т. е.

$$dE_{i+} = K_+, \quad dE_{i-} = K_-. \quad (3.13)$$

В частности, если $K_+ = K_- = K$, то

$$dE_i = K. \quad (3.14)$$

Доказательство. Для задачи (3.6) рассмотрим трехмерную область W , в которой задана ее интегральная кривая l (рис. 3.1). Отметим на ней точку $M_i(u_i, v_i, x_i)$. Выберем положительное направление движения по интегральной кривой, приняв в качестве такового положительное направление координатных осей.

Совершим некоторое движение по интегральной кривой от точки M_i в положительном направлении, т. е., полагая, что приращения аргументов неотрицательные, и введем два вектора приращений. Во-первых, вектор $\Delta \bar{\lambda}$, который определим в виде

$$\Delta \bar{\lambda} = (\Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta x)^T,$$

квадрат его длины

$$(\Delta \lambda)^2 = (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta x)^2.$$

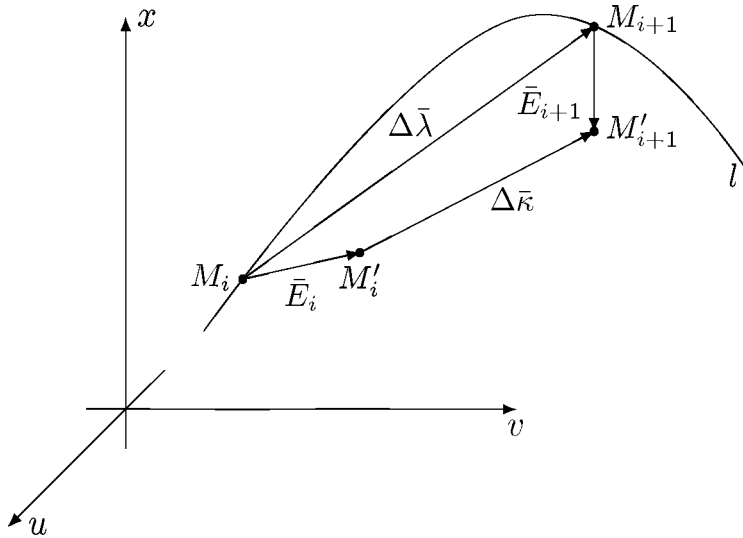


Рис. 3.1. Иллюстрация к лемме 3.1

Во-вторых, вектор

$$\Delta \bar{\kappa} = \left(\Delta u, \Delta v, \frac{\Delta x}{f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)} \right)^T,$$

квадрат длины которого

$$(\Delta \kappa)^2 = (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + \left(\frac{\Delta x}{f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)} \right)^2.$$

Здесь и далее под Δu , Δv , Δx будем понимать быть может малые, но конечные приращения переменных u , v , x . В свою очередь, под du , dv , dx будем понимать дифференциалы соответствующих переменных.

Таким образом, нами введены два аргумента λ и κ . Отметим следующее: аргументы λ и κ не являются полностью независимыми друг от друга. Это выражается в том, что приращения Δu , Δv и Δx , входящие в выражения для λ и κ , рав-

ны, т. е. аргумент κ является модификацией наилучшего аргумента λ .

Двигаясь в направлении, задаваемом вектором $\Delta\bar{\lambda}$, мы перейдем из точки M_i в точку $M_{i+1}(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)$, в направлении вектора $\Delta\bar{\kappa}$ мы перейдем из точки $M'_i(u_i + e_{ui}, v_i + e_{vi}, x_i + e_{xi})$, отклонение которой от точки M_i определяется вектором $\bar{E}_i = (e_{ui}, e_{vi}, e_{xi})^T$, в точку $M'_{i+1}(u_i + e_{ui} + \Delta u, v_i + e_{vi} + \Delta v, x_i + e_{xi} + \frac{\Delta x}{f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)})$, отклонение которой от точки M_{i+1} определяется вектором $\bar{E}_{i+1} = (e_{u(i+1)}, e_{v(i+1)}, e_{x(i+1)})^T$. В общем случае точка M'_{i+1} не лежит на кривой l . В зависимости от поведения функции $f(u, v, x)$ в окрестности точки M_i и суммарного вектора отклонения \bar{E}_i , точка M'_{i+1} может как находиться вблизи кривой l , так и бесконечно далеко удаляться от нее.

Нетрудно заметить, что при стремлении точки M_{i+1} к M_i , т. е. при стремлении $\Delta u, \Delta v$ и Δx к нулю, вектор $\Delta\bar{\lambda}$ стремится к дифференциалу $d\bar{\lambda}$ вида (3.9), направленному по касательной к интегральной кривой, длина его определяется формулой (3.7). В свою очередь, при стремлении точки M'_{i+1} к M'_i приращение $\Delta\bar{\kappa}$ стремится к дифференциалу $d\bar{\kappa}$ вида (3.10), направление которого зависит от значений функции $f(u, v, x)$ и вектора \bar{E}_i в окрестности точки M_i , а длина задается формулой (3.8).

Для нахождения вектора $d\bar{E}_{i+}$ воспользуемся соотношением

$$\Delta\bar{\lambda} + \bar{E}_{i+1} = \Delta\bar{\kappa} + \bar{E}_i,$$

из которого найдем

$$d\bar{E}_{i+} = \bar{E}_{i+1} - \bar{E}_i = \Delta\bar{\kappa} - \Delta\bar{\lambda}.$$

Последнее равенство можно также переписать в форме

$$d\bar{E}_{i+} = \left(0, 0, \frac{\Delta x}{f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)} - \Delta x \right)^T. \quad (3.15)$$

По условию леммы, так как существует первый предел (3.12), предел выражения (3.15) при $\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta x^2}$, стремящемся к нулю, существует. И по второй формуле (3.11) локальное отклонение направления отсчета аргумента κ в правой полукрестности точки M_i имеет вид

$$d\bar{E}_{i+} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(0, \quad 0, \quad \frac{\Delta x}{f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)} \right)^T.$$

Вычисляя квадратичную норму вектора $d\bar{E}_{i+}$, приходим к первому соотношению (3.13).

Применяя аналогичные рассуждения для левой полукрестности точки M_i , получим второе соотношение (3.13). В частности, при $K_+ = K_- = K$ получим (3.14). \square

Замечание 3.1. В граничных точках области W в условиях леммы 3.1 существуют только K_+ для левой границы и K_- для правой границы. Тогда за отклонение направления отсчета аргумента κ от наилучшего в точке M_0 принимается первое соотношение (3.13), а в точке M_* – второе.

Используя лемму 3.1, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Если в окрестности точки $M_i(u_i, v_i, x_i)$ односторонние пределы функции $f(u, v, x)$ существуют и отличны от нуля, т. е.*

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x) &\neq 0, \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} f(u_i - \Delta u, v_i - \Delta v, x_i - \Delta x) &\neq 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

то отклонение направления отсчета аргумента κ от наилучшего в окрестности точки M_i при $\rho \rightarrow 0$ равно нулю, т. е.

$$dE_i = 0. \quad (3.17)$$

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1. Точка M_i является точкой непрерывности или устранимой точкой разрыва для функции $f(u, v, x)$. Согласно лемме 3.1 отклонения направления отсчета аргумента κ от наи-

лучшего в левой и правой полуокрестностях точки M_i соответственно равны значениям K_- и K_+ , определяемым соотношениями (3.12).

По условию теоремы справедливы неравенства (3.16), из которых при $\rho \rightarrow 0$ следует справедливость равенства (3.17).

2. Точка M_i является точкой разрыва первого рода для функции $f(u, v, x)$. По определению точек разрыва первого рода и условию теоремы получим пределы $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x) = C_1 < \infty$ и $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(u_i - \Delta u, v_i - \Delta v, x_i - \Delta x) = C_2 < \infty$ при $C_1 \neq C_2 \neq 0$. Следовательно, оба односторонних предела (3.12) равны нулю и справедливо равенство (3.17).

3. Точка M_i является точкой разрыва второго рода для функции $f(u, v, x)$. Выше показано, что при конечных значениях односторонних пределов функции $f(u, v, x)$, отличных от нуля, оба предела (3.12) равны нулю. Осталось показать, что и при стремлении $f(u, v, x)$ к бесконечности пределы (3.12) также обращаются в ноль. Рассмотрим правую полуокрестность точки M_i . Пусть в ней функция $f(u, v, x)$ неограниченно возрастает, т. е. $f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x) \rightarrow \infty$ при $\rho \rightarrow 0$. Так как знаменатель выражения для K_+ в (3.12) неограниченно возрастает, то K_+ стремится к нулю. Аналогично проводится доказательство и для левой полуокрестности. Таким образом, в случае разрыва второго рода также имеет место равенство (3.17). \square

Определение 3.3. Точку M_i , в окрестности которой отклонение dE_i направления отсчета аргумента κ от наилучшего равно нулю, будем называть точкой локальной эквивалентности.

Согласно данному определению, если суммарное отклонение направления отсчета аргумента κ от наилучшего при движении вдоль интегральной кривой от начальной точки до M_i имеет значение E_i , то после прохождения точки локальной эквивалентности M_i оно изменится на бесконечно малую величину.

Отметим, что условия теоремы 3.1 являются достаточными, т. е. множество точек локальной эквивалентности не ис-

черпывается теми, для которых выполнены условия теоремы 3.1.

При дальнейшем исследовании будем применять разложения функции $f(u, v, x)$ в ряд Тейлора [37, с. 298-299] в правой и левой полукрестностях точки $M_i(u_i, v_i, x_i)$ вида

$$\begin{aligned}
 f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x) &= f^+(u_i, v_i, x_i) + \\
 &+ \sum_{|\alpha|=1}^{N-1} \frac{\partial^{|\alpha|} f^+}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M_i} \Delta u^{\alpha_1} \Delta v^{\alpha_2} \Delta x^{\alpha_3} + \gamma_1^{(N)}(\rho), \\
 f(u_i - \Delta u, v_i - \Delta v, x_i - \Delta x) &= f^-(u_i, v_i, x_i) + \\
 &+ \sum_{|\alpha|=1}^{N-1} \frac{(-1)^{|\alpha|} \cdot \partial^{|\alpha|} f^-}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M_i} \Delta u^{\alpha_1} \Delta v^{\alpha_2} \Delta x^{\alpha_3} + \gamma_2^{(N)}(\rho),
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

где $f^+(u, v, x)$ и $f^-(u, v, x)$ – значения односторонних пределов для функции $f(u, v, x)$ в правой и левой полукрестностях

точки M_i , $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\frac{\partial^{|\alpha|} f^+}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}}$ и $\frac{\partial^{|\alpha|} f^-}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}}$ – значения односторонних пределов для частных производных функции $f(u, v, x)$ порядка $|\alpha|$ в правой и левой полукрестностях точки M_i , $\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta x^2}$. Выражения для остаточных членов $\gamma_1^{(N)}(\rho)$ и $\gamma_2^{(N)}(\rho)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 \gamma_1^{(N)}(\rho) &= \sum_{|\alpha|=N}^{\infty} \frac{\partial^{|\alpha|} f^+}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M_i} \Delta u^{\alpha_1} \Delta v^{\alpha_2} \Delta x^{\alpha_3}, \\
 \gamma_2^{(N)}(\rho) &= \sum_{|\alpha|=N}^{\infty} \frac{(-1)^{|\alpha|} \cdot \partial^{|\alpha|} f^-}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M_i} \Delta u^{\alpha_1} \Delta v^{\alpha_2} \Delta x^{\alpha_3}.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Если все частные производные функции $f(u, v, x)$ существуют и ограничены, то она разложима в ряд Тейлора [37, с. 298-299]. Если же какая-либо из частных производных неограниченно возрастает, будем использовать следующие предельные соотношения:

$$\begin{aligned}
f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[f^+ \Big|_{M'_i} + \right. \\
&+ \sum_{|\alpha|=1}^{N-1} \frac{\partial^{|\alpha|} f^+}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \Delta u^{\alpha_1} \Delta v^{\alpha_2} \Delta x^{\alpha_3} + \\
&\left. + \gamma_1^{(N)}(\rho, \xi) \right], \tag{3.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(u_i - \Delta u, v_i - \Delta v, x_i - \Delta x) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[f^- \Big|_{M'_i} + \right. \\
&+ \sum_{|\alpha|=1}^{N-1} \frac{(-1)^{|\alpha|} \cdot \partial^{|\alpha|} f^-}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \Delta u^{\alpha_1} \Delta v^{\alpha_2} \Delta x^{\alpha_3} + \\
&\left. + \gamma_2^{(N)}(\rho, \xi) \right],
\end{aligned}$$

где $M'_i(u_i + \xi_1, v_i + \xi_2, x_i + \xi_3)$ – точка, в которой рассматриваемые частные производные ограничены, получаемая смещением от M_i на вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ с длиной $\xi = \|\bar{\xi}\|_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, функции $\gamma_1^{(N+1)}(\rho, \xi)$ и $\gamma_2^{(N+1)}(\rho, \xi)$ имеют ту же структуру, что и (3.19), но с заменой точки M_i на M'_i .

Легко заметить, что в случае ограниченных частных производных выражения (3.20) переходят в (3.18). В свою очередь, если пределы в (3.20) существуют, то полученные формулы будем использовать как обобщение (3.18) на случай разрывных частных производных. Используя соотношения (3.20), обобщим лемму 3.1. Здесь и далее будем полагать, что существуют как используемые частные производные нужного порядка, так и пределы от них в окрестности рассматриваемой точки.

Лемма 3.2. Если в окрестности точки $M_i(u_i, v_i, x_i)$ существуют конечные или бесконечные односторонние пределы

$$\begin{aligned}
K_+ &= \lim_{\rho' \rightarrow 0} \Delta x \cdot \left| f^+ \Big|_{M'_i} + \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M'_i} \Delta u + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M'_i} \Delta v + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M'_i} \Delta x + \gamma_1^{(2)}(\rho, \xi) \right|^{-1}, \\
K_- &= \lim_{\rho' \rightarrow 0} \Delta x \cdot \left| f^- \Big|_{M'_i} - \frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M'_i} \Delta u - \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M'_i} \Delta v - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M'_i} \Delta x + \gamma_2^{(2)}(\rho, \xi) \right|^{-1},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

то отклонения направления отсчета аргумента κ от наилучшего в правой и левой полукрестностях точки M_i при $\rho \rightarrow 0$ равны соответствующим значениям K_+ и K_- , т. е.

$$dE_{i+} = K_+, \quad dE_{i-} = K_-, \tag{3.22}$$

в частности, если $K_+ = K_- = K$, то

$$dE_i = K. \tag{3.23}$$

Здесь $\rho' = \sqrt{(\Delta u + \xi_1)^2 + (\Delta v + \xi_2)^2 + (\Delta x + \xi_3)^2}$, $M'_i(u_i + \xi_1, v_i + \xi_2, x_i + \xi_3)$ – точка, в которой рассматриваемые частные производные ограничены, получаемая смещением от M_i на вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ с длиной $\xi = \|\bar{\xi}\|_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, $\gamma_1^{(2)}(\rho, \xi)$ и $\gamma_2^{(2)}(\rho, \xi)$ – слагаемые, характеризующие поведение частных производных порядка выше первого в правой и левой полукрестностях точки M'_i соответственно.

Доказательство. Рассмотрим правую полукрестность точки M_i . Для нее, используя результат леммы 1, запишем отклонение направления отсчета аргумента κ от наилучшего в виде

$$dE_{i+} = K_+ = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{|f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)|}.$$

Не налагая ограничений на частные производные функции $f(u, v, x)$, используя в окрестности точки M'_i разложение функции $f(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v, x_i + \Delta x)$ по первой формуле (3.20), получим

$$K_+ = \lim_{\rho \rightarrow 0} \Delta x \cdot \left| f^+ \Big|_{M'_i} + \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M'_i} \Delta u + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M'_i} \Delta v + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M'_i} \Delta x + \gamma_1^{(2)}(\rho, \xi) \right|^{-1}.$$

Для нахождения отклонения направления отсчета аргумента κ от наилучшего в правой полукрестности точки M_i следует устремить к нулю длину вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$, т. е.

$$K_+ = \lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{\xi \rightarrow 0} \Delta x \cdot \left| f^+ \Big|_{M'_i} + \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M'_i} \Delta u + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M'_i} \Delta v + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M'_i} \Delta x + \gamma_1^{(2)}(\rho, \xi) \right|^{-1}. \quad (3.24)$$

Если в точке M_i функция $f(u, v, x)$ и ее односторонние частные производные ограничены, то можно непосредственно записать

$$K_+ = \lim_{\rho \rightarrow 0} \Delta x \cdot \left| f^+ \Big|_{M_i} + \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \Delta u + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \Delta v + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \Delta x + \gamma_1^{(2)}(\rho) \right|^{-1}. \quad (3.25)$$

По условию доказываемой леммы существует первый предел (3.21), а значит, будет существовать и предел (3.25), т. е. справедливо первое предельное равенство (3.22).

В случае, когда либо функция $f(u, v, x)$, либо некоторые ее частные производные неограниченно возрастают в окрестности точки M_i , вычисление предела в (3.24) сопряжено с известными трудностями. Так, в зависимости от порядка взятия пределов результат может не существовать или принимать различные значения.

Эту неоднозначность при вычислении предела K_+ преодолеем, введя вектор $\bar{\rho}' = (\Delta u + \xi_1, \Delta v + \xi_2, \Delta x + \xi_3)^T$, длина которого $\|\bar{\rho}'\|_2 = \rho' = \sqrt{(\Delta u + \xi_1)^2 + (\Delta v + \xi_2)^2 + (\Delta x + \xi_3)^2}$. Легко заметить, что при стремлении ρ' к нулю одновременно стремятся к нулю ρ и ξ . Таким образом, устремляя $\rho' \rightarrow 0$, из (3.24), мы получим

$$K_+ = \lim_{\rho' \rightarrow 0} \Delta x \cdot \left| f^+ \Big|_{M_i} + \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i'} \Delta u + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i'} \Delta v + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i'} \Delta x + \gamma_1^{(2)}(\rho, \xi) \right|^{-1}. \quad (3.26)$$

По условию леммы, предел в (3.26) существует и равен отклонению направления отсчета аргумента κ от наилучшего в правой полуокрестности точки M_i . Таким образом, справедливо первое соотношение (3.22). Аналогичные рассуждения для левой полуокрестности точки M_i приводят к выводу о справедливости второго соотношения (3.22). При совпадении K_+ и K_- справедливо (3.23). \square

Используя лемму 3.2, докажем следующее утверждение.

Теорема 3.2. Пусть в некоторой окрестности точки $M_i(u_i, v_i, x_i)$ функция $f(u, v, x)$ обращается в ноль, ее односторонние частные производные высших порядков существуют и ограничены, а первые односторонние частные производные удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \right)^2 \neq 0, \\ & \left(\frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M_i} \right)^2 \neq 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

и существуют конечные или бесконечные пределы

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \right|, \\ & \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| - \frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M_i} \right|. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Тогда отклонения направления отсчета аргумента κ от наилучшего в правой и левой полукрестностях точки M_i при $\rho \rightarrow 0$ соответственно равны

$$\begin{aligned} dE_{i+} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \right|^{-1}, \\ dE_{i-} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M_i} \right|^{-1}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

в частности, если пределы справа и слева совпадают, то

$$dE_i = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \right|^{-1}. \quad (3.30)$$

Доказательство. Рассмотрим правую полукрестность точки M_i . Для нее, согласно лемме 3.2, отклонение направления отсчета аргумента κ от наилучшего, учитывая равенство нулю самой функции $f(u, v, x)$, справедливость первого

неравенства (3.27) и ограниченность ее частных производных, можно записать в форме

$$dE_{i+} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \Delta u + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \Delta v + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \Delta x \right|}. \quad (3.31)$$

Преобразуем выражение (3.31) к виду

$$dE_{i+} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \right|^{-1}. \quad (3.32)$$

Можно видеть, что предел в (3.32) совпадает с обратным первым пределом (3.28), который существует по условию теоремы. Следовательно, справедливо первое равенство (3.29).

Аналогичные рассуждения для левой полуокрестности точки M_i приводят ко второму соотношению (3.29), а при равенстве односторонних пределов – и к выражению (3.30). \square

Замечание 3.2. Выше внимание уделялось исключительно свойствам рассматриваемой функции $f(u, v, x)$, которые однозначно определяются разложениями (3.18) или (3.20) в окрестности каждой точки интегральной кривой. Тем не менее также значительную роль играют свойства рассматриваемой задачи (3.6). Так, в контексте решения задачи Коши необходимо учитывать то, что рассматриваемые переменные u, v, x зависимы друг от друга и удовлетворяют уравнениям задачи (3.6). Поэтому в окрестности точки M_i отношения приращений $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ стремятся к значениям производных $\frac{du}{dx}$ и $\frac{dv}{dx}$ при $\rho \rightarrow 0$.

Докажем два следствия из теоремы 3.2.

Следствие 3.1. Если в условиях теоремы 3.2 при стремлении точки $M(u, v, x)$ к $M_i(u_i, v_i, x_i)$ правые части задачи (3.6) ограничены в окрестности точки M_i , т. е.

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= F_1(u_i, v_i, x_i) \rightarrow c_{1i}, \\ \frac{dv}{dx} &= F_2(u_i, v_i, x_i) \rightarrow c_{2i},\end{aligned}\tag{3.33}$$

где $|c_{1i}| < \infty, |c_{2i}| < \infty$ – некоторые постоянные, то отклонения направления отсчета аргумента к от наилучшего в правой и левой полукрестностях точки M_i при $\rho \rightarrow 0$ отличны от нуля:

$$\begin{aligned}dE_{i+} &= A_1 \neq 0, \\ dE_{i-} &= A_2 \neq 0.\end{aligned}\tag{3.34}$$

В частности, если $A_1 = A_2 = A$, то

$$dE_i = A \neq 0.\tag{3.35}$$

Доказательство. Равенства (3.34) и (3.35) данного следствия непосредственно вытекают из предельных соотношений (3.29) и (3.30) после взятия предела и применения равенств (3.33).

Но целесообразно уточнить, что в случае, когда

$$\begin{aligned}\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \right| &\neq 0, \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M_i} \right| &\neq 0,\end{aligned}$$

значения A_1 и A_2 являются, быть может, малыми, но конечными величинами. В свою очередь, при выполнении одного из предельных равенств

$$\begin{aligned}\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M_i} \right| &= 0, \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M_i} \right| &= 0\end{aligned}$$

величина A_1 или A_2 неограниченно возрастает, т. е. $A_1 \rightarrow \infty$ или $A_2 \rightarrow \infty$. \square

Дадим два определения.

Определение 3.4. Точку M_i , в окрестности которой выполнены предельные соотношения (3.34) при $0 < A_1 < \infty$, $0 < A_2 < \infty$ и $A_1 \neq \infty$, $A_2 \neq \infty$, будем называть точкой локальной неэквивалентности рода 1.

Определение 3.5. Точку M_i , в окрестности которой выполнено хотя бы одно из предельных соотношений (3.34) при $A_1 \rightarrow \infty$ или $A_2 \rightarrow \infty$, будем называть точкой локальной неэквивалентности рода 2.

Следствие 3.2. Если в условиях теоремы 2 при стремлении точки $M(u, v, x)$ к $M_i(u_i, v_i, x_i)$ правые части задачи (3.6) неограниченно возрастают в окрестности точки M_i , т. е.

$$\frac{du}{dx} \rightarrow \infty \text{ и } \frac{dv}{dx} \rightarrow \infty, \quad (3.36)$$

и выполнены предельные соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_M \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_M \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_M \right| &= \infty, \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_M \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_M \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_M \right| &= \infty, \end{aligned} \quad (3.37)$$

то отклонение направления отсчета аргумента к от наилучшего в окрестности точки M_i равно нулю, т. е.

$$dE_i = 0. \quad (3.38)$$

Доказательство. Утверждение данного следствия непосредственно вытекает из предельных соотношений (3.29) и (3.30), которые, с учетом пределов (3.37), оба равны нулю, а значит, справедливо (3.38). \square

Замечание 3.3. Выполнение условий (3.37) существенно для утверждения следствия 2. Ведь даже при выполнении условий (3.36) пределы (3.37) могут быть конечными, неограниченно возрастающими или не существовать вовсе.

Резюмируя сказанное, уточним, что на интегральной кривой выделяются три класса точек: точки локальной эквивалентности, точки локальной неэквивалентности первого и второго рода. При прохождении через точку локальной эквивалентности M_i суммарное отклонение E_i направления отсчета аргумента κ изменяется на бесконечно малую величину, в то время как при прохождении точек локальной неэквивалентности первого и второго рода значение E_i изменяется на конечную или бесконечно большую величину соответственно.

В случае разрывных частных производных рассматриваемой функции $f(u, v, x)$ ситуация усложняется многократно. Дадим обобщение теоремы 3.2. Доказательство опустим, так как оно фактически повторяет приведенное выше.

Теорема 3.3. Пусть в некоторой окрестности точки $M_i(u_i, v_i, x_i)$ функция $f(u, v, x)$ обращается в ноль, а односторонние пределы ее первых частных производных существуют и удовлетворяют неравенствам

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M'_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M'_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M'_i} \right)^2 \right] \neq 0,$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M'_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M'_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M'_i} \right)^2 \right] \neq 0,$$

где $M'_i(u_i + \xi_1, v_i + \xi_2, x_i + \xi_3)$ – точка, в которой рассматриваемые частные производные ограничены, получаемая смещением от M_i на вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ с длиной $\xi = \|\bar{\xi}\|_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$. Пусть также существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{\rho' \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M'_i} + \gamma_1^{(2)} \right|,$$

$$\lim_{\rho' \rightarrow 0} \left| -\frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M'_i} + \gamma_2^{(2)} \right|,$$
(3.39)

где $\rho' = \sqrt{(\Delta u + \xi_1)^2 + (\Delta v + \xi_2)^2 + (\Delta x + \xi_3)^2}$, $\gamma_1^{(2)}(\rho, \xi)$ и $\gamma_2^{(2)}(\rho, \xi)$ – слагаемые, характеризующие поведение частных производных порядка выше первого в правой и левой полуокрестностях точки M'_i соответственно. Тогда отклонения направления отсчета аргумента κ от наилучшего в правой и левой полуокрестностях точки M_i при $\rho \rightarrow 0$ равны соответственно

$$dE_{i+} = \lim_{\rho' \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M'_i} + \gamma_1^{(2)} \right|^{-1},$$

$$dE_{i-} = \lim_{\rho' \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^-}{\partial u} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^-}{\partial v} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^-}{\partial x} \Big|_{M'_i} - \gamma_2^{(2)} \right|^{-1},$$

в частности, если пределы справа и слева равны, то

$$dE_i = \lim_{\rho' \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f^+}{\partial u} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial v} \Big|_{M'_i} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\partial f^+}{\partial x} \Big|_{M'_i} + \gamma_1^{(2)} \right|^{-1}.$$

Из этой теоремы непосредственно вытекает следующее следствие.

Следствие 3.3. Если в условиях теоремы 3.3 оба предела (3.39) стремятся к бесконечности, то отклонение направления отсчета аргумента κ от наилучшего в окрестности точки M_i равно нулю, т. е.

$$dE_i = 0.$$

Все доказанные ранее утверждения носят достаточный характер.

Докажем необходимое и достаточное условие локальной эквивалентности точек интегральной кривой для рассматриваемого аргумента κ .

Теорема 3.4. Для того чтобы $M_i(u_i, v_i, x_i)$ была точкой локальной эквивалентности, т. е.

$$dE_i = 0, \tag{3.40}$$

необходимо и достаточно, чтобы

1) существовало целое неотрицательное число $k \geq 0$, такое, что все частные производные функции $f(u, v, x)$ меньше k -го порядка были равны нулю, односторонние частные производные порядка выше k -го существовали, а односторонние частные производные k -го порядка удовлетворяли условиям

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \sum_{|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k} \left[\frac{\partial^{|\alpha|} f^+}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \right]^2 \neq 0, \quad (3.41)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \sum_{|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k} \left[\frac{\partial^{|\alpha|} f^-}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \right]^2 \neq 0;$$

2) равнялись нулю односторонние пределы

$$\lim_{\rho' \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial^{|\alpha|} f^+}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \Delta u^{\alpha_1} \Delta v^{\alpha_2} \Delta x^{\alpha_3} + \gamma_1^{(k+1)} \right|}, \quad (3.42)$$

$$\lim_{\rho' \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{(-1)^k \cdot \partial^{|\alpha|} f^-}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \Delta u^{\alpha_1} \Delta v^{\alpha_2} \Delta x^{\alpha_3} + \gamma_2^{(k+1)} \right|},$$

где $\rho' = \sqrt{(\Delta u + \xi_1)^2 + (\Delta v + \xi_2)^2 + (\Delta x + \xi_3)^2}$, $M'_i(u_i + \xi_1, v_i + \xi_2, x_i + \xi_3)$ – точка, в которой рассматриваемые частные производные ограничены, получаемая смещением от M_i на вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ с длиной $\xi = \|\bar{\xi}\|_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, $\gamma_1^{(k+1)}(\rho, \xi)$ и $\gamma_2^{(k+1)}(\rho, \xi)$ – слагаемые, характеризующие поведение частных производных порядка выше k -го в правой и левой полукрестностях точки M'_i соответственно.

Доказательство. Достаточность. Рассмотрим правую полукрестность точки M_i . Воспользуемся утверждением леммы 3.2. Так как все производные порядка меньше k -го обращаются в нуль, то перепишем первое предельное соотношение

(3.21) в виде

$$K_+ = \lim_{\rho' \rightarrow 0} \left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial^{|\alpha|} f^+}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \right|_{M'_i} \Delta u^{\alpha_1} \Delta v^{\alpha_2} \Delta x^{\alpha_3} + \\ + \gamma_1^{(k+1)} \Big|^{-1} \cdot \Delta x. \quad (3.43)$$

По условию, предел, стоящий справа в выражении (3.43), равнялся нулю, поэтому согласно первому соотношению (3.22) леммы 3.2

$$dE_{i+} = 0. \quad (3.44)$$

Аналогичный анализ для левой полукрестности точки M_i дает нам

$$dE_{i-} = 0. \quad (3.45)$$

Вместе (3.44) и (3.45) приводят к (3.40).

Необходимость. Рассмотрим правую полукрестность точки M_i . Пусть выполнено равенство (3.40), но целого неотрицательного числа $k \geq 0$, обладающего указанными свойствами, не существует. Это означает, что, какой бы порядок производных мы ни взяли, первое предельное соотношение (3.41) не будет выполнено. Таким образом, в правой полукрестности точки M_i отклонение направления отсчета аргумента κ от наилучшего будет неограниченно возрастать или не будет существовать, что противоречит условию (3.40). Поэтому существует $k \geq 0$ с указанными свойствами и справедливо (3.41).

Учитывая доказанное, запишем отклонение (3.43) направления отсчета аргумента κ от наилучшего для правой полукрестности точки M_i .

Так как справедливо (3.40), то должно быть выполнено (3.44) и первый предел (3.42) равен нулю.

Равенство нулю второго предела (3.42) получим при рассмотрении левой полукрестности точки M_i . Теорема доказана. \square

Замечание 3.4. При $k = 0$, полагая нулевую производную равной самой функции $f(u, v, x)$, из теоремы 4 можно получить утверждение теоремы 3.1.

В заключение приведем формулировку еще одной обобщающей теоремы.

Теорема 3.5. *Для определения отклонения направления отсчета аргумента κ от наилучшего в окрестности точки $M_i(u_i, v_i, x_i)$, необходимо и достаточно, чтобы для функции $f(u, v, x)$ в этой окрестности выполнялись следующие условия:*

1. *Существовало бы целое неотрицательное число $k \geq 0$, такое, чтобы все частные производные меньше k -го порядка были равны нулю, частные односторонние производные k -го порядка существовали и для них выполнялись условия (3.41);*
2. *Существовали бы конечные или бесконечные пределы*

$$A_1 = \lim_{\rho' \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial^{|\alpha|} f^+}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \Delta u^{\alpha_1} \Delta v^{\alpha_2} \Delta x^{\alpha_3} + \gamma_1^{(k+1)} \right|},$$

$$A_2 = \lim_{\rho' \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{(-1)^k \partial^{|\alpha|} f^-}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_3}} \Big|_{M'_i} \Delta u^{\alpha_1} \Delta v^{\alpha_2} \Delta x^{\alpha_3} + \gamma_2^{(k+1)} \right|},$$

где $\rho' = \sqrt{(\Delta u + \xi_1)^2 + (\Delta v + \xi_2)^2 + (\Delta x + \xi_3)^2}$, $M'_i(u_i + \xi_1, v_i + \xi_2, x_i + \xi_3)$ – точка, в которой рассматриваемые частные производные ограничены, получаемая смещением от M_i на вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ с длиной $\xi = \|\bar{\xi}\|_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, $\gamma_1^{(k+1)}(\rho, \xi)$ и $\gamma_2^{(k+1)}(\rho, \xi)$ – слагаемые, характеризующие поведение частных производных порядка выше k -го в правой и левой полукрестностях точки M'_i соответственно.

В этом случае отклонения направления отсчета аргумента κ от наилучшего в левой и правой полукрестностях точки M_i равны соответственно

$$dE_{i+} = A_1,$$

$$dE_{i-} = A_2,$$

в частности, если $A_1 = A_2 = A$, то

$$dE_i = A.$$

Теоремы 3.4 и 3.5 обобщают все доказанные выше утверждения и служат основным инструментом исследования процесса возникновения отклонений между направлениями отсчета аргументов λ и κ , а также свойств параметризованных ими задач в окрестностях точек интегральной кривой задачи (3.6). Перейдем к рассмотрению всей области W .

3.1.2 Суммирование локальных отклонений между направлениями отсчета аргументов λ и κ в рассматриваемой области

Исследуем механизм возникновения суммарного отклонения между направлениями отсчета аргументов λ и κ в рассматриваемой области и произвольной ее подобласти. Для этого проведем разбиение интегральной кривой l в области W (рис. 3.2) по переменной x вида

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = x_*. \quad (3.46)$$

Точки разбиения обозначим через $M_i(u_i, v_i, x_i)$. Отметим, что $u_i = u(x_i)$ и $v_i = v(x_i)$, $i = 1, \dots, N$.

Направляющие векторы для отсчета аргументов λ и κ при переходе из точки M_{i-1} в M_i обозначим соответственно

$$\Delta \bar{\lambda}_i = (\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta x_i)^T \quad (3.47)$$

и

$$\Delta \bar{\kappa}_i = \left(\begin{array}{c} \Delta u_i \\ \Delta v_i \\ \Delta x_i \\ \hline f(u_{i-1} + \Delta u_i, v_{i-1} + \Delta v_i, x_{i-1} + \Delta x_i) \end{array} \right), \quad (3.48)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$ и $\Delta v_i = v_i - v_{i-1}$. Для каждой точки разбиения M_i введем вектор $\bar{\delta}_i$ – суммарное

отклонение между направлениями отсчета аргументов λ и κ при движении от начальной точки до M_i при разбиении (3.46). Длины векторов $\bar{\delta}_i$ по евклидовой норме обозначим $\delta_i = \|\bar{\delta}_i\|_2$.

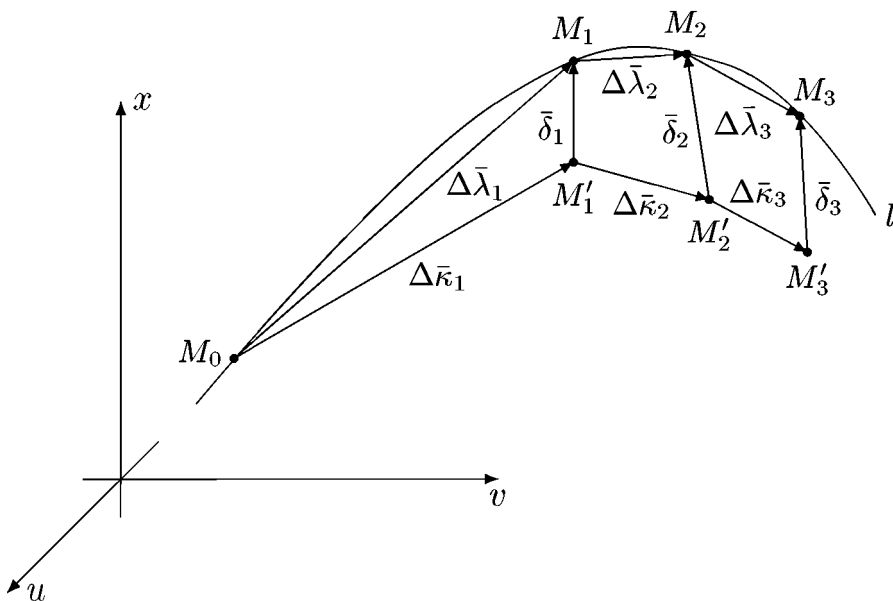


Рис. 3.2. Движение вдоль интегральной кривой по аргументам λ и κ

Начнем движение по интегральной кривой l из начальной точки $M_0(u_0, v_0, x_0)$ (рис. 3.2), предполагая, что векторы $\Delta\bar{\lambda}_1$ и $\Delta\bar{\kappa}_1$ исходят из этой точки, т. е. $\delta_0 = 0$. Тогда вектор суммарного отклонения $\bar{\delta}_1$ между направлениями отсчета аргументов λ и κ в точке M_1 запишется в виде

$$\bar{\delta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta x_1 \left(1 - \frac{1}{f(u_0 + \Delta u_1, v_0 + \Delta v_1, x_0 + \Delta x_1)} \right) \end{pmatrix},$$

длина его равна

$$\delta_1 = \left| 1 - \frac{1}{f(u_0 + \Delta u_1, v_0 + \Delta v_1, x_0 + \Delta x_1)} \right| \Delta x_1.$$

Заметим, что условие совпадения векторов $\Delta \bar{\lambda}_1$ и $\Delta \bar{\kappa}_1$ в начальной точке обусловлено совпадением этой точки с начальными условиями для обеих параметризованных задач. В дальнейшем, движение по интегральной кривой l определяется лишь свойствами векторов (3.47) и (3.48), а также видом самой кривой l .

Вычислим теперь отклонение $\bar{\delta}_2$ между векторами (3.47) и (3.48) в точке M_2 . Из рис. 3.2 видно, что

$$\bar{\delta}_1 + \Delta \bar{\lambda}_2 = \bar{\delta}_2 + \Delta \bar{\kappa}_2,$$

поэтому справедливы выражения

$$\bar{\delta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^2 \Delta x_i \left(1 - \frac{1}{f(u_{i-1} + \Delta u_i, v_{i-1} + \Delta v_i, x_{i-1} + \Delta x_i)} \right) \end{pmatrix}$$

и

$$\delta_2 = \left| \sum_{i=1}^2 \Delta x_i \left(1 - \frac{1}{f(u_{i-1} + \Delta u_i, v_{i-1} + \Delta v_i, x_{i-1} + \Delta x_i)} \right) \right|.$$

Продолжая движение по интегральной кривой, для конечной точки M_N найдем

$$\bar{\delta}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^N \Delta x_i \left(1 - \frac{1}{f(u_{i-1} + \Delta u_i, v_{i-1} + \Delta v_i, x_{i-1} + \Delta x_i)} \right) \end{pmatrix}$$

и

$$\delta_N = \left| \sum_{i=1}^N \Delta x_i \left(1 - \frac{1}{f(u_{i-1} + \Delta u_i, v_{i-1} + \Delta v_i, x_{i-1} + \Delta x_i)} \right) \right|.$$

Введем диаметр разбиения d в форме

$$d = \max_{1 \leq i \leq N} \{\Delta x_i\}.$$

Используя диаметр разбиения, запишем следующий предел:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{1}{f(u(x_i), v(x_i), x_i)} \right) \Delta x_i \right|. \quad (3.49)$$

Не останавливаясь на доказательстве существования предела (3.49), скажем, что значение этого предела, если он существует, является суммарным отклонением E_* между направлениями отсчета аргументов λ и κ при движении вдоль интегральной кривой от начальной до конечной точки M_N , т. е.

$$E_* = \lim_{d \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{1}{f(u(x_i), v(x_i), x_i)} \right) \Delta x_i \right|. \quad (3.50)$$

Предел же, стоящий в правой части (3.50), если он существует, равен определенному интегралу, с использованием которого можно выразить суммарное отклонение E_* в форме

$$E_* = \left| \int_{x_0}^{x^*} \left(1 - \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} \right) d\xi \right|. \quad (3.51)$$

Замечание 3.5. Если рассматриваемая область W состоит только из точек локальной эквивалентности, то суммарное отклонение между направлениями отсчета аргументов λ и

κ изменяется непрерывно при движении вдоль интегральной кривой задачи (3.6). В этом случае существуют как предел (3.49), так и интеграл (3.51), геометрически равный расстоянию между направлениями отсчета аргументов λ и κ в конечной точке M_* . Это же справедливо и при наличии в области W , помимо точек локальной эквивалентности, конечного и счетного числа точек локальной неэквивалентности первого рода, только изменение суммарного отклонения приобретает скачкообразный характер. В отличие от двух приведенных случаев, при наличии в области W точек локальной неэквивалентности второго рода, в окрестностях которых суммарное отклонение принимает неограниченные значения, предел (3.49) может быть равным бесконечности или не существовать вообще, что свидетельствует о потере смысла в использовании интеграла (3.51).

По аналогии можно найти суммарное отклонение не только для всего рассматриваемого отрезка интегральной кривой, но и для его интервалов. Так, суммарное отклонение E_i при движении вдоль интегральной кривой от начальной точки до $M_i(u_i, v_i, x_i)$ равно

$$E_i = \left| \int_{x_0}^{x_i} \left(1 - \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} \right) d\xi \right|, \quad x_0 < x_i \leq x_*. \quad (3.52)$$

Также можно ввести и суммарное отклонение E_{ij} при движении вдоль интегральной кривой от точки $M_i(u_i, v_i, x_i)$ до $M_j(u_j, v_j, x_j)$, которое запишется в виде

$$E_{ij} = \left| \int_{x_i}^{x_j} \left(1 - \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} \right) d\xi \right|, \quad x_0 < x_i < x_j \leq x_*. \quad (3.53)$$

3.1.3 Эквивалентность аргументов λ и κ

Установив механизмы возникновения и накопления отклонений между направлениями отсчета аргументов λ и κ в рас-

смаатриваемой области, перейдем к оценке обусловленности κ -преобразованных задач.

Локальная эквивалентность аргументов λ и κ

Как уже было сказано, аргумент λ (3.7) доставляет задаче (3.6) наилучшую обусловленность. Однако аналогичных утверждений для аргумента κ (3.8) нет, что является существенным недостатком при его использовании. Неизвестно, насколько хуже будет обусловлена κ -преобразованная задача по сравнению с λ -преобразованной. Используя понятия локального и суммарного отклонения между направлениями отсчета аргументов λ и κ , введем понятия эквивалентности для аргументов λ и κ .

Определение 3.6. Аргументы λ и κ будем называть локально эквивалентными в окрестности точки $M_i(u_i, v_i, x_i)$, если выполнены следующие условия:

1. Отклонение между направлениями отсчета аргументов λ и κ в окрестности точки M_i является бесконечно малой величиной, т. е. $dE_i = 0$.
2. Существует точка интегральной кривой $M_j(u_j, v_j, x_j)$, лежащая левее M_i , такая что суммарное отклонение между направлениями отсчета аргументов λ и κ при движении вдоль интегральной кривой от точки M_j до M_i является бесконечно малой величиной, т. е. $E_{ji} = 0$.

Отметим, что локальная эквивалентность аргументов λ и κ в окрестности точки M_i говорит о том, что длины и тангенсы углов наклона векторов $d\bar{\lambda}$ и $d\bar{\kappa}$, задающих направления отсчета аргументов λ и κ соответственно, в пределе совпадают, т. е. неограниченно близки. А учитывая, что аргумент λ отсчитывается по касательной к интегральной кривой, можно сделать вывод, что и аргумент κ отсчитывается в направлении, неограниченно близком к касательному. При использовании аргумента λ полученная система будет обусловлена наилучшим образом, а учитывая то, что аргумент продолжения определяется локально в окрестности каждой точки интегральной кривой, можно утверждать, что обусловленность

κ -преобразованной системы будет неограниченно близка к наилучшей в окрестности рассматриваемой точки, при условии, что эта окрестность будет неограниченно уменьшаться.

Эквивалентность аргументов λ и κ в рассматриваемой области

Дадим следующее определение.

Определение 3.7. Аргументы λ и κ будем называть эквивалентными в рассматриваемой области W , если они локально эквивалентны в каждой точке этой области, т. е. для каждого значения $x \in [x_0, x_*]$ выполнено

$$\int_{x_0}^x \left(1 - \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} \right) d\xi = 0.$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 3.6. Для того чтобы аргументы λ и κ были эквивалентны в области W , необходимо и достаточно, чтобы $f(u, v, x) = 1$ во всех точках этой области.

Доказательство. Рассмотрим неотрицательную функцию отклонения

$$E(x) = \left| \int_{x_0}^x \left(1 - \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} \right) d\xi \right|,$$

для которой при $x \in [x_0, x_*]$ запишем следующее двойное неравенство:

$$\left| \int_{x_0}^x d\xi - \int_{x_0}^x \frac{1}{f(u, v, \xi)} d\xi \right| \leq E(x) \leq \int_{x_0}^x \left| 1 - \frac{1}{f(u, v, \xi)} \right| d\xi. \quad (3.54)$$

Достаточность. Из правого неравенства (3.54) при значении $f(u, v, x) \equiv 1$ получим, что при любом значении $x \in [x_0, x_*]$ справедливо неравенство $E(x) \leq 0$. Так как функция $E(x)$ неотрицательна, для любого значения x имеет место

равенство $E(x) = 0$, т. е. аргументы λ и κ эквивалентны в области W по определению 3.7.

Необходимость. Если $E(x) = 0$ для любого $x \in [x_0, x_*]$, то из левого неравенства (3.54) получим

$$\left| \int_{x_0}^x d\xi - \int_{x_0}^x \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} d\xi \right| = 0$$

или

$$\int_{x_0}^x d\xi = \int_{x_0}^x \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} d\xi.$$

Последнее равенство справедливо, если $f(u, v, x) = \pm 1$. Однако при $f(u, v, x) = -1$ функция $E(x)$ не обращается в ноль. Таким образом, остается только $f(u, v, x) = 1$. Необходимость, а значит, и теорема доказана. \square

Таким образом, из всех аргументов, задаваемых выражением вида (3.8), наилучшую обусловленность задачи (3.6) дает только наилучший аргумент (3.7). Это означает, что задачи, параметризованные аргументом (3.8), при отличной от единицы функции $f(u, v, x)$ будут иметь обусловленность меньше наилучшей. Это не является критичным, так как лишь в редких случаях рассматриваемая задача требует именно наилучшей обусловленности. Также можно предположить, что чем больше направление отсчета параметра κ отклоняется от наилучшего, тем хуже будет обусловлена κ -преобразованная задача. Используя эту идею, можно сравнивать обусловленности задач, параметризованных аргументами вида (3.8).

Мера сопоставления обусловленности параметризованных задач

Определим меру отклонения между направлениями отсчета аргументов λ и κ . В качестве одного из возможных подходов к этому можно принять следующий.

Введем меру отклонения Ξ как суммарное в рассматриваемой области W отклонение по модулю между векторами, вдоль которых отсчитываются аргументы (3.7) и (3.8), т. е.

$$\Xi = \int_{x_0}^{x_*} \left| 1 - \frac{1}{f(u(\xi), v(\xi), \xi)} \right| d\xi. \quad (3.55)$$

Запишем κ -преобразованный вид задачи (3.6)

$$\begin{cases} \frac{du}{d\kappa} = \frac{F_1(x, u, v) \cdot f(u, v, x)}{\sqrt{1 + f^2(u, v, x) \cdot [F_1^2(u, v, x) + F_2^2(u, v, x)]}}, \\ \frac{dv}{d\kappa} = \frac{F_2(x, u, v) \cdot f(u, v, x)}{\sqrt{1 + f^2(u, v, x) \cdot [F_1^2(u, v, x) + F_2^2(u, v, x)]}}, \\ \frac{dx}{d\kappa} = \frac{f(u, v, x)}{\sqrt{1 + f^2(u, v, x) \cdot [F_1^2(u, v, x) + F_2^2(u, v, x)]}}, \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0, x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.56)$$

Используя последнее уравнение системы (3.56), можно определить связь дифференциалов переменной x и аргумента κ в форме

$$dx = \frac{f(u, v, x)}{\sqrt{1 + f^2(u, v, x) \cdot [F_1^2(u, v, x) + F_2^2(u, v, x)]}} d\kappa,$$

а переходя от независимого переменного x к аргументу κ , можно переписать выражение (3.55) в виде

$$\Xi = \int_0^{\kappa_*} \frac{|f(u, v, x) - 1|}{\sqrt{1 + f^2(u, v, x) \cdot [F_1^2(u, v, x) + F_2^2(u, v, x)]}} d\zeta, \quad (3.57)$$

где u, v, x являются функциями аргумента κ .

Также целесообразно использовать среднее значение меры (3.57)

$$\bar{\Xi} = \frac{1}{\kappa_*} \int_0^{\kappa_*} \frac{|f(u, v, x) - 1|}{\sqrt{1 + f^2(u, v, x) \cdot [F_1^2(u, v, x) + F_2^2(u, v, x)]}} d\zeta. \quad (3.58)$$

Используя меру отклонения (3.58) (или (3.57)) можно сравнивать обусловленности κ -преобразованных задач. При $\bar{\Xi} = 0$ параметризованная задача (3.56) обусловлена наилучшим образом. При увеличении значения $\bar{\Xi}$ обусловленность становится хуже. Если имеются две задачи, параметризованные аргументами κ_1 и κ_2 вида (3.8), для которых имеются средние значения меры обусловленности $\bar{\Xi}_1$ и $\bar{\Xi}_2$, то при $\bar{\Xi}_1 > \bar{\Xi}_2$ задача, соответствующая аргументу κ_2 , обусловлена лучше, при $\bar{\Xi}_1 < \bar{\Xi}_2$ — хуже, а при $\bar{\Xi}_1 = \bar{\Xi}_2$ обусловленность обеих задач одинаковая.

3.2 МОДИФИЦИРОВАННЫЙ НАИЛУЧШИЙ АРГУМЕНТ В ЗАДАЧАХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Для задачи (1.3)-(1.4) выберем вектор $\bar{\alpha}'$ (3.3) в форме

$$\bar{\alpha}' = \left(\frac{1}{g_1^2(\varepsilon, \omega, t)} \cdot \frac{d\varepsilon}{d\kappa}, \quad \frac{1}{g_2^2(\varepsilon, \omega, t)} \cdot \frac{d\omega}{d\kappa}, \quad \frac{1}{g_3^2(\varepsilon, \omega, t)} \cdot \frac{dt}{d\kappa} \right)^T,$$

тогда параметр κ запишется в скалярном виде

$$(d\kappa)^2 = \left(\frac{d\varepsilon}{g_1(\varepsilon, \omega, t)} \right)^2 + \left(\frac{d\omega}{g_2(\varepsilon, \omega, t)} \right)^2 + \left(\frac{dt}{g_3(\varepsilon, \omega, t)} \right)^2. \quad (3.59)$$

Положим $g_1(\varepsilon, \omega, t) = g_2(\varepsilon, \omega, t) \equiv 1$ и $g_3(\varepsilon, \omega, t) = \Psi(\omega)$, тогда выражение (3.59) переписывается в виде

$$(d\kappa)^2 = (d\varepsilon)^2 + (d\omega)^2 + \left(\frac{dt}{\Psi(\omega)} \right)^2. \quad (3.60)$$

Используя соотношение (3.60) для аргумента продолжения решения, можно записать κ -преобразованную задачу (1.3)-(1.4) как систему

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{d\kappa} = \frac{f_1(\sigma)}{\sqrt{1 + f_1^2(\sigma) + f_2^2(\sigma)}}, \\ \frac{d\omega}{d\kappa} = \frac{f_2(\sigma)}{\sqrt{1 + f_1^2(\sigma) + f_2^2(\sigma)}}, \\ \frac{dt}{d\kappa} = \frac{\Psi(\omega)}{\sqrt{1 + f_1^2(\sigma) + f_2^2(\sigma)}}, \end{cases} \quad (3.61)$$

с начальными условиями (2.14).

Таким образом, знаменатель уравнений системы (3.61) не зависит от переменной ω и его значение не меньше единицы. Легко заметить, что при условиях, накладываемых на функцию $\Psi(\omega)$, норма правой части системы (3.61) будет ограничена, а при $\Psi(\omega) \leq 1$ не будет превосходить единицы.

В данной главе монографии исследуем применение модифицированного наилучшего аргумента κ , задаваемого выражением (3.60), к решению задач, рассмотренных в главе 2.

3.2.1 Аргумент κ для задачи растяжения образцов из стали 45

Запишем κ -преобразованную задачу растяжения образцов из стали 45, описываемую системой ОДУ (1.34) с начальными условиями (1.4), в виде системы

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{d\kappa} = \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{\sqrt{Q_1}} = \text{const}, \\ \frac{d\omega}{d\kappa} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{Q_1}} = \text{const}, \\ \frac{dt}{d\kappa} = \frac{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}{\sqrt{Q_1}} \end{cases} \quad (3.62)$$

с начальными условиями (2.14).

Для системы (1.34) используется аргумент κ вида (3.60), дифференциал которого имеет вид

$$(d\kappa)^2 = (d\varepsilon)^2 + (d\omega)^2 + \left(\frac{dt}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m} \right)^2. \quad (3.63)$$

Выражение Q_1 , входящее в знаменатели правых частей системы (3.62), запишется в виде

$$Q_1 = 1 + B_\varepsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k} = \text{const.} \quad (3.64)$$

В отличие от λ -преобразованной задачи (2.15), (2.14), для задачи (3.62), (2.14) можно получить аналитические решения для деформации ползучести и параметра поврежденности в зависимости от κ :

$$\varepsilon = \frac{B_\varepsilon \sigma_0^n}{\sqrt{Q_1}} \kappa, \quad \omega = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{Q_1}} \kappa.$$

Время t найдем в следующем виде:

$$\begin{aligned} t &= \int_0^\kappa \frac{\omega^\alpha(\xi) (1 - \omega^{\alpha+1}(\xi))^m}{\sqrt{Q_1}} d\xi = \\ &= -\frac{1}{(\alpha+1)B_\omega \sigma_0^k} \int_1^{1 - B_\omega \sigma_0^k \kappa / \sqrt{Q_1}} \theta^m d\theta = \\ &= \frac{1}{(\alpha+1)(m+1)B_\omega \sigma_0^k} \left(1 - \left(1 - \frac{B_\omega \sigma_0^k \kappa}{\sqrt{Q_1}} \right)^{m+1} \right). \end{aligned}$$

Здесь аргумент $\kappa \in [0, \kappa_*]$, а выражение для κ_* имеет вид

$$\kappa_* = \frac{\sqrt{Q_1}}{B_\omega \sigma_0^k}. \quad (3.65)$$

Для задачи (3.62), (2.14) докажем следующее

Утверждение 3.1. *Для задачи (3.62), (2.14) все точки области $V = \{(\varepsilon, \omega, t) \mid 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*, 0 \leq \omega \leq 1, 0 \leq t \leq t^*\}$ являются точками локальной эквивалентности.*

Доказательство. Для доказательства локальной эквивалентности точек рассматриваемой области V , используем результаты теорем, полученных в параграфе 3.1.1. Для аргумента (3.63) функция $\Psi(\omega) = \omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m$ явно зависит только от переменной ω и не обращается в ноль ни в одной точке рассматриваемого временного интервала, кроме начального момента времени $\omega = 0$ и момента разрушения $\omega = 1$. Таким образом, согласно теореме 3.1, все точки области V , для которых $\omega \in (0, 1)$, являются точками локальной эквивалентности. Покажем, что и в граничных точках имеет место локальная эквивалентность. При доказательстве будем полагать, что значения параметров задачи $B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m$ удовлетворяют неравенствам

$$0 < B_\varepsilon, B_\omega < \infty; 0 \leq n, k, \alpha, m < \infty.$$

Рассмотрим левую границу области V , которой соответствует точка $\omega = 0$. При $\alpha = 0$ точка $\omega = 0$ является точкой локальной эквивалентности. Для доказательства локальной эквивалентности точки $\omega = 0$ при $\alpha > 0$ будем применять теорему 3.3 и ее следствие.

Для точки $\omega = 0$ достаточно доказать локальную эквивалентность только в ее правой полукрестности, т. е. равенство нулю предела

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} \lim_{\Delta\omega, \Delta t \rightarrow +0} \frac{\Delta t}{|\Psi(\omega + \Delta\omega)|}.$$

Так как предел $\lim_{\omega \rightarrow +0} \lim_{\Delta\omega \rightarrow +0} \Psi(\omega + \Delta\omega) = 0$, разложим функцию $\Psi(\omega)$ в ряд Тейлора в правой полукрестности точки $\omega = 0$:

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} \lim_{\Delta\omega, \Delta t \rightarrow +0} \frac{\Delta t}{\left| \frac{d\Psi}{d\omega} \cdot \Delta\omega + \tilde{\gamma}_1^{(2)}(\omega, \Delta\omega) \right|}.$$

Преобразовав последнее выражение, окончательно получим

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} \lim_{\Delta\omega, \Delta t \rightarrow +0} \left| \frac{d\Psi}{d\omega} \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + \gamma_1^{(2)}(\omega, \Delta\omega, \Delta t) \right|^{-1}.$$

Здесь $\gamma_1^{(N)}(\omega, \Delta\omega, \Delta t)$ – слагаемые, отражающие вклад компонент степени выше $N - 1$ по $\Delta\omega$ в сумму ряда Тейлора функции $\Psi(\omega)$ в правой полуокрестности рассматриваемой точки.

Учитывая слагаемые второй степени по $\Delta\omega$, распишем последний предел в виде

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} \lim_{\Delta\omega, \Delta t \rightarrow +0} \left| \frac{d\Psi}{d\omega} \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + \frac{d^2\Psi}{d\omega^2} \cdot \frac{\Delta\omega^2}{\Delta t^2} \cdot \frac{\Delta t}{2} + \gamma_1^{(3)} \right|^{-1}.$$

В правой полуокрестности точки $\omega = 0$ для последнего предела справедливы предельные соотношения, которые следуют из вида функции $\Psi(\omega)$ и уравнений исходной системы (1.34):

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &\rightarrow \omega^\alpha, & \frac{d\omega}{dt} &\rightarrow \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\omega^\alpha}, & \frac{d\Psi}{d\omega} \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} &\rightarrow \frac{d\Psi}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \frac{\alpha B_\omega \sigma_0^k}{\omega}, \\ \frac{d^2\Psi}{d\omega^2} \cdot \frac{\Delta\omega^2}{\Delta t^2} &\rightarrow \frac{d^2\Psi}{d\omega^2} \cdot \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 &\rightarrow \frac{\alpha(\alpha - 1) B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}{\omega^{2+\alpha}}. \end{aligned}$$

Продолжая эту процедуру, придем к следующему пределу:

$$\begin{aligned} &\lim_{\omega \rightarrow +0} \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \left| \frac{c_1}{\omega} + \frac{c_2 \cdot \Delta t}{\omega^{2+\alpha}} + \dots + \frac{c_N \cdot \Delta t^{N-1}}{\omega^{N+(N-1)\alpha}} + \dots \right|^{-1} = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +0} \lim_{\Delta\omega \rightarrow +0} \left| \frac{c'_1}{\omega} + \frac{c'_2 \Delta\omega}{\omega^2} + \dots + \frac{c'_N \Delta\omega^{N-1}}{\omega^N} + \dots \right|^{-1}, \end{aligned}$$

где $\{c_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{c'_i\}_{i=1}^\infty$ – последовательности не равных одновременно нулю чисел, зависящих от параметров задачи $B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m$.

В результате, вне зависимости от порядка взятия пределов, будем иметь

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} \lim_{\Delta\omega \rightarrow +0} \left| \frac{c'_1}{\omega} + \frac{c'_2}{\omega^2} \Delta\omega + \dots + \frac{c'_n}{\omega^n} \Delta\omega^{n-1} + \dots \right|^{-1} = 0.$$

Таким образом, левая граница области V , которой соответствует точка $\omega = 0$, является точкой локальной эквивалентности.

Теперь рассмотрим правую границу области V , которой соответствует точка $\omega = 1$. При $m = 0$ точка $\omega = 1$ будет точкой локальной эквивалентности. А при $m > 0$ для левой полукрестности точки $\omega = 1$ проделаем ту же процедуру, что и для правой полукрестности точки $\omega = 0$. Для этого рассмотрим предел вида

$$\lim_{\omega \rightarrow 1-0} \lim_{\Delta\omega, \Delta t \rightarrow +0} \left| -\frac{d\Psi}{d\omega} \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + \gamma_2^{(2)}(\omega, \Delta\omega, \Delta t) \right|^{-1}.$$

Здесь $\gamma_2^{(N)}(\omega, \Delta\omega, \Delta t)$ – слагаемые, отражающие вклад компонент степени выше $N - 1$ по $\Delta\omega$ в сумму ряда Тейлора функции $\Psi(\omega)$ в левой полукрестности рассматриваемой точки.

Учитывая слагаемые второй степени по $\Delta\omega$, распишем последний предел в виде

$$\lim_{\omega \rightarrow 1-0} \lim_{\Delta\omega, \Delta t \rightarrow +0} \left| -\frac{d\Psi}{d\omega} \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + \frac{d^2\Psi}{d\omega^2} \cdot \frac{\Delta\omega^2}{\Delta t^2} \Delta t + \gamma_2^{(3)} \right|^{-1}.$$

В левой полукрестности точки $\omega = 1$ для последнего предела справедливы предельные соотношения, которые следуют из вида функции $\Psi(\omega)$ и уравнений исходной системы (1.34):

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &\rightarrow (1 - \omega^{\alpha+1})^m, & \frac{d\omega}{dt} &\rightarrow \frac{B_\omega \sigma_0^k}{(1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \\ -\frac{d\Psi}{d\omega} \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} &\rightarrow -\frac{d\Psi}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt} &\rightarrow \frac{m(\alpha+1)B_\omega \sigma_0^k}{1 - \omega^{\alpha+1}}, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \Psi}{d\omega^2} \cdot \frac{\Delta\omega^2}{\Delta t^2} \rightarrow \frac{d^2 \Psi}{d\omega^2} \cdot \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 \rightarrow \frac{m(m-1)(\alpha+1)^2 B_\omega^2 \sigma_0^{2k}}{(1-\omega^{\alpha+1})^{2+m}}.$$

Продолжая эту процедуру, придем к следующему пределу:

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\omega \rightarrow 1-0 \\ \Delta t \rightarrow +0}} \left| \frac{d_1}{1-\omega^{\alpha+1}} + \dots + \frac{d_N \cdot \Delta t^{N-1}}{(1-\omega^{\alpha+1})^{N+(N-1)m}} + \dots \right|^{-1} = \\ & = \lim_{\substack{\omega \rightarrow 1-0 \\ \Delta\omega \rightarrow +0}} \left| \frac{d'_1}{1-\omega^{\alpha+1}} + \dots + \frac{d'_N \cdot \Delta\omega^{N-1}}{(1-\omega^{\alpha+1})^N} + \dots \right|^{-1}, \end{aligned}$$

где $\{d_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{d'_i\}_{i=1}^\infty$ – последовательности не равных одновременно нулю чисел, зависящих от параметров задачи $B_\varepsilon, B_\omega, n, k, \alpha, m$.

В результате, как и в предыдущем случае, вне зависимости от порядка взятия пределов, будем иметь

$$\lim_{\omega \rightarrow 1-0} \lim_{\Delta\omega \rightarrow +0} \left| \frac{d'_1}{1-\omega^{\alpha+1}} + \dots + \frac{d'_N \cdot \Delta\omega^{N-1}}{(1-\omega^{\alpha+1})^N} + \dots \right|^{-1} = 0.$$

Нами доказано, что для задачи (1.34), (1.4) все точки рассматриваемой области V являются точками локальной эквивалентности. \square

Из доказанного утверждения следует, что интегральное соотношение для оценки меры отклонения направления отсчета аргумента κ от наилучшего для задачи (3.62), (2.14) существует и может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \Xi &= \frac{1}{\sqrt{Q_1}} \int_0^{\kappa_*} \left[1 - \omega^\alpha(\xi) (1 - \omega^{\alpha+1}(\xi))^m \right] d\xi = \\ &= \frac{1}{B_\omega \sigma_0^k} - \frac{1}{(m+1)(\alpha+1) B_\omega \sigma_0^k} \end{aligned} \quad (3.66)$$

или в осредненной форме

$$\begin{aligned}\bar{\Xi} &= \frac{1}{\kappa_* \sqrt{Q_1}} \int_0^{\kappa_*} \left[1 - \omega^\alpha(\xi) (1 - \omega^{\alpha+1}(\xi))^m \right] d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{Q_1}} - \frac{1}{(m+1)(\alpha+1)\sqrt{Q_1}}.\end{aligned}\tag{3.67}$$

В таблице 3.1 даны значения мер отклонения (3.66) и (3.67) для задачи (3.62), (2.14). Видно, что $\bar{\Xi} \neq 0$ и обусловленность κ -преобразованной задачи меньше наилучшей, но правая часть системы (3.62) ограничена и не превосходит по норме единицы, что дает возможность применять для решения данной задачи явные методы. Кроме того, знаменатель правых частей (3.64) и правые части двух первых уравнений системы (3.62) постоянны, что дает возможность более эффективно реализовать методы ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я.

Таблица 3.1. Мера отклонения между направлениями отсчета аргументов λ и κ для задачи (3.62), (2.14)

σ_0 , МПа	$\Xi \cdot 10^{-5}$	$\kappa_* \cdot 10^{-5}$	$\bar{\Xi}$
35	1.5327	1.7847	0.8588
40	0.6043	0.70366	
45	0.2659	0.30962	

В таблице 3.2 даны результаты численного решения задачи (3.62), (2.14) для трех значений начального напряжения $\sigma_0 = 35, 40, 45$ МПа с переменным шагом интегрирования при значениях параметров $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = \theta_1/2$. Обозначения аналогичны используемым в таблице 1.3. Шаг интегрирования в κ -преобразованных задачах, отсчитываемый вдоль направления отсчета аргумента κ , будем обозначать h^κ , h_{\min}^κ и h_{\max}^κ – минимальное и максимальное значения шага по аргументу κ соответственно. Начальное значение шага h_s^κ по аргументу κ принималось равным единице.

Таблица 3.2. Расчетные данные для стали 45 при переменном шаге, κ -преобразование

σ_0 , МПа	ε_n^*	ω_n^*	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод ЭЯ, $h_{\min}^\kappa = 1$, $h_{\max}^\kappa = 8$					
35	0.5716	1	7.0005	22310	167.05
40	0.6647	1	2.7601	17592	131.81
45	0.7593	1	1.2145	15481	115.79
Метод ЭКЯ, $h_{\min}^\kappa = 1$, $h_{\max}^\kappa = 32$					
35	0.5716	1	7.0005	5581	58.18
40	0.6645	0.9998	2.7601	4400	46.68
45	0.7592	0.9999	1.2145	7741	81.45
Метод РК4Я, $h_{\min}^\kappa = 1$, $h_{\max}^\kappa = 128$					
35	0.5715	0.9998	7.0005	1400	22.92
40	0.6644	0.9996	2.7601	1104	17.54
45	0.7588	0.9994	1.2145	971	15.6

В таблице 3.3 представлена относительная погрешность параметра поврежденности при расчете задачи (3.62), (2.14) методами ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я с переменным шагом, обозначения аналогичны используемым в таблице 1.10. Для расчета относительной погрешности использовалось аналитическое решение для параметра поврежденности (1.36).

Таблица 3.3. Относительная погрешность $\delta\omega$ для численного решения задачи (3.62), (2.14)

σ_0 , МПа	$\delta\omega_{\max}$, %	$\delta\omega_{\text{av}}$, %	$\delta\omega_{\text{dev}}$, %
Метод ЭЯ, $\theta_1 = 10^{-4}$			
35	47.893	0.027	0.464
40	47.893	0.032	0.497
45	47.893	0.034	0.498
Метод ЭКЯ, $\theta_1 = 10^{-4}$			
35	4.337	0.005	0.071

Окончание табл. 3.3

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{av}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
40	4.337	0.006	0.081
45	4.337	0.004	0.059

Метод РК4Я, $\theta_1 = 10^{-4}$

35	0.408	$7 \cdot 10^{-4}$	0.013
40	0.408	$9 \cdot 10^{-4}$	0.014
45	0.408	0.001	0.016

Кривые ползучести, полученные при решении задачи (3.62), (2.14), имеют вид, аналогичный приведенному на рис. 1.7. Шаг интегрирования для данной задачи монотонно увеличивается от начального шага h_s^k до определенного значения и далее остается постоянным. Характер изменения относительной погрешности параметра поврежденности по аргументу t совпадает с характером изменения кривых, изображенных на рис. 1.9.

3.2.2 Аргумент κ для задачи растяжения образцов из сплава ЗВ

Для задачи растяжения образцов из титанового сплава ЗВ, описываемой системой ОДУ (1.42) с начальными условиями (1.43), параметр κ имеет вид

$$(d\kappa)^2 = (dA)^2 + (d\omega)^2 + \left(\frac{dt}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m} \right)^2. \quad (3.68)$$

Тогда преобразованная им задача запишется в форме системы

$$\begin{cases} \frac{dA}{d\kappa} = \frac{B_A \sigma_0^n}{\sqrt{Q_2}} = \text{const}, \\ \frac{d\omega}{d\kappa} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{Q_2}} = \text{const}, \\ \frac{dt}{d\kappa} = \frac{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}{\sqrt{Q_2}} \end{cases} \quad (3.69)$$

с начальными условиями (2.17). Выражение для определения деформации ползучести (1.44) останется в прежнем виде, но с заменой аргумента t на κ .

Выражение Q_2 , входящее в знаменатели правых частей системы (3.69), запишется в виде

$$Q_2 = 1 + B_A^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k} = \text{const.} \quad (3.70)$$

Аналитические решения для удельной энергии рассеяния, деформации ползучести и параметра поврежденности могут быть выписаны в параметризованном виде:

$$A = \frac{B_A \sigma_0^n}{\sqrt{Q_2}} \kappa, \quad \varepsilon = \frac{B_A \sigma_0^{n-1}}{\sqrt{Q_2}} \kappa, \quad \omega = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{Q_2}} \kappa.$$

Выражение для времени t запишем в форме

$$t = \frac{1}{(\alpha + 1)(m + 1)B_\omega \sigma_0^k} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{B_\omega \sigma_0^k \kappa}{\sqrt{Q_2}} \right)^{m+1} \right).$$

Здесь аргумент $\kappa \in [0, \kappa_*]$, а выражение для κ_* имеет вид (3.65), но с заменой Q_1 на Q_2 .

Задача (3.69), (2.17) по структуре аналогична задаче (3.62), (2.14), поэтому для нее справедливо утверждение, аналогичное доказанному в параграфе 3.2.1. При этом интегральное соотношение для оценки меры отклонения направления отсчета аргумента κ от наилучшего также существует и может быть записано в форме (3.66) или (3.67) с заменой Q_1 на Q_2 .

В таблице 3.4 даны значения мер отклонения вида (3.66) и (3.67) применительно к задаче (3.69), (2.17). Видно, что обусловленности κ -преобразованной задачи также меньше наилучшей, но правая часть системы (3.69) ограничена и не превосходит по норме единицы, что дает возможность применять для решения данной задачи явные методы. Кроме того, знаменатель (3.70) и правые части двух первых уравнений системы (3.69) постоянны, что позволяет более эффективно реализовать методы ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я.

Таблица 3.4. Мера отклонения между направлениями отсчета аргументов λ и κ для задачи (3.69), (2.17)

σ_0 , МПа	$\Xi \cdot 10^{-8}$	$\kappa_* \cdot 10^{-8}$	$\bar{\Xi}$
603	4.1722	4.3267	0.9643
618	1.1684	1.2117	
638	0.2244	0.2327	

В таблице 3.5 даны результаты численного решения задачи (3.69), (2.17) для трех значений начального напряжения $\sigma_0 = 603, 618, 638$ МПа с переменным шагом интегрирования при значениях параметров $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = \theta_1/2$. Обозначения аналогичны используемым в таблицах 1.3 и 3.2. Начальное значение шага h_s^κ по аргументу κ принималось равным единице. Расчет проводился до значения параметра поврежденности $\omega_n^* = 1$.

Таблица 3.5. Расчетные данные для сплава ЗВ при переменном шаге, κ -преобразование

σ_0 , МПа	ε_n^*	A_n^* , МДж/м ³	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод ЭЯ, $h_{\min}^\kappa = 1, h_{\max}^\kappa = 512$					
603	0.1098	66.2131	4292.34	845062	6343.3
618	0.1071	66.2132	1202.065	946632	7145.2
638	0.1038	66.2131	230.898	727331	5501
Метод ЭКЯ, $h_{\min}^\kappa = 1, h_{\max}^\kappa = 1024$					
603	0.1098	66.2131	4292.34	422536	3940.7
618	0.1071	66.213	1202.065	236664	2207.2
638	0.1038	66.213	230.898	363668	3407
Метод РК4Я, $h_{\min}^\kappa = 1, h_{\max}^\kappa = 8192$					
603	0.1098	66.212	4292.34	52827	827
618	0.1071	66.213	1202.065	59174	923.6
638	0.1038	66.2117	230.898	45465	709.8

Кривые ползучести, полученные при решении задачи (3.69), (2.17), имеют вид, аналогичный приведенному на рис. 1.10. Шаг интегрирования для данной задачи также монотонно увеличивается от начального шага h_s^k до определенного значения и далее остается постоянным. Характер изменения относительной погрешности параметра поврежденности по аргументу t совпадает с характером изменения кривых, изображенных на рис. 1.12.

В таблице 3.6 представлена относительная погрешность параметра поврежденности при расчете задачи (3.69), (2.17) методами ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я с переменным шагом, обозначения аналогичны используемым в таблице 1.10. Для расчета относительной погрешности использовалось аналитическое решение для параметра поврежденности (1.46).

Таблица 3.6. Относительная погрешность $\delta\omega$ для численного решения задачи (3.69), (2.17)

$\sigma_0, \text{МПа}$	$\delta\omega_{\max}, \%$	$\delta\omega_{\text{av}}, \%$	$\delta\omega_{\text{dev}}, \%$
Метод ЭЯ, $\theta_1 = 10^{-4}$, $\theta_2 = \theta_1/2$			
603	18.665	0.009	0.087
618	15.949	0.008	0.076
638	15.594	0.008	0.078
Метод ЭКЯ, $\theta_1 = 10^{-4}$, $\theta_2 = \theta_1/2$			
603	14.384	0.007	0.072
618	8.305	0.007	0.073
638	20.568	0.007	0.082
Метод РК4Я, $\theta_1 = 10^{-4}$, $\theta_2 = \theta_1/2$			
603	1.253	0.005	0.049
618	1.256	0.006	0.06
638	20.568	0.005	0.108

3.2.3 Аргумент κ для задачи растяжения образцов из сплава ОТ-4

Для задачи деформирования образцов из титанового сплава ОТ-4 в условиях ползучести, описываемой начальной задачей (1.25)-(1.26), аргумент κ выберем в аналогичной (3.60) форме

$$(d\kappa)^2 = (d\varepsilon)^2 + (dA)^2 + \left(\frac{dt}{(A_* - A)^m} \right)^2. \quad (3.71)$$

Используя выражение (3.71), запишем κ -преобразованную задачу (1.25)-(1.26) как систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{d\kappa} = \frac{Ke^{\beta\sigma_0}}{\sqrt{Q_3}}, \\ \frac{dA}{d\kappa} = \frac{\sigma_0 \cdot Ke^{\beta\sigma_0}}{\sqrt{Q_3}}, \\ \frac{dt}{d\kappa} = \frac{\sigma_0 \cdot (A_* - A)^m}{\sqrt{Q_3}} \end{cases} \quad (3.72)$$

с начальными условиями типа (2.21).

Выражение Q_3 , входящее в знаменатели правых частей системы (3.72), запишем в виде

$$Q_3 = \sigma_0^2 + (\sigma_0^2 + 1) \cdot K^2 \cdot e^{2\beta\sigma_0} = \text{const.} \quad (3.73)$$

Как и в параграфах 3.2.1 и 3.2.2, получим аналитические решения для деформации ползучести и удельной работы рассеяния в параметрическом виде:

$$\varepsilon = \frac{Ke^{\beta\sigma_0}}{\sqrt{Q_3}} \kappa, \quad A = \frac{\sigma_0 \cdot Ke^{\beta\sigma_0}}{\sqrt{Q_3}} \kappa.$$

Время t получим в форме

$$t = \frac{1}{(m+1)Ke^{\beta\sigma_0}} \left[A_*^{m+1} - \left(A_* - \frac{\sigma_0 \cdot Ke^{\beta\sigma_0} \kappa}{\sqrt{Q_3}} \right)^{m+1} \right].$$

Здесь аргумент $\kappa \in [0, \kappa_*]$, а выражение для κ_* имеет вид

$$\kappa_* = \frac{A_* \cdot \sqrt{Q_3}}{\sigma_0 \cdot K e^{\beta \sigma_0}}. \quad (3.74)$$

В параграфе 3.2.1 нами доказано, что для задачи (1.34), (1.4) справедливо утверждение 3.1. Можно видеть, что задача (3.62), (2.14) по структуре схожа с задачей (1.34), (1.4), в случае принятия в качестве параметра поврежденности величины удельной работы рассеяния. Задаче (3.62), (2.14) соответствует значение $\alpha = 0$, т. е. для нее все точки рассматриваемой области $V' = \{(\varepsilon, A, t) \mid 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*, 0 \leq A \leq A_*, 0 \leq t \leq t^*\}$ являются точками локальной эквивалентности. Поэтому интегральное соотношение для оценки меры отклонения направления отсчета аргумента κ от наилучшего для задачи (3.62), (2.14) существует и может быть записано в виде интеграла

$$\Xi = \frac{\sigma_0}{\sqrt{Q_3}} \int_0^{\kappa_*} |(A_* - A(\xi))^m - 1| d\xi. \quad (3.75)$$

Так как стоящая под знаком модуля в (3.75) функция может принимать разные знаки, то Ξ равна сумме двух интегралов:

$$\begin{aligned} \Xi = \frac{\sigma_0}{\sqrt{Q_3}} \cdot \left\{ \int_0^{\kappa_1} [(A_* - A(\xi))^m - 1] d\xi + \right. \\ \left. + \int_{\kappa_1}^{\kappa_*} [1 - (A_* - A(\xi))^m] d\xi \right\} = \frac{A_*^{m+1} - 2}{K e^{\beta \sigma_0} (m+1)} - \\ - \frac{A_* - 2}{K e^{\beta \sigma_0}}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

где $\kappa_1 = \frac{(A_* - 1) \cdot \sqrt{Q_3}}{\sigma_0 \cdot K \cdot \exp(\beta \sigma_0)}$, или в осредненной форме

$$\bar{\Xi} = \frac{(A_*^{m+1} - 2) \sigma_0}{\sqrt{Q_3} A_* (m + 1)} - \frac{(A_* - 2) \sigma_0}{\sqrt{Q_3} A_*}. \quad (3.77)$$

В таблице 3.7 даны значения мер отклонения (3.76) и (3.77) для задачи (3.72), (2.21). Видно, что обусловленности κ -преобразованной задачи меньше наилучшей, но норма правой части системы (3.72) ограничена, что дает возможность применять для решения данной задачи явные методы. Кроме того, знаменатель правых частей (3.73) и правые части двух первых уравнений системы (3.72) постоянны, что позволяет более эффективно реализовать методы ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я.

Таблица 3.7. Мера отклонения между направлениями отсчета аргументов λ и κ для задачи (3.72), (2.21)

σ_0 , МПа	Ξ	κ_*	$\bar{\Xi}$
98.07	446.225	88.2046	5.059
112.78	263.9668	88.2035	2.9927
147.1	77.5423	88.202	0.8791

В таблице 3.8 даны результаты численного решения задачи (3.72), (2.21) для трех значений начального напряжения $\sigma_0 = 98, 112.7$ и 147 МПа с постоянным шагом $h^\kappa = 10^{-4}$. Обозначения аналогичны используемым в таблице 1.5.

Таблица 3.8. Расчетные данные для сплава ОТ-4 при постоянном шаге, κ -преобразование

σ_0 , МПа	ε_n^*	A_n^* , МДж/м ³	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод ЭЯ, $h^\kappa = 10^{-4}$					
98	0.9	88.1999	446.229	882045	2578.7
112.7	0.7826	88.1999	263.969	882034	2585.3
147	0.6	88.2	77.543	882020	2580.3

Окончание табл. 3.8

σ_0 , МПа	ε_n^*	A_n^* , МДж/м ³	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод ЭКЯ, $h^\kappa = 10^{-4}$					
98	0.9	88.1999	446.228	882045	3259
112.7	0.7826	88.1999	263.968	882034	3255.9
147	0.6	88.2	77.543	882020	3269.7
Метод РК4Я, $h^\kappa = 10^{-4}$					
98	0.9	88.1999	446.228	882045	6252.4
112.7	0.7826	88.1999	263.968	882034	6238.9
147	0.6	88.2	77.543	882020	6247.7

В таблице 3.9 даны результаты численного решения задачи (3.72), (2.21) для трех значений начального напряжения $\sigma_0 = 98, 112.7$ и 147 МПа с переменным шагом интегрирования при значениях параметров $\theta_1 = 10^{-4}$ и $\theta_2 = \theta_1/2$. Обозначения аналогичны используемым в таблице 1.6. Начальное значение шага h_s^κ по аргументу κ принималось равным единице.

Таблица 3.9. Расчетные данные для сплава ОТ-4 при переменном шаге, κ -преобразование

σ_0 , МПа	ε_n^*	A_n^* , МДж/м ³	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод ЭЯ, $h_{\min}^\kappa = 6 \cdot 10^{-5}$, $h_{\max}^\kappa = 6 \cdot 10^{-5}$					
98	0.9	88.2	446.228	1445144	7424.5
112.7	0.7826	88.2	263.969	1445125	7427.1
147	0.6	88.2	77.543	1445102	7438.4
Метод ЭКЯ, $h_{\min}^\kappa = 2 \cdot 10^{-4}$, $h_{\max}^\kappa = 2 \cdot 10^{-4}$					
98	0.9	88.2	446.228	361286	2137.3
112.7	0.7826	88.1999	263.968	361281	2135.8
147	0.6	88.1999	77.543	361275	2124.7

Окончание табл. 3.9

σ_0 , МПа	ε_n^*	A_n^* , МДж/м ³	t_n^* , ч	N_s	t_c , мс
Метод РК4Я, $h_{\min}^\kappa = 9.8 \cdot 10^{-4}$, $h_{\max}^\kappa = 9.8 \cdot 10^{-4}$					
98	0.9	88.1995	446.228	90321	1021.9
112.7	0.7826	88.1997	263.968	90320	1020.1
147	0.6	88.1991	77.543	90318	1026.4

Кривые ползучести, полученные при решении задачи (3.72), (2.21) с постоянным и переменным шагом, имеют вид, аналогичный приведенным на рис. 1.4. Шаг интегрирования для данной задачи монотонно уменьшается от начального шага h_s^κ до определенного значения и далее остается постоянным.

В таблице 3.10 представлена относительная погрешность удельной работы рассеяния при расчете задачи (3.72), (2.21) методами ЭЯ, ЭКЯ и РК4Я с переменным и постоянным шагом, обозначения аналогичны используемым в таблице 1.10. При расчете относительной погрешности использовалось аналитическое решение для удельной работы рассеяния (1.27). Характер изменения погрешности удельной энергии рассеяния в зависимости от аргумента t аналогичен характеру изменения кривых, приведенных на рис. 1.6.

Таблица 3.10. Относительная погрешность удельной энергии рассеяния для задачи (3.72), (2.21)

σ_0 , МПа	Постоянный шаг, $h^\kappa = 10^{-4}$			Переменный шаг, $\theta_1 = 10^{-4}$		
	δA_{\max} , %	δA_{av} , %	δA_{dev} , %	δA_{\max} , %	δA_{av} , %	δA_{dev} , %
Метод ЭЯ						
98	3.988	0.143	0.6	3.514	0.111	0.499
112.7	3.988	0.143	0.6	3.514	0.111	0.499
147	3.988	0.143	0.6	3.514	0.111	0.499
Метод ЭКЯ						
98	0.153	$2 \cdot 10^{-4}$	0.005	0.166	$3 \cdot 10^{-4}$	0.005
112.7	0.148	10^{-4}	0.003	0.172	$3 \cdot 10^{-4}$	0.006
147	0.157	$2 \cdot 10^{-9}$	0.005	0.175	$3 \cdot 10^{-4}$	0.006
Метод РК4Я						
98	0.143	$2 \cdot 10^{-4}$	0.004	0.088	$5 \cdot 10^{-5}$	0.002
112.7	0.157	$2 \cdot 10^{-9}$	0.004	0.038	10^{-5}	$5 \cdot 10^{-4}$
147	0.148	$2 \cdot 10^{-4}$	0.005	0.074	$5 \cdot 10^{-5}$	0.002

3.2.4 Анализ применения модифицированного наилучшего аргумента

В данной главе рассмотрено применение модифицированного наилучшего аргумента κ вида (3.60), приводящего к решению задач (3.62), (2.14) для образцов из стали 45, (3.69), (2.17) для образцов из титанового сплава ЗВ и (3.72), (2.21) для образцов из титанового сплава ОТ-4. Доказано, что обусловленность κ -преобразованных задач будет хуже наилучшей. Для оценки обусловленности κ -преобразованных задач предложено использовать величину Ξ отклонения между направлениями отсчета аргументов λ и κ , которая для системы двух ОДУ выражается формулой (3.57), или ее усредненное значение $\bar{\Xi}$ (3.58). Для рассматриваемых задач величины Ξ и $\bar{\Xi}$ даны в таблицах 3.1, 3.4 и 3.7. Отметим, что для оценки обусловленности κ -преобразованных задач более приемлема величина $\bar{\Xi}$, так как она менее зависима от значений начального напряжения и используемой размерности.

Для образцов из стали 45 и титанового сплава ЗВ значения $\bar{\Xi}$ не превосходят единицы и мало зависят от начального напряжения. Можно ожидать, что и обусловленности κ -преобразованных задач для данных конструкций будут мало отличаться от наилучшей. Для образцов из титанового сплава ОТ-4 величина $\bar{\Xi}$ зависит от начального напряжения и принимает значения, превышающие 5 единиц, из чего можно сделать вывод о том, что κ -преобразованная задача для сплава ОТ-4 будет обусловлена хуже по сравнению с двумя другими.

Ухудшение обусловленности κ -преобразованных задач компенсируется значительным упрощением вида используемых определяющих уравнений. Для упрочняющихся конструкций в сравнении с наилучшей параметризацией можно отметить следующее:

1. Переход к аргументу κ для стали 45 при использовании метода ЭЯ позволяет сократить время счета на 10–35 процентов, при использовании метода ЭКЯ – на 20–60 процентов, при использовании метода РК4Я – на 65

процентов. Для титанового сплава ЗВ при использовании метода ЭЯ время счета сокращается на 20–40 процентов, при использовании метода ЭКЯ – на 45–70 процентов, при использовании метода РК4Я – в 2–3 раза.

2. Максимальная погрешность решений обеих задач может возрасти в разы, однако средние показатели и медиана погрешности уменьшаются по сравнению с полученными при наилучшей параметризации, т. е. погрешности в обоих случаях сопоставимы. Отметим возрастание среднего значения и медианы погрешности решения, полученного методом РК4Я для сплава ЗВ, но уменьшение среднего квадратического отклонения сглаживает разницу с погрешностью для λ -преобразованной задачи.
3. Интервал изменения аргумента κ растягивается по сравнению с интервалами изменения аргументов λ и t в 7 раз для стали 45 и в 28 раз для титанового сплава ЗВ. За счет такого растяжения шаг по аргументу κ становится больше. Однако количество шагов по аргументу κ может на 30–50 процентов в обе стороны отличаться от аналогичных показателей для аргументов λ и t . Основной же особенностью κ -преобразования является то, что значения h^κ остается фактически постоянным, даже при использовании переменного шага.

Помимо уже сказанного, для образцов из титанового сплава ОТ-4 стоит добавить следующее:

1. Для всех трех методов решения при постоянном шаге интегрирования, за счет нормировки длины интервала изменения аргумента κ до 88.2 единиц, в ряде случаев удается сократить время счета по сравнению с решением непараметризованной задачи: для $\sigma_0 = 98$ МПа в 4.5–5.5 раза, для $\sigma_0 = 112.7$ МПа в 2.3–3.3 раза. При $\sigma_0 = 147$ МПа происходит увеличение времени счета для метода РК4Я на 25 процентов, для методов ЭЯ и ЭКЯ время счета находится на уровне, полученном при решении исходной задачи. Последнее объясняется тем, что длина интервала изменения аргумента κ при $\sigma_0 = 147$ МПа превышает длину интервала изменения времени t .

2. При переменном шаге интегрирования, в сравнении с результатами решения непараметризованной задачи, можно отметить для метода ЭЯ уменьшение времени счета до 45 процентов, для метода ЭКЯ – до 35 процентов. Для метода РК4Я время счета остается на том же уровне, что и для непараметризованной задачи. Это объясняется как упрощением вида κ -преобразованной задачи, так и зависимостью времени счета от количества шагов по аргументу κ .
3. Относительная погрешность решений, полученных при использовании всех рассматриваемых методов с постоянным шагом интегрирования, принимает существенно большие значения по сравнению с аналогичными для λ -преобразованных задач. Это можно связать с реальным увеличением шага интегрирования и ухудшением обусловленности κ -преобразованной задачи. При переменном шаге погрешности для κ - и λ -преобразованной задач сопоставимы. Отметим также, что для метода РК4Я наблюдается увеличение погрешности при увеличении точности в методе PPP.

В остальном для κ -преобразованных задач справедливы выводы параграфа 2.2.4.

Замечание 3.6. Используя особенность изменения шага интегрирования при κ -преобразовании, можно модифицировать процедуру контроля точности по методу PPP и сократить время счета еще в два раза.

Все вышесказанное показывает, что введенный модифицированный наилучший аргумент позволяет упростить процесс решения задач как для неупрочняющихся, так и для упрочняющихся конструкций и может стать основой для разработки эффективных методов расчета как плохо обусловленных, так и жестких задач в целом. Но приведенные в данной главе результаты являются лишь началом исследований предложенного аргумента. В дальнейшем необходимо детально исследовать общие свойства данного аргумента и более конкретно рассмотреть вопрос обусловленности κ -преобразованных задач.

Библиографический список

1. Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фор-троне. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 336 с.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Лаборатория знаний, 2015. – 636 с.
3. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. В 2 частях. Часть I. Малые деформации. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 600 с.
4. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. В 2 частях. Часть II. Конечные деформации. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 432 с.
5. Белов А. А., Калиткин Н. Н. Проблема нелинейности при численном решении сверхжестких задач Коши // *Математическое моделирование*. – 2016. – Т. 28. – № 4. – С. 16-32.
6. Белов А. А., Калиткин Н. Н. Особенности расчета контрастных структур в задачах Коши // *Математическое моделирование*. – 2016. – Т. 28. – № 10. – С. 97-109.
7. Белов А. А., Калиткин Н. Н. Численные методы решения задач Коши с контрастными структурами // *Моделирование и анализ информационных систем*. – 2016. – Т. 23. – № 5. – С. 529-538.
8. Бормотин К. С. Итерационные численные методы компьютерного моделирования оптимальной формовки и клепки тонкостенных панелей: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 05.13.18. – Комсомольск-на-Амуре, 2014. – 282 с.

9. Булатов М. В., Тыглиян А. В., Филиппов С. С. Об одном классе одношаговых одностадийных методов для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2011. – Т. 51. – № 7. – С. 1251-1265.
10. Вайнер Р., Куликов Г. Ю. Эффективное управление точностью численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и оптимальные интерполяционные равнозначные блочные методы с переменным шагом // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2014. – Т. 54. – № 4. – С. 591-607.
11. Васильев А. Н., Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Идентификация параметров модели разрушения для анизотропных конструкций // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия «Механика предельного состояния»*. – 2014. – № 4(22). – С. 33-45.
12. Васильев А. Н., Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Методы нейросетевого моделирования в задачах неупругого деформирования металлических конструкций // В кн. *Васильев А. Н., Тархов Д. А., Шемякина Т. А. Нейросетевой подход к задачам математической физики*. – СПб.: Нестор-История, 2015. – С. 216-259.
13. Васильев А. Н., Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Нейросетевой метод идентификации и анализа модели деформирования металлических конструкций в условиях ползучести // *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. – 2015. – Т. 2. – № 11. – С. 360-370.
14. Васильев А. Н., Тархов Д. А. Нейросетевое моделирование. Принципы. Алгоритмы. Приложения. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2009. – 528 с.
15. Васильев А. Н., Тархов Д. А. Принципы и техника нейросетевого моделирования. – СПб.: Нестор-История, 2014. – 218 с.

16. *Васильев А. Н., Тархов Д. А., Шемякина Т. А.* Нейросетевой подход к задачам математической физики. – СПб.: Нестор-История, 2015. – 260 с.
17. *Ворович И. И., Зипалова В. Ф.* К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши // *Прикладная математика и механика.* – 1965. – Т. 29. – Вып. 5. – С. 894-901.
18. *Гаврюшин С. С., Барышников О. О., Борискин О. Ф.* Численный анализ элементов конструкций машин и приборов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – 479 с.
19. *Галанин М. П., Ходжаева С. Р.* Методы решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты тестовых расчетов // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.* – 2013. – № 98. – 29 с. Режим доступа: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-98>
20. *Горев Б. В.* Высокотемпературная ползучесть конструкционных сплавов и ее приложение к формообразованию крупногабаритных деталей: дис. ... д-ра техн. наук: 01.02.04. – Новосибирск, 2003. – 426 с.
21. *Горев Б. В., Банщикова И. А.* К описанию процесса ползучести и разрушения упрочняющихся материалов по кинетическим уравнениям со скалярным параметром поврежденности // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки».* – 2009. – № 2. – С. 90–98.
22. *Горев Б. В., Захарова Т. Э., Клопотов И. Д.* К описанию процесса ползучести и разрушения материалов с немонотонным изменением деформационно-прочностных свойств // *Физическая мезомеханика.* – 2002. – Т. 5. – № 2. – С. 17–22.
23. *Горев Б. В., Любашевская И. В., Панамарев В. А., Иявойнен С. В.* Описание процесса ползучести и разрушения современных конструкционных материалов с использованием кинетических уравнений в энергетической форме //

Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55. – № 6. – С. 132-144.

24. Горев Б. В., Панамарев В. А., Перетягъко В. Н. Энергетический вариант теории ползучести в обработке металлов давлением // *Известия высших учебных заведений. Черная металлургия.* – 2011. – № 6. – С. 16-18.
25. Григолюк Э. И., Лопаницын Е. А. Конечные прогибы, устойчивость и закритическое поведение тонких пологих оболочек. – М.: Изд-во МАМИ, 2004. – 162 с.
26. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
27. Давиденко Д. Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // *ДАН СССР.* – 1953. – Т. 88. – № 4. – С. 601-602.
28. Давиденко Д. Ф. О приближенном решении систем нелинейных уравнений // *Украинский математический журнал.* – 1953. – Т. 5. – № 2. – С. 196-206.
29. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 334 с.
30. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Т. 1. Методы обработки данных. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
31. Закономерности ползучести и длительной прочности: Справочник / Под общ. ред. С. А. Шестерикова. – М.: Машиностроение, 1983. – 101 с.
32. Зубанов А. М., Коконков Н. И., Ширков П. Д. Одностадийный метод Розенброка с комплексными коэффициентами и автоматическим выбором шага // *Математическое моделирование.* – 2011. – Т. 23. – № 3. – С. 127-138.

33. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
34. *Калиткин Н. Н., Пошивайло И. П.* Вычисления с использованием обратных схем Рунге–Кутты // *Математическое моделирование.* – 2013. – Т. 25. – № 10. – С. 79-96.
35. *Калиткин Н. Н., Пошивайло И. П.* Решение задачи Коши для жестких систем с гарантированной точностью методом длины дуги // *Математическое моделирование.* – 2014. – Т. 26. – № 7. – С. 3-18.
36. *Качанов Л. М.* О времени разрушения в условиях ползучести // *Известия АН СССР. Отделение технических наук.* – 1958. – № 8. – С. 26-31.
37. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. В 3 т. Т. 2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. – М.: Дрофа, 2003. – 720 с.
38. *Кузнецов Е. Б.* Метод продолжения решения и наилучшая параметризация. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. – 160 с.
39. *Кузнецов Е. Б.* Некоторые приложения метода продолжения по наилучшему параметру. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 160 с.
40. *Кузнецов Е. Б.* Параметризация краевых задач и прохождение точек бифуркации. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 160 с.
41. *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Параметризация задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с предельными особыми точками // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2017. – Т. 57. – № 6. – С. 934-957.
42. *Кузнецов Е. Б., Леонов С. С.* Примеры параметризации задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с предельными особыми точками // *Жур-*

нал вычислительной математики и математической физики. – 2018. – Т. 58. – № 6. – С. 914-933.

43. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Методика выбора функций определяющих уравнений ползучести и длительной прочности с одним скалярным параметром поврежденности // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2016. – Т. 57. – № 2. – С. 202-211.
44. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. О модификации наилучшего параметра продолжения решения // *Журнал Средне-вожского математического общества*. – 2015. – Т. 17. – № 1. – С. 71-81.
45. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Чистый изгиб балки из разномодульного материала в условиях ползучести // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. – 2013. – Т. 6. – № 4. – С. 26-38.
46. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Математическое моделирование чистого изгиба балки из авиационного материала в условиях ползучести [Электронный ресурс] // *Электронный журнал «Труды МАИ»*. – 2013. – № 65. – Режим доступа: <https://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=35927>
47. Куликов Г. Ю. Вложенные симметричные неявные гнездовые методы Рунге–Кутты типов Гаусса и Лобатто для решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений и гамильтоновых систем // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2015. – Т. 55. – № 6. – С. 986-1007.
48. Локощенко А. М. Виброползучесть металлов при одноосном и сложном напряженных состояниях // *Известия РАН. Механика твердого тела*. – 2014. – № 4. – С. 111-120.
49. Локощенко А. М. Длительная прочность металлов при сложном напряженном состоянии (обзор) // *Известия РАН. Механика твердого тела*. – 2012. – № 3. – С. 116-136.

50. *Локощенко А. М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. – М.: Физматлит, 2016. – 504 с.
51. *Локощенко А. М.* Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. – М.: Изд-во Московского университета, 2000. – 178 с.
52. *Локощенко А. М.* Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах (обзор) // *Физико-химическая механика материалов*. – 2001. – № 4. – С. 27-41.
53. *Локощенко А. М.* Применение кинетической теории при анализе длительного высокотемпературного разрушения металлов в условиях сложного напряженного состояния (обзор) // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2012. – Т. 53. – № 4. – С. 149-164.
54. *Локощенко А. М.* Результаты исследований ползучести и длительной прочности металлов в Научно-исследовательском институте механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (к юбилею Ю. Н. Работнова) // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2014. – Т. 55. – № 1. – С. 144-165.
55. *Локощенко А. М.* Эквивалентные напряжения в расчетах длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии (обзор) // *Известия Саратовского государственного университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»*. – 2009. – Т. 9. – Вып. 4. – Ч. 2. – С. 128-136.
56. *Локощенко А. М., Шестериков С. А.* Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1980. – № 3. – С. 155-159.
57. *Локощенко А. М., Шестериков С. А.* Ползучесть // *Итоги науки. Серия «Механика»*. – М.: ВИНТИ, 1965. – С. 177-227.

58. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
59. *Никитенко А. Ф.* Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. – Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН – НГАСУ, 1997. – 278 с.
60. *Новиков А. Е., Новиков Е. А.* Численное решение жестких задач с небольшой точностью // *Математическое моделирование.* – 2010. – Т. 22. – № 1. – С. 46-56.
61. *Новиков Е. А.* Аппроксимация матрицы Якоби в $(M, 2)$ -методах решения жестких задач // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2011. – Т. 51. – № 12. – С. 2194-2208.
62. *Новиков Е. А.* Явные методы для жестких систем. – Новосибирск: Наука. Сибирское предприятие РАН, 1997. – 195 с.
63. *Работнов Ю. Н.* О механизме длительного разрушения // *Вопросы прочности материалов и конструкций.* – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – С. 5-7.
64. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 2014. – 752 с.
65. *Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г.* Численные методы решения жестких систем. – М.: Наука, 1979. – 208 с.
66. *Сигунов Ю. А., Диденко И. Р.* Комплексная реализация неявных одностадийных методов до 4-го порядка точности при численном интегрировании систем ОДУ // *Математическое моделирование.* – 2011. – Т. 23. – № 1. – С. 87-99.
67. *Симонян А. М.* Некоторые вопросы ползучести. – Ереван: Гитутюн, 1999. – 255 с.

68. *Скворцов Л. М.* Однократно неявные диагонально расширенные методы Рунге–Кутты четвертого порядка // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2014. – Т. 54. – № 5. – С. 755-765.
69. *Скворцов Л. М.* Эффективная реализация неявных методов Рунге–Кутты второго порядка // *Математическое моделирование.* – 2013. – Т. 25. – № 5. – С. 15-28.
70. *Скворцов Л. М.* Явные адаптивные методы Рунге–Кутты // *Математическое моделирование.* – 2011. – Т. 23. – № 7. – С. 73-87.
71. *Скворцов Л. М.* Явные адаптивные методы Рунге–Кутты для жестких и колебательных задач // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2011. – Т. 51. – № 8. – С. 1434-1448.
72. *Скворцов Л. М.* Явные стабилизированные методы Рунге–Кутты // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2011. – Т. 51. – № 7. – С. 1236-1250.
73. *Скворцов Л. М., Козлов О. С.* Эффективная реализация диагонально-неявных методов Рунге–Кутты // *Математическое моделирование.* – 2014. – Т. 26. – № 1. – С. 96-108.
74. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Ред. Дж. Холл, Дж. Уатт. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
75. *Соснин О. В.* Энергетический вариант ползучести и длительной прочности. Сообщение 1. Ползучесть и разрушение неупрочняющихся материалов // *Проблемы прочности.* – 1973. – № 5. – С. 45-49.
76. *Соснин О. В., Горев Б. В.* Энергетический вариант ползучести и длительной прочности. Сообщение 3. Ползучесть и длительная прочность вращающихся дисков // *Проблемы прочности.* – 1974. – № 3. – С. 3-7.

77. *Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф.* К обоснованию энергетического варианта теории ползучести и длительной прочности металлов // *Прикладная механика и техническая физика.* – 2010. – Т. 51. – №. 4. – С. 188-197.
78. *Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф.* Энергетический вариант теории ползучести. – Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1986. – 96 с.
79. *Соснин О. В., Торшенин Н. Г.* О ползучести и разрушении титанового сплава ОТ-4 в интервале температур 400-550° С // *Проблемы прочности.* – 1972. – №. 7. – С. 55-59.
80. *Соснин О. В., Торшенин Н. Г.* О ползучести и разрушении титанового сплава ОТ-4 при постоянной температуре // *Проблемы прочности.* – 1970. – №. 5. – С. 28-32.
81. *Соснин О. В., Шокало И. К.* Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Сообщение 2. Ползучесть и разрушение материалов с начальным упрочнением // *Проблемы прочности.* – 1974. – № 1. – С. 43-48.
82. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
83. *Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л.* Численные методы. – М.: Физматлит, 2004. – 400 с.
84. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 685 с.
85. *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
86. *Чебышев П. Л.* Об интегрировании иррациональных дифференциалов // Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева. – М.: Изд-во АН СССР, 1944-1951. – Т. 2. Математический анализ. – С. 52-69.

87. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 224 с.
88. Шестериков С. А., Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов // Итоги науки. Серия «Механика деформируемого твердого тела». – М.: ВИНТИ, 1980. – Т. 13. – С. 3-104.
89. Ширков П. Д. Устойчивость ROW методов для неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24. – № 5. – С. 97-111.
90. Bal L., Buyle-Bodin F. Artificial neural network for predicting creep of concrete // *Neural Computing & Applications*. – 2014. – Vol. 25. – Issue 6. – Pp. 1359-1367.
91. Bhadeshia H. K. D. H. Neural Networks in Materials Science // *ISIJ International*. – 1999. – Vol. 39. – No. 10. – Pp. 966-979.
92. Budkina E. M., Kuznetsov E. B., Lazovskaya T. V., Leonov S. S., Tarkhov D. A., Vasilyev A. N. Neural Network Technique in Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations // *Lecture Notes in Computer Science*. – 2016. – Vol. 9719. – Pp. 277-283.
93. Gorev B. V., Klopotov I. D., Lyubashevskaya I. V. Creep and damage behavior of AK4-1T and VT-9 alloys under different stress states // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 1998. – Vol. 29. – Pp. 1-10.
94. Johnson A. E. Complex-stress creep of metals // *Metallurgical Reviews*. – 1960. – Vol. 5. – № 20. – Pp. 447-506 (Перевод: Джонсон А. Ползучесть металлов при сложном напряженном состоянии // *Механика*. Период. сб. перев. иностр. статей. – 1962. – № 4. – С 91-146).

95. *Kmet S., Sincak P., Stehlik P.* Artificial Neural Network for Creep Behaviour Predictions of a Parallel-lay Aramid Rope Under Varying Stresses // *Strain*. – 2011. – Vol. 47. – Pp. 121-128.
96. *Kulikov G. Yu., Weiner R.* A singly diagonally implicit two-step peer triple with global error control for stiff ordinary differential equations // *SIAM Journal on Scientific Computing*. – 2015. – Vol. 37. – No. 3. – Pp. A1593-A1613.
97. *Kulikov G. Yu., Shindin S. K.* Adaptive nested implicit Runge-Kutta formulas of Gauss type // *Applied Numerical Mathematics*. – 2009. – Vol. 59. – No. 3-4. – Pp. 707-722.
98. *Kulikov G. Yu.* Cheap global error estimation in some Runge-Kutta pairs // *IMA Journal of Numerical Analysis*. – 2013. – Vol. 33. – No. 1. – Pp. 136-163.
99. *Kuznetsov E. B., Leonov S. S., Vasilyev A. N.* Neural Network Method in the Problem of Defining Steady State Creep in Rotating Solid Disks // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2017. – Vol. 20. – No. 4. – Pp. 374-381.
100. *Lahaye M. E.* Une metode de resolution d'une categorie d'equations transcendentales // *Compter Rendus hebdomataires des seances de L'Academie des sciences*. – 1934. – Vol. 198. – No. 21. – Pp. 1840-1842.
101. *Lahaye M. E.* Solution of system of transcendental equations // *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.* – 1948. – Vol. 5. – Pp. 805-822.
102. *May S., Vignollet J., de Borst R.* A new arc-length control method based on the rates of the internal and the dissipated energy // *Engineering Computations*. – 2016. – Vol. 33. – Issue 1. – Pp. 100-115.
103. *Riks E.* The application of Newton's method to the problem of elastic stability // *Trans. ASME*. – 1972. – No. 4. – Pp. 1060-1065.

104. *Semenov A.A.* Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures // *Thin-Walled Structures*. – 2016. – Vol. 106. – C. 428-436.
105. *Wang X., Ma T.-B., Ren H.-L., Ning J.-G.* A local pseudo arc-length method for hyperbolic conservation laws // *Acta Mechanica Sinica*. – 2015. – Vol. 30. – No. 6. – Pp. 956-965.
106. *Weiner R., Kulikov G. Yu.* Local and global error estimation and control within explicit two-step peer triples // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2014. – Vol. 262. – Pp. 261-270.

ПРИЛОЖЕНИЕ. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ОБРАЗЦОВ ИЗ ТИТАНОВОГО СПЛАВА ОТ-4

В таблицах П.1–П.3 приводятся результаты эксперимента для плоских образцов из титанового сплава ОТ-4, подвергающихся одноосному растяжению при постоянном напряжении и температуре $T = 500^\circ\text{C}$.

Таблица П.1. Экспериментальные данные
для образцов из сплава ОТ-4, $\sigma_0 = 98$ МПа

	1	2	3	4	5
t , ч	91.892	185.676	308.108	393.243	441.891
ε	0.041	0.091	0.193	0.341	0.693

Таблица П.2. Экспериментальные данные
для образцов из сплава ОТ-4, $\sigma_0 = 112.7$ МПа

	1	2	3	4	5	6
t , ч	53.243	95.405	151.351	190	204.054	212.703
ε	0.047	0.095	0.209	0.331	0.412	0.517

Таблица П.3. Экспериментальные данные
для образцов из сплава ОТ-4, $\sigma_0 = 147$ МПа

	1	2	3	4	5	6
t , ч	27.027	45.946	57.568	62.162	64.324	65.405
ε	0.057	0.155	0.275	0.399	0.493	0.605

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ОБРАЗЦОВ ИЗ СТАЛИ 45

В таблицах П.4–П.6 приводятся результаты эксперимента по одноосному растяжению цилиндрических образцов из стали 45 при постоянном напряжении и температуре $T = 850^\circ\text{C}$.

Таблица П.4. Экспериментальные данные
для цилиндрических образцов из стали 45, $\sigma_0 = 35$ МПа

	1	2	3	4	5	6	7
t , ч	0.51	0.98	1.461	1.918	2.441	2.935	3.433
ε	0.044	0.081	0.109	0.141	0.163	0.175	0.195
ω	0.084	0.157	0.211	0.273	0.316	0.34	0.378
	8	9	10	11	12	13	14
t , ч	3.902	4.445	4.898	5.327	5.837	6.531	6.706
ε	0.211	0.234	0.249	0.264	0.287	0.379	0.516
ω	0.41	0.454	0.482	0.512	0.557	0.735	1

Таблица П.5. Экспериментальные данные
для цилиндрических образцов из стали 45, $\sigma_0 = 40$ МПа

	1	2	3	4	5
t , ч	0.286	0.51	0.735	0.906	1.429
ε	0.05	0.111	0.155	0.187	0.24
ω	0.0808	0.18	0.253	0.303	0.39
	6	7	8	9	10
t , ч	2	2.429	2.714	2.947	2.98
ε	0.3	0.366	0.412	0.505	0.616
ω	0.487	0.595	0.67	0.82	1

Таблица П.6. Экспериментальные данные
для цилиндрических образцов из стали 45, $\sigma_0 = 45$ МПа

	1	2	3	4	5	6
t , ч	0.088	0.273	0.392	0.527	0.637	0.739
ε	0.007	0.072	0.134	0.183	0.232	0.273
ω	0.012	0.113	0.211	0.29	0.366	0.431
	7	8	9	10	11	12
t , ч	0.857	0.996	1.061	1.163	1.184	1.224
ε	0.318	0.368	0.413	0.468	0.541	0.633
ω	0.503	0.581	0.652	0.738	0.854	1

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ОБРАЗЦОВ ИЗ ТИТАНОВОГО СПЛАВА ЗВ

В статье [81] рассматривается одноосное растяжение прямоугольных образцов из анизотропного титанового сплава ЗВ при постоянном напряжении и температуре $T = 20^\circ\text{C}$. Эксперимент проводится на образцах двух типов [81]: **1)** вырезанных в направлении прокатки листа (продольные образцы); **2)** вырезанных в направлении, перпендикулярном к направлению прокатки (поперечные образцы). В таблицах П.7–П.10 приводятся экспериментальные данные для указанных образцов, где $\bar{\sigma}_0$ является безразмерным начальным напряжением, получаемым в результате деления действующего начального напряжения σ_0 на предел ползучести σ_c .

Таблица П.7. Экспериментальные данные для продольных
прямоугольных образцов из сплава ЗВ, $\bar{\sigma}_0 = 1.25$

	1	2	3	4	5
$t, \text{ч}$	182.4	700.8	1315.2	2150.4	2812.8
ω	0.217	0.277	0.315	0.354	0.379
	6	7	8	9	10
$t, \text{ч}$	3801.6	4996.8	6060	7121.2	8116.6
ω	0.395	0.434	0.437	0.464	0.49
	11	12	13	14	15
$t, \text{ч}$	9115.7	10070.4	11003.8	12890	13899.5
ω	0.513	0.528	0.551	0.587	0.622
	16	17	18	19	20
$t, \text{ч}$	14898.2	15846.7	16081.4	16134.1	16167.2
ω	0.673	0.737	0.79	0.911	0.998

Таблица П.8. Экспериментальные данные для продольных
прямоугольных образцов из сплава ЗВ, $\bar{\sigma}_0 = 1.28$

	1	2	3	4	5
$t, \text{ч}$	86.7	443.4	1050.6	1792.8	2149.4
ω	0.266	0.343	0.389	0.444	0.488
	6	7	8	9	10
$t, \text{ч}$	2631.3	2949.4	3363.9	3412	3450.6
ω	0.528	0.573	0.662	0.738	0.81

Таблица П.9. Экспериментальные данные для продольных прямоугольных образцов из сплава ЗВ, $\bar{\sigma}_0 = 1.31$

	1	2	3	4	5	6
t , ч	9.4	35.8	96	159.1	256	358.6
ω	0.178	0.234	0.298	0.336	0.375	0.4
	7	8	9	10	11	12
t , ч	492.2	602.4	714.8	836.7	1015.5	1105.9
ω	0.432	0.465	0.505	0.537	0.612	0.64
	13	14	15	16	17	
t , ч	1203.8	1251.8	1298.8	1303.5	1303.5	
ω	0.699	0.753	0.846	0.93	0.992	

Таблица П.10. Экспериментальные данные для поперечных прямоугольных образцов из сплава ЗВ, $\bar{\sigma}_0 = 1.35$

	1	2	3	4	5	6
t , ч	23.5	47.1	106.4	173.2	298.4	384
ω	0.104	0.161	0.219	0.246	0.279	0.28
	7	8	9	10	11	12
t , ч	400	489.412	634.4	751.1	787.2	928
ω	0.294	0.301	0.31	0.313	0.329	0.332
	13	14	15	16	17	18
t , ч	1091.8	1233.9	1356.2	1459.2	1485.2	1581.2
ω	0.339	0.348	0.358	0.366	0.372	0.38
	19	20	21	22	23	24
t , ч	2568	3340.8	4003.2	4684.8	5404.8	5827.2
ω	0.439	0.481	0.524	0.569	0.605	0.668
	25	26				
t , ч	5904	5952				
ω	0.715	0.848				

В статье [21] рассматривается одноосное растяжение круглых стержней из титанового сплава ЗВ при постоянных напряжениях и температуре $T = 20^\circ\text{C}$. Полученные экспериментальные данные приводятся в таблицах П.11–П.13.

Таблица П.11. Экспериментальные данные для круглых стержней из сплава ЗВ, $\sigma_0 = 603$ МПа

	1	2	3	4
t , ч	549.9	1042.3	1749.9	2256.8
A , МДж/м ³	21.767	25.029	28.29	31.885
ε	0.036	0.042	0.047	0.053
	5	6	7	8
t , ч	2734.9	3021.8	3299.1	3452.1
A , МДж/м ³	35.247	38.142	43.933	54.584
ε	0.058	0.063	0.073	0.091

Таблица П.12. Экспериментальные данные для круглых стержней из сплава ЗВ, $\sigma_0 = 618$ МПа

	1	2	3	4	5
t , ч	133.9	172.1	382.5	573.8	860.6
A , МДж/м ³	15.443	21.301	25.894	29.888	35.08
ε	0.025	0.034	0.42	0.048	0.057
	6	7	8	9	10
t , ч	1032.8	1118.8	1166.6	1204.9	1247.8
A , МДж/м ³	39.474	44.998	49.225	53.785	58.545
ε	0.064	0.073	0.08	0.087	0.095

Таблица П.13. Экспериментальные данные для круглых стержней из сплава ЗВ, $\sigma_0 = 638$ МПа

	1	2	3	4	5
t , ч	3.8	4.3	26.4	88.7	148.3
A , МДж/м ³	8.787	18.605	24.829	30.753	35.946
ε	0.014	0.029	0.039	0.048	0.056
	6	7	8	9	10
t , ч	205.5	235.7	244.1	248	249.9
A , МДж/м ³	42.602	47.595	52.587	60.042	65.368
ε	0.067	0.075	0.082	0.094	0.102

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

Г4НЯ – неявный гауссов метод четвертого порядка точности решения начальной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение.

РК4Я – явный метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности решения начальной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

РРР – метод Рунге–Ромберга–Ричардсона оценки локальной погрешности при решении начальной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (правило Рунге).

ЭВТП – энергетический вариант теории ползучести.

ЭКЯ – явный метод Эйлера–Коши решения начальной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

ЭНЯ – неявный метод Эйлера решения начальной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

ЭЯ – явный метод Эйлера решения начальной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Научное издание

**Кузнецов Евгений Борисович
Леонов Сергей Сергеевич**

**Метод продолжения решения по параметру
в задачах необратимого деформирования**

Редактор Е.Л. Мочина

Подписано в печать 03.07.2020.

Бумага писчая. Формат 60×84 1/16. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 9,3. Уч.-изд. л. 10,00. Тираж 500 экз.

Зак. 1108/808.

Издательство МАИ

(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993

Отпечатано с готового оригинал-макета

Типография Издательства МАИ

(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА