

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХСИСТЕМЫ  
ГЛОБАЛЬНОГО МАСШТАБА

СБОРНИК ТРУДОВ

МЕХАНИКА, УПРАВЛЕНИЕ И ИНФОРМАТИКА

МОСКВА  
2011

ISSN 2075-6836

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
ИНСТИТУТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ РАН



# **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ**

**СИСТЕМЫ ГЛОБАЛЬНОГО МАСШТАБА**

**ТРУДЫ СЕМИНАРА**

ПОД РЕДАКЦИЕЙ  
Р. Р. НАЗИРОВА, Л. Н. Щура

СЕРИЯ  
**МЕХАНИКА, УПРАВЛЕНИЕ И ИНФОРМАТИКА**

Москва, 2011

**Computer Technologies in Natural Science  
Global scale systems. Materials of the Workshop**

**Eds. R. R. Nazirov, L. N. Shchur. Tarusa, 9–11 June, 2010**

The issue 5 is the collection of the papers based on the talks presented at the extended workshop “Computer Technologies in Natural Science. Global scale systems”, which was held from 9–11 June 2010, in Tarusa based hotel Interkosmos of the RAS Space Research Institute. It is the fifth workshop in the series of extended workshops, devoted to the computer technologies in natural sciences. The first workshop was devoted to computer simulations of the actual problems in physics and mechanics and papers was published in the issue 1 (Proceedings of the seminar on Computing Technology in Science. Iss. 1. Computational Physics / Ed. R. R. Nazirov. M.: KDU, 2009. 288 p.), the second workshop was devoted to the discussion of the physical and medical aspects of the research of the complex nonlinear processes in the human body (Methods of Non-linear Analysis in Cardiology and Oncology: Physicist’s Approaches and Clinical Practice. Iss. 2. / Ed. R. R. Nazirov. M.: KDU, 2010. 206 p.), the third workshop was devoted to the computer simulations in biology and chemistry (Materials of the seminar on Computing Technology in Science. Iss. 3. Computational Chemistry and Biology / Eds. R. R. Nazirov, L. N. Shchur. M.: KDU, 2010. 118 p.), the fourth was devoted to the discussion of the computer vision in control systems of the mobile objects (Computer vision in control systems of the mobile objects: Proceedings of the conference-workshop-2010. Iss. 4 / Ed. R. R. Nazirov. M.: KDU, 2011. 328 p.).

Important highlight of the workshop is the active participation of the young scientists. More than half of the talks were done by the young speakers.

**Вычислительные технологии в естественных науках.  
Системы глобального масштаба. Труды семинара**

**Под ред. Р. Р. Назирова, Л. Н. Шура. Таруса, 9–11 июня 2010 г.**

Настоящий сборник основан на докладах, представленных на расширенном семинаре «Компьютерное моделирование актуальных задач. Системы глобального масштаба», который проходил 9–11 июня 2010 г. в г. Тарусе на базе гостиницы «Интеркосмос» Учреждения Российской академии наук Института космических исследований РАН. Это очередной семинар из серии расширенных семинаров, посвящённых вычислительным технологиям в естественных науках. На первом семинаре рассматривались вопросы компьютерного моделирования актуальных задач физики и механики, его труды изданы в 2009 г. в выпуске 1 (Труды семинара по вычислительным технологиям в естественных науках. Вып. 1. Вычислительная физика / Под ред. Р. Р. Назирова. М.: КДУ, 2009. 288 с.); второй семинар был посвящён обсуждению физических и медицинских аспектов исследования сложных нелинейных физических процессов в организме человека (Методы нелинейного анализа в кардиологии и онкологии: Физические подходы и клиническая практика. Вып. 2 / Под ред. Р. Р. Назирова. М.: КДУ, 2010. 206 с.); на третьем семинаре обсуждались проблемы компьютерного моделирования задач биологии и химии (Труды семинара по вычислительным технологиям в естественных науках. Вып. 3. Вычислительная химия и биология / Под ред. Р. Р. Назирова, Л. Н. Шура. М.: КДУ, 2010. 118 с.); на четвёртом — проблемы технического зрения (Техническое зрение в системах управления мобильными объектами-2010: Труды научно-технической конференции-семинара. Вып. 4. / Под ред. Р. Р. Назирова. М.: КДУ, 2011. 328 с.).

Важная особенность проводимых расширенных семинаров состоит в привлечении молодежи к активному участию в качестве докладчиков. Как правило, более половины докладов делаются молодыми исследователями.

Редактор: *Корниленко В. С.*  
Компьютерная верстка: *Комарова Н. Ю.*

Отдельные материалы даны в авторской редакции.

## Предисловие

Читателю предлагаются избранные статьи, написанные на основе приглашенных докладов на очередном расширенном семинаре по вычислительным методам в естествознании, в некоторых статьях изменены названия и состав авторов. Семинар был посвящен моделированию событий глобальных масштабов. Акцент делался на процессах, размеры которых достаточно велики, например, сравнимы с размерами Земного шара, если процессы описывают события, происходящие на нашей планете, или типичные размеры космических явлений.

Вычислительная физика и астрономия и примыкающие к ней тесно вычислительная химия и вычислительная биология, а также нарождающаяся вычислительная геология — это молодые и энергично развивающиеся области естествознания.

Уже принято считать это направление третьим столпом естествознания, дополнительным к двум традиционным столпам естествознания, теории и эксперименту. Его отличительной чертой является использование вычислительных (компьютерных) технологий как основного инструмента исследований. Важность развития этого направления трудно переоценить. Появляются новые знания на стыке различных разделов наук при грамотном применении новых технологий, новых инструментов исследования природы.

Настоящий сборник основан на докладах, представленных на расширенном семинаре «Компьютерное моделирование актуальных задач. Системы глобального масштаба», который проходил 9–11 июня 2010 г. в г. Таруса на базе гостиницы «Интеркосмос» Учреждения Российской академии наук Института космических исследований РАН. Это очередной семинар из серии расширенных семинаров, посвящённых вычислительным технологиям в естественных науках. На первом семинаре рассматривались вопросы компьютерного моделирования актуальных задач физики и механики и его труды изданы в сборнике [1], второй семинар был посвящён обсуждению физических и медицинских аспектов исследования сложных нелинейных физических процессов в организме человека [2], на третьем семинаре обсуждались проблемы компьютерного моделирования задач биологии и химии [3], на четвёртом — проблемы технического зрения [4].

Важная особенность проводимых расширенных семинаров состоит в привлечении молодежи к активному участию в качестве докладчиков. Как правило, более половины докладов делаются молодыми исследователями.

Применение методов численного моделирования геодинамических процессов было представлено в докладах группы доктора Т. В. Гери из Технологического университета Цюриха, Швейцария. Доктор Геря опубликовал изложение методов численного исследования динамики процессов, происходящих в недрах планет [5]. Эти методы были развиты им ранее в сотрудничестве с его коллегами из Института экспериментальной минералогии РАН в Черноголовке из группы профессора Л. Л. Перчука. Доклад Гери был посвящен моделированию образования железного ядра в процессе образования землеподобных планет [6]. Молодые коллеги из его исследовательской группы в Технологическом университете Цюриха представили два доклада на интереснейшую тему о движении геодинамических плит нашей планеты. Е. Сизовой [7] приведена описательная картина истории столкновения таких плит. Эта картина согласуется с наблюдательными данными об истории земной коры. К. Николаева [8] представила работу, которая имеет важнейший предсказательный характер. Выделены прибрежные зоны, в частности на Атлантическом побережье Бразилии, в которых можно ожидать значительную сейсмическую активность в ближайшие 20 тысяч лет. Это означает практически, что уже сегодня имеет смысл установить приборы, способные зафиксировать микроскопические подвижки земной коры, и таким образом установить факт субдукции.

Изучению техногенных влияний на волновые движения поверхности океана были посвящены доклады сотрудников Института прикладной физики РАН из Нижнего Новгорода. Е. Ежова рассказала о лабораторном эксперименте в бассейне по исследованию непараллельной струи [9]. О. А. Дружинин представил алгоритмы и результаты численного моделирования фонтана в стратифицированной жидкости, в которых была обнаружена автогенерация внутренних волн [10], что объясняет некоторые наблюдения по волновым возбуждениям поверхности океана, производимым затопленными гигантскими коллекторами сточных вод.

Для изучения физических процессов, влияющих на метеорологию планеты, важно иметь подходящие модели для моделирования динамических явлений в атмосфере и контактирующем с ней океане. Этой тематике был посвящен доклад А. В. Гусева из Института вычислительной математики РАН в Москве, который показал пример построения модели гидродинамических течений в океане [11]. Сотрудник Института космических исследований РАН А. В. Родин рассказал о результатах моделирования атмосферы Марса и о наблюдении устойчивых вихревых образований [12]. Два других доклада по этой проблеме были сделаны сотрудниками Полярного геофизического института Кольского научного центра РАН. К. Г. Орлов представил модель циркуляции атмосферы Венеры [13], а В. С. Мингалев — результаты влияния несферичности Земли на глобальную циркуляцию атмосферы [14].

Большая часть докладов была посвящена моделированию процессов, происходящих в космическом пространстве. Сотрудник Института космических исследований РАН Ю. М. Кривошеев рассказал о проблемах моделирования процессов переноса [15]. Красочные иллюстрации результатов моделирования

двойных звезд был представлен сотрудником Института астрономии РАН П. В. Кайгородовым [16]. Его коллега по институту А. Г. Жилкин рассказал об особенностях трехмерного моделирования МГД-течений в двойных звездных системах [17]. К сожалению, авторы двух последних, безусловно интересных, исследований не нашли времени и сил для представления текстов докладов в настоящий сборник.

Два доклада сотрудников ИКИ РАН были посвящены численным методам решения задач магнитной гидродинамики и их применениям к моделированию магниторотационных процессов — доклад С. Г. Моисеенко [18] и турбулентности — доклад А. А. Чернышова [19].

С небесных сфер в виртуальный мир перенёс доклад С. К. Шикоты из Научного центра РАН в Черноголовке [20], которая рассказала, как современные информационные GRID-технологии могут быть использованы для общения научных коллективов. В качестве примера была упомянута серия регулярных семинаров по компьютерному моделированию в естественных науках, которые ежемесячно проводятся Научными центрами в Черноголовке, Московская область, и Юлихе, Германия. При этом выступления идут и из Черноголовки, и из Юлиха. Заметим, что темы этих семинаров переключаются с направленностью настоящего расширенного семинара.

Поскольку многие участники используют генераторы случайных чисел, то завершил семинар спонтанный доклад Л. Н. Щура из Института теоретической физики, который рассказал о современных методах генерации случайных чисел [21] и представил библиотеку эффективных генераторов, разработанную под его руководством Львом Барашом [22].

Семинар прошел в обстановке научных обсуждений, коллегиальности и большого интереса участников.

[1] Труды семинара по вычислительным технологиям в естественных науках. Вып. 1. Вычислительная физика / Под ред. Р. Р. Назирова. М.: КДУ, 2009.

[2] Методы нелинейного анализа в кардиологии и онкологии: Физические подходы и клиническая практика. Вып. 2 / Под ред. Р. Р. Назирова. М.: КДУ, 2010.

[3] Труды семинара по вычислительным технологиям в естественных науках. Вып. 3. Вычислительная химия и биология / Под ред. Р. Р. Назирова, Л. Н. Щура. М.: КДУ, 2010.

[4] Техническое зрение в системах управления мобильными объектами-2010: Труды научно-технической конференции-семинара. Вып. 4. / Под ред. Р. Р. Назирова. М.: КДУ, 2011. 328 с.

[5] *Gerya T. V.* Introduction to numerical geodynamic modeling. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

[6] *Геря Тарас.* Numerical modeling of iron core formation with finite differences and marker-in cell techniques.

[7] *Сизова Елена, Геря Т., Браун М., Перчук Л.* Численное моделирование эволюции зон субдукции и коллизии с Археей по сегодняшний день.

[8] *Николаева Ксения, Геря Т. В., Маркес Ф. О., Арманн М.* Численное моделирование зарождения зон субдукции на пассивных окраинах.

[9] *Ежова Екатерина, Кандауров А. А., Сергеев Д. А., Троицкая Ю. И.* Возбуждение неустойчивых мод осесимметричной непараллельной струи: теоретическая модель и эксперимент.

[10] *Дружинин Олег Александрович, Троицкая Ю. И.* Автогенерация внутренних волн фонтаном в стратифицированной жидкости.

[11] *Гусев Анатолий Владимирович.* Численная модель гидродинамики океана в криволинейных координатах для воспроизведения циркуляции Мирового океана.

[12] *Родин Александр Вячеславович.* Перестройки волновых режимов циркуляции атмосферы Марса.

[13] *Орлов Константин Геннадиевич, Мингалев И. В., Родин А. В.* Негидростатическая модель общей циркуляции атмосферы Венеры и результаты её применения.

[14] *Мингалев И. В., Мингалев О. В., Мингалев Виктор Степанович.* Численное исследование влияния несферичности Земли на глобальную циркуляцию средней атмосферы.

[15] *Кривошеев Юрий Михайлович.* Моделирование процессов переноса методом Монте-Карло. Астрофизические приложения.

[16] *Кайгородов Павел Вячеславович, Бисикало Д. В.* Численное моделирование аккреционных дисков в тесных двойных звездах.

[17] *Жилкин Андрей Георгиевич, Бисикало Д. В.* Трёхмерное численное моделирование МГД-течений в промежуточных полярах.

[18] *Моисеенко Сергей Григорьевич.* Операторно-разностный метод численного решения задач МГД и его применение к моделированию магниторотационных процессов в астрофизике.

[19] *Чернышов Александр, Карельский К. В., Петросян А. С.* Масштабно-инвариантные спектры сжимаемой магнитогиродинамической турбулентности с вынуждающей внешней силой.

[20] *Шикота Светлана.* Система проведения видеосеминаров ВидеоГРИД.

[21] *Шур Лев Николаевич.* О генераторах случайных чисел.

[22] *Barash L. Yu., Shchur L. N.* RNGSSELIB: Program library for Random Number Generation, SSE2 realization, будет опубликовано в Computer Physics Communications: Preprint. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/1006.1235>.

#### **Организаторы семинара**

*Назиров Р. Р.* — Учреждение Российской академии наук Институт космических исследований РАН (ИКИ РАН), доктор технических наук.

*Шур Л. Н.* — Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН (ИТФ РАН), доктор физико-математических наук.

# NUMERICAL MODELLING OF IRON CORE FORMATION WITH FINITE DIFFERENCES AND MARKER-IN CELL TECHNIQUES

**Taras V. Gerya**

*Geophysical Fluid Dynamics Group, Institute of Geophysics,  
Department of Earth Sciences, Swiss Federal Institute of Technology  
(ETH-Zurich), Sonneggstrasse, 5, 8092 Zurich*

Thermo-mechanical numerical modelling becomes more and more popular tool for understanding iron core formation mechanisms during planetary accretion and differentiation. Modelling of iron core formation in a self-consistent manner should take into account realistic rheology of planetary materials and large internal deformation of a self-gravitating planetary body. This requires computing complex visco-(elasto)-plastic deformation in the variable gravity field which changes with time in response to evolution in mass distribution inside the planet. Changes in the shape of the planet and the related planetary surface deformation should also be considered. One way to tackle these requirements is to use the “spherical-Cartesian” approach that allows computations of self-gravitating bodies of arbitrary form on Cartesian grids including the presence of a free surface. In this paper 2D implementation of this approach based on finite differences and marker-in-cell techniques is discussed in short together with test numerical examples.

*Keywords:* planet core, planetary accretion, finite differences, numerical modelling

## Introduction

While the existence of the Earth’s iron core is known for a long time, knowledge about its formation mechanism is still very limited and several contrasting hypotheses were suggested [Stevenson, 1981, 2008, and references therein]. In this respect numerical modeling of iron core formation [Golabek et al., 2009, and references therein] becomes a powerful tool for both proposing and testing core formation hypotheses, thus strongcomplementing relatively limited natural observations. Current understanding of core formation processes [Chambers, 2004; Stevenson, 2008, and references therein] indicates that accretion and differentiation of larger terrestrial bodies took place simultaneously and lasted for about 100 Ma for the Earth. Models of planetary formation indicate that the size of impacting planetesimals increased with accretion time [Wetherill, 1990]. Thus, at a certain point, a sufficient amount of impact energy is converted into heat to allow the formation of melt at or near the surface of a growing planetary body. The resulting magma ocean (either local or global) consisted of molten chondritic material, i.e. a homogeneous mixture of molten silicates and iron [Wood et al., 2008, and references therein]. The rainfall mechanism [Stevenson, 1990; Rubie et al., 2003] enables gravitational separation of molten silicates and iron, which leads to the formation of ponds or a complete layer of molten iron accumulated at the base of a magma ocean or at the bottom of large impact craters. Since the density of the overlying iron is higher than the one in the central region of the early planetary embryo, Rayleigh – Taylor



(RT) instabilities may form iron diapirs [Ziethé, Spohn, 2007; Samuel et al., 2010] or a large iron drop that displaces the central core in the sense of Elsasser (1963). During this overturn process stresses can become very large and fracture or deform the central region material so that it spreads as a mantle of ‘rockbergs’ around the newly formed iron core [Stevenson, 1981; Ida et al., 1987]. Honda et al. (1993) and recently Lin et al. (2009) modeled this scenario numerically, starting with an iron ring surrounding the central region of the planetary embryo.

Recent results indicate that in addition to the above mentioned diapir formation mechanism at the base of the magma ocean or a local magma pond, which was modeled numerically [Ziethé, Spohn, 2007; Golabek et al., 2008; Samuel et al., 2010; Ricard et al., 2009], preceding accretion of iron cores of larger predifferentiated impactors (Taylor and Norman, 1990) could be possible. These would have plunged intact through the magma ocean [Dahl, 2005; Stevenson, 2008] into the central region. Therefore the differentiation process is likely to be more dynamic than thought before with many mechanisms playing together that is also supported by recent numerical models [Golabek et al., 2009].

Numerical modeling of iron core formation processes in a self-consistent manner should take into account complex internal deformation of an entire self-gravitating planetary body. In particular, this requires computing the gravity field which changes with time in response to evolution in mass distribution inside the planet. Changes in shape of the planet and the related planetary surface deformation should also be considered. One way to tackle these requirements, is to use a “spherical-Cartesian” approach [Honda et al., 1993; Evonuk, Glatzmaier, 2006; Gerya, Yuen, 2007; Lin et al., 2009; Gerya, 2010] that allows the computation of self-gravitating bodies of arbitrary form on Cartesian grids including the presence of a free surface. In this paper 2D implementation of this approach based on finite differences and marker-in-cell techniques is described in short.

## GOVERNING EQUATIONS

Modeling of a self gravitating body with finite differences and marker-in-cell techniques is based on the following principles [Gerya, Yuen, 2007; Gerya, 2010]:

1. The body is surrounded by the weak medium of very low density ( $\leq 1 \text{ kg/m}^3$ ) and low viscosity allowing for a high ( $10^1 \dots 10^6$ ) viscosity contrast at the free planetary surface.
2. The gravity field is computed by solving the Poisson equation for the gravitational potential associated with the mass (density) distribution portrayed by the markers at each time step.
3. While solving the momentum equation, the components of the gravitational acceleration vector are computed locally by numerical differentiation of the gravitational potential.

In this approach, the gravitational potential  $\Phi$  is computed according to the 2D Poisson equation

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4K\pi G\rho,$$

where  $G$  is the gravitational constant and  $K$  depends on the geometry of self-gravitating body modeled in 2D ( $K = 1$  and  $K = 2/3$  stand for cylindrical and spherical geometry, respectively). The factor  $K = 2/3$  scales the 2D gravity field inside a cylinder of constant density  $\rho$

$$\Phi(r)_{cylindrical} = \pi G\rho r^2, \quad g(r)_{cylindrical} = -\frac{\partial \Phi(r)_{cylindrical}}{\partial r} = -2\pi G\rho r,$$

to a 3D gravity field inside a sphere of the same density

$$\Phi(r)_{spherical} = \frac{2}{3}\pi G\rho r^2, \quad g(r)_{spherical} = -\frac{\partial \Phi(r)_{spherical}}{\partial r} = -\frac{4}{3}\pi G\rho r,$$

where  $r$  is the distance from the centre of the cylinder/sphere. It should be mentioned that this simplified scaling does not allow the exact reproduction of a spherical gravity field in 2D. In particular, the gravitational acceleration is noticeably overestimated *outside the self-gravitating body* since it is proportional to  $1/r$  for a cylindrical gravity field and to  $1/r^2$  for a spherical one. Indeed, this scaling approach allows us to capture changes in an *internal gravity field* that acts on a self-gravitating body with a changing internal mass distribution [Lin et al., 2009]. In many cases this is sufficient for the purposes of modelling internal planetary processes.

The gravitational acceleration vector components are then defined as

$$g_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$g_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

The conservation of mass is approximated by the incompressible mass conservation (continuity) equation:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

where  $v_x$  and  $v_z$  are the horizontal and vertical components of the velocity vector.

The 2-D Stokes equations for creeping flow take the form:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} = -g_x(x, z, t)\rho(T, P, c),$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} = -g_z(x, z, t)\rho(T, P, c),$$

where the density  $\rho(T, P, c)$  depends explicitly on temperature  $T$ , pressure  $P$  and composition  $c$ .  $\sigma_{ij}$  represents the components of the deviatoric stress tensor.  $g_x(x, z, t)$  and  $g_z(x, z, t)$  are the horizontal and vertical components of the local gravity acceleration vector.

The Lagrangian heat conservation equation takes the form:

$$\rho c_p \left( \frac{DT}{Dt} \right) = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + H_s + H_a + H_r,$$

where  $DT/Dt$  represents the substantive time derivative,  $c_p$  denotes heat capacity, and the heat flux components are defined as

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z},$$

where  $k$  is the thermal conductivity.

Shear heating  $H_s$  is given by:

$$H_s = \sigma_{xx} \dot{\epsilon}_{xx} + \sigma_{zz} \dot{\epsilon}_{zz} + 2\sigma_{xz} \dot{\epsilon}_{xz},$$

where  $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  is the strain rate tensor.

$H_a$  is the adiabatic heating / cooling term given by:

$$H_a = T \alpha \frac{DP}{Dt},$$

where  $\alpha$  is the thermal expansion coefficient and  $DP/Dt$  represents the substantive time derivative computed from Lagrangian markers. Finally  $H_r$  is the radioactive heating.

Viscous constitutive relationships between stress and strain-rate are employed here (see [Gerya, 2010] for more complex visco-elasto-plastic rheology implementation) with  $\eta(T, P, \dot{\epsilon}, c)$  representing the effective viscosity, which depends on temperature, pressure, strain-rate and composition:

$$\sigma_{ij} = 2\eta(T, P, \dot{\epsilon}, c) \dot{\epsilon}_{ij}.$$

Viscosity  $\eta_{creep}(T, P, \dot{\epsilon})$  depends on temperature, pressure and strain rate defined in terms of deformation invariants [Ranalli, 1995] as:

$$\eta_{creep}(T, P, \dot{\epsilon}) = (\dot{\epsilon}_{II})^{(1-n)/n} (A)^{-1/n} \exp\left(\frac{E_a + V_a P}{nRT}\right),$$

where  $\dot{\epsilon}_{II} = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}$  is the second invariant of the strain rate tensor and  $A$ ,  $E_a$  and  $n$  are the pre exponential parameter, the activation energy and the power law coefficient, respectively.  $R$  is the gas constant and  $V_a$  is the activation volume. For silicates the ductile rheology is combined with a brittle rheology to yield an effective viscoplastic rheology. For this purpose the Mohr-Coulomb [Ranalli, 1995] and Peierls [Kameyama et al., 1999] yield criteria are simultaneously implemented by limiting the creep viscosity as follows:

$$\eta_{creep}(P, \dot{\epsilon}) \leq \frac{\sin(\varphi)P + \chi}{2\dot{\epsilon}_{II}}$$

and

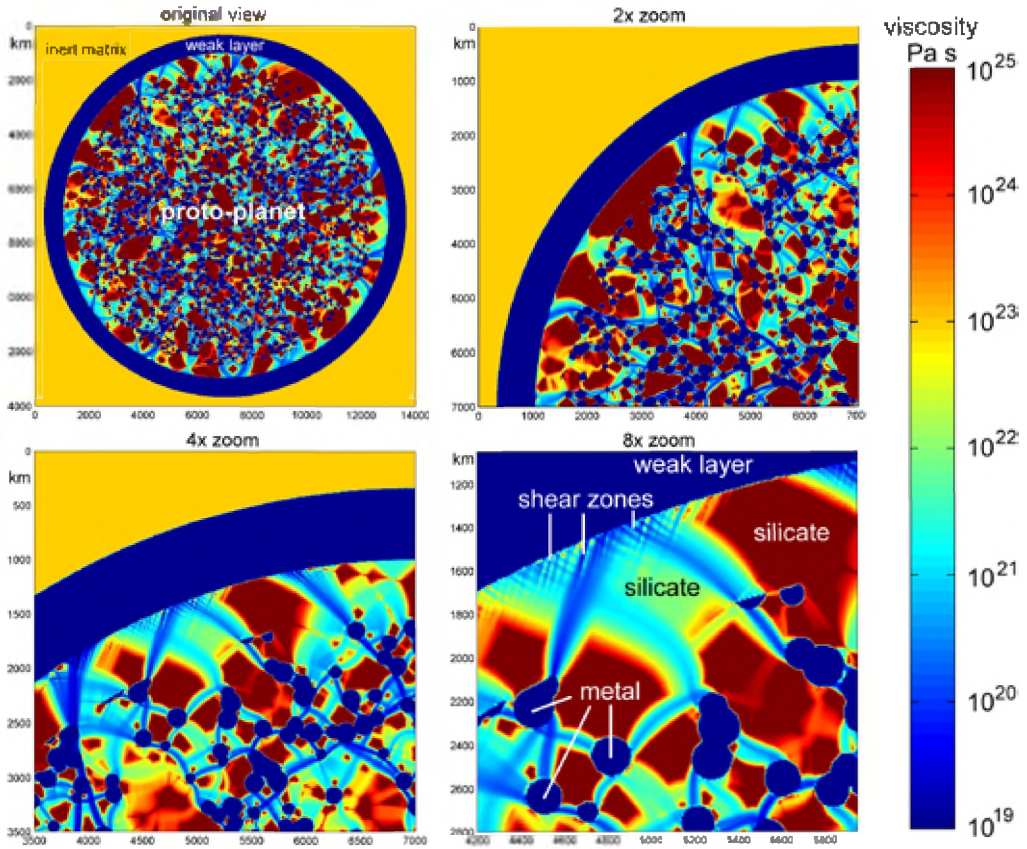
$$\eta_{creep}(\dot{\epsilon}) \leq \frac{\sigma_p}{2\dot{\epsilon}_{II}},$$

where  $\chi$  is the strength at  $P = 0$  Pa,  $\varphi$  is the effective angle of internal friction and  $\sigma_p$  is the Peierls stress limit. Note that we use a simplified Peierls stress  $\sigma_p$ , which is assumed to be independent of temperature and pressure. Plasticity is thus given here by the combination of Mohr-Coulomb (pressure-dependent part) and von Mises (Peierls part) criteria from which the weakest stress limit is chosen locally.

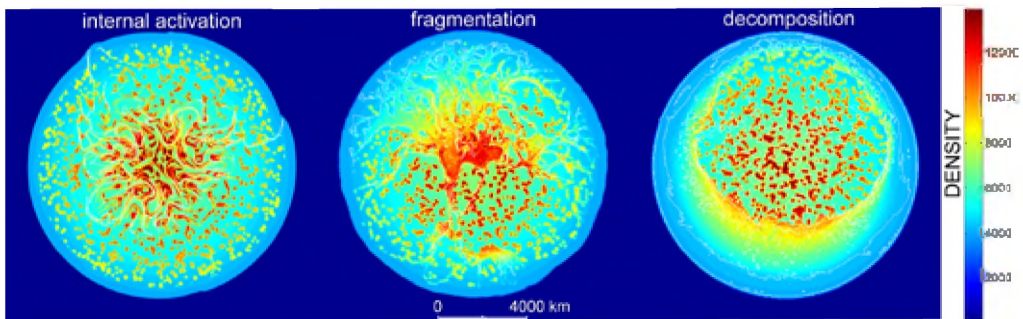
### NUMERICAL ALGORITHM

Discretization and numerical solution of governing equations is based on conservative finite differences and marker-in-cell techniques that are described in details by Gerya (2010) including MatLab program examples for planetary applications. The respective algorithm for a numerical, thermo-mechanical 2D code is as follows:

1. Calculating the scalar physical properties ( $\eta$ ,  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $c_p$ ,  $k$ , etc.) for each marker and interpolating these properties, as well as advected temperature from the markers to Eulerian nodes of a staggered finite-difference grid. Applying boundary conditions for the nodal temperatures interpolated from markers.
2. Solving the 2D Poisson equation with a direct method. Obtaining local values for gravity vector components by numerical differentiation.
3. Solving the 2D momentum and continuity equations with a pressure-velocity formulation on a staggered grid with locally defined gravity vector components by composing and inverting the global matrix with a direct method.
4. Defining an optimal displacement time step  $\Delta t_m$  for markers (typically limiting maximal displacement to 0.01...1.0 of minimal grid step) based on the velocity field computed in Step 3.
5. Calculating the shear- and adiabatic heating terms  $H_s$  and  $H_a$  at the Eulerian nodes.
6. Defining an optimal time step  $\Delta t$  for the temperature equation. The smallest time step is taken based on three time step limiters: given absolute time step limit; given optimal marker displacement time step limit (see Step 4); given absolute nodal temperature change limit (typically 1...20 K).
7. Solving the temperature equation in a Lagrangian formulation, with implicit time stepping and a direct method.
8. Interpolating the calculated nodal temperature changes from the Eulerian nodes to the markers and calculating new marker temperatures taking into account physical diffusion on sub-grid (marker) level.
9. Using a fourth-order explicit Runge – Kutta scheme in space to advect all markers throughout the mesh according to the globally calculated velocity field (see Step 3). Returning to Step 1 to perform the next timestep.



**Fig. 1.** High-resolution multiple-scale visualization of visco-plastic deformation for the initial stages of core formation processes in a cold metal-silicate proto-planet [Gollabek et al., 2009]. Model resolution is  $2001 \times 2001$  nodal points with 16 million markers. I2ELVIS code [Gerya, Yuen, 2007] is used in a combination with Pardiso direct solver [Schenk, Gärtner, 2004, 2006]



**Fig. 2.** Three regimes of metallic core formation: internal activation, fragmentation and decomposition [Gollabek et al., 2009]. Initial setup for these experiments is similar to Fig. 1

## MODELLING EXAMPLES

Described numerical approach has been used in several studies concerning planetary deformations and investigating (i) dynamics of RT instability due to a metallic layer formation [Gerya, Yuen, 2007; Lin et al., 2009] and rheological controls of terrestrial core formation [Golabek et al., 2009; Gerya, 2010]. Lin J-R. et al. (2009) also tested accuracy of numerical solutions and demonstrated absence of solution sensitivity to the direction inside the Cartesian grid. Figure 1 shows initial stage of the core formation in a relatively cold planetary body composed of silicate matrix and randomly distributed iron ponds. Initial deformation is strongly localized due to dominating brittle/plastic deformation of silicate. The network of shear zones penetrate through the entire planet with displacement been accommodated by movement and rotation of individual blocks. Distribution of the effective viscosity is therefore highly heterogeneous that impose strong challenge to numerical treatment that is satisfied with the use of stress-conservative finite difference schemes and a highly accurate direct solver for global matrix inversion. The code uses the Pardiso solver [Schenk, Gärtner, 2004, 2006; <http://www.pardiso-project.org/>], which drastically reduces calculation time and enables to perform high resolution (Fig. 1) calculations, encompassing a whole accreting planetary body. Long-term core formation dynamics strongly depends on planetary temperature, size and rheology of silicate and at least four major geometrical modes are delineated [Golabek et al., 2009]: collective diapirism, internal activation, fragmentation and decomposition (Fig. 2). Similar modelling approach can also be used in 3D and extended to planetary accretion associated with inertia and impacts [Gerya, Yuen, 2007; Gerya, 2010].

## Conclusions

Simple and efficient 2D numerical methodology has been developed based on finite differences and marker-in-cell techniques for modelling iron core formation processes in a planetary body based on a staggered Cartesian grid. This methodology allows one to implement complex rheologies with large viscosity contrasts and to handle properly a free surface and a self-gravitation.

## References

- Chambers J. E. (2004) Planetary Accretion in the Inner Solar System, Earth Planet // Earth and Planetary Science Letters. 2004. V. 223. P. 241–252.
- Dahl T. W. (2005) Turbulent Mixing During Planet Accretion and Core Formation: Interpretation of the  $Hf/W$  chronometer and implications for the age of the Moon. 2005. M. S. thesis. University of Copenhagen. 127 p.
- Elsasser W. M. (1963) Early History of the Earth // Earth Science and Meteoritics / Eds. J. Geiss, E. Goldberg. North-Holland, Amsterdam. 1963. P. 1–30.
- Evonuk M., Glatzmaier G. A. (2006) A 2D Study of the Effects of the Size of a Solid Core on the Equatorial Flow in Giant Planets // Icarus. 2006. V. 181. P. 458–464.
- Gerya T. V. (2010) Introduction to Numerical Geodynamic Modelling. Cambridge University Press, 2010. 345 p.

- Gerya T.V., Yuen D.A.* (2007) Robust Characteristics Method for Modeling Multiphase Visco-Elasto-Plastic Thermo-Mechanical Problems // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 2007. V. 163. P. 83–105.
- Golabek G.J., Schmeling H., Tackley P.J.* (2008) Earth's Core Formation Aided by Flow Channeling Instabilities Induced by Iron Diapirs // *Earth and Planetary Science Letters*. 2008. V. 271. P. 24–33.
- Golabek G.J., Gerya T.V., Kaus B.J.P., Ziethe R., Tackley P.J.* (2009) Rheological Controls on the Terrestrial Core Formation Mechanism // *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*. 2009. V. 10. Article N. Q11007.
- Honda R., Mizutani H., Yamamoto T.* (1993) Numerical Simulation of Earth's Core Formation // *J. Geophysical Research*. 1993. V. 98. P. 2075–2089.
- Ida S., Nakagawa Y., Nakazawa K.* (1987) The Earth's Core Formation due to the Rayleigh-Taylor Instability // *Icarus*. 1987. V. 69. P. 239–248.
- Kameyama M., Yuen D.A., Karato S.-I.* (1999) Thermal-Mechanical Effects of Low-Temperature Plasticity (the Peierls Mechanism) on the Deformation of a Viscoelastic Shear Zone // *Earth and Planetary Science Letters*. 1999. V. 168. P. 159–172.
- Lin J.-R., Gerya T.V., Tackley P., Yuen D.* (2009) Numerical Modelling of Protocore Destabilization during Planetary Accretion: Methodology and Results // *Icarus*. 2009. V. 204. P. 732–748.
- Ranalli G.* (1995) *Rheology of the Earth*. 2<sup>nd</sup> ed. L., U. K.: Chapman & Hall, 1995. 436 p.
- Ricard Y., Šrámek O., Dubuffet F.* (2009) Runaway Core-Mantle Segregation of Terrestrial Planets // *Earth and Planetary Science Letters*. 2009. V. 284. P. 144–150.
- Rubie D.C., Melosh H.J., Reid J.E., Liebske C., Righter K.* (2003) Mechanisms of Metal-Silicate Equilibration in the Terrestrial Magma Ocean // *Earth and Planetary Science Letters*. 2003. V. 205. P. 239–255.
- Samuel H., Tackley P.J., Evonuk M.* (2010) Heat Partitioning in Terrestrial Planets during Core Formation by Negative Diapirism // *Earth and Planetary Science Letters*. 2010. V. 290. P. 13–19.
- Schenk O., Gärtner K.* (2004) Solving Unsymmetric Sparse Systems of Linear Equations with PARDISO // *J. Future Generation Computer Systems*. 2004. V. 20. P. 475–487.
- Schenk O., Gärtner K.* (2006) On Fast Factorization Pivoting Methods for Symmetric Indefinite Systems // *Electronic Transactions on Numerical Analysis*. 2006. V. 23. P. 158–179.
- Stevenson D.J.* (1981) Models of the Earth's Core // *Science*. 1981. V. 214. P. 611–619.
- Stevenson D.J.* (1990) Fluid Dynamics of Core Formation // *Origin of the Earth* / Eds. H. E. Newsom, J. H. Jones. N. Y., USA: Oxford University Press, 1990. P. 231–249.
- Stevenson D.J.* (2008) A Planetary Perspective on the Deep Earth // *Nature*. 2008. V. 451. P. 261–265.
- Taylor S.R., Norman M.D.* (1990) Accretion of Differentiated Planetesimals to the Earth // *Origin of the Earth* / Eds. H. E. Newsom, J. H. Jones, N. Y.: Oxford Univ. Press, 1990. P. 29–43.
- Wetherill G.W.* (1990) Formation of the Earth // *Annu. Rev. Earth Planet. Sciences*. 1990. V. 18. P. 205–256.
- Wood B.J., Wade J., Kilburn M.R.* (2008) Core Formation and the Oxidation State of the Earth: Additional Constraints from Nb, V and Cr Partitioning // *Geochimica et Cosmochimica Acta*. 2008. V. 72. P. 1415–1426.
- Ziethe R., Spohn T.* (2007) Two-Dimensional Stokes Flow Around a Heated Cylinder: A Possible Application for Diapirs in the Mantle // *J. Geophysical Research*. 2007. V. 112. Article N. B09403.

## АВТОГЕНЕРАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ФОНТАНОМ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

О. А. Дружинин, Ю. И. Троицкая

*Учреждение Российской академии наук  
Институт прикладной физики РАН (ИПФ)*

Проводится прямое численное моделирование и теоретический анализ динамики фонтана, формирующегося при проникновении вертикальной ламинарной струи с осесимметричным гауссовым профилем скорости сквозь скачок плотности (пикноклин). Показано, что при числе Фруда ( $Fr$ ), превышающем критическое значение, фонтан совершает автоколебания, сопровождающиеся генерацией внутренних волн в пикноклине. При достаточно малых  $Fr$  фонтан делает круговые движения в горизонтальной плоскости в окрестности центра струи, сохраняя почти неизменную форму. При этом излучаются внутренние волны, имеющие вид раскручивающихся спиралей. При достаточно больших  $Fr$  доминирует другая мода, когда верхушка фонтана хаотически «блуждает» в окрестности центра струи и периодически обрушивается, генерируя пакеты внутренних волн, распространяющихся к периферии области счета. В обоих случаях частота внутренних волн совпадает с частотой колебаний верхушки фонтана и монотонно уменьшается с ростом  $Fr$ . Зависимость амплитуды колебаний верхушки фонтана от  $Fr$  в численном моделировании хорошо согласуется с предсказанием теоретической модели конкуренции взаимодействующих мод в режиме мягкого самовозбуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 09-05-00779, 09-05-97012).

*Ключевые слова:* численное моделирование, пикноклин, вертикальная струя, фонтан, автоколебания, внутренние волны.

### Введение

Фонтаном называют струю тяжелой жидкости, имеющую начальный импульс, направленный вверх, и распространяющуюся в легкой жидкости. Струя тормозится под действием силы плавучести (силы тяжести) и достигает максимальной высоты (точки поворота), а затем жидкость движется вниз от точки поворота, формируя противоток, и радиально растекается на уровне своей плавучести. Динамика фонтанов привлекает интерес благодаря многочисленным практическим приложениям в гидродинамике и геофизике, это течение изучалось в лабораторных физических экспериментах и в численном моделировании [Turner, 1966; Kaye, Hunt, 2006; Williamson et al., 2008; Lin, Armfield, 2000]. Результаты этих исследований показывают, что динамика струи определяется значениями чисел Фруда и Рейнольдса ( $Fr = U/(g'D)^{1/2}$  и  $Re = UD/\nu$ ), где  $U$  и  $D$  — осевая скорость и диаметр струи,  $g' = g\Delta\rho/\rho$  — скачок плавучести,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости. При малых  $Fr$  и  $Re$  фонтан представляет собой стационарное

---

Дружинин Олег Александрович — ведущий научный сотрудник, доктор физико-математических наук, e-mail: druzhinin@hydro.appl.sci-nnov.ru.

Троицкая Юлия Игоревна — заведующая отделом, доктор физико-математических наук, e-mail: yuliya@hydro.appl.sci-nnov.ru.



течение, которое с ростом этих параметров теряет устойчивость. В зависимости от  $Fg$  и  $Re$  возможно самовозбуждение различных неустойчивых мод колебаний фонтана. Так, в лабораторных экспериментах [Williamson et al., 2008] при увеличении скорости истечения фонтана вначале наблюдался режим, при котором его верхушка двигалась по окружности в горизонтальной плоскости в окрестности центральной оси струи. При дальнейшем увеличении чисел Рейнольдса и Фруда этот режим сменялся периодическим обрушением верхушки фонтана.

Течение, подобное фонтану, может формироваться в жидкости со стратификацией, близкой к двухслойной, когда легкая жидкость вносится в нижний слой жидкости на некотором расстоянии от скачка плотности (пикноклина). Тогда даже при отсутствии начального импульса, под действием силы плавучести, жидкость ускоряется и приобретает положительный вертикальный импульс. В случае турбулентного фонтана вовлечение окружающей жидкости приводит к тому, что при подходе к пикноклину всплывающая жидкость имеет плотность, близкую к плотности жидкости в нижнем слое. Таким образом, формируется струя нейтральной (по отношению к жидкости в нижнем слое) плавучести, имеющая ненулевой вертикальный импульс. Если ее скорость достаточно велика, то струя тяжелой жидкости проникает в область выше пикноклина, формируя фонтан. Подобные фонтаны могут возникать, например, при всплывании струй сбросовых вод в океане в окрестности подводных коллекторов при наличии сезонного термоклина [Koh, Brooks, 1975; Бондур и др., 2006]. Другим важным примером таких фонтанов являются струи, состоящие из газовых пузырьков и выходящие из разломов земной коры на дне океана. Можно ожидать существования подобного явления вблизи подводных источников пресной воды.

Можно предположить, что описанные выше колебания фонтанов будут излучать внутренние волны, если их частоты ниже частоты плавучести. В свою очередь, можно ожидать проявлений этих внутренних волн на поверхности воды, что делает возможной дистанционную диагностику подводных плавучих струй. Экспериментальные указания на возможность поверхностных проявлений внутренних волн, связанных с подводным коллектором сточных вод, приводятся в [Keeler et al., 2005]. В работе Троицкой Ю. И. и др. (2008) внутренние волны, вызванные взаимодействием плавучей струи с пикноклином, обнаружены в лабораторном эксперименте, в котором выполнялось условие масштабного моделирования по числу  $Fg$  для типичной прибрежной сбросовой системы. Результаты указывают на то, что при воздействии всплывающих струй возможна генерация внутренних волн в пикноклине. Заметим, что аналогичная ситуация может возникнуть в случае выхода затопленного фонтана на свободную поверхность. Например, лабораторные эксперименты Карликова В. П. и Трушиной О. В. (1998, 2009) показывают, что возможна генерация поверхностных волн плоским затопленным фонтаном.

Целью настоящей работы является прямое численное моделирование и теоретический анализ динамики фонтана, образующегося при проникновении вертикальной струи сквозь пикноклин в стратифицированной жидкости.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА

Рассматривается жидкость с устойчивой стратификацией плотности со скачком плотности (пикноклином), расположенным на некотором горизонте  $Z = Z_0$ . Профиль плотности задается в виде

$$R_0(z) = \rho_0 \left[ 1 + 0,5 \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \left[ 1 - \tanh \frac{2(Z - Z_0)}{D_0} \right] \right].$$

На нижней границе, при  $Z = 0$ , вертикально вверх втекает струя с профилем скорости

$$u(x, y) = U_0 \exp \left[ -4 \frac{(X^2 + Y^2)}{D_0^2} \right]. \quad (1.1)$$

Под действием сил плавучести струя тормозится в окрестности пикноклина, прогибает его и проникает в верхний слой менее тяжелой жидкости на некоторую конечную высоту (до точки поворота). Далее, подобно течению в обычном фонтане, жидкость в струе движется вниз от точки поворота, формируя противоток, и затем радиально растекается в плоскости на горизонте нейтральной плавучести. Общая схема численного эксперимента представлена на рис. 1.

Безразмерные переменные определяются как

$$(x, y, z) = \frac{(X, Y, Z)}{D_0}, \quad U_i = \frac{u_i}{U_0}, \quad \rho = \frac{(R - R_0(z))}{\Delta\rho},$$

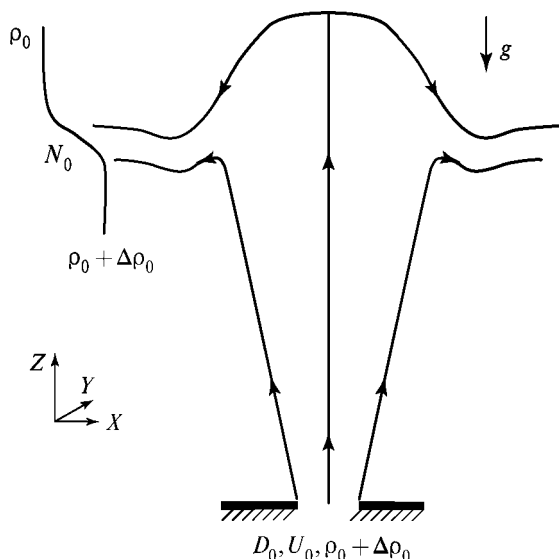


Рис. 1

где  $u_i$  — компоненты вектора скорости ( $i = x, y, z$ );  $R$  — плотность жидкости. Уравнения Навье — Стокса в приближении Буссинеска и условие несжимаемости жидкости в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \frac{\delta_{iz}}{\text{Fr}^2} \rho, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0.$$

Уравнение для плотности жидкости записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + U_z \frac{d\rho_{ref}}{dz} = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j^2}. \quad (1.3)$$

В уравнении (1.1)  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера, и исходный профиль безразмерной плотности в (1.3) имеет вид

$$\rho_{ref}(z) = 1 + 0,5[1 - \tanh 2(z - z_0)], \quad (1.4)$$

где  $z_0 = Z_0/D_0$  — горизонт залегания пикноклина. В уравнении (1.3) пренебрегается изменением  $\rho_{ref}(z)$ , обусловленным молекулярной диффузией. Числа Рейнольдса (Re) и Фруда (Fr) в (1.2) определяются как

$$\text{Re} = \frac{U_0 D_0}{\nu}, \quad \text{Fr} = \frac{U_0}{N_0 D_0},$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости;  $N_0 = \left( -\frac{g}{\rho_0} \frac{dR_0}{dZ} \right)^{1/2} = \left( \frac{g}{\rho_0} \frac{\Delta \rho}{D_0} \right)^{1/2}$  — размерная частота плавучести в центре пикноклина. Число Прандтля (Pr) далее полагается равным единице (его выбор связан с ограниченным разрешением сетки). Из (1.2)–(1.4) следует, что безразмерная частота плавучести в центре пикноклина равна  $N_m = 1/\text{Fr}$ .

Уравнения (1.2), (1.3) решаются в прямоугольной области с размерами  $-15 \leq x \leq 15$ ,  $-15 \leq y \leq 15$  и  $0 \leq z \leq 30$ . На боковых вертикальных границах области счета, в плоскости  $(y, z)$  при  $x = \pm 15$ , и на верхней горизонтальной границе, в плоскости  $(x, y)$  при  $z = 30$ , ставятся условия (Неймана) нулевого сдвига для всех переменных. На нижней границе, в плоскости  $(x, y)$  при  $z = 0$ , для скорости ставится условие, соответствующее направленной вертикально вверх струе нейтральной плавучести (относительно окружающей жидкости) с гауссовым профилем (1.1), на который накладываются малые (с амплитудой 0,1 %) флуктуации в виде

$$U_i^b(x, y, t) = \exp\left[-4(x^2 + y^2)\right] \left( \delta_{iz} + U_{fi}(x, y, t) \right). \quad (1.5)$$

Поле флуктуаций  $U_{fi}$  задается в виде суммы независимых фурье-гармоник со случайными фазами и однородным, широким амплитудным пространствен-

но-временным спектром. Для плотности ставится граничное условие Неймана. Значение  $z_0$  в (1.4), определяющее горизонт залегания пикноклина, полагается достаточно большим (равным 20 в безразмерных единицах длины), таким что переходные процессы, связанные с установлением течения в струе, создаваемого граничным условием (1.5), не влияют на ее взаимодействие с пикноклином.

Уравнения (1.2), (1.3) дискретизируются с помощью метода конечных разностей второго порядка точности на однородной разнесенной («шахматной») сетке, состоящей из  $200 \times 200 \times 200$  узлов по координатам  $x$ ,  $y$  и  $z$ , соответственно [Дружинин, 2003; Белоцерковский, 1984; Флетчер, 1991]. Интегрирование осуществляется с использованием метода Адамса — Башфорфа [Флетчер, 1991] второго порядка точности с шагом по времени  $\Delta t = 0,015$ . Используется метод расщепления [Белоцерковский, 1984], и уравнение Пуассона для давления решается с помощью косинус-преобразования по координатам  $x$  и  $y$  (с использованием быстрого преобразования Фурье) и метода Гаусса по координате  $z$ .

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Численное моделирование проводилось для значений числа Фруда в интервале  $0 < Fr < 9$  для числа Рейнольдса  $Re = 400$  при одинаковых граничных условиях, обсуждаемых выше. В начальный момент времени поля скорости и плотности  $U(x, y, z)$  и  $\rho(x, y, z)$  полагались равными нулю. Затем адиабатически (пропорционально множителю  $(1 - \exp(-t))$ , где  $t$  — время) «включалось» граничное условие для скорости (1.5). Переходные процессы заканчивались, и статистически стационарное распределение полей скорости и плотности достигалось к моменту времени  $t \approx 120$ . С этого момента проводилось вычисление усредненных по времени полей и среднеквадратичных флуктуаций и накопление данных для вычисления временных спектров пульсаций. Вычисления осуществлялись на временном интервале, включающем не менее 5–6 периодов внутренних волн, генерируемых в пикноклине.

На рис. 2 (см. с. 20) представлены распределения средних вертикальной (а) и горизонтальной (б) компонент скорости,  $\langle U_z \rangle$  и  $\langle U_x \rangle$ , плотности  $\langle \rho \rangle$  (в) для числа Фруда  $Fr = 7$  и среднеквадратичных флуктуаций плотности  $\rho'$  в центральной плоскости ( $x, z$ ) для  $Fr = 7$  (г) и  $Fr = 4$  (д). Инкремент изолиний: а — 0,05; б — 0,01; в — 0,1; г, д — 0,04. Штриховые линии соответствуют отрицательным значениям. Из рисунка видно, что под действием стратификации струя тормозится в окрестности пикноклина, проникает в верхний слой жидкости на некоторую высоту  $Z_m$  до точки поворота. От точки поворота жидкость в струе движется вниз, образуя противоток относительно восходящего потока, и далее растекается в горизонтальной плоскости на уровне пикноклина  $z_0$ . Таким образом, в области  $z_0 < z < Z_m$  формируется фонтан.

Результаты вычислений показали, что при достаточно малых числах Фруда ( $Fr < 2$ ) течение стационарно и осесимметрично относительно вертикальной оси струи. При увеличении  $Fr$  стационарный режим теряет устойчивость, и

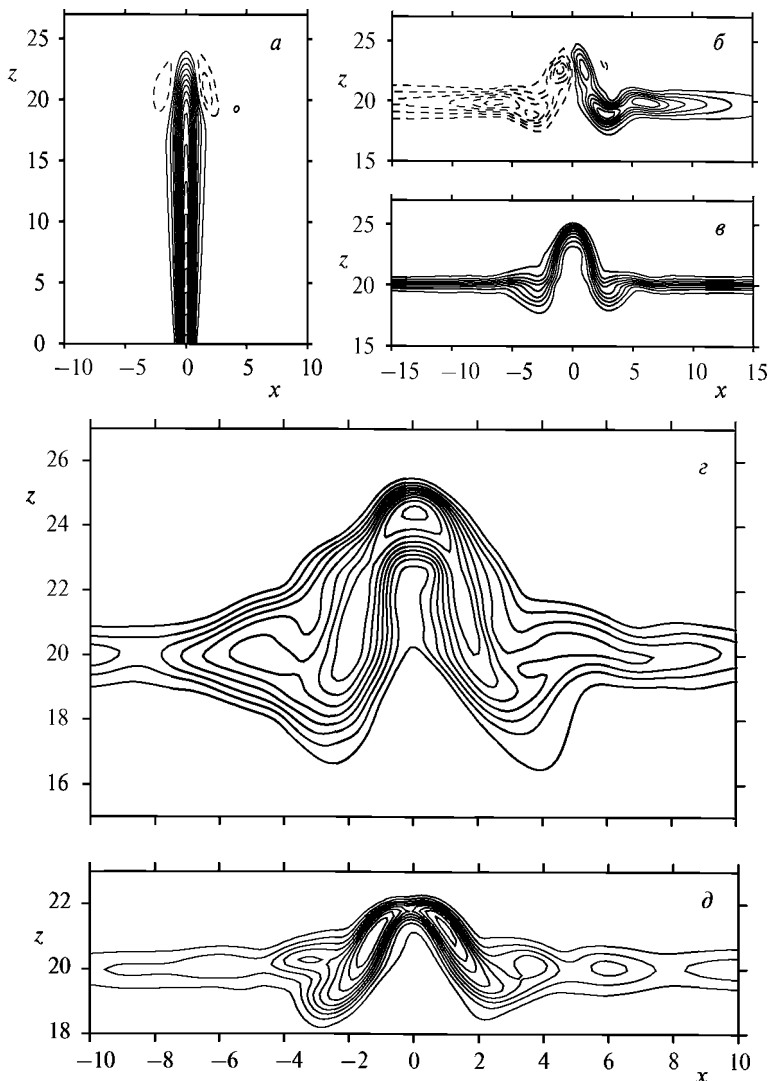


Рис. 2

фонтан начинает совершать автоколебания, которые в свою очередь генерируют внутренние волны в пикноклине. На рис. 2 автоколебания проявляются в наличии значительных флуктуаций плотности в области верхушки фонтана.

Важно отметить, что в случае достаточно больших чисел Фруда ( $Fr = 7$ , см. рис. 2г) флуктуации плотности максимальны в центре фонтана, в то время как при малых  $Fr$  максимумы  $\rho'$  расположены на флангах верхушки фонтана ( $Fr = 4$ , см. рис. 2д). Результаты, представленные на рис. 2, показывают, что можно различать два качественно разных режима динамики течения в фонтане в случае малых и достаточно больших чисел Фруда.

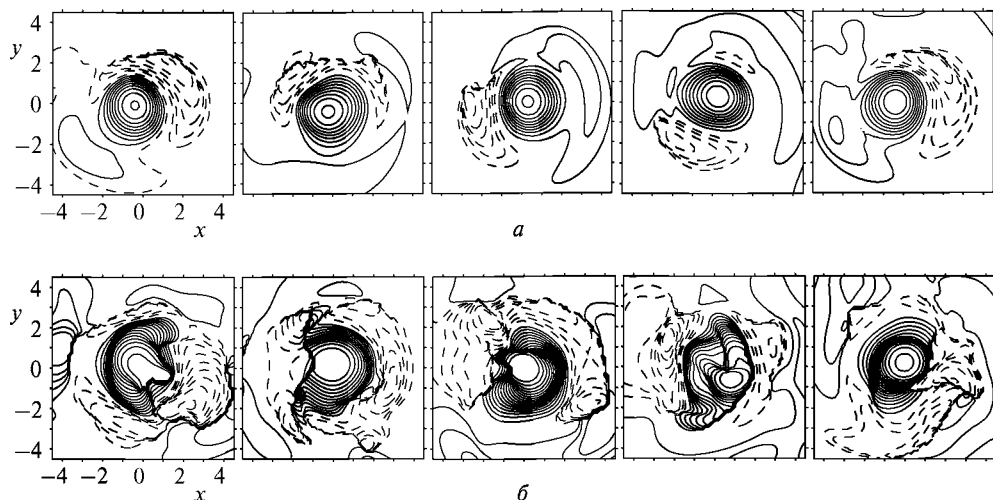


Рис. 3

На рис. 3. представлена изопикническая поверхность ( $Z_\rho(x, y) - z_0$ ) с  $\rho = 1,5$ , соответствующим центру невозмущенного пикноклина, в последовательные моменты времени для  $Fr = 4$  (а) ( $t = 342, 354, 366, 378, 390$ ) и  $Fr = 7$  (б) ( $t = 420, 444, 468, 492, 516$ ). Инкремент изолиний: а — 0,2; б — 0,25. Видно, что в случае малых чисел Фруда ( $Fr = 4$ ) фонтан совершает круговые движения в окрестности центра струи ( $x = 0, y = 0$ ), сохраняя свою форму. В случае достаточно больших чисел Фруда ( $Fr = 7$ ) фонтан «блуждает» в окрестности центра струи и периодически обрушается.

Различие двух режимов проявляется также в распределениях завихренности ( $\omega_y = \partial_z U_x - \partial_x U_z$ ) в центральной вертикальной плоскости ( $x, z$ ) и пульсаций плотности  $\rho(x, y)$  на горизонте пикноклина  $z = z_0$ .

На рис. 4 и 5 (см. с. 22) показаны распределения компоненты завихренности  $\omega_y$  в центральной плоскости ( $x, z$ ) (а, в) и пульсаций плотности  $\rho$  в горизонтальной плоскости ( $x, y$ ) (б, г) при  $z = 20$  для  $Fr = 4$  (при  $t = 342$  (а, б), 366 (в, г)) и  $Fr = 7$  ( $t = 420$  (а, б), 468 (в, г)). Инкремент изолиний: а, в — 0,1; б, г — 0,05. Штриховые линии соответствуют отрицательным значениям. Круговое движение фонтана в случае  $Fr = 4$  проявляется в его периодическом смещении в плоскости ( $x, z$ ) вдоль горизонтальной оси относительно центра  $x = 0$ . Смещения фонтана приводят к генерации внутренних волн, распространяющихся в пикноклине и имеющих форму раскручивающихся от центра спиралей (см. рис. 4).

В случае  $Fr = 7$  (см. рис. 5) обрушения фонтана генерируют пакеты внутренних волн в пикноклине с довольно сложной (неупорядоченной) пространственной структурой, распространяющихся от центра к границам области счёта.

В численном моделировании рассчитывались пространственно-осредненные частотные спектры осцилляций изоповерхности плотности в области фонтана  $Z_{\rho = 1,5}$  и спектры внутренних волн.

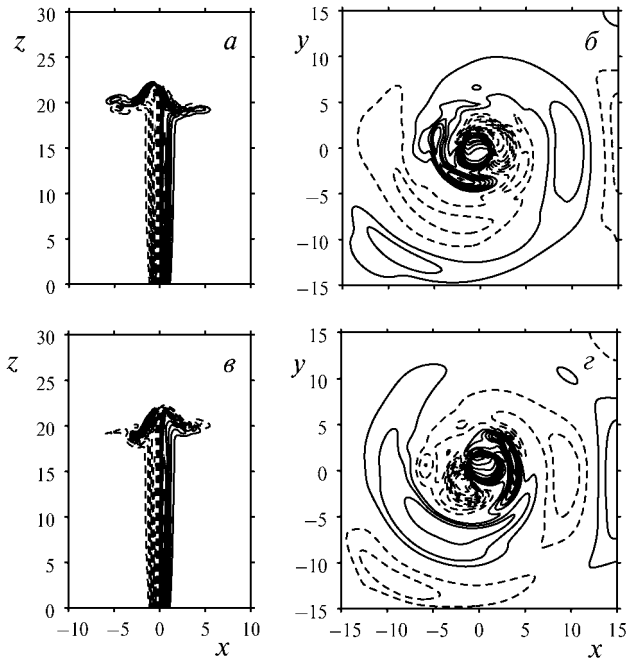


Рис. 4

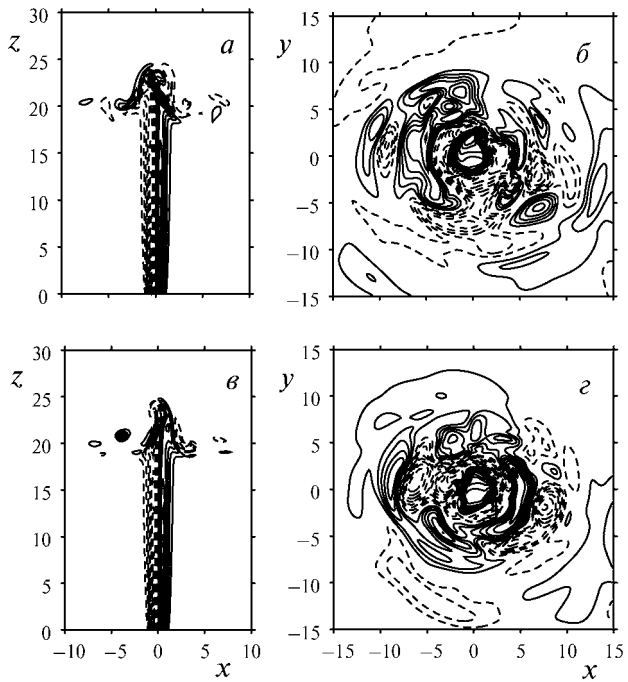


Рис. 5

Спектры  $Z_{\rho=1,5}$  осреднялись по 10 точкам, эквидистантно расположенным на горизонтальной оси в интервале  $-2 < x < 2$  при  $y = 0$ . Спектры внутренних волн осреднялись по 4 точкам с координатами  $(x = \pm 10, y = 0)$  и  $(x = 0, y = \pm 10)$  на горизонте пикноклина  $z = z_0$ .

На рис. 6 представлены спектры, полученные для  $Fr = 4$  (а, в) и  $Fr = 7$  (б, г). Частота плавучести  $N = 1/Fr$ . Результаты на рис. 6 показывают, что в обоих случаях основной пик в спектре внутренних волн совпадает по частоте с пиком в спектре осциллирующей поверхности плотности  $Z_{\rho=1,5}$  ( $\omega/N \approx 0,5$  при  $Fr = 4$  и  $\omega/N \approx 0,4$  при  $Fr = 7$ ).

Для того чтобы выяснить, каким образом основные характеристики течения, такие как высота фонтана, дисперсия и частота осциллирующей верхушки фонтана, и амплитуда внутренних волн, зависят от числа Фруда, вычисления проводились для  $2,5 \leq Fr \leq 9$ . На рис. 7 (см. с. 24) показаны зависимости от числа Фруда: а — высоты фонтана  $z_m$ ; б — дисперсии смещения изопоикны  $Z_{\rho=1,5}$  в области верхушки фонтана  $\Delta_Z$ ; в — частоты  $\Omega_Z$  основного спектрального пика колебаний изопоикны  $Z_{\rho=1,5}$ ; г — амплитуды внутренних волн  $\rho_{IW}$ .

Высота фонтана  $Z_m$  определялась как максимальное вертикальное отклонение изопоикны  $Z_{\rho=1,5}$  ( $x, y = 0$ ) относительно исходного уровня пикноклина  $z_0$ , усредненное по времени. Видно, что высота фонтана растёт с увеличением числа Фруда как  $Z_m \sim Fr^{3/2}$ .

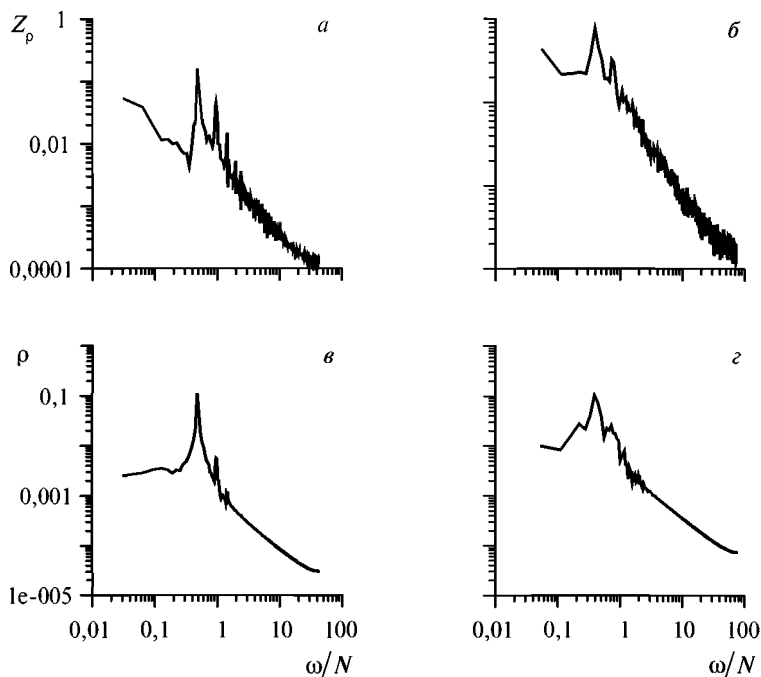


Рис. 6



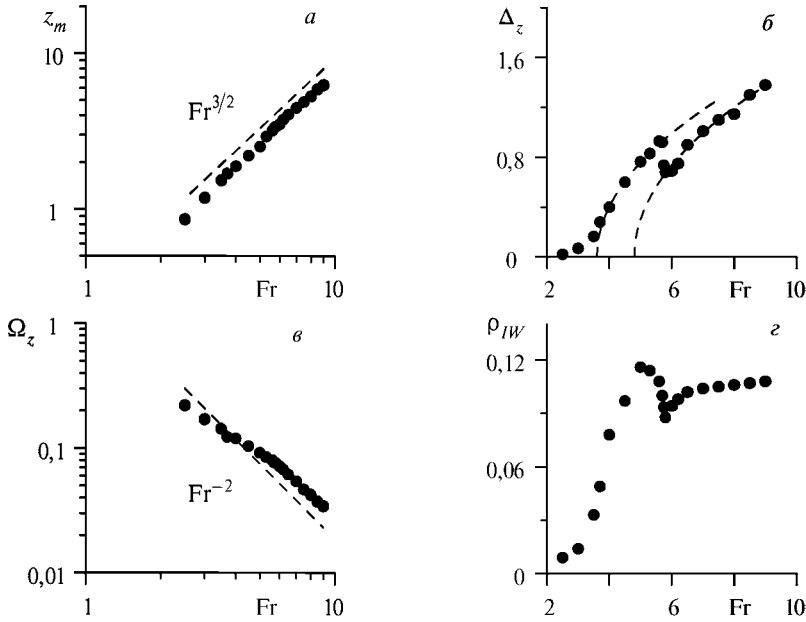


Рис. 7

Отметим, что безразмерная высота турбулентного фонтана, согласно [Turner, 1966], определяется, с одной стороны, потоками импульса и плавучести в виде

$$Z_m^t \sim \left( U^2 D^2 \right)^\alpha \left( \frac{UD^2 \Delta \rho}{\rho} \right)^\beta D^{-1}, \quad \alpha = \frac{3}{4}, \quad \beta = -\frac{1}{2}. \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует  $Z_m^t \sim Fr$ . С другой стороны, высота ламинарного фонтана в невязком случае определяется скоростью и скачком плавучести в виде

$$Z_m^l \sim \frac{U^2}{gD \Delta \rho / \rho} \sim Fr^2. \quad (2.2)$$

Наблюдаемую в рассматриваемом случае асимптотику  $Z_m \sim Fr^{3/2}$ , по-видимому, можно отнести к переходному режиму, где течение в фонтане нестационарно и в то же время не является турбулентным [Kaye, Hunt, 2006].

Дисперсия осцилляций верхушки фонтана  $\Delta_z$  определялась по осцилляциям изопикны  $Z_{\rho=1,5}$  ( $x, y = 0$ ) и осреднялась по 10 точкам. Дисперсия  $\Delta_z$  и амплитуда внутренних волн  $\rho_{IW}$  растут с увеличением числа Фруда при  $Fr < 5$ , т. е. в режиме круговых колебаний фонтана (см. рис. 7). Далее  $\Delta_z$  и  $\rho_{IW}$  уменьшаются скачком в переходной области  $5 < Fr < 6$  и снова растут при  $Fr > 6$ .

Поведение дисперсии  $\Delta_z$  довольно неплохо аппроксимируется стационарным решением уравнения Ландау [Ландау, Лившиц, 1986], описывающего рост амплитуды возмущения в режиме мягкого самовозбуждения при малой надкритичности в виде

$$\Delta_z = \left( \frac{2\gamma}{\alpha} (\text{Fr} - \text{Fr}_c) \right)^{1/2}, \quad (2.3)$$

где  $\frac{2\gamma}{\alpha} = 0,4$  и  $\text{Fr}_c = 3,6$  при  $\text{Fr} < 5$ ;  $\frac{2\gamma}{\alpha} = 0,45$  и  $\text{Fr}_c = 4,8$  при  $\text{Fr} > 6$  (штриховые линии на рис. 7). Результаты указывают на то, что стационарное осесимметричное течение теряет устойчивость благодаря бифуркации Андронова–Хопфа, приводящей к развитию двухмодового нестационарного решения. В области  $3 < \text{Fr} < 5$  доминирует мода, отвечающая круговым движениям верхушки фонтана, в то время как при  $\text{Fr} > 6$  доминирующей является мода, соответствующая режиму обрушений. Ниже обсуждается теоретическая модель взаимодействия двух мод в режиме малой надкритичности, предсказания которой сравниваются с численными результатами.

На рис. 7 видно, что частота, отвечающая главному пику в спектре колебаний интерфейса  $Z_\rho = 1,5$  в области верхушки фонтана (совпадающая также с частотой внутренних волн), монотонно уменьшается с ростом числа Фруда пропорционально  $\text{Fr}^{-2}$ . Эта асимптотика получается, если предположить что частота осцилляций верхушки фонтана определяется масштабом скорости  $U$  и скачком плавучести  $g\Delta\rho/\rho$ . Тогда для безразмерной частоты осцилляций находим

$$\Omega_z \sim \frac{Dg\Delta\rho}{\rho U^2} \sim \text{Fr}^{-2}. \quad (2.4)$$

Такая же асимптотика для частоты осцилляций верхушки фонтана в однородной жидкости наблюдается в эксперименте, описанном в работе [Williamson et al., 2008].

### 3. КОНКУРЕНЦИЯ МОД КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ФОНТАНА

Для теоретического анализа взаимодействия мод колебаний верхушки фонтана воспользуемся подходом, развитым Ландау для описания развития возмущений в гидродинамических системах с малой надкритичностью [Landau, Лившиц, 1986], а также феноменологической моделью, предложенной М. И. Рабиновичем и Д. И. Трубецковым (1984) для описания автоколебаний в многочастотных системах.

Рассмотрим поле скорости течения в фонтане в виде суммы стационарного осесимметричного решения  $U_0(x, y, z)$  и малых возмущений, соответствующих двум различным модам,:

$$U_i(x, y, z, t) = A_0 U_{0i}(x, y, z) + \text{Re} \left\{ A_1(t) U_{1i}(x, y, z) + A_2(t) U_{2i}(x, y, z) \right\}, \quad (3.1)$$

где  $i = x, y, z$ ,  $\text{Re}\{\dots\}$  обозначает вещественную часть выражения в скобках, и

$$A_{1,2}(t) \equiv A_{1,2}(\beta_{1,2} t) \exp(-i \omega_{1,2} t). \quad (3.2)$$

Здесь  $A_{1,2}$  и  $\omega_{1,2}$  — комплексные амплитуды и собственные (вещественные) частоты мод. Инкремент каждой моды линейно зависит от управляющего

параметра, числа Фруда  $\beta_{1,2} = \gamma_{1,2}(Fr - Fr_{1,2})$ , где  $\gamma_{1,2}$  — положительные константы и  $Fr_{1,2}$  — пороговые значения числа Фруда генерации 1-й и 2-й мод соответственно. В согласии с результатами численного моделирования, изложенными в п. 2, будем рассматривать  $Fr_1 < Fr_2$ .

Система уравнений для амплитуд мод может быть выведена подстановкой разложения (3.1) в исходные уравнения движения, линеаризацией по малым возмущениям и дальнейшим усреднением уравнения для амплитуд по периодам частот  $\omega_{1,2}$ . Будем считать, что в случае малой надкритичности выполняются условия  $\omega_{1,2} \gg \beta_{1,2}$  и  $|\omega_1 - \omega_2| \gg \beta_{1,2}$ . Тогда с учетом нелинейного взаимодействия мод система укороченных уравнений для амплитуд принимает вид

$$\frac{d|A_i|^2}{dt} = 2\gamma_i(Fr - Fr_i)|A_i|^2 - \alpha_i|A_i|^4 - r_i|A_1|^2|A_2|^2, \quad i = 1, 2. \quad (3.3)$$

Второе и третье слагаемые в правой части (3.3) — нелинейные поправки, вызванные самовоздействием мод и их перекрестным взаимодействием. Предположим, что коэффициенты  $\alpha_i$  и  $r_i$  нелинейного взаимодействия и самовоздействия мод в системе (3.3) положительны (что типично для неконсервативного взаимодействия мод, имеющих один источник энергии).

Рассмотрим случай  $Fr > Fr_1$ , когда можно ввести новые неотрицательные неизвестные функции  $m_1$  и  $m_2$  и «медленное» время  $\tau$ , определяемые следующими выражениями:

$$|A_i|^2 = \frac{2\gamma_1}{\alpha_i}(Fr - Fr_1)m_i, \quad i = 1, 2, \quad \tau = 2\gamma_1(Fr - Fr_1)t. \quad (3.4)$$

Тогда из системы (3.3) с учетом (3.4) получим

$$\frac{dm_i}{d\tau} = \mu_i m_i - m_i^2 - R_i m_1 m_2, \quad i = 1, 2, \quad (3.5)$$

$$R_{1,2} = \frac{r_{1,2}}{\alpha_{2,1}}, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 \equiv \mu = \frac{\gamma_2(Fr - Fr_2)}{\gamma_1(Fr - Fr_1)}. \quad (3.6)$$

Здесь  $\mu$  — новый управляющий параметр задачи. Из (3.6) видно, что при  $Fr > Fr_1$  параметр  $\mu$  монотонно растет с увеличением  $Fr$ , так что  $-\infty < \mu \leq \gamma_2/\gamma_1$  при  $Fr_1 \leq Fr < \infty$ .

Легко показать, что система (3.5) имеет четыре состояния равновесия, и найти условия их устойчивости. Соответствующие решения имеют вид

$$(m_1, m_2) = (0, 0), \quad (m_1, m_2) = (1, 0), \quad (m_1, m_2) = (0, \mu), \quad (3.7)$$

$$(m_1, m_2) = \left( \frac{1 - \mu R_1}{1 - R_1 R_2}, \frac{\mu - R_2}{1 - R_1 R_2} \right). \quad (3.8)$$

Решение  $(0, 0)$  описывает стационарное течение в фонтане, неустойчивое при  $Fr > Fr_1$ . В случае  $R_1 R_2 < 1$ , или «слабой» связи мод, реализуются следующие режимы автоколебаний. При  $\mu < R_2$  устойчивым является состояние равновесия

$(1, 0)$ , т. е. возбуждается только 1-я мода. При  $R_2 < \mu < 1/R_1$  устойчиво состояние равновесия (3.8), т. е. наблюдается двухмодовый режим. При  $\mu > 1/R_1$  устойчиво состояние равновесия  $(0, \mu)$ , т. е. возбуждается только 2-я мода. Легко построить зависимости амплитуд мод  $|A_{1,2}|$  от числа Фруда, которое однозначно связано с  $\mu$  формулой (3.6) (рис. 8а, сплошная и штриховая линии для  $|A_1|$  и  $|A_2|$ ). Дисперсия колебаний определяется суммой квадратов амплитуд мод,  $\Delta_Z = (|A_1|^2 + |A_2|^2)^{1/2}$ , и в рассматриваемом случае «слабой» связи мод в зависимости  $\Delta_Z(\text{Fr})$  нет разрывов, и присутствуют лишь изломы.

В случае  $R_1 R_2 > 1$ , или «сильной» связи мод, реализуются следующие режимы автоколебаний. Состояние равновесия (3.8), соответствующее двухмодовому режиму, оказывается неустойчивым. При  $\mu < 1/R_1 < R_2$  состояние равновесия  $(1, 0)$  устойчиво, т. е. возбуждается 1-я мода. При  $\mu > R_2 > 1/R_1$  устойчиво состояние равновесия  $(0, \mu)$ , т. е. возбуждается 2-я мода. При  $1/R_1 < \mu < R_2$  состояния равновесия  $(1, 0)$  и  $(0, \mu)$  оба устойчивы, т. е. реализуется бистабильный режим, когда в зависимости от начальных условий развивается либо 1-я, либо 2-я моды. Зависимости амплитуд  $|A_{1,2}|$  от числа Фруда  $\text{Fr}$  в рассматриваемом случае «сильной» связи мод на рис. 8,б показывают, что дисперсия  $\Delta_Z(\text{Fr})$  определяется амплитудой либо 1-й, либо 2-й моды и меняется скачком при смене режима автоколебаний.

Поскольку в зависимости  $\Delta_Z(\text{Fr})$ , полученной в численном моделировании (см. рис. 7б), присутствуют лишь изломы, ясно, что в численном моделировании реализуется случай «слабой» связи мод. По зависимости  $\Delta_Z(\text{Fr})$  (см. рис. 7б) коэффициенты и значения чисел Фруда в (3.3)–(3.5) вычисляются

методом наименьших квадратов в виде  $\frac{2\gamma_1}{\alpha_1} \approx 0,41$ ,  $\frac{2\gamma_2}{\alpha_2} \approx 0,45$ ,  $\text{Fr}_1 \approx 3,6$  и

$\text{Fr}_2 \approx 4,8$ . Параметры  $R_1 \approx 2$  и  $R_2 \approx 0,47$  определяются из условия наилучшего согласия теоретической аппроксимации с численными результатами в интервале  $R_2 < \mu < 1/R_1$ . Сравнение на рис. 9 показывает хорошее соответствие теоретической зависимости (сплошная линия) с результатами численного моделирования (кружки).

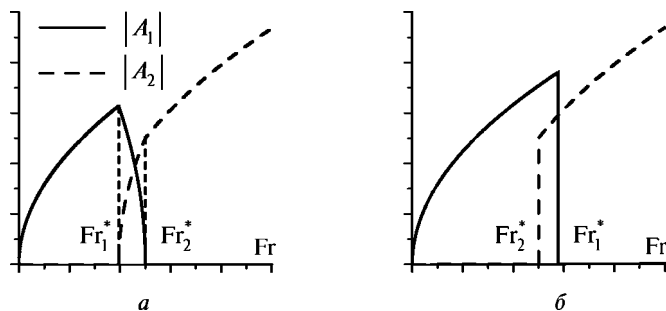


Рис. 8

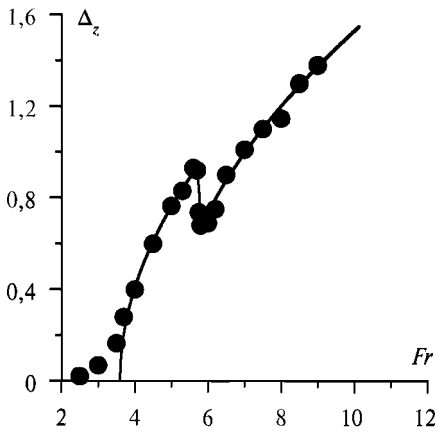


Рис. 9

Необходимо отметить, что в рамках приведенной выше модели учитываются только энергетические эффекты взаимодействия мод и не рассматриваются эффекты, связанные с возможным частотным синхронизмом между модами. С другой стороны, результаты численного моделирования на рис. 7*в* показывают, что частоты мод, вообще говоря, могут иметь близкие значения, так как частота колебаний верхушки фонтана изменяется достаточно плавно в области критического значения числа Фруда  $Fr \approx 5$ . Согласие предсказаний модели с результатами численного моделирования на рис. 9, однако,

указывает на то, что эффекты, связанные с частотным синхронизмом мод, в рассматриваемом случае незначительны.

### Заключение

Прямое численное моделирование и теоретический анализ динамики фонтана, образующегося при проникновении вертикальной струи сквозь пикноклин в стратифицированной жидкости, показали, что при числе Фруда  $Fr$ , превышающем некоторое критическое значение, течение становится неустойчивым, и фонтан совершает автоколебания, сопровождающиеся генерацией внутренних волн в пикноклине. В зависимости от  $Fr$  выделены две различные моды автоколебаний. В обоих случаях частота внутренних волн совпадает с частотой колебаний верхушки фонтана и уменьшается с ростом числа Фруда. Зависимость амплитуды колебаний верхушки фонтана от числа Фруда в численном моделировании хорошо согласуется с предсказанием теоретической модели конкуренции мод в режиме мягкого самовозбуждения.

### Литература

- Белоцерковский О. М. (1984) Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 519 с.
- Бондур В. Г., Журбас В. М., Гребенюк Ю. В. (2006) Математическое моделирование турбулентных струй глубинных стоков в прибрежные акватории // *Океанология*. 2006. Т. 46. № 6. С. 805–820.
- Дружинин О. А. (2003) Коллапс и автомодельность турбулентной струи в пикноклине // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2003. Т. 39. № 5. С. 697–711.
- Карликов В. П., Трушина О. В. (1998) Об автоколебаниях плоских затопленных фонтанов // *Докл. РАН*. 1998. Т. 361. № 3. С. 340–344.
- Карликов В. П., Трушина О. В. (2009) О возможной классификации автоколебательных режимов фонтанирования плоских вертикальных затопленных струй тяжелой жидкости // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2009. № 3. С. 23–35.
- Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. (1986) Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

- Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* (1984) Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
- Троицкая Ю. И., Сергеев Д. А., Ежова Е. В., Соустова И. А., Казаков В. И.* (2008) Автогенерация внутренних волн всплывающими струями в стратифицированном бассейне // Докл. РАН. 2008. Т. 419. № 5. С. 691–695.
- Флетчер Г. К.* (1991) Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1. М.: Мир, 1991. 504 с.
- Kaye N. B., Hunt G. R.* (2006) Weak Fountains // *J. Fluid Mechanics*. 2006. V. 558. P. 319–328.
- Keeler R., Bondur V., Gibson C.* (2005) Optical Satellite Imagery Detection of Internal Wave Effects from a Submerged Turbulent Outfall in the Stratified Ocean // *Geophysical Research Letters*. 2005. V. 32. P. L12610.
- Koh R. C. Y., Brooks N. H.* (1975) Fluid Mechanics of Waste-Water Disposal in the Ocean // *Annu. Rev. of Fluid Mechanics* 1975. V. 7. P. 187–211.
- Lin W., Armfield S. W.* (2000) Direct Simulation of Weak Axisymmetric Fountains in a Homogeneous Fluid // *J. Fluid Mechanics*. 2000. V. 403. P. 67–88.
- Turner J. S.* (1966) Jets and Plumes with Negative or Reversing Buoyancy // *J. Fluid Mechanics*. 1966. V. 26. Pt. 4. P. 779–792.
- Williamson N., Srinarayana N., Armfield S. W., McBain G. D., Lin W.* (2008) Low-Reynolds-Number Fountain Behaviour // *J. Fluid Mechanics*. 2008. V. 608. P. 297–317.

## THE GENERATION OF INTERNAL WAVES BY A FOUNTAIN IN A STRATIFIED FLUID

O. A. Druzhinin, Yu. I. Troitskaya

*Institute of Applied Physics Russian Academy of Sciences*

We perform direct numerical simulation and theoretical analysis of the dynamics of a fountain created by a vertical laminar axisymmetrical jet penetrating a density jump (a pycnocline). The results show that at a sufficiently large Froude number  $Fr$ , the fountain performs self-sustained oscillations which generate internal waves in the pycnocline. If  $Fr$  is small enough the fountain top oscillates in a circular flapping (CF) mode whereby it retains its shape and moves around the jet central axis. If  $Fr$  is increased further, the fountain top periodically rises and collapses in a bobbing oscillation mode (or B-mode). The CF-mode generates spiral internal waves, whereas the B-mode generates IW packets with a complex spatial distribution. In both cases, the IW frequency coincides with the frequency of the fountain-top oscillations and decreases monotonically with increasing  $Fr$ . The dependence of the amplitude of the fountain-top oscillations on  $Fr$  is well described by a theoretical solution of the Landau-type two-mode-competition model under an assumption of small super-criticality.

*Keywords:* numerical simulation, pycnocline, vertical jet, fountain, self-sustained oscillations, internal waves.

---

**Druzhinin Oleg Aleksandrovich** — Leading Research Assistant, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, e-mail: druzhinin@hydro.appl.sci-nnov.ru.

**Troitskaya Yuliya Igorevna** — Head of Department, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, e-mail: yuliya@hydro.appl.sci-nnov.ru.

## ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИКИ ОКЕАНА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ ДЛЯ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ ЦИРКУЛЯЦИИ МИРОВОГО ОКЕАНА

А. В. Гусев

*Учреждение Российской академии наук  
Институт вычислительной математики РАН (ИВМ РАН)*

Представлен оригинальный программный комплекс для проведения и анализа расчётов  $\sigma$ -модели общей циркуляции океана ИВМ РАН, который может применяться для Мирового океана с использованием криволинейных ортогональных систем координат. Вместе с моделью общей циркуляции океана комплекс включает модель динамики и термодинамики морского льда, а также эффективную систему обмена данными с атмосферой. Комплекс можно применять для воспроизведения гидродинамики океана и характеристик морского льда как при заданном атмосферном воздействии, так и совместно с моделью атмосферы. Разработанный программный комплекс может использоваться на параллельных вычислительных системах с общей памятью, а также и на современных персональных компьютерах. На основе разработанного комплекса создана новая версия  $\sigma$ -модели общей циркуляции океана. Модель построена в криволинейной ортогональной системе координат, полученной путём конформного преобразования стандартной широтно-долготной системы. Пространственное разрешение модели Мирового океана составляет  $1 \times 0,5^\circ$  в горизонтальных координатах и 40 неравномерно распределённых по вертикали  $\sigma$ -уровней. Проведен численный эксперимент по расчёту глобальной циркуляции океана на срок 100 лет с начального состояния, соответствующего январской климатологии Левитуса, с реалистичным заданием годового хода атмосферного воздействия по данным CORE (Data for Common Ocean-Ice Reference Experiments). Результаты численных расчётов показали, что модель адекватно воспроизводит основные характеристики крупномасштабной динамики Мирового океана.

*Ключевые слова:* общая циркуляция океана, физика морских льдов, численное моделирование циркуляции океана, анализ данных наблюдений.

### Введение

В настоящее время период интенсивного развития, определяемого в итоге бурным развитием вычислительной техники, переживают модели климатической системы Земли [IPCC, 2007]. Важнейшими компонентами системы являются взаимодействующие между собой сложным образом атмосфера, океан и морской лёд. Достоверные оценки взаимосвязей между ними и прогноз изменений климата могут быть получены только с помощью комплексных моделей климата [IPCC, 2007], основу которых составляют модели общей циркуляции атмосферы и океана как главных компонентов климатической системы. Поэтому главной задачей, поставленной в настоящей работе, являлось создание модели общей циркуляции океана, способной служить океаническим блоком модели климатической системы Земли, удовлетворяющей современным требованиям [IPCC, 2007].

Международные организации, проектирующие научную стратегию по изучению проблемы изменений климата с помощью глобальных климатических моделей, на основе полученных результатов [IPCC, 2007] предполагают перейти к более сложным климатическим моделям высокого пространственного разрешения. При использовании обычной географической системы координат в окрестности Северного полюса возникает особенность, которая при реализации конечноразностных численных моделей океана требует использования дополнительных приёмов, как правило, снижающих эффективность и точность расчётов. Поэтому при создании модели глобального океана необходимо исключить эту особенность. Один из способов её устранения — использование систем координат, в которых особые точки находятся за пределами расчётной области. Адекватное воспроизведение динамики Северного Ледовитого океана и его ледового покрова важно для формирования циркуляции всего Мирового океана. Поэтому модель общей циркуляции океана должна также воспроизводить динамику и термодинамику морского льда.

Для решения поставленных задач разработана новая версия  $\sigma$ -модели общей циркуляции океана, первоначально реализованная в ИВМ РАН под руководством В. Б. Залесного [Алексеев, Залесный, 1993] и впоследствии усовершенствованная Н. А. Дианским (2002). Автором настоящей работы  $\sigma$ -модель ИВМ РАН была реализована в криволинейных ортогональных системах координат и выполнена модификация её программного кода для реализации на параллельных вычислительных системах с целью повышения быстродействия. Для адекватного воспроизведения характеристик океана в высоких широтах в модель океана была внедрена модель динамики-термодинамики морского льда [Яковлев, 2003; Hunke, Dukowicz, 1997; Briegleb et al., 2004]. Модель также была дополнена автором модулем расчёта атмосферного воздействия, с помощью которого эффективно осуществляется обмен данными с атмосферой как для автономных расчётов, так и для её работы совместно с моделью атмосферы. Этот алгоритм позволяет производить расчёты с использованием данных атмосферного воздействия для среднеклиматического года, а также и для реальных лет. Для моделирования Мирового океана было выбрано более высокое, по сравнению с предыдущей версией модели [Дианский и др., 2002], пространственное разрешение  $1 \times 0,5^\circ$  в модельных координатах и 40 неравномерно распределённых по глубине  $\sigma$ -уровней. В настоящее время представленная  $\sigma$ -модель общей циркуляции океана используется в качестве океанического блока в новой версии модели климатической системы Земли без применения процедуры коррекции потоков на поверхности океана.

## **1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ $\sigma$ -МОДЕЛИ ЦИРКУЛЯЦИИ ОКЕАНА, РАЗРАБОТАННОЙ В ИВМ РАН, И ПРИНЦИПЫ ЕЁ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ**

Приведём описание  $\sigma$ -модели общей циркуляции океана, разработанной в ИВМ РАН. Под понятием модель подразумевается сложный комплекс, включающий уравнения гидротермодинамики океана, методы их численного решения



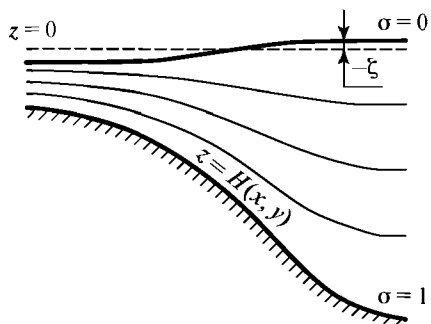


Рис. 1. Схематическое распределение  $\sigma$ -уровней по глубине океана

$$\sigma = \frac{z - \xi}{H - \xi}, \quad (1)$$

где  $z$  — физическая вертикальная координата по глубине;  $H$  — глубина океана в состоянии покоя, полагающаяся ограниченной функцией с ограниченными производными;  $\xi$  — отклонение уровня океана от его невозмущенного состояния (рис. 1).

Исходная версия этой модели, созданная В. Б. Залесным и его учениками [Алексеев, Залесный, 1993], была усовершенствована Н. А. Дианским, чтобы она могла служить составной частью модели климатической системы [Дианский и др., 2002]. Автором настоящей работы, в свою очередь, были выполнены следующие изменения в  $\sigma$ -модели океана:

- модификация модельного кода для возможности проведения расчётов в различных ортогональных криволинейных системах координат на неравномерных сетках;
- повышение качества воспроизведения циркуляции океана включением в модель новых физических параметризаций: а) модуля динамики и термодинамики морского льда; б) модуля расчёта потоков тепла, соли и импульса из атмосферы в океан; в) модуля переноса для температуры и солёности, обеспечивающего сохранение содержания тепла и соли в океане при отсутствии потоков на границах;
- увеличение быстродействия модели реализацией параллельных алгоритмов на общей памяти;
- разработка и реализация эффективной системы обмена данными с атмосферой.

Сформулируем задачу моделирования циркуляции океана в обобщенной системе координат. Переход от декартовой системы координат к обобщенной задается прямым и обратным дифференциалами преобразования:

и вычислительную систему, представляющую собой совокупность большого количества программ, предназначенных для решения системы базовых уравнений, а также и служебных, необходимых для организации интегрирования этих уравнений.

Наша модель относится к классу  $\sigma$ -моделей океана. В ней в качестве вертикальной переменной используется безразмерная переменная  $\sigma \in [0, 1]$ , задаваемая при условии свободной поверхности соотношением

$$DY/DX = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X_1} & \frac{\partial x}{\partial X_2} & \frac{\partial x}{\partial X_3} \\ \frac{\partial y}{\partial X_1} & \frac{\partial y}{\partial X_2} & \frac{\partial y}{\partial X_3} \\ \frac{\partial z}{\partial X_1} & \frac{\partial z}{\partial X_2} & \frac{\partial z}{\partial X_3} \end{pmatrix}, \quad DX/DY = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} & \frac{\partial X_1}{\partial z} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial y} & \frac{\partial X_2}{\partial z} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x} & \frac{\partial X_3}{\partial y} & \frac{\partial X_3}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  — декартовы координаты с единичной матрицей метрики  $G^{(\mathbf{X})} = \text{diag}(1, 1, 1)$ , а  $\mathbf{Y} = (x, y, z)$  — произвольные обобщенные координаты. При этом в каждой точке пространства можно построить систему локальных базисных векторов  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} \right)$ , направленных вдоль соответствующих обобщенных координат. Если  $(DX/DY)^T (DX/DY)$  — диагональная матрица, то локальная система базисных векторов  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  является ортогональной. Тогда система координат  $\mathbf{Y} = (x, y, z)$  называется ортогональной, и матрица метрики для нее имеет вид

$$G^{(\mathbf{Y})} = (DX/DY)^T G^{(\mathbf{X})} (DX/DY) = \text{diag}(r_1^2, r_2^2, r_3^2), \quad (3)$$

а метрические коэффициенты  $r_i$  могут быть вычислены по формуле:

$$r_i = \left| \left( \frac{\partial X_1}{\partial i}, \frac{\partial X_2}{\partial i}, \frac{\partial X_3}{\partial i} \right) \right|, \quad i = x, y, z. \quad (4)$$

В основе модели океана лежит так называемая система примитивных уравнений в приближениях гидростатики и Буссинеска, записанная в обобщенных ортогональных координатах по горизонтали [Madec et al., 1998] и в  $\sigma$ -системе координат по вертикали. Уравнения выводятся с использованием преобразования вертикальной координаты (1) и вспомогательных переменных  $Z = \sigma h + \xi$ ,  $h = H - \xi$ . Полная система уравнений упрощается, если предположить, что  $\xi \ll H$ . Тогда можно оставить переменные по времени  $h$  и  $Z$  только в производных по времени, а в пространственных же производных положить  $h \approx H$  и  $Z \approx \sigma H$ . Такая система, в которой используется предложенная автором линеаризация, имеет вид

$$D_t u - (l + \xi)vH = -\frac{H}{r_x} \left( \frac{1}{\rho_0} P_x + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x} - g \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{v}{H} \frac{\partial u}{\partial \sigma} + Fu, \quad (5)$$

$$D_t v + (l + \xi)uH = -\frac{H}{r_y} \left( \frac{1}{\rho_0} P_y + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial y} - g \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{v}{H} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + Fv, \quad (6)$$

$$\frac{1}{r_x r_y} \left( \frac{\partial u H r_y}{\partial x} + \frac{\partial v H r_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\tilde{D}_t \theta = \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{v_\theta}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} + D\theta + \frac{\partial R}{\partial \sigma}, \quad (8)$$

$$\tilde{D}_t S = \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{v_S}{H} \frac{\partial S}{\partial \sigma} + DS, \quad (9)$$

$$\rho = \hat{\rho}(\theta, S + 35 \text{‰}, p_w) - \hat{\rho}(0, 0, \rho_0 g \sigma H). \quad (10)$$

Здесь  $r_x$  и  $r_y$  — метрические коэффициенты;  $\mathbf{u} = (u, v)$  — вектор горизонтальной скорости;  $u$  и  $v$  — зональный и меридиональный компоненты скорости течения;  $\omega$  — вертикальная скорость в  $\sigma$ -системе координат, связанная с вертикальной скоростью  $w$  в  $z$ -системе координат соотношением  $\omega = w - \left[ \frac{u}{r_x} \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{v}{r_y} \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial t} \right]$ ;

$\theta$  — потенциальная температура;  $R$  — поток проникающей солнечной радиации;  $S$  — солёность за вычетом константы 35 ‰;  $\rho$  — отклонение плотности воды от некоторого среднего профиля плотности, зависящего только от давления столба жидкости  $\rho_0 g z$  со средней плотностью в океане  $\rho_0 = 1,025 \text{ г/см}^3$  на глубине  $z = \sigma H$ . Нелинейное выражение состояния  $\hat{\rho}(\theta, S + 35 \text{‰}, p_w)$  для расчёта плотности воды, учитывающее сжимаемость за счёт давления столба воды  $p_w$ , взято из статьи [Bryden et al., 1999]; параметр Кориолиса  $l = 2\tilde{\Omega} \sin \varphi$ , где  $\tilde{\Omega} = \frac{2\pi(1+1/365,24)}{86\,400} \text{ с}^{-1}$  — угловая скорость вращения Земли с учётом годового

вращения вокруг Солнца;  $\varphi$  — географическая широта;  $\xi = \frac{1}{r_x r_y} \left[ \frac{\partial r_y}{\partial x} v - \frac{\partial r_x}{\partial y} u \right]$  —

слагаемое, описывающее дополнительный перенос импульса в криволинейных координатах;  $v$ ,  $v_\theta$  и  $v_S$  — коэффициенты вертикальной турбулентной вязкости и диффузии, которые в случае устойчиво стратифицированного вертикального профиля потенциальной плотности рассчитываются согласно параметризации Пакановского — Филандера или Мони́на — Обухова, а в случае неустойчивого — полагаются большими для параметризации конвекции.

Компоненты горизонтального градиента давления  $P_x$  и  $P_y$  в (5) и (6) рассчитываются с использованием уравнения гидростатики в специальной форме:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{2} g \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( H \int_0^\sigma \left( \rho - \sigma \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right) d\sigma \right) - \sigma \left( \frac{\partial H}{\partial x} \rho - H \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \right], \\ P_y &= \frac{1}{2} g \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( H \int_0^\sigma \left( \rho - \sigma \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right) d\sigma \right) - \sigma \left( \frac{\partial H}{\partial y} \rho - H \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

позволяющей уменьшить погрешности при их разностных аппроксимациях в  $\sigma$ -системе координат, так как  $P_x = P_y = 0$  для линейного по глубине профиля плотности  $\rho = \text{const } \sigma H$ , который может давать значительный вклад в полный вертикальный профиль. Использование уравнения состояния в виде (7) также

позволяет уменьшить эти погрешности, поскольку заранее вычитается та часть нелинейного по глубине профиля плотности, которая не дает вклада в горизонтальный градиент давления.

Оператор переноса, входящий в состав полной производной компонентов скорости в (5) и (6), используется в полудивергентной, симметризованной форме:

$$D_t \varphi = \frac{1}{2} \left( h \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial h \varphi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2 r_x r_y} \left[ r_y H u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (r_y H u \varphi) + r_x H v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (r_x H v \varphi) \right] + \frac{1}{2} \left( \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + \frac{\partial \omega \varphi}{\partial \sigma} \right), \quad (12)$$

где  $\varphi$  —  $u$  или  $v$ .

В новой версии модели оператор переноса, входящий в состав полной производной скалярных полей в (8) и (9), используется в дивергентной форме:

$$\tilde{D}_t \varphi = \frac{\partial h \varphi}{\partial t} + \frac{1}{r_x r_y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (r_y H u \varphi) + \frac{\partial}{\partial y} (r_x H v \varphi) \right] + \frac{\partial \omega \varphi}{\partial \sigma}, \quad (13)$$

где  $\varphi$  —  $\theta$  или  $S$ , а также при необходимости любые другие скалярные поля.

Оператор боковой диффузии  $D$  тепла и соли выбирается одинаковым для  $\theta$  и  $S$  в (8) и (9) и выписывается в универсальном виде:

$$D \varphi = \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial x} \left[ K^x H \frac{r_y}{r_x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \kappa_x \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right) \right] - \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ K^x H \frac{r_y}{r_x} \kappa_x \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \kappa_x \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right) \right] + \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ K^y H \frac{r_x}{r_y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \kappa_y \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right) \right] - \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ K^y H \frac{r_x}{r_y} \kappa_y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \kappa_y \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right) \right], \quad (14)$$

где  $\varphi$  —  $\theta$  или  $S$ ;  $K^x(x, y, \sigma H)$  и  $K^y(x, y, \sigma H)$  — коэффициенты горизонтальной диффузии 2-го порядка вдоль осей  $x$  и  $y$ , выбираемые как некоторые функции от пространственных координат. Переменные  $\kappa_x$  и  $\kappa_y$  задают одну или комбинацию нескольких функций, вдоль изоповерхностей которых происходит боковая диффузия. В частности, это могут быть  $\sigma$ -,  $Z$ - или  $\rho$ -поверхности.

Оператор боковой вязкости  $F$  в (5) и (6) представляет собой комбинацию операторов 2-го и 4-го порядков:

$$F \varphi = H \operatorname{div}_h (\mathbf{A} \operatorname{grad}_h) \varphi - H \left( \operatorname{div}_h (\mathbf{B}^{1/2} \operatorname{grad}_h) \right)^2 \varphi, \quad (15)$$

где  $\varphi$  —  $u$  или  $v$ ;  $\operatorname{grad}_h$  и  $\operatorname{div}_h$  — двумерные операторы боковых градиента и дивергенции, действующие на поверхностях  $\sigma = \text{const}$ ;  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — диагональные тензоры 2-го порядка:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A^x & 0 \\ 0 & A^y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B^x & 0 \\ 0 & B^y \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где  $A^x = A^x(x, y)$ ,  $A^y = A^y(x, y)$ ,  $B^x = B^x(x, y)$  и  $B^y = B^y(x, y)$  — коэффициенты вязкости для операторов 2-го и 4-го порядков вдоль осей  $x$  и  $y$ , задаваемые как некоторые функции пространственных координат. Оператор 4-го порядка, по сравнению с оператором 2-го порядка, более эффективно подавляет высокочастотные пространственные гармоники и менее искажает основное крупномасштабное решение.

В качестве граничных условий на поверхности океана ( $\sigma = 0$ ) для скорости задаются поток импульса от напряжения трения ветра ( $\tau_x, \tau_y$ ) и универсальное условие для  $\omega$ :

$$-\frac{\nu}{H} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} = \frac{(\tau_x, \tau_y)}{\rho_0}, \quad \omega \Big|_{\sigma=0} = 0, \quad (17)$$

а для температуры и солёности — нормированные потоки тепла  $q_\theta$  и соли  $q_S$ :

$$-\frac{\nu_\theta}{H} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} = q_\theta, \quad -\frac{\nu_S}{H} \frac{\partial S}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} = q_S. \quad (18)$$

Поток  $q_\theta$  рассчитывается с учётом потоков явного и скрытого тепла, длинноволновой и коротковолновой радиации и потока, вызванного наличием льда, а  $q_S$  — с учётом баланса пресной воды, обусловленного осадками, испарением, стоком рек и образованием или таянием льда.

На дне ( $\sigma = 1$ ) задается условие непротекания, имеющее в  $\sigma$ -системе координат простой вид:

$$\omega \Big|_{\sigma=1} = 0, \quad (19)$$

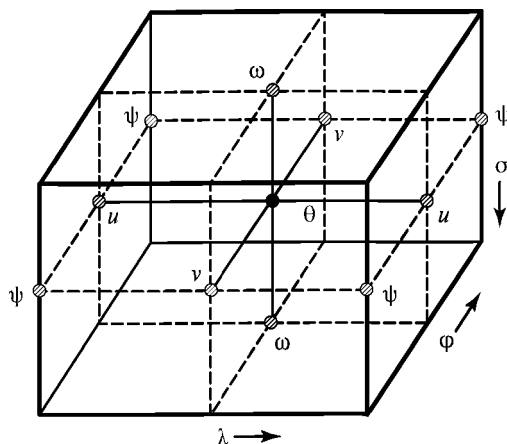
и квадратичного придонного трения

$$-\frac{\nu}{H} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=1} = C_D \sqrt{u^2 + v^2 + e_b^2} \cdot \mathbf{u} \Big|_{\sigma=1}, \quad (20)$$

где  $C_D = 2,5 \cdot 10^{-3}$  и  $e_b = 5$  см/с — эмпирические константы.

На боковой поверхности для скорости задаются условия непротекания и свободного скольжения. На твердых участках боковой границы и на дне для температуры и солёности ставятся условия изоляции. Если бассейн не является замкнутым, то на жидких участках боковой границы задаются температура и солёность, взятые из наблюдений.

Основная особенность представленной модели океана состоит в том, что при её численной реализации используется метод расщепления. Впервые для расчёта циркуляции океана этот метод применен в работе Г. И. Марчука и В. Б. Залесного (1974). Он позволяет использовать эффективные неявные методы интегрирования с большими шагами по времени. Для его применения на каждом интервале интегрирования  $(t_j, t_{j+1}]$  система уравнений (5)–(10) частично линеаризуется: в операторах переноса (12) и (13) скорость переноса субстанции и при расчёте квадратичного трения о дно модуль скорости, входящий в коэффициент трения (20), берутся с предыдущего шага по времени.



**Рис. 2.** Распределение прогностических переменных на ячейке модельной сетки:  $\theta$  — индикатор точки сетки, где определяются скалярные величины: температура, солёность, плотность, давление, уровень океана и дивергенция скорости;  $(u, v, \omega)$  — индикаторы точек, где определяются компоненты вектора скорости;  $\psi$  — точки, где определяется баротропная функция тока и задана топография дна. Стрелками показаны направления в сторону увеличения координат  $x, y, \sigma$  и соответствующих им индексов узлов сетки

Для решения уравнений (5)–(10) применяется техника построения разностных аппроксимаций по пространству на разнесенной «C»-сетке (рис. 2) по классификации А. Аракавы [Лебедев, 1957; Mesinger, Arakawa, 1976].

Перед решением уравнений (5)–(10) в модели производятся следующие вспомогательные расчёты, результаты которых используются при решении основной системы уравнений.

*Интерполяция атмосферных характеристик.* Исходные атмосферные параметры заданы в обычной географической системе координат с пространственно-временным разрешением, отличным от модельного, поэтому они переводятся на модельную область внутри расчётного блока модели путём пространственной и временной интерполяции, разработанной автором работы.

*Расчёт характеристик морского льда.* Модель льда, инкорпорированная автором в модель океана, состоит из локально-одномерной модели термодинамики [Яковлев, 2003], переноса [Briegleb et al., 2004] и динамики льда [Hunke, Dukowicz, 1997].

*Расчёт потоков тепла, соли и импульса* в океан производится с использованием как сынтиерполированных на модельную область атмосферных данных, так и рассчитанных параметров морского льда, а также характеристик поверхности океана из решения задачи на этот момент времени, которое считается известным.

Расщепление системы уравнений (5)–(10) проводится на нескольких иерархических уровнях. Сначала используется расщепление по физическим процессам. На более высоких уровнях процесс расщепления может доходить до выделения простейших локально-одномерных по пространству уравнений.

На каждом интервале интегрирования  $(t_j, t_{j+1}]$  процесс, описываемый частично линеаризованной системой уравнений (5)–(10), представляется в виде суперпозиции процесса переноса-диффузии для  $\theta$ ,  $S$ ,  $u$ ,  $v$  и процесса приспособления полей скорости и плотности (адаптации гидрологических полей). В дифференциальной постановке эти задачи описываются следующими уравнениями (решение исходной задачи на момент времени  $t_j$  считается известным).

### I. Перенос-диффузия $\theta$ и $S$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_t \theta &= \frac{\partial v_\theta}{\partial \sigma} \frac{\partial \theta}{H} + D\theta + \frac{\partial R}{\partial \sigma}, \\ \tilde{D}_t S &= \frac{\partial v_S}{\partial \sigma} \frac{\partial S}{H} + DS. \end{aligned} \quad (21)$$

### II. Перенос-диффузия $u$ и $v$

$$\begin{aligned} D_t u - \xi v H &= \frac{\partial v}{\partial \sigma} \frac{\partial u}{H} + Fu, \\ D_t v + \xi u H &= \frac{\partial v}{\partial \sigma} \frac{\partial v}{H} + Fv. \end{aligned} \quad (22)$$

### III. Процесс адаптации (приспособления) гидрологических полей

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - lv = -\frac{1}{r_x} \left( P_x + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + lu = -\frac{1}{r_y} \left( P_y + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial y} - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{r_x r_y} \left( \frac{\partial r_y u H}{\partial x} + \frac{\partial r_x v H}{\partial y} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma}. \end{cases} \quad (23)$$

Процесс переноса-диффузии (21) реализован автором с помощью расщепления по физическим процессам: перенос, боковая и вертикальная диффузия. Для решения задачи переноса по времени используется явная схема Адамса–Бэшфорта. Дивергентная форма оператора переноса обеспечивает сохранение тепла и соли в океане в случае отсутствия потоков этих величин на границах. Задача для боковой диффузии решается по явной, а для вертикальной — по неявной схемам по времени.

Процесс переноса-диффузии (22) решается путём расщепления по элементарным процессам переноса-диффузии вдоль координат, что позволяет сделать полудивергентная форма (12), обладающая при условии непротекания на границах свойством кососимметрии (неотрицательности) для каждого направления отдельно.

Процесс приспособления гидрологических полей (23) решается в три этапа. Сначала по значениям  $\theta$  и  $S$ , полученным из этапа (21), согласно (10) рассчиты-

вается плотность и, затем, по (11) — компоненты градиента давления  $P_x$  и  $P_y$ . По рассчитанным  $P_x$  и  $P_y$  вычисляется обусловленное ими изменение импульса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 r_x} P_x \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 r_y} P_y. \quad (24)$$

Оставшаяся часть системы решается путём разделения на баротропную и бароклинную моды:

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad \bar{u} = \int_0^1 u \, d\sigma, \quad \bar{v} = \int_0^1 v \, d\sigma. \quad (25)$$

С учётом (25) оставшаяся после решения (24) часть системы (23) распадается на решение двух систем уравнений, описывающих бароклинную и баротропную адаптации.

Система бароклинной адаптации имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} - lv' = 0, \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + lu' = 0. \end{cases} \quad (26)$$

При решении этой системы используется неявная схема с методикой диагонализации [Делеклюз, Залесный, 1996] пространственного оператора для корриолисовых членов, возникающего при применении сетки «С».

Вертикальная скорость находится путём интегрирования по глубине уравнения неразрывности (7) по горизонтальным рассчитанным составляющим бароклинной скорости, с учётом условий непротекания и свободного скольжения на боковых границах:

$$\omega = \int_1^\sigma \frac{1}{r_x r_y} \left( \frac{\partial u' H r_y}{\partial x} + \frac{\partial v' H r_x}{\partial y} \right) d\sigma. \quad (27)$$

В силу (25) граничные условия для вертикальной скорости на поверхности и дне удовлетворяются автоматически, поскольку  $\int_0^1 u' \, d\sigma = \int_0^1 v' \, d\sigma = 0$ .

Уравнения баротропной адаптации требуют совместного решения сразу трёх уравнений, записанных с использованием неявной схемы по времени:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - l\bar{v} = \frac{1}{r_x} \left( g \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + l\bar{u} = \frac{1}{r_y} \left( g \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{r_x r_y} \left( \frac{\partial r_y \bar{u} H}{\partial x} + \frac{\partial r_x \bar{v} H}{\partial y} \right). \end{cases} \quad (28)$$



Система (28), также известная как система уравнений мелкой воды, решается целиком, без использования расщепления или сведения системы к одному уравнению для  $\zeta$ . Для этого используется специальный пакет программ по работе с разреженными матрицами. Решение может производиться как прямыми [Demmel et al., 1999], так и итерационными [Saad, 1994] методами.

Все представленные подзадачи (за исключением баротропной адаптации (28)) реализованы с использованием параллельного алгоритма на общей памяти, что позволило повысить быстродействие модели. При распараллеливании на восемь процессоров скорость счёта увеличилась более чем в четыре раза.

### 3. ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ КЛИМАТИЧЕСКОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ МИРОВОГО ОКЕАНА

Приведём анализ и сравнение с данными наблюдений циркуляции Мирового океана, воспроизводимой с помощью разработанной  $\sigma$ -модели. Была поставлена главная цель — настройка параметров модели, с целью получения адекватной наблюдениям модельной климатической циркуляции Мирового океана. Такая работа необходима перед включением модели океана в модель климата ИВМ РАН. Был проанализирован среднегодовой режим циркуляции, полученный при интегрировании модели на 100 лет с начального состояния январской климатологии С. Левитуса (1994).

Модель Мирового океана построена в криволинейной ортогональной системе координат, полученной путём конформного комплексного преобразования стандартной широтно-долготной системы, что позволяет разместить особые точки системы за пределами расчётной области. Один полюс располагался на Таймыре, а второй — в Антарктиде симметрично первому относительно экватора, таким образом, чтобы экватор в модельной системе координат совпадал с географическим (рис. 3).

Её расчётная область включает акватории Чёрного и Каспийского морей, Байкала, Ладожского, Великих американских и др. больших озер. Пространственное разрешение составляет  $1^\circ$  по долготе,  $0,5^\circ$  по широте и 40 неравномерно расположенных  $\sigma$ -уровней по глубине.

В численных экспериментах боковая диффузия тепла и соли параметризовалась как среднее между горизонтальной и изопикнической диффузией. Коэффициенты вертикальной вязкости и диффузии выбирались согласно параметризации [Pacanovsky, Philander, 1981] как функция числа Ричардсона. Для расчёта потоков тепла, соли и импульса из атмосферы в

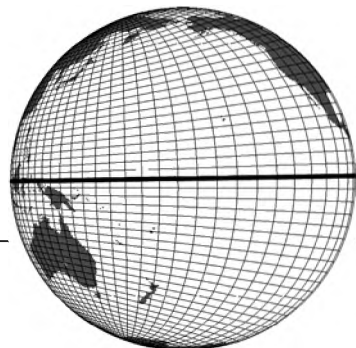


Рис. 3. Система координат, используемая в модели глобального океана; полюса имеют координаты:  $100^\circ$  в. д.,  $70^\circ$  с. ш. и  $100^\circ$  в. д.,  $70^\circ$  ю. ш.; экватор модельной системы совпадает с географическим

модели используются атмосферные данные CORE [Griffies et al., 2004], предназначенные для экспериментов с моделями океана, включающими в себя модуль параметризации морского льда.

Рассмотрим среднегодовые характеристики глобального океана. Анализ расчётов показывает, что модельные распределения океанической циркуляции и термохалинных полей соответствуют данным наблюдений и расчётам по другим климатическим моделям океана. Картина циркуляции и уровня океана (рис. 4) хорошо согласуется с глобальными моделями сходного разрешения.

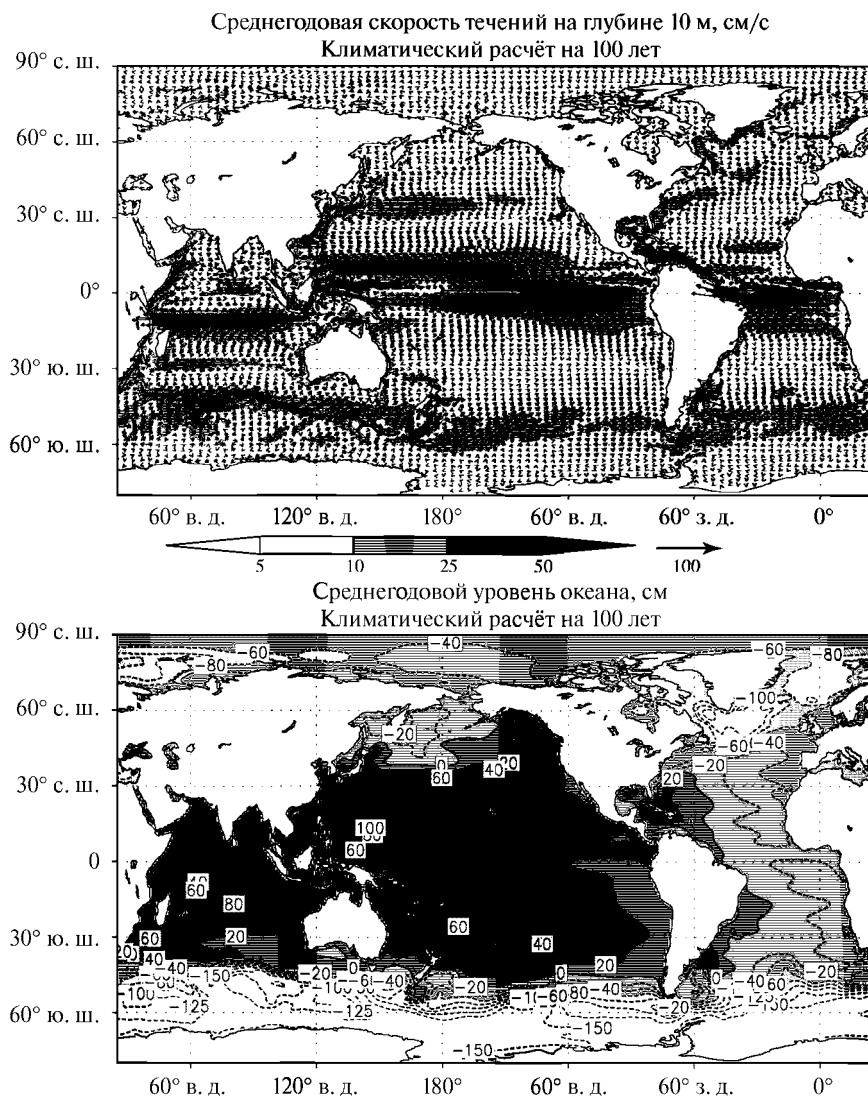


Рис. 4. Среднегодовые скорости течений (в см/с) на глубине 10 м (сверху), и уровень океана (в см) (снизу) за 100-й год расчётного периода

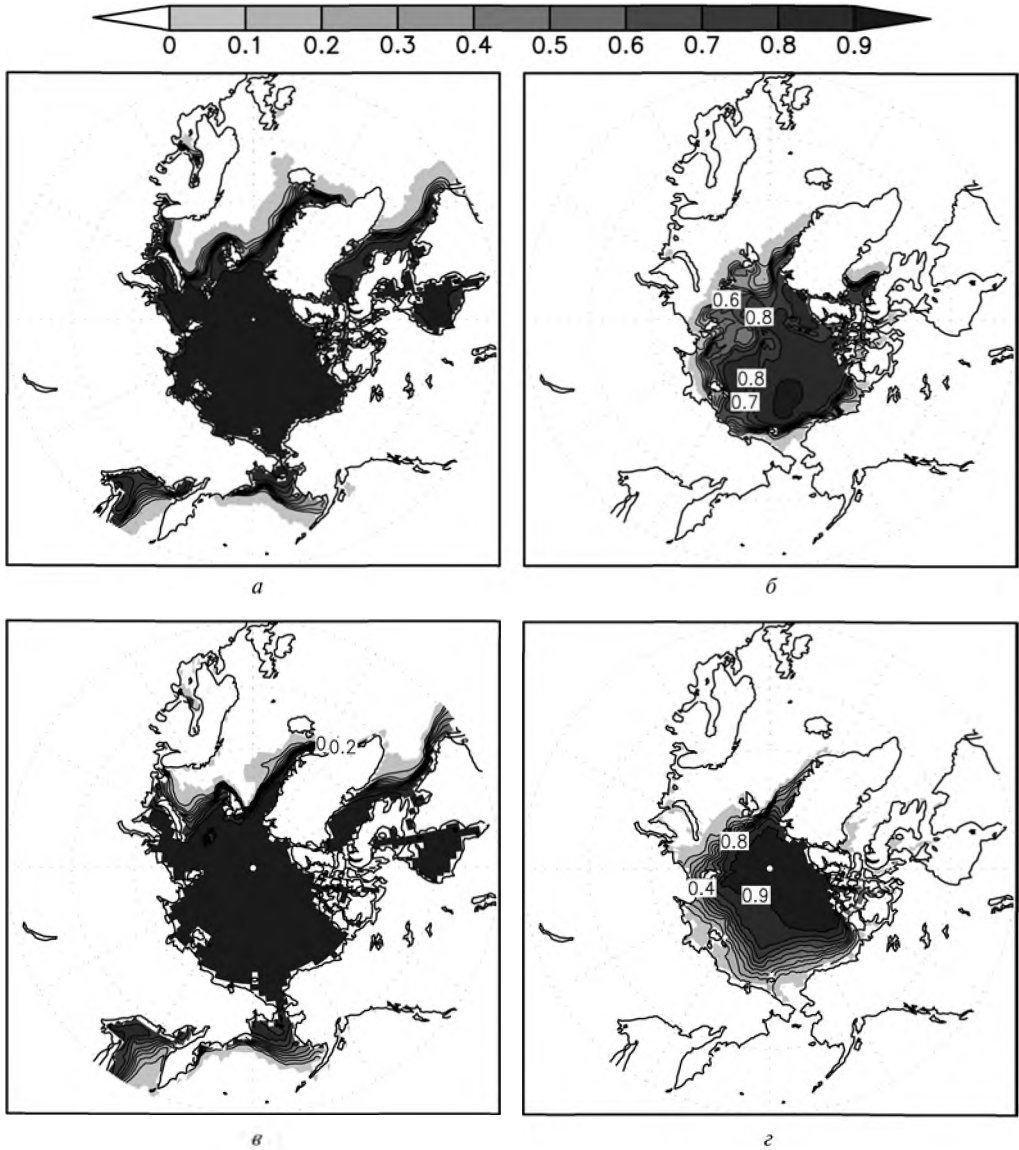


Рис. 5. Концентрация морского льда в Северном полушарии: сверху — по результатам расчётов; снизу — по данным наблюдений [Hurrell et al., 2008]; справа — в марте; слева — в сентябре

Распределение морского льда (рис. 5; рис. 6, см. с. 43) также соответствует данным наблюдений [Hurrell et al., 2008].

Достаточно хорошо воспроизводится вертикальная структура экваториальных течений (рис. 7, снизу, см. с. 44). Величина подповерхностного противотечения достигает 1 м/с, что согласуется с наблюдениями и результатами моделей

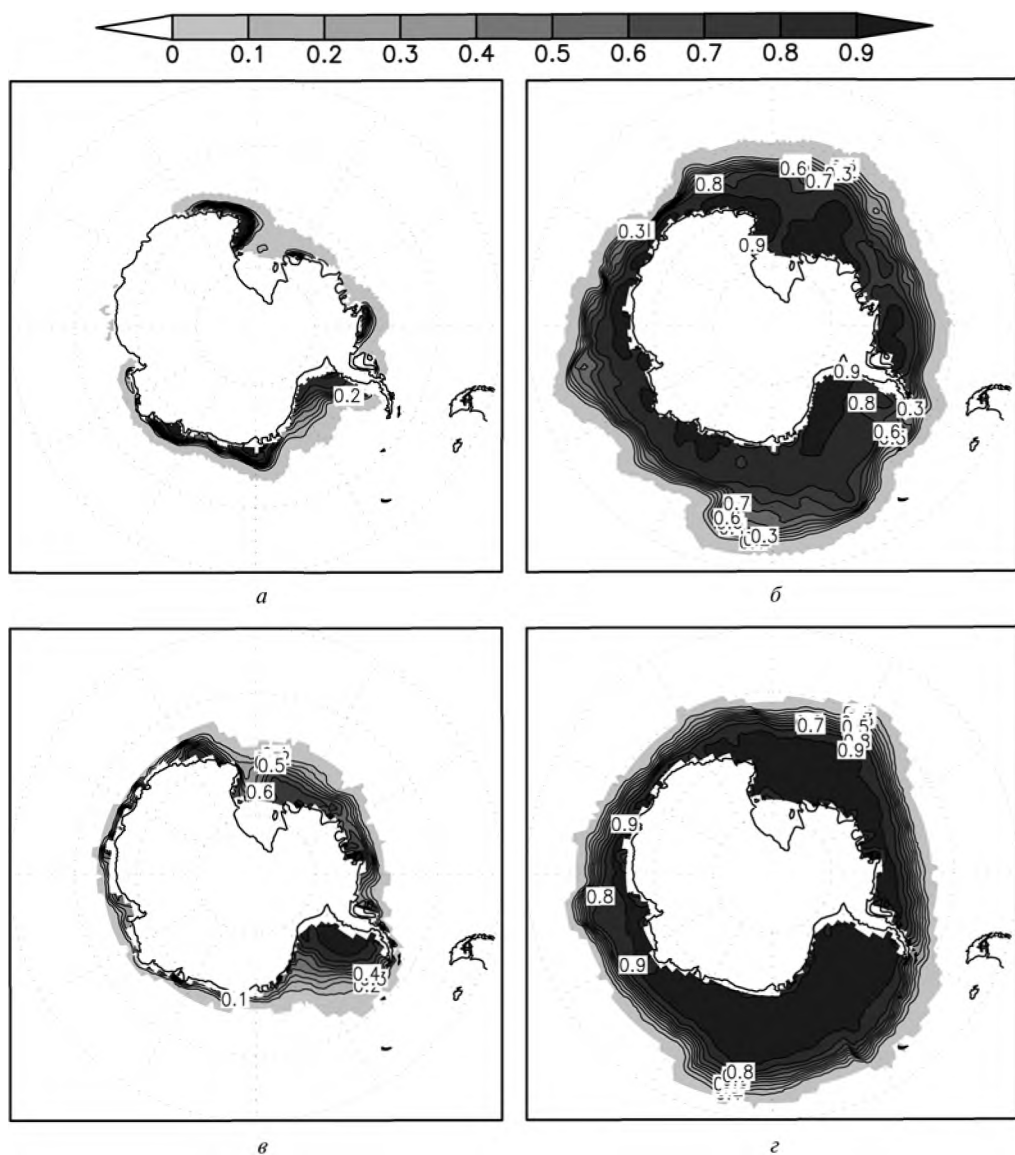


Рис. 6. То же, что для рис. 5, но для Южного полушария

аналогичного [Griffies et al., 2009] и более высокого [Masumoto et al., 2004] разрешения, а также с результатами системы усвоения данных SODA [Carton et al., 2000] (рис. 7, сверху).

Рассчитанная меридиональная циркуляция (рис. 8, см. с. 45) хорошо совпадает с результатами по другим известным моделям [Masumoto et al., 2004;

[Griffies et al., 2009]. Её характерной особенностью является дипольная структура у экватора, связанная с интенсивным экваториальным апвеллингом, и положительный знак ее функции тока в Атлантике (рис. 8, *снизу*). Рассчитанный меридиональный перенос тепла (МПТ) (рис. 9, см. с. 46) хорошо согласуется с результатами по другим моделям [Griffies et al., 2009] и оценками по данным наблюдений.

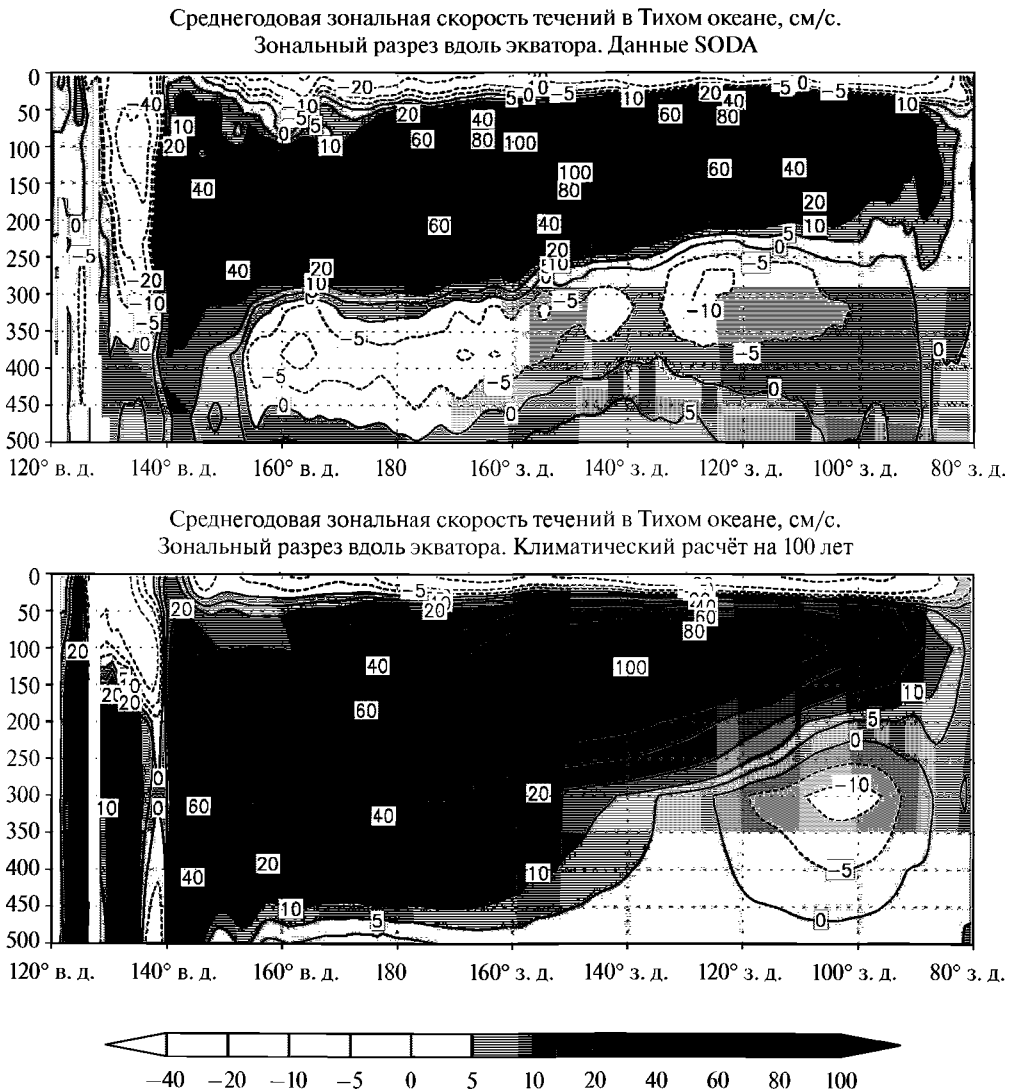


Рис. 7. Вертикальные разрезы зональной скорости течений вдоль экватора Тихого океана: сверху — по материалам SODA [Carton et al., 2000]; снизу — по результатам расчётов

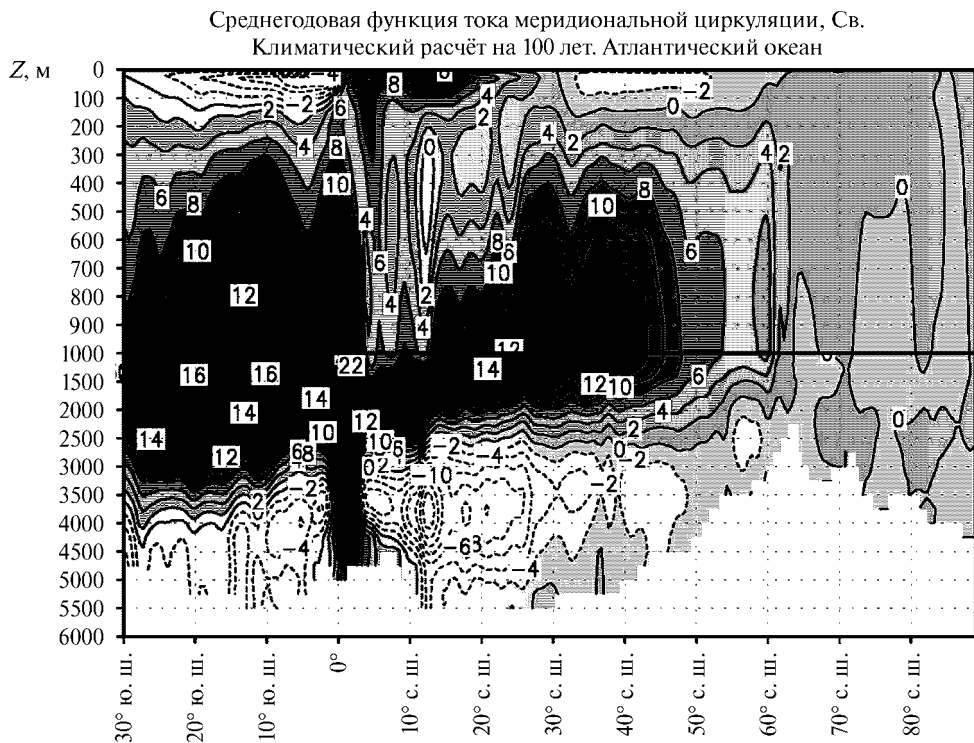
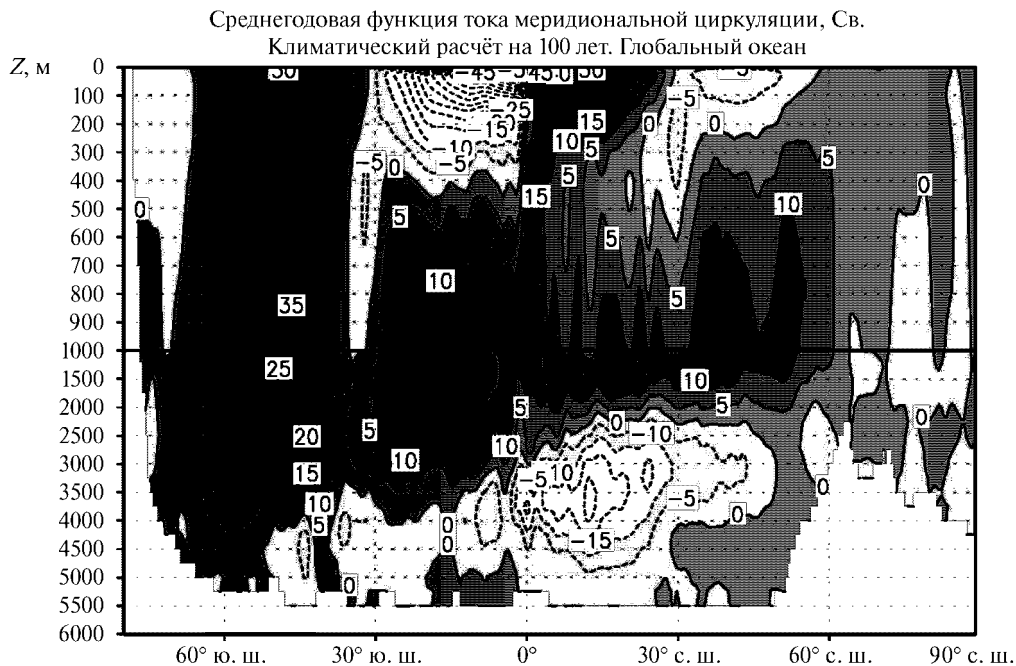
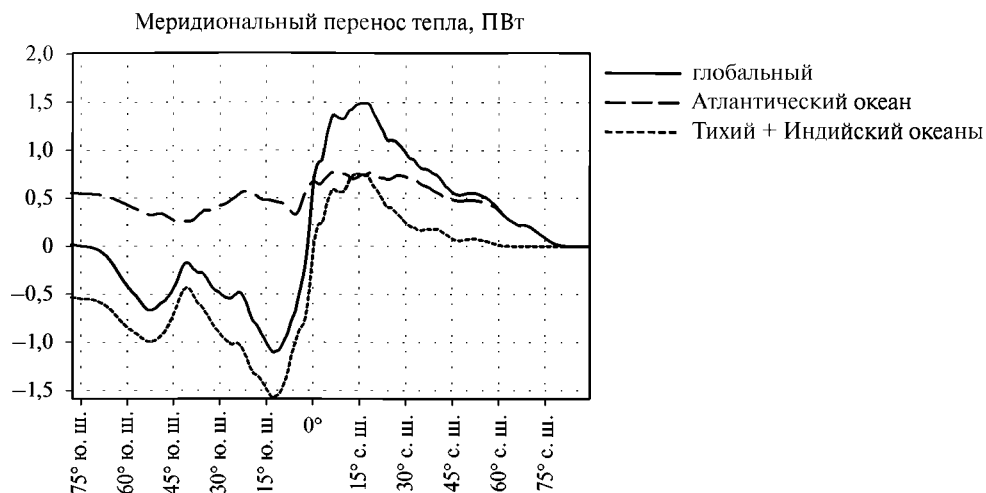


Рис. 8. Среднегодовая функция тока зонально-интегральной циркуляции, Св: *сверху* — для глобального океана; *снизу* — для Атлантического



**Рис. 9.** Среднегодовые меридиональные переносы тепла по результатам расчётов, ПВт: Мировой океан (сплошная линия); Атлантический океан (длинный пунктир); суммарный перенос в Тихом и Индийском океане (короткий пунктир)

### Литература

- Алексеев В. В., Залесный В. Б.* (1993) Численная модель крупномасштабной динамики океана // Вычислительные процессы и системы / Под ред. Марчука Г. И. Вып. 10. М.: Наука, 1993. С. 232–252.
- Делеклюз П., Залесный В. Б.* (1996) Проблемы численного моделирования экваториальной динамики // Океанология. 1996. Т. 36. № 1. С. 27–43.
- Дианский Н. А., Багно А. В., Залесный В. Б.* (2002) Сигма-модель глобальной циркуляции океана и её чувствительность к вариациям напряжения трения ветра // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38. № 4. С. 537–556.
- Лебедев В. И.* (1957) Метод ортогональных проекций для конечно-разностного аналога одной системы уравнений // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113. С. 1206–1209.
- Марчук Г. И., Залесный В. Б.* (1974) Численное моделирование крупномасштабной циркуляции в Мировом океане // Численные методы расчёта океанических течений. Новосибирск: ВЦ СОАН СССР, 1974. С. 3–20.
- Яковлев Н. Г.* (2003) Совместная модель общей циркуляции океана и эволюции морского льда в Северном Ледовитом океане // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2003. Т. 39. № 3. С. 394–409.
- Briegleb B. P., Bitz C. M., Hunke E. C., Lipscomb W. H., Holland M. M., Schramm J. L., Moritz R. E.* (2004) Scientific Description of the Sea Ice Component in the Community Climate System Model. Ver. 3. Technical Note NCAR/TN-463+STR, National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colorado, 2004.
- Bryden D., San S., Bleck R.* (1999) A new approximation of the equation of state for seawater, suitable for numerical ocean models // J. Geophysical Research. 1999. V. 104. N. C1. P. 1537–1540.
- Carton J. A., Chepurin G., Cao X., Giese B. S.* (2000a) A Simple Ocean Data Assimilation Analysis of the Global Upper Ocean 1950–1995. Pt. 1. Methodology // J. Physical Oceanography. 2000. V. 30. P. 294–309.
- Carton J. A., Chepurin G., Cao X.* (2000b) A Simple Ocean Data Assimilation Analysis of the Global Upper Ocean 1950–1995. Pt. 2. Results // J. Physical Oceanography. 2000. V. 30. P. 311–326.

- Demmel J. W., Eisenstat S. C., Gilbert J. R., Li X. S., Liu J. W. H.* (1999) A Supernodal Approach to Sparse Partial Pivoting // *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*. 1999. V. 20. N. 3. P. 720–755.
- Griffies S. M., Winton M., Samuels B. L.* (2004) The Large and Yeager (2004) Dataset and CORE. NOAA Geophysical Fluid Dynamics Laboratory PO Box 308, Forrestal Campus Princeton, New Jersey, 08542 USA (Manuscript last edited 28 September 2004).
- Griffies S. M., Biastoch A., Boening C., Bryan F., Danabasoglu G., Chassignet E. P., England M. H., Gerdes R., Haak H., Hallberg R. W., Hazeleger W., Jungclaus J., Large W. G., Madec G., Pirani A., Samuels B. L., Scheinert M., Gupta A. S., Severijns C. A., Simmons H. L., Treguier A. M., Winton M., Yeager S., Yin J.* (2009) Coordinated Ocean-ice Reference Experiments (COREs) // *Ocean Modelling*. 2009. V. 26. P. 1–46.
- Hunke E. C., Dukowicz J. K.* (1997) An Elastic-Viscous-Plastic Model for Sea Ice Dynamics // *J. Physical Oceanography*. 1997. V. 27. P. 1849–1867.
- Hurrell J. W., Hack J. J., Shea D., Caron J. M., Rosinski J.* (2008) A New Sea Surface Temperature and Sea Ice Boundary Dataset for the Community Atmosphere Model // *J. Climate*. 2008. V. 21. N. 19. P. 5145–5153.
- IPCC Fourth Assessment Report // Intergovernmental Panel on Climate Change / Eds. Solomon S. D., Qin D., Manning M., Chen Z., Marquis M., Averyt K. B., Tignor M., Miller H. L. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, USA. 2007. 996 p.
- Levitus S.* World Ocean Atlas (1994). CD-ROM Data Set: U. S. Department of Commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration, National Environmental Satellite Data and Information Service, National Oceanographic Data Center, Ocean Climate Laboratory. 1994.
- Madec G., Delecluse P., Imbard M., Lévy C.* (1998) OPA 8.1 Ocean General Circulation Model Reference Manual. Institut Pierre Simon Laplace des Sciences de l'Environnement Global. Notes du Pôle de Modélisation. 1998. 91 p.
- Masumoto Y., Sasaki H., Kagimoto T., Komori N., Ishida A., Sasai Y., Miyama T., Motoi T., Mitsudera H., Takahashi K., Sakuma H., Yamagata T.* (2004) A Fifty-Year Eddy-Resolving Simulation of the World Ocean. Preliminary Outcomes of OFES (OGCM for the Earth Simulator) // *J. Earth Simulator*. 2004. V. 1. P. 35–56.
- Mesinger F., Arakawa A.* (1976) Numerical Methods Used in Atmospheric Models // *JOC, GARP Publication Series*. 1976. V. 1. N. 17. Geneva, World Meteorological Organization, C. P. N. 5, CH-1211. 64 p.
- Pacanovsky R. C., Philander G.* (1981) Parameterization of Vertical Mixing in Numerical Models of the Tropical Ocean // *J. Physical Oceanography*. 1981. V. 11. P. 1442–1451.
- Saad Y.* (1994) SPARSKIT: a Basic Tool Kit for Sparse Matrix Computations. 1994. Ver. 2.

**OCEAN HYDRODYNAMICS NUMERICAL MODEL  
IN CURVILINEAR COORDINATES FOR SIMULATING  
CIRCULATION OF THE GLOBAL OCEAN**

**A. V. Gusev**

*Institute of Numerical Mathematics Russian Academy of Sciences (INM RAN)*

The original programme complex is proposed for analysis and calculation of INM RAN ocean general circulation model (OGCM) in sigma-coordinate system, which can be applied to the Global Ocean using orthogonal curvilinear coordinate systems. Together with OGCM the complex includes sea ice dynamics and thermodynamics model, as well as effective system of atmospheric data implementation. The complex can be used to simulate ocean hydrodynamics and sea ice characteristics using both prescribed meteorological data and atmospheric model results. The developed complex can be



used for parallel computing systems with shared memory, and for contemporary PCs. On the basis of the complex, a new version of the OGCM was developed. The model is realized in a curvilinear orthogonal coordinate system, obtained by conformal transformation of the standard latitude-longitude system. The spatial resolution of the OGCM is  $1 \times 0.5^\circ$  in the horizontal coordinates and it has 40 non-uniform vertical levels. The numerical experiment was performed for the calculation of the global ocean circulation for 100 years from the initial state, corresponding to the Levitus January climatology using CORE datasets (Data for Common Ocean-Ice Reference Experiments). The results obtained showed us that the model adequately reproduces the main characteristics of large-scale ocean dynamics.

*Keywords:* ocean general circulation, sea ice physics, numerical modelling of ocean circulation, observational data analysis.

---

**Gusev Anatoly Vladimirovich** — Research Assistant, e-mail: gusev@inm.ras.ru.

## НЕГИДРОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ ВЕНЕРЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЕЁ ПРИМЕНЕНИЯ

К. Г. Орлов<sup>1</sup>, И. В. Мингалев<sup>1</sup>, А. В. Родин<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Полярный геофизический институт Кольского научного центра РАН  
(ПГИ КолНЦ РАН), Апатиты, Мурманская обл.

<sup>2</sup> Московский физико-технический институт (государственный университет)  
(МФТИ), Долгопрудный

<sup>3</sup> Учреждение Российской академии наук Институт космических  
исследований РАН (ИКИ РАН), Москва

Изложено краткое описание модели общей циркуляции атмосферы Венеры, основанной на численном решении полной системы уравнений газовой динамики. Эта модель позволяет исследовать механизмы формирования общей циркуляции атмосферы Венеры. При моделировании получены вихри в полярных областях и суперротация в большом интервале высот.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 10-01-00451 и 10-02-01260).

*Ключевые слова:* динамика атмосферы Венеры, глобальная модель циркуляции

### Введение

Венера является ближайшей к Земле планетой Солнечной системы. Она имеет очень плотную атмосферу, состоящую на 96,5 % из углекислого газа. На поверхности Венеры давление примерно в 92 раза выше, а плотность примерно в 64 раза больше, чем на Земле. Венера очень медленно вращается вокруг своей оси в направлении, противоположном вращению Земли. Период обращения по орбите — 224,7 земных суток, а период вращения вокруг оси — 243,02 земных суток. Солнечные сутки на Венере продолжаются 116,8 земных суток. В атмосфере Венеры имеется облачный слой в диапазоне высот 50...70 км. Из-за парникового эффекта температура на поверхности Венеры может достигать 700 К.

Численное моделирование динамики планетных атмосфер применяется для исследований в течение последних 30 лет. До недавнего времени все модели глобальной циркуляции атмосферы Венеры были основаны на решении системы уравнений геофизической гидродинамики. Вывод этой системы уравнений [Монин, 1988] проводился в предположении, что характерные масштабы, на которых меняется гидродинамическая скорость, по вертикали составляют 10 км, а по горизонту — 1000 км. В этой системе уравнение для вертикальной компоненты скорости заменено уравнением гидростатики.

Данные наблюдений показали, что на Венере в полярных областях существуют крупные вихри, скорость ветра в которых изменяется на масштабе порядка 300 км. Кроме того, выше 90 км быстро нарастает скорость выхолаживания

---

Орлов Константин Геннадьевич — младший научный сотрудник, e-mail: orlov@pgia.ru.

Мингалев Игорь Викторович — старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, e-mail: mingalev\_i@pgia.ru.

Родин Александр Вячеславович — старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: Alexander.Rodin@phystech.edu.

за счёт ИК-излучения углекислого газа, а на дневной стороне в интервале высот 68...71 км быстро меняется скорость нагрева солнечным излучением. На Венере также наблюдаются сильная суперротация атмосферы в интервале высот 40...70 км и большие скорости ветра на высотах выше 80 км. Перечисленные особенности циркуляции атмосферы Венеры до сих пор не удалось получить при помощи гидростатических моделей. Для моделирования на более высоком, чем прежде, уровне точности авторы создали модель глобальной циркуляции атмосферы Венеры, основанную на численном решении полной системы уравнений движения вязкого сжимаемого газа без каких-либо упрощений. На первом этапе мы использовали упрощенный способ расчёта нагрева – охлаждения атмосферы за счёт поглощения – испускания электромагнитного излучения и исследовали связь суперротации и термического прилива, а также общие закономерности циркуляции атмосферы Венеры. В дальнейшем планируется включить в модель современный радиационный блок, который находится в процессе разработки.

## 1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В модели атмосферный газ рассматривается как смесь газов, состав которой не меняется в пространстве и во времени. В данном варианте модели динамика аэрозолей не рассматривается, но может быть включена в нее. Модель основана на численном решении системы уравнений динамики вязкого сжимаемого газа без каких-либо упрощений. В этой работе поверхность Венеры является сферической, но в модели имеется возможность учёта рельефа. Область моделирования простирается от поверхности до высоты 102,2 км.

Существуют два варианта модели, различающихся по типу пространственной сетки. В первом используется равномерная сетка в сферических координатах. Шаги сетки по долготе и широте одинаковы. На полюсах узлов сетки нет. Ближайшие к полюсам узлы сетки отстоят от них по широте на половину шага. В данной работе сетка имела 128 узлов по долготе, 64 узла по широте (шаг  $45/16^\circ$ ) и 512 узлов по высоте (шаг 200 м).

Во втором варианте используется нерегулярная пространственная сетка в околопланетном пространстве. Она построена следующим способом. Сначала строится треугольная сетка на поверхности сферы вокруг центра масс планеты. Поверхность сферы делится на 24 одинаковых равнобедренных криволинейных треугольника. Боковые стороны каждого треугольника делятся на  $N$  одинаковых частей узлами сетки. Основание каждого треугольника также делится на  $N$  одинаковых частей узлами сетки. В наших расчётах мы брали значения  $N$  от 20 до 32. Нумерация узлов на боковых сторонах начиналась от вершины напротив основания. Затем дуга экватора, соединяющая узлы с одинаковыми номерами на боковых сторонах треугольника, узлами сетки делилась на число одинаковых частей, равное номеру соединяемых узлов на боковых сторонах. Из центра сферы через узлы сетки на поверхности сферы проводились лучи. На каждом из этих лучей выбиралось одинаковое число узлов пространственной сетки так, чтобы первый от центра планеты узел сетки лежал на поверхности планеты, а

последний узел — на сфере заданного радиуса. Расстояние между узлами сетки вдоль каждого луча (шаг сетки по высоте) было одинаковым (в данной работе 200 м). Вокруг каждого узла сетки строился контрольный объём, который получался путём объединением нескольких усечённых пирамид.

Для записи системы уравнений модели введены обозначения:  $\rho$  — плотность атмосферного газа;  $\mathbf{v}$  — его гидродинамическая скорость (трёхмерный вектор);  $p$  — его давление. Система уравнений модели состоит из уравнения неразрывности, уравнения для трёхмерного вектора гидродинамической скорости, уравнения для полной энергии единицы объёма среды  $W = (\rho v^2 + 3p)/2$ , записанных в консервативной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = (-\nabla p + \text{div} \hat{\Pi}) + \rho \mathbf{F}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}((W + p)\mathbf{v}) = (\rho \mathbf{v}, \mathbf{F}) + \text{div}(\hat{\Pi} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{j}) + Q \quad (3)$$

и уравнения Менделеева — Клапейрона  $p = \rho R_a T$ .

В этих уравнениях обозначено:  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$  — тензорное произведение вектора  $\mathbf{v}$  на себя;  $R_a$  — газовая постоянная атмосферного газа;  $T$  — его температура;  $\hat{\Pi}$  — тензор вязких напряжений;  $\mathbf{j}$  — вектор потока тепла;  $Q$  — мощность нагрева — охлаждения в единице объёма за счёт поглощения — испускания электромагнитного излучения;  $\mathbf{F}$  — ускорение внешних сил, которое складывается из ускорений силы тяжести, силы Кориолиса и центробежной силы, и задается формулой

$$\mathbf{F} = \mathbf{r} \left( \Omega^2 - \frac{g_0 r_{\text{пов}}^2}{r^3} \right) - \Omega(\Omega, \mathbf{r}) + 2[\mathbf{v} \times \Omega],$$

где  $g_0$  — ускорение силы тяжести у полюсов на поверхности Венеры;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор от центра масс Венеры до точки рассмотрения;  $r$  — его длина;  $r_{\text{пов}}$  — радиус Венеры;  $\Omega$  — вектор угловой скорости вращения Венеры. Тензор вязких напряжений  $\hat{\Pi}$  задаётся с учётом турбулентного обмена по формулам

$$\hat{\Pi} = 2\hat{\eta} \hat{\mathbf{D}}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} \left( \nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T \right) - \frac{1}{3} \text{div} \mathbf{v} \hat{\mathbf{I}},$$

где  $\hat{\mathbf{D}}$  — девиатор тензора скоростей деформации;  $\nabla \otimes \mathbf{v}$  — тензор градиента гидродинамической скорости;  $\hat{\mathbf{I}}$  — единичный тензор;  $\hat{\eta}$  — симметричный тензор коэффициентов вязкости, который в географической системе координат является диагональным, причем его диагональные компоненты есть сумма обычного динамического коэффициента молекулярной вязкости воздуха и коэффициентов турбулентного обмена в направлении местных ортов географической системы координат. Коэффициенты турбулентного обмена зависят от шага сетки в направлении данного орта и задаются по формуле Ричардсона [Обухов,

1988] так же, как в модели общей циркуляции атмосферы Земли [Мингалев, 2005].

Вектор потока тепла задается по формуле  $\mathbf{j} = -\hat{\lambda}\nabla T$ , где  $\hat{\lambda}$  — симметричный тензор коэффициентов теплопроводности, который в географической системе координат является диагональным, причем его диагональные компоненты есть сумма обычного коэффициента молекулярной теплопроводности воздуха и коэффициентов турбулентного обмена в направлении местных ортов географической системы координат.

Для численного решения системы (1)–(3) использовалась явная разностная схема, детально описанная в работе [Мингалев и др., 2010] и хорошо себя зарекомендовавшая при расчётах динамики сложных трёхмерных течений сжимаемого газа. Эта схема позволяет использовать параллельные вычисления и является модификацией явной монотонной схемы для решения системы уравнений газовой динамики на регулярной пространственной сетке, изложенной в работах [Опарин, 2000; Белоцерковский и др., 2003]. Модификация позволяет применять как регулярные, так и нерегулярные пространственные сетки в криволинейных координатах, а также использовать в качестве рабочих переменных компоненты плотности импульса в декартовых координатах и обеспечить консервативность.

На нижней границе области моделирования заданы условие прилипания, а также нулевые значения вертикальной компоненты вектора потока тепла. На верхней границе области моделирования заданы: нисходящий поток теплового излучения, нулевая вертикальная компонента скорости ветра (непротекание), нулевые значения производных по высоте от горизонтальных компонент скорости ветра (проскальзывание) и от вертикальной компоненты вектора потока тепла.

Мощность нагрева — охлаждения в единице объёма за счёт поглощения — испускания электромагнитного излучения вычислялась следующим образом. Использовались взятые из модели VIRA сглаженные экспериментальные вертикальные профили падающего  $I_S^\downarrow(h)$  и восходящего  $I_S^\uparrow(h)$  потоков солнечной радиации в подсолнечной точке. Затем над освещенной Солнцем точкой поверхности Венеры определялся вертикальный профиль объёмной мощности нагрева солнечной радиацией по формуле

$$Q_S(h, \lambda) = \cos \lambda \frac{d}{dh} \left( I_S^\downarrow(h) - I_S^\uparrow(h) \right), \quad (4)$$

где  $\lambda$  — зенитный угол Солнца в данной точке. Над теневой поверхностью Венеры мы полагали  $Q_S(h, \lambda)$  равным нулю. В данной работе рассматривались условия равновесия, когда подсолнечная точка находится на экваторе.

Вертикальный профиль объёмной мощности нагрева ИК-радиацией принимался однородным по горизонту и определялся по формуле

$$Q_{IR}(h) = \frac{d}{dh} \left( I_{IR}^\downarrow(h) - I_{IR}^\uparrow(h) \right), \quad (5)$$

где  $I_{IR}^{\downarrow}(h)$  и  $I_{IR}^{\uparrow}(h)$  — осредненные по поверхности Венеры рассчитанные на основе одномерной модели [Афанасенко, Родин, 2005] вертикальные профили падающего и восходящего потоков ИК-радиации. Суммарная объёмной мощность нагрева  $Q$  равнялась сумме  $Q_S + Q_{IR}$ . Вертикальные профили  $I_S^{\downarrow}(h)$ ,  $I_S^{\uparrow}(h)$ ,  $I_{IR}^{\downarrow}(h)$  и  $I_{IR}^{\uparrow}(h)$  были подобраны так, что интеграл по всей области моделирования от  $Q(h, \lambda)$  равен нулю. Это условие обеспечивает сохранение суммы внутренней, кинетической и потенциальной энергии атмосферного газа в области моделирования.

Для ускорения вычислений была создана версия модели для расчётов с использованием видеокарт NVIDIA, реализованная при помощи системы программирования CUDA. Расчёты проводились на видеокарте GeForce GTX 260.

## 2. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Начальное распределение температуры атмосферного газа задавалось однородным по горизонту, а зависимость температуры от высоты в начальный момент — согласно вертикальному профилю из модели VIRA. Начальное распределение плотности атмосферного газа на поверхности Венеры на экваторе задавалось однородным по долготе и равным значению плотности на поверхности для профиля из модели VIRA. Зависимость плотности от высоты при фиксированной широте рассчитывалась из условия гидростатического равновесия по вертикали. Подсолнечная точка в начальный момент находилась на экваторе при долготе  $180^\circ$ .

Вертикальная и меридиональная компоненты скорости ветра в начальный момент брались равными нулю, а зональная компонента зависела только от высоты и широты и вычислялась по формуле  $v_{\varphi}(h, \beta) = -v_{\text{ЭКВ}}(h) \cos\beta$ , в которой  $v_{\text{ЭКВ}}(h)$  — величина направленной на запад зональной компоненты ветра на экваторе, зависящая только от высоты  $h$  следующим образом. В интервале высот  $0...50$  км  $v_{\text{ЭКВ}}(h)$  линейно возрастает с высотой до своего максимального значения  $v_{\text{max}}$ , в интервале высот  $50...70$  км  $v_{\text{ЭКВ}}(h) = v_{\text{max}}$ , а в интервале высот  $70...102,2$  км  $v_{\text{ЭКВ}}(h)$  определяется по формуле  $v_{\text{ЭКВ}}(h) = v_{\text{max}}(102,2 - h)/32,2$ , в которой высота  $h$  берется в километрах. Эта формула задает монотонное убывание  $v_{\text{ЭКВ}}(h)$  при увеличении высоты до нуля на верхней границе области моделирования. Значения  $v_{\text{max}}$  брались равными 60, 80 и 100 м/с. Описанное начальное условие означает суперротацию атмосферы.

## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Мы провели моделирование для выше описанных начальных условий на период более 800 ч физического времени. Для всех трех значений максимальной скорости суперротации в начальный момент получились близкие результаты. Примерно через 500 ч физического времени после начала моделирования на высотах ниже 75 км качественная картина циркуляции практически перестает

меняться. На рис. 1–5 приведены результаты через 605 ч после начала моделирования для случая, когда максимальная скорость суперротации  $v_{\max}$  в начальный момент равнялась 80 м/с. Стрелки на рис. 1–3 указывают направление горизонтальной составляющей ветра, а цвет — её абсолютную величину. Подсолнечная точка в этот момент находилась на экваторе при долготе 257,7°, утренний терминатор — на долготе 167,7°, вечерний — на долготе 347,7°, полуночный меридиан — на долготе 77,7°.

Из данных рис. 1 видно, что на высоте 30 км при долготах примерно от 120 до 310° зональный поток заметно шире, чем на других долготах, причем в центре зоны расширения его скорость заметно уменьшается. Также видно, что на ночной стороне поток сужается и скорость в нем увеличивается. При этом максимальная скорость суперротации 65 м/с достигается при долготе примерно 40°. На ночной стороне хорошо видны два приполюсных вихря, центры которых лежат на долготе примерно 40° и на широтах примерно  $\pm 70^\circ$ .

На рис. 2 видно, что на высоте 50 км течение аналогично течению на высоте 30 км, сдвинутому на 40° вправо. На высоте 50 км максимальная скорость суперротации 62 м/с достигается при долготе примерно 80° и на этой же долготе находятся центры приполюсных вихрей.

На рис. 3 видно, что на высоте 70 км зональный поток, так же как на высотах 30 и 50 км, сужается и расширяется и также имеются приполюсные вихри. Однако на этой высоте поток сужается и расширяется заметно слабее, чем на высотах 30 и 50 км, а приполюсные вихри расположены ближе к полюсам. Их центры находятся на широтах примерно  $\pm 80^\circ$  и на долготе примерно 140°.

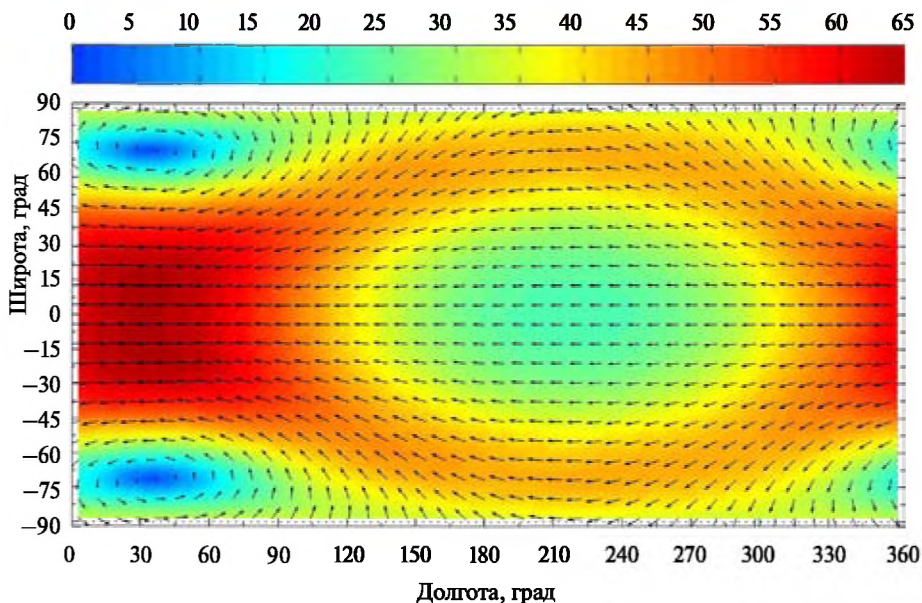


Рис. 1. Распределение горизонтальной составляющей скорости ветра (в м/с) на высоте 30 км через 605 ч после начала моделирования

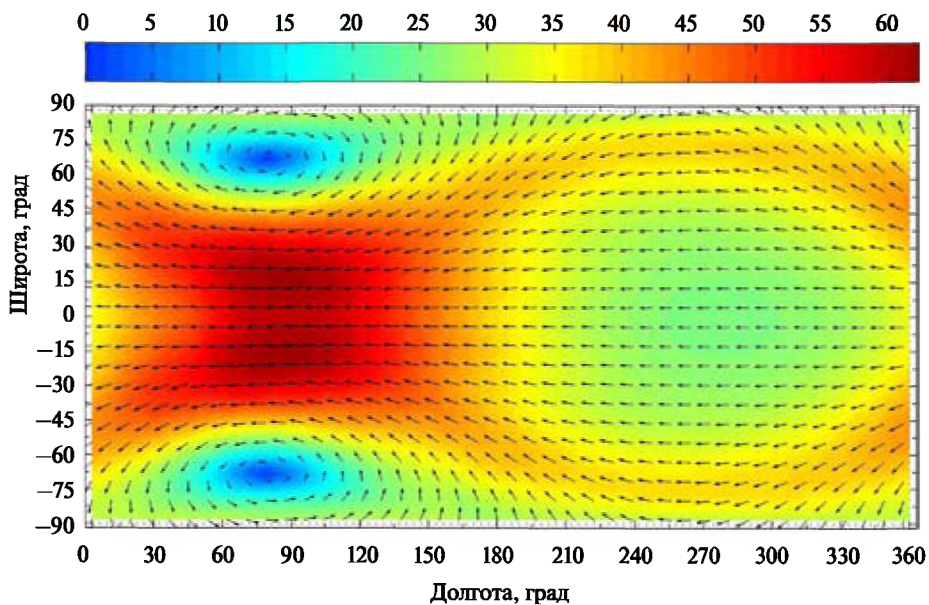


Рис. 2. Распределение горизонтальной составляющей скорости ветра (в м/с) на высоте 50 км через 605 ч после начала моделирования

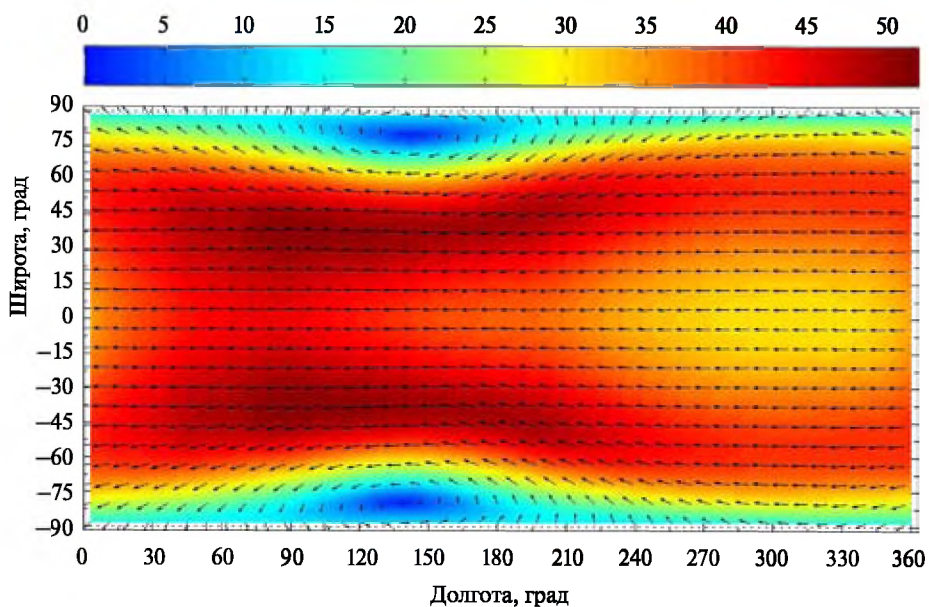


Рис. 3. Распределение горизонтальной составляющей скорости ветра (в м/с) на высоте 70 км через 605 ч после начала моделирования



## Заключение

Из представленных результатов моделирования вытекает, что суперротация в атмосфере Венеры должна иметь место в большом интервале высот, как минимум от 30 до 70 км. На ночной стороне должны быть приполюсные вихри, причем на разных высотах центры этих вихрей могут быть расположены при разной долготе. Горизонтальный ветер должен существенно зависеть как от широты, так и от долготы. Максимальная скорость суперротации должна достигаться на ночной стороне между приполюсными вихрями.

## Литература

- Афанасенко Т.С., Родин А.В. (2005) Влияние столкновительного уширения линий на спектр и потока теплового излучения в нижней атмосфере Венеры // *Астрон. вестн.* 2005. Т. 39. № 3. С. 1–13.
- Белоцерковский О.М., Крагинский Л.М., Опарин А.М. (2003) Численное моделирование пространственных течений в стратифицированной атмосфере, вызванных сильными крупномасштабными возмущениями // *Журн. вычислительной математики и мат. физики.* 2003. Т. 43. № 11. С. 1744–1758.
- Мингалева И.В., Мингалева В.С. (2005) Модель общей циркуляции нижней и средней атмосферы Земли при заданном распределении температуры // *Мат. моделирование.* 2005. Т. 17. № 5. С. 24–40.
- Мингалева В.С., Мингалева И.В., Мингалева О.В., Опарин А.М., Орлов К.Г. (2010) Обобщение монотонной гибридной схемы второго порядка для уравнений газовой динамики на случай нерегулярной пространственной сетки // *Журн. вычислительной математики и мат. физики.* 2010. Т. 50. № 5. С. 923–936.
- Монин А.С. (1988) Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 423 с.
- Обухов А.М. (1988) Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 413 с.
- Опарин А.М. (2000) Численное моделирование проблем, связанных с интенсивным развитием гидродинамических неустойчивостей // *Новое в численном моделировании: алгоритмы, вычислительный эксперимент, результаты.* М.: Наука, 2000. С. 63–90.

## NON-HYDROSTATIC GLOBAL CIRCULATION MODEL OF VENUS ATMOSPHERE AND RESULTS OF ITS APPLICATION

K. G. Orlov<sup>1</sup>, I. V. Mingaleva<sup>1</sup>, A. V. Rodin<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Polar Geophysical Institute, Kola Scientific Center

of the Russian Academy of Sciences, Apatity, Murmansk region, Russia

<sup>2</sup> Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Dolgoprudny

<sup>3</sup> Space Research Institute, Moscow

A short description of general circulation model of Venus atmosphere based on the numerical solution of the full gas dynamics equations is presented. Mechanisms of formation of Venus atmosphere circulation are investigated by means of the given model. Vortexes in polar regions and superrotation in a major interval of heights are obtained in the simulation results.

*Keywords:* venus atmosphere dynamics, global circulation model.

---

Orlov Konstantin Gennadevich — Junior Research Associate, e-mail: orlov@pgia.ru.

Mingaleva Igor Viktorovich — Senior Research Associate, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, mail: mingaleva\_i@pgia.ru.

Rodin Alexander Vjacheslavovich — Senior Research Assistant, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, e-mail: Alexander.Rodin@phystech.edu.

## ПЕРЕСТРОЙКИ ВОЛНОВЫХ РЕЖИМОВ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ МАРСА

А. В. Родин<sup>1,2</sup>, Н. А. Евдокимова<sup>2</sup>, А. В. Бурлаков<sup>2</sup>, А. А. Федорова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Московский физико-технический институт (государственный университет)  
(МФТИ), Долгопрудный

<sup>2</sup> Учреждение Российской академии наук Институт космических  
исследований РАН (ИКИ РАН), Москва

Приведено сравнение результатов численного моделирования общей циркуляции атмосферы Марса с данными гиперспектрометра OMEGA космического аппарата (КА) Mars-Express. Пространственное распределение концентрации водяного пара, мощности и микроструктуры ледовых покровов полярных шапок обнаруживает симметричные, сезонно изменчивые вариации, которые представляют собой, по всей видимости, инерционные волны в системе циркуляции атмосферы планеты.

*Ключевые слова:* Марс, модель общей циркуляции, атмосферные волны.

### Введение

В атмосфере Марса, так же как и в атмосфере Земли, доминирует волновой режим циркуляции, обусловленный относительно быстрым вращением планеты ( $t \approx 24$  ч 37 мин) и характеризующийся заметным вкладом планетарных волн. Это облегчает построение моделей общей циркуляции атмосферы Марса, которые исторически возникли как результат адаптации «земных» климатических моделей к марсианским параметрам [Leovy, 1985]. В последние десятилетия независимыми группами разработан ряд моделей общей циркуляции атмосферы Марса, которые с высокой точностью воспроизводят температуры, скорости ветра и другие климатические поля, измеряемые с помощью космических аппаратов [Haberle et al., 1993, Forget et al., 1999].

Среди современных проблем исследования глобального марсианского климата одно из центральных мест занимает гидрологический цикл планеты, тесно связанный с особенностями крупномасштабной циркуляции атмосферы. Так, наблюдаемая глобальная асимметрия в сезонном цикле распределения водяного пара в атмосфере Марса, равно как и в распределении активных запасов водяного льда на поверхности, может быть объяснена особенностями циркуляции атмосферы, вызванными как заметным эксцентриситетом марсианской орбиты [Clancy et al., 1996], так и асимметрией фигуры твердого тела планеты [Richardson, Wilson, 2002]. Сезонный гидрологический цикл на Марсе определяется главным образом обменом между атмосферой и поверхностными

---

Родин Александр Вячеславович — старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: Alexander.Rodin@phystech.edu.

Евдокимова Надежда Анатольевна — младший научный сотрудник, e-mail: evdokimova@iki.rssi.ru.

Бурлаков Алексей Владимирович — младший научный сотрудник, e-mail: evdokimova@iki.rssi.ru.  
Федорова Анна Александровна — старший научный сотрудник, e-mail: fedorova@iki.rssi.ru.

резервуарами воды — постоянными и сезонными полярными шапками — и переносом водяного пара атмосферными потоками. В осенне-зимний сезон в приполярных областях водяной пар переносится атмосферными потоками из более влажного летнего полушария и при достижении точки росы конденсируется на поверхности, образуя тонкий слой изморози мощностью 100...300 мкм. При дальнейшем понижении температуры ниже точки конденсации  $\text{CO}_2$  (около 145 К в марсианских условиях) этот слой перекрывается слоем углекислого снега, образующим сезонную полярную шапку. В весенне-летний сезон, после сублимации углекислоты, изморозь также сублимирует, и масса воды, мобилизованная воздушным потоком, переносится в экваториальные широты и зимнее полушарие. По мере истощения сезонной изморози основным источником водяного пара в атмосфере становится постоянная полярная шапка, причем в Северном полушарии ее вклад в сезонный гидрологический цикл гораздо более заметен. Открытая ледяная поверхность Северной полярной шапки служит основным источником водяного пара в атмосфере в течение всего летнего сезона в данном полушарии, совпадающего с прохождением Марсом афелия. Однако перенос воды в экваториальные широты и далее — в сезонную полярную шапку зимнего (в данном случае — Южного) полушария может осуществляться только при наличии потоков воздушных масс в меридиональном направлении. Сравнение наблюдений с результатами моделирования общей циркуляции атмосферы показывает, что основным источником меридиональных движений в тропосфере Марса являются атмосферные волны планетарного масштаба с зональными волновыми числами от 1 до 3, меняющимися в течение сезона [Федорова и др., 2004]. Эти данные согласуются с результатами эксперимента MAWD [Jakosky, Farmer, 1984].

В настоящей работе приводятся новые экспериментальные подтверждения сезонной периодичности перестроек зональных волновых чисел и анализируются их возможные причины и роль в глобальном и региональном климате Марса.

## 1. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА OMEGA КА MARS-EXPRESS

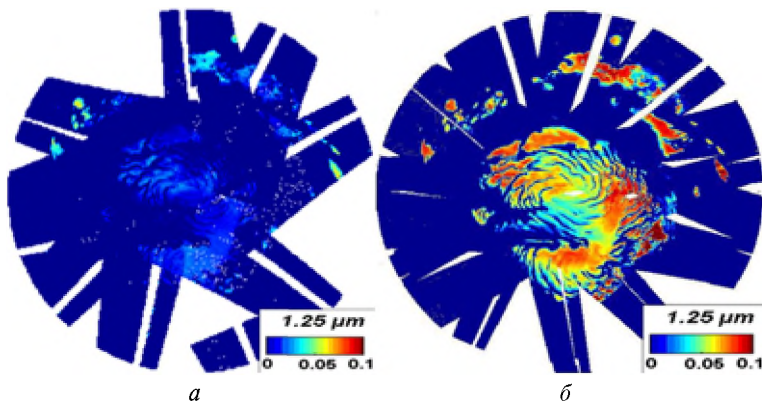
Картирующий спектрометр видимого и ближнего инфракрасного диапазонов OMEGA работает в составе КА Mars-Express на орбите искусственного спутника Марса с 2003 г. Прибор состоит из двух спектрометров — видимого и инфракрасного диапазонов, причем ИК-спектрометр включает два детектора по 128 спектральных каналов каждый: С (диапазон 0,93...2,73 мкм) и L (2,55...5,1 мкм). При надирных наблюдениях в режиме *wiskbroom* прибор OMEGA обеспечивает картирование марсианской поверхности с разрешением от 300 м до 4 км на пиксел в зависимости от высоты орбиты. За время миссии Mars-Express было проведено несколько кампаний по наблюдению полярных областей Марса в летний сезон из перицентра орбиты, с максимально возможными пространственным разрешением и плотностью покрытия. После коррекции атмосферных искажений спектра отражения поверхности Марса (Евдокимова

и др., 2009), по полосам поглощения льда  $\text{H}_2\text{O}$  1,25 и 1,5 мкм были выявлены симметричные сезонно изменчивые структуры в распределении характерных размеров зерен, слагающих ледовый покров постоянной Северной полярной шапки (рис. 1) в периоды  $L_S = 93...97^\circ$  (орбиты 886–922) и  $113...115^\circ$  (орбиты 1048–1060), а также в распределении мощности сезонной изморози в окрестности Южной полярной шапки в период  $L_S = 236...242^\circ$  [Родин и др., 2010].

## 2. МОДЕЛЬ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ МАРСА

Для проверки гипотезы о том, что наблюдаемые структуры связаны с атмосферной динамикой и имеют волновую природу, была использована трехмерная численная модель общей циркуляции атмосферы Марса, дополненная физическими блоками, описывающими гидрологический цикл. Модель построена на динамическом ядре FMS (<http://fms.gfdl.noaa.gov>) и включает самосогласованное описание динамики и радиационного баланса атмосферы, микрофизических процессов в облаках, адвекции водяного пара, пылевого и конденсационного аэрозоля [Родин, Уилсон, 2006]. Модель использует гибридную сетку по вертикали (12 узлов в  $\sigma$ -координатах в нижней части и 16 узлов при фиксированных значениях давления в верхней части) и географическую сетку по горизонтали с разрешением  $1 \times 1,2^\circ$ . Дальнейшее развитие модели облаков включает разработку нового аэрозольного блока, позволяющего рассчитывать распределение частиц конденсационных облаков по размерам с помощью гибридного двухмоментного метода [Бурлаков, Родин, 2011].

Динамическое ядро модели выполнено на основе метода конечных объемов в гидростатическом приближении и интегрируется с шагом 1,5...3 мин. Подсеточная турбулентность оценивается на основе локального числа Ричардсона и параметризуется вертикальным перемешиванием в диффузионном



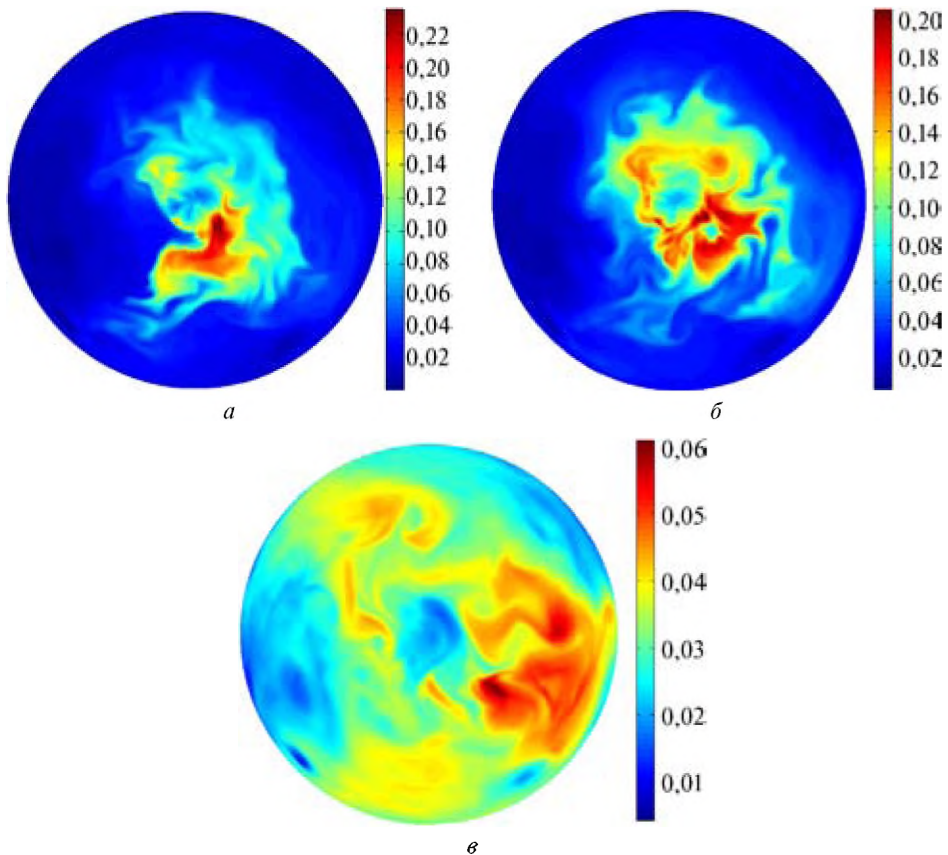
**Рис. 1.** Относительная глубина полосы поглощения 1,25 мкм в спектре постоянной Северной полярной шапки, чувствительная к микроструктуре ледового покрова: *a* —  $L_S = 93...97^\circ$ ; *б* —  $L_S = 113...115^\circ$  (внешняя граница рисунков соответствует широте  $70^\circ$  с. ш.)

приближении. Топография Марса задана на основе данных альтиметра MOLA, усредненных к разрешению модели. При этом масштаб ряда топографических деталей, превышающих шкалу высоты атмосферы, таких как Олимп и вулканы Фарсиды, искусственно занижен во избежание локальных численных неустойчивостей в поведении модели. Радиационный блок модели использует параметризацию спектральных свойств  $\text{CO}_2$  и заданные оптические характеристики аэрозольной составляющей атмосферы, не привязанные к источникам пылевого и конденсационного аэрозоля либо их адвекции атмосферными потоками. Вместо этого атмосфере приписывается усредненная оптическая плотность с квазиравномерным распределением, имитирующим повышенную концентрацию пыли в нижних слоях атмосферы и в низких широтах. Задача переноса излучения решается отдельно для коротковолнового (солнечного) канала и для инфракрасного канала в приближении многократного рассеяния и полученные интегральные радиационные потоки энергии дифференцируются, откуда получаются оценки для скоростей нагрева и выхолаживания атмосферы.

Гидрологический цикл в модели параметризован следующим образом. На поверхности Марса задан единственный бесконечный резервуар воды — постоянная Северная полярная шапка. В нижнем модельном слое атмосферы проверяются условия насыщения, в соответствии с которыми поверхностный лед может испаряться и попадать в атмосферу либо, наоборот, конденсироваться из атмосферы на поверхность. Водяной пар, пыль и конденсационный аэрозоль считаются пассивными примесями, перенос которых осуществляется атмосферными потоками в соответствии с решением уравнений динамики. Источники пыли на поверхности заданы через температурный контраст с нижним модельным слоем атмосферы, параметризующий мелкомасштабные конвективные вихри. Кинетика конденсационных процессов в облаках рассчитывается на основе классического подхода с учетом зависимости вероятности нуклеации и скоростей конденсации и сублимации от размеров частиц [Бурлаков, Родин, 2011]. Ядрами конденсации служат частицы пыли, распределение которых в явном виде задано в модели, причем каждому размеру пыли приписываются два момента распределения ледяных частиц. Масса аэрозольных частиц влияет на скорость седиментации, которая рассчитывается одновременно с турбулентной диффузией. Таким образом, аккумуляция конденсированной воды на поверхности Марса в виде льда и изморози и ее перенос в атмосфере в виде пара и облаков обеспечивает суточный и сезонный цикл миграции воды на планете. Для установления квазистационарного распределения поверхностных запасов воды необходимо провести расчет в течение нескольких десятков марсианских лет, после чего годовой цикл практически не изменяется. Внешними параметрами модели являются оптические свойства аэрозоля (оптическая толщина, альbedo однократного рассеяния, фазовая функция рассеяния) и интенсивность источников пыли различных размеров на поверхности. Значения этих параметров были подобраны так, чтобы полученные температурные поля и распределения водяного пара соответствовали результатам наблюдений.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Распределение водяного пара в Северном полушарии в течение сезона афе-  
 лия показаны на рис. 2. Качественный анализ поля скоростей в окрестно-  
 сти Северной полярной шапки показывает, что в более ранний сезон  
 ( $L_S = 90...110^\circ$ ) в полярной области формируется пара циклонов на долготах  
 около  $90^\circ$  в. д. и  $270^\circ$  в. д. с зонами повышенного содержания водяного пара на  
 их западной периферии. При  $L_S = 110...120^\circ$  количество циклонов и сопряжен-  
 ных с ними максимумов содержания водяного пара увеличивается до трех, а в  
 зоне  $90...270^\circ$  в. д. формируется мощный антициклон, также сопровождаемый  
 повышенным содержанием водяного пара на периферии. В дальнейшем, при  
 приближении к точке осеннего равноденствия, по мере миграции циркумполь-  
 ярного вихря в более низкие широты тройная структура расширяется и также  
 смещается в область низких широт. Наконец, в момент  $L_S \sim 145^\circ$  в течение



**Рис. 2.** Мгновенные распределения водяного пара в столбе атмосферы ( $\text{кг/м}^3$ ) в Северном полушарии по результатам моделирования: *a* –  $L_S = 92^\circ$ ; *b* –  $L_S = 113^\circ$ ; *c* –  $L_S = 143^\circ$ . Нерегулярные возмущения в распределениях вызваны крупномасштабной турбулентностью, разрешаемой на расчетной сетке

2...3 суток происходит быстрое распространение волны-3 к экватору, сопровождаемое массивным переносом паров воды в Южное полушарие, после чего глобальная ячейка Хэдли, направленная в сезон солнцестояния из летнего полушария в зимнее, меняет свою конфигурацию на симметричную, направленную от экватора к обоим полюсам, и устанавливается режим циркуляции атмосферы, характерный для сезона равноденствия. Выявленная корреляция распределения паров воды с тройной волновой структурой (см. рис. 2в) говорит о значительном вкладе волновых механизмов в глобальный перенос воды в этот период.

При сравнении данных рис. 1 и 2 обнаруживается очевидное сходство в количестве, расположении и сезонной изменчивости максимумов наблюдаемой глубины поглощения водяного льда на 1,25 мкм (см. рис. 1) и концентрации водяного пара (см. рис. 2) в окрестности Северной полярной шапки в сезон афелия. Предлагаемое в качестве рабочей гипотезы объяснение этого факта состоит в том, что и повышенная концентрация водяного пара, и ускоренное старение льда, выражающееся в укрупнении его микроструктуры, является следствием воздействия стационарных циклонов, количество и положение которых однозначно зависит от сезона. Следует отметить, что использованная в работе модель общей циркуляции атмосферы Марса является климатической моделью и не пригодна для прогноза погоды, поскольку в ней не используется усвоение данных измерений текущего состояния атмосферы. Возникает вопрос о детерминированности синоптических явлений в атмосфере Марса.

С точки зрения динамической природы предсказываемые моделью циклонические вихри являются возмущениями циркумполярного течения, характерного для сезона солнцестояния. Такие вихри достаточно часто наблюдаются на Земле в высоких широтах, однако в земной тропосфере их масштаб меньше, а соответствующее волновое число достигает 5 и более. В атмосфере Марса, в отличие от Земли, как правило наблюдаются возмущения с волновыми числами не более 3. Причиной этой особенности является, по-видимому, повышенная по сравнению с Землей статическая устойчивость атмосферы Марса. Действительно, в силу низкой собственной теплоемкости, обусловленной низким давлением (4...10 мбар у поверхности), и значительного поглощения прямого солнечного излучения пылевым аэрозолем, типичные значения вертикального градиента температуры в свободной атмосфере Марса составляют 2,5...4 К/км, т. е. атмосфера существенно субадиабатична. Как показали Бубнов Б. М. и Голицын Г. С. (1985), статическая устойчивость атмосферы влияет не только на локальную конвекцию и вертикально распространяющиеся гравитационные волны, но и на условия возбуждения крупномасштабных инерционных волн. Чем выше статическая устойчивость атмосферы, т. е. чем более она изотермична, тем более крупномасштабные возмущения возможны, характеризующиеся более низкими зональными волновыми числами. Поскольку, как показывают наблюдения и результаты моделирования, в атмосфере Марса реализуются зональные волновые числа в диапазоне 1...3, переходы между соответствующими конфигурациями волновых возмущений носят дискретный

характер и влияют на глобальное состояние климатической системы, включая гидрогический цикл.

Сезонная детерминированность перестроек зональных волновых чисел возмущений Марса может быть вызвана, в свою очередь, как изменением статической устойчивости, так сезонной эволюцией меридионального сдвига скорости циркумполярных течений. Оба эти параметра зависят от конфигурации глобальной ячейки Хэдли, которая, в свою очередь, определяется зависимостью режима инсоляции от широты, т. е. является однозначной функцией сезона. Вертикальный градиент температуры атмосферы влияет на вероятность возбуждения бароклинной неустойчивости, а меридиональный сдвиг скорости — инерционной (баротропной) неустойчивости. В обоих случаях снижение устойчивости атмосферы приводит к возбуждению более высокочастотных пространственных мод. Несмотря на то, что сезонные изменения атмосферных параметров — непрерывный процесс, перестройки различных мод возмущений циркумполярного течения носят дискретный характер в силу низких значений зональных волновых чисел. Тот факт, что волновые числа и фазы возмущений уверенно воспроизводятся в численном расчете без усвоения дополнительной информации, говорит о принципиальной предсказуемости не только климата, но и синоптических явлений в атмосфере Марса.

### Заключение

Основываясь на сопоставлении результатов численного моделирования общей циркуляции атмосферы Марса с данными наблюдений, можно сделать вывод о волновом характере пространственных вариаций интенсивности ряда процессов, участвующих в гидрологическом цикле планеты, в частности, меридионального переноса водяного пара и сублимации ледового покрова постоянной полярной шапки. Эти вариации, а также наблюдаемые в летний сезон вихри в атмосферных течениях отражают волновые возмущения системы околополярной циркуляции атмосферы Марса в результате инерционной и бароклинной неустойчивостей. Перестройки зональных волновых чисел возмущений носят дискретный характер, жестко детерминированы сезоном и могут определяться как изменяющимся меридиональным сдвигом скорости зональных течений, так и вертикальной термической структурой околополярной атмосферы.

### Литература

- Бубнов Б. М., Голицын Г. С. (1985) Теоретическое и лабораторное моделирование влияния статической устойчивости на структуру общей циркуляции атмосферы // Докл. АН СССР. 1985. Т. 281. № 5. С. 1076–1079.
- Бурлаков А. В., Родин А. В. (2011) Одномерная численная модель кинетики формирования облаков  $H_2O$  в атмосфере Марса // Астроном. вестн. 2011.
- Евдокимова Н. А., Кузьмин Р. О., Родин А. В. и др. (2009) Исследование распределения связанной воды, водяного льда и инея на поверхности Марса: обработка и коррекция данных наблюдений спектрометра OMEGA с борта КА Mars-Express // Астроном. вестн. 2009. Т. 43. № 5. С. 387–405.



- Родин А. В., Евдокимова Н. А., Кузьмин Р. О. и др. (2010) Отождествление следов атмосферных планетарных волн в динамике сезонной сублимации и конденсации льдов в полярных районах Марса по данным ИК гиперспектрометра OMEGA КА Mars-Express // Косм. исслед. 2010. Т. 48. № 2. С. 1–8.
- Родин А. В., Уилсон Дж. (2006) Гидрологический цикл в атмосфере Марса: экспериментальные данные и численное моделирование // Косм. исслед. 2006. Т. 43. № 11. С. 1744–1758.
- Федорова А. А., Родин А. В., Бакланова И. В. (2004) Сезонный цикл водяного пара в атмосфере Марса по данным эксперимента MAWD КА «Викинг-1» и «Викинг-2» // Астроном. вестн. 2004. Т. 38. С. 421–433.
- Clancy R. T., Grossman A. W., Wolff M. J. et al. (1996) Water vapor saturation at low altitudes around Mars aphelion: A key to Mars climate? // Icarus. 1996. V. 122. P. 36–62.
- Forget F., Hourdin F., Fournier R. et al. (1999) Improved General Circulation Models of the Martian Atmosphere from the surface to above 80 km // J. Geophysical Research. 1999. V. 104. N. E10. P. 24155–24176.
- Haberle R. M., Pollack J. B., Barnes J. R. et al. (1993) Mars atmospheric dynamics as simulated by the NASA Ames General Circulation Model I. The zonal mean circulation // J. Geophysical Research. 1993. V. 98. P. 3093–3123.
- Jakosky B. M., Farmer C. B. (1984) The seasonal and global behavior of water vapor in Mars atmosphere: Complete global results of the Viking atmospheric water detector experiment // J. Geophysical Research. 1984. V. 87 (B4). P. 2999–3019.
- Levy C. B. (1985) The general circulation of Mars: Models and observations // Advances in Geophysics. 1985. V. 28a. P. 327–346.
- Richardson M. I., Wilson R. J. (2002) Investigation of the nature and stability of the Martian seasonal water cycle with a general circulation model // J. Geophysical Research. 2002. V. 107 (E5). P. 5031. doi:10.1029/2001JE001536.

## CHANGING WAVE REGIMES OF MARS ATMOSPHERIC CIRCULATION

A. V. Rodin<sup>1,2</sup>, N. A. Evdokimova<sup>2</sup>, A. V. Burlakov<sup>2</sup>, A. A. Fedorova<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Dolgoprudny  
<sup>2</sup> Space Research Institute, Moscow

The results of general circulation modeling of the Martian atmosphere are compared with observations obtained by OMEGA mapping spectrometer onboard Mars-Express s/c. Spatial distribution of water vapor density, depth and microstructure of the polar cap ice sheets reveal zonally symmetric structures evolving with season, associated with the effect of the inertial waves in the atmospheric circulation.

*Keywords:* Mars, general circulation model, atmospheric waves.

---

**Rodin Alexander Vjacheslavovich** — Senior Research Assistant, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, e-mail: Alexander.Rodin@phystech.edu.

**Evdokimova Nadejda Anatolevna** — Junior Research Associate, e-mail: evdokimova@iki.rssi.ru.

**Burlakov Alexey Vladimirovich** — Junior Research Associate, e-mail: evdokimova@iki.rssi.ru.

**Fedorova Anna Aleksandrovna** — Senior Research Assistant, e-mail: fedorova@iki.rssi.ru.

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ТЕМПЕРАТУРЫ И НЕСФЕРИЧНОСТИ ЗЕМЛИ НА ГЛОБАЛЬНУЮ ЦИРКУЛЯЦИЮ СРЕДНЕЙ АТМОСФЕРЫ

**И. В. Мингалев, О. В. Мингалев, В. С. Мингалев**

*Полярный геофизический институт Кольского научного центра РАН  
(ПГИ КолНЦ РАН), Апатиты, Мурманская обл.*

Разработанная ранее математическая модель глобальной системы нейтрального ветра земной атмосферы применяется для исследования механизмов, ответственных за формирование планетарной циркуляции средней атмосферы. Результаты моделирования показывают, что горизонтальная неоднородность температуры атмосферы и несферичность Земли должны оказывать существенное влияние на глобальную циркуляцию атмосферы.

Работа поддержана программой Президиума РАН № 16 и РФФИ (проект № 10-01-00451).

*Ключевые слова:* модель глобальной циркуляции, численное моделирование.

### Введение

В течение последних нескольких лет в Полярном геофизическом институте Кольского научного центра РАН (ПГИ КолНЦ РАН) разрабатывалась, совершенствовалась и использовалась численная глобальная модель горизонтальной и вертикальной составляющих скорости ветра в нижней и средней атмосфере Земли. Эта модель основана на численном решении системы нестационарных трёхмерных уравнений переноса, включающей в себя уравнения Навье – Стокса для сжимаемого вязкого газа, а также уравнение неразрывности для него. Модель позволяет рассчитывать трёхмерные глобальные распределения зональной, меридиональной и вертикальной компонент скорости нейтрального ветра и плотности воздуха на уровнях тропосферы, стратосферы, мезосферы и нижней термосферы Земли без каких-либо ограничений на вертикальный перенос атмосферного газа. В первоначально разработанном варианте модели, который был описан в работе [Mingalev, Mingalev, 2001], областью расчётов являлся шаровой слой, окружающий Землю в пределах высот от 0 до 120 км. Позже этот вариант модели был усовершенствован: форма земной поверхности была сделана более приближенной к реальности, а именно, от шарообразной была преобразована в сплюснутый с полюсов эллипсоид вращения. Областью расчётов стал окружающий Землю глобально слой, простирающийся от земной поверхности до высоты 126 км над экватором; усовершенствованный вариант модели был описан в работах [Мингалев, Мингалев, 2005; Mingalev et al., 2007]. В настоящей работе оба варианта этой модели применяются для исследования

---

**Мингалев Игорь Викторович** — старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, e-mail: mingalev\_i@pgia.ru.

**Мингалев Олег Викторович** - старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, e-mail: mingalev\_o@pgia.ru.

**Мингалев Виктор Степанович** — заведующий сектором, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: mingalev@pgia.ru.

механизмов, ответственных за формирование планетарной циркуляции средней атмосферы.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Применяемая в настоящей работе модель имеет два существенных отличия от других моделей общей циркуляции атмосферы. Во-первых, в ней температура воздуха не рассчитывается, а является входным параметром модели и задается по какой-либо эмпирической модели, например MSISE-90 [Hedin, 1991], NRLMSISE-00 [Picone et al., 2002]. Такой способ задания температуры обусловлен тем, что на высотах 20...80 км сечения некоторых процессов излучения – поглощения и константы скоростей некоторых фотохимических реакций, существенно влияющих на тепловой режим атмосферы, — известны пока недостаточно точно. Поэтому расчёт нагрева атмосферы на высотах 20...80 км с приемлемой точностью является трудно выполнимой задачей. Неточность в расчёте температуры воздуха может привести к качественно неверной картине циркуляции атмосферы. В силу изложенных причин задание температуры по эмпирическим моделям, которые построены по статистически осреднённым экспериментальным данным и верно отражают реальную зависимость температуры воздуха от высоты, широты и долготы, представляется авторам оправданным.

Во-вторых, в применяемой в настоящей работе модели вертикальная скорость газа находится не из условия гидростатического равновесия, а путем численного решения полного уравнения движения для вертикальной составляющей скорости без пренебрежения какими-либо членами. Таким образом, все три компоненты скорости рассчитываются численным решением полных уравнений движения вязкого сжимаемого газа. При этом не используется уравнение гидростатики, обычно применяемое в моделях общей циркуляции атмосферы, поскольку это уравнение в моделях общей циркуляции атмосферы приводит, как известно, к тому, что рассчитываемые по таким моделям вертикальные скорости обычно не превышают 1 м/с. В то же время имеются экспериментальные данные о том, что в высоких широтах в средней и верхней атмосфере наблюдаются большие (несколько десятков метров в секунду) значения вертикальной компоненты скорости нейтрального ветра, которые не могут быть получены при помощи моделей, базирующихся на уравнениях гидростатики.

Таким образом, применяемая модель основана на численном решении полной системы уравнений движения вязкого сжимаемого газа, состоящей из уравнения неразрывности и трёх полных уравнений для вертикальной, зональной и меридиональной компонент гидродинамической скорости без каких-либо упрощений. Для решения уравнений применяется метод конечных разностей. Расчётная сетка равномерна по долготе и широте и имеет по этим измерениям одинаковый шаг, равный  $1^\circ$ . По высоте расчётная сетка неравномерна, её шаг не превышает 2 км. Влияние турбулентности, имеющей масштабы, меньшие шагов расчётной сетки, на среднее течение атмосферного газа принимается во внимание, для параметризации этой турбулентности используется одна из существующих эмпирических моделей. Граничные условия задаются так, чтобы выполнялся

закон сохранения массы в области расчётов. Модель способна учитывать различные комбинации солнечной и магнитной активности, а также различные условия солнечной освещённости, обусловленные наклоном земной оси. Детальное описание применяемой математической модели, в том числе решаемые уравнения, можно найти в работах [Мингалева, Мингалева, 2005; Mingalev et al., 2007].

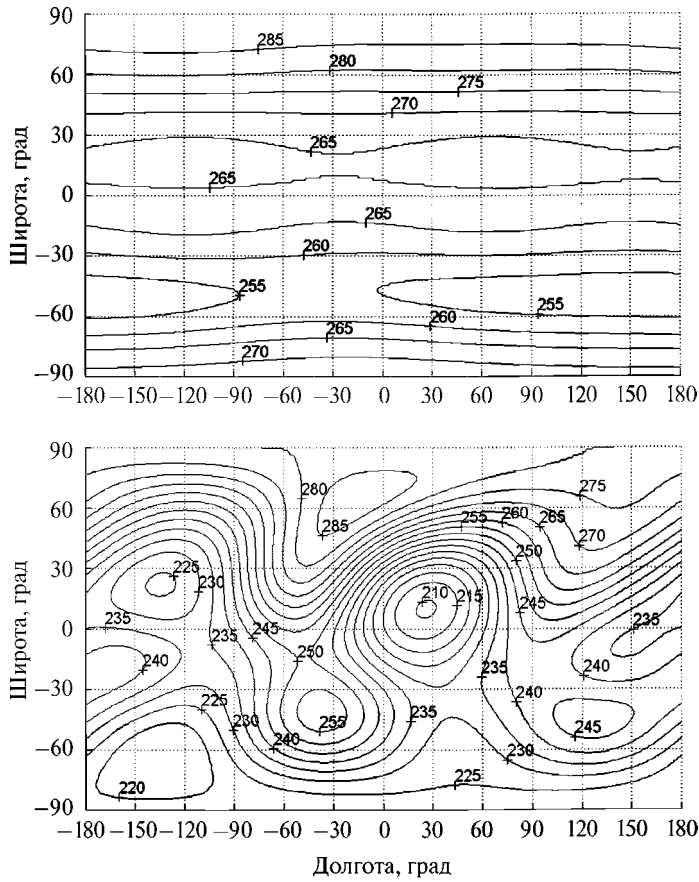
## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ В ПРИБЛИЖЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

### 2.1. Влияние горизонтальной неоднородности температуры на глобальную циркуляцию атмосферы

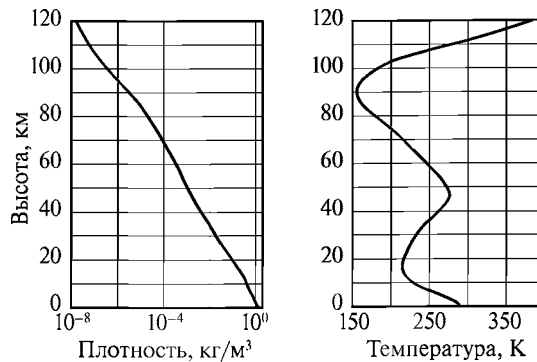
Рассмотрим результаты расчётов, полученные при помощи первоначально разработанного варианта модели, в котором областью расчётов является шаровой слой, окружающий Землю в пределах высот от 0 до 120 км. Для определения влияния горизонтальной неоднородности температуры воздуха на глобальную циркуляцию атмосферы были рассчитаны вариации в ходе установления и сами установившиеся стационарные глобальные распределения горизонтальных и вертикальной составляющих скорости, а также плотности нейтрального газа в окружающем Землю шаровом слое. Стационарные распределения рассчитываемых величин находились методом установления для момента UT = 10:30 для 10 июня 2000 г., когда в Северном полушарии лето, в условиях невысокой солнечной активности ( $F_{10,7} = 101$ ) и низкой магнитной активности ( $K_p = 1$ ).

Стационарные распределения рассчитываемых величин были найдены при двух различных вариантах задания температуры нейтрального газа, которая считалась неизменной во времени. В обоих вариантах распределения температуры задавались неоднородными по высоте, однако одно из них было однородным, а другое — неоднородным в горизонтальных направлениях. Неоднородное в горизонтальных направлениях распределение температуры нейтрального газа задавалось по эмпирической модели MSISE-90 [Hedin, 1991]. Это распределение температуры, рассчитанное для двух разных высот, приведено на рис. 1 (см. с. 68), а на рис. 2 (справа) (см. с. 68) показан его вид, полученный для одной фиксированной точки с координатами  $45,5^\circ$  с. ш. и  $55^\circ$  з. д. Однородное в горизонтальных направлениях распределение температуры задавалось неизменным по широте и долготе и имеющим одинаковую высотную зависимость, такую же, как в упомянутой выше фиксированной точке, т. е. показанную на рис. 2 (слева).

Отметим, что в описываемых расчётах начальные условия задавались по-разному. В обоих рассматриваемых вариантах расчётов в начальный момент во всех точках расчётной области все три компоненты скорости нейтрального газа считались нулевыми. Однако начальные распределения плотности нейтрального газа брались различными в двух описываемых в настоящем разделе вариантах. При неоднородном в горизонтальных направлениях распределении температуры начальное распределение плотности нейтрального газа также задавалось неоднородным в горизонтальных направлениях, определяемым



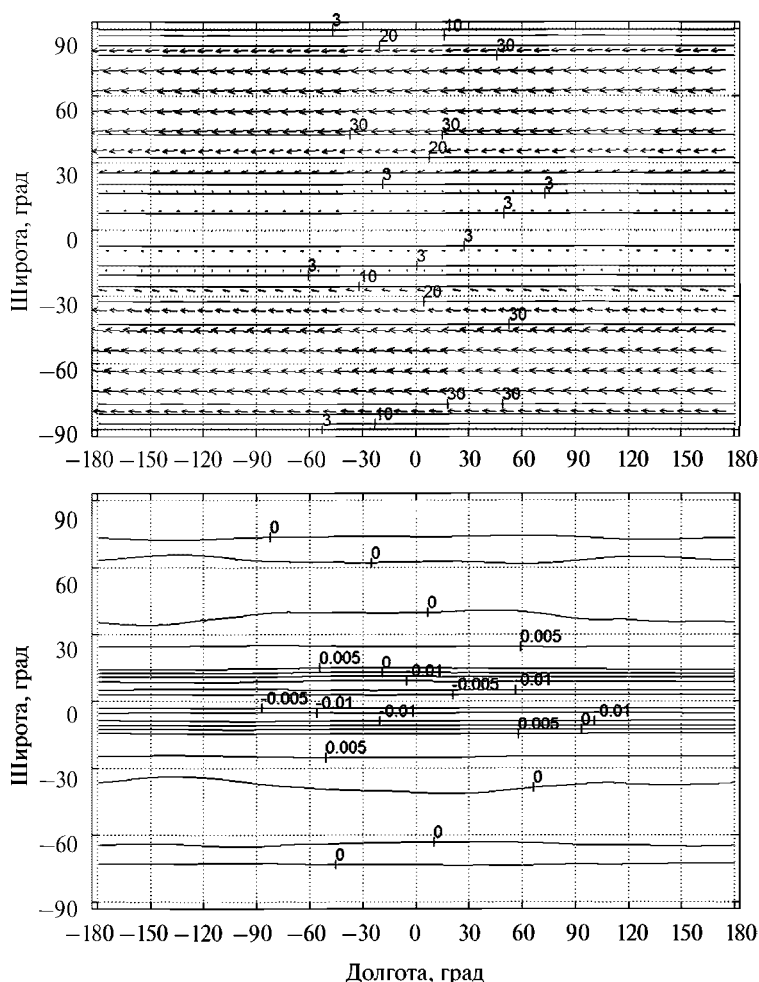
**Рис. 1.** Неоднородное горизонтальное распределение температуры нейтрального газа (K) на высоте 50 км (вверху) и 110 км (внизу), рассчитанное по эмпирической модели MSISE-90 для 10 июня, UT = 10:30



**Рис. 2.** Высотные профили плотности и температуры нейтрального газа для точки с координатами 45,5° с. ш., 55° з. д., рассчитанные по эмпирической модели MSISE-90 для 10 июня, UT = 10:30

по эмпирической модели MSISE-90 [Hedin, 1991]. При однородном в горизонтальных направлениях распределении температуры начальное распределение плотности нейтрального газа также считалось однородным в горизонтальных направлениях; оно считалось неизменным по широте и долготе и имеющим одинаковую высотную зависимость, такую же, как в упоминавшейся выше фиксированной точке; эта высотная зависимость приведена на рис. 2 (слева).

Результаты расчётов, полученные при однородном в горизонтальных направлениях распределении температуры нейтрального газа, частично представлены на рис. 3, полученные при неоднородном в горизонтальных направлениях распределении температуры нейтрального газа — на рис. 4 (см. с. 70).



**Рис. 3.** Установившиеся горизонтальная скорость и линии уровня её величины (м/с) (вверху) и вертикальная скорость (внизу) на высоте 50 км для случая горизонтально однородной температуры

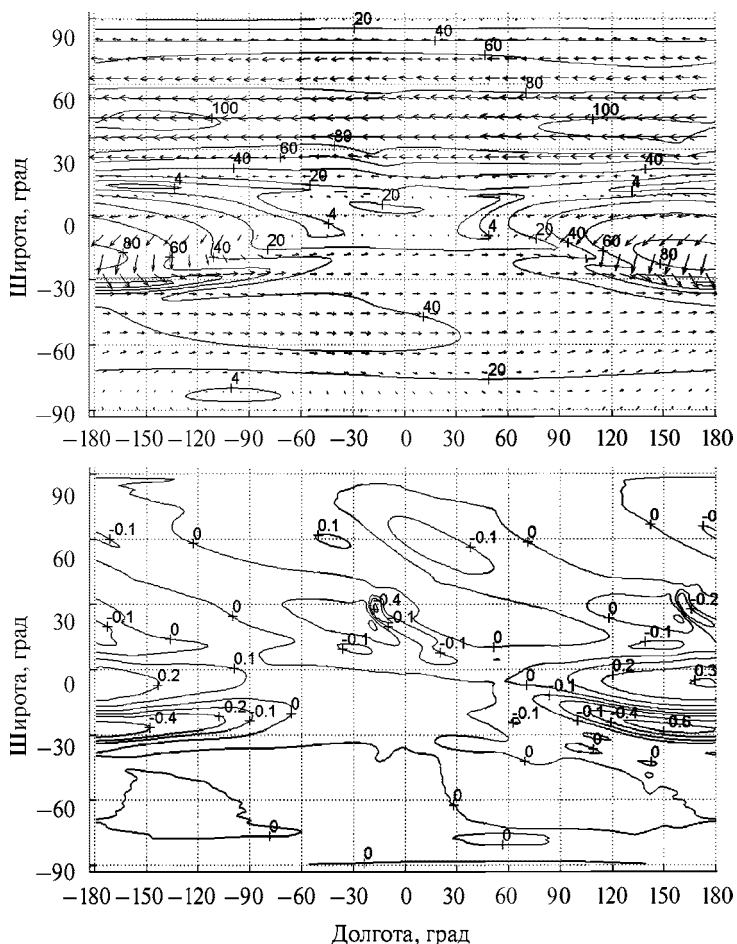


Рис. 4. Установившиеся горизонтальная скорость и линии уровня её величины (м/с) (вверху) и вертикальная скорость (внизу) на высоте 50 км для случая горизонтально неоднородной температуры

Видно, что в обоих вариантах расчётов глобальные распределения горизонтальных и вертикальной компонент скорости нейтрального газа имеют неоднородную структуру. При горизонтально однородной температуре в обоих полушариях на всех высотах горизонтальная скорость направлена на запад; на высоте 90 км она может достигнуть величины 120 м/с. При горизонтально неоднородной температуре в Северном полушарии на всех высотах горизонтальная скорость направлена на запад; выше 70 км её значения могут превысить 200 м/с. В Южном полушарии на разных высотах она может быть направлена как на запад, так и на восток; в страто-мезосфере она направлена на восток.

Модельные расчёты могут прояснить вопрос о причинах формирования самых крупных объектов планетарной циркуляции — циркумполярных вихрей (ЦПВ) Северного и Южного полушарий. На высотах страто-мезосферы (при-

мерно от 30 до 70 км) эти циркумполярные вихри сформировались и отчётливо видны на приведённых рис. 3 и 4. Причем в случае горизонтально неоднородной температуры в летнем (Северном) полушарии сформировался циркумполярный антициклон, а в зимнем (Южном) полушарии — циркумполярный циклон. Это полностью соответствует результатам наблюдений.

Расчёты показали, что в случае горизонтально однородной температуры в летнем (Северном) полушарии по-прежнему сформировался циркумполярный антициклон, что соответствует наблюдениям, а в зимнем (Южном) полушарии вместо циклонического вихря сформировался циркумполярный антициклон, что не наблюдается в действительности. Это свидетельствует о важной роли горизонтальной неоднородности температуры атмосферы в формировании зимнего циркумполярного вихря (в Южном полушарии). Летний циркумполярный вихрь (в Северном полушарии) сформировался и при горизонтально однородной температуре. Однако скорость движения воздуха в нём оказалась значительно меньшей, чем в случае горизонтально неоднородной температуры.

Кроме того, оказывается, что горизонтальная неоднородность температуры атмосферы может вызывать вертикальные конвективные крупномасштабные вихри, в которых вертикальная скорость газа в отдельных областях может достигать 1,5 м/с, в то время как при горизонтально однородной температуре эта скорость не превышает 0,2 м/с.

### 2.2. Качественное объяснение результатов моделирования

Рассмотрим уравнение движения воздуха в прямоугольной системе координат:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla) \vec{V} \right] = \rho \vec{F} + \nabla \cdot \vec{P},$$

где  $\rho$  — плотность,  $\vec{V}$  — скорость,  $\vec{P}$  — тензор напряжений,  $\rho \vec{F}$  — сила, складывающаяся из четырёх частей:

$$\rho \vec{F} = m\vec{g} - 2\rho(\vec{\Omega} \times \vec{V}) - \rho \left[ \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \right] + \vec{F}^{ion}$$

— силы тяжести, кориолисовой силы, переносной силы инерции (центробежной силы) и силы трения об ионный газ (здесь  $\vec{\Omega}$  — угловая скорость вращения Земли;  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведённый из центра Земли в точку наблюдения).

Рассмотрим силы, приложенные к бесконечно малой частице атмосферного газа, схематически изображенные на рис. 5, в случае горизонтально

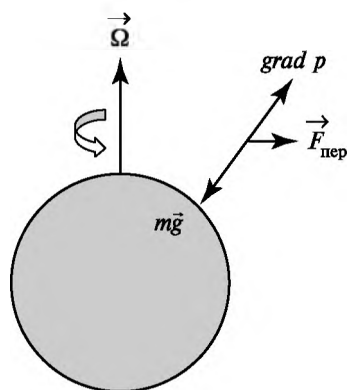


Рис. 5. Схематическое изображение сил, приложенных к бесконечно малой частице атмосферного газа, в случае горизонтально однородной температуры в приближении сферической земной поверхности



однородной температуры. Из данных этого рисунка видно, что сумма трёх сил (силы тяжести, переносной силы инерции и вертикальной силы давления) будет ненулевой и направленной в сторону экватора. Она вызовет появление направленной к экватору скорости, а кориолисова сила, которая действует перпендикулярно вектору скорости, породит направленную на запад скорость. Поэтому при горизонтально однородной температуре на всех высотах горизонтальная скорость имеет преимущественное направление на запад, что хорошо видно, в частности, на рис. 3.

При учёте горизонтальной неоднородности температуры возникают горизонтальные градиенты давления, которые вызывают дополнительную систему движений нейтрального газа, что может существенно изменить общую циркуляцию атмосферы. Эти изменения обнаруживаются, в частности, при сравнении рис. 3 и 4.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ ПРИ УЧЁТЕ НЕСФЕРИЧНОСТИ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

#### 3.1. Влияние несферичности Земли на глобальную циркуляцию атмосферы

Хотя отклонение земной поверхности от сферы весьма незначительно (радиус на полюсах меньше радиуса на экваторе всего на 0,34%), реальная форма Земли не является шаром. Поэтому нами был разработан такой вариант глобальной математической модели, в котором учитывается несферичность земной поверхности. В этом варианте модели нижняя граница области расчётов является не сферой, а сплюснутым с полюсов эллипсоидом вращения, чей радиус на экваторе превышает радиус на полюсе. Верхняя граница области моделирования является сферой, проходящей на высоте 126 км над экватором, а расчётная сетка — равномерной по долготе и широте, и имеет по этим измерениям шаг  $1^\circ$ . Расчётная сетка вдоль радиуса неравномерна и содержит 232 слоя.

При помощи учитывающего несферичность Земли варианта глобальной модели нами были рассчитаны установившиеся распределения плотности и скорости воздуха в расчётной области для момента UT = 10:30 для 16 июля 2000 г., когда в Северном полушарии было лето, в условиях невысокой солнечной активности ( $F_{10,7} = 101$ ) и низкой магнитной активности ( $K_p = 1$ ). При этом неоднородное в горизонтальных направлениях планетарное распределение температуры воздуха задавалось по эмпирической модели NRLMSISE-00 [Picone et al., 2002]. Это распределение температуры, рассчитанное для высоты 50 км, приведено на рис. 6 (см. с. 73). Для этих же гелиогеофизических условий и при использовании только что указанного планетарного распределения температуры воздуха нами были рассчитаны установившиеся распределения плотности и скорости воздуха в расчётной области также и при помощи того варианта глобальной математической модели, в котором земная поверхность считается сферой. Результаты расчётов частично представлены на рис. 7 и 8 (см. с. 73, 74).

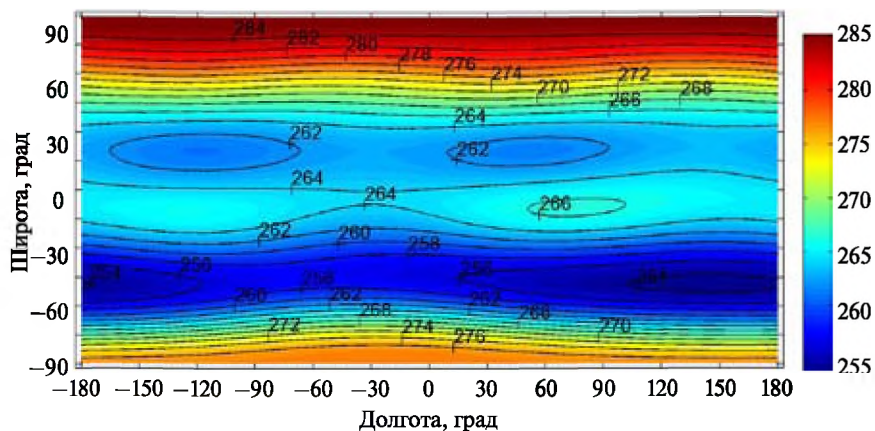


Рис. 6. Распределение температуры нейтрального газа (K) на высоте 50 км, рассчитанное по эмпирической модели NRLMSISE-00 для 16 июля, UT = 10:30

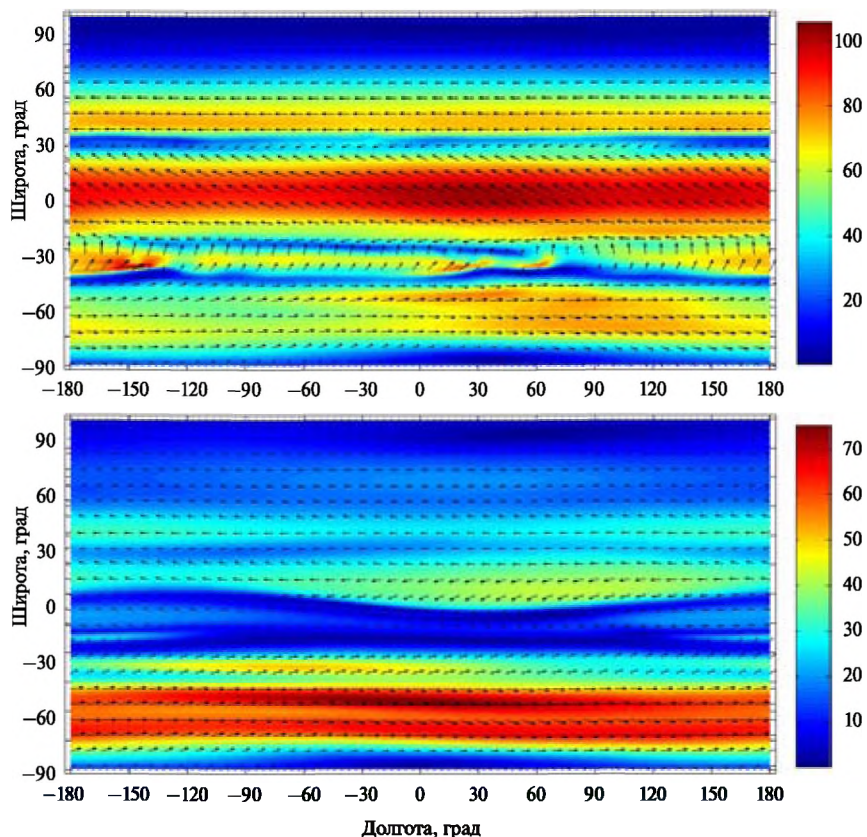
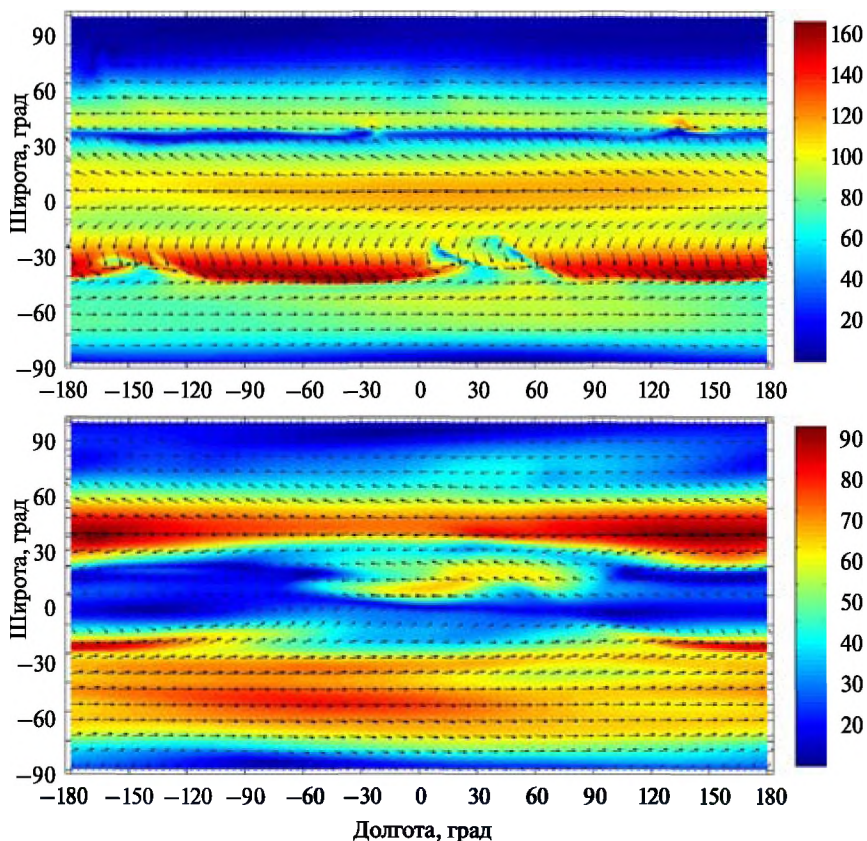


Рис. 7. Распределения горизонтальной скорости ветра (м/с) на высоте 30 км, рассчитанные в приближении сферической земной поверхности (вверху) и при учёте несферичности земной поверхности (внизу)



**Рис. 8.** Распределения горизонтальной скорости ветра (м/с) на высоте 50 км, рассчитанные в приближении сферической земной поверхности (вверху) и при учёте несферичности земной поверхности (внизу)

Анализ результатов численных расчётов, в частности представленных на рис. 7 и 8, показал, что планетарная циркуляция атмосферы, полученная при учёте несферичности Земли, характеризуется следующим. В области, окружающей южный географический полюс (там зима), на высотах менее 60 км сформировался циркумполярный вихрь с восточным направлением зональной компоненты скорости нейтрального газа (циркумполярный циклон) и с границей, сильно меняющейся с высотой. Максимальных размеров этот вихрь достигает на высотах, близких к тропопаузе и стратопаузе. Граница его на этих высотах на дневной стороне достигает примерно  $10^\circ$  с. ш. На высотах около 20 км этот вихрь резко сужается.

В области, окружающей северный географический полюс (там лето) на высотах 20...60 км сформировался циркумполярный вихрь с западным направлением зональной компоненты скорости нейтрального газа (циркумполярный антициклон), а на высотах ниже 20 км — циркумполярный вихрь с восточным направлением зональной компоненты скорости (циркумполярный циклон).

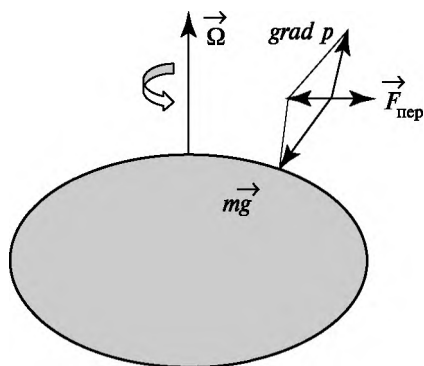
Полученная картина полностью соответствует результатам многолетних наблюдений для высот 0...60 км [Кац, 1968; Ханевская, 1968; Погосян, 1972; Кантер, 1983] и свидетельствует об адекватности применяемой численной модели.

Сравнивая между собой результаты расчётов, полученные в приближении сферической земной поверхности и при учёте несферичности Земли, можно обнаружить ряд общих закономерностей. Видно, что в обоих случаях горизонтальная компонента скорости нейтрального газа является сильно изменяющейся функцией широты, долготы и высоты. Горизонтальная скорость ветра может иметь сильно отличающиеся направления в близко расположенных точках. Вертикальная скорость нейтрального газа может иметь противоположные направления в горизонтальных областях с различной конфигурацией. Горизонтальные области, в которых вертикальный ветер направлен вверх, имеют, как правило, большое протяжение как по длине, так и по ширине. Горизонтальные области, в которых вертикальный ветер направлен вниз, обычно являются длинными, но узкими полосами. Максимальные абсолютные значения вертикальной скорости, направленной вверх, оказываются меньшими, чем у направленной вниз скорости. Значения направленной вниз скорости могут достигать нескольких метров в секунду на высотах нижней термосферы в ограниченных по размерам узких длинных горизонтальных областях, совпадающих, как правило, с областями, в которых поле горизонтальной скорости имеет резкие градиенты.

Вместе с тем результаты расчётов, полученные в приближении сферической земной поверхности и при учёте несферичности Земли, обнаруживают ряд существенных различий. Хотя в обоих случаях в Северном полушарии формируется циркумполярный антициклон, а в Южном полушарии — циркумполярный циклон, аналогичные тем, которые известны из наблюдений, при учёте несферичности Земли на высотах тропосферы, стратосферы и мезосферы скорость зонального движения в Северном циркумполярном вихре оказывается существенно меньшей, а в южном циркумполярном вихре — существенно большей, чем в случае сферической земной поверхности. Можно сказать, что учёт несферичности земной поверхности приводит к появлению на всех широтах обоих полушарий направленной на восток зональной скорости, величина которой может достигать десятков метров в секунду в средних широтах. Этому факту может быть дано следующее качественное объяснение.

Рассмотрим силы, приложенные к бесконечно малой частице атмосферного газа, считая его температуру горизонтально однородной; эти силы схематически изображены на рис. 9 (см. с. 76) для случая несферической земной поверхности.

Видно, что в случае несферической земной поверхности сумма двух сил (силы тяжести и силы давления) будет ненулевой, так как они не лежат на одной прямой, как это было в случае сферической земной поверхности (см. рис. 5), и сумма этих двух сил направлена от экватора в сторону полюса. Она вызовет появление направленной к полюсу скорости, а кориолисова сила, которая действует перпендикулярно вектору скорости, породит направленную



**Рис. 9.** Схематическое изображение сил, приложенных к бесконечно малой частице атмосферного газа, в случае горизонтально однородной температуры при учёте несферичности земной поверхности

на восток скорость. Поэтому при учёте несферичности Земли на всех высотах горизонтальная скорость должна получить направленную на восток добавку к скорости. Этот факт можно заметить, в частности, при сравнении верхних и нижних частей рис. 7 и 8, несмотря на то, что учёт горизонтальной неоднородности температуры вносит определенные искажения в эту простую схему, приводя к возникновению дополнительной системы движений нейтрального газа.

### 3.2. Влияние горизонтальной неоднородности температуры на глобальную циркуляцию атмосферы при учёте несферичности Земли

Имеющиеся в нашем распоряжении результаты численных расчётов позволяют также выявить эффект влияния горизонтальной неоднородности температуры на глобальную циркуляцию атмосферы при учёте несферичности Земли, не проводя дополнительных расчётов. Дело в том, что в случае горизонтально однородной температуры при учёте несферичности земной поверхности сумма двух сил (силы тяжести и силы давления), показанных схематически на рис. 9, будет в точности равна переносной силе инерции (центробежной силе) и направлена противоположно ей. Это происходит благодаря способу построения поверхности сфероида, аппроксимирующего земную поверхность, на котором потенциал суммы силы тяжести и центробежной силы считается постоянным. Поэтому сумма всех трёх сил, показанных схематически на рис. 9, будет в точности равна нулевому вектору. Следовательно, при горизонтально однородной температуре при учёте несферичности земной поверхности атмосфера должна находиться в покое, никаких движений не должно быть, т. е. атмосфера должна быть статической. При этом плотность воздуха будет определяться по обобщенно-барометрической формуле [Мингалева, Мингалева, 2005]. Поэтому вся циркуляция атмосферы, рассчитанная в случае несферической земной поверхности при горизонтально неоднородной температуре, показанная, в частности, в нижних частях рис. 7 и 8, обусловлена только горизонтальной неоднородностью температуры. Скорость ветра при такой циркуляции может превышать 100 м/с на высотах, больших 60 км.

Можно отметить также, что результаты наших расчётов, выполненных при учёте несферичности земной поверхности, полностью подтверждают справедливость известной гипотезы о том, что циркумполярные вихревые движения

обязаны своим происхождением горизонтальной неоднородности температуры атмосферы, в частности, градиентам температуры воздуха между экватором и полюсами.

### Заключение

Разработанная ранее в ПГИ КолНЦ РАН численная модель трёхмерной системы нейтрального ветра в нижней и средней атмосфере Земли была применена для исследования механизмов, ответственных за формирование планетарной циркуляции средней атмосферы. Были использованы два варианта этой модели, в первом из которых поверхность Земли считается сферой, а областью расчётов является шаровой слой, окружающий Землю в пределах высот от 0 до 120 км, а во втором варианте модели форма земной поверхности была сделана более приближенной к реальности, а именно, от шарообразной была преобразована в сплюснутый с полюсов эллипсоид вращения.

Были выполнены численные расчёты установившейся общей циркуляции атмосферы для случая несферической земной поверхности и проведено их сравнение с аналогичными результатами, полученными в приближении сферической земной поверхности. Оказалось, что для условий, когда в Северном полушарии лето, первая из упомянутых — общая циркуляция атмосферы — наряду с общими чертами имеет и существенные отличия от второй. В обоих случаях в Северном полушарии формируется циркумполярный антициклон, а в Южном полушарии — циркумполярный циклон. Однако при учёте несферичности Земли на высотах тропосферы, стратосферы и мезосферы скорость зонального движения в северном циркумполярном вихре оказывается существенно меньшей, а в южном циркумполярном вихре — существенно большей, чем в случае сферической земной поверхности. Можно сказать, что учёт несферичности земной поверхности приводит к появлению на всех широтах обоих полушарий направленной на восток зональной скорости, величина которой может достигать десятков метров в секунду в средних широтах.

Оба варианта численной модели были использованы для определения влияния горизонтальной неоднородности температуры на глобальные распределения горизонтальных и вертикальной составляющих нейтрального ветра для условий, когда в Северном полушарии лето. Результаты моделирования показали, что горизонтальная неоднородность температуры атмосферы оказывает существенное влияние на глобальную циркуляцию средней атмосферы, в частности, на формирование циркумполярных вихрей Северного и Южного полушарий. Оказалось, что горизонтальная неоднородность температуры атмосферы может вызывать на высотах средней атмосферы не только крупномасштабные горизонтальные движения нейтрального газа со скоростями, превышающими 100 м/с, но и вертикальные конвективные крупномасштабные вихри, в которых вертикальная скорость газа в отдельных областях может достигать нескольких метров в секунду.

## Литература

- Кантер Ц. А. (1983) Вертикальный профиль циркумполярного движения в 60-километровом слое атмосферы // Исследование динамических процессов в верхней атмосфере. М: Гидрометеоздат, 1983. С. 215–222.
- Кац А. Л. (1968) Циркуляция в стратосфере и мезосфере. Л: Гидрометеоздат, 1968. 203 с.
- Мингалева И. В., Мингалева В. С. (2005) Модель общей циркуляции нижней и средней атмосферы Земли при заданном распределении температуры // Мат. моделирование. 2005. Т. 17. № 5. С. 24–40.
- Погосян Х. П. (1972) Общая циркуляция атмосферы. Л: Гидрометеоздат, 1972. 55 с.
- Ханевская И. В. (1968) Температурный режим свободной атмосферы над Северным полушарием. Л: Гидрометеоздат, 1968. 111 с.
- Hedin A. E. (1991) Extension of the MSIS Thermosphere Model into the Middle and Lower Atmosphere // J. Geophysical Research. 1991. V. 96. N. A12. P. 1159–1172.
- Mingalev I. V., Mingalev V. S. (2001) A numerical global model of the horizontal and vertical wind in the lower and middle atmosphere // Proc. 24<sup>th</sup> Annu. Seminar on Physics of Auroral Phenomena. Apatity, 27 Febr. — 2 Mar., 2001. Apatity: KSC RAS, PGI, 2001. P. 140–143.
- Mingalev I. V., Mingalev V. S., Mingaleva G. I. (2007) Numerical Simulation of the Global Distributions of the Horizontal and Vertical Wind in the Middle Atmosphere Using a Given Neutral Gas Temperature Field // J. Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2007. V. 69. N. 4/5. P. 552–568.
- Picone J. M., Hedin A. E., Drob D. P., Aikin A. C. (2002) NRLMSISE-00 Empirical Model of the Atmosphere: Statistical Comparisons and Scientific Issues // J. Geophysical Research. 2002. V. 107A, (SIA15). P. 1–16.

**A COMPUTATIONAL STUDY OF THE INFLUENCE OF HORIZONTAL  
NON-UNIFORMITY OF THE TEMPERATURE AND NON-SPHERICITY  
OF THE EARTH ON THE GLOBAL CIRCULATION OF THE MIDDLE  
ATMOSPHERE**

**I. V. Mingalev, O. V. Mingalev, V. S. Mingalev**

*Polar Geophysical Institute, Kola Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,  
Apatity, Murmansk region, Russia*

A mathematical model of the global neutral wind system of the Earth's atmosphere, developed earlier, is applied to investigate mechanisms responsible for the formation of the planetary circulation of the middle atmosphere. The simulation results indicate that the horizontal irregularity of the atmospheric temperature and non-sphericity of the Earth ought to influence appreciably on the global atmosphere circulation.

*Keywords:* global circulation model, numerical simulation.

---

**Mingalev Igor Viktorovich** — Senior Research Assistant, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, mail: mingalev\_i@pgia.ru.

**Mingalev Oleg Viktorovich** — Senior Research Assistant, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, mail: mingalev\_o@pgia.ru.

**Mingalev Victor Stepanovich** — Head of Sector, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: mingalev@pgia.ru.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО: АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Ю. М. Кривошеев

*Учреждение Российской академии наук  
Институт космических исследований РАН (ИКИ РАН), Москва*

Работа посвящена применению метода Монте-Карло к решению задач переноса излучения и её астрофизическим приложениям. Приводится описание алгоритма решения задачи переноса излучения в космической плазме путём моделирования траектории фотонов в среде. В качестве примера рассматривается задача о формировании рентгеновского спектра галактического микроквара SS433.

*Ключевые слова:* микрокварзы, джеты, SS433, перенос излучения, метод Монте-Карло

### 1. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Метод Монте-Карло по-другому называют методом статистических испытаний. Можно привести множество примеров процессов, проходящих в природе, исход которых не определен заранее и имеет вероятностный характер. При многократном повторении такого процесса мы будем получать разные результаты. Однако такого рода явления (процессы) подчиняются статистическим закономерностям, которые можно установить, повторяя один и тот же процесс множество раз, т. е. проводя статистические испытания. С возрастанием числа проведенных испытаний уменьшаются флуктуации, и можно получить интересные нас величины: например, среднее значение какой-нибудь величины, её дисперсию, плотность вероятности распределения и т. д. Процессы переноса имеют также вероятностный характер: переносимые частицы взаимодействуют со средой, в результате этого взаимодействия меняются свойства частиц (их энергия, направление движения), и мы не можем сказать заранее, выйдет ли частица за пределы некоторой интересующей нас области, в каком месте она покинет область, не можем предсказать характеристики вылетающей частицы. Именно поэтому можно считать процесс прохождения единичной частицы через среду статистическим испытанием и применять методику статистических испытаний для описания процессов переноса вещества и излучения.

Официальной «датой рождения» методов Монте-Карло считают 1949 г., когда появилась статья под заглавием «Метод Монте-Карло» [*Metropolis, Ulam*, 1949], хотя теоретические основы метода были известны гораздо раньше. Создание метода связывают обычно с именами Дж. Неймана, С. Улама и Н. Метрополиса. Почти сразу его пробовали использовать для решения задач переноса, однако этому препятствовала существовавшая в то время малая производительность вычислительной техники. Поскольку сам метод имеет статистический характер, то относительная погрешность результата обратно пропорциональна квадратному корню из числа испытаний и для увеличения точности



на порядок требуется увеличить число испытаний на два порядка, поэтому до недавнего времени считалось, что метод Монте-Карло подходит только для не очень точных расчётов или оценок. Однако развитие и совершенствование вычислительной техники привело к тому, что сейчас можно получать хорошие по точности результаты за приемлемое время (до двух недель непрерывного счёта) на персональных компьютерах. Довольно широкое применение метода стало возможным в начале 70-х гг. прошлого века и обусловлено появлением вычислительных машин такой мощности, что можно было производить десятки тысяч испытаний в течение месяца. В Советском Союзе одним из главных специалистов по методу Монте-Карло был И. М. Соболев, работавший в Институте прикладной математики АН СССР. Ему принадлежат замечательная книга по методу статистических испытаний — «Численные методы Монте-Карло» [Соболев, 1973], а также научно-популярная брошюра [Соболев, 1968], вышедшие на русском языке. В них, помимо теоретического обоснования метода, приведены примеры применения метода Монте-Карло для определения уровня качества выпускаемых изделий, оптимального распределения заявок, а также приложение метода к задачам переноса нейтронов и фотонов. Коллектив из трёх авторов в составе Л. А. Позднякова, И. М. Соболя и Р. А. Сюняева применил метод Монте-Карло для описания переноса фотонов через слой однородной изотермической полностью ионизованной плазмы, а также исследовал влияние комптонизации на спектр выходящего излучения [Pozdnyakov et al., 1976, 1983].

Л. Б. Люси (L. B. Lucy) в более позднее время разработал несколько оригинальных методик применительно к переносу фотонов. Эти приёмы находят все более широкое применение в последнее время для решения задач переноса излучения как в стационарном, так и нестационарном случае, о чем будет подробнее идти речь ниже.

Прежде чем описывать саму методику проведения статистических испытаний, следует сказать о причинах использования метода Монте-Карло для решения задачи переноса. Уравнение переноса излучения с учётом поглощения и рассеяния представляет собой интегро-дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных. Если учитывать изменение частоты фотона при рассеянии, то в ядре появится зависимость от частоты фотона, что внесет дополнительные трудности в решение задачи. Даже без учёта зависимости от частоты фотона уравнение переноса решается аналитически только в простейших случаях и для несложной геометрии. Конечно, можно решать уравнение переноса численно, используя конечно-разностные методы, однако алгоритм расчёта будет довольно сложным и потребует много расчётного времени. Метод Монте-Карло, грубо говоря, состоит в том, что мы многократно повторяем одну и ту же процедуру, что делает его алгоритмически простым, к тому же, для получения неточного, но дающего представление о характере решения, достаточно просто уменьшить число испытаний.

Ещё одно преимущество данного метода заключается в следующем: при увеличении времени счёта в случае конечно-разностной схемы увеличивается погрешность результата из-за свойства накапливать ошибки в некоторых частях

алгоритма, при расчёте методом Монте-Карло, наоборот, точность только возрастает из-за увеличения количества испытаний и, как следствие, уменьшения погрешности из-за лучшей статистики.

К преимуществам метода статистических испытаний можно также отнести его гибкость в отношении геометрии расчётной области и учёта процессов взаимодействия излучения с веществом. Геометрия может быть довольно сложной, но на сложность вычислительного алгоритма это не окажет значительного влияния, в то же время данное обстоятельство будет решительным образом влиять на вид самого уравнения переноса, на выбор сетки, и, как следствие, на сложность вычислительного алгоритма. Схожим образом, введение дополнительных процессов взаимодействия излучения с веществом не представляет трудности в случае применения метода Монте-Карло, однако может повлиять на устройство вычислительного алгоритма в случае конечно-разностной схемы.

Наличием всех вышеперечисленных преимуществ метода Монте-Карло перед конечно-разностными схемами и был обусловлен выбор первого для решения задач переноса излучения.

## 2. ОПИСАНИЕ МЕТОДИКИ

Одним из методов проведения статистического испытания над фотоном является имитация (моделирование) траектории фотона при прохождении через среду. В начальный момент времени фотон помещается в пределах расчётной области или на её границе, в зависимости от постановки задачи, определяется его начальная частота и направление движения, и мы следим за фотоном по мере его прохождения через среду (подробно алгоритм для моделирования траектории фотона будет описан в следующем разделе). Тот момент, когда фотон покидает расчётную область или его траектория обрывается, мы считаем концом испытания, а самое большое время единичного испытания и будет временем проведения всего эксперимента  $\Delta t$ . Однако возникает проблема следующего свойства: любой реальный источник испускает в единицу времени такое количество фотонов, которое недоступно для прямого моделирования, поэтому надо перейти от реальных фотонов к модельным. Один из способов состоит в объединении фотонов в группу, то есть в фотонный пакет. Однако возникает другая проблема: когда фотонный пакет взаимодействует со средой, то некоторые фотоны рассеиваются, другие поглощаются или рождают электрон-позитронную пару в поле ядра и т. п. Конечно, можно разделить пакет и проследить траектории его частей отдельно, но это не рационально. Во всех расчётах данной работы используется метод неделимых фотонных пакетов, предложенный Л. Б. Люси [*Lucy*, 2002]. Согласно этому методу, фотоны объединены в пакеты постоянной энергии

$$\varepsilon_0 = nh\nu. \quad (1)$$

Такой приём позволяет избежать индивидуального прослеживания большого количества фотонов, особенно в низкоэнергетической части спектра, поскольку

количество фотонов в пакете растет с уменьшением частоты. Процесс взаимодействия фотонов пакета со средой выбирается каждый раз исходя из известных вероятностей различных вариантов. Такой метод может показаться неточным, однако при увеличении числа пакетов происходят события с малой вероятностью, и результат приближается к точному решению.

Необходимо задать количество фотонных пакетов, которые примут участие в численном эксперименте. Полное число пакетов  $N$  произвольно и является свободным параметром, этим числом будет определяться точность результата. Далее необходимо определить, сколько пакетов будут представлять каждую из компонент излучения. Зная полную светимость источника и число пакетов в розыгрыше, определим величину

$$\frac{\varepsilon_0}{\Delta t} = \frac{L_{tot}}{N}, \quad (2)$$

где  $\Delta t$  — продолжительность численного эксперимента. Тогда число пакетов, представляющих произвольную спектральную компоненту, получим из следующей формулы:

$$N_i = \frac{L_i}{\varepsilon_0 / \Delta t} = \frac{L_i}{L_{tot}} N. \quad (3)$$

Затем нужно определить и начальную частоту фотонных пакетов. Для того чтобы приписать фотонному пакету какую-то частоту, необходимо сначала разделить интересующий нас спектральный диапазон на частотные ячейки. Их должно быть достаточно много для получения гладкой кривой, но в то же время достаточно мало, чтобы среднее число пакетов, приходящихся на одну ячейку, было много больше единицы:

$$\frac{N_{ph}}{N_{bin}} \gg 1. \quad (4)$$

В наших расчётах спектр был разделен на 500 ячеек по логарифмической шкале. Начальной частотой пакета считалась середина частотной ячейки. Число фотонных пакетов каждой спектральной компоненты в каждой частотной ячейке  $N_{ij}$  определялось спектральным распределением светимости и пропорционально вкладу частотной ячейки в светимость данной спектральной компоненты:

$$\frac{N_{ij}}{N_i} = \frac{\int_{v_{j-1}}^{v_j} L_{i,v} dv}{\int_0^{\infty} L_{i,v} dv}. \quad (5)$$

Во время проведения численного эксперимента каждому фотонному пакету назначалась частота с использованием следующей процедуры. Зная количество

фотонных пакетов в каждой ячейке, мы «кладем» пакеты в эту «корзину»-ячейку (от frequency bin), пока она не будет заполнена полностью, т. е. количество пакетов, имеющих начальную частоту, соответствующую этой ячейке, не станет равным количеству фотонов, полученному по формуле (5).

Моделирование траектории фотона в среде — главный этап численного эксперимента, поскольку именно в ходе него формируются конечное спектральное и угловое распределения фотонов. После задания начальных условий для фотонного пакета следует разыграть величину оптической толщи, которую фотон пройдет до того как произойдет взаимодействие с веществом, согласно следующей формуле

$$\tau = -\ln \gamma, \quad (6)$$

где  $\gamma$  — случайное число, равномерно распределенное на интервале  $[0, 1]$ . Затем следует определить скорость и направление движения электрона, на котором будет рассеиваться фотонный пакет, если это произойдет. Для розыгрыша скорости электронов с релятивистским распределением Максвелла можно воспользоваться алгоритмом, предложенным в работе [Pozdnyakov et al., 1983]. Затем следует определить координаты точки взаимодействия. Пройденная оптическая толщина вычисляется следующим образом:

$$\tau = \int d \ln_e(r) [\sigma_C + k_v(T)n_e(r)]. \quad (7)$$

Интеграл берется вдоль траектории фотона, которой является прямая, определяемая уравнением

$$r_{i+1} = r_i + se_p. \quad (8)$$

Затем следует проверить выполнение условия нахождения точки взаимодействия внутри расчётной области. Если это не выполнено, тогда нужно определить координаты выхода точки из расчётной области и собрать интересующую нас информацию, например, частоту пакета и угол вылета из среды.

Если же точка взаимодействия лежит в пределах расчётной области, тогда следует разыграть процесс взаимодействия пакета со средой. Возможно два варианта: комптоновское рассеяние и тормозное поглощение, поэтому нужно определить случайным образом, какой из процессов будет иметь место. Для определения используется следующая методика. Берется случайное число, которое равновероятно распределено по интервалу  $[0, 1]$ , затем проверяется выполнение критерия [Lisy, 2002]:

$$\gamma < \frac{\sigma_C}{\sigma_C + k_v(T)n_e(r)}. \quad (9)$$

Если он выполнен, тогда считаем, что фотон претерпел комптоновское рассеяние, иначе — поглотился в непрерывном спектре. В случае рассеяния необходимо определить новую частоту и направление движения пакета, например, так, как это сделано в работе [Pozdnyakov et al., 1976]. В случае поглощения траектория фотона обрывается в этой точке, и мы переходим к следующему пакету.

Эти действия нужно последовательно повторять, пока пакет не поглотится либо не выйдет из среды. Затем собирается требуемая информация о фотонном пакете. Для окончания численного эксперимента необходимо проделать эту процедуру со всеми пакетами. Рассмотрим полученные результаты.

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕНТГЕНОВСКОГО СПЕКТРА SS433

Галактический микроквазар SS433 представляет собой двойную систему, состоящую из оптической звезды, заполняющей свою полость Роша, и релятивистского объекта, окруженного сверхкритическим аккреционным диском. Предполагается, что радиус аккреционного диска совпадает с размером полости Роша. Большая часть излучения от аккреционного диска испускается в центральных областях, поэтому точная величина радиуса аккреционного диска не имеет большого значения. Вдали от центральных областей может быть применена стандартная теория дисковой аккреции [Shakura, Syunyaev, 1973] для оценки геометрической толщины диска. Если предположить, что толщина растет линейно с радиусом, то можно получить угол раскрытия диска, а его коническая поверхность будет играть роль ширмы для фотонов, в предположении, что сам диск непрозрачен для излучения:

$$h = r \tan \frac{\theta_{disc}}{2}. \quad (10)$$

Для приемлемых значений параметров, которые приведены ниже, получается, что угол полураствора диска  $2^\circ$ .

Предположим, что рентгеновские джеты имеют коническую форму, что следует из совпадения углов раствора в оптическом и рентгеновском диапазонах [Fabrika, 2004]. В наших расчётах угол раствора джета  $1,2^\circ$ . Вещество в джетах движется с радиальной скоростью  $0,26c$ , что следует из наблюдений доплеровских сдвигов в линиях H и He I. Длина рентгеновских джетов равна  $L_j = 10^{13}$  см [Fabrika, 2004].

Первичный анализ жесткого спектра SS433, для которого использовались стандартные инструменты пакета XSPEC, позволил определить температуру плазмы короны в предположении изотермичности последней. Она оказалась в диапазоне от 18 до 30 кэВ. Мы предполагаем, что корона имеет сферическую форму, что следует из моделирования затмения в жестком рентгене [Cherepashchuk et al., 2005, 2007]. Параметры модели указаны на рис. 1 (см. с. 85).

Рассмотрим аккреционный диск со сферической короной над его центральными областями и двумя джетами, располагающимися перпендикулярно плоскости диска. Эта картина симметрична относительно плоскости диска, поэтому мы в дальнейшем будем рассматривать только её верхнюю половину (см. рис. 1). Система аксиально симметрична относительно оси джета, поэтому все физические величины зависят только от радиуса. Границами расчётной области (рис. 2, с. 85) являются поверхность аккреционного диска (снизу) и сфера с радиусом, равным высоте джета. Предполагается, что сам диск имеет постоянное

отношение  $h/r$ , поэтому поверхность диска наклонена под углом в  $2^\circ$  к экваториальной плоскости. Джет — конической формы, диск и корона имеют центр в начале координат.

Предполагается, что и джет, и корона состоят из полностью ионизованной водородной плазмы. В нашей модели аккреционный диск излучает дилутированный чёрнотельный спектр с эффективной температурой, являющейся свободным параметром, а корона и джет — тормозное излучение (переходы в непрерывном спектре). Графики спектральных компонент представлены на рис. 3 (см. с. 86).

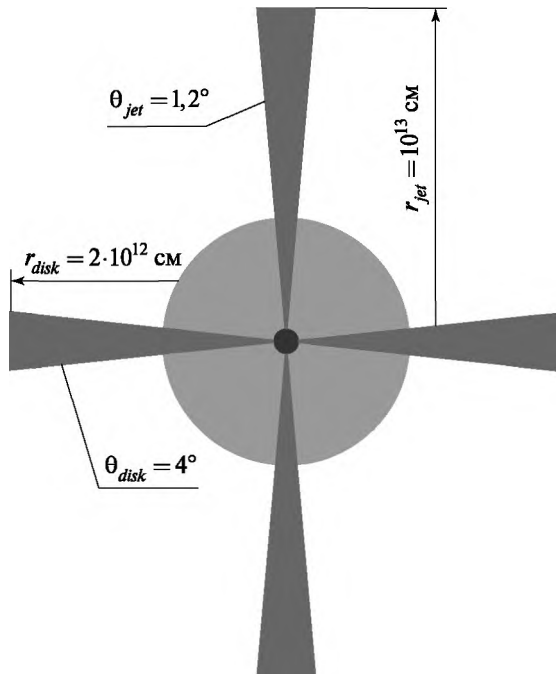


Рис. 1. Схематическая картина модели излучающей области источника

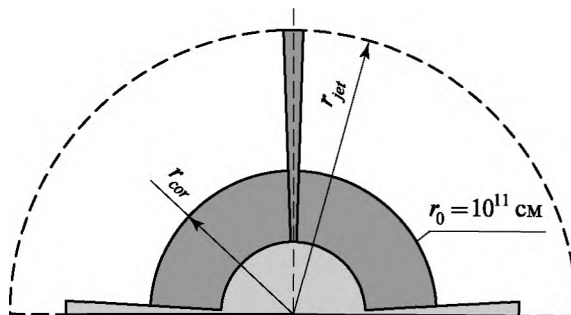


Рис. 2. Структура расчётной области

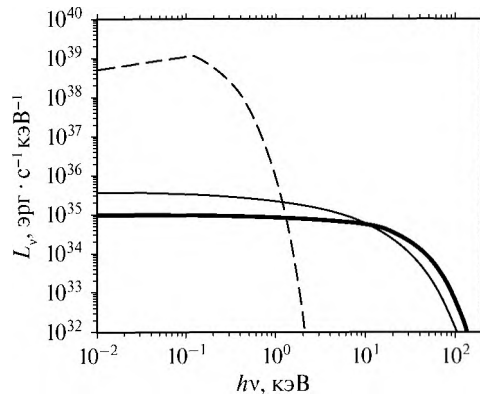


Рис. 3. Спектральные кривые эмиссионных компонент. Штриховая линия — излучение диска, сплошная тонкая — излучение джета, сплошная толстая — короны

### 3.1. Наблюдательные данные

Для анализа спектра использовались наблюдения INTEGRAL SS433 в мае 2003 г. одновременно при помощи телескопов IBIS/IBGRI (20...100 кэВ) и JEM-X (3...20 кэВ) [Cherepashchuk et al., 2003]. Источник наблюдался вблизи прецессионной фазы 0 (момент T3), когда аккреционный диск максимально раскрыт и поток от источника также максимален. Угол между направлением на наблюдателя и синим и красным джетами составляет около  $60^\circ$ . Доплеровский сдвиг в этой фазе  $z \approx -0,1$ . Спектральные линии в области около 7 кэВ не принимались во внимание. Данные рентгеновских мониторов были обработаны с использованием стандартного программного обеспечения INTEGRAL OSA 5.1, разработанного центром научных данных INTEGRAL (ISDC, <http://isdc.unige.ch>, Courvoisier, 2003). Подгонка под экспериментальные данные осуществлялась путём минимизации приведённого  $\chi^2$  [см. Zombeck, 2007]. На рис. 4 показан спектральный континуум источника SS433. Он был получен при обработке

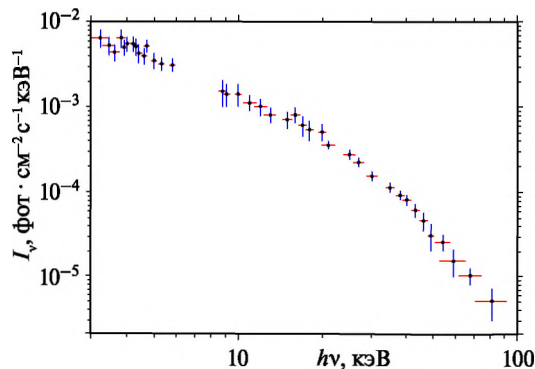


Рис. 4. Наблюдаемый рентгеновский спектр источника SS433 в диапазоне 3...90 кэВ

данных INTEGRAL; от 3 до 20 кэВ — точки телескопа JEM-X, от 20 до 90 кэВ — телескопа IBIS/IBGRI. Спектр соответствует максимальной оптической и рентгеновской светимости источника во время максимального раскрытия диска, когда угол между осью джета и направлением на наблюдателя приблизительно  $60^\circ$  ( $58^\circ$ ) [Cherepashchuk et al., 2005].

### 3.2. Сравнение с данными моделирования

Во всех расчётах расстояние до SS433 считалось равным 5 кпк. Предполагалось, что наблюдаемый рентгеновский спектр в диапазоне от 3 до 90 кэВ формируется из тормозного излучения короны и джета с учётом комптоновского рассеяния. После многих попыток были получены физические параметры, отвечающие наилучшему согласию теории с экспериментом.

#### Наилучшие физические параметры излучающей области

$r_{cor}$ .....	$6,4 \cdot 10^{11}$ см
$\tau_{cor}$ .....	0,2
$n_{cor}$ .....	$4,3 \cdot 10^{12}$ см $^{-3}$
$M_{jet}$ .....	$4 \cdot 10^{19}$ г с $^{-1}$
$L_{kin}$ .....	$1,2 \cdot 10^{39}$ эрг с $^{-1}$
$\chi^2$ .....	23,34
Уровень достоверности .....	95,40 %

На рис. 5 показано сравнение данных моделирования с наблюдательными данными, когда корона полностью не затмевается звездой-донором. Видно, что результаты нашего моделирования находятся в хорошем согласии с наблюдательными данными, описывающими непрерывный спектр источника SS433, рис. 6 (см. с. 88) иллюстрирует вклад аккреционного диска в спектр источника.

Очевидно, что излучение от аккреционного диска дает большой вклад в выходящий спектр, однако в диапазоне 1...100 кэВ разница в результатах моделирования с учётом этой компоненты и без неё незначительна из-за его довольно

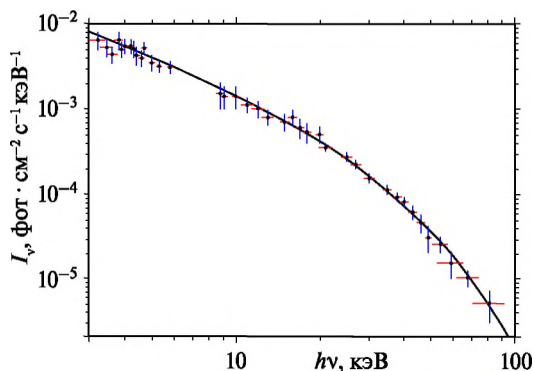


Рис. 5. Сопоставление данных моделирования с наблюдаемым спектром SS433



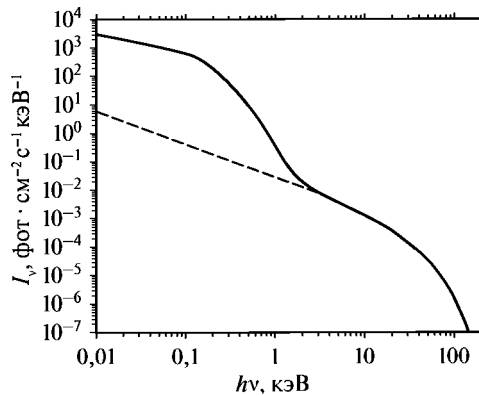


Рис. 6. Вклад аккреционного диска в спектр излучения. Сплошная кривая получена с учётом излучения диска, пунктирная — без него

низкой эффективной температуры в 0,1 кэВ. Наблюдаемый спектр при более низких энергиях может быть использован для оценки параметров аккреционного диска.

### Заключение

Подводя итоги, хотелось бы ещё раз обратить внимание на основные моменты. Прежде всего, для решения задач переноса излучения был выбран метод Монте-Карло. Это обусловлено гибкостью метода по отношению к геометрии рассматриваемой задачи, простотой учёта различных способов взаимодействия излучения с веществом, алгоритмической простотой метода и другими преимуществами, отмеченными выше. Была описана методика моделирования траектории фотона в среде с учётом взаимодействия с веществом. В качестве примера применения метода была рассмотрена задача о формировании рентгеновского (3...100 кэВ) спектра источника SS433. Геометрия задачи включала в себя аккреционный диск с горячей короной над центральными его областями и узким протяженным джетом (см. рис. 1). Было принято предположение, что спектр источника в данном спектральном диапазоне формируется за счёт тормозного излучения короны и джета, а также излучения от аккреционного диска. В ходе проведения численного эксперимента было показано, что излучение диска дает свой вклад, главным образом, в спектр при более низких энергиях, в оптическом и ультрафиолетовом диапазонах. Рентгеновский же спектр объекта формируется за счёт тормозного излучения джета и короны. Полученные результаты хорошо согласуются с данными наблюдений, что позволяет сделать вывод о правильности модели и демонстрирует применимость метода Монте-Карло для получения результатов высокой точности. Более подробное описание и методики, и результатов моделирования приведено в работе [Krivosheyev et al., 2009].

## Литература

- Соболь И. М.* (1973) Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. 312 с.
- Соболь И. М.* (1968) Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1968. 68 с.
- Cherepashchuk A. M., Sunyaev R. A., Seifina E. V., Panchenko I. E., Molkov S. V., Postnov K. A.* (2003) INTEGRAL Observations of SS433, a Supercritically Accreting Microquasar with Hard Spectrum // *Astronomy and Astrophysics*. 2003. V. 411. P. L441–L445.
- Cherepashchuk A. M., Sunyaev R. A., Fabrika S. N., Postnov K. A., Molkov S. V., Barsukova E. A., Antokhina E. A., Irsamambetova T. R., Panchenko I. E., Seifina E. V., Shakura N. I., Timokhin A. N., Bikmaev I. F., Sakhibullin N. A., Aslan Z., Khamitov I., Pramsky A. G., Sholukhova O., Gnedin Yu. N., Arkharov A. A., Larionov V. M.* (2005) INTEGRAL Observations of SS433: RESULTS of a Coordinated Campaign // *Astronomy and Astrophysics*. 2005. V. 437. N. 2. P. 561–573.
- Cherepashchuk A. M.; Sunyaev R. A.; Seifina E. V.; Antokhina E. A.; Kosenko D. I.; Molkov S. V.; Shakura N. I.; Postnov K. A.; Timokhin A. N.; Panchenko I. E.* (2007) INTEGRAL Observations of SS433: Analysis of Precessional and Orbital X-Ray Periodicities // *The Obscured Universe: Proc. VI INTEGRAL Workshop. July 2–8, 2006. Moscow, Russian Federation / Eds. S. Grebenev, R. Sunyaev, C. Winkler. ESA SP-622, 2007. P. 319–319.*
- Courvoisier T. J.-L., Walter R., Beckmann V., Dean A. J., Dubath P., Hudec R., Kretschmar P., Mereghetti S., Montmerle T., Mowlavi N., Paltani S., Preite Martinez A., Produit N., Staubert R., Strong A. W., Swings J.-P., Westergaard N. J., White N., Winkler C., Zdziarski A. A.* (2003) The INTEGRAL Science Data Centre (ISDC) // *Astronomy and Astrophysics*. 2003. V. 411. P. L53–L57.
- Fabrika S.* (2004) The Jets and Supercritical Accretion Disk in SS433 // *Astrophysics and Space Physics Rev.* 2004. V. 12. P. 1–152.
- Krivoshcheyev Yu. M., Bisnovatyi-Kogan G. S., Cherepashchuk A. M., Postnov K. A.* (2009) Monte Carlo Simulations of the Broad-Band X-ray Continuum of SS433 // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Soc.* 2009. V. 394. P. 1674–1684.
- Lucy L. B.* (2002) Monte Carlo Transition Probabilities // *Astronomy and Astrophysics*. 2002. V. 384. P. 725–735.
- Metropolis M., Ulam S. M.* (1949) The Monte Carlo Method // *American Statistical Association*. 1949. V. 44. N. 247. P. 335–341.
- Pozdnyakov L. A., Sobol' I. M., Syunyaev R. A.* (1976) Multiple Compton Scattering by Relativistic Electrons — Monte Carlo Calculations of the Emission Spectrum // *Soviet Astronomy Letters*. 1976. V. 2. P. 55–57.
- Pozdnyakov L. A., Sobol' I. M., Syunyaev R. A.* (1983) Comptonization and the Shaping of X-Ray Source Spectra — Monte Carlo Calculations // *Soviet Scientific Reviews. Sect. E: Astrophysics and Space Physics Reviews*. 1983. V. 2. P. 189–331.
- Shakura N. I., Syunyaev R. A.* (1973) Black Holes in Binary Systems. Observational Appearance // *Astronomy and Astrophysics*. 1973. V. 24. P. 337–355.
- Zombeck M. V.* (2007) *Handbook of Astronomy and Astrophysics*. 3<sup>rd</sup> ed. Cambridge: University Press, Cambridge, UK, 2007. 521 p.

**MONTE CARLO TRANSFER PROBLEMS SOLUTION:  
ASTROPHYSICAL APPLICATIONS**

**Yu. M. Krivosheyev**

*Space Research Institute (IKI RAN), Moscow*

The paper deals with Monte Carlo transfer simulation of and its astrophysical applications. A technique for radiative transfer simulation in cosmic plasma by photon trajectory simulation is described. The problem of X-ray spectrum formation of Galactic microquasar SS433 illustrates the application of the method.

*Keywords:* microquasars, jets, SS433, radiative transfer, Monte Carlo simulation.

---

**Krivosheyev Yuri Mikhailovich** — Junior Researcher, e-mail: [krivosheev@iki.rssi.ru](mailto:krivosheev@iki.rssi.ru).

## МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТОРОТАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В АСТРОФИЗИКЕ (МАГНИТОРОТАЦИОННЫЕ СВЕРХНОВЫЕ)

С. Г. Моисеенко<sup>1</sup>, Г. С. Бисноватый-Коган<sup>1</sup>, Н. В. Арделян<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Учреждение Российской академии наук

Институт космических исследований РАН (ИКИ РАН), Москва

<sup>2</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Магниторотационный (МР) механизм взрыва сверхновой с коллапсирующим ядром исследуется численно в двумерной постановке для различных масс ядер, моментов вращения и конфигураций магнитного поля. Для численного моделирования используется неявная полностью консервативная лагранжевая схема на треугольной сетке переменной структуры. Показано, что магниторотационный механизм позволяет получить энергию взрыва, соответствующую наблюдательным данным. Форма взрыва существенно зависит от начальной конфигурации магнитного поля. В процессе эволюции магнитного поля при МР-взрыве сверхновой развивается МР-неустойчивость, приводящая к экспоненциальному росту всех компонент магнитного поля, что существенно уменьшает время развития МР-взрыва сверхновой. Энергия взрыва сверхновой растёт с увеличением массы ядра, а также начальной энергии вращения.

Работа выполнена при частичном финансировании РФФИ (проект № 08-02-00491), грантом президента РФ по поддержке ведущих научных школ (НШ-3458.2010.2), программой президиума РАН.

*Ключевые слова:* МГД, сверхновые, численное моделирование

### Введение

Вращение и магнитные поля играют существенную роль в различных астрофизических процессах. Одной из актуальных и не решенных до конца в настоящее время проблем современной астрофизики является объяснение механизма взрыва сверхновой с коллапсирующим ядром. На начальной стадии исследования предполагалось, что взрыв связан с прогревом оболочки огромным потоком нейтрино, идущим из центрального ядра (нейтринная депозиция) [Colgate, White, 1966]. В процессе коллапса железного ядра массивной звезды формируется ударная волна отскока, которая, как предполагалось, отходя от центральных областей звезды, приведёт к взрыву сверхновой. Однако ни одномерные (сферически-симметричные), ни двумерные и трёхмерные модели сверхновых, основанные на действии нейтринной депозиции в сочетании с ударной волной отскока, не позволили получить взрыв сверхновой с коллапсирующим ядром. Модель сверхновой, основанная на использовании механизма нейтринной конвекции, также не приводит к взрыву сверхновой [Müller, Janka, 1994].

---

Моисеенко Сергей Григорьевич — ведущий научный сотрудник, доктор физико-математических наук, e-mail: moiseenko@iki.rssi.ru, gkogon@iki.rssi.ru.

Бисноватый-Коган Геннадий Семенович — главный научный сотрудник, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: gkogon@iki.rssi.ru.

Арделян Николай Васильевич — ведущий научный сотрудник, доктор физико-математических наук, e-mail: ardel@cs.msu.su.

В работе [Burrows et al., 2006] был предложен «акустический» механизм взрыва сверхновых с коллапсирующим ядром. Энергия взрыва в этом механизме черпается из энергии акустических колебаний внутри ядра. Как показали наши расчёты [Moiseenko et al., 2006], при коллапсе ядра возбуждаются собственные колебания формирующейся нейтронной звезды, но энергия этих колебаний ( $10^{48} \dots 10^{49}$  эрг) слишком мала для того, чтобы привести к взрыву сверхновой. В работе [Blondin et al., 2003] обсуждалась возможность объяснения взрыва сверхновой с коллапсирующим ядром при помощи развития неустойчивости стоячей аккреционной ударной волны (SASI). Как показали двух- и трёхмерные расчёты [Blondin et al., 2003; Ohnishi et al., 2006], такая неустойчивость может развиваться, но это не приводит к взрыву сверхновой.

Для получения взрыва коллапсирующей сверхновой необходимо учесть вращение звезды и наличие магнитного поля. Магниторотационный (MP) механизм взрыва сверхновой был предложен в работе [Бисноватый-Коган, 1970].

В настоящее время MP-механизм взрыва сверхновых с коллапсирующим ядром является практически единственным, позволяющим получить взрыв сверхновой с энергией, соответствующей результатам наблюдений. Энергия взрыва в MP-механизме выходит из энергии вращения предсверхновой. Преобразование энергии вращения в радиальную кинетическую энергию происходит при помощи магнитного поля. В результате неоднородного коллапса ядра возникает дифференциальное вращение. Благодаря дифференциальному вращению при наличии полоидального магнитного поля возникает тороидальное магнитное поле, усиливающееся со временем. Сильное тороидальное магнитное поле позволяет преобразовать часть энергии вращения в радиальную кинетическую энергию (энергию взрыва). Первые результаты двумерных расчётов коллапса вращающейся замагниченной звезды получены в [LeBlanc, Wilson, 1970]. Одномерные расчёты MP-сверхновой были приведены в работе [Bisnovatyj-Kogan et al., 1976]. В одномерной постановке предсверхновая представляла собой бесконечный цилиндр. Результаты одномерного моделирования MP-взрыва при более реалистичных значениях магнитных полей представлены в работе [Арделян и др., 1979]. Результаты одномерных расчётов показывают, что тороидальная компонента магнитного поля растёт линейно со временем. Время MP-взрыва сверхновой зависит от отношения начальной магнитной к начальной гравитационной энергии:  $\alpha = E_{mag0}/E_{grav0}$  как  $t_{expl} \sim 1/\sqrt{\alpha}$ .

Как показывают результаты двумерного моделирования MP-механизма взрыва сверхновой, после начальной стадии линейного роста тороидальной компоненты магнитного поля начинается стадия экспоненциального роста тороидальной и полоидальных его компонент. Развивается магниторотационная неустойчивость.

Качественная модель MP-неустойчивости при MP-взрыве сверхновой была предложена в работе [Ardeljan et al., 2005]. Численное моделирование MP-механизма взрыва сверхновой в настоящее время является довольно популярным [Moiseenko et al., 2006; Ardeljan et al., 2000, 2005; Burrows et al., 2007; Kotake et al.,

2004; Masada et al., 2007; Mizuno et al., 2004; Sawai et al., 2005; Takiwaki et al., 2004; Wheeler et al., 2002; Yamada, Sawai, 2004).

Результаты расчёта магниторотационной сверхновой для различных масс коллапсирующих ядер и моментов их вращения показывают, что энергия взрыва сверхновой растёт с ростом массы и углового момента.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для моделирования МР-взрыва сверхновой используется система уравнений магнитной гидродинамики с самогравитацией при условии бесконечной проводимости.

Предполагается наличие осевой симметрии ( $\partial/\partial\varphi$ ) и симметрии по отношению к экваториальной плоскости ( $z = 0$ ).

Для расчётов использовалось уравнение состояния, приведенное в [Арделян и др., 1987]. Выражение для энергии единицы массы было взято из [Ardeljan et al., 2005].

При расчётах в уравнение энергии были включены нейтринные потери, связанные с Урка-процессами, аннигиляцией пар, фоторождением нейтрино, а также с плазменными нейтрино.

В качестве начального условия для расчётов использовалась модель I, взятая из работы [Арделян и др., 1987]. Сначала была рассчитана сферически симметричная центральная модель звезды с центральной плотностью  $\rho_c = 4,5 \cdot 10^9$  г/см<sup>3</sup>. Значение центральной плотности соответствует максимуму в зависимости массы звезды, состоящей из железа, от её центральной плотности  $M_s(\rho_c)$  при  $T = 0$ . Масса такой сферической звезды, для используемого нами приближенного уравнения состояния, составляет  $M = 1,0042M_\odot$ .

Для задания параметров начальной модели плотность в каждой точке звезды ( $a$ , следовательно, и масса звезды) была увеличена на постоянный множитель  $\lambda$ , определяющий массу коллапсирующего ядра. Температура звезды задается следующим образом:  $T = \delta \rho^{2/3}$ , где  $\delta = 1$  К·см<sup>2</sup>·г<sup>-2/3</sup>. В начальный момент времени  $t = 0$  на звезду накладывается твердотельное вращение с угловой скоростью  $\omega = \omega_0$  (период вращения звезды составляет  $\tau = 2\pi/\omega_0$ ). Кроме того, в начальный момент времени  $t = 0$  предполагается, что полоидальные движения в звезде отсутствуют ( $v_r = v_z = 0$ ). В расчётах использовались значения  $\lambda = 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,7$ . Выбранная начальная модель не находится в равновесии, и поэтому в начале расчётов происходит быстрый коллапс. Для моделирования магниторотационного взрыва сверхновой используется система уравнений гравитационной магнитной гидродинамики при наличии бесконечной проводимости. Конфигурация начального магнитного поля задается так же, как и в работе [Ardeljan et al., 2000], формой тороидального тока.

Отношение магнитной энергии звезды к её гравитационной энергии в момент формирования сбалансированного полоидального магнитного поля составляет  $10^{-6}$ .

## 2. МЕТОД РАСЧЁТА

Численное моделирование астрофизических задач имеет ряд особенностей (сложностей), таких как наличие: свободной границы (границы с вакуумом), гравитации, большого перепада параметров, существенно различных характерных времён. Важным свойством применяемого для моделирования астрофизических задач численного метода является точное выполнение законов сохранения, так как при моделировании необходимо делать большое количество шагов по времени, и возможно накопление численных ошибок. Применение обычных численных методов на равномерной сетке для моделирования таких задач потребовало бы использования сетки очень большой размерности, а также большого числа временных шагов. Для численного моделирования задачи о коллапсе ядра и образовании быстровращающейся нейтронной звезды использовалась операторно-разностная, полностью консервативная неявная лагранжевая схема на треугольной сетке переменной структуры, предложенная и исследованная в [Арделян и др., 1987; Арделян, Космачевский, 1993] и более ранних работах этих же авторов. Пример треугольной сетки представлен на рис. 1. Используемая в методе перестройка сетки позволяет не только исправлять возникающие искажения сетки, но и динамически адаптировать сетку к решению задачи. Применение динамически адаптируемой сетки позволяет существенно повысить точность расчётов, по сравнению с использованием равномерной сетки. Применяемый метод был употреблён для моделирования задачи о коллапсе холодного быстровращающегося протозвездного облака [Ardeljan et al., 1996], а также для моделирования магниторотационных процессов в протозвездном облаке [Ardeljan et al., 2000]. Этим методом также моделировалась задача о коллапсе железного ядра и формировании быстровращающейся нейтронной звезды. [Арделян и др., 2004].

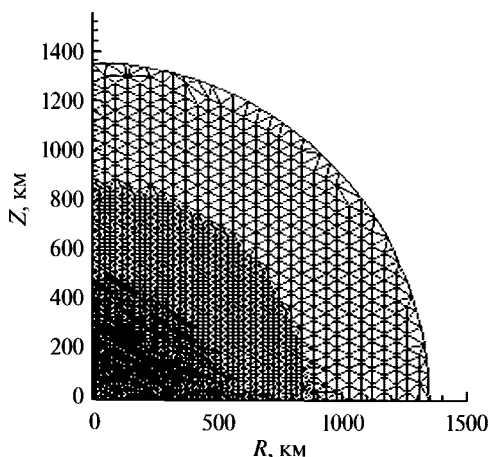


Рис. 1. Пример треугольной лагранжевой сетки

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

#### 3.1. Коллапс ядра и образование быстро вращающейся протонейтронной звезды

Моделирование магниторотационного взрыва сверхновой состоит из двух последовательных этапов. Первый этап — моделирование процесса коллапса железного ядра (Арделян и др., 2004). Вторым этапом — «включение» магнитного начального полоидального магнитного поля, возникновение и последующее усиление тороидальной компоненты поля  $H_\phi$ . Этот этап завершается магниторотационным взрывом сверхновой. Продолжительность второго этапа определяется величиной начального магнитного поля. Чем слабее начальное полоидальное магнитное поле, тем дольше длится стадия усиления тороидальной компоненты поля до взрыва сверхновой. Результаты одномерного моделирования магниторотационного механизма, описанные в работах [Bisnovatyi-Kogan et al., 1976; Арделян и др., 1979], показывают, что время развития магниторотационного взрыва, начиная с момента эволюции магнитного поля, пропорционально  $t_{\text{explosion}} \sim 1/\sqrt{E_{\text{mag0}}/E_{\text{grav0}}}$ , где  $E_{\text{mag0}}$  и  $E_{\text{grav0}}$  — магнитная энергия звезды и гравитационная её энергия соответственно в момент включения магнитного поля.

В качестве начального этапа при моделировании магниторотационного взрыва сверхновой было проведено двумерное численное моделирование задачи о коллапсе железного ядра и формировании быстро вращающейся нейтронной звезды. Математическое моделирование коллапса ядра при помощи двумерной полностью консервативной лагранжевой операторно-разностной схемы было выполнено в работе [Арделян и др., 2004]. В первоначальный момент времени соотношения между начальными значениями вращательной и гравитационной энергий и между начальной внутренней и гравитационной энергиями следующие:

$$\frac{E_{\text{rot}}}{E_{\text{grav}}} = 0,0057, \quad \frac{E_{\text{int}}}{E_{\text{grav}}} = 0,727, \quad \omega_0 = 2,52 \text{ c}^{-1}.$$

#### 3.2. Магниторотационный взрыв сверхновой с квадрупольным полем

После коллапса при моделировании мы «включаем» начальное полоидальное магнитное поле. Энергия этого магнитного поля составляет  $\sim 10^{-6}$  от гравитационной энергии звезды в момент включения магнитного поля.

В момент «включения» уравнения для тороидальной компоненты магнитного поля мы начинаем отсчёт времени заново.

В этом разделе статьи описан вариант расчётов при начальной массе ядра  $1,2M_\odot$  и удельной энергии вращения в момент включения магнитного поля  $E_{\text{rot}}/M_{\text{core}} = 0,39 \cdot 10^{19}$  эрг/г.



Сразу после возникновения тороидальная компонента магнитного поля растёт со временем линейно, а тороидальная магнитная энергия — как квадратичная функция (рис. 2). На развитой стадии эволюции  $H_\phi$  к моменту времени  $t = 0,05$  с тороидальная магнитная энергия растёт со временем быстрее, чем квадратичная функция, благодаря развитию магниторотационной неустойчивости [Moiseenko et al., 2006; Ardeljan et al., 2005; Akiyama et al., 2003; Spruit, 1999]. Быстрый рост тороидального магнитного поля приводит, в свою очередь, через поле скоростей к быстрому росту полоидальных компонент магнитного поля.

В случае квадрупольного типа симметрии начального полоидального магнитного поля генерируемое тороидальное магнитное поле  $H_\phi$  (на начальной стадии эволюции  $H_\phi$ , до начала развития МР неустойчивости) имеет два локальных экстремума. Первый экстремум  $H_\phi$  расположен на экваториальной плоскости, на расстоянии  $\sim 15$  км от центра звезды, второй экстремум находится ближе к оси вращения  $z$ , на расстоянии  $\sim 10$  км от центра звезды. Эти два экстремума имеют различные знаки  $H_\phi$ . Экстремумы генерируемого тороидального магнитного поля приблизительно соответствуют экстремальным значениям члена  $r \mathbf{H} \cdot \text{grad} (V_\phi / r)$  в уравнении для эволюции тороидального поля  $H_\phi$  [Ardeljan et al., 2000], поскольку звезда находится в стационарном состоянии и только этот член определяет эволюцию  $H_\phi$ .

Максимальное значение  $H_\phi$  в процессе генерации тороидального поля, составляющего  $\sim 8,9 \cdot 10^{16}$  Гс, достигается на экваториальной плоскости на расстоянии  $1,3 \cdot 10^6$  см от центра звезды в момент времени  $t = 0,02$  с. Тороидальная часть магнитной энергии начинает убывать со временем после достижения максимального значения  $0,87 \cdot 10^{51}$  эрг в момент времени  $t = 0,03$  с. Полоидальная магнитная энергия на развитой стадии процесса взрыва сверхновой достигает

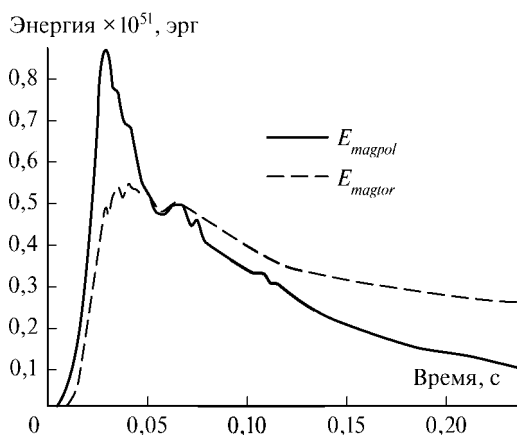


Рис. 2. Изменение тороидальной  $E_{magtor}$  и полоидальной  $E_{magpol}$  магнитной энергии со временем при магниторотационном взрыве сверхновой. Начальная масса ядра  $1,2 M_\odot$ . Удельная энергия вращения в момент включения магнитного поля  $E_{rot} / M_{core} = 0,39 \cdot 10^{19}$  эрг/г

значений  $\approx 0,53 \cdot 10^{51}$  эрг и убывает со временем медленнее, чем тороидальная, и в конце расчёта становится примерно в 2,5 раза больше тороидальной (см. рис. 2).

Накручивание силовых линий магнитного поля приводит к передаче углового момента от протонейтронной звезды к оболочке. Магнитное поле работает как «приводной ремень» для углового момента. Оболочка звезды начинает медленно расширяться. На границе ядра протонейтронной звезды вблизи экстремумов  $H_\phi$  возникает волна сжатия, эта волна движется по быстро спадающему фону плотности. Амплитуда волны быстро растёт со временем и эта волна сжатия превращается в быструю ударную магнитодинамическую (МГД) волну. Усиливающееся благодаря дифференциальному вращению магнитное поле действует как поршень для образовавшейся ударной МГД-волны. Важно отметить, что такой «поршень» действует в течение конечного времени, поддерживая ударную МГД-волну, в отличие от модели взрыва коллапсирующих сверхновых, связанной с ударной волной отскока, где такой поршень отсутствует. Наличие продолжительной поддержки ударной волны сверхновой в магниторотационном механизме является основным отличием его от механизма взрыва сверхновой, связанного с ударной волной отскока, и от механизма, связанного с конвекцией нейтрино.

Течение вещества за фронтом ударной МГД-волны сильно неоднородно. Возможными причинами этой неоднородности течения являются:

- неустойчивость течения газа за ударной волной при наличии гравитационного поля;
- магниторотационная неустойчивость, возникающая на периферии протонейтронной звезды.

Наличие у начального магнитного поля симметрии квадрупольного типа приводит к тому, что МГД-ударная волна имеет большую амплитуду и движется быстрее вблизи экваториальной плоскости  $z = 0$ . В связи с этим вещество оболочки звезды при магниторотационном взрыве преимущественно выбрасывается вблизи экваториальной плоскости.

Зависимость массы эжектированного вещества звезды от времени при магниторотационном взрыве сверхновой приведена на рис. 3 (см. с. 98), а на рис. 4 (см. с. 98) — зависимость от времени энергии, эжектированной при магниторотационном взрыве сверхновой. Частица вещества считается эжектированной (выброшенной), если её кинетическая энергия превышает потенциальную и вектор скорости направлен от центра звезды. На рис. 3 и 4: начальная масса ядра  $1,2M_\odot$ ; удельная энергия вращения в момент включения магнитного поля  $E_{rot}/M_{core} = 0,39 \cdot 10^{19}$  эрг/г; начальное магнитное поле квадрупольного типа.

Проведённое моделирование показывает, что при выбранных параметрах в результате магниторотационного взрыва сверхновой эжектируется  $\sim 0,19M_\odot$  массы и  $\sim 1,8 \cdot 10^{51}$  эрг энергии.

При магниторотационном взрыве звезда теряет существенную часть своей вращательной энергии. Энергия вращения звезды преобразуется не только в

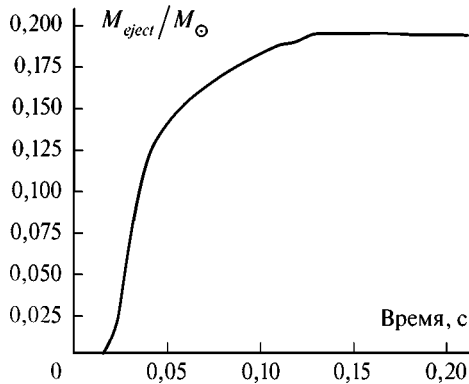


Рис. 3. Зависимость массы эжектированного вещества звезды (в массах Солнца  $M_{\odot}$ ) при магниторотационном взрыве сверхновой от времени

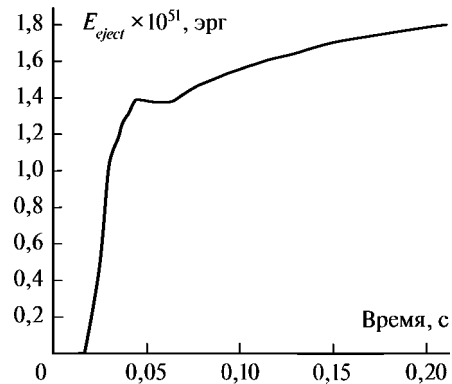


Рис. 4. Зависимость энергии эжектированной при магниторотационном взрыве сверхновой от времени

энергию взрыва (кинетическую энергию радиального движения), но и теряется в виде нейтринного излучения, что приводит к некоторому изменению полной энергии звезды. После взрыва ядро вращается медленнее, возникает дополнительное сжатие и некоторый подогрев ядра протонейтронной звезды. На этой стадии ядро протонейтронной звезды вращается с периодом  $\sim 0,006$  с. На границе ядра протонейтронной звезды (в экваториальной плоскости, на расстоянии  $\sim 10$  км от центра звезды) полоидальное магнитное поле составляет  $\sqrt{H_r^2 + H_z^2} \approx 2 \cdot 10^{14}$  Гс.

### 3.3. Магниторотационные сверхновые с джетами

Моделирование МР-взрыва сверхновой при начальном магнитном поле дипольного типа симметрии приводит к результатам, качественно отличным от «квадрупольного» МР-взрыва.

Постановка задачи в данном случае аналогична, за исключением того, что магнитное поле в экваториальной плоскости имеет только компоненту  $H_z$ , не равную нулю.

В отличие от результатов моделирования магниторотационного взрыва сверхновой с начальным магнитным полем квадрупольного типа симметрии, где вещество выбрасывалось преимущественно вблизи экваториальной плоскости, при начальном магнитном поле дипольного типа взрыв сверхновой развивается главным образом вдоль оси вращения. В процессе численного моделирования была обнаружена магниторотационная неустойчивость, аналогично случаю с начальным магнитным полем квадрупольного типа, рассмотренному ранее. Как показывают оценки, характерное время пересоединения магнитного поля существенно больше, чем характерное время развития магниторотационной неустойчивости. Энергия взрыва МР-сверхновой с начальным полем

дипольного типа и выбрасываемая масса слабо отличаются от соответствующих величин, полученных при моделировании МР-сверхновой с начальным магнитным полем квадрупольного типа симметрии.

Развитие МР-взрыва сверхновой при начальном магнитном поле дипольного типа происходит так же, как и в случае начального магнитного поля квадрупольного типа.

Основным качественным отличием «дипольного» случая является распространение волны сжатия, а затем ударной МГД-волны преимущественно вдоль оси вращения. Дальнейшее распространение ударной волны сверхновой ведет к формированию слабо коллимированного направленного струйного выброса (протоджета). Этот протоджет может быть сколлимирован сильнее при продвижении ударной волны через протяжённую оболочку звезды.

Следует отметить, что магнитное поле, представляющее собой чистый диполь или квадруполь, — это частный случай магнитных полей в звездах. В реальности магнитное поле в предсверхновой может быть существенно более сложным, в частности, при наличии суммы полей дипольного и квадрупольного типа нарушается симметрия взрыва относительно плоскости экватора.

Моделирование взрыва сверхновой с коллапсирующим ядром было проведено для широкого диапазона изменения интенсивности магнитного поля как для дипольной, так и для квадрупольной начальных конфигураций магнитного поля. Параметр  $\alpha$  (отношение магнитной энергии звезды к её гравитационной энергии в момент «включения» магнитного поля) менялся в следующем диапазоне:

$$\alpha = \frac{E_{mag0}}{|E_{grav}|} = 10^{-2} \dots 10^{-12}.$$

Как показали расчёты, энергия взрыва сверхновой почти не зависит от интенсивности начального магнитного поля, а время взрыва медленно (логарифмически) растёт с уменьшением  $\alpha$ .

### 3.4. Магниторотационная неустойчивость, численная диссипация

Как показали результаты одномерного моделирования магниторотационной сверхновой, генерируемое тороидальное магнитное поле растёт линейно со временем. Результаты двумерного моделирования магниторотационной сверхновой, проведённого нами [Ardeljan et al., 2005], показали, что примерно после 100 периодов вращения центрального ядра линейный рост тороидального поля сменяется на экспоненциальный, и полоидальные компоненты магнитного поля тоже начинают расти экспоненциально. Причиной экспоненциального роста компонент магнитного поля является возникновение магниторотационной неустойчивости, впервые исследованной в работе [Tyler, 1973]. Магниторотационная неустойчивость в замагниченных дифференциально вращающихся звездах при отсутствии осевой симметрии была проанализирована в работе [Spruit, 2002], где было отмечено, что развитие такой неустойчивости может привести к усилению поля механизмом динамо. Возможность

возникновения такой неустойчивости была также отмечена в работе [Colgate et al., 1990] в связи со сверхновой SN1987a.

В работе [Ardeljan et al., 2005] была предложена качественная модель развития магниторотационной неустойчивости при МР-взрыве сверхновой. Эта модель описывает развитие магниторотационной неустойчивости в двумерном осесимметричном приближении. В этом случае отсутствует прямое влияние тороидального магнитного поля на полоидальное. Тем не менее, обе составляющие магнитного поля (полоидальная и тороидальная) растут экспоненциально. У полоидальной компоненты магнитного поля растёт хаотическая составляющая, а у тороидальной компоненты — и хаотическая, и регулярная составляющие. Причиной магниторотационного взрыва сверхновой является рост и регулярной, и хаотической составляющих магнитного поля. После быстрого охлаждения при помощи нейтрино и затухания гидродинамических течений хаотическая компонента магнитного поля остается замороженной в вещество звезды благодаря большой проводимости вещества. Возникновение магниторотационной неустойчивости существенно уменьшает время от начала эволюции тороидальной компоненты магнитного поля до магниторотационного взрыва сверхновой.

Нами проведено численное моделирование магниторотационного взрыва сверхновой с начальным магнитным полем квадрупольного типа при различном числе узлов треугольной сетки — от 1500 до 18 000 узлов. Расчёты показали, что момент «включения» магниторотационной неустойчивости заметно зависит от количества узлов используемой сетки: чем грубее сетка (меньшее число узлов), тем позже начинается магниторотационная неустойчивость. Согласно результатам моделирования время развития магниторотационного взрыва не меняется, когда число узлов сетки  $N$  становится больше 15 000. Моделирование проведено при числе узлов сетки  $\sim 15\,000$ . Зависимость времени взрыва  $t_{expl}$  от числа узлов сетки имеет численное происхождение и связана с численной диссипацией. Такая диссипация оказывает стабилизирующее влияние на магниторотационную неустойчивость, и её «включение» происходит при больших значениях отношения тороидальной и полоидальной магнитных энергий. Поэтому общее время развития магниторотационного взрыва увеличивается при уменьшении размерности сетки из-за увеличения времени возникновения магниторотационной неустойчивости. Как следует из результатов нашего моделирования, влияние численной вязкости становится несущественным при  $N \geq 15\,000$ , когда характерное время численной диссипации начинает превышать характерное время магниторотационного взрыва.

Магниторотационный взрыв сверхновой можно разделить на три последовательных этапа:

- линейный рост тороидальной компоненты магнитного поля из-за накручивания силовых линий магнитного поля;
- экспоненциальный рост тороидальной и полоидальной составляющих магнитного поля из-за развития магнитогидродинамических неустойчивостей [Tayler, 1973; Spruit, 2002; Данжи, 1961];
- формирование МГД-ударной волны и магниторотационный взрыв.

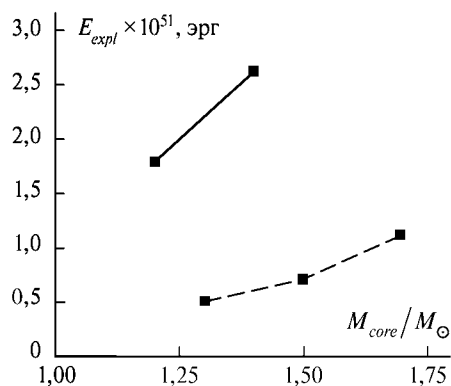
Образовавшаяся в результате молодая нейтронная звезда характеризуется относительно медленным вращением: её период составляет  $\approx 4...7$  мс в отличие от субмиллисекундных критических значений периода.

Большие значения остаточного (после взрыва) магнитного поля связаны с хаотической, нерегулярной компонентой, она имеет нулевой усредненный магнитный поток и может исчезнуть благодаря аннигиляции поля даже при наличии большой проводимости вещества. Однако существование большой хаотической составляющей магнитного поля может быть довольно длительным из-за очень высокой проводимости вещества. Это может иметь отношение к модели магнетара или мягкого гамма-повторителя, где излучаемая энергия предполагается поступающей от аннигиляции магнитного поля. Внутри нейтронной звезды регулярные тороидальная, дипольная или квадрупольная полоидальная компоненты магнитного поля могут сохраняться длительное время, порядка или больше времени жизни галактики.

### 3.5. Зависимость энергии взрыва от начальной массы ядра и начальной энергии вращения

Было проведено численное моделирование МР-взрыва сверхновой при различной начальной массе ядра и различной начальной энергии вращения [Бисноватый-Коган и др., 2008]. Начальная масса ядра менялась от  $1,2M_{\odot}$  до  $1,7M_{\odot}$ . Удельная энергия вращения в момент включения магнитного поля  $E_{rot}/M_{core}$  менялась от  $0,19 \cdot 10^{19}$  до  $0,4 \cdot 10^{19}$  эрг/г. Энергия взрыва МР-сверхновой заметно растёт с увеличением начальной массы ядра и начальной энергии вращения. Результаты расчётов представлены на рис. 5.

Энергия взрыва МР-сверхновой зависит от массы железного ядра и начальной вращательной энергии (начальной угловой скорости). Как показали расчёты, энергия взрыва МР-сверхновой растёт с увеличением массы ядра и увеличением энергии вращения. Очевидно, что при магниторотационном взрыве сверхновой выделяется энергия, достаточная для объяснения явления взрыва сверхновых с коллапсирующим ядром,  $0,5...2,6 \cdot 10^{51}$  эрг (сверхновые типа II и типа Ib). Энергия взрыва сверхновых типа Ic может быть больше, это, по-видимому, связано с коллапсом более массивных ядер, порядка нескольких десятков солнечных масс.



**Рис. 5.** Зависимость энергии взрыва МР-сверхновой от начальной массы ядра при различных значениях удельной энергии вращения перед началом эволюции магнитного поля:  $E_{rot}/M_{core} \approx (0,39...0,40) \cdot 10^{19}$  эрг/г (сплошная линия) и  $E_{rot}/M_{core} \approx (0,19...0,23) \cdot 10^{19}$  эрг/г (пунктирная линия) (перед коллапсом)

### Заключение

Результаты двумерного численного моделирования МР-механизма взрыва сверхновой с коллапсирующим ядром показывают, что МР-механизм позволяет получить энергию взрыва  $(0,5...2,6) \cdot 10^{51}$  эрг, соответствующую наблюдательным данным.

Из наблюдений известно, что формы сверхновых могут быть очень разными. Как показали результаты нашего моделирования, магниторотационный взрыв сверхновой возникает после развития магниторотационной неустойчивости. Поскольку этот процесс стохастический, и форма сверхновой может быть различной. Можно сделать вывод, что магниторотационный механизм взрыва сверхновой приводит к различным формам остатков сверхновых и всегда — к асимметричному выбросу.

Как отмечалось выше, развитие магниторотационной неустойчивости приводит к взрыву даже при малых значениях начальной магнитной энергии: минимальное  $\alpha$ , при котором проводился расчёт,  $\alpha_{\min} = 10^{-12}$ . Очевидно, что для всех значений магнитных полей, наличествующих в массивных звездах, имеется возможность магниторотационного взрыва. На это указывают и наблюдения радиопульсаров — молодых нейтронных звезд, где значения напряжённостей магнитных полей лежат в интервале  $\sim 10^{11} \dots 10^{13}$  Гс [Lorimer, 2005].

При взрыве МР-сверхновой, имеющей начальное магнитное поле с дипольным типом симметрии, выброс вещества происходит преимущественно вдоль оси вращения в виде слабо коллимированного струйного выброса (джета).

При двумерном моделировании МР-взрыва сверхновой тороидальная компонента магнитного поля растёт линейно со временем до некоторого значения, от которого тороидальное поле начинает расти экспоненциально. После этого момента времени и полоидальное магнитное поле также растёт экспоненциально. Экспоненциальный рост всех компонент магнитного поля связан с развитием МР-неустойчивости. В работе [Ardeljan et al., 2005] нами была предложена качественная модель МР-неустойчивости. МР-неустойчивость исследовалась в различных приложениях в [Tayler, 1973; Spruit, 2002; Велихов, 1959; Chandrasekhar, 1981]. В приложении к сверхновым МР-неустойчивость также исследовалась в работе [Akiyama et al., 2003].

### Литература

- Арделян Н. В., Бисноватый-Коган Г. С., Космачевский К. В., Моисеенко С. Г. (2004) Двумерный расчет динамики коллапса вращающегося ядра с образованием нейтронной звезды на адаптивной треугольной сетке в лагранжевых переменных // *Астрофизика*. 2004. Т. 47. № 1. С. 47–64.
- Арделян Н. В., Бисноватый-Коган Г. С., Попов Ю. П. (1979) Исследование магниторотационного взрыва сверхновой в цилиндрической модели // *Астрон. журн.* 1979. Т. 56. С. 1244–1255.
- Арделян Н. В., Бисноватый-Коган Г. С., Попов Ю. П., Черниговский С. В. (1987) Коллапс ядра и образование быстровращающейся нейтронной звезды // *Астрон. журн.* 1987. Т. 64 С. 761–772.

- Арделян Н. В., Космачевский К. В.* (1993) Неявный свободно-лагранжевый метод для расчета двумерных магнитогазодинамических течений // *Мат. моделирование*. М.: МГУ, 1993. С. 25.
- Арделян Н. В., Космачевский К. В., Черниговский С. В.* (1978) Вопросы построения и исследования полностью консервативных разностных схем магнитной газовой динамики. М.: МГУ, 1987. 111 с.
- Бисноватый-Коган Г. С.* (1970) О механизме взрыва вращающейся звезды как сверхновой // *Астрон. журн.* 1970. Т. 47. С. 813–816.
- Бисноватый-Коган Г. С., Моисеенко С. Г., Арделян Н. В.* (2008) Различные магниторотационные сверхновые // *Астрон. журн.* 2008. Т. 85. № 12. С. 1109–1121.
- Велихов Е. П.* (1959) Устойчивость идеально проводящей жидкости, текущей между вращающимися в магнитном поле цилиндрами // *ЖЭТФ*. 1959. Т. 36. № 5. С. 1398–1404.
- Данжи Дж.* (1961) *Космическая электродинамика*. М.: Атомиздат, 1961. 206 с.
- Akiyama S., Wheeler J. C., Meier D. L., Lichtenstadt I.* (2003) The Magnetorotational Instability in Core Collapse Supernova Explosions // *Astrophysical J.* 2003. V. 584. P. 954–970.
- Ardejan N. V., Bisnovatyi-Kogan G. S., Kosmachevskii K. V., Moiseenko S. G.* (1996) An Implicit Lagrangian Code for the Treatment of Nonstationary Problems in Rotating Astrophysical Bodies // *Astronomy and Astrophysics Supplement Ser.* 1996. V. 115. P. 573–594.
- Ardejan N. V., Bisnovatyi-Kogan G. S., Moiseenko S. G.* (2000) Nonstationary Magnetorotational Processes in a Rotating Magnetized Cloud // *Astronomy and Astrophysics*. 2000. V. 355. P. 1181–1190.
- Ardejan N. V., Bisnovatyi-Kogan G. S., Moiseenko S. G.* (2005) Magnetorotational Supernovae // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Soc.* 2005. V. 359. P. 333–344.
- Bisnovatyi-Kogan G. S., Popov Yu. P., Samokhin A. A.* (1976) The magnetohydrodynamic rotational model of supernova explosion // *Astrophysics and Space Science*. 1976. V. 47. P. 321.
- Blondin J. M., Mezzacappa A., DeMarino C.* (2003) Stability of Standing Accretion Shocks, with an Eye Toward Core Collapse Supernovae // *Astrophysics J.* 2003. V. 584. N. 2. P. 971.
- Burrows A., Dessart L., Livne E., Ott C. D., Murphy J.* (2007) Simulations of Magnetically-Driven Supernova and Hypernova Explosions in the Context of Rapid Rotation // *Astrophysical J.* 2007. V. 664. P. 416.
- Burrows A., Livne E., Dessart L., Ott C. D., Murphy J.* (2006) An acoustic mechanism for core-collapse supernova explosions // *New Astronomy Reviews*. 2006. V. 50. N. 7–8. P. 469–648.
- Chandrasekhar S.* (1981) *Hydrodynamic and Hydromagnetic stability*. N. Y.: Dover, 1981.
- Colgate S. A., Krauss L. M., Shramm D. N., Walker T. P.* (1990) Magneto-Hydrodynamic Jets, Pulsar Formation and SN 1987a // *Astrophysical Letters and Communications*. 1990. V. 27. N. 6. P. 411.
- Colgate S. A., White R. H.* (1966) The Hydrodynamic Behavior of Supernovae Explosions // *Astrophysical J.* 1966. V. 143. P. 626.
- Kotake K., Sawai H., Yamada S., Sato K.* (2004) Magnetorotational Effects on Anisotropic Neutrino Emission and Convection in Core-Collapse Supernovae // *Astrophysical J.* 2004. V. 608. P. 391.
- LeBlanc J. M., Wilson J. R.* (1970) A Numerical Example of the Collapse of a Rotating Magnetized Star // *Astrophysical J.* 1970. V. 161. P. 541.
- Lorimer D. R.* (2005) Binary and Millisecond Pulsars // *Living Reviews in Relativity*. 2005. V. 8. N. 7L.
- Masada Y., Sano T., Shibata K.* (2007) Effect of Neutrino Radiation on Magnetorotational Instability in Proto-Neutron Stars // *Astrophysical J.* 2007. V. 655. P. 447.
- Mizuno Y., Yamada S., Koide S., Shibata K.* (2004) General Relativistic Magnetohydrodynamic. Simulations of Collapsars // *Astrophysical J.* 2004. V. 606. P. 395–412.
- Moiseenko S. G., Bisnovatyi-Kogan G. S., Ardejan N. V.* (2006) Magnetorotational core collapse model with jets. // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2006. V. 370. P. 501–512.
- Müller E., Janka H.-T.* (1994) Multi-Dimensional Simulations of Neutrino-Driven Supernovae // *Reviews in Modern Astronomy*. 1994. V. 7. P. 103–128.



- Ohnishi N., Kotake K., Yamada S.* (2006) Numerical Analysis on Standing Accretion Shock Instability with Neutrino Heating in the Supernova Cores // *Astrophysical J.* 2006. V. 641. P. 1018.
- Sawai H., Kotake K., Yamada S.* (2005) Core-Collapse Supernovae with Nonuniform Magnetic Fields // *Astrophysical J.* 2005. V. 631. P. 446–455.
- Spruit H. C.* (1999) Differential Rotation and Magnetic Fields in Stellar Interiors // *Astronomy and Astrophysics.* 1999. V. 349. P. 189–202.
- Spruit H. C.* (2002) Dynamo action by differential rotation in a stably stratified stellar interior // *Astronomy and Astrophysics.* 2002. V. 381. P. 923–932.
- Takiwaki T., Kotake K., Nagataki S., Sato K.* (2004) Magneto-driven Shock Waves in Core-Collapse Supernovae // *Astrophysical J.* 2004. V. 616. P. 1086.
- Taylor R. J.* (1973) The adiabatic stability of stars containing magnetic fields-I. Toroidal fields // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* 1973. V. 161. P. 365.
- Wheeler J. C., Meier D. L., Wilson J. R.* (2002) Supernovae from Magnetocentrifugal Jets // *Astrophysical J.* 2002. V. 568. P. 807–819.
- Yamada S., Sawai H.* (2004) Numerical Study on the Rotational Collapse of Strongly Magnetized Cores of Massive Star // *Astrophysical J.* 2004. V. 608. P. 907–924.

#### SIMULATION OF MAGNETOROTATIONAL PROCESSES IN ASTROPHYSICS (MAGNETOROTATIONAL SUPERNOVAE)

S. G. Moiseenko<sup>1</sup>, G. S. Bisnovaty-Kogan<sup>1</sup>, N. V. Ardeljan<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Space Research Institute (IKI RAN), Moscow*

<sup>2</sup> *Lomonosov Moscow State University*

Magnetorotational (MR) mechanism of core collapse supernova explosion is simulated numerically in 2D for different core masses, angular moments and magnetic field configurations. For the numerical simulations we used implicit completely conservative Lagrangian method on a triangular grid of variable structure. We show that MR mechanism gives explosion energy what fits the observational data. The shape of the explosion depends on the configuration of the initial magnetic field. During evolution of the magnetic field in MR explosion magnetorotational instability (MRI) develops what leads to the exponential growth of all components of magnetic field. MRI significantly decreases time of MR explosion. The supernova explosion energy grows with the increase of core mass and initial rotational energy.

*Keywords:* MHD, supernovae, numerical simulation.

---

**Moiseenko Sergey Grigorievich** — Leading Scientific Researcher, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, e-mail: moiseenko@iki.rssi.ru.

**Bisnovaty-Kogan Gennadii Semenovich** — Main Scientific Researcher, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: gkogan@iki.rssi.ru.

**Ardeljan Nikolaj Vasilievich** — Leading Scientific Researcher, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, e-mail: ardel@cs.msu.su.

# МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНЫЕ СПЕКТРЫ СЖИМАЕМОЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ С ВЫНУЖДАЮЩЕЙ ВНЕШНЕЙ СИЛОЙ

**А. А. Чернышов, К. В. Карельский, А. С. Петросян**

*Учреждение Российской академии наук  
Институт космических исследований РАН (ИКИ РАН), Москва*

В работе предлагается метод крупных вихрей для исследования сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности, вынуждаемой внешней силой. Предложенная методика основана на решении исходных отфильтрованных уравнений магнитной гидродинамики конечно-разностными методами и на линейном представлении внешних сил в уравнениях сохранения импульса и магнитной индукции, обеспечивающих производство кинетической и магнитной энергий. Основное внимание уделено важному и до сих пор не исследованному вопросу о способности метода крупных вихрей воспроизводить масштабнo-инвариантные спектры Колмогорова и Ирешникова – Крейчана в сжимаемом магнитогидродинамическом течении.

Работа была выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 08-08-00687-а). Чернышов Александр выражает признательность фонду «Династия» за финансовую поддержку по программе поддержки молодых ученых со степенью кандидата наук, а также президенту РФ за грант государственной поддержки молодых российских ученых (МК 1349.2011.2).

*Ключевые слова:* магнитогидродинамика, турбулентность, сжимаемые течения, масштабнo-инвариантные спектры, метод крупных вихрей.

## Введение

Метод крупных вихрей (Large eddy simulation — LES) является эффективным инструментом исследования сложных турбулентных течений жидкости и газа [Garnier et al., 2009; Sagaut, 2002; Agullo et al., 2001; Müller, Carati, 2002]. Основная его идея заключается в фильтрации исходных уравнений гидродинамики и последующей параметризации универсальной части турбулентного течения. Этот метод выгодно отличается от альтернативных методов исследования турбулентности. В отличие от рейнольдсовского описания, метод LES разрешает крупные вихри и тем самым обеспечивает информацию о статистических и спектральных свойствах турбулентного поля. В отличие от метода прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation — DNS), LES позволяет исследовать течения с большими по сравнению с DNS параметрами подобия для имеющихся мощностей компьютерного оборудования, так как число степеней свободы турбулентного движения велико и минимальное количество узлов на численной сетке должно быть столь большим, что ограничивает применение

---

**Чернышов Александр Александрович** — научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, e-mail: achernyshov@iki.rssi.ru.

**Карельский Кирилл Владимирович** — старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, e-mail: kkarelsk@iki.rssi.ru.

**Петросян Аракел Саркисович** — заведующий сектором, доктор физико-математических наук, e-mail: apetrosy@iki.rssi.ru.

прямого численного моделирования для изучения турбулентных течений с реальными характерными числами Рейнольдса. Последнее преимущество особенно принципиально для исследования магнитогидродинамической (МГД) турбулентности сжимаемой плазмы, которая характеризуется большими числами Рейнольдса и Маха.

В работах А. А. Чернышова и др. [Chernyshov et al., 2006a–c, 2007, 2008a–c, 2009] предложен метод крупных вихрей для изучения сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности плазмы и показана его применимость для исследования однородной вырождающейся турбулентности. Однако до сих пор остается открытым вопрос об адекватности метода LES для исследования физических процессов в сжимаемой МГД-турбулентности, вынуждаемой внешней силой. Дело в том, что для численного решения отфильтрованных уравнений метода крупных вихрей, так же как и для решения исходных уравнений прямого численного моделирования в случае сжимаемой МГД-турбулентности, наиболее адекватными является конечно-разностные и конечно-объемные методы в координатном пространстве [Cho, Lazarian, 2003, Ladeinde, Gaitonde, 2004, Kritsuk, 2009; Kitsionas, 2009]. Решение исходных уравнений конечно-разностными методами, кроме того, позволяет естественным образом исследовать неоднородные и нестационарные турбулентные течения.

Традиционный путь реализации внешней силы для сжимаемых МГД-течений основывается на опыте изучения турбулентности несжимаемой жидкости и на спектральном представлении внешней силы и последующем пересчете заданной силы в координатное пространство [Haugen, Brandenburg, 2004; Brandenburg, 2003; Ladeinde, Gaitonde, 2004]. Заметим, что в магнитной гидродинамике сжимаемой жидкости существуют четыре типа волн: альфвеновские, медленные магнитозвуковые, быстрые магнитозвуковые и энтропийные [Cho, Lazarian, 2005; Siggia, Patterson, 1978]. Спектры в инерционном интервале турбулентности в этом случае могут определяться более богатой картиной взаимодействия перечисленных типов волн, и для описания такой турбулентности при разных параметрах подобия традиционные виды внешней силы, основанные на локальных спектральных представлениях источника турбулентности, могут сильно упростить картину процессов в сжимаемой МГД-турбулентности плазмы. Проблема адекватности метода крупных вихрей в этом случае сводится не только и не столько к сравнению с методом прямого численного моделирования (что было сделано в наших работах [Chernyshov et al., 2006a–c, 2007, 2008a–c, 2009]), а скорее к возможности воспроизведения масштабно-инвариантных спектров Колмогорова и Ирошникова – Крейчнана в физических условиях их возникновения. Именно изучению этого важного аспекта метода крупных вихрей посвящена наша работа.

В данной работе для исследования сжимаемой МГД-турбулентности в инерционном интервале предлагается использовать линейную внешнюю силу, предложенную в гидродинамике нейтральной несжимаемой жидкости Т. С. Лундгреном [Lundgren, 2003; Rosales, Meneveau, 2005; Di Stefano, Vasilyev, 2010]. Идея состоит в использовании силы, которая прямо пропорциональна

флуктуирующей скорости. Данный подход определения вынуждающей силы получил название «линейный форсинг». Несмотря на несомненные преимущества этого метода, он всё ещё не нашел широкого применения в изучении турбулентности методами DNS и LES. Основное преимущество использования силы такого вида заключается прежде всего в том, что она действует на все масштабы в координатном пространстве и таким образом обеспечивает производство турбулентной кинетической энергии и адекватность стационарных решений с учётом накапливающихся в пространстве нелинейных взаимодействий волн, поэтому она в LES такая же, как и в DNS.

В настоящей работе предложен метод линейного форсинга для сжимаемой МГД-турбулентности, заключающийся в использовании линейной внешней силы не только при нахождении силы в уравнении сохранения импульса, но и в уравнении сохранения магнитной индукции, так как рассматривается турбулентность электропроводящего газа. В разделе 1 представлены основы теории Колмогорова и Ирошникова – Крейчнана для МГД, а также методы моделирования турбулентности с внешней силой; в разделе 2 — выражения определения вынуждающей силы с помощью линейного форсинга: сила пропорциональна скорости в уравнении количества движения и сила пропорциональна магнитному полю в уравнении индукции; в разделе 3 сформулирован метод LES для сжимаемой МГД-турбулентности с вынуждающей внешней силой в физическом пространстве как для случая политропного газа, так и для теплопроводящей плазмы; результаты численных расчётов и анализ полученных результатов приведены в разделе 4; в конце статьи даны выводы и заключительные замечания.

## 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНОЙ МГД-ТУРБУЛЕНТНОСТИ И МЕТОДОВ ЕЁ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Магнитогиродинамическая турбулентность плазмы, так же как и гидродинамическая турбулентность, обладает свойствами масштабной инвариантности в инерционном интервале [Фриш, 1998; Колмогоров, 1941а–в; Обухов, 1941а, б; Iroshnikov, 1964; Kraichnan, 1965; Grappin et al., 1983; Verma, Bhattacharjee, 1995; Müller, Biskamp, 1999, 2000, 2003; Zhou et al., 2004; Müller, Grappin, 2005b; Tobias et al., 2011; Carbone, Pouquet, 2009; Brandenburg, Nordlund, 2010; Goldstein et al., 1995; Mangeney, 1991; Hatori, 1984; Biskamp, Müller, 2000]. Существование полностью развитого турбулентного состояния возможно, если интегральный масштаб  $L$  и масштаб диссипации  $d$  различаются на несколько порядков величины ( $L \gg d$ ). Согласно феноменологической теории Колмогорова, это состояние характеризуется двумя свойствами. Во-первых, скорость диссипации энергии не зависит от вязкости рассматриваемой жидкости, т. е. принимает конечное значение в пределе нулевой вязкости. Поскольку нелинейные взаимодействия вихрей не нарушают закон сохранения энергии, скорость диссипации  $\varepsilon$  должна быть равна скорости передачи энергии  $\Pi^0$  в систему, т. е.  $\Pi^0 = \varepsilon$ , либо от внешнего источника, либо от самых больших энергосодержащих вихрей, имеющих

масштаб  $L$ . Во-вторых, энергия передается не непосредственно от наибольшего масштаба к диссипационному, а переносится вдоль спектра благодаря последовательным взаимодействиям между всё меньшими и меньшими масштабами, т. е. наблюдается каскад энергии. В этом каскаде вихри масштаба  $l$  распадаются на меньшие вихри, но воспроизводятся большими вихрями и т. д. Согласно теории Колмогорова предполагается, что все масштабы находятся в энергетическом равновесии, скорость диссипации энергии для вихрей размера  $l$  не зависит от масштаба  $l$  и равна  $\varepsilon$ :  $\Pi(l) = \Pi^0 = \varepsilon$ . Если  $\tau^*(l)$  — характерное время, необходимое вихрю размера  $l$ , чтобы передать свою энергию  $E(l)$ , то:

$$\Pi(l) \approx \frac{E(l)}{\tau^*(l)}. \quad (1)$$

Так как в нейтральной жидкости перенос энергии обусловлен деформацией вихря под влиянием его собственного движения, время переноса равно времени его оборота  $\tau_{nl}$ . Предполагая, что взаимодействия локальны в пространстве волновых чисел, это время можно записать как:

$$\tau_{nl} \approx \frac{l}{u(l)}, \quad (2)$$

где  $u(l)$  — это характерный разброс скоростей внутри вихря. Используя соотношение  $E(l) \approx u(l)^2$ , получим  $E(l) \approx \varepsilon^{2/3}$ . Учитывая, что  $k \approx 1/l$  и  $E(l) \approx \int^k E_k dk \approx kE_k$ , запишем следующее выражение:

$$\Pi_k \approx k^{5/2} E_k^{3/2} = \varepsilon. \quad (3)$$

Независимость потока от масштаба, таким образом, приводит к соотношению для колмогоровского спектра:

$$E_k \approx \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (4)$$

Однако в проводящей жидкости в однородном магнитном поле имеют место несжимаемые флуктуации в виде альфвеновских волн. Основное положение теории Ирошникова — Крейчнана заключается в том, что в крупномасштабном магнитном поле роль собственной деформации вихря играют более слабые взаимодействия между распространяющимися альфвеновскими волнами. С процессом распространения альфвеновских волн связан дополнительный временной масштаб, альфвеновское время  $\tau_a \approx l/V_a$ , где  $V_a$  — альфвеновская скорость, так что эффективное время переноса энергии вдоль спектра  $\tau^*(l)$  больше не равно времени оборота вихря  $\tau_{nl} \approx l/u \approx l/b$ . Время когерентных взаимодействий сводится к  $\tau_a$ , а это время отличается от времени оборота вихря в  $b/V_a$  раз. Таким образом, рассматривая последовательные столкновения волновых пакетов как независимые, можно показать, что

$$\tau^*(l) \approx \left( \frac{\tau_{nl}}{\tau_a} \right) \tau_{nl} \approx \left( \frac{V_a}{b} \right) \tau_{nl}, \quad (5)$$

и это время может намного превышать  $\tau_{nl}$ . Подставляя теперь в выражение (1) для скорости переноса энергии  $\Pi$  вместо времени оборота вихря эффективное время переноса  $\tau^*(l)$ , получим

$$\Pi_k \approx \frac{kE^2}{V_a} = \frac{k^3 E_k^2}{V_a}. \quad (6)$$

Налагая условие постоянства скорости диссипации  $\varepsilon$ , имеем следующее выражение:

$$E(l) \approx (V_a l \varepsilon)^{1/2}. \quad (7)$$

Соотношение (7) приводит к спектру Ирошникова – Крейчнана:

$$E_k \approx (\varepsilon V_a)^{1/2} k^{-3/2}. \quad (8)$$

М. Добровольный и др. [Dobrowolny et al., 1980] вывели обобщённые формулы для каскада энергии в эльзасеровских переменных [Elsasser, 1950]  $z = u \pm b$ , где  $b$  — флуктуация магнитного поля, выраженная в единицах скорости. Эльзасеровские переменные иногда используются при рассмотрении МГД-турбулентности. Такое представление помогает нагляднее описать поведение флуктуаций, которые распространяются либо по направлению крупномасштабного магнитного поля, либо в противоположном направлении. Время оборота вихря типа  $z^+$  и  $z^-$  зависит от амплитуды поля другого типа, т. е.:

$$\tau_{nl}^\pm \approx \frac{l}{z^\mp}. \quad (9)$$

Если допустить, что происходит разрушение корреляций, предполагаемой в теории Ирошникова – Крейчнана, то спектральные потоки  $\Pi^+$  и  $\Pi^-$  одинаковы:

$$\Pi_k^+ \approx \Pi_k^- \approx \frac{k^3 E_k^- E_k^+}{V_a}. \quad (10)$$

Это соотношение вновь приводит к энергетическому спектру Ирошникова – Крейчнана (пропорциональному  $k^{-3/2}$ ), если амплитуды сравнимы по величине.

Е. Марш [Marsch, 1990] же предположил, что нелинейный временной масштаб  $\tau_{nl}^\pm \approx (kz_k^\mp)^{-1}$  определяется как время оборота вихря, т. е. взаимодействия когерентны, как в колмогоровском каскаде. Скорости спектрального переноса, таким образом, не равны друг другу:

$$\Pi_k^\pm \approx k^{5/2} \frac{E_k^- E_k^+}{(E_k^\mp)^{1/2}} \approx \varepsilon^\pm. \quad (11)$$

В этом случае условие постоянства обоих потоков приводит к колмогоровским спектрам для обоих полей независимо от соотношения потоков  $\varepsilon^{\pm}$ . Другими словами получен спектр Колмогорова в эльзасеровских переменных:

$$E_k^{\pm} \approx \left( \Pi^{\pm} \right)^{4/3} \left( \Pi^{\mp} \right)^{-2/3} k^{-5/3}. \quad (12)$$

Основное различие между двумя конкурирующими феноменологическими теориями ( $-3/2$  и  $-5/3$ ) заключается в выборе временного масштаба для времени взаимодействия. Основное предположение подразумевает, что гипотеза Ирошникова – Крейчнана справедлива для сильного магнитного поля, в то время как феноменология Колмогорова для МГД-случая (т. е. предположение Марша) работает, когда флуктуации преобладают над магнитным полем (сильная турбулентность). Обе феноменологические теории развиты в предположении, что турбулентность изотропна, т. е. когда нет постоянного крупномасштабного среднего магнитного поля, обычно подавляющего энергетические каскады вдоль направления магнитного поля.

Имеется несколько причин, по которым может не происходить разрушения корреляций, предполагаемого в теории Ирошникова – Крейчнана. Первая состоит в том, что в присутствии крупномасштабного магнитного поля энергетический каскад не изотропен в пространстве волновых векторов, для мод с волновыми векторами, почти перпендикулярными магнитному полю, время распада альфвеновских корреляций становится намного больше времени нелинейных взаимодействий [Mangeny et al., 1991]. Вторая причина — при решении большинства задач космической физики флуктуации являются сжимаемыми, и это должно приводить к прямым взаимодействиям между сжимаемыми волнами, распространяющимися в одном направлении. Например, солнечный ветер не является ни несжимаемым, ни изотропным, ни однородным, к тому же, — это электропроводящая среда, большая часть наблюдательных данных о турбулентности в солнечном ветре даёт показатели спектров, очень близкие к колмогоровскому значению, несмотря на то, что для магнитогидродинамической турбулентности ожидается спектр с показателем ( $-3/2$ ). Для решения этой проблемы, например, М. К. Верма [Verma, 1999] предложил использовать ренормгрупповой анализ и показал, что на альфвеновские флуктуации влияет зависимое от масштаба «локальное среднее магнитное поле». Если локальное среднее магнитное поле, определенное как  $k^{-1/3}$ , подставить в уравнения Добровольного, то это даст решение в виде колмогоровского спектра для МГД-турбулентности.

Возможности прямого численного моделирования ограничены большими числами Рейнольдса, необходимыми для получения явно выраженного инерционного интервала турбулентности. Это необходимо, чтобы сделать выбор между двумя значениями показателей степени масштабнo-инвариантного спектра, даже при идеализированных условиях (несжимаемая однородная изотропная жидкость с крупномасштабным магнитным полем), из-за того, что число степеней свободы турбулентного движения велико и минимальное количество узлов

на численной сетке должно быть столь большим, что ограничивает применение прямого численного моделирования для изучения турбулентных течений с реальными характерными числами Рейнольдса. Поэтому достаточно сложно точно измерить наклон спектров с тем, чтобы определить, какая из феноменологических теорий справедлива — Колмогорова или Ирошникова — Крейчнана. Для решения этой проблемы в работе предполагается использовать преимущества разработанного нами метода крупных вихрей.

Концепция изотропной однородной турбулентности была предложена для исследования универсальных статистических свойств. Если энергия не поступает в турбулентное течение, то через некоторое время это течение становится ламинарным из-за наличия вязкости и диффузии. Для того чтобы получить результаты с высокой статистической точностью, необходимо усреднить достаточно много реализаций турбулентного течения. В то время как для вычислительных расчётов намного более эффективно провести одно длинное вычисление, чем подготовить много вычислений с различными начальными условиями, тем более часто усреднение по ансамблю заменяется усреднением по времени. Во многих задачах космической физики необходимо изучать статистическую стационарную (квазистационарную) турбулентность. Квазистационарность подразумевает, что значения энергии и скорости диссипации энергии приблизительно равны во времени, и проявляться могут лишь небольшие флуктуации вокруг их средних значений. Для того чтобы поддерживать трёхмерную турбулентность, применяются внешние силы для инжектирования энергии в систему (другими словами — форсинг) и для поддержания турбулентности, эта энергия восполняет потери, связанные с диссипацией на малых масштабах. Отметим, что различные методы определения вынуждающей силы на самом деле обуславливаются, в первую очередь, техническим, а не реальным физическим аспектом турбулентных течений. Большинство методов были разработаны для определения вынуждающей силы для исследования гидродинамической турбулентности нейтральной жидкости и основаны на добавлении внешней силы в уравнение Навье — Стокса для всех мод в интервале волновых чисел  $|k| = |k_f|$  или внутри сферы  $|k| \leq k_f$ . Эти интервалы ограничены наименьшими волновыми числами так, чтобы сила действовала только на крупные масштабы течения, и, таким образом, образуется инжектированный энергетический каскад, который на малых масштабах диссипируется из-за эффектов вязкости.

Используются различные методы для определения силы при моделировании турбулентности. Часто применяется подход, когда вынуждающая сила выражается в виде:

$$\tilde{f}(k, t) = \zeta \tilde{u}(k, t), \quad (13)$$

где знак « $\tilde{\phantom{x}}$ » обозначает фурье-преобразование. Коэффициент  $\zeta$  при моделировании подбирается таким образом, чтобы сохранять постоянным значение инжектированной энергии. С. Госал и др. [Ghosal et al., 1995] использовали объёмную силу в форме



$$\tilde{f}(k, t) = \frac{\varepsilon \ddot{y}(k, t)}{N \ddot{u}^2(k, t)} \quad (14)$$

для каждого волнового числа  $k$  в интервале  $k = k_0$ , содержащем  $N$  волновых чисел;  $\varepsilon$  — скорость диссипации. Данная формулировка внешней силы предполагает, что энергия, поступающая в систему, постоянна и равна значению скорости диссипации. Однако существует проблема с таким определением внешней силы, так как в этом случае она сильно коррелирована с полем скорости. Д. Карати и др. [Carati et al., 1995] использовали такой же подход для задания вынуждающей силы, но попытались уменьшить проблему, связанную с корреляцией, для этого они модифицировали этот метод. Модификация заключается в том, что для форсинга используются только  $\dot{N} < N$  случайно выбранных волновых чисел в заданном интервале.

В. Эсваран и С. Б. Поуп [Eswaran, Pope, 1988] развили метод, где использовалась стохастическая сила, которая определяется как:

$$\tilde{f}_i(k, t) = \left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] w_j(k, t) [\Theta(k) - \Theta(k - k_F)], \quad (15)$$

где  $w_j$  — стохастический процесс Орнштейна–Уленбека;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\Theta$  — функция Хевисайда. Однако, поскольку существует определенный временной масштаб, на котором сила коррелирована, корреляция скорость – сила будет вносить ощутимый эффект в суммарный форсинг. С. Фуребай и др. [Fureby et al., 1997] применили данный метод определения внешней силы для изучения подсеточных замыканий в методе крупных вихрей, однако в их моделировании они столкнулись с проблемами в обеспечении одинакового форсинга при различных размерах расчётной области вычислений.

К. Альвелиус [Alvelius, 1999] предложил стохастическую схему с вынуждающей внешней силой:

$$\tilde{f}_i(k, t) = A(k, t)e_i^1 + B(k, t)e_i^2, \quad (16)$$

здесь  $e_i^1$  и  $e_i^2$  — единичные ортогональные векторы, которые перпендикулярны  $k$ . Функции  $A$  и  $B$  — случайные комплексные функции, которые зависят от спектра силы в начальный момент времени. Такая внешняя сила была использована в работах Г. Ковалья, А. Лазаряна и др. [Kowal, Lazarian, 2007; Kowal et al., 2009] для исследования свойств сжимаемой МГД-турбулентности и задач магнитного пересоединения.

Для изучения сверхзвуковой турбулентности в замагниченных молекулярных облаках Р. Г. Критцук и др. [Kritsuk et al., 2009] в своих работах использовали крупномасштабную (при фиксированных волновых числах  $k \leq 2$ ) изотропную соленоидальную внешнюю силу с нулевой спиральностью, записанную в следующем виде:

$$f = \rho a - \langle \rho a \rangle, \quad (17)$$

где  $a = u_0/\tau$  — ускорение, а угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  обозначают усреднение по всей расчётной области. Такая формулировка вынуждающей силы позволила авторам сохранять звуковое число Маха практически постоянным на протяжении всего численного расчёта.

Существуют также различные методы, где поддерживается постоянной кинетическая энергия для наименьших волновых чисел. Е. Д. Сиджиа и Г. С. Паттерсон [Siggia, Patterson, 1978] использовали подход, где сохраняются амплитуды фурье-коэффициентов  $\tilde{u}$  в интервале  $1 \leq k \leq 2$  при их постоянном значении. Г. Р. Часнов [Chasnov, 1991] модифицировал эту идею тем, что сохранял  $|\tilde{u}(k, t)|$  постоянным для каждой моды с  $1 \leq k < 2$ , позволяя их фазам эволюционировать. Однако, на самом деле, трудно сказать, чему физически соответствует такое определение внешней силы. Н. Р. Салливан и др. [Sullivan et al., 1994] применили метод Часнова с небольшими изменениями, а именно, энергия сохранялась в промежутке  $k \leq K_f$ , где  $K_f$  может быть больше, чем два. К. Серор и др. [Seror et al., 2001] использовали форсинг, который поддерживает постоянной суммарную кинетическую энергию повторной закачкой потерянной энергии на каждом временном шаге в диапазоне  $1 \leq k \leq 5$ . Таким образом, диссипированная энергия переносится на крупные масштабы рассматриваемого течения. З. С. Ши и др. [She et al., 1991, 1993] предложили метод, в котором полная энергия на первых двух волновых интервалах ( $1 \leq k < 2$  и  $2 \leq k < 3$ ) сохраняется постоянной с течением времени. Л.-П. Ванг и др. [Wang et al., 1996] в своей работе использовали другие волновые интервалы:  $0,5 < k \leq 1,5$  и  $1,5 < k \leq 2,5$ . Отношения между энергиями в этих двух волновых интервалах устанавливались таким образом, чтобы соответствовать колмогоровскому масштабнo-инвариантному спектру  $k^{-5/3}$ . Данный метод также использовался в работах С. Чена и Х. Шана [Chen, Shan, 1992], К. Мошени и др. [Mosheni et al., 2003] с целью получения изотропной внешней силы для численного моделирования.

Необходимо заметить, что М. Р. Оверхолт и С. Б. Поуп [Overholt, Pope, 1998] провели сравнения стохастического форсинга по методу Эсварана и Поупа (15) с детерминированный силой, которая выражается как  $\tilde{f}(k, t) = \tilde{u}(k, t)g_k(t)/\tau$ . Функция  $g_k(t)$  определяется через дифференциальное уравнение для каждого волнового числа. Было получено хорошее согласие между результатами для этих двух методов, в то же время детерминированный метод показал меньшие статистические вариации для большинства величин.

Все упомянутые выше методы были разработаны для получения решений исходных уравнений в волновом пространстве. Однако часто необходимо использовать конечно-разностный подход в физическом пространстве для моделирования турбулентных течений, который, в отличие от спектрального метода в волновом пространстве, более эффективен при решении задач со сложной геометрией, с различными граничными условиями, а также требует меньших компьютерных ресурсов и меньшего количества времени для вычислений. Методы определения вынуждающей силы, описанные выше, требуют знания

волновых чисел и фурье-преобразования физических величин, которые описывают рассматриваемое течение. Следовательно, необходимо разработать такой способ определения внешней силы в физическом пространстве для изучения масштабно-инвариантных свойств сжимаемой МГД-турбулентности, в котором вынуждающая сила не будет зависеть от фурье-представления.

## 2. ЛИНЕЙНЫЙ ФОРСИНГ В СЖИМАЕМОЙ МГД-ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ФИЗИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В данном разделе мы обобщили теорию линейного форсинга на случай сжимаемой МГД-турбулентности. Получены формулы для внешней силы в уравнениях сохранения количества движения и магнитной индукции для моделирования МГД-турбулентности в физическом пространстве.

Система уравнений сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности при наличии внешней вынуждающей силы записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \sigma_{ij} + \frac{B^2}{8\pi} \delta_{ij} - \frac{1}{4\pi} B_j B_i \right) + F_j^u, \quad (19)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j B_i - u_i B_j) + \eta \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} + F_i^b, \quad (20)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0, \quad (21)$$

где  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $u_j$  — скорость в направлении  $x_j$ ;  $\sigma_{ij} = 2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu S_{kk} \delta_{ij} + \zeta S_{kk} \delta_{ij}$  — вязкий тензор напряжений;  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  — тензор скорости деформации;  $\mu$  — динамический (молекулярный) коэффициент вязкости;  $\zeta$  — объёмный коэффициент вязкости (однако далее в работе будем считать, что объёмный коэффициент вязкости  $\zeta = 0$ );  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\eta$  — коэффициент магнитной диффузии;  $B_j$  — магнитное поле в направлении  $x_j$ ;  $F_i^u$  и  $F_i^b$  — внешние силы, которые поддерживают турбулентность, так как,

кроме затухающей турбулентности, часто необходимо изучать статистическую стационарную (квазистационарную) турбулентность. Если энергия не поступает в турбулентное течение, то через некоторое время данное течение становится ламинарным из-за наличия вязкости и диффузии. Чтобы поддерживать трёхмерную турбулентность, применяются внешние силы для инъектирования энергии в систему и поддержания турбулентности, эта энергия восполняет потери, связанные с диссипацией на малых масштабах. Квазистационарность

подразумевает, что значения энергии и скорости диссипации энергии приблизительно равны во времени и проявляться могут лишь небольшие флуктуации вокруг их средних значений.

Для моделирования гидродинамической турбулентности несжимаемой жидкости с вынуждающей силой в физическом пространстве был предложен и использован так называемый «линейный форсинг» [Lundgren, 2003; Rosales, Meneveau, 2005]. Основная идея данного подхода заключается в добавлении внешней силы, которая пропорциональна флуктуирующей скорости. Линейный форсинг соответствует турбулентности с вынуждающей силой, вызванной средним градиентом скорости, т. е. сдвигом. Эта сила возникает как одно из слагаемых в уравнении для флуктуирующей скорости, которое соответствует члену генерации турбулентности в уравнении для турбулентной кинетической энергии. В работе мы обобщим данный подход на случай сжимаемого МГД-течения проводящей жидкости.

Уравнение для флуктуирующей скорости в турбулентном сжимаемом магнитогидродинамическом течении запишем как:

$$\rho \left[ \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \right] = - \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \rho \hat{u}_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \left[ \rho \hat{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} - \rho \left\langle \hat{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\hat{B}^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} \left[ \gamma_j \frac{\partial \hat{B}_i}{\partial x_j} + \hat{B}_j \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{4\pi} \left[ \hat{B}_j \frac{\partial \hat{B}_i}{\partial x_j} - \left\langle \hat{B}_j \frac{\partial \hat{B}_i}{\partial x_j} \right\rangle \right]. \quad (22)$$

Здесь использованы следующие, так называемые рейнольдсовские, разложения:  $u_i = U_i + \hat{u}_i$ ;  $B_i = \gamma_i + \hat{B}_i$ ;  $p = P + \hat{p}$ ;  $\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + \hat{\sigma}_{ij}$ , где  $U_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $P$ ,  $\Sigma_{ij}$  — средние значения, а  $\hat{u}_i$ ,  $\hat{B}_i$ ,  $\hat{p}$ ,  $\hat{\sigma}$  — флуктуирующие величины.

В уравнении (22) третье слагаемое в правой части  $\rho \hat{u}_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$  соответствует источниковому члену в уравнении турбулентной кинетической энергии. Это уравнение выводится вычитанием из статистически усредненного уравнения, полученного из скалярного произведения скорости на неусредненное уравнение количества движения, скалярного произведения скорости на усредненное уравнение количества движения. В символьном виде вывод уравнения турбулентной кинетической энергии запишется как:  $\langle u \cdot NS eq. \rangle - U \langle NS eq. \rangle$  (где под *NS eq.* подразумевается уравнение Навье – Стокса с силой Лорентца). Поэтому уравнение турбулентной кинетической энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{1}{2} \rho \hat{u}^2 \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left\langle \frac{1}{2} \rho \hat{u}^2 \right\rangle U_j + \left\langle \frac{1}{2} \rho \hat{u}^2 \hat{u}_j \right\rangle - \langle \beta_{ij} \hat{u}_i \rangle \right] = - \left\langle \hat{u}_i \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \hat{u}_i \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle \rho \hat{u}_i \hat{u}_j \right\rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \left\langle \beta_{ij} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle, \quad (23)$$

где  $\beta_{ij}$  — турбулентный магнитный тензор, записанный как:

$$\beta_{ij} = \frac{\hat{B}_i \hat{B}_j}{4\pi} - \frac{\hat{B}^2}{8\pi} \delta_{ij}. \quad (24)$$

В уравнении (23) полученные слагаемые можно интерпретировать как:  $\left\langle \frac{1}{2} \rho \hat{u}^2 \right\rangle > U_j$  — поток турбулентной кинетической энергии, связанный со средней скоростью;  $\left\langle \frac{1}{2} \rho \hat{u}^2 \hat{u}_j \right\rangle$  — диффузионный турбулентный поток турбулентной кинетической энергии;  $\left\langle \hat{u}_i \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \right\rangle$  — диссипация турбулентной энергии из-за вязкости;  $\left\langle \hat{u}_i \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} \right\rangle$  — корреляция давление — сдвиг (турбулентная диффузия давления посредством корреляций давления и скорости the pressure-strain rate term). Последние члены в левой и правой частях (23) характеризуют связь турбулентной кинетической энергии с магнитной энергией, т. е. влияние работы магнитных сил на турбулентную скорость. Слагаемое  $\left\langle \rho \hat{u}_i \hat{u}_j \right\rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$  в выражении

(23) является источником турбулентной кинетической энергии в единичном объёме на единицу времени, получающемся в результате взаимодействия рейнольдсовских напряжений и сдвига в среднем течении. В уравнении (22) данный член интерпретируется как слагаемое с вынуждающей силой [Lundgren, 2003] пропорциональное  $\hat{u}$ , т. е. предполагается, что для изотропной однородной турбулентности это слагаемое может являться подходящей силой для получения стационарного турбулентного течения с внешней силой, которая прямо пропорциональна скорости:

$$F_i^u = \Theta \rho u_i, \quad (25)$$

где  $\Theta$  — коэффициент, который определяется из баланса кинетической энергии для стационарно статистического состояния с учётом того, что в однородной изотропной турбулентности градиент средней скорости равен нулю:

$$\Theta = \frac{1}{3 \langle \rho \rangle u_{rms}^2} \left[ \left\langle u_j \frac{\partial}{\partial x_j} p \delta_{ij} \right\rangle + \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \left\langle u_j \frac{\partial}{\partial x_j} B^2 \delta_{ij} \right\rangle \right], \quad (26)$$

где  $\varepsilon = - \left\langle u_j \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} \right\rangle$  — скорость средней диссипации турбулентной энергии в тепло. Также в формуле (26) учтено, что  $\frac{1}{\langle \rho u^2 \rangle} = \frac{1}{3 \langle \rho \rangle u_{rms}^2}$ , так как  $u_{rms}^2 = \frac{\langle \rho u^2 \rangle}{3 \langle \rho \rangle}$  является средневзвешенным усреднением среднеквадратичной скорости. Заметим,

что в сжимаемой однородной турбулентности член  $\left\langle u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\rangle = - \left\langle p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right\rangle$ .

Необходимо заметить, что коэффициент  $\Theta$  в выражении (25) может как со-

храняться постоянным, так и пересчитываться во время вычисления [Rosales, Meneveau, 2005].

Функция форсинга  $F_i^u = \Theta \rho u_i$  в физическом пространстве равносильна силе в спектральном (Фурье) пространстве, которая действует на все моды. Это фактически единственное отличие линейного форсинга от стандартного спектрального форсинга, когда энергия добавляется в систему только в интервале малых волновых чисел, т. е. в интегральный масштаб турбулентности.

Аналогично будем действовать для нахождения внешней силы  $F_i^b$  в уравнении магнитной индукции. Уравнение для флуктуирующей части магнитного поля в сжимаемом МГД-течении запишем как:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{B}_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial \hat{B}_i}{\partial x_j} = \hat{B}_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \hat{B}_i \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - \Upsilon_i \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_j} + \eta \frac{\partial^2 \hat{B}_i}{\partial x_j^2} + \left[ \hat{B}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} - \left\langle \hat{B}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle \right] + \\ + \Upsilon_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} - \hat{u}_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} - \left[ \hat{u}_j \frac{\partial \hat{B}_i}{\partial x_j} - \left\langle \hat{u}_j \frac{\partial \hat{B}_i}{\partial x_j} \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

В выражении (27) первое слагаемое в правой части  $\hat{B}_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$  соответствует члену генерации в уравнении турбулентной магнитной энергии, которое имеет вид:

$$\frac{\partial \langle \hat{B}^2 \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left\langle \frac{\hat{B}^2}{8\pi} \right\rangle U_j + \left\langle \frac{\hat{B}^2}{8\pi} \hat{u}_j \right\rangle \right] = \frac{\langle \hat{B}_i \hat{B}_j \rangle}{4\pi} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \left\langle \frac{\hat{B}_i \hat{B}_j}{4\pi} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle + \frac{\eta}{4\pi} \left\langle \hat{B}_i \frac{\partial^2 \hat{B}_i}{\partial x_j^2} \right\rangle. \quad (28)$$

Слагаемые в выражении (28) описывают транспорт, генерацию и диссипацию турбулентной магнитной энергии в электропроводящей газовой среде. В уравнении (28) член  $\left\langle \frac{\hat{B}^2}{8\pi} \right\rangle U_j$  — адвекция турбулентной магнитной энергии;  $\left\langle \frac{\hat{B}^2}{8\pi} \hat{u}_j \right\rangle$  — турбулентная диффузия турбулентной магнитной энергии;  $\left\langle \frac{\hat{B}_i \hat{B}_j}{4\pi} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle$  — взаимодействие турбулентной магнитной энергии с флуктуирующими компонентами среднего сдвига;  $\frac{\eta}{4\pi} \left\langle \hat{B}_i \frac{\partial^2 \hat{B}_i}{\partial x_j^2} \right\rangle$  — диссипация турбулентной магнитной энергии из-за магнитной диффузии. Здесь — в

(28) — первое слагаемое в правой части  $\frac{\langle \hat{B}_i \hat{B}_j \rangle}{4\pi} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$  интерпретируется как член генерации магнитной энергии вследствие взаимодействия между магнитным полем и средним сдвигом. Заметим, что данный член соответствует слагае-

мому  $-\langle \rho \hat{u}_i \hat{u}_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$  в уравнении турбулентной кинетической энергии (23).

Предположим, что вынуждающая сила в уравнении магнитной индукции пропорциональна магнитному полю. Поэтому силу  $F_j^b$  определим как:

$$F_i^b = \Psi B_i, \quad (29)$$

где  $\Psi$  — коэффициент. Как и раньше, для нахождения  $\Theta$ , для того чтобы определить коэффициент  $\Psi$ , воспользуемся балансом магнитной энергии для стационарно статистического состояния (т. е. производная по времени равна нулю):

$$\Psi = \frac{\chi}{3B_{rms}^2}, \quad (30)$$

где  $\chi = \left\langle \eta B_i \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} \right\rangle$  резистивная диссипация турбулентной магнитной энергии в МГД-турбулентности и  $B_{rms}^2 = \frac{B^2}{3}$  — среднеквадратичное магнитное поле. Так

же, как и параметр  $\Theta$  в (25), коэффициент  $\Psi$  в формуле (29) в течение моделирования МГД-турбулентности с вынуждающей силой может как сохраняться постоянным, так и пересчитываться на каждом временном шаге.

Таким образом, мы вывели выражения для внешних сил в уравнении сохранения количества движения (25) и в уравнении магнитной индукции (29), которые будут использованы далее для моделирования трёхмерной сжимаемой МГД-турбулентности в физическом пространстве.

### 3. МЕТОД КРУПНЫХ ВИХРЕЙ ДЛЯ СЖИМАЕМОЙ МГД-ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ

В данном разделе сформулируем метод LES для моделирования сжимаемой МГД-турбулентности с вынуждающей внешней силой, вид которой получен в предыдущем параграфе. Также в этом разделе представлены численные методы, которые использовались в настоящей работе при моделировании турбулентности политропной и теплопроводящей заряженной жидкости.

Метод LES был развит для исследования сжимаемых МГД-течений как для политропного газа [Chernyshov et al., 2006a, 2007, 2008a, c, 2009], так и для теплопроводящей жидкости [Chernyshov et al., 2006a, c, 2008b]. В методе крупных вихрей каждый физический параметр разлагается на крупномасштабную  $\bar{f}$  и мелкомасштабную  $f'$  составляющие, т. е.  $f = \bar{f} + f'$ . Причем эффекты на больших масштабах рассчитываются непосредственно, а на мелких — моделируются. Для этого к исходным уравнениям применяется операция фильтрации. Отфильтрованная (т. е. крупномасштабная) часть  $\bar{f}(x_i)$  определяется следующим образом:

$$\bar{f}(x_i) = \int_{\Theta} f(x'_i) G(x_i, x'_i; \bar{\Delta}) dx'_i, \quad (31)$$

где  $G$  — фильтр;  $f$  — одна из характеристик течения;  $\Theta$  — область течения;  $\bar{\Delta}$  — ширина фильтра;  $x_j = (x, y, z)$  — оси декартовой системы координат.

Причем фильтр  $G$  удовлетворяет свойству нормировки:  $\int_a^b G(x_j, x'_j; \bar{\Delta}_j) dx_j = 1$  для  $\forall x \in \Theta$ .

Для упрощения уравнений, описывающих турбулентное МГД-движение с переменной плотностью, воспользуемся фильтрацией по Фавру [Favre, 1965] (другое название — средневзвешенная фильтрация), для того чтобы избежать появления дополнительных подсеточных членов, связанных с переменной плотностью. Средневзвешенную фильтрацию определим как:

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}. \quad (32)$$

В формуле (32) черта сверху обозначает обычную фильтрацию, а тильда — средневзвешенную фильтрацию.

Применяя средневзвешенную процедуру фильтрации, перепишем уравнения МГД для сжимаемого течения в безразмерной форме, используя стандартную процедуру, где  $Re = \frac{\rho_0 u_0 L_0}{\mu_0}$  — число Рейнольдса;  $Re_m = \frac{u_0 L_0}{\eta_0}$  — магнитное число Рейнольдса;  $M_s = \frac{u_0}{c_s}$  — число Маха, где  $c_s$  — скорость звука, определённая из выражения:  $c_s = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$ , и  $M_a = \frac{u_0}{u_a}$  — магнитное число Маха, где  $u_a = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$  — альфвеновская скорость,

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij} - \frac{1}{Re} \tilde{\sigma}_{ij} + \frac{\bar{B}^2}{2M_a^2} \delta_{ij} - \frac{1}{M_a^2} \bar{B}_j \bar{B}_i \right) = -\frac{\partial \tau_{ji}^u}{\partial x_j} + F_i^u, \quad (34)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_j \bar{B}_i - \tilde{u}_i \bar{B}_j) - \frac{1}{Re_m} \frac{\partial^2 \bar{B}_i}{\partial x_j^2} = -\frac{\partial \tau_{ji}^b}{\partial x_j} + F_i^b, \quad (35)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (36)$$

Первые слагаемые в правой части уравнений (34)–(35) содержат турбулентные подсеточные тензоры  $\tau_{ij}^u$  и  $\tau_{ij}^b$ , которые описывают влияние подсеточных



членов на крупномасштабную динамику:  $\tau_{ij}^u = \bar{\rho} \left( \overline{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j \right) - \frac{1}{M_a^2} \left( \overline{B_i B_j} - \bar{B}_i \bar{B}_j \right)$  и  $\tau_{ij}^b = \left( \overline{u_i B_j} - \tilde{u}_i \bar{B}_j \right) - \left( \overline{B_i u_j} - \bar{B}_i \tilde{u}_j \right)$ .

В настоящей работе мы используем расширенную модель Смагоринского для сжимаемого МГД-случая в качестве подсеточной параметризации [Chernyshov et al., 2006b, 2008a]. Модель Смагоринского показала точные результаты при изучении свойств сжимаемой МГД-турбулентности при различных числах подобия [Chernyshov et al., 2007]:

$$\tau_{ij}^u - \frac{1}{3} \tau_{kk}^u \delta_{ij} = -2C_1 \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 \left| \tilde{S}^u \right| \left[ \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right], \quad (37)$$

$$\tau_{ij}^b = -2D_1 \bar{\Delta}^2 \left| \bar{J} \right| \bar{J}_{ij}, \quad (38)$$

$$\tau_{kk}^u = 2Y_1 \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 \left| \tilde{S}^u \right|^2. \quad (39)$$

Коэффициенты  $C_1$ ,  $D_1$  и  $Y_1$  в уравнениях (37)–(39) являются модельными константами.

В уравнениях (34), (35) справа находятся внешние силы  $F_i^u$  и  $F_i^b$  соответственно, определенные с помощью теории линейного форсинга в (25) и (29), которые в безразмерном виде записываются следующим образом:

$$F_i^u = \frac{1}{3 \langle \bar{\rho} \rangle \tilde{u}_{rms}^2} \left[ \tilde{\varepsilon} + \frac{\left\langle \tilde{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho}^\gamma \delta_{ij} \right\rangle}{\gamma M_s^2} + \frac{\left\langle \tilde{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{B}^2 \delta_{ij} \right\rangle}{2M_a^2} \right] \bar{\rho} \tilde{u}_i, \quad (40)$$

$$F_i^b = \frac{1}{3 \bar{B}_{rms}^2} \left[ \left\langle \frac{1}{\text{Re}_m} \bar{B}_i \frac{\partial^2 \bar{B}_i}{\partial x_j^2} \right\rangle \right] \bar{B}_i, \quad (41)$$

где  $\tilde{\varepsilon} = - \left\langle \frac{\tilde{u}_j}{\text{Re}} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x_j} \right\rangle$ .

Стоит отметить, что при использовании метода LES может появиться дополнительный член, связанный с подсеточным тензором, в балансе энергии при определении коэффициента для нахождения вынуждающей силы. Однако в данной работе используется динамическая процедура для определения модельных констант  $C_1$ ,  $D_1$  и  $Y_1$  в расширенной модели Смагоринского для МГД-случая, их значения рассчитываются самосогласованно на каждом временном шаге в процессе моделирования турбулентности. Динамическая процедура подробно описана в литературе [Germano et al., 1991; Lilly, 1992] и была применена для МГД [Müller, Carati, 2002; Chernyshov et al., 2006b]. В динамической процедуре модельная константа получается таким образом, чтобы минимизировать (применяя метод наименьших квадратов) зависимость турбулентной

статистики от ширины фильтра  $\bar{\Delta}$  [Pore, 2004], следовательно, обеспечивается подходящее значение динамически определенной константе.

В настоящей работе мы рассматриваем не только политропную жидкость, но и теплопроводящий заряженный газ. Многие течения электропроводящей жидкости не могут быть описаны в рамках несжимаемой среды или сжимаемыми уравнениями в приближении политропии, а необходимо рассматривать теплопроводящую жидкость с использованием уравнения энергии. Поэтому необходимо рассмотреть возможность использования теории линейного форсинга для определения внешней вынуждающей силы в физическом пространстве для теплопроводящего сжимаемого МГД-случая.

Таким образом, система отфильтрованных по Фавру (32) уравнений сжимаемой магнитогиродинамики теплопроводящего газа запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0, \tag{42}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij} - \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\sigma}_{ij} + \frac{\bar{B}^2}{2M_a^2} \delta_{ij} - \frac{1}{M_a^2} \bar{B}_j \bar{B}_i \right) = - \frac{\partial \tau_{ji}^u}{\partial x_j} + F_i^u, \tag{43}$$

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_j \bar{B}_i - \tilde{u}_i \bar{B}_j) - \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^2 \bar{B}_i}{\partial x_j^2} = - \frac{\partial \tau_{ji}^b}{\partial x_j} + F_i^b, \tag{44}$$

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_i} = 0, \tag{45}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \bar{\rho} \tilde{E} + \frac{\bar{B}^2}{2M_a^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\tilde{E} + \bar{P}) \tilde{u}_j + \frac{1}{\text{Pr Re } M_s^2 (\gamma - 1)} \tilde{q}_j - \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i - \frac{1}{M_a^2} \bar{B}_j \bar{B}_i \tilde{u}_i \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\eta}{\text{Re}_m M_a^2} \bar{B}_i \left( \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_i} \right) \right) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{(\gamma - 1) M_s^2} Q_j + \frac{1}{2} J_j + \frac{1}{M_a^2} V_j - \frac{1}{M_a^2} G_j \right). \end{aligned} \tag{46}$$

Безразмерное отфильтрованное уравнение состояния, которое используется в данной работе, записывается в виде:

$$\bar{p} = \frac{\tilde{T} \bar{\rho}}{\gamma M_s^2}. \tag{47}$$

Влияние мелкомасштабной турбулентности на отфильтрованную часть уравнений магнитной гидродинамики определяется через следующие подсеточные слагаемые в правой части уравнений (43)–(46): тензор подсеточных напряжений

$$\tau_{ij}^u = \bar{\rho} \left( \overline{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j \right) - \frac{1}{M_a^2} \left( \bar{B}_i \bar{B}_j - \bar{B}_j \bar{B}_i \right);$$
 магнитный подсеточный тензор напряже-

ний  $\tau_{ij}^b = (\overline{u_i B_j} - \tilde{u}_i \overline{B_j}) - (\overline{B_i u_j} - \overline{B_i} \tilde{u}_j)$ ; подсеточный поток тепла  $Q_j = \overline{\rho} (\overline{u_j T} - \tilde{u}_j \tilde{T})$ ; турбулентная подсеточная диффузия  $J_j = \overline{\rho} (\overline{u_j u_k u_k} - \tilde{u}_j \overline{u_k u_k})$ ; поток подсеточной магнитной энергии  $V_j = (\overline{B_k B_k u_j} - \overline{B_k B_k} \tilde{u}_j)$ ; подсеточная энергия взаимодействия магнитного натяжения и скорости  $G_j = (\overline{u_k B_k B_j} - \tilde{u}_k \overline{B_k B_j})$ .

Для параметризации тензора подсеточных напряжений и магнитного подсеточного тензора напряжений используется расширенная модель Смагоринского для МГД-случая (37)–(39).

Для параметризации подсеточного теплового потока  $Q_j = \overline{\rho} (\overline{u_j T} - \tilde{u}_j \tilde{T})$  используется так называемая вихревая диффузионная модель в виде:

$$Q_j = -C_s \frac{\overline{\Delta^2 \rho} |\tilde{S}^u|}{\text{Pr}_T} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}, \quad (48)$$

где  $C_s$  — коэффициент, определенный ранее в расширенной модели Смагоринского для МГД-случая. Константа  $C_s$  высчитывается динамически;  $\text{Pr}_T$  — турбулентное число Прандтля, которое также высчитывается с использованием динамической процедуры.

Модель для  $J_j = \overline{\rho} (\overline{u_j u_k u_k} - \tilde{u}_j \overline{u_k u_k})$  была предложена в работе Д. Кнайта и др. [Knight et al., 1998], она получается по аналогии рейнольдсовского подхода для усреднения уравнений Навье – Стокса и в предположении, что  $\tilde{u}_i \approx \tilde{\tilde{u}}_i$ , тогда:

$$J_j = \tilde{u}_k \tau_{jk}^u, \quad (49)$$

где подсеточный тензор  $\tau_{jk}^u$  был найден выше.

Для окончательного замыкания полной системы уравнений сжимаемой магнитной гидродинамики необходимо параметризовать подсеточные слагаемые в уравнении энергии, возникающие из-за наличия магнитного поля. Для того чтобы получить эти подсеточные модели, применяется теория, основанная на обобщенных центральных моментах. Данный подход был использован А. А. Чернышовым и др. [Chernyshov et al., 2006c, 2008b]. Таким образом, сумма потока подсеточной магнитной энергии  $V_j$  и подсеточной энергии взаимодействия магнитного натяжения и скорости  $G_j$  следующая:

$$\frac{1}{2} V_j - G_j \cong \overline{B_k} \tau_{jk}^b. \quad (50)$$

Для полной системы уравнений (43)–(46) теплопроводящей жидкости общие выражения для внешних сил будут такими же, как в формулах (25) и (29) в уравнении сохранения количества движения и магнитной индукции. Различия при определении внешних сил с помощью линейного форсинга в сравнении с политропным случаем будут заключаться в том, что при рассмотрении тепло-

проводящего газа давление определяется через уравнение состояния и зависит от температуры, в то время как в политропном случае предполагается зависимость давления от плотности ввиду  $p = \rho^\gamma$ , где  $\gamma$  — политропный индекс. Таким образом, в уравнениях (43), (44) справа находятся вынуждающие силы  $F_i^u$  и  $F_i^b$  соответственно, определённые с помощью теории линейного форсинга, которые в безразмерном виде для теплопроводящего заряженного газа записываются следующим образом:

$$F_i^u = \frac{1}{3\langle \bar{\rho} \rangle \bar{u}_{rms}^2} \left[ - \left\langle \frac{\tilde{u}_j}{\text{Re}} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial x_j} \right\rangle + \frac{1}{\gamma M_s^2} \left\langle \tilde{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \tilde{T} \delta_{ij} \right\rangle + \frac{1}{2M_a^2} \left\langle \tilde{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{B}^2 \delta_{ij} \right\rangle \right] \bar{\rho} \tilde{u}_i, \quad (51)$$

$$F_i^b = \frac{1}{3\bar{B}_{rms}^2} \left\langle \frac{1}{\text{Re}_m} \bar{B}_i \frac{\partial^2 \bar{B}_i}{\partial x_j^2} \right\rangle \bar{B}_i. \quad (52)$$

Начальный изотропный турбулентный спектр для кинетической и магнитной энергии, определяемый в фурье-пространстве, выбран близким к спектру  $k^{-2}$  со случайными амплитудой и фазами по всем трем направлениям. Выбор именно такого спектра в качестве начальных условий обусловлен тем, что возмущения скорости в фурье-пространстве аналогичны возмущениям в развитой турбулентности и поэтому могут быть использованы для моделирования развитой турбулентности в начальный момент времени [McLow et al., 1998]. Спектр  $k^{-2}$  соответствует спектру бюргесовской турбулентности. Затем, с использованием обратного преобразования Фурье, были получены начальные условия для скорости и магнитного поля.

В данной работе использовался численный код с конечно-разностными схемами четвёртого порядка точности для системы уравнений магнитной гидродинамики, записанной в консервативной форме. Мы используем центрально-разностную схему четвёртого порядка точности для моделирования трёхмерной сжимаемой МГД-турбулентности с вынуждающей внешней силой. Для нелинейных слагаемых применяется кососимметричная форма, так как она обеспечивает более точные результаты [Park et al., 2004], уменьшая ошибки, связанные с дискретизацией при использовании конечно-разностного подхода для моделирования турбулентных течений:

$$\Psi_i^s = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right). \quad (53)$$

Кососимметричная форма — это фактически усреднение дивергентной и конвективной форм нелинейного слагаемого. Хотя аналитически все три формы: кососимметричная, дивергентная и конвективная — эквивалентны, результаты численных расчётов будут отличаться.

Для временной интеграции применялся модифицированный явный метод Рунге — Кутты третьего порядка точности, предложенный Дж. Г. Вильямсоном [Williamson, 1980], требующий меньших ресурсов оперативной памяти по

сравнению со стандартным методом Рунге – Кутта. В работе используется явный метод LES. Для разделения турбулентного течения на крупномасштабные и мелкомасштабные вихри применялся фильтр Гаусса четвёртого порядка точности [Sagaut, Grohens, 1999]. Одномерный фильтр записывался в следующем виде (для  $x$ -направления):

$$\xi_i = \frac{\varepsilon^4 - 4\varepsilon^2}{1152} (\xi_{i-2} + \xi_{i+2}) + \frac{16\varepsilon^2 - \varepsilon^4}{288} (\xi_{i-1} + \xi_{i+1}) + \frac{\varepsilon^4 - 20\varepsilon^2 + 192}{192} \xi_i, \quad (54)$$

где  $\xi_i$  — величина, характеризующая поток жидкости в точке  $i$ ;  $\varepsilon$  — параметр, определенный как отношение размера численной сетки к ширине фильтра [Sagaut, Grohens, 1999].

Так как в работе рассматривается трёхмерное сжимаемое турбулентное МГД-течение, то необходимо использовать трёхмерный фильтр. Авторами работы [Sagaut, Grohens, 1999] было показано, что последовательное произведение фильтров обеспечивает более точные результаты по сравнению с линейной комбинацией одномерных фильтров. Поэтому в настоящей работе используется последовательное произведение фильтров для трёхмерной фильтрации:

$$\xi^n = \prod_{i=1}^n \xi^i, \quad (55)$$

где  $\xi^i$  — одномерный фильтр в направлении  $i$ ;  $n$  — размерность рассматриваемого пространства.

На всех границах расчётной области удовлетворялись периодические граничные условия. Для получения результатов LES использовалась сетка с плотностью дискретизации  $64^3$ . Расчётная область представляла собой трёхмерный куб с линейными размерами  $\pi \times \pi \times \pi$ .

#### 4. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В данном разделе представлены численные результаты моделирования сжимаемой МГД-турбулентности как для политропного, так и теплопроводящего заряженного газа с внешней вынуждающей силой в физическом пространстве, проведен анализ полученных результатов.

Сначала рассмотрим политропную проводящую жидкость. Для первого случая числа подобия следующие:  $Re = 1500$ ,  $Re_M = 800$ ,  $M_s = 0,89$ ,  $\gamma = 1,7$  и  $E_K \gg E_M$ , т. е. в начальный момент времени кинетическая энергия намного больше магнитной энергии. На рис. 1 и 2 (см. с. 125) представлена временная эволюция кинетической  $E_K$  и магнитной энергии  $E_M$  для первого случая. Хорошо видно, что после начального интервала времени, когда наблюдаются большие флуктуации, возникает статистически стационарная турбулентность, и значения  $E_K$  и  $E_M$  практически не меняются со временем, т. е. наблюдается баланс между диссипацией и поступающей в систему энергией. Интересно отметить, что  $E_K$  несколько быстрее выходит на стационарный режим, чем  $E_M$ . На рис. 3 (см. с. 125) представлена временная динамика средней плотности, так

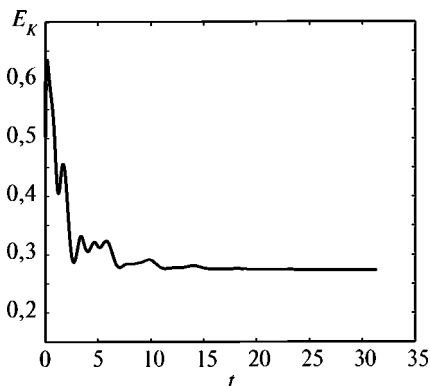


Рис. 1. Временная эволюция кинетической энергии  $E_K$  для первого случая

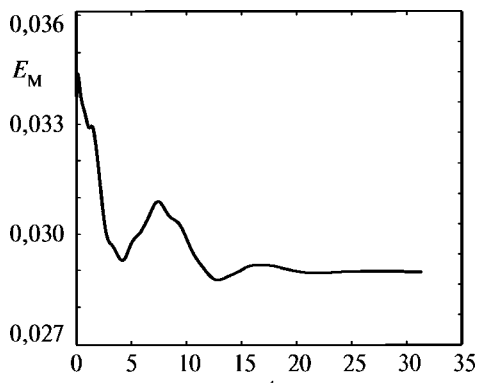


Рис. 2. Временная эволюция магнитной энергии  $E_M$  для первого случая

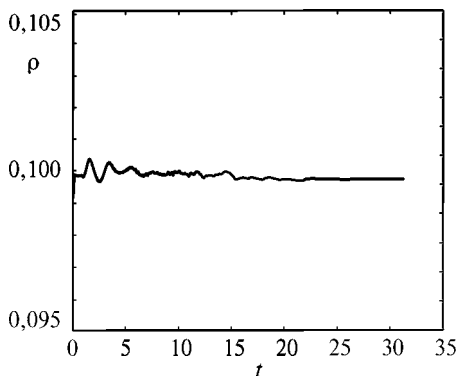


Рис. 3. Временная динамика средней плотности для первого случая

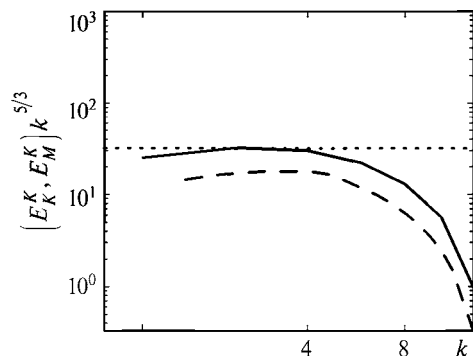


Рис. 4. Нормализованный спектр, умноженный на  $k^{5/3}$ , кинетической (сплошная линия) и магнитной (штриховая линия) энергии для первого случая. Пунктирная линия обозначает колмогоровский спектр

как в настоящей работе изучается сжимаемая МГД-турбулентность. После начального промежутка времени наблюдаются сильные флуктуации, флуктуации затем слабеют и плотность в установившемся стационарном режиме флуктуирует вокруг своего среднего значения очень слабо.

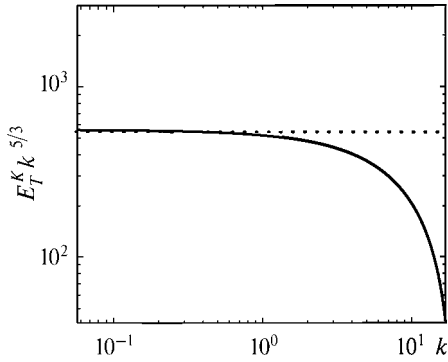
Изучение свойств инерционного интервала является одной из главных задач при исследовании масштабно-инвариантных спектров МГД-турбулентности. Свойства инерционного интервала определяются усреднением статистики на том периоде, когда выполняются условия статистически стационарной турбулентности [Biskamp, Müller, 2000]. Когда рассматривается МГД-турбулентность и кинетическая энергия намного больше магнитной, т. е. нелинейные взаимодействия гораздо существеннее магнитных и фактически жидкость является гидродинамической, наблюдается спектр Колмогорова с показателем

степени  $-5/3$ . На рис. 4 (см. с. 125) представлены спектры магнитной и кинетической энергии (сплошная линия — спектр кинетической энергии, штриховая линия — магнитная энергия). Спектры нормализованы на  $k^{5/3}$  и пунктирная линия представляет собой спектр Колмогорова. Спектры кинетической и магнитной энергии получены после усреднения значений в статистически стационарном режиме и существует чётко выраженный инерционный интервал турбулентности с колмогоровским спектром  $k^{-5/3}$  как для магнитной, так и для кинетической энергии (см. рис. 4). Нормализованный (умноженный на  $k^{5/3}$ ) сглаженный спектр полной энергии  $E_T = E_M + E_K$  показан на рис. 5 (см. с. 127). Спектр полной энергии получен после усреднения значений в статистически стационарном режиме. На рис. 5 видно, что имеет место спектр Колмогорова [Колмогоров, 1941а, б] в первом случае. Этот результат согласуется с теоретическими ожиданиями.

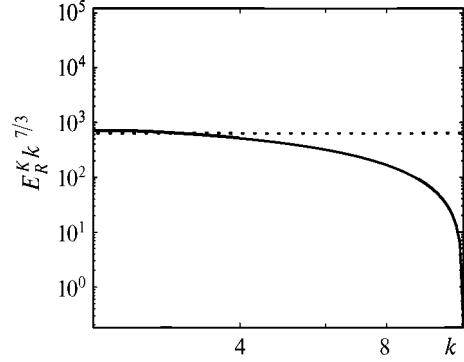
Также для первого случая показан спектр остаточной энергии [Müller, Grappin, 2005b; Yokoi, 2006, Yokoi, Hamba, 2007], которая определяется как  $E_R^K = |E_M^K - E_K^K|$ . Этот спектр представляет интерес, так как позволяет лучше понять спектральное взаимодействие кинетической и магнитной энергии и проявляет самоподобный скейлинг. На рис. 6 (см. с. 127) показан нормализованный сглаженный спектр остаточной энергии  $E_R^K \sim k^{-7/3}$  в инерционном интервале турбулентности, который был теоретически получен и подтвержден численно для несжимаемой МГД-турбулентности [Müller, Grappin, 2005a, b]. Видно, что нет существенных различий в статистических свойствах в инерционном интервале из-за слабой сжимаемости (такой результат был получен для сжимаемой гидродинамической турбулентности нейтрального газа [Biskamp, Müller, 2000]). Таким образом, данная внешняя сила обеспечивает правильный результат.

Второй случай сжимаемой МГД-турбулентности рассматривается в настоящей работе при приблизительно тех же значениях чисел подобия, однако в начальный момент времени  $E_K \sim E_M$ . На рис. 7 и 8 (см. с. 127) представлена временная динамика кинетической  $E_K$  и магнитной энергии  $E_M$  соответственно. Видно, что в этом случае необходимо большее количество времени для кинетической энергии, чтобы выйти на статистически стационарный уровень.

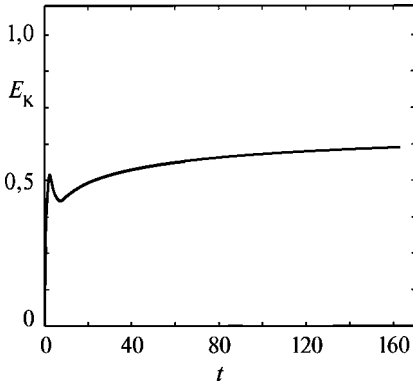
Третий случай соответствует численному расчёту, когда числа подобия  $Re = 200$ ,  $Re_M = 230$ ,  $M_s = 0,81$ ,  $\gamma = 1,7$  и  $E_K < E_M$ . На рис. 9 и 10 (см. с. 127) представлена временная эволюция кинетической  $E_K$  и магнитной энергии  $E_M$  соответственно для этого случая. Заметим, что наблюдается быстрый рост кинетической энергии и в то же время резкое падение значений магнитного поля. Затем кинетическая энергия и магнитная энергия выходят на стационарный режим. Изменения со временем значений средней плотности приведены на рис. 11 (см. с. 128), из которого видно, что пока не установился статистически стационарный режим сжимаемой МГД-турбулентности, возникают флуктуации плотности. Затем флуктуации средней плотности становятся пренебрежимо малыми.



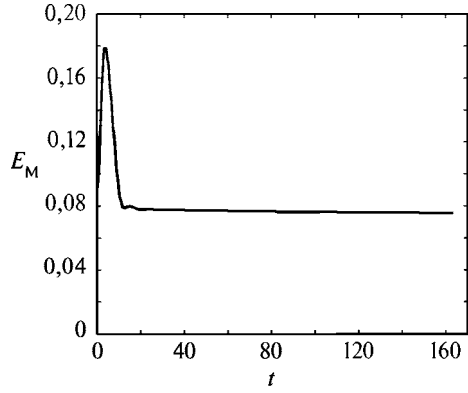
**Рис. 5.** Нормализованный сглаженный спектр полной энергии, умноженный на  $k^{5/3}$ , для первого случая



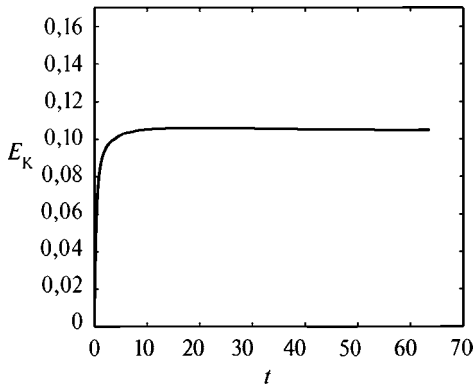
**Рис. 6.** Нормализованный сглаженный спектр остаточной энергии, умноженный на  $k^{7/3}$ , для первого случая



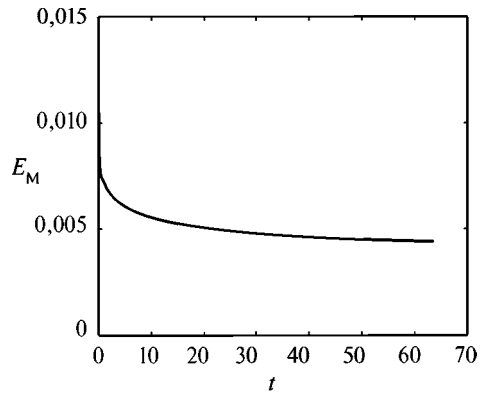
**Рис. 7.** Временная эволюция кинетической энергии для второго случая



**Рис. 8.** Временная эволюция магнитной энергии для второго случая



**Рис. 9.** Временная эволюция кинетической энергии для третьего случая



**Рис. 10.** Временная эволюция магнитной энергии для третьего случая



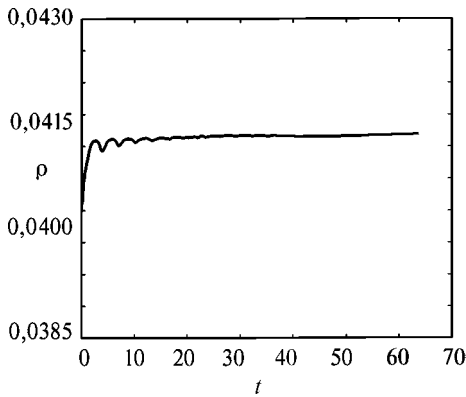


Рис. 11. Временная динамика средней плотности для третьего случая

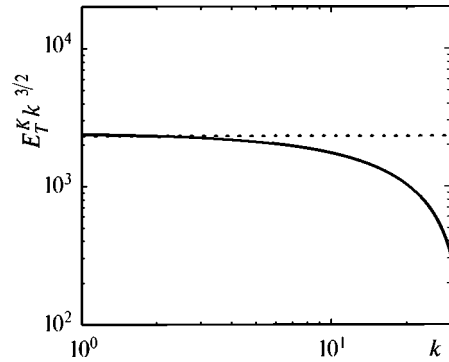


Рис. 12. Нормализованный сглаженный спектр полной энергии, умноженный на  $k^{3/2}$ , для третьего случая

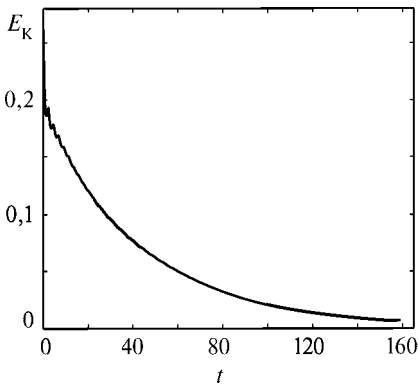


Рис. 13. Временная динамика кинетической энергии для четвёртого случая

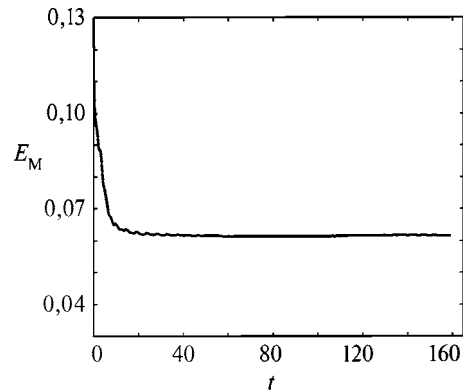


Рис. 14. Временная динамика магнитной энергии для четвёртого случая

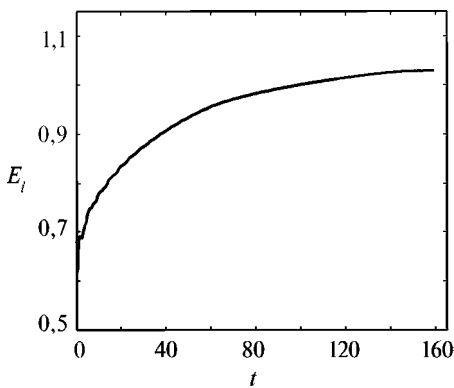


Рис. 15. Временная динамика внутренней энергии для четвёртого случая

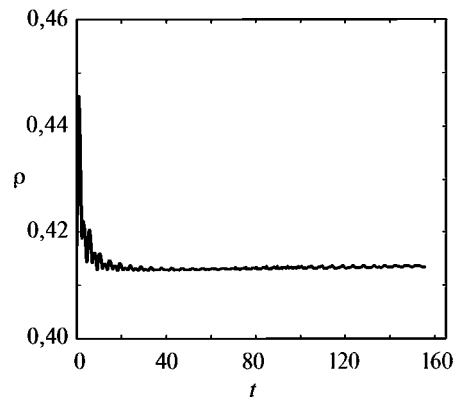


Рис. 16. Временная динамика средней плотности для четвёртого случая

Нормализованный сглаженный спектр полной энергии  $E_T$  (умноженный на  $k^{3/2}$ ) показан на рис. 12 (см. с. 128). Как и ранее для первого случая, спектр полной энергии получен после усреднения значений полной энергии в статистически стационарном режиме турбулентности. Как видно на рис. 12, существует чётко выраженный инерционный интервал МГД-турбулентности со спектром Ирошникава – Крайчнана с показателем  $k^{-3/2}$ , что согласуется с теоретическими исследованиями. В этом случае в проводящей жидкости имеют место флуктуации в виде альфвеновских волн, и магнитные взаимодействия играют заметную роль в турбулентном каскаде энергии, что приводит к спектру Ирошникава – Крайчнана  $k^{-3/2}$  [Iroshnikov, 1964; Kraichnan, 1965].

Таким образом, показано, что для полнотропной заряженной жидкости внешняя вынуждающая сила, определённая с помощью теории линейного форсинга, обеспечивает адекватные результаты при моделировании сжимаемых турбулентных МГД-течений.

В данной работе мы также рассматриваем теплопроводящий случай сжимаемой МГД-турбулентности, так как при решении многих задач необходимо знать временную и пространственную динамику термодинамических величин (т. е. температура, внутренняя энергия). В четвёртом случае рассматривается теплопроводящая заряженная жидкость со следующими параметрами подобия:  $Re = 120$ ,  $Re_M = 40$ ,  $M_s = 0,64$ ,  $\gamma = 1,5$ ,  $Pr = 1,0$  и  $E_K \sim E_M$ . Так как рассматривается теплопроводящая жидкость, то важно рассмотреть также динамику внутренней энергии, т. е. термодинамическую характеристику. Временная динамика кинетической, магнитной и внутренней энергии показаны на рис. 13–15 (см. с. 128) соответственно. Заметим, что магнитная энергия быстрее всего выходит на стационарный режим. Падение кинетической и магнитной энергии со временем сопровождается одновременным увеличением внутренней энергии, так как диссипация конвертирует кинетическую энергию в тепловую. После довольно длительного начального периода кинетическая и внутренняя энергии выходят на стационарный режим. Временная эволюция средней плотности показана на рис. 16 (см. с. 128). Наблюдаются слабые осцилляции вокруг среднего значения в квазистационарном режиме.

Пятый случай соответствует численному расчёту теплопроводящего заряженного газа при увеличенных значениях температуры и, соответственно, внутренней энергии при таких же приблизительно значениях чисел подобия, как и в случае № 4. На рис. 17 (см. с. 130) показана эволюция кинетической энергии. Динамика магнитной энергии продемонстрирована на рис. 18 (см. с. 130). Как и ранее, магнитная энергия быстрее выходит на стационарный режим сжимаемой МГД-турбулентности. Внутренняя энергия при увеличении температуры имеет флуктуации с большей амплитудой, как это видно на рис. 19 (см. с. 130). Изменение со временем средней плотности показано на рис. 20 (см. с. 130). Плотность сильно флуктуирует в начальный период времени, затем, при достижении стационарного режима, флуктуации ослабевают. По сравнению со случаем № 4, наблюдаются более сильные флуктуации средней плотности.

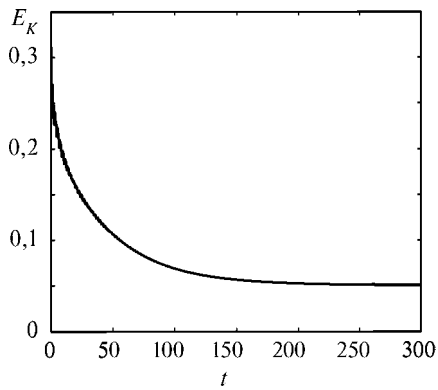


Рис. 17. Временная динамика кинетической энергии для пятого случая

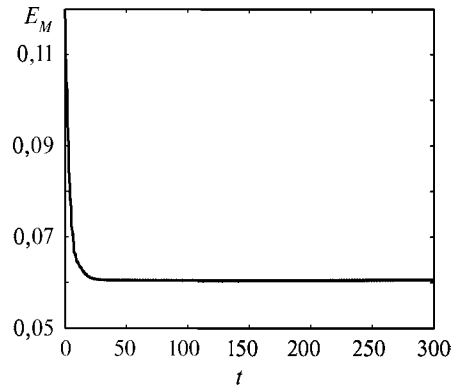


Рис. 18. Временная динамика магнитной энергии для пятого случая

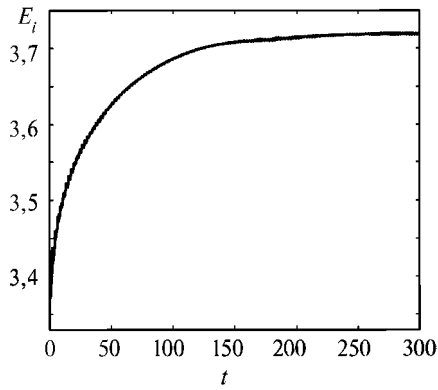


Рис. 19. Временная динамика внутренней энергии для пятого случая

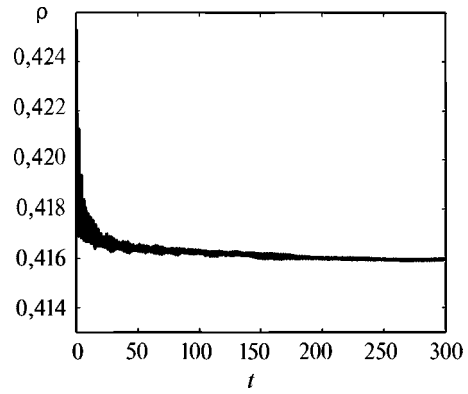


Рис. 20. Временная динамика средней плотности для пятого случая

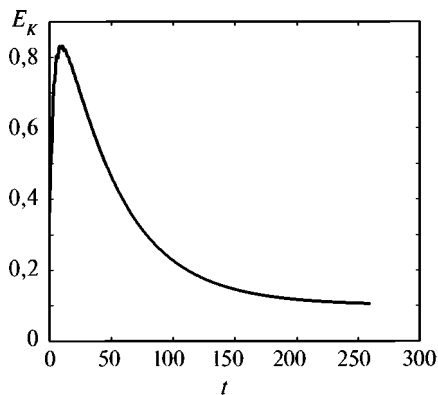


Рис. 21. Временная динамика кинетической энергии для шестого случая

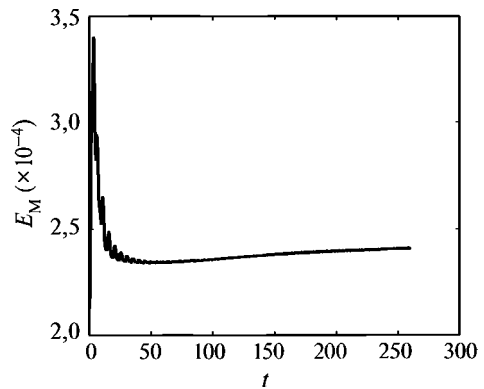


Рис. 22. Временная динамика магнитной энергии для шестого случая

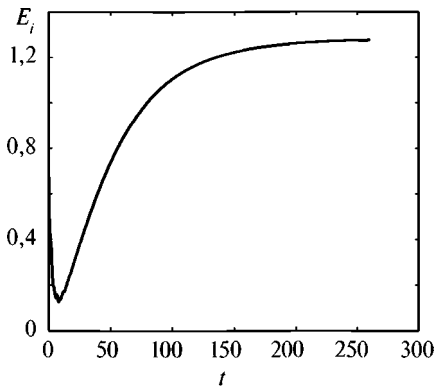


Рис. 23. Временная динамика внутренней энергии для шестого случая

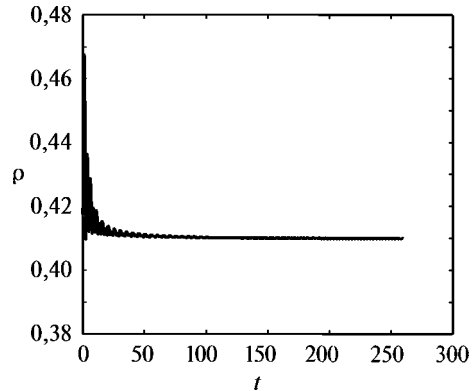


Рис. 24. Временная динамика средней плотности для шестого случая

Последний, шестой, случай, который изучается в данной работе, при слабых магнитных флуктуациях, т. е. в начальный момент времени, — кинетическая энергия намного больше магнитной. Временная динамика кинетической, магнитной и внутренней энергии представлена на рис. 21, 22 (см. с. 130) и 23 соответственно. График кинетической энергии зеркально отображает динамику внутренней энергии, т. е. рост внутренней энергии сопровождается падением кинетической энергии и наоборот, так как значение магнитной энергии пренебрежимо мало по сравнению с кинетической энергией. Временная эволюция средней плотности показана на рис. 24. Как и ранее, после начального промежутка времени, когда наблюдаются очень сильные флуктуации (но менее слабые по сравнению со случаем № 5), флуктуации слабеют и средняя плотность в установившемся статистически стационарном режиме флуктуирует слабо вокруг своего среднего значения.

### Заключение

В работе предложен метод линейного форсинга для исследования сжимаемой МГД-турбулентности плазмы в инерционном интервале. В линейном форсинге предполагается, что вынуждающая сила прямо пропорциональна скорости в уравнении сохранения импульса. Так как рассматривается сжимаемая МГД-турбулентность, то в систему МГД-уравнений входит уравнение сохранения магнитной индукции, и в этом случае вынуждающая сила пропорциональна магнитному полю в уравнении магнитной индукции. В отличие от спектрального представления внешней силы линейная вынуждающая сила действует на все масштабы физического пространства и тем самым может более точно воспроизвести картину взаимодействия мод в сжимаемом турбулентном МГД-течении. Фактически линейный форсинг соответствует турбулентности с вынуждающей силой, вызванной средним градиентом скорости, т. е. сдвигом. В уравнении магнитной индукции линейная внешняя сила может интерпретироваться как

генерация магнитной энергии вследствие взаимодействия между магнитным полем и средним сдвигом. В работе показано, что линейный форсинг является подходящим методом для моделирования МГД-турбулентности в координатном пространстве.

Получены выражения для внешней силы, обеспечивающие нахождение статистически стационарного режима турбулентности. Найденные выражения использованы для формулировки метода крупных вихрей. Изучены потенциальные возможности метода крупных вихрей для воспроизведения физики изучаемого течения в стационарном режиме как для политропной, так и для теплопроводящей плазмы. Показано, что для случая, когда в начальный момент времени кинетическая энергия течения намного больше магнитной энергии, наблюдается спектр Колмогорова с показателем степени  $-5/3$ , в то же время, если в начальный момент времени магнитная энергия больше кинетической энергии, имеет место спектр Ирошникава – Крайчнана с показателем  $k^{-3/2}$ . Таким образом, продемонстрирована эффективность метода LES для изучения масштабно-инвариантных свойств сжимаемой МГД-турбулентности.

### Литература

- Колмогоров А. Н. (1941a) К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой среде // Докл. Акад. наук СССР. 1941. Т. 31. № 6.
- Колмогоров А. Н. (1941б) Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. Акад. наук СССР. 1941. Т. 30. № 4.
- Колмогоров А. Н. (1941в) Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // Докл. Акад. наук СССР. 1941. Т. 32. № 11.
- Обухов А. М. (1941a) О распределении энергии в спектре турбулентного потока // Докл. Акад. наук СССР. 1941. Т. 32. № 1.
- Обухов А. М. (1941б) О распределении энергии в спектре турбулентного потока // Изв. Акад. наук СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1941. Т. 5. № 4–5.
- Фриш У. (1998) Турбулентность: Наследие А. Н. Колмогорова. М.: Фазис, 1998.
- Agullo O., Müller W.-C., Knaepen B., Carati D. (2001) Large Eddy Simulation of Decaying Magnetohydrodynamic Turbulence with Dynamic Subgrid-Modeling // Physics of Plasmas. 2001. V. 8. N. 7. P. 3502–3505.
- Abelius K. (1999) Random Forcing of Three-Dimensional Homogeneous Turbulence // Physics of Fluids. 1999. V. N. 11. P. 1880–1889.
- Benzi R., Biferale L., Fisher R. T., Kadanoff L P., Lamb D. Q., Toschi F. (2008) Intermittency and Universality in Fully Developed Inviscid and Weakly Compressible Turbulent Flows // Physical Review Letters. 2008. V. 100. N. 23. P. 234503.
- Biskamp D., Müller W.-C. (2000) Scaling Properties of Three-Dimensional Isotropic Magnetohydrodynamic Turbulence // Physics of Plasmas. 2000. V. 7. P. 4889–4900.
- Brandenburg A. (2003) Computational Aspects of Astrophysical MHD and Turbulence // Advances in Nonlinear Dynamos. V. 9. The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics / Eds. A. Ferriz-Mas, M. Nunez. L., N. Y.: Taylor and Francis, 2003. P. 269–344.
- Brandenburg A., Nordlund A. (2010) Astrophysical turbulence: Reports on Progress in Physics. Page submitted. 2010.
- Carati D., Ghosal S., Moin P. (1995) On the Representation of Backscatter in Dynamic Localization Models // Physics of Fluids. 1995. V. 7. P. 606–616.

- Carbone V., Pouquet A.* (2009) An Introduction to Fluid and MHD Turbulence for Astrophysical Flows: Theory, Observational and Numerical Data, and Modeling / Eds. P. Cargill, L. Vlahos // *Lecture Notes in Physics*. Berlin: Springer Verlag. 2009. V. 778. P. 71–128.
- Chasnov J. R.* (1991) Simulation of the Kolmogorov Inertial Subrange Using an Improved Subgrid Model // *Physics of Fluids*. 1991. V. 3. P. 188–200.
- Chen S., Shan X.* (1992) High-Resolution Turbulent Simulations Using the Connection Machine-2 // *Computers in Physics*. 1992. V. 6. P. 643–646.
- Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S.* (2006a) Subgrid-Scale Modeling in Large-Eddy Simulations of Compressible Magnetohydrodynamic Turbulence // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling*. 2006. V. 21. N. 1. P. 1–20.
- Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S.* (2006b) Large-eddy Simulation of Magnetohydrodynamic Turbulence in Compressible Fluid // *Physics of Plasmas*. 2006. V. 13. N. 3. P. 032304.
- Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S.* (2006c) Subgrid-Scale Modeling of Compressible Magnetohydrodynamic Turbulence in Heat-Conducting Plasma // *Physics of Plasmas*. 2006. V. 13. N. 10. P. 104501.
- Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S.* (2007) Development of Large Eddy Simulation for Modeling of Decaying Compressible MHD Turbulence // *Physics of Fluids*. 2007. V. 19. N. 5. P. 055106.
- Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S.* (2008a) Assessment of Subgrid-Scale Models for Decaying Compressible MHD Turbulence // *Flow, Turbulence and Combustion*. 2008. V. 80. N. 1. P. 21–35.
- Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S.* (2008b) Modeling of Compressible Magnetohydrodynamic Turbulence in Electrically and Heat Conducting Fluid Using Large Eddy Simulation // *Physics of Fluids*. 2008. V. 20. N. 8. P. 085106.
- Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S.* (2008c) Three-Dimensional Modeling of Compressible Magnetohydrodynamic Turbulence in the Local Interstellar Medium // *Astrophysical J.* 2008. V. 686. P. 1137–1144.
- Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S.* (2009) Validation of Large Eddy Simulation Method for Study of Flatness and Skewness of Decaying Compressible Magnetohydrodynamic Turbulence // *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. 2009. V. 23. N. 6. P. 451–470.
- Cho J., Lazarian A.* (2003) Compressible Magnetohydrodynamic Turbulence: Mode Coupling, Scaling Relations, Anisotropy, Viscosity-Damped Regime and Astrophysical Implications // *Royal Astronomical Soc., Monthly Notices*. 2003. V. 345. P. 325–339.
- Cho J., Lazarian A.* (2005) Generation of Compressible Modes in MHD Turbulence // *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. 2005. V. 19. P. 127–157.
- Di Stefano G., Vasilyev O. V.* (2010) Stochastic Coherent Adaptive Large Eddy Simulation of Forced Isotropic Turbulence // *J. Fluid Mechanics*. 2010. V. 646. P. 453–470.
- Dobrowolny M., Mangeney A., Veltri P.* (1980) Fully Developed Anisotropic Hydromagnetic Turbulence in Interplanetary Space // *Physical Rev. Letters*. 1980. V. 45. P. 144–147.
- Elsasser W. M.* (1950) The Hydromagnetic Equations // *Physical Rev.* 1950. V. 79. P. 183–183.
- Eswaran V., Pope S. B.* (1988) An Examination of Forcing in Direct Numerical Simulations of Turbulence // *Computers and Fluids*. 1988. V. 16. P. 257–278.
- Favre A.* (1965) *Equations des Gaz Turbulents Compressible : I. Formes Generales* // *J. Mecanique*. 1965. V. 4. P. 361–390.
- Fureby C., Tabor G., Weller H. G., Gosman A. D.* (1997) A Comparative Study of Subgrid-Scale Models in Homogeneous Isotropic Turbulence // *Physics of Fluids*. 1997. V. 9. P. 1416–1429.
- Garnier E., Adams N., Sagaut P.* (2009) *Large Eddy Simulation for Compressible Flows*. Netherlands: Springer Science + Business Media B. V., 2009.
- Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W.* (1991) A Dynamic Subgrid-Scale Eddy-Viscosity Model // *Physics of Fluids*. A. 1991. V. 3. N. 7. P. 1760–1765.

- Ghosal S., Lund T. S., Moin P., Aksevoll K.* (1995) A Dynamic Localization Model for Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows // *J. Fluid Mechanics*. 1995. V. 286. P. 229–255.
- Goldstein M., Roberts D., Matthaeus W.* (1995) Magnetohydrodynamics Turbulence in the Solar Wind // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 1995. V. 33. P. 283–325.
- Grappin R., Leorat J., Pouquet A.* (1983) Dependence of MHD Turbulence Spectra on the Velocity Field – Magnetic Field Correlation // *Astronomy and Astrophysics*. 1983. V. 126. P. 51–58.
- Hatori T.* (1984) Kolmogorov-Style Argument for the Decaying Homogeneous MHD Turbulence // *J. Physical Society of Japan*. 1984. V. 53. N. 8. P. 2539–2545.
- Haugen N. E. L., Brandenburg A.* (2004) Inertial Range Scaling in Numerical Turbulence with Hyperviscosity // *Physical Review E*. 2004. V. 70. N. 026405. P. 1–7.
- Iroshnikov P. S.* (1964) Turbulence of a Conducting Fluid in a Strong Magnetic Field // *Soviet Astronomy*. 1964. V. 7. P. 566–571.
- Kitsionas S., Federrath C., Klessen R. S., Schmidt W., Price D. J., Dursi L. J., Gritschneder M., Walch S., Piontek R., Kim J., Jappsen A.-K., Cieliegl P., McLow M.-M.* (2009) Algorithmic Comparisons of Decaying, Isothermal, Supersonic Turbulence // *Astronomy and Astrophysics*. 2009. V. 508. P. 541–560.
- Knight D., Zhou G., Okong'o N., Shukla V.* (1998) Compressible Large-Eddy Simulation Using Unstructured Grids // *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. 1998. V. 98-0535.
- Kowal G., Lazarian A.* (2007) Scaling Relations of Compressible MHD Turbulence // *Astrophysical J.* 2007. V. 666. P. L69–L72.
- Kowal G., Lazarian A., Vishniac E. T., Otmianowska-Mazur K.* (2009) Numerical Tests of Fast Reconnection in Weakly Stochastic Magnetic Fields // *Astrophysical J.* 2009. V. 700. P. 63–85.
- Kraichnan R. H.* (1965) Inertial-Range Spectrum of Hydromagnetic Turbulence // *Physics of Fluids*. 1965. V. 8. P. 1385–1387.
- Kritsuk A. G., Ustyugov S. D., Norman M. L., Padoan P.* (2009) Simulating Supersonic Turbulence in Magnetized Molecular Clouds // *J. Physics Conference Series*. 2009 V. 180. N. 1. P. 012020.
- Ladeinde F., Gaitonde D.* (2004) Magnetic Reynolds Number Effects in Compressible Magnetohydrodynamic Turbulence // *Physics of Fluids*. 2004. V. 16. N. 6. P. 2097–2121.
- Lee H., Ryu D., Kim J., Jones T. W., Balsara D.* (2003) Numerical Study of Compressible Magnetohydrodynamic Turbulence in Two Dimensions // *Astrophysical J.* 2003. V. 594. P. 627–636.
- Lilly D.* (1992) A Proposed Modification of the Germano Subgrid-Scale Closure Method // *Physics of Fluids*. 1992. V. 4. P. 633–635.
- Lundgren T. S.* (2003) Linearly Forced Isotropic Turbulence // *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*. 2003. P. 461–473.
- Mangeney A., Grappin R., Velli M.* (1991) MHD Turbulence in the Solar Wind / Eds. E. R. Priest, A. W. Hood // *Advances in Solar System Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, U. K.; N. Y., U. S. A., 1991. P. 327–356.
- Marsch E.* (1990) Turbulence in the Solar Wind / Ed. G. Klare // *Reviews in Modern Astronomy*. Springer, Berlin, 1990.
- McLow M.-M., Klessen R. S., Burkert A., Smith M. D.* (1998) Kinetic Energy Decay Rates of Supersonic and Super-Alfvénic Turbulence in Star-Forming Clouds // *Physical Rev. Letters*. 1998. V. 80. P. 2754–2764.
- Mosheni K., Kosović B., Shkoller S., Marsden J. E.* (2003) Numerical Simulations of the Lagrangian Averaged Navier–Stokes Equations for Homogeneous Isotropic Turbulence // *Physics of Fluids*. 2003. V. 15. P. 524–544.
- Müller W.-C., Biskamp D.* (1999) Decay Laws for Three-Dimensional Magnetohydrodynamic Turbulence // *Physical Rev. Letters*. 1999. V. 83. P. 2195–2198.
- Müller W.-C., Biskamp D.* (2000) Scaling Properties of Three-Dimensional Magnetohydrodynamic Turbulence // *Physical Rev. Letters*. 2000. V. 84. P. 475–478.

- Müller W.-C., Biskamp D. (2003) The Evolving Phenomenological View on Magnetohydrodynamic Turbulence / Eds. E. Falgarone, T. Passot // *Turbulence and Magnetic Fields in Astrophysics*. V. 614. Lecture Notes in Physics. Berlin Springer Verlag. 2003. P. 3–26.
- Müller W.-C., Carati D. (2002) Dynamic Gradient-Diffusion Subgrid-Models for Incompressible Magnetohydrodynamic Turbulence // *Physics of Plasmas*. 2002. V. 9. N. 3. P. 824–834.
- Müller W.-C., Grappin R. (2005a) Spectral Energy Dynamics in Magnetohydrodynamic Turbulence // *Physical Rev. Letters*. 2005. V. 95. P. 114502.
- Müller W.-C., Grappin R. (2005b) The Residual Energy in Freely Decaying Magnetohydrodynamic Turbulence // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2004. V. 45. P. B91–B96.
- Overholt M.R., Pope S.B. (1998) A Deterministic Forcing Scheme for Direct Numerical Simulations of Turbulence // *Computers and Fluids*. 1998. V. 27. N. 1. P. 11–28.
- Park N., Yoo J.Y., Choi H. (2004) Discretization Errors in Large Eddy Simulation: on the Suitability of Centered and Upwind-Biased Compact Difference Schemes // *J. Computational Physics*. 2004. V. 198. P. 580–616.
- Pope S.B. (2004) Ten Questions Concerning the Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows // *New J. Physics*. 2004. V. 35. N. 1. P. 35.
- Rosales C., Meneveau C. (2005) Linear Forcing in Numerical Simulations of Isotropic Turbulence: Physical Space Implementations and Convergence Properties // *Physics of Fluids*. 2005. V. 17. N. 9. P. 095106.
- Sagaut P. (2002) *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction*. Springer Verlag, Berlin – Heidelberg, 2002.
- Sagaut P., Grohens R. (1999) Discrete Filters for Large Eddy Simulation // *Intern. J. Numerical Methods in Fluids*. 1999. V. 31. P. 1195–1220.
- Seror C., Sagaut P., Bailly C., Juvé D. (2001) On the Radiated Noise Computed by Large-Eddy Simulation // *Physics of Fluids*. 2001. V. 13. P. 476–487.
- She Z.S., Chen S., Doolen G., Kraichnan R.H., Orszag S.A. (1993) Reynolds Number Dependence of Isotropic Navier–Stokes Turbulence // *Physical Rev. Letters*. 1993. V. 70. N. 21. P. 3251–3254.
- She Z.S., Jackson E., Orszag S.A. (1991) Statistical Aspect of Vortex Dynamics in Turbulence / Ed. L. Sirovich // *New Perspectives in Turbulence*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- Siggia E.D., Patterson G.S. (1978) Intermittency Effects in a Numerical Simulation of Stationary Three-Dimensional Turbulence // *J. Fluid Mechanics*. 1978. V. 86. P. 567–592.
- Sridhar S. (2010) Magnetohydrodynamic Turbulence in a Strongly Magnetised Plasma // *Astronomische Nachrichten*. 2010. V. 331. S. 93–100.
- Sullivan N.P., Mahalingam S., Kerr R.M. (1994) Deterministic Forcing of Homogeneous, Isotropic Turbulence // *Physics of Fluids*. 1994. V. 6. P. 1612–1614.
- Tobias S., Cattaneo F., Boldyrev S. (2011) MHD Dynamos and Turbulence / Eds. P. Davidson, Y. Kaneda, K. Sreenivasan // *The Nature of Turbulence*. 2011.
- Verma M.K. (1999) Mean Magnetic Field Renormalization and Kolmogorov’s Energy Spectrum in Magnetohydrodynamic Turbulence // *Physics of Plasmas*. 1999. V. 6. P. 1455–1460.
- Verma M.K., Bhattacharjee J.K. (1995) Computation of Kolmogorov’s Constant in Magnetohydrodynamic Turbulence // *Europhysics Letters*. 1995. V. 31. P. 195–200.
- Wang L.-P., Chen S., Brasseur J.G., Wyngaard J.C. (1996) Examination of Hypotheses in the Kolmogorov Refined Turbulence Theory Through High-Resolution Simulations. Pt. 1. Velocity field // *J. Fluid Mechanics*. 1996. V. 309. P. 113–156.
- Williamson J.H. (1980) Low-Storage Runge–Kutta Schemes // *J. Computational Physics*. 1980. V. 35. P. 48–56.
- Yokoi N. (2006) Modeling of the Turbulent Magnetohydrodynamic Residual-Energy Equation Using a Statistical Theory // *Physics of Plasmas*. 2006. V. 13. N. 6. P. 062306–062306–17.



- Yokoi N., Hamba F.* (2007) An Application of the Turbulent Magnetohydrodynamic Residual-Energy Equation Model to the Solar Wind // *Physics of Plasmas*. 2007. V. 14. N. 11. P. 112904–112904–16.
- Zhou Y., Matthaeus W. H., Dmitruk P.* (2004) Colloquium: Magnetohydrodynamic turbulence and Time Scales in Astrophysical and Space Plasmas // *Rev. of Modern Physics*. 2004. V. 76. N. 4. P. 1015–1035.

## SCALE-INVARIANT SPECTRA OF FORCED COMPRESSIBLE MAGNETOHYDRODYNAMIC TURBULENCE

**A. A. Chernyshov, K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan**

*Space Research Institute (IKI RAN), Moscow*

We present the large eddy simulation method for studying forced compressible magnetohydrodynamic turbulence. Proposed method is based on a solution of basic filtered equations of magnetohydrodynamics by finite-difference methods and on a linear representation of driving forces in the momentum conservation and the magnetic induction equations. These forces supply production of kinetic and magnetic energies. The emphasis is made on important and so far uninvestigated questions about ability of the large eddy simulation approach to reproduce Kolmogorov and Iroshnikov – Kraichnan scale-invariant spectra in compressible magnetohydrodynamic flows.

*Keywords:* magnetohydrodynamics, turbulence, compressible flow, scale-invariant spectra, large eddy simulation.

---

**Chernyshov Alexander Alexandrovich** — Senior Researcher, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, e-mail: [achernyshov@iki.rssi.ru](mailto:achernyshov@iki.rssi.ru).

**Karelsky Kirill Vladimirovich** — Senior Scientist, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, e-mail: [kkarelsk@iki.rssi.ru](mailto:kkarelsk@iki.rssi.ru).

**Petrosyan Arakel Sarkisovich** — Head of Sector, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, e-mail: [apetrosy@iki.rssi.ru](mailto:apetrosy@iki.rssi.ru).

## СИСТЕМА ПРОВЕДЕНИЯ ВИДЕОСЕМИНАРОВ ВИДЕОГРИД

С. К. Шикота<sup>1</sup>, А. Ю. Меньшутин<sup>1,2</sup>, С. А. Крашаков<sup>1,2</sup>,  
М. В. Григорьева<sup>1</sup>, Л. Н. Щур<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Научный центр РАН в Черноголовке (НЦЧ РАН)

<sup>2</sup> Институт теоретической физики им Л. Д. Ландау РАН

Излагается опыт функционирования системы для организации распределенной работы виртуальных коллективов, реализованной на инструментарии AccessGrid. Система ВидеоГРИД развернута в Инновационном центре РАН и в Отделе прикладных сетевых исследований НЦЧ РАН. Обсуждается опыт использования системы для проведения видеосеминаров.

*Ключевые слова:* ГРИД, промежуточное программное обеспечение, виртуальный коллектив, видеоконференция, видеосеминар.

### Введение

Проведение научных исследований — задача глобального масштаба. Для её эффективного решения в современных условиях развитие и совершенствование информационных технологий занимает важное место, поскольку огромные массивы данных невозможно хранить в одном месте, вычисления требуют большого объёма оперативной памяти и необходимо управление распределёнными проектами. Потребность в решении таких проблем привела к новому этапу развития информационных технологий в середине 1990-х гг. Началась разработка принципов интеграции распределённых гетерогенных ресурсов в сети Интернет. Ключевым моментом стало понятие middleware — программное обеспечение среднего уровня. Например, именно в эти годы в Научном центре РАН в Черноголовке (НЦЧ РАН) была разработана и внедрена в опытную эксплуатацию система TOPOS [Kosyakov et al., 1999; Косяков, 2000]. В конце 1990-х гг. проведённые разными коллективами исследования сформулировались в концепцию ГРИД.

### 1. ГРИД — ИСТОРИЯ И ФИЛОСОФИЯ

Широко распространено мнение, что ГРИД — это некий распределённый компьютер для вычислений. Действительно, вычислительный ГРИД широко известен благодаря подготовке к обработке экспериментальных данных с Большого

---

Шикота Светлана Каликтовна — программист, e-mail: sveta@chg.ru.

Меньшутин Антон Юрьевич — кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Института теоретической физики им Л. Д. Ландау РАН, старший лаборант, НЦЧ РАН, e-mail: may@chg.ru.

Крашаков Сергей Александрович — кандидат химических наук, учёный секретарь Института теоретической физики им Л. Д. Ландау РАН, ведущий специалист НЦЧ РАН, e-mail: sakt@chg.ru.

Григорьева Марина Владимировна — инженер, e-mail: marina@chg.ru.

Щур Лев Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института теоретической физики им Л. Д. Ландау РАН, заведующий отделом НЦЧ РАН, e-mail: shchur@chg.ru.

адронного коллайдера (*англ.* Large Hadron Collider, LHC). Но на самом деле понятие ГРИД гораздо шире и коротко его можно охарактеризовать как средство, обеспечивающее виртуальному коллективу выполнение всех аспектов работы, а не только её вычислительной части.

Слово “grid” переводится с английского как «решетка» или «энергетическая система». Было бы поверхностным сравнивать ГРИД с энергетической системой, хотя в какой-то мере вычислительный ГРИД позволяет сделать такое сравнение. Равно как мы не знаем, где вырабатывается энергия, которая заставляет светиться лампочку над головой, так же и в ГРИД — нам не нужно знать, какой сервер, рабочая станция или обычный персональный компьютер выполнили нашу задачу и выдали результат на наш компьютер. Можно просто «включиться в розетку вычислительной сети ГРИД» и получить нужный вычислительный ресурс [Демичев и др., 2007].

Основоположники ГРИД — Ян Фостер (Ian Foster) из Аргонской Национальной лаборатории и Чикагского университета и Карл Кессельман (Carl Kesselman) из Института информационных наук Университета Южной Калифорнии (США).

В статье «Что такое ГРИД. Три критерия» Ян Фостер [Foster, 2002] приводит критерии ГРИД — это система:

- которая координирует использование ресурсов при отсутствии централизованного управления этими ресурсами (ГРИД интегрирует и координирует ресурсы и пользователей, которые находятся в разных местах, например, персональный компьютер пользователя и центральный компьютер, разные административные отделения одной компании или разные компании, и направляет участникам уведомления о гарантиях, страховке, платежах, членстве и т. д.; в противном случае мы имеем дело с локальной системой управления);
- использует стандартные, открытые, универсальные протоколы и интерфейсы (ГРИД строится на базе многоцелевых протоколов и интерфейсов, позволяющих решать такие фундаментальные задачи как аутентификация, авторизация, обнаружение ресурсов и доступ к ресурсам; в противном случае мы имеем дело со специализированной прикладной системой);
- обеспечивает нетривиальным образом высокое качество обслуживания (ГРИД позволяет использовать входящие в его состав ресурсы таким образом, чтобы обеспечивалось высокое качество обслуживания, касающееся, например, таких параметров как время отклика, пропускная способность, доступность и надежность, а совместное использование ресурсов различных типов, готовых соответствовать сложным запросам пользователей, делает выгоду от применения комбинированной системы значительно выше, чем от суммы её отдельных частей).

Концепция ГРИД изложена в статьях Яна Фостера и Карла Кессельмана с соавторами с остроумными названиями — «Анатомия ГРИД» и «Физиология ГРИД». Они определяют ГРИД как «согласованную, открытую и стандартизованную среду, которая обеспечивает гибкое, безопасное, скоординированное разделение (общий доступ) ресурсов в рамках виртуального коллектива» [Foster et al., 2001; 2002]. Иными словами, пользователь системы видит все ресурсы ГРИД так, как если бы они были расположены непосредственно в его лаборатории, хотя, на самом деле, они могут находиться в любой точке земного шара, а для незарегистрированных в системе эти ресурсы в Интернете не видны совсем. Открытость и безопасность являются ключевыми для концепции ГРИД.

## 2. ВИРТУАЛЬНЫЕ КОЛЛЕКТИВЫ

Для пользования этой замечательной ГРИД-средой отдельные специалисты, лаборатории, институты объединяются в виртуальные коллективы, которые совместно используют ГРИД-ресурсы в соответствии с согласованными между ними и собственниками ресурсов правилами. Эти правила определяют, кто, где и когда может использовать распределенные ресурсы: компьютеры, программное обеспечение (ПО), данные. Таким образом, виртуальные коллективы позволяют различным группам организаций и/или отдельным пользователям применять для решения крупных актуальных задач ресурсы ГРИД-среды.

Для взаимодействия виртуальных коллективов с ресурсами ГРИД используется промежуточное программное обеспечение (middleware). Как указывалось выше, одним из критериев ГРИД является стандартизация используемых протоколов. Вопросами стандартизации занимается Глобальный ГРИД-форум (Global Grid Forum — GGF). В настоящий момент достаточно широко используются такие промежуточные программы как Globus Toolkit, gLite, Unicore. ПО Globus является реализацией открытого стандарта — открытая архитектура ГРИД-служб (Open Grid Services Architecture — OGSA), разработанного GGF. Для Unicore и gLite существуют дополнительные модули, частично реализующие этот стандарт. Так, пользователь может составлять описание задачи на языке в рамках OGSA. Сама же ГРИД-среда, где происходит её выполнение, может быть построена на любом (из перечисленных выше) промежуточном программном обеспечении.

Отличительной чертой ГРИД является масштабируемость — суммарный объём ресурсов теоретически не ограничен. Практические ограничения накладывают только характеристики используемых технических средств — число и производительность компьютеров, суммарный объём архивов хранения, пропускная способность каналов связи и т. п.

ГРИД-технологии быстро развиваются и внедряются в различных областях науки, образования, медицины, управления, в финансах, промышленности и т. д. Это и есть ГРИД в широком понимании. Для него нет юридических, организационных, национальных и прочих границ. ГРИД-среда служит для со-зидания и закрыта для разрушения.

### **3. ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ СОВМЕСТНОЙ РАБОТЫ ВИРТУАЛЬНЫХ КОЛЛЕКТИВОВ**

#### **3.1. AccessGrid**

AccessGrid — инструментарий, разработанный в Аргонской национальной лаборатории для проведения распределенных видеоконференций и семинаров, а также совместной работы в соответствии с требованиями к ГРИД-приложениям, легко расширяемый и масштабируемый.

#### **3.2. EVO**

EVO — Enabling Virtual Organizations — программный продукт, разработанный в Калифорнийском технологическом институте для нужд проекта ЛНС и преимущественно используется в сообществе специалистов, работающих в области физики высоких энергий; позволяет организовывать совместную работу коллективов — поддерживает передачу аудио/видео, интеграцию с традиционной и IP-телефонией, совместную работу над документами и т. п.; использует язык JAVA и является кросс-платформенным приложением.

#### **3.3. SAGE**

Технология SAGE (Scalable Adaptive Graphics Environment) позволяет отображать рисунки/фото/видео сверхвысокого разрешения (от десятков до сотен мегапикселей и выше) и передавать большие объемы данных, задействуя вычислительные и визуализирующие кластеры. При этом отображаемые данные могут храниться как локально, так и удаленно. Имеется также поддержка передачи аудиоинформации, может использоваться (с некоторыми оговорками) для совместной работы, но преимущественно ориентирована на видеoinформацию.

### **4. ПРИМЕР РЕАЛИЗАЦИИ ИНСТРУМЕНТАРИЯ ДЛЯ СОВМЕСТНОЙ РАБОТЫ ВИРТУАЛЬНЫХ КОЛЛЕКТИВОВ ACCESSGRID**

Научный центр РАН в Черногоровке уже два года успешно использует инструментарий AccessGrid для проведения распределенных семинаров и встреч.

Инструментарий AccessGrid позволяет принимать и передавать аудио- и видеoinформацию, совместно просматривать файлы, презентации и веб-документы. Данная система может быть использована на разных масштабах:

- персональный уровень (точка-точка);
- уровень лаборатории;
- уровень учреждения;
- уровень конференции.

К другим преимуществам системы могут быть также отнесены:

- невысокая начальная стоимость, которая складывается из стоимости компьютера, видеокамеры, аудиогарнитуры, а также стоимости проекто-

- ра и экрана, если планируется использование AccessGrid в помещениях, где собирается большая аудитория;
- одновременное участие практически неограниченного числа пользователей (число пользователей ограничивается пропускной способностью каналов связи);
  - многообразии применений (наука, образование, медицина, бизнес и т. д.);
  - открытый программный код, позволяющий расширять возможности системы;
  - параллельная и распределенная обработка потоков данных;
  - высокий уровень безопасности и защищенности (используется протокол SSL);
  - работа в разных операционных системах: Windows, Linux, MacOS.

Среда AccessGrid включает в себя серверы для проведения встреч (Venue-серверы) и пользовательские узлы (Nodes). Venue-сервер — это приложение, которое выполняет координирующую роль в работе виртуального коллектива: сервер проверяет права пользователей, выдает ключи шифрования для аудио-видео потоков, хранит общие файлы, обеспечивает основу для работы распределенных и совместных приложений, таких как распределенная презентация и т. п. В рамках каждого Venue-сервера имеется возможность создать комнаты (Rooms), а также добавить ссылки на другие серверы (Exits), необходимые для облегчения навигации между разными серверами. Room — место встречи участников виртуального коллектива. В качестве сравнения уместно привести традиционную конференцию, когда параллельно проводится несколько секций. Секция — это и есть Room. Любой сертифицированный пользователь (зарегистрировавшийся участник конференции) может присутствовать одновременно только на одном Venue-сервере и в одной комнате (секции обычной конференции) и легко переходить на другой Venue-сервер (другую конференцию) и другую секцию, чтобы послушать интересующий доклад.

В основном AccessGrid широко применяется в США, Канаде и Великобритании (значительно меньше в Европе), поэтому большинство Venue-серверов расположены именно там. В России используется только один сервер — agrid.chant.ru в Черногоровке.

Система авторизации и идентификации пользователей целиком заимствована из ГРИД-среды Globus Toolkit и базируется на сертификатах SSL. Пользователь, получивший сертификат в одном месте, сразу становится идентифицированным и на всех других Venue-серверах. Пользовательский узел осуществляет ввод/вывод аудио- и видеоинформации, а также позволяет работать с общими приложениями. В качестве пользовательского узла может выступать один компьютер или целый комплекс аппаратных средств, включая отдельные компьютеры для захвата и отображения, камеры, проекторы и т. д. Для обмена видеоинформацией AccessGrid использует приложение VIC (Videoconferencing Tool), для обмена аудиоинформацией — приложение RAT (Robust Audio Tool),

разработанные задолго до появления AccessGrid. Интерфейс пользователя также позволяет вести запись мероприятий, правда, пока только в собственном формате.

Режим видеоконференции предусматривает передачу видеоинформации от каждого участника каждому. Каждая камера стандартного разрешения NTSC создает поток в 2 Мбит/с (кодек H264, 24 кадра в секунду), но такая передача становится неэффективной при большом числе участников. Поэтому основным механизмом для обмена информацией был выбран протокол многоадресной рассылки (Multicast). Однако далеко не все сетевое оборудование поддерживает данный протокол. Для решения этой проблемы в инструментарии AccessGrid предусмотрено приложение Bridge, осуществляющее преобразование протоколов Unicast в Multicast и обратно. Пример схемы соединений пользователей и Bridge-серверов показан на рис. 1. Приложение запускается на сервере, а пользователь, в свою очередь, может выбрать, в каком режиме работать и через какой Bridge-сервер.

Для проведения дальнейших исследований по работе виртуальных коллективов посредством среды AccessGrid группой авторов Научного центра РАН в Черноголовке было оборудовано два узла AccessGrid: в лаборатории Отдела прикладных сетевых исследований и в конференционном комплексе Инновационного центра РАН. Узел в лаборатории состоит из персонального компьютера, видеокamеры, аудиосистемы, проектора и экрана. Узел в Инновационном центре имеет более сложную аппаратную структуру, поэтому остановимся на нём подробнее.

Зал для проведения видеосеминаров, вмещающий 15...20 человек, оснащён современным компьютерным, аудио- и видеооборудованием. В состав узла входит следующее оснащение:

- устройства отображения информации — два проектора стандартного разрешения, один проектор высокого разрешения;

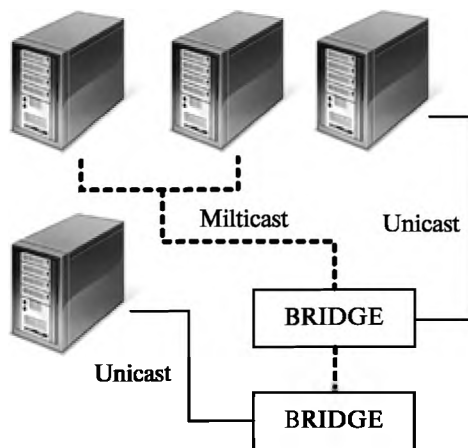


Рис. 1. Схема передачи данных между пользователями AccessGrid

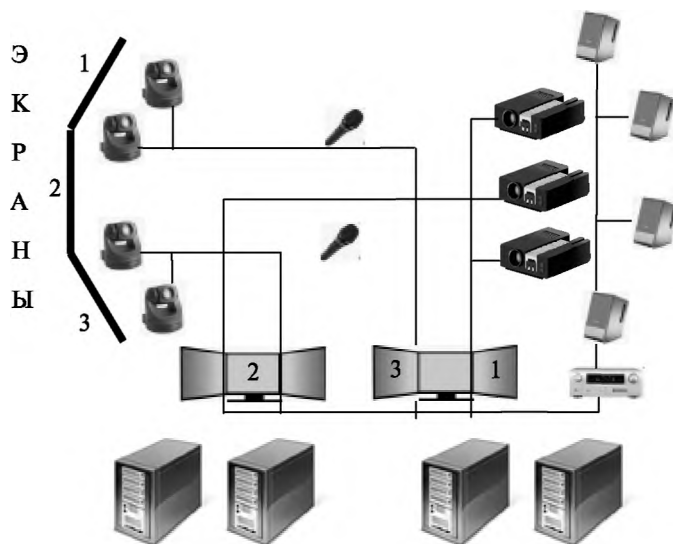


Рис. 2. Схема оборудования пользовательского узла ВидеоГРИД в Инновационном центре РАН

- четыре управляемые видеокамеры;
- два компьютера, осуществляющие захват видео (один компьютер обслуживает две камеры);
- два компьютера, осуществляющие вывод видеоизображений, презентаций и т. п.;
- звуковое оборудование — микрофоны, микшер, система звукоусиления и т. д.;
- один из компьютеров, использующихся для вывода изображений, осуществляет ввод/вывод звука.

Схема оборудования представлена на рис. 2.

Имеется также один сервер, реализующий функции Venue-сервера и Bridge, и дополнительный переносной компьютер, который используется для удобства управления показом презентаций с места докладчика и для организации мобильного пользовательского узла AccessGrid.

Наилучших результатов как по уменьшению задержки передачи видео, так и по качеству изображения, удалось добиться при использовании современного кодека, основанного на стандарте H264.

## 5. ВИДЕОСЕМИНАР «ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР В ЮЛИХЕ (ГЕРМАНИЯ) – НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РАН В ЧЕРНОГОЛОВКЕ (РОССИЯ)»

С сентября 2009 г. узел в Инновационном центре (рис. 3) используется для проведения ежемесячных видеосеминаров с Исследовательским центром в Юлихе, Германия.





Рис. 3. Видеосеминар Юлих – Черноголовка

Семинар проводится каждую последнюю среду месяца в 16:00 (рис. 3). На семинарах докладываются проводимые в Исследовательском центре (Юлих) и Научном центре (Черноголовка) работы в области вычислительной физики, химии, биологии и информатики. Семинар проводится под эгидой Европейского физического общества, группы вычислительной физики. Как правило, на семинарах представляется по одному докладу с каждой стороны.

Гости и участники семинаров отмечают высокое качество передачи видеозображения и звука. Это возможно благодаря использованию каналов высокой пропускной способности компьютерной сети для науки и образования ChANT, которая объединяет все научные организации в Черноголовке на скорости передачи информации 1...10 Гбит/с, имеет внешний канал связи до Москвы 155 Мбит/с и следующие скорости подключения на узле связи М-9:

- научные сети (точка обмена трафиком NAP) — 1 Гбит/с;
- сети Интернет РФ (точка обмена трафиком MSK-IX) — 100 Мбит/с;
- сети Интернет общего доступа — 100 Мбит/с.

## 6. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИИ SAGE

Другая система для совместной работы виртуальных коллективов, реализованная сотрудниками отдела прикладных сетевых исследований, — это мозаичная видеостена, построенная с применением программного обеспечения SAGE (рис. 4, с. 145). 20 мониторов с диагональю 27 дюймов объединены в один виртуальный монитор с общим разрешением 46 Мпикс. Каждая пара мониторов обслуживается одним из 10 узлов вычислительного/графического кластера,



Рис. 4. Визуализация результатов численного моделирования двумерных структур роста с использованием технологии SAGE на видео-стене с разрешением 46 Мпикс.

соединенных по технологии GigabitEthernet. Суммарная производительность кластера на тестах Linpack — около 640 Гфлопс, что составляет около 75 % от пиковой производительности.

Распределенная архитектура SAGE позволяет создавать графические приложения, в которых задача по построению изображения может выполняться на всех узлах кластера. Для этих целей на кластере установлена реализация MPI — OpenMPI — и система управления заданиями Torque совместно с планировщиком Maui. Распределенная задача по построению изображений требует общего доступа к исходным данным на всех узлах кластера. Каждый узел кластера, помимо загрузочного диска, содержит два диска объемом 500 Гбайт, которые объединены в виртуальный диск большего размера. В свою очередь все жесткие диски со всех узлов кластера объединены в единый раздел с использованием распределенной сетевой файловой системы GlusterFS. Данный подход позволяет, во-первых, получить сетевое хранилище данных значительного объема, а также существенно увеличить производительность файловых операций, что особенно важно для такой ресурсоемкой задачи как обработка видео и графики сверхвысокого разрешения.

Система SAGE содержит набор готовых приложений для совместной работы: с использованием специального Bridge-сервера можно выводить одинаковые изображения на несколько видеостен, расположенных в разных организациях, имеются приложения для захвата изображения рабочего стола (VNC) и вывода данных изображений на сервер. Имеются также модифицированные версии программы mplayer для показа видео и набор средств для вывода графических файлов. В лаборатории отдела прикладных сетевых исследований ИЦ РАН разработано собственное прикладное приложение для вывода на видео-стену результатов численного моделирования двумерных структур роста.

### Заключение

Помимо зала для проведения видеосеминаров, в Инновационном центре оборудованы лекционный и конференционный залы. Лекционный зал рассчитан на 120 человек, оснащен аудио- и презентационным оборудованием. Конференционный зал вмещает 60 человек, оборудован конференционной аудиосистемой, презентационным оборудованием, системой для проведения видеоконференций Polycom. В зале установлена мозаичная видеостена, реализованная с помощью технологии SAGE. Видеостена, построенная из 20 мониторов с диагональю 27 дюймов и кластера из 11 компьютеров (10 + 1), имеет разрешение 4 К.

Таким образом, Научный центр РАН имеет неплохой задел для проведения исследований в области приема/передачи видеоинформации высокой и сверхвысокой четкости. Наличие двух пользовательских узлов позволяет проводить эксперименты в данной области.

### Литература

- Демичев А. П., Ильин В. А., Крюков А. П. (2007) Введение в ГРИД-технологии: Препринт НИИЯФ МГУ. № 11/832. М.: НИИЯФ МГУ, 2007.
- Косяков С. (2000) Открытая система для проведения вычислительных экспериментов в однородной сети ЭВМ: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН, 2000. 72 с.
- Foster I. (2002) What is Grid? A three point check. [Электронный ресурс] <http://www.mcs.anl.gov/~itf/Articles/WhatIsTheGrid.pdf>, 2002.
- Foster I., Kesselman C., Tuecke S. (2001) The Anatomy of the Grid: Enabling Scalable Virtual Organizations // Intern. J. High Performance Computing Applications. 2001. V. 15. N. 3. P. 200–222.
- Foster I., Kesselman C., Nick J., Tuecke S. (2002) The Physiology of the Grid: An Open Grid Services Architecture for Distributed Systems Integration, 2002. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://www.globus.org/alliance/publications/papers/ogsa.pdf>.
- Kosyakov S. S., Krashakov S. A., Shchur L. N. (1999) TOPOS — ManAccessGrid for Distributed Computing Media // Proc. Intern. Conf. ADBIS-97. St. Petersburg, Sept. 1999. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.comphys.ru/files/adbis.pdf>.

### IMPLEMENTATION OF VIDEO-CONFERENCE SYSTEM VIDEO-GRID

S. Shikota<sup>1</sup>, A. Menshutin<sup>1,2</sup>, S. Krashakov<sup>1,2</sup>, M. V. Григорьева<sup>1</sup>, L. Shchur<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Scientific Center in Chernogolovka Russian Academy of Sciences

<sup>2</sup> Landau Institute for Theoretical Physics Russian Academy of Sciences

We describe an experience with communication system for virtual organizations, realized with AccessGrid instrumentation. Video-Grid system was realized in Innovation center of RAS and Department of applied network research SCC RAS. Experience with system for video-workshops was discussed.

*Keywords:* Grid, middleware, virtual organization, videoconference, video-workshop.

---

**Shikota Svetlana K.** — Programmer, e-mail: sveta@chg.ru.

**Menshutin Anton Yu.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Junior Researcher Landau Institute for Theoretical Physics RAS, Laboratory Assistant Scientific Center in Chernogolovka RAS, e-mail: may@chg.ru.

**Krashakov Sergey A.** — Candidate of Chemical Sciences, Scientific Secretary Landau Institute for Theoretical Physics RAS, Leading Specialist Scientific Center in Chernogolovka RAS, e-mail: sakr@chg.ru.

**Grigor'eva Marina V.** — Engineer, e-mail: marina@chg.ru.

**Shchur Lev N.** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Researcher Landau Institute for Theoretical Physics RAS, Head of Department Scientific Center in Chernogolovka RAS, e-mail: shchur@chg.ru.

## Содержание

<i>Taras V. Gerya</i> Numerical Modelling of Iron Core Formation with Finite Differences and Marker-in-Cell Techniques . . . . .	7
<i>О. А. Дружинин, Ю. И. Троицкая</i> Автогенерация внутренних волн фонтаном в стратифицированной жидкости . . .	15
<i>А. В. Гусев</i> Численная модель гидродинамики океана в криволинейных координатах для воспроизведения циркуляции Мирового океана . . . . .	30
<i>К. Г. Орлов, И. В. Мингалева, А. В. Родин</i> Негидростатическая модель общей циркуляции атмосферы Венеры и результаты её применения . . . . .	49
<i>А. В. Родин, Н. А. Евдокимова, А. В. Бурлаков, А. А. Федорова</i> Перестройки волновых режимов циркуляции атмосферы Марса . . . . .	57
<i>И. В. Мингалева, О. В. Мингалева, В. С. Мингалева</i> Численное исследование влияния горизонтальной неоднородности температуры и несферичности Земли на глобальную циркуляцию средней атмосферы . . . . .	65
<i>Ю. М. Кривошеев</i> Решение задач переноса излучения методом Монте-Карло: астрофизические приложения . . . . .	79
<i>С. Г. Моисеенко, Г. С. Бисноватый-Коган, Н. В. Арделян</i> Моделирование магниторотационных процессов в астрофизике (магниторотационные сверхновые) . . . . .	91
<i>А. А. Чернышов, К. В. Карельский, А. С. Петросян</i> Масштабно-инвариантные спектры сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности с вынуждающей внешней силой . . . . .	105
<i>С. К. Шикота, А. Ю. Меньшутин, С. А. Крашаков, М. В. Григорьева, Л. Н. Шур</i> Система проведения видеосеминаров ВидеоГРИД . . . . .	137