

*Д. А. Франк-Каменецкий*

**Лекции**  
**по**  
**Ф**изике  
**П**лазмы

АТОМИЗДАТ • 1968

*Д.А. Франк-Каменецкий*

# Лекции по физике плазмы

*Издание второе*

*Долуцено Министерством высшего и среднего  
специального образования РСФСР  
в качестве учебного пособия для студентов  
инженерно-физических и физико-технических вузов  
и факультетов*



АТОМИЗДАТ  
МОСКВА 1968

**Лекции по физике плазмы. Д. А. Франк-Каменецкий.  
М., Атомиздат, 1968.**

Излагаются основные понятия физики плазмы и простейшие инженерные расчеты. Подробно рассматриваются термодинамические свойства плазмы; равновесная и стационарная ионизация; адиабатическое и дрейфовое движения заряженных частиц; элементарная гидродинамическая теория распространения волн в холодной и горячей плазме; простейшие вопросы физической кинетики и ее применения к плазме.

Книга рассчитана на студентов технических специальностей и инженеров, имеющих дело с многоразными применениями физики плазмы. Рисунков 13. Библиографий 26

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Молодая и быстро развивающаяся отрасль физики, изучающая ионизированный газ — плазму, привлекает к себе все большее внимание. С плазмой связаны такие перспективные проблемы новой техники, как управляемые термоядерные реакции, прямое преобразование тепловой энергии в электрическую, получение сверхскоростных газовых струй и потоков, новые направления в сварке и поверхностной обработке металлов, получившие название электронной технологии. Быстро расширяется круг научных работников и инженеров, которым необходимо знание основ физики плазмы.

В основу книги положен курс лекций, читанный автором в течение ряда лет студентам Московского физико-технического института. Задача книги чисто педагогическая: научить студента разбираться в основных вопросах физики плазмы и производить простейшие расчеты. Книга адресована читателю, интересующемуся прежде всего практическими выводами.

Имеющаяся литература по плазме связана в основном либо с проблемой управляемых термоядерных реакций, либо с классическим газовым разрядом. Настоящая книга охватывает более широкий круг вопросов и дает общее представление о свойствах плазмы, лежащих в основе разнообразных ее применений. При этом основное внимание уделено важнейшему вопросу, характерному для современного этапа развития плазменной науки и техники: взаимодействию плазмы с сильными магнитными полями в условиях, когда магнитное поле ограничивает движение частиц в плазме. Такую плазму мы называем замагниченной. Объем книги не позволил нам рассмотреть обширную проблему неустойчивости плазмы. Читатель может

ознакомиться с ней по специальной литературе, список которой помещен в конце книги.

Простейшие качественные идеи физики плазмы изложены мной в популярной книге «Плазма — четвертое состояние вещества», которая может служить для читателя введением к настоящей книге.

Книга рассчитана на читателя, знакомого с основами высшей математики и физики в объеме первых курсов высшей технической школы. Все необходимые дополнительные сведения даны в приложениях. Автор старался не углубляться в вопросы, требующие громоздких или сложных математических расчетов.

Физика плазмы имеет дело с простыми и общими закономерностями, которые вполне заслуживают изучения не только в специальных курсах, но и в общем курсе физики.

Автор считает приятным долгом выразить свою глубокую благодарность В. И. Карпману, В. И. Когану, В. Д. Русанову, Р. З. Сагдееву, Г. Н. Тилинину, В. Д. Шафранову и М. Д. Франк-Каменецкому за ценные замечания, Д. В. Сивухину, из лекций которого заимствованы задачи к гл. III, и Т. Д. Кузнецовой за помощь при оформлении рукописи.

*Д. Франк-Каменецкий*

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $A, B$  — коэффициенты Фоккера — Планка;  
 $a, b$  — тензорные индексы, отмечающие координаты пространства;  
 $C$  — постоянная интегрирования; емкость конденсатора;  
 $c$  — скорость света;  
 $D$  — коэффициент диффузий;  
 $E$  — напряженность электрического поля;  
 $E^*$  — то же в сопутствующей системе координат;  
 $\mathcal{E}$  — энергия;  
 $e$  — плотность энергии;  
 $e$  — заряд электрона;  
 $F$  — свободная энергия;  
 $F$  — сила;  
 $f$  — функция распределения;  
 $f^0$  — основная (фоновая) функция распределения;  
 $f$  — нормированная основная функция распределения;  
 $f^1$  — возмущение функции распределения;  
 $g$  — статистический вес; гиротропный компонент тензора электрической проницаемости;  
 $H$  — напряженность магнитного поля;  
 $h = 2\pi\hbar$  — постоянная Планка;  
 $\mathbf{h}$  — единичный вектор в направлении магнитного поля;  
 $J$  — энергия ионизации; электрический ток;  
 $J_s$  — функция Бесселя первого рода порядка  $s$ ;  
 $I$  — интенсивность излучения;  
 $I_s$  — модифицированная функция Бесселя;  
 $i$  — индекс, отмечающий ионы;  
 $\mathcal{J}$  — полный момент атома (сумма орбитального и спинного);  
 $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока;  
 $k$  — индекс, нумерующий все сорта частиц; главное квантовое число; волновое число; постоянная Больцмана;  
 $\mathbf{k}$  — волновой вектор;  
 $k_1$  — поперечное волновое число;  
 $k_3$  — продольное волновое число;  
 $L$  — орбитальный момент (в единицах  $\hbar$ );  
 $l$  — длина пробега;  
 $l_D$  — длина экранирования (дебаевская или поляризационная);

- $M$  — масса иона или произвольной частицы;  
 $m$  — масса электрона; азимутальное число;  
 $\tilde{m}$  — приведенная масса;  
 $N$  — полное число частиц; показатель преломления;  
 $N_3$  — звуковой показатель преломления;  
 $n_k$  — концентрация частиц, обозначенных индексом  $k$ ;  
 $n$  — концентрация электронов;  
 $P$  — давление;  
 $p_e, p_i$  — парциальные давления;  
 $p$  — гиротропное число;  
 $Q$  — эффективное сечение; заряд;  
 $Q_0$  — тепловой эффект реакции при абсолютном нуле;  
 $q$  — плотность заряда; обобщенная координата;  
 $R$  — радиус кривизны; тензор сопротивления; коэффициент взаимного трения (диффузионного сопротивления);  
 $R_c$  — циклотронный радиус;  
 $r$  — расстояние;  
 $\mathbf{r}$  — радиус-вектор;  
 $S$  — спин (в единицах  $\hbar$ ); площадь;  
 $s$  — целое число, нумерующее циклотронные обертоны;  
 $St$  — интеграл столкновений;  
 $St_{i, k}$  — то же между частицами сортов  $i$  и  $k$ ;  
 $T$  — температура (в энергетических единицах);  
 $t$  — время;  
 $u$  — скорость распространения волн; скорость звука;  
 $u_\phi$  — фазовая скорость;  
 $u_\Gamma$  — групповая скорость;  
 $u_A$  — альфвеновская скорость;  
 $u_3$  — скорость ионного звука;  
 $V$  — напряжение (разность потенциалов); объем;  
 $v$  — дрейфовая скорость; средняя массовая скорость плазмы; скорость;  
 $W$  — энергия, передаваемая за единицу времени;  
 $w$  — вероятность; скорость реакции;  
 $\omega(z)$  — специальная функция (VI.14.3)\* или (VI.14.5);  
 $Z$  — зарядовое число; цилиндрическая функция;  
 $\alpha$  — корни функции Бесселя;  
 $\alpha_{ab}$  — тензорная величина, входящая в кулоновский интеграл столкновений;  
 $\beta$  — отношение газового давления к магнитному;  
 $\gamma$  — показатель адиабаты;  
 $\Delta$  — оператор Лапласа;  
 $\delta$  — декремент затухания; дельта-функция;  
 $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k; \\ 0 & \text{при } i \neq k; \end{cases}$   
 $\epsilon$  — электрическая проницаемость; тензор электрической проницаемости; первый и второй диагональные компоненты тензора электрической проницаемости;  
 $\eta$  — третий диагональный компонент тензора электрической проницаемости; вязкость;

\* Римские цифры в номерах формул указывают на номер главы.

- $\vartheta$  — полярный угол;
- $\kappa$  — постоянная экранирования (величина, обратная дебаевской длине); мнимая часть волнового числа;
- $\lambda$  — теплопроводность;
- $\mu$  — магнитный момент орбиты; косинус полярного угла;
- $\nu$  — эффективная частота передачи импульса; кинематическая вязкость;
- $\Pi$  — погонное число частиц;
- $\Pi^*$  — эффективное погонное число электронов;
- $\rho$  — плотность;
- $\sigma$  — проводимость; тензор проводимости;
- $\Sigma$  — статистическая сумма;
- $\tau$  — время передачи импульса; вспомогательный тензор;
- $T$  — тензор;
- $\Phi(z)$  — интеграл вероятности;
- $\varphi$  — азимутальный угол; электростатический потенциал;
- $\chi$  — магнитная восприимчивость;
- $\psi$  — вспомогательная величина, определяемая формулой (I V.13.2);
- $\omega$  — круговая частота;
- $\omega_0$  — плазменная частота (круговая); если специально не оговорено, то электронная;
- $\omega_c, \omega_i, \omega_e$  — циклотронные частоты;
- $\Omega$  — вектор направления (телесного угла);
- $\nabla$  — оператор градиента;
- $\nabla_v$  — то же в пространстве скоростей;
- $\parallel$  — индекс, указывающий направление, параллельное магнитному полю;
- $\perp$  — то же, перпендикулярное к магнитному полю;
- $::$  — знак пропорциональности;
- $\sim$  — знак, обозначающий порядок величины;
- $\approx$  — знак приближенного равенства.

## Глава I

### ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Прежде чем перейти к подробному рассмотрению различных вопросов науки о плазме, дадим элементарный обзор основных понятий.

#### 1. Квазинейтральность и разделение зарядов

Плазмой называют квазинейтральную систему, содержащую положительно и отрицательно заряженные свободные частицы. Положительные частицы — это всегда ионы, а отрицательные — обычно электроны.

В результате «прилипания» электронов к нейтральным атомам в плазме могут возникать и отрицательные ионы, но они встречаются редко и имеют второстепенное значение.

Поясним смысл понятия квазинейтральности. Квазинейтральный означает почти нейтральный. Квазинейтральная плазма — плазма, электрически нейтральная в среднем в достаточно больших объемах или за достаточно большие промежутки времени. Величины объемов и промежутков времени, в которых проявляется квазинейтральность, определяются пространственным и временным масштабами разделения зарядов.

Рассмотрим сначала масштаб разделения зарядов во времени. Представим себе, что в плоском слое плазмы толщиной  $x$  и площадью  $S$  все частицы одного знака, например электроны, сместились на одну из ограничивающих этот слой плоскостей (рис. 1). Получится плоский конденсатор с емкостью

$$C = \frac{S}{4\pi x}. \quad (1.1)$$

Заряд этого конденсатора  $Q$  равен суммарному заряду всех электронов, содержащихся в объеме слоя  $Sx$ :

$$Q = S n e x, \quad (1.2)$$

где  $n$  — концентрация электронов, т. е. число их в единице объема. Разность потенциалов между пластинами конденсатора

$$V = \frac{Q}{C} = 4\pi n e x^2, \quad (1.3)$$

и однородное электрическое поле между ними

$$E = \frac{V}{x} = 4\pi n e x. \quad (1.4)$$

Это поле сообщает каждому электрону ускорение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{eE}{m} = -\frac{4\pi n e^2}{m} x. \quad (1.5)$$

Полученное уравнение описывает простое гармоническое колебание с круговой частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}}, \quad (1.6)$$

пропорциональной корню квадратному из концентрации электронов. Эта частота — одна из важнейших характеристик плазмы. Ее и называют *плазменной частотой*.

Таким образом, в случае разделения в плазме зарядов возникающие электростатические силы вызывают так называемые *электростатические*, или *ленгмюровские*, колебания. Последнее название происходит от имени исследователя,

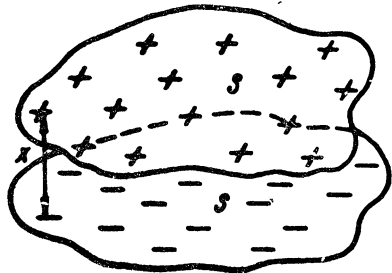


Рис. 1. Разделение зарядов.

впервые обратившего внимание на эти колебания. Соответственно и плазменную частоту иногда называют *ленгмюровской*. У плазмы много различных типов колебаний, особенно если она помещена в магнитное поле. Но плазменными колебаниями принято называть не всякие колеба-

ния плазмы, а именно этот простейший электростатический тип колебаний.

Таким образом, по принятой терминологии «плазменные колебания» и «колебания плазмы» — не одно и то же. Термин «колебания плазмы» имеет более широкий смысл.

Выведем выражение для плазменной частоты общим способом. Пусть в результате разделения зарядов в плазме возник объемный заряд плотностью  $q$ . По закону сохранения заряда

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j}, \quad (1.7)$$

где  $\mathbf{j}$  — плотность тока. Допустим, что ток переносится только электронами. Тогда

$$\mathbf{j} = -ne \mathbf{v}, \quad (1.8)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость электронов, переносящих ток («токовая скорость»). Уравнение движения электрона

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}. \quad (1.9)$$

Подставив выражение (1.8) в уравнение (1.7), продифференцировав последнее по времени и подставив затем уравнение (1.9), получим

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -\frac{ne^2}{m} \operatorname{div} \mathbf{E}. \quad (1.10)$$

При этом, имея в виду линейные колебания и не делая различия между частной и полной производными времени, отбросим все квадратичные члены, а  $n$  вынесем за знаки дифференциалов. По уравнению Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi q. \quad (1.11)$$

Подставив это выражение в уравнение (1.10), получим

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -\frac{4\pi ne^2}{m} q. \quad (1.12)$$

Теперь уже не обкладки воображаемого конденсатора, а плотность объемного заряда в плазме колеблется с той же круговой частотой  $\omega_0$ .

Итак, всякое разделение зарядов в плазме приводит к колебаниям плотности заряда. В среднем за много периодов колебаний плазма ведет себя как квазинейтральная

среда. Временной масштаб разделения зарядов есть величина того же порядка, что и период плазменных колебаний

$$t_0 \sim \frac{1}{\omega_0}. \quad (1.13)$$

Разделение зарядов может быть существенным только за периоды времени, малые по сравнению с этим масштабом.

За пространственный масштаб разделения зарядов  $d$  можно принять расстояние, которое частица при своем тепловом движении проходит за время  $1/\omega_0$ ,

$$d \sim \frac{\langle v \rangle}{\omega_0}, \quad (1.14)$$

где  $\langle v \rangle$  — средняя скорость теплового движения частиц. В масштабах, больших по сравнению с  $d$ , соблюдается квазинейтральность.

Пространственный масштаб разделения зарядов можно рассматривать и с энергетической точки зрения. Как видно из формулы (1.3), разделение зарядов приводит к возникновению в плазме разности потенциалов (*поляризации плазмы*). Легко убедиться, что в плотной плазме даже ничтожное разделение зарядов вызывает громадную разность потенциалов. Но на создание разности потенциалов нужна энергия, которая может быть почерпнута только из теплового движения. Чтобы преодолеть разность потенциалов (1.3), электрон должен обладать энергией

$$\mathcal{E} = eV = 4\pi n e^2 x^2. \quad (1.15)$$

Эта энергия пропорциональна квадрату расстояния  $x$ . Расстояние, на котором может быть заметным разделение зарядов вследствие теплового движения, определяется тем условием, что энергия (1.15) должна быть одного порядка с энергией теплового движения  $kT$ , где  $k$  — постоянная Больцмана. В физике плазмы чаще всего измеряют температуру в энергетических единицах, т. е. называют температурой величину  $kT$ . Мы все время будем поступать таким же образом, полагая постоянную Больцмана  $k = 1$ . Практической энергетической единицей температуры служит электронвольт:

$$1 \text{ эв} = 11\,600^\circ \text{ К}. \quad (1.16)$$

Расстояние  $d$ , на котором возможно заметное разделение зарядов, находится из условия

$$4\pi n e^2 d^2 = T. \quad (1.17)$$

откуда

$$d = \sqrt{\frac{T}{4\pi ne^2}}. \quad (1.18)$$

Разделив числитель и знаменатель под корнем на массу частицы  $m$  и подставив вместо средней скорости теплового движения близкую к ней величину

$$\langle v \rangle \approx \sqrt{\frac{T}{m}}, \quad (1.19)$$

убедимся, что это выражение тождественно выражению (1.14).

Для плазмы, имеющей определенную температуру, выражение (1.14) следует рассматривать как приближенное, а выражение (1.18) — как точное. Но поскольку плазма часто не находится в состоянии термодинамического равновесия, то понятие температуры теряет для нее строгий смысл. В этом случае пространственный масштаб разделения зарядов для частиц **каждого** рода\* определяется формулой (1.14). Пространственный масштаб разделения зарядов называют иначе *поляризационной длиной*, так как это та наибольшая длина, на которой вследствие теплового движения самопроизвольно возникают разности потенциалов, т. е. происходит поляризация плазмы. В частности, у границы плазмы возникает слой, в котором квазинейтральность нарушается, причем толщина этого граничного слоя порядка пространственного масштаба разделения зарядов.

До сих пор мы рассматривали разделение зарядов как результат смещения электронов. Найденную в этом допущении частоту электростатических плазменных колебаний называют *электронной плазменной частотой*, а соответствующий пространственный масштаб — *электронной поляризационной длиной*. Можно найти аналогичные величины, принимая, что разделение зарядов вызывается движением ионов. Тогда получится *ионная плазменная частота*, в выражении которой заряд и масса электрона заменены зарядом и массой иона. Поскольку электроны подвижнее ионов, то электронная плазменная частота важнее ионной. Если говорят просто о плазменной частоте, то имеют в виду электронную плазменную частоту.

---

\* Реальное значение имеет, конечно, масштаб разделения зарядов не для данного рода частиц, а для плазмы в целом. Как будет показано в следующем разделе, он получается из масштабов для разных видов частиц по правилу, выражаемому формулой (2.11).

## 2. Электростатическое экранирование

Понятие пространственного масштаба разделения зарядов можно уточнить, если рассмотреть электростатический потенциал вокруг отдельной заряженной частицы в плазме. В пустом пространстве вокруг частицы с зарядовым числом  $Z$  этот потенциал выражается как

$$\varphi = \frac{Ze}{r}. \quad (2.1)$$

Каждая заряженная частица вызывает поляризацию окружающей плазмы: вокруг такой частицы скапливается «атмосфера» с избытком частиц противоположного знака, экранирующая поле частицы. Экранированный потенциал может быть вычислен с помощью теории Дебая, развитой первоначально для растворов сильных электролитов. Эта теория основана на представлении о так называемом самосогласованном поле: находят такое распределение электрического поля, которое создает распределение частиц, возбуждающее в свою очередь заданное поле. Для нахождения самосогласованного поля используют уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi q \quad (2.2)$$

и распределение Больцмана

$$n_k = \tilde{n}_k e^{-\frac{Z_k e \varphi}{T}}, \quad (2.3)$$

где  $T$  — температура в энергетических единицах;  $n_k$  — концентрация частиц с зарядовым числом  $Z_k$  в точке с потенциалом  $\varphi$ ;  $\tilde{n}_k$  — концентрация тех же частиц в точке с нулевым потенциалом (ее приравнивают средней концентрации по всему объему). Индексом  $k$  отмечены все частицы, включая электроны, которым приписывается  $Z = -1$ . В некоторых случаях удобно выделять электроны и нумеровать индексом  $i$  только ионы. Средние концентрации  $\tilde{n}$  удовлетворяют условию квазинейтральности

$$\sum_k \tilde{n}_k Z_k = 0 \quad (2.4)$$

или

$$\sum_i \tilde{n}_i Z_i = \tilde{n}_e \equiv n_e, \quad (2.5)$$

где  $n$  — концентрация электронов. Объемный заряд

$$q = e \sum_k Z_k n_k. \quad (2.6)$$

Подставив выражение (2.3) в уравнение (2.2), получим нелинейное уравнение самосогласованного поля в виде

$$\Delta\varphi = -4\pi e \sum_k Z_k \tilde{n}_k e^{-\frac{Z_k e \varphi}{T}}. \quad (2.7)$$

Однако в таком нелинейном виде пользоваться уравнением не имеет смысла. Дело в том, что распределение Больцмана дает вероятность нахождения частицы в точке с потенциалом  $\varphi$ , т. е. среднее по времени значение концентрации, но мгновенные концентрации случайным образом меняются (флуктуируют) вокруг этого среднего значения, вызывая соответствующие флуктуации потенциала. Если в уравнении (2.7) под  $\varphi$  подразумевать среднее по времени значение потенциала, то окажется, что в правой части среднее значение функции заменено функцией от среднего значения, что допустимо только для линейных функций. Поэтому указанное уравнение может быть использовано только в линейном приближении. Для линеаризации раскладываем в правой части уравнения (2.7) экспоненциальные функции в ряд, сохраняя только линейные члены. Члены с нулевой степенью  $\varphi$ , согласно условию (2.4), взаимно уничтожаются, и получается линейное уравнение самосогласованного поля в виде

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi e^2}{T} \sum_k Z_k^2 \tilde{n}_k \varphi. \quad (2.8)$$

Решение для сферически симметричного распределения потенциала вокруг точечного заряда имеет вид

$$\varphi = \frac{C}{r} e^{-\kappa r}, \quad (2.9)$$

где постоянная экранирования

$$\kappa = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{T} \sum_k Z_k^2 \tilde{n}_k}. \quad (2.10)$$

Обратная величина  $1/\kappa \equiv l_D$  называется длиной экранирования или дебаевской длиной. Легко видеть, что она полу-

чается из введенных выше пространственных масштабов разделения зарядов  $d_k$  по правилу сложения обратных квадратов:

$$\frac{1}{l_D^2} = \sum_k \frac{1}{d_k^2}. \quad (2.11)$$

Поэтому длину экранирования можно рассматривать как масштаб разделения зарядов или поляризационную длину для всей плазмы в целом. Постоянная  $C$  в выражении потенциала (2.9) должна быть такой, чтобы на малых расстояниях потенциал стремился к значению, определяемому формулой (2.1). Отсюда следует окончательное выражение для экранированного, или дебаевского, потенциала вокруг заряженной частицы в плазме

$$\varphi = \frac{Ze}{r} e^{-r/l_D}. \quad (2.12)$$

Учитывая условие (2.5), удобно формулу (2.10) представить в виде

$$\kappa \equiv \frac{1}{l_D} = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{T} \tilde{Z}} = 2\sqrt{\pi} e \sqrt{\frac{n}{T} \tilde{Z}}, \quad (2.13)$$

где

$$\tilde{Z} = \frac{\sum_i Z_i^2 n_i}{\sum_i Z_i n_i} + 1. \quad (2.14)$$

### 3. Плазма как сплошная среда

Для приближенного описания плазмы с успехом используются модели, рассматривающие плазму как сплошную среду. Простейшей из них является *модель проводящей жидкости*. В этой модели свойства плазмы не отличаются от свойств, например, жидкого металла. Наука, изучающая движение проводящих жидкостей или газов посредством совместного решения уравнений гидродинамики и электродинамики, называется *магнитной гидродинамикой*. Модель проводящей жидкости описывает свойства плазмы в приближении магнитной гидродинамики.

Уравнения движения проводящей среды имеют ту особенность, что в них кроме силы давления входит пондеро-

моторная сила

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} [\mathbf{jH}], \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{j}$  — плотность тока. Если пренебречь вязкостью и другими диссипативными процессами, то уравнение движения плазмы в приближении магнитной гидродинамики будет иметь вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho c} [\mathbf{jH}]. \quad (3.2)$$

Здесь  $d\mathbf{v}/dt$  — ускорение рассматриваемого «элемента вещества» или, как говорят в гидродинамике, ускорение «жидкой частицы». В применении к плазме роль жидкой частицы играет совокупность очень большого числа заряженных частиц, но эти частицы выбраны и зафиксированы. Такое рассмотрение движения сплошной среды, когда следят за траекторией выбранного элемента вещества, называется представлением Лагранжа. Ускорение  $d\mathbf{v}/dt$  есть производная, взятая вдоль траектории данного элемента вещества; ее называют лагранжевой производной или иногда субстанциональной производной, чтобы подчеркнуть, что она относится к выбранному элементу вещества (субстанции). При рассмотрении картины движения сплошной среды в пространстве используется и другое представление, которое называют представлением Эйлера. В этом представлении следят за изменением скорости движения в выбранной точке пространства  $\partial\mathbf{v}/\partial t$  или, как ее называют, эйлеровой производной. Хотя эйлерова производная и является производной скорости по времени, она не имеет физического смысла ускорения. Связь между лагранжевой и эйлеровой производными следующая:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}.$$

Следовательно, уравнение (3.2) в представлении Эйлера примет вид

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho c} [\mathbf{jH}]. \quad (3.2a)$$

Плотность тока в приближении магнитной гидродинамики находится по закону Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}^* = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] \right), \quad (3.3)$$

где  $E$  — напряженность электрического поля;  $\sigma$  — коэффициент электропроводности, или, иначе, проводимость плазмы;  $E^*$  — напряженность электрического поля в системе отсчета, движущейся вместе с плазмой (сопутствующая система). Главный недостаток приближения магнитной гидродинамики в том, что проводимость рассматривается как физическая константа вещества, что в применении к плазме может оказаться весьма далеким от действительности. Система уравнений (3.2) и (3.3) должна решаться совместно с уравнениями Максвелла. В приближении магнитной гидродинамики рассматриваемые процессы считаются достаточно медленными, чтобы можно было пренебречь током смещения. Тогда из уравнений Максвелла следует, что

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.2) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{4\pi\rho} [\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}]. \quad (3.5)$$

Согласно формулам векторного анализа

$$\frac{1}{2} \nabla H^2 = (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} + [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}], \quad (3.6)$$

откуда

$$[\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] = -[\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}] = (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} - \frac{1}{2} \nabla H^2. \quad (3.7)$$

Подстановка выражения (3.7) в уравнение (3.5) дает

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} - \frac{1}{\rho} \nabla \frac{H^2}{8\pi}. \quad (3.8)$$

Если магнитное поле меняется только поперек своего направления, то второй член правой части обращается в нуль, и уравнение принимает вид

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left( P + \frac{H^2}{8\pi} \right), \quad (3.9)$$

где  $d\mathbf{v}_\perp/dt$  — ускорение поперек магнитного поля. Таким образом, движение плазмы поперек магнитного поля происходит так, как если бы на нее кроме давления  $P$  действовало еще магнитное давление  $H^2/8\pi$ . Оно имеет в точности ту же величину, что и давление, производимое магнитным

полем в пустом пространстве, которое вычисляется в электродинамике. Силу  $\nabla H^2/8\pi$  в уравнении (3.9) можно с одинаковым правом рассматривать и как пондеромоторную силу взаимодействия магнитного поля с возбужденными им токами, и просто как силу магнитного давления.

Важнейший вывод из модели сплошной среды заключается в том, что на плазму может оказывать воздействие сила магнитного давления. Отсюда вытекает ряд важнейших в научном и практическом отношении следствий: плазму можно удерживать магнитной стенкой, толкать магнитным поршнем; плазменные сгустки можно выстреливать из магнитной пушки.

#### 4. Идеальная проводимость и дрейфовое движение

Во многих задачах от приближения магнитной гидродинамики можно перейти к еще более упрощенному способу рассмотрения плазмы, устремив проводимость  $\sigma$  к бесконечности. Такое рассмотрение носит название приближения идеальной проводимости. При бесконечной проводимости сколь угодно малое электрическое поле вызвало бы бесконечный ток, что требовало бы бесконечно большой затраты энергии, и потому невозможно. Следовательно, в приближении идеальной проводимости электрическое поле в системе координат, связанной с плазмой (такую систему иногда называют сопутствующей), должно равняться нулю

$$\mathbf{E}^* \equiv \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] = 0 \quad (4.1)$$

или

$$\mathbf{E} = - \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (4.2)$$

Векторное произведение  $[\mathbf{v}\mathbf{H}]$  зависит только от составляющей скорости, перпендикулярной к магнитному полю, которую мы будем обозначать  $\mathbf{v}_\perp$ . Поэтому выражение (4.2) можно записать в виде

$$\mathbf{E} = - \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\perp \mathbf{H}], \quad (4.2a)$$

поскольку результат от этого не изменится. Таким образом, условие (4.2) накладывает определенное требование на скорость движения плазмы поперек магнитного поля  $\mathbf{v}_\perp$ ;

скорость вдоль магнитного поля  $v_{\parallel}$  может иметь любое значение. Чтобы получить значение  $v_{\perp}$ , достаточно умножить выражение (4.2а) векторно на  $\mathbf{H}$  справа. Получаем

$$[\mathbf{E}\mathbf{H}] = -\frac{1}{c} [v_{\perp} \mathbf{H} \mathbf{H}] = \frac{1}{c} [\mathbf{H} [v_{\perp} \mathbf{H}]] = \frac{v_{\perp}}{c} H^2, \quad (4.3)$$

так как скалярное произведение  $(v_{\perp} \mathbf{H}) \equiv 0$ . Из равенства (4.3)

$$v_{\perp} = c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{H^2}. \quad (4.4)$$

В скрещенных магнитном и электрическом полях идеально проводящая среда должна двигаться со скоростью, определяемой формулой (4.4). Такое движение называется *дрейфом*, а скорость, выражаемая формулой (4.4), — дрейфовой скоростью. Когда мы будем рассматривать движение заряженных частиц в плазме, то ознакомимся еще с рядом разновидностей дрейфового движения. Но только для дрейфа в скрещенных магнитном и электрическом полях скорость дрейфа одной частицы совпадает со скоростью дрейфа плазмы как целого. Этот вид дрейфового движения называется *электрическим дрейфом* в отличие от других видов дрейфа, при которых частицы разных зарядов движутся, как мы увидим, в противоположных направлениях.

Как видно из формулы (4.4), скорость электрического дрейфа направлена перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы магнитного и электрического полей. В формуле (4.4) величина векторного произведения  $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$  зависит только от составляющей электрического поля, перпендикулярной к магнитному; эту составляющую мы будем обозначать  $E_{\perp}$ . Поэтому формулу (4.4) можно записать в виде

$$v_{\perp} = c \frac{[\mathbf{E}_{\perp} \mathbf{H}]}{H^2}. \quad (4.4a)$$

Параллельная магнитному полю составляющая электрического поля не влияет на скорость дрейфа плазмы как целого поперек поля; она вызывает ток, текущий вдоль магнитного поля. Величина дрейфовой скорости выражается как

$$|v_{\perp}| = c \frac{|E_{\perp}|}{H}. \quad (4.5)$$

Пользоваться выражением дрейфовой скорости в векторной форме нужно только для того, чтобы определить ее

направление при данных направлениях магнитного и электрического полей. Из формулы (4.4а) следует, что если магнитное поле направлено к нам, а перпендикулярная к нему составляющая электрического поля вверх, то плазма должна дрейфовать вправо (рис. 4). При приближенном рассмотрении поведения плазмы в магнитном поле удобно пренебречь электрическим сопротивлением плазмы, т. е. рассматривать ее как идеально проводящую среду. Согласно только что сказанному, движение плазмы в этом приближении будет иметь дрейфовый характер. Поэтому такое приближение и называется *дрейфовым приближением*.

## 5. Вмороженное поле

Можно дать и другую физическую интерпретацию дрейфового движения идеально проводящей среды. Известно, что если проводник при своем движении пересекает силовые линии магнитного поля, то в нем возбуждается электродвижущая сила. В идеальном проводнике сколь угодно малая электродвижущая сила возбуждала бы бесконечный ток, что невозможно. Следовательно, идеальный проводник должен увлекать с собой магнитные силовые линии так, как если бы они были в него «вморожены». Иными словами, идеально проводящая плазма движется так, как если бы ее частицы были «приклеены» к силовым линиям магнитного поля.

Дадим количественную формулировку понятия вмороженного поля. Для этого воспользуемся уравнением Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (5.1)$$

и подставим в него значение электрического поля (4.2). В результате подстановки получим

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{vH}]. \quad (5.2)$$

Раскрываем ротор векторного произведения по формулам векторного анализа и, учитывая, что  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ , получаем

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\mathbf{H}\nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (5.3)$$

Можно ввести субстанциональную, или лагранжеву, производную, которая выражает изменение рассматриваемой величины для выбранного движущегося элемента вещества

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla). \quad (5.4)$$

Тогда выражение (5.3) запишется как

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (5.5)$$

Воспользуемся теперь известным из гидродинамики уравнением непрерывности (или неразрывности)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \rho \quad (5.6)$$

или

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (5.7)$$

Если из уравнения (5.7) выразить  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  и подставить в уравнение (5.5), то получим

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} - \frac{\mathbf{H}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{v}. \quad (5.8)$$

Левую часть равенства можно теперь выразить через производную от величины  $\mathbf{H}/\rho$ . Для этого заметим, что

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{H}}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{d\mathbf{H}}{dt} - \frac{\mathbf{H}}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}, \quad (5.9)$$

откуда

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} - \frac{\mathbf{H}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{H}}{\rho} \right). \quad (5.10)$$

Таким образом, уравнение (5.8) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{H}}{\rho} \right) = \left( \frac{\mathbf{H}}{\rho} \nabla \right) \mathbf{v}. \quad (5.11)$$

Рассмотрим сначала простейший случай, когда скорость меняется только в направлении, перпендикулярном к магнитному полю. Тогда правая часть уравнения (5.11) обращается в нуль и, следовательно,

$$\frac{\mathbf{H}}{\rho} = \text{const}. \quad (5.12)$$

Постоянство скорости вдоль силовой линии означает, что силовая линия не растягивается и не сжимается\*. При этом вмороженность поля заключается в том, что густота силовых линий, т. е. напряженность поля, меняется пропорционально плотности вещества. Рассмотренный простейший случай имеет место, в частности, при плоском (одномерном) сжатии плазмы поперек магнитного поля. При этом напряженность магнитного поля возрастает пропорционально плотности, а магнитное давление  $H^2/8\pi$  — пропорционально квадрату плотности. Эффективный показатель адиабаты для магнитного давления  $\gamma_{\perp} = 2$ . При плоском сжатии поперек поля магнитное давление возрастает быстрее, чем давление идеального газа.

Противоположная картина будет наблюдаться при плоском сжатии вдоль магнитного поля. В этом случае уравнение (5.11) примет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{H}}{\rho} \right) = \frac{\mathbf{H}}{\rho} \frac{dv}{dx},$$

а уравнение (5.7) получит вид

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{dv}{dx},$$

где  $x$  — координата, направленная вдоль поля. Из сопоставления этих двух выражений следует

$$\frac{d}{dt} \ln \left( \frac{H}{\rho} \right) = -\frac{d}{dt} \ln \rho,$$

откуда  $H/\rho$  меняется пропорционально  $1/\rho$ , т. е.

$$H = \text{const.}$$

Таким образом, при плоском сжатии плазмы вдоль магнитного поля напряженность поля и магнитное давление остаются постоянными:  $\gamma_{\parallel} = 0$ . Так и должно быть согласно представлению о вмороженном поле: при плоском сжатии вдоль поля силовые линии только сокращаются в длину, но не сгущаются.

Для рассмотрения общего случая следует ввести понятие длины «вещественной линии», ограниченной с концов выб-

---

\* Для того чтобы длина отрезка линии изменялась, концы этого отрезка должны двигаться с разными скоростями.

ранными элементами вещества. Пусть концы линии движутся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Изменение со временем длины вещественной линии

$$\frac{dl}{dt} = (v_2 - v_1)_l,$$

где индекс  $l$  означает проекцию вектора на направление  $l$ . Для векторного элемента длины  $\delta l$

$$\frac{d\delta l}{dt} = (\delta l \nabla) v. \quad (5.13)$$

Это выражение отличается от уравнения (5.11) только заменой  $H/\rho$  на  $\delta l$ . Отсюда следует, что при произвольных движениях плазмы вектор  $H/\rho$  должен меняться пропорционально  $\delta l$ . В частности, если  $\delta l$  выбрано первоначально в направлении  $H$ , то их направления и в дальнейшем будут совпадать. Таким образом, получается общая количественная формулировка понятия вмороженного поля

$$\frac{H}{\rho} :: \delta l, \quad (5.14)$$

где  $\delta l$  — длина элемента вещественной линии, направленной вдоль силовой линии магнитного поля. Пользуясь тем, что, как доказано, силовые линии вморожены в вещество,  $l$  можно называть длиной силовой линии. Тогда формулу (5.14) можно понимать так: если силовые линии растягиваются, то величина  $H/\rho$  возрастает, если они сокращаются, то  $H/\rho$  уменьшается.

Найденные выше простейшие результаты легко получить из формулы (5.14). При плоском сжатии поперек поля длина силовых линий не меняется, вследствие чего  $H$  меняется пропорционально  $\rho$ . При плоском сжатии вдоль поля длина силовых линий меняется обратно пропорционально плотности, а  $H$  остается постоянным.

Соотношение (5.14) позволяет рассмотреть и более сложный случай изотропного (подобного или сферического) сжатия. В этом случае значение длины есть корень кубический из объема, откуда

$$\delta l :: \rho^{-1/3}.$$

Подстановка в формулу (5.14) дает

$$H :: \rho^{2/3}.$$

Магнитное давление:

$$\frac{H^2}{8\pi} \propto \rho^{4/3}.$$

Эффективный показатель адиабаты для магнитного давления при изотропном сжатии:  $\gamma_m = 4/3$ . Как известно, такое же значение показателя адиабаты и для давления электромагнитного излучения.

Характер нарастания магнитного поля зависит только от симметрии сжатия для любых конфигураций поля, в том числе и для неупорядоченных турбулентных полей. Закон нарастания магнитного поля при изотропном сжатии имеет большое значение в астрофизике, в частности в теории образования звезд посредством гравитационной конденсации космической плазмы. При этом напряженность замороженных в плазму полей возрастает пропорционально плотности в степени  $2/3$ , и приходится вводить специальные механизмы вытеснения поля, чтобы объяснить, почему образующиеся звезды не обладают колоссальными магнитными полями.

Все изложенные результаты, касающиеся замороженного поля, справедливы только для идеально проводящей плазмы, т. е. в дрейфовом приближении. Границы применимости дрейфового приближения и отступления от него связаны уже с конечной проводимостью плазмы, влияние которой мы сейчас и рассмотрим.

## 6. Диффузия магнитного поля

Если учесть конечную проводимость, то условие (4.1) уже не будет удовлетворяться. В системе координат, связанной с плазмой, будут действовать электрические поля, вызывающие электрические токи. В приближении магнитной гидродинамики ток считается подчиняющимся закону Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}^* = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right), \quad (6.1)$$

где  $\mathbf{j}$  — плотность тока,  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля,  $\sigma$  — проводимость (в этом приближении величина скалярная, зависящая только от свойств плазмы). Для плазмы, находящейся в магнитном поле, закон Ома является лишь приближенным, так как он не учитывает анизотропию

проводимости. Выражение (6.1) можно рассматривать как общую связь между векторами  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ , но величина  $\sigma$  в общем случае является не скаляром, а *тензором проводимости* плазмы. Свойства этого тензора будут рассмотрены ниже. В приближении магнитной гидродинамики он заменяется скаляром, что, строго говоря, допустимо лишь для достаточно плотной плазмы (точный критерий будет получен в следующем разделе). Результаты настоящего раздела, как приближенные, часто применяют и к разреженной плазме.

Закон Ома (6.1) вместо выражения (4.1) дает

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] = \frac{\mathbf{j}}{\sigma}. \quad (6.2)$$

Из уравнений Максвелла, пренебрегая током смещения, получим

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}.$$

После подстановки

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] = \frac{c}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (6.3)$$

Удобно применить операцию  $\operatorname{rot}$  к обеим частям равенства

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \operatorname{rot} [\mathbf{vH}] = \frac{c}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad (6.4)$$

воспользоваться уравнением Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial t}$$

и формулой векторного анализа

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \nabla \operatorname{div} - \Delta,$$

учитывая, что  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ . После этого равенство (6.4) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{H}}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{vH}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}. \quad (6.5)$$

Это уравнение отличается от уравнения в замороженном поле (5.2) добавочным членом с  $\Delta \mathbf{H}$ . Чтобы выяснить смысл этого

члена, рассмотрим простейший случай, когда движение вещества отсутствует:  $v = 0$ . Из уравнения (6.5) следует, что

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}.$$

Это уравнение тождественно по виду с уравнением диффузии. Роль коэффициента диффузии играет величина

$$D_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}, \quad (6.6)$$

обратно пропорциональная проводимости плазмы. Можно сказать, что из-за конечной проводимости магнитное поле как бы просачивается сквозь плазму по диффузионному закону с коэффициентом диффузии  $D_m$ .

Коэффициент диффузии имеет, как и всегда, размерность  $\text{см}^2/\text{сек}$ . Глубина просачивания поля в течение заданного времени  $t$

$$L \sim \sqrt{Dt} \sim c \sqrt{\frac{t}{4\pi\sigma}}. \quad (6.7)$$

Для периодического процесса время  $t$  порядка обратной частоты  $1/\omega$  и, следовательно,

$$L \sim \frac{c}{\sqrt{4\pi\sigma\omega}}. \quad (6.8)$$

Переменный ток проникает в проводник только в результате диффузии магнитного поля. Вследствие этого он течет только в тонком поверхностном слое проводника, который называют скин-слоем (от английского слова *skin* — кожа). Величину выражения (6.8) или, точнее,

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$$

называют толщиной скин-слоя, а в более общем случае непериодических процессов величину выражения (6.7) называют *скиновой длиной*. Можно оценить время просачивания магнитного поля на заданную глубину  $L$

$$t \sim \frac{L^2}{D_m} \sim \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2}. \quad (6.9)$$

Эту величину называют *скиновым временем*.

## 7. Модель двух жидкостей

Ранее проводимость  $\sigma$  вводилась как феноменологическая характеристика плазмы. Чтобы найти ее значение и выяснить физический смысл, необходимо кроме движения плазмы как целого учесть также относительное движение электронов и ионов. Это делается в более детальной гидродинамической модели, в которой плазма рассматривается как совокупность двух «жидкостей»: электронной и ионной, — движущихся одна сквозь другую. Электрическое сопротивление плазмы рассматривается при этом как результат взаимного трения этих жидкостей.

Запишем уравнения движения электронов и ионов в виде, аналогичном уравнению (3.2), считая при этом, что на электроны действует только электронное давление  $p_e$ , а на ионы — только ионное давление  $p_i$ . Взаимное трение, т. е. передачу импульса при взаимодействии между частицами, учтем введением сил трения  $F_e$  и  $F_i$ , которые должны удовлетворять третьему закону Ньютона. Удобнее писать уравнения не для скорости, а для импульса. Тогда движение электронов и ионов будет описываться в гидродинамическом приближении системой уравнений

$$\frac{dmv_e}{dt} = -e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] \right) - \frac{1}{n_e} \nabla p_e - \mathbf{F}_e; \quad (7.1)$$

$$\frac{dMv_i}{dt} = Ze \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}] \right) - \frac{1}{n_i} \nabla p_i - \mathbf{F}_i. \quad (7.2)$$

Сила трения, испытываемая электронами, пропорциональна концентрации ионов, а сила трения, испытываемая ионами, — концентрации электронов. Представим эти силы как произведения коэффициента взаимного трения\*  $R$  на разность скоростей и на концентрацию тормозящих частиц. Тогда система уравнений (7.1)—(7.2) примет вид

$$\frac{dmv_e}{dt} = -e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] \right) - \frac{1}{n_e} \nabla p_e - R n_i (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i); \quad (7.3)$$

$$\frac{dMv_i}{dt} = Ze \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}] \right) - \frac{1}{n_i} \nabla p_i - R n_e (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \quad (7.4)$$

\* Иногда  $R$  называют коэффициентом диффузионного сопротивления по причинам, которые выяснятся ниже.

или

$$n_e \frac{dmv_e}{dt} = -n_e e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] \right) - \nabla p_e - R n_i n_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i); \quad (7.5)$$

$$n_i \frac{dMv_i}{dt} = Z n_i e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}] \right) - \nabla p_i - R n_i n_e (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e). \quad (7.6)$$

Плазма удовлетворяет условию электронейтральности

$$n_e = Z n_i \equiv n. \quad (7.7)$$

Плотность тока

$$\mathbf{j} = e (Z n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e). \quad (7.8)$$

Учитывая условие квазинейтральности (7.7), получаем

$$\mathbf{j} = ne (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e). \quad (7.9)$$

Если сложить уравнения (7.5) и (7.6) с учетом выражений (7.7) и (7.8), то силы электрического поля и трения взаимно уничтожатся. Уничтожение электростатических сил является следствием квазинейтральности, уничтожение сил трения — следствием третьего закона Ньютона. В результате получится уравнение магнитной гидродинамики (3.2), в котором роль скорости течения плазмы  $\mathbf{v}$  играет средняя массовая скорость

$$\mathbf{v} = \frac{n_i M \mathbf{v}_i + n_e m \mathbf{v}_e}{M n_i + m n_e}. \quad (7.10)$$

Пренебрегая массой электронов в сравнении с массой ионов, можно считать среднюю массовую скорость не отличающейся от скорости ионов

$$\mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}. \quad (7.11)$$

В этом приближении из формулы (7.9) скорость электронов

$$\mathbf{v}_e \approx \mathbf{v} - \frac{\mathbf{j}}{ne}. \quad (7.12)$$

Из законов механики следует, что передача импульса при взаимодействии пропорциональна приведенной массе  $\tilde{m}$

взаимодействующих частиц. Удобно представить коэффициент трения в форме

$$R = \frac{\tilde{m}}{n_i} v_{ei} = \frac{\tilde{m}}{n_e} v_{ie}. \quad (7.13)$$

После подстановок выражений (7.12) и (7.13) в систему (7.5)—(7.6) последняя принимает вид\*

$$\begin{aligned} \frac{dv_e}{dt} = & -\frac{e}{m} \mathbf{E}^* + \frac{1}{nmc} [\mathbf{j}\mathbf{H}] - \\ & -\frac{1}{nm} \nabla p_e - \frac{\tilde{m}}{m} v_{ei} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i); \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{Ze}{M} \mathbf{E}^* - \frac{1}{n_i M} \nabla p_i + \frac{\tilde{m}}{M} v_{ie} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i). \quad (7.15)$$

Здесь  $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + (1/c) [\mathbf{v}\mathbf{H}]$  — электрическое поле в сопутствующей системе координат (движущейся со средней массовой скоростью плазмы). Величины  $v$  имеют размерность обратного времени, т. е. частоты. Это эффективные частоты передачи импульса от электрона к ионам и от иона к электронам. По аналогии с кинетикой нейтральных частиц, где передача импульса происходит при столкновениях, величины  $v$  часто называют эффективными частотами столкновений. Как видно из определения (7.13), они связаны соотношением

$$v_{ei} n_e = v_{ie} n_i. \quad (7.16)$$

Величину, обратную  $v$ , называют временем передачи импульса

$$\frac{1}{v} = \tau. \quad (7.17)$$

Чтобы иметь полную систему макроскопических уравнений модели двух жидкостей, нужно кроме уравнения для массовой скорости получить также уравнение для плотности тока, которое называют обобщенным законом Ома. В общем случае получение этого уравнения осложняется тем, что субстанциональные (лагранжевы) производные содержат нелинейные члены

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}.$$

---

\* В формуле (7.15) вывод дает еще член  $\frac{1}{n_i M_c} [\mathbf{j}\mathbf{H}]$ , но в сделанных приближениях этим членом надлежит пренебречь.

Простые формы обобщенного закона Ома могут быть получены для двух простейших случаев: стационарного, когда производные по времени вообще равны нулю (проводимость для постоянного тока), и для колебаний малой амплитуды, когда можно пренебречь нелинейными членами и заменить лагранжевы производные на частные производные по времени (линейные колебания). Если пренебречь членами вида  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ , вычесть первое уравнение из второго и отбросить члены, содержащиеся в знаменателе большую массу  $M$  (т. е. пренебречь ускорением ионов), то с учетом равенства (7.9) получится обобщенный закон Ома в виде

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{ne^2}{m} \mathbf{E}^* - \frac{e}{mc} [\mathbf{j}\mathbf{H}] + \frac{e}{m} \nabla p_e - \frac{\mathbf{j}}{\tau}. \quad (7.18)$$

В модели двух жидкостей учитывается только взаимодействие между электронами и ионами, для которого приведенная масса

$$\tilde{m} = \frac{mM}{m+M} \approx m, \quad (7.19)$$

т. е. близка к массе электрона. Поскольку в уравнении (7.18) члены порядка отношения массы электрона к массе иона уже отброшены, следует пренебречь также и разницей между приведенной массой и массой электрона, что мы и сделали. Величина  $\tau$  в уравнении (7.18) есть время передачи импульса от электрона к ионам

$$\tau = \frac{1}{\nu_{ei}}. \quad (7.20)$$

Уравнения (3.2) и (7.18) образуют полную систему макроскопических уравнений модели двух жидкостей.

## 8. Проводимость плазмы

Для простейшего случая постоянного тока в однородной плазме уравнение обобщенного закона Ома (7.18) принимает вид

$$\mathbf{j}_i + \omega_e \tau [\mathbf{j}\mathbf{h}] = \frac{ne^2}{m} \tau \mathbf{E}^*, \quad (8.1)$$

где

$$\omega_e = \frac{eH}{mc} \quad (8.2)$$

электронная циклотронная частота;  $\mathbf{h}$  — единичный вектор в направлении магнитного поля.

При отсутствии магнитного поля или для составляющей тока вдоль его направления векторное произведение  $[\mathbf{j}\mathbf{H}]$  выпадает, и из уравнения (8.1) получается *нормальная* или *продольная* проводимость плазмы

$$\sigma_0 = \sigma_{\parallel} = \frac{ne^2}{m} \tau. \quad (8.3)$$

Для нахождения поперечной проводимости расписываем уравнение (8.1) в составляющих. Если направить ось  $z$  вдоль магнитного поля, то

$$\mathbf{j}_x + \omega_e \tau \mathbf{j}_y = \sigma_0 \mathbf{E}_x^*; \quad (8.4)$$

$$\mathbf{j}_y - \omega_e \tau \mathbf{j}_x = \sigma_0 \mathbf{E}_y^*. \quad (8.5)$$

Поперечная проводимость плазмы есть величина *тензорная*. Проще всего выразить соотношения (8.3)—(8.5) с помощью *тензора сопротивления*  $R$ , определяемого соотношением

$$\mathbf{E}_i = R_{ik} \mathbf{j}_k. \quad (8.6)$$

Компоненты этого тензора образуют таблицу (матрицу):

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_0} & \frac{\omega_e \tau}{\sigma_0} & 0 \\ -\frac{\omega_e \tau}{\sigma_0} & \frac{1}{\sigma_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_0} \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

Обычно принято вместо тензора сопротивления пользоваться тензором проводимости, который определяется равенством

$$\mathbf{j}_i = \sigma_{ik} \mathbf{E}_k. \quad (8.8)$$

Чтобы найти компоненты этого тензора, нужно найти матрицу, обратную (8.7), т. е. решить систему уравнений (8.4)—(8.5) относительно составляющих тока. В данном случае достаточно умножить одно из уравнений на  $\omega_e \tau$ , прибавить ко второму или вычесть из него, чтобы получить

$$\mathbf{j}_x (1 + \omega_e^2 \tau^2) = \sigma_0 (\mathbf{E}_x^* - \omega_e \tau \mathbf{E}_y^*); \quad (8.9)$$

$$\mathbf{j}_y (1 + \omega_e^2 \tau^2) = \sigma_0 (\omega_e \tau \mathbf{E}_x^* + \mathbf{E}_y^*). \quad (8.10)$$

Отсюда тензор проводимости однородной плазмы для постоянного тока имеет вид:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_0}{1 + \omega_e^2 \tau^2} & -\frac{\omega_e \tau \sigma_0}{1 + \omega_e^2 \tau^2} & 0 \\ \frac{\omega_e \tau \sigma_0}{1 + \omega_e^2 \tau^2} & \frac{\sigma_0}{1 + \omega_e^2 \tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

В явном виде составляющие тока выражаются формулами:

$$\mathbf{j}_x = \sigma_0 \frac{E_x - \omega_e \tau E_y}{1 + \omega_e^2 \tau^2}; \quad (8.12)$$

$$\mathbf{j}_y = \sigma_0 \frac{E_y + \omega_e \tau E_x}{1 + \omega_e^2 \tau^2}; \quad (8.13)$$

$$\mathbf{j}_z = \sigma_0 E_z. \quad (8.14)$$

Для замагниченной плазмы  $\omega_e \tau$  — большое число. В этом случае поперечная проводимость должна быть гораздо меньше продольной и уменьшаться обратно пропорционально квадрату циклотронной частоты, т. е. квадрату напряженности магнитного поля. Ток должен течь не только вдоль электрического поля, но и поперек него (*холл-эффект*), причем в замагниченной плазме при скрещенных полях ток поперек электрического поля (*холловский ток*) должен быть гораздо больше, чем ток вдоль электрического, но поперек магнитного поля, и уменьшаться только как первая степень напряженности магнитного поля. В реальных условиях проводимость плазмы сильно осложняется пространственной неоднородностью, вызывающей электрические поля поляризации, а также дрейфовые токи и ток намагничивания, о которых речь будет в гл. III.

## 9. Кулоновские столкновения

В не слишком плотной плазме передача импульса происходит в основном при двойных (парных) взаимодействиях, которые можно описывать как столкновения. Вероятность взаимодействия характеризуется эффективным сечением  $Q$ , имеющим размерность площади ( $см^2$ ). Коэффициент взаимного трения  $R$  выражается через эффективное сечение как

$$R = \tilde{m} \langle Qu \rangle, \quad (9.1)$$

где  $\tilde{m}$  — приведенная масса;  $u$  — относительная скорость (угловые скобки означают усреднение по скоростям теплового движения). Из сопоставления с формулой (7.13) находим:

$$v_{ei} = \langle Qu \rangle n_i; \quad (9.2)$$

$$v_{ie} = \langle Qu \rangle n_e. \quad (9.3)$$

В выражении проводимости плазмы (8.3) время передачи импульса

$$\tau = \frac{1}{\langle Qu \rangle n_i}, \quad (9.4)$$

и нормальная проводимость плазмы выражается через сечение взаимодействия как

$$\sigma_0 = \frac{ne^2}{n_i m \langle Qu \rangle} = \frac{Ze^2}{m \langle Qu \rangle}. \quad (9.5)$$

Взаимодействие между заряженными частицами осуществляется посредством электростатических кулоновских сил. Величина передаваемого импульса определяется *прицельным параметром*  $b$ , т. е. расстоянием по перпендикуляру от одной частицы до невозмущенной траектории другой. Передаваемый импульс может быть оценен как

$$\Delta(\tilde{m}v) \approx Ft, \quad (9.6)$$

где  $F$  — сила взаимодействия при наибольшем сближении

$$F \approx \frac{Z_1 Z_2 e^2}{b^2}, \quad (9.7)$$

а «продолжительность столкновения»

$$t \approx \frac{b}{u}, \quad (9.8)$$

$u$  — относительная скорость.

Подстановка выражений (9.7) и (9.8) в выражение (9.6) дает

$$\Delta(\tilde{m}v) \approx \frac{Z_1 Z_2 e^2}{bu}. \quad (9.9)$$

Если система близка к равновесию, то положительные и отрицательные значения  $\Delta(\tilde{m}v)$  равновероятны; среднее значение этой величины равно нулю, но средний квадрат отличен от нуля. Следовательно, эффективное сечение взаи-

модействия должно находиться усреднением по квадрату передаваемого импульса. Более строгое обоснование этому будет дано в гл. VI, исходя из уравнения Фоккера—Планка.

Прицельному параметру  $b$  отвечает сечение  $Q = \pi b^2$ . Сечение, усредненное по квадрату передаваемого импульса, выразится как

$$\bar{Q} = \frac{1}{(\tilde{m}u)^2} \int_{Q_{\text{мин}}}^{Q_{\text{макс}}} \Delta^2(\tilde{m}v) dQ = \int \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\tilde{b}m u^2} \right)^2 \cdot 2\pi b db. \quad (9.10)$$

Не зависящий от  $b$  множитель в скобках

$$b_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\tilde{m}u^2} \quad (9.11)$$

мы называем *расстоянием ближнего взаимодействия*. Это расстояние, на котором потенциальная энергия взаимодействия равна по абсолютной величине удвоенной кинетической энергии относительного движения. Выражение эффективного сечения кулоновского взаимодействия (9.10) записывается через  $b_0$  в виде

$$\bar{Q} = 2\pi b_0^2 \int \frac{db}{b}. \quad (9.12)$$

Интеграл расходится как на малых, так и на больших расстояниях. Это значит, что принятые приближения перестают быть применимыми в обоих случаях. Чтобы получить приближенный нерасходящийся результат, интеграл «обрезают» как на нижнем, так и на верхнем пределе. Результат выражают в виде

$$\bar{Q} = 2\pi b_0^2 \ln \Lambda, \quad (9.13)$$

где

$$\Lambda = \frac{b_{\text{макс}}}{b_{\text{мин}}}. \quad (9.14)$$

Величину  $\ln \Lambda$  называют *кулоновским логарифмом*. За верхний предел интегрирования  $b_{\text{макс}}$  берется длина экранирования (дебаевская длина), так как на расстояниях, превосходящих ее, кулоновское взаимодействие снимается электростатическим экранированием. За нижний предел интегрирования  $b_{\text{мин}}$  берется большая из двух величин: расстояние ближнего взаимодействия  $b_0$  или квантовомеха-

ническая длина волны частицы

$$\lambda = \frac{\hbar}{mu}. \quad (9.15)$$

Проводимость полностью ионизованной плазмы определяется кулоновским сечением рассеяния электрона на ионе. Для этого случая

$$b_0 = \frac{Ze^2}{mu^2}, \quad (9.16)$$

где  $m$  — масса электрона,  $u$  — скорость электронов по отношению к ионам. Подстановка этого значения в формулу (9.13) дает значение  $\bar{Q}$ , из которого затем могут быть найдены эффективные частоты по формулам (9.2)—(9.3), время передачи импульса по формуле (9.4) и проводимость — по формуле (9.5). Более общая формула (9.11) используется для нахождения *времен релаксации*, т. е. установления равновесного распределения скоростей между частицами плазмы.

## 10. Столкновения с нейтральными частицами и перезарядка

Если в плазме кроме заряженных присутствуют и нейтральные частицы, то обобщенный закон Ома усложняется. В уравнениях (7.1)—(7.2) силы трения

$$F_e = \sum_k R_{ek} n_k (v_e - v_k); \quad (10.1)$$

$$F_i = \sum_k R_{ik} n_i (v_i - v_k), \quad (10.2)$$

где индекс  $k$  нумерует все частицы, присутствующие в плазме. При такой записи трение между одинаковыми частицами автоматически исключается. Коэффициенты трения  $R$  находятся по формуле (9.1), в которую для взаимодействия между двумя заряженными частицами подставляются кулоновские сечения (9.13). Сечения же взаимодействия заряженных частиц с нейтральными берутся из теории электронных и ионных столкновений или из экспериментальных данных\*.

\* Мессе Г. и Бархоп Е. Электронные и ионные столкновения. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958, а также Браун С. Элементарные процессы в плазме газового разряда. Перев. с англ. М., Госатомиздат, 1961.

Нормальную проводимость плазмы можно по-прежнему оценивать по формуле (8.3), а время передачи импульса находится в общем случае из соотношения

$$\frac{1}{\tau} = \sum_k \langle Qu \rangle_{ek} n_k. \quad (10.3)$$

Для более точного вычисления проводимости нужно знать относительные скорости нейтральных частиц, от которых зависит их взаимодействие с заряженными частицами. Если электрическое поле вызывает движение заряженных частиц, то последние, сталкиваясь с нейтральными, увлекают их за собою. Поэтому детальный расчет проводимости частично ионизованной плазмы неотделим от расчета диффузионных процессов, который будет рассмотрен в следующем разделе.

Важнейшим из процессов взаимодействия заряженных частиц с нейтральными является *перезарядка* (обмен зарядом) — процесс, в котором ион отнимает электрон у атома. При этом обе частицы сохраняют свои скорости по величине и направлению, но ион превращается в атом, а атом — в ион. Если атом обменивается с ионом, который в точности подобен иону, получающемуся при его собственной ионизации, то этот процесс, называемый *резонансной перезарядкой*, имеет очень большое эффективное сечение, так как обмен электроном может происходить на большом расстоянии. Образующиеся нейтральные атомы сохраняют скорости и энергии ионов, но не удерживаются магнитными полями, вследствие чего резонансная перезарядка оказывается одним из важнейших механизмов потерь энергии в магнитных ловушках термоядерных устройств. Перезарядка не приводит к изменению направления движения (рассеянию частиц). Диффузия и другие процессы переноса определяются в основном *упругим рассеянием* частиц. Полные сечения взаимодействия включают также *неупругие процессы* — возбуждение и ионизацию.

## 11. Гидродинамическое представление диффузионных процессов

В пространственно неоднородной многокомпонентной плазме уравнения типа (7.6) могут быть использованы для приближенного описания процессов диффузии. Применяя уравнение (7.6) к плазме с произвольным числом

компонентов, запишем систему этих уравнений в виде

$$n_k M_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = n_k \mathbf{F}_k - \nabla p_k - \sum_l R_{kl} n_k n_l (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_l), \quad (11.1)$$

где  $k$  и  $l$  — индексы компонентов плазмы;  $\mathbf{F}_k$  — сила, действующая на соответствующую частицу. Если все силы имеют электромагнитную природу, то

$$\mathbf{F}_k = Z_k e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_k \mathbf{H}] \right).$$

В первом приближении полагаем ускорение  $d\mathbf{v}/dt$  одинаковым для всех компонентов смеси. Тогда, сложив уравнения (11.1), имеем

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \sum_k n_k \mathbf{F}_k - \nabla P, \quad (11.2)$$

где

$$\rho = \sum M_k n_k \quad (11.3)$$

плотность плазмы;  $P$  — общее давление. Выразив ускорение из уравнения (11.2) и подставив его в уравнение (11.1), получаем

$$\begin{aligned} \nabla p_k &= n_k \mathbf{F}_k - \frac{M_k n_k}{\rho} \sum_k n_k \mathbf{F}_k + \\ &+ \frac{M_k n_k}{\rho} \nabla P - \sum_l R_{kl} n_k n_l (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_l). \end{aligned} \quad (11.4)$$

Рассмотрим поток частиц каждого компонента, определенный как

$$\mathbf{J}_k = n_k \mathbf{v}_k. \quad (11.5)$$

Тогда система (11.4) запишется в виде

$$\begin{aligned} \nabla p_k &= n_k \left( \mathbf{F}_k - \frac{M_k}{\rho} \sum_k n_k \mathbf{F}_k \right) + \\ &+ \frac{M_k n_k}{\rho} \nabla P + \sum_l R_{kl} (n_k \mathbf{J}_l - n_l \mathbf{J}_k). \end{aligned} \quad (11.6)$$

При наличии магнитного поля силы  $\mathbf{F}$  зависят от скоростей, вследствие чего потоки входят в правые части уравнений (11.6) неявным образом через  $\mathbf{F}$ .

Уравнения системы (11.4) или (11.6) не являются линейно независимыми, так как при выводе использовалось уравнение (11.2), получаемое их суммированием. Отсюда следует, что значения скоростей или потоков однозначно не определены, что и естественно, поскольку эти значения зависят от выбора системы отсчета. Чтобы определить скорости или потоки, нужно исключить одно из уравнений, заменив его дополнительным условием, фиксирующим систему отсчета. Обычно выбирают систему отсчета, движущуюся со средней массовой скоростью смеси

$$\mathbf{v} = \frac{\sum M_k \mathbf{J}_k}{\sum M_k n_k}. \quad (11.7)$$

В системе массовой скорости дополнительное условие запишется так:

$$\sum M_k \mathbf{J}_k = 0. \quad (11.8)$$

Эта система удобна потому, что средняя массовая скорость входит в уравнения магнитной гидродинамики. Скорости компонентов  $\mathbf{v}_k$ , выраженные в системе средней массовой скорости, называются *диффузионными скоростями*. Выражения потоков упрощаются, если пользоваться системой отсчета, движущейся со средней объемной скоростью смеси

$$\mathbf{v}^* = \frac{\sum \mathbf{J}_k}{\sum n_k}. \quad (11.9)$$

В этой системе дополнительное условие имеет простой вид

$$\sum \mathbf{J}_k = 0. \quad (11.10)$$

Если применить систему (11.6) к простейшему случаю бинарной смеси из нейтральных частиц при отсутствии внешних сил, то получится обычный закон диффузии, причем роль коэффициента диффузии будет играть величина

$$D_{12} = \frac{T}{(n_1 + n_2) R_{12}}, \quad (11.11)$$

где  $T$  — температура в энергетических единицах. Таким образом, коэффициенты взаимного трения однозначно связаны с обычными бинарными коэффициентами диффузии.

Система (11.6) пригодна для описания как диффузионных процессов, так и проводимости многокомпонентной

плазмы. В последнем случае плотность электрического тока

$$\mathbf{j} = e \sum_k Z_k \mathbf{J}_k. \quad (11.12)$$

Получаемые этим методом результаты эквивалентны первому приближению физической кинетики.

Если температура меняется в пространстве, то возникают явления термодиффузии, которые можно приближенно описать, заменив в левых частях уравнений (11.4) или (11.6) градиенты парциальных давлений следующей величиной:

$$\frac{1}{T^\alpha} \nabla T^\alpha p_k.$$

Показатель  $\alpha$  связан с зависимостью сечений взаимодействия от относительной скорости частиц.

## 12. Вязкое течение

До сих пор мы учитывали взаимодействие частиц только как взаимное трение между различными компонентами плазмы.

Взаимодействие между одинаковыми частицами проявляется как *вязкость*. Действие вязкости может быть учтено введением в уравнение магнитной гидродинамики (3.2) добавочного члена по аналогии с уравнением Навье — Стокса в обычной гидродинамике.

Как известно из гидродинамики, сила вязкости выражается как  $\eta \Delta \mathbf{v}$ , где  $\eta$  — вязкость вещества. Эту силу надо добавить к выражению для ускорения элемента вещества  $\rho d\mathbf{v}/dt$ .

Следовательно, уравнение движения для вязкого течения (3.2) примет вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho c} [\mathbf{jH}] + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (12.1)$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа, примененный к вектору  $\mathbf{v}$  (см. приложение 2);  $\nu$  — кинематическая вязкость, определяемая как

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad (12.2)$$

где  $\eta$  — обычный коэффициент вязкости.

### 13. Плазма как система независимых частиц

Противоположный изложенному метод заключается в анализе движения заряженных частиц, рассматриваемых как независимые. При этом магнитные поля, в которых движутся частицы, считаются заданными\*. Если внешние проводники создают достаточно сильные поля, то можно рассматривать движение частиц в этих внешних полях, пренебрегая обратным воздействием плазмы на эти поля. Такая процедура при данной напряженности поля будет тем оправданнее, чем более разрежена плазма. Для плотной плазмы в слабых внешних полях приходится решать задачу о самосогласованном поле: сначала рассчитывают движение частиц, считая поля заданными, а потом находят поля, вызванные найденным распределением частиц. Задача считается решенной, если частицы возбуждают такое поле, какое принято за заданное при расчете их движения. С примерами мы познакомимся ниже. В настоящей главе ограничимся простейшим случаем — движением частиц в постоянном однородном магнитном поле. Уравнение движения имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Ze}{Mc} [\mathbf{vH}]. \quad (13.1)$$

Отсюда очевидно, что ускорение лежит в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Продольная скорость частицы вдоль поля  $v_{\parallel}$  не зависит от магнитного поля и определяется другими действующими на частицу силами. Наша задача — нахождение поперечной скорости  $v_{\perp}$  в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Если направить ось  $z$  вдоль магнитного поля, то для составляющих этой скорости  $v_x$  и  $v_y$  из уравнения (13.1) получим:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{ZeH}{Mc} v_y; \quad (13.2)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{ZeH}{Mc} v_x. \quad (13.3)$$

---

\* Заданными можно считать магнитные поля, но не электрические поля поляризации, необходимые для сохранения электронейтральности.

Удобно ввести комплексную величину

$$v^* = v_x + iv_y. \quad (13.4)$$

Тогда уравнения (13.2) и (13.3) сведутся к уравнению

$$\frac{dv^*}{dt} = -i \frac{ZeH}{Mc} v^*. \quad (13.5)$$

Решение

$$v^* = \text{const} e^{-i\omega_c t} \quad (13.6)$$

представляет вращение в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю с круговой частотой

$$\omega_c = \frac{ZeH}{Mc}. \quad (13.7)$$

Эта частота называется *циклотронной* или *ларморовской*, иногда также *гирочастотой*. С такой же частотой вращается заряженная частица в циклическом ускорителе — циклотроне, откуда и произошло название «циклотронная частота». Для электронов\*

$$\omega_e = \frac{eH}{mc} \approx 1,7 \cdot 10^7 \text{ H}; \quad (13.8)$$

для ионов с зарядовым числом  $Z$

$$\omega_i = \frac{ZeH}{Mc} \approx \frac{Z}{A} 10^4 \text{ H}, \quad (13.9)$$

где  $A$  — массовое число; напряженность магнитного поля  $H$  выражена в эрстедах (численно равная ей индукция  $B$  — в гауссах).

Движение заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле может быть представлено как наложение свободного движения вдоль поля и циклотронного (ларморовского) вращения поперек поля. Частота вращения для данной частицы зависит только от напряженности поля. Радиус  $R_c$  циклотронной орбиты (*ларморовского кружка*) зависит от поперечной скорости  $v_{\perp}$ . Окружность орбиты

$$2\pi R_c = \frac{2\pi v_{\perp}}{\omega_c},$$

---

\* Здесь и в дальнейшем циклотронные частоты считаются существенно положительными величинами.

откуда

$$R_c = \frac{v_{\perp}}{\omega}. \quad (13.10)$$

Если в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, частицы совершают тепловое движение, то циклотронные радиусы будут распределены так же, как скорости теплового движения, т. е. по закону Максвелла.

Применим к циклотронному вращению закон сохранения вращательного момента (момента количества движения)

$$Mv_{\perp} R_c = \frac{Mv_{\perp}^2}{\omega_c} = \frac{M^2 cv_{\perp}^2}{ZeH} = \text{const.}$$

Отбрасывая постоянные множители, заключаем, что величина  $v_{\perp}^2/H$  должна сохраняться, или, как говорят, быть интегралом движения. Тем же свойством, очевидно, обладает и пропорциональная ей величина

$$\mu = \frac{Mv_{\perp}^2}{2H}. \quad (13.11)$$

Эту величину можно рассматривать как *магнитный момент* циклотронной орбиты (ларморовского кружка). В самом деле, энергия вращения

$$\frac{Mv_{\perp}^2}{2} = \mu H \quad (13.12)$$

в соответствии с обычным определением магнитного момента. Закон сохранения магнитного момента мы вывели из движения частицы в постоянном однородном магнитном поле. В более общем случае, когда магнитное поле достаточно медленно меняется во времени и в пространстве, он справедлив лишь приближенно. Медленное изменение внешних условий называют *адиабатическим*. Соответственно магнитный момент циклотронной орбиты называют *адиабатическим инвариантом*\*. Количественно условие адиабатичности сводится к требованию, чтобы относительное изменение

---

\* Адиабатическими инвариантами называются величины, которые приближенно сохраняются при медленном изменении состояния системы.

магнитного поля было малым: во времени за период циклотронного вращения; в пространстве — на длине, равной циклотронному радиусу:

$$\frac{1}{\omega_c} \frac{d \ln H}{dt} \ll 1; \quad (13.13)$$

$$R_c \frac{d \ln H}{dx} \ll 1. \quad (13.14)$$

Циклотронное вращение проявляется в полной мере только в разреженной плазме, где столкновения между частицами редки. В плотной плазме столкновения происходят часто, и кулоновские взаимодействия нарушают правильное циклотронное вращение. Для того чтобы циклотронное вращение могло проявиться, нужно, чтобы период его был мал в сравнении со временем между столкновениями или, точнее, средним временем  $\tau$  передачи импульса вследствие взаимодействий между частицами плазмы. Поскольку период вращения обратно пропорционален частоте, то это условие можно записать как

$$\omega_c \tau \gg 1. \quad (13.15)$$

Плазму, удовлетворяющую этому условию, мы называем *замагниченной*. В замагниченной плазме тепловое движение поперек поля имеет характер циклотронного вращения. Если условие замагниченности не соблюдается, то, не успев закончить циклотронный оборот, частица сбивается с траектории в результате изменения направления движения, вызванного столкновениями или вообще процессами передачи импульса.

Условие (13.15) можно записать более наглядно, если ввести циклотронный радиус

$$R_c = \frac{v_{\perp}}{\omega_c}$$

и длину свободного пробега в отсутствие магнитного поля

$$l = v_{\perp} \tau.$$

Тогда неравенство (13.15) запишется в виде

$$R_c \ll l, \quad (13.15a)$$

т. е. для замагниченности необходимо, чтобы циклотронный радиус был мал в сравнении с длиной свободного пробега.

Поскольку циклотронная частота пропорциональна напряженности магнитного поля, то плазму можно сделать замагниченной, наложив на нее достаточно сильное магнитное поле. Сделать это тем легче, чем больше время передачи импульса  $\tau$ , т. е. чем реже столкновения и слабее взаимодействия между частицами.

В замагниченной плазме в полной мере проявляется анизотропия проводимости и других процессов переноса. Напротив, проводимость в законе Ома (6.1) можно строго считать скаляром, если выполнено условие

$$\omega_c \tau \ll 1, \quad (13.16)$$

обратное условию замагниченности. При этом условии полностью применимо приближение магнитной гидродинамики с конечной проводимостью. Условие (13.15) является необходимым для замагниченности. Достаточно оно только для неограниченной плазмы. Если плазма ограничена в пространстве, то циклотронное вращение может возмущаться не только столкновениями частиц между собой, но и конечными размерами системы. В этом случае кроме условия (13.15) должно быть выполнено еще и второе условие замагниченности: циклотронный радиус мал в сравнении с размерами системы (см. задачу 1).

### Задачи к гл. I

**Задача 1.** Для плазмы, заключенной в цилиндр диаметром  $D$ , дать количественную формулировку второго условия замагниченности.

**Решение.** Для того чтобы частицы при своем циклотронном вращении не выходили за пределы системы или не сталкивались с ограничивающей ее боковой поверхностью цилиндра, должно быть выполнено условие

$$R_c \ll D,$$

которое после подстановки значения  $R_c$  запишется как

$$\frac{v_{\perp} M c}{Z e H} \ll D.$$

Удобно обе части неравенства возвести в квадрат и представить его в виде

$$\frac{M v_{\perp}^2}{H^2} \ll \frac{Z^2 e^2}{M c^2} D^2.$$

Величина  $\frac{Z^2 e^2}{M c^2}$  есть так называемый классический радиус частицы  $R_0$ . Он определяется из того условия, что кулоновская энергия

взаимодействия частицы (рассматриваемой как жесткий шарик радиусом  $R_0$ ) с возбуждаемым ею полем равна собственной энергии частицы  $Mv^2$ . Введя это определение и умножив обе части неравенства на концентрацию частиц  $n$ , приведем второе условие замагничности к виду

$$n \frac{Mv_{\perp}^2}{H^2} \ll R_0 D^2 n.$$

Поскольку речь идет о порядках величин, то на множители порядка единицы можно не обращать внимания. С этой точностью левая часть неравенства будет порядка отношения тепловой энергии к магнитной

$$\beta = \frac{4\pi n Mv_{\perp}^2}{H^2},$$

а правая — порядка числа частиц на длине цилиндра, равной классическому радиусу частицы

$$\Pi = \frac{\pi D^2}{4} R_0 n.$$

Величину  $\Pi$  называют *погонным числом частиц*. Таким образом, по порядку величины второе условие замагничности можно записать в виде

$$\beta \ll \Pi.$$

Отсюда видно, что горячую замагниченную плазму можно получить только при условии, что погонное число частиц достаточно велико.

**Задача 2.** Как изменится уравнение диффузии магнитного поля, если не пренебрегать током смещения?

**Решение.** При учете тока смещения магнитное поле  $\mathbf{H}$  и плотность тока проводимости  $\mathbf{j}$  связаны уравнением Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Выразив отсюда  $\mathbf{j}$  и подставив в выражение (6.2) вместо равенства (6.3), получим

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] = \frac{c}{4\pi\sigma} \text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{4\pi\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Взяв ротор от обеих частей равенства и учитывая, что  $\text{rot rot } \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}$ , получим уточненное уравнение диффузии магнитного поля

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{vH}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left( \Delta \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \right).$$

**Задача 3.** Найти длину экранирования для неизотермической плазмы.

**Решение.** Повторяем вывод формул (2.8) и (2.10), считая температуру ионов  $T_i$  отличной от температуры электронов  $T_e$ . Получаем

$$\kappa \equiv \frac{1}{l_D} = \sqrt{4\pi e^2 \left( \frac{\sum_i Z_i^2 n_i}{T_i} + \frac{n_e}{T_e} \right)}.$$

Для плазмы, содержащей только однозарядные ионы, по условию электронейтральности  $n_e = n_i \equiv n$  и

$$\kappa \equiv \frac{1}{l_D} = \sqrt{4\pi n e^2 \frac{T_i + T_e}{T_i T_e}}.$$

Таким образом, для неизотермической плазмы, содержащей только однозарядные ионы, можно по-прежнему пользоваться формулой (2.10), подставляя вместо  $n$  концентрацию электронов, а вместо  $T$  — приведенную температуру, получаемую из электронной и ионной температур по правилу сложения обратных величин. Если электронная и ионная температуры сильно отличаются одна от другой, то дебаевская длина определяется более холодным компонентом плазмы.

**Задача 4.** В приближении магнитной гидродинамики рассчитать стационарное вязкое течение плазмы в плоском канале между двумя параллельными плоскостями поперек постоянного магнитного поля.

**Решение.** Уравнение вязкого течения в магнитной гидродинамике (12.1):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho c} [\mathbf{j}\mathbf{H}] + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

Если внешнее электрическое поле отсутствует, в сопутствующей системе координат на движущуюся плазму действует электрическое поле

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}].$$

В плотной плазме, где применимо приближение магнитной гидродинамики, т. е. выполнено условие (13.16), можно пренебречь анизотропией проводимости и выразить плотность тока согласно закону Ома (3.3):

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}].$$

Подстановка этого выражения в уравнение движения после раскрытия двойного векторного произведения дает

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\sigma}{\rho c^2} [\mathbf{H}(\mathbf{v}\mathbf{H}) - \mathbf{v}H^2] + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

Расположим ось  $x$  вдоль канала и пусть приложенное внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}_0$  направлено по оси  $z$ . При стационарном упорядоченном (ламинарном) течении скорость  $\mathbf{v}$  направлена вдоль канала (по оси  $x$ ). При этом ток направлен по оси  $y$ . Скорость меняется

только в направлении  $z$ , от координаты  $y$  ничто не зависит. В направлении движения плазма растягивает силовые линии, и возникает составляющая поля  $H_x$ , связанная с плотностью тока уравнением Максвелла

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_y.$$

Поперечное поле не искажается течением плазмы:  $H_z = H_0$ . Отсюда

$$H^2 = H_0^2 + H_x^2;$$

$$(\mathbf{vH}) = vH_x,$$

и составляющая векторного уравнения движения по оси  $x$  приобретает вид

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\sigma H_0^2}{\rho c^2} v + v \frac{d^2 v}{dz^2} = 0.$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет общее решение

$$v = C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z} + C',$$

где

$$\alpha = \frac{H_0}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho v}} = \frac{H_0}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}};$$

$$C' = -\frac{c^2}{\sigma H_0^2} \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Для канала постоянного сечения и длины  $L$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\Delta P}{L},$$

где  $\Delta P$  — напор, т. е. разность давлений между входом и выходом. Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничного условия: для вязкого течения скорость у стенок канала должна обращаться в нуль. Для канала полушириной  $d$ , если отсчитывать координату  $z$  от середины канала, находим  $v = 0$  при  $z = \pm d$ , откуда

$$C_1 = C_2 = -\frac{C'}{2 \operatorname{ch} \alpha d},$$

где  $\operatorname{ch}$  — гиперболический косинус,

$$\operatorname{ch} \alpha d = \frac{1}{2} (e^{\alpha d} + e^{-\alpha d}).$$

Подстановка значений постоянных интегрирования дает окончательно распределение скорости течения по ширине канала:

$$v = \frac{c^2 \Delta P}{\sigma H_0^2 L} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha z}{\operatorname{ch} \alpha d} \right).$$

Эта задача впервые была решена Гартманом, и потому картина течения носит название гартмановского течения. Аргумент гиперболического косинуса в знаменателе есть безразмерное число

$$M \equiv \alpha d = \frac{H_0 d}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}},$$

называемое числом Гартмана. Через это число решение записывается как

$$v = \frac{c^2 \Delta P}{\sigma H_0^2 L} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} M \frac{z}{d}}{\operatorname{ch} M} \right).$$

При больших значениях числа Гартмана второй член в скобках пренебрежимо мал везде, кроме тонкого пристеночного слоя, толщина которого порядка  $d/M$ . В этом слое локализован градиент скорости. Во всем остальном сечении скорость постоянна, и значение ее дается множителем перед скобкой в решении Гартмана.

**Задача 5.** Как изменится решение Гартмана, если канал ограничен проводящими стенками по оси  $y$ ?

**Решение.** В ограниченном канале не может течь стационарный ток. Ток, вызванный течением плазмы, создает электрическое поле поляризации, и в стационарном состоянии это поле примет такое значение, при котором полный ток равен нулю. Если канал ограничен проводящими стенками, то электрическое поле поляризации постоянно по сечению, а плотность тока удовлетворяет условию

$$\int_{-d}^d j_y dz = 0.$$

При наличии постоянного электрического поля поляризации плотность тока выражается формулой (3.3)

$$\mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] \right),$$

и уравнение стационарного течения принимает вид

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{\sigma}{\rho c} E H_0 - \frac{\sigma H_0^2}{\rho c^2} v + v \frac{d^2 v}{dz^2} = 0,$$

т. е. в решении Гартмана к величине  $\Delta P$  надо добавить пондеромоторную силу  $\sigma E H_0 L / c$ . Эта сила постоянна по сечению, так что решение имеет вид

$$v = \left( c \frac{E}{H} + \frac{c^2 \Delta P}{\sigma H_0^2 L} \right) \left( \frac{1 - \operatorname{ch} M \frac{z}{d}}{\operatorname{ch} M} \right).$$

В системе координат, движущейся с дрейфовой скоростью, электрическое поле исчезает, и решение сохраняет прежний вид. Электри-

ческое поле поляризации  $E$  находится из условия равенства нулю полного тока

$$\int_{-d}^d j_y dz = \sigma \int_{-d}^d \left( E_y + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}]_y \right) dz = 0,$$

где

$$[\mathbf{vH}]_y = -v_x H_z = -v H_0.$$

Подстановка выражения  $v$  после интегрирования дает значение электрического поля поляризации:

$$E = \frac{c \Delta P}{\sigma H_0 L} \frac{M - \text{th } M}{\text{th } M}.$$

Подставляя это значение в выражение скорости, получаем окончательный результат для распределения скоростей при гартмановском течении в ограниченном канале

$$v = \frac{c^2 \Delta P}{\sigma H_0^2 L} M \frac{\text{ch } M - \text{ch } M \frac{z}{d}}{\text{sh } M}.$$

Простым интегрированием легко найти среднее значение скорости

$$\bar{v} = \frac{c^2 \Delta P}{\sigma H_0^2 L} (M \text{cth } M - 1)$$

и продольную составляющую поля

$$H_x = \frac{4\pi}{c} \int_{-d}^d j_y dz.$$

Условие обращения в нуль полного тока позволяет задать  $H_x = 0$  на обеих стенках канала. Заметим, что в бесконечном канале, где полный ток не равен нулю, продольная составляющая магнитного поля не обращается в нуль на границах. В этом смысле решение для бесконечного канала представляется физически неудовлетворительным.

**Задача 6.** Найти безразмерные параметры, определяющие поведение плазмы в приближении магнитной гидродинамики.

**Решение.** В теории подобия анализ дифференциальных уравнений производится посредством оценки порядка величины отношений различных членов. Получающиеся безразмерные параметры называются критериями подобия. Применим этот метод к уравнениям, описывающим поведение плазмы.

Выведем прежде всего критерий вмороженности магнитного поля. Для этого нужно рассмотреть уравнение диффузии магнитного поля (6.5), описывающее отступление от закона вмороженности. Из двух членов правой части этого уравнения первый описывает вмороженное поле и имеет порядок величины

$$\text{вмор} = \text{rot } [\mathbf{vH}] \sim \frac{vH}{L},$$

где  $L$  — характерный линейный размер. Второй член описывает диффузию магнитного поля и имеет порядок величины

$$\text{дифф} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta H \sim \frac{c^2 H}{4\pi\sigma L^2}$$

Критерием вмороженности является отношение этих членов

$$\frac{\text{вмор}}{\text{дифф}} = \frac{4\pi\sigma v L}{c^2} \equiv \text{Re}_m,$$

которое называется магнитным числом Рейнольдса. При больших магнитных числах Рейнольдса поле вморожено, при малых — свободно проникает в плазму.

Если магнитное поле вморожено, то движение плазмы описывается уравнением магнитного давления (3.5), которое в представлении Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{4\pi\rho} [\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}].$$

В случае стационарного течения в этом уравнении останется три члена. Силы инерции описываются как

$$\text{ин} = (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \sim \frac{v^2}{L};$$

сила газового давления

$$\text{газ} = \frac{1}{\rho} \nabla P \sim \frac{P}{L\rho}$$

и сила магнитного давления

$$\text{магн} = \frac{1}{4\pi\rho} [\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] \sim \frac{H^2}{4\pi\rho L}.$$

Роль газового давления в плазме характеризуется критерием

$$\frac{\text{газ}}{\text{магн}} = \frac{8\pi P}{H^2} \equiv \beta.$$

При больших значениях  $\beta$  можно учитывать только силы газового давления, при малых — только магнитного. Отношение магнитных сил к силам инерции в плазме с вмороженным полем дается числом Альфвена

$$\frac{\text{магн}}{\text{ин}} = \frac{H^2}{4\pi\rho v^2} \equiv A.$$

Если магнитное число Рейнольдса велико (поле вморожено), то при больших числах Альфвена магнитные силы существеннее инерционных; при этом следует ожидать подавления турбулентности магнитным полем.

Для случаев, когда поле не вморожено, следует проанализировать дифференциальное уравнение задачи 4. Для стационарного по-

тока в представлении Эйлера оно имеет вид

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\sigma}{\rho c^2}[\mathbf{H}(\mathbf{v}\mathbf{H}) - vH^2] + \nu\Delta\mathbf{v}.$$

Если поле не заморожено, то пондеромоторные силы зависят от проводимости и имеют порядок величины

$$\text{понд} = \frac{\sigma v H^2}{\rho c^2}$$

и силы вязкости

$$\text{вязк} = \nu\Delta v \sim \frac{\nu v}{L^2}.$$

Отношение этих членов

$$\frac{\text{понд}}{\text{вязк}} = \frac{\sigma H^2 L^2}{c^2 \rho \nu} \equiv M^2.$$

Отношение пондеромоторных сил к инерционным

$$\frac{\text{понд}}{\text{ин}} = \frac{\sigma H^2 L}{\rho c^2 v} \equiv S,$$

где  $S$  — безразмерное число, называемое числом Стюарта. Этими критериями определяется характер течения плазмы при малых магнитных числах Рейнольдса. При этом турбулентность должна подавляться при больших числах Стюарта.

Отношение инерционных сил к вязким

$$\frac{\text{ин}}{\text{вязк}} = \frac{vL}{\nu} \equiv \text{Re}.$$

Легко убедиться, что найденные безразмерные параметры связаны соотношениями:

$$S = A \text{Re}_m;$$

$$M = \sqrt{S \text{Re}}.$$

## Глава II

### ТЕРМОДИНАМИКА ПЛАЗМЫ

#### 1. Температура плазмы

Термодинамика изучает свойства систем, находящихся в состоянии *теплового*, или *термического*, равновесия. Важнейшей характеристикой такой системы является ее *температура*. Понятие температуры имеет смысл только при наличии хотя бы частичного равновесия. В статистической физике температура определяется как величина, обратно пропорциональная модулю так называемого канонического распределения. Если вероятность нахождения системы в состоянии с энергией  $\mathcal{E}_i$  пропорциональна  $e^{-\beta \mathcal{E}_i}$ , то температура  $T$  определяется из условия

$$\frac{1}{\beta} :: T. \quad (1.1)$$

Обычно в качестве множителя пропорциональности вводится постоянная Больцмана  $k$

$$\frac{1}{\beta} = kT. \quad (1.2)$$

Определенная таким образом температура имеет собственную размерность: она измеряется в градусах (обычно по шкале Кельвина). В физике плазмы принято полагать множитель пропорциональности в формуле (1.1) равным единице, т. е. определять температуру как величину, обратную модулю распределения. Определенная таким образом температура имеет размерность энергии. Поэтому ее называют *температурой в энергетических единицах*. В дальнейшем везде, где это специально не оговорено, мы

будем под температурой понимать именно температуру в энергетических единицах. Согласно закону равнораспределения энергии, она равна средней энергии, приходящейся на две степени свободы классического идеального газа. При измерении температуры в энергетических единицах вероятность состояния с энергией  $\mathcal{E}_i$  пропорциональна величине  $e^{-\frac{\mathcal{E}_i}{T}}$ .

Удобной для физики плазмы энергетической единицей температуры является электронвольт ( $\text{эв}$ ):

$$1 \text{ эв} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} = 11600^\circ \text{ К}.$$

Для горячей плазмы единицей температуры часто служит килоэлектронвольт ( $\text{кэв}$ ).

Плазма имеет одну определенную температуру, только если она находится в состоянии *полного термодинамического равновесия*. Очень часто в плазме приходится иметь дело с *частичным термодинамическим равновесием*. Так, обмен энергиями электронов с ионами происходит гораздо медленнее, чем обмен между частицами, близкими по массе. Поэтому в не слишком плотной плазме может длительное время существовать состояние, когда она характеризуется двумя температурами: электронной  $T_e$  и ионной  $T_i$ . Плазму с  $T_e = T_i$  называют *изотермической*. Получение ее в обычных условиях эксперимента — задача довольно сложная.

Если ускорение частиц происходит под действием электромагнитных полей или ударных волн, то может не быть и частичного равновесия. В таких случаях теряют смысл даже электронная и ионная температуры. Иногда в неравновесной плазме температурой предлагают называть среднюю энергию, приходящуюся на две степени свободы частицы. Однако в плазме с несколькими сортами ионов при этом может оказаться, что разные ионы будут иметь разные температуры.

В ударной волне все частицы набирают одинаковую скорость и, следовательно, «температура» частиц данного рода может возрастать с их массой.

## 2. Тепловая и кулоновская энергия плазмы

Для равновесной плазмы тепловая энергия выражается так же, как для идеального газа. В полностью ионизован-

ной плазме плотность тепловой энергии

$$\epsilon_T = \frac{3}{2} (n_e T_e + n_i T_i), \quad (2.1)$$

где  $n$  — концентрация частиц;  $T$  — температуры в энергетических единицах. В частично ионизованной плазме добавляется энергия нейтральных частиц (атомов и молекул), определяемая по обычным формулам термодинамики газов.

В термодинамическом отношении плазма отличается от идеального газа тем, что кроме тепловой энергии в ней может оказаться существенной еще и энергия электростатического взаимодействия. Если взаимодействие не слишком сильное, то энергия взаимодействия может быть оценена в приближении Дебая (см. гл. I). Изменение потенциала вследствие взаимодействия для частицы с зарядом  $Ze$  выражается согласно формуле (1.2.12) как

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{Ze}{r} (e^{-\kappa r} - 1).$$

На малых расстояниях  $r$  разложение в ряд дает

$$\varphi - \varphi_0 \approx -Ze\kappa \equiv -\frac{Ze}{l_D}. \quad (2.2)$$

Высшие члены при  $r \rightarrow 0$  исчезают. Таким образом, электростатическое взаимодействие создает в точке, где находится каждая частица, добавочный отрицательный потенциал (2.2).

Этот потенциал происходит от притяжения частицы окружающей ее «атмосферой» с избытком частиц противоположного знака. Он равен численно кулоновскому потенциалу, возбуждаемому частицей на расстоянии, равном длине экранирования  $l_D$ . Если умножить добавочный потенциал на заряд частицы и просуммировать по всем частицам, находящимся в единице объема, то мы каждую пару частиц учтем дважды. Поэтому полная плотность электростатической энергии

$$\epsilon_k = -\frac{1}{2} \kappa e^2 \sum_k z_k^2 n_k. \quad (2.3)$$

Она такова, как если бы все частицы притягивались между собой на длине, равной длине экранирования  $l_D \equiv 1/\kappa$ . В си-

лу квадратичности по  $Z$  формулы (2.3) кулоновская энергия плазмы всегда отрицательна, т. е. имеет такой знак, как энергия притяжения. Это объясняется тем, что каждая заряженная частица создает вокруг себя атмосферу с преобладанием зарядов противоположного знака, к которой частица притягивается. Таким образом, полная энергия плазмы всегда меньше, чем энергия идеального газа. Подстановка значения  $\varkappa$  (I.2.10) дает

$$e_k = - \sqrt{\frac{\pi}{T}} e^3 \left( \sum_k Z_k^2 n_k \right)^{3/2} \quad (2.4)$$

или, вводя  $\tilde{Z}$  согласно (I.2.14),

$$e_k = - \sqrt{\pi} e^3 \frac{n^{3/2}}{V T} (\tilde{Z})^{3/2}. \quad (2.5)$$

Сопоставляя с формулой (I.2.13), находим, что плотность кулоновской энергии

$$e_k = - \frac{T}{8\pi} \varkappa^3 = - \frac{T}{8\pi l_D^3}. \quad (2.6)$$

Полезно рассмотреть сферу с радиусом, равным длине экранирования; такую сферу называют дебаевской. Ее объем

$$V_D = \frac{4}{3} \pi l_D^3. \quad (2.7)$$

В первом приближении можно считать, что потенциал частицы сказывается только внутри дебаевской сферы, а вне ее пренебрежимо мал. Сопоставляя формулы (2.6) и (2.7), находим

$$e_k = - \frac{T}{6V_D}. \quad (2.8)$$

Если от плотности кулоновской энергии перейти к кулоновской энергии, рассчитанной на одну частицу, то

$$g_k = \frac{e_k}{n} = - \sqrt{\pi} e^3 \sqrt{\frac{n}{T}} (\tilde{Z})^{3/2} \quad (2.9)$$

или, из формулы (2.8),

$$g_k = - \frac{T}{6V_D n} = - \frac{T}{6N_D}, \quad (2.10)$$

где

$$N_D = V_D n \quad (2.11)$$

— число частиц в дебаевской сфере.

В силу статистического характера теории Дебая она приложима лишь при условии, если в дебаевской сфере содержится много частиц

$$N_D \gg 1. \quad (2.12)$$

Но тогда, согласно формуле (2.10), кулоновская энергия мала в сравнении с тепловой\*. Критерием идеальности плазмы может считаться число частиц в дебаевской сфере. Если это число велико, то плазма в термодинамическом отношении ведет себя как идеальный газ.

Таким образом, теория Дебая применима только тогда, когда электростатическое взаимодействие является малой поправкой, т. е. когда плазма по своему термодинамическому поведению близка к идеальному газу. Основная ценность приведенных формул в том, что они позволяют проверить, до каких плотностей плазма мало отстает от идеальных газовых законов. В области более высоких плотностей, где эти отступления становятся значительными, теоретический расчет термодинамического поведения плазмы не представляется возможным. Здесь необходимо основываться на экспериментальных данных.

### 3. Кулоновские поправки к свободной энергии и давлению плазмы

Как известно из статистической термодинамики (см. приложение 4), энергия  $\mathcal{E}$  и свободная энергия  $F$  выражаются через статистическую сумму  $\Sigma$  формулами:

$$\mathcal{E} = T^2 \frac{\partial \ln \Sigma}{\partial T}; \quad (3.1)$$

$$F = -T \ln \Sigma. \quad (3.2)$$

Здесь по принятому условию температура выражена в энергетических единицах, т. е. постоянная Больцмана поло-

---

\* Отсюда видно, что условие (2.12) совпадает с условием допустимости линеаризации уравнения (1.2.7). Таким образом, замена среднего значения функции функцией от среднего значения становится законной при условии, совпадающем с неравенством (2.12).

жена равной единице. Формула (3.1) позволяет выразить статистическую сумму через энергию в виде неопределенного интеграла

$$\ln \Sigma = \int \frac{\mathcal{E}}{T^2} dT. \quad (3.3)$$

Подстановка в формулу (3.2) дает выражение для свободной энергии

$$F = -T \int \frac{\mathcal{E}}{T^2} dT. \quad (3.3a)$$

Тот же результат легко получить и из формальной термодинамики интегрированием уравнения Гиббса — Гельмгольца

$$\mathcal{E} = F - T \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_v. \quad (3.4)$$

Если энергия аддитивна, т. е. представляется суммой нескольких членов, то в силу линейности приведенных формул они справедливы для каждого члена в отдельности. Давление

$$P = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_T = n^2 \left( \frac{\partial F}{\partial n} \right)_T. \quad (3.5)$$

Согласно формуле (2.6) кулоновская энергия, отнесенная к одной частице,

$$\mathcal{E}_k = - \text{const } n^{1/2} T^{-1/2}. \quad (3.6)$$

В этом случае в выражении (3.3) за нижний предел интегрирования можно принять то значение температуры, при котором энергия обращается в нуль, т. е.  $T = \infty$ . После этого выражение (3.3a) дает для кулоновской поправки к свободной энергии

$$F_k = \frac{2}{3} \mathcal{E}_k \quad (3.7)$$

или, после подстановки формулы (2.9),

$$F_k = - \frac{T}{12 \pi l_D^3 n}. \quad (3.8)$$

Для кулоновской поправки к давлению (3.5) получим

$$\Delta P_k = \frac{1}{2} n F_k = \frac{1}{3} n \mathcal{E}_k. \quad (3.9)$$

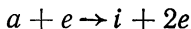
Эта поправка всегда отрицательна.

Выведенными формулами исчерпывается вопрос о кулонбвских поправках к термодинамическим функциям и к уравнению состояния плазмы в приближении Дебая.

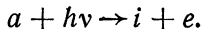
#### 4. Равновесие ионизации

Для неполностью ионизованной плазмы важнейшей термодинамической задачей является нахождение степени ионизации. Применяя термодинамику к решению этой задачи, необходимо помнить, что термодинамика дает равновесную степень ионизации. В замкнутой системе, изолированной от окружающей среды, стационарное состояние всегда совпадает с состоянием термодинамического равновесия. Но совсем иначе обстоит дело в случае открытых систем. Важнейшим примером открытой системы является система, через которую проходит стационарный поток энергии, т. е. выделение энергии балансируется ее отводом в окружающую среду. В открытой системе стационарное состояние ионизации может не совпадать с состоянием термодинамического равновесия.

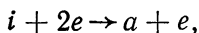
При рассмотрении открытых систем основное значение имеет принцип детального равновесия. Он гласит, что каждому прямому процессу отвечает обратный процесс, совершающийся по тому же пути, и что в состоянии термодинамического равновесия скорости прямого и обратного процессов равны. Отсюда следует, что стационарное состояние совпадает с состоянием термодинамического равновесия, если прямой и обратный процессы совершаются по одному и тому же пути. Поясним этот принцип на интересующем нас примере равновесия ионизации. Основными процессами ионизации являются: ионизация электронным ударом



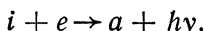
и ионизация излучением



Здесь символ  $a$  обозначает атом;  $i$  — ион;  $h\nu$  — фотон. Каждому из этих процессов отвечает обратный процесс рекомбинации. Для ионизации электронным ударом обратным процессом является рекомбинация при тройных столкновениях



В которой избыточную энергию уносит второй электрон. Для второго процесса ионизации обратным процессом является рекомбинация с излучением



Общий вид условия равновесия ионизации можно получить из элементарных кинетических соображений. Пусть ионизация происходит при электронном ударе, а рекомбинация — при тройных столкновениях. Скорость ионизации

$$\omega_1 = k_1 n_a n_e. \quad (4.1)$$

Скорость рекомбинации

$$\omega_2 = k_2 n_i n_e^2, \quad (4.2)$$

где  $n_a$ ,  $n_i$ ,  $n_e$  — концентрации атомов, ионов и электронов соответственно. Коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  (константы скоростей) являются функциями температуры, но не зависят от концентраций. В состоянии равновесия скорости прямого и обратного процессов должны быть равны

$$k_1 n_a n_e = k_2 n_i n_e^2, \quad (4.3)$$

откуда

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{k_1}{k_2} \equiv K. \quad (4.4)$$

Это соотношение называется в физической химии законом действующих масс. Величина  $K$  носит название константы равновесия. Пусть теперь ионизация происходит под действием излучения, а рекомбинация — при двойных столкновениях с испусканием излучения. Тогда

$$\omega_1' = k_1' n_a I; \quad (4.5)$$

$$\omega_2' = k_2' n_i n_e, \quad (4.6)$$

где  $I$  — интенсивность излучения. Для равновесного (теплого) излучения  $I$  зависит только от температуры. Приравнение выражений (4.5) и (4.6) дает

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{k_1' I}{k_2'}. \quad (4.7)$$

Если излучение равновесное (тепловое), то правая часть соотношения (4.7) — однозначная функция температуры. В условиях термодинамического равновесия правая часть

соотношения (4.7) должна быть равна правой части выражения (4.4):

$$\frac{k_1' I}{k_2'} = \frac{k_1}{k_2} = K, \quad (4.8)$$

где  $K$  — константа равновесия. Таким образом, общий вид условия равновесия ионизации

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = K. \quad (4.9)$$

Частным случаем этой зависимости для идеальной плазмы является формула Саха, которая будет выведена ниже.

Стационарное состояние ионизации совпадает с состоянием термодинамического равновесия как в случае, если ионизация происходит электронным ударом, а рекомбинация — при тройных столкновениях, так и в случае ионизации равновесным (тепловым) излучением и лучистой рекомбинации. В замкнутой системе, где излучение находится в равновесии с веществом, соответствие между прямым и обратным процессом обеспечивается автоматически. Но в разреженной плазме нередко реализуется случай открытой системы, когда излучение свободно выходит из плазмы. При этом ионизация производится только электронным ударом, рекомбинация же, если плазма не слишком плотная, может происходить в основном с излучением. Тогда прямой и обратный процессы совершаются по разным путям и стационарное состояние ионизации не совпадает с состоянием термодинамического равновесия. В открытой системе, в которой тройными столкновениями можно пренебречь, стационарное состояние ионизации определяется приравнением выражений (4.1) и (4.6), откуда

$$\frac{n_i}{n_a} = \frac{k_1}{k_2}. \quad (4.10)$$

Этот результат называют формулой Эльверта. Согласно ей в разреженной плазме, из которой излучение выходит свободно, степень ионизации не зависит от концентрации электронов.

Тем не менее формула для равновесной ионизации имеет фундаментальное значение в физике плазмы. Она называется

ся формулой Саха, по имени индийского астрофизика, впервые ее получившего. Формула Саха выводится из статистической теории идеальных газов. Она справедлива, если ионизация и рекомбинация происходят по одному и тому же пути и плазму можно рассматривать как идеальный газ, т. е. при не слишком низких, но и не слишком высоких плотностях. Наряду с условием детального равновесия должен удовлетворяться также общий критерий идеальности плазмы, который мы рассматривали выше: кулоновская энергия должна быть мала в сравнении с тепловой, или, что то же самое, число частиц в дебаевской сфере должно быть большим.

Ввиду важности формулы Саха мы выведем ее двумя различными способами.

### 5. Вывод формулы Саха из квазиклассической статистики

Согласно квазиклассической статистике, вероятность нахождения частицы в состоянии с энергией  $\mathcal{E}$  выражается формулой Больцмана

$$\omega(\mathcal{E}) = A e^{-\frac{\mathcal{E}}{T}}, \quad (5.1)$$

где  $T$  — температура в энергетических единицах. Число частиц с энергией  $\mathcal{E}$  равно вероятности, умноженной на число состояний. Для частицы, не имеющей внутренних степеней свободы, число состояний равно числу элементарных ячеек фазового пространства объемом  $h^3$ , где  $h = 2\pi\hbar$  — обычная постоянная Планка\*. Для электрона с импульсом между  $p$  и  $p + dp$  фазовый объем

$$d\Gamma = 4\pi p^2 dp V, \quad (5.2)$$

где  $V$  — обычный объем. Число электронов в этом объеме

$$dN_e = V g_e \frac{4\pi p^2}{h^3} dp e^{-\frac{\mathcal{E}}{T}}. \quad (5.3)$$

---

\* Планк определил квантовую постоянную  $h$  из условия, что уровни энергии гармонического осциллятора с частотой  $\nu$  различаются на величину  $h\nu$ . В квантовой механике удобнее величина, в 2 $\pi$  раз меньшая, которую обычно обозначают  $\hbar$ . Иногда (см., например, [12]) под  $h$  подразумевается вторая из этих величин.

Здесь  $g_e$  — статистический вес, т. е. число состояний с одинаковой энергией, различающихся внутренними степенями свободы. Рассматривая равновесие электронов с атомами, мы можем за нуль энергии считать энергию электрона в атоме. Тогда энергия свободного электрона с импульсом  $p$

$$\mathcal{E} = J + \frac{p^2}{2m}, \quad (5.4)$$

где  $J$  — энергия ионизации атома (ее часто называют потенциалом ионизации и выражают в электронвольтах). Число свободных электронов на один атом в определенном квантовом состоянии найдется интегрированием по всем значениям импульса

$$N_e^* = V g_e \frac{4\pi}{h^3} e^{-\frac{J}{T}} \int_0^{\infty} p^2 e^{-\frac{p^2}{2mT}} dp. \quad (5.5)$$

Интеграл берется по формуле (см. приложение 6)

$$\int_0^{\infty} z^2 e^{-\alpha z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \alpha^{-3/2}. \quad (5.6)$$

В данном случае  $\alpha = \frac{1}{2mT}$ , вследствие чего выражение (5.5) дает

$$N_e^* = V g_e \frac{(2\pi mT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{J}{T}}. \quad (5.7)$$

Чтобы получить полное число электронов  $N_e$ , этот результат надо умножить на число атомов в одном квантовом состоянии  $N_a/g_a$ , где  $g_a$  — полный статистический вес нейтрального атома. После этого

$$N_e = N_a \frac{g_e}{g_a} V \frac{(2\pi mT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{J}{T}}. \quad (5.8)$$

Квазиклассический вывод недостаточно строг, так как приняты два не вполне очевидных допущения. Во-первых, мы считали, что интегрирование выражения (5.3) дает число электронов на один атом в определенном квантовом состоянии. Во-вторых, в равновесии ионизации участвуют также и ионы, и, чтобы учесть это, нужно за  $V$  принять

объем, приходящийся на один ион в определенном квантовом состоянии:

$$V = \frac{1}{\left(\frac{n_i}{g_i}\right)}, \quad (5.9)$$

где  $n_i$  — число ионов в единице объема;  $g_i$  — статистический вес иона. Подстановка формулы (5.9) в выражение (5.8) дает формулу Саха в окончательном виде

$$\frac{N_e}{N_a} = \frac{g_e g_i}{g_a} \frac{1}{n_i} \frac{(2\pi m T)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{J}{T}}.$$

Отношение полных чисел частиц  $N$  равно отношению концентраций  $n$ , что позволяет записать формулу Саха в симметричном виде

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{g_e g_i}{g_a} \frac{(2\pi m T)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{J}{T}}. \quad (5.10)$$

Величина, стоящая в левой части, есть константа равновесия для процесса ионизации, рассматриваемого в качестве химической реакции. Если подставить численные значения универсальных констант и выразить температуру в электронвольтах, то формула Саха примет вид

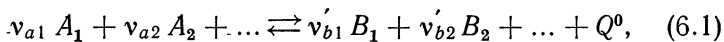
$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{g_e g_i}{g_a} \cdot 3 \cdot 10^{21} \cdot T_{эв}^{3/2} e^{-\frac{J}{T}}, \quad (5.11)$$

где размерность концентраций в  $см^{-3}$ .

Квазиклассический вывод формулы Саха физически нагляден, но содержит допущения, которые строго не обоснованы. Рассмотрение же равновесия ионизации как частного случая химического равновесия позволяет вывести ту же формулу общим методом химической термодинамики без каких-либо нестрогих допущений.

## 6. Вывод формулы Саха из химической термодинамики

В химической термодинамике доказывается, что если химическое уравнение реакции имеет вид



то условие химического равновесия получается заменой химических символов реагирующих веществ на химиче-

ские потенциалы

$$\nu_{a1} \mu_{a1} + \nu_{a2} \mu_{a2} + \dots \rightleftharpoons \nu_{b1} \mu_{b1} + \nu_{b2} \mu_{b2} + \dots \quad (6.2)$$

Здесь  $A$  — химические символы исходных веществ;  $B$  — химические символы продуктов реакции;  $\nu$  — стехиометрические коэффициенты;  $Q^0$  — тепловой эффект реакции при абсолютном нуле температуры;  $\mu$  — химические потенциалы. Для идеального газа последние могут быть выражены через статистические суммы  $\Sigma$  как

$$\mu = T \ln N - T \ln \Sigma, \quad (6.3)$$

где  $N$  — число частиц;  $T$  — температура в энергетических единицах. Статистическая сумма

$$\Sigma = \sum_j g_j e^{-\frac{\mathcal{E}_j}{T}}, \quad (6.4)$$

где  $\mathcal{E}_j$  — возможные значения энергии частицы;  $g_j$  — статистические веса. В химической термодинамике энергии должны отсчитываться от *общего нуля*, т. е. включать и внутреннюю (химическую) энергию, которую частица сохраняет и при абсолютном нуле температуры. Если перейти к индивидуальному нулю энергии, то

$$\Sigma^0 = e^{-\frac{\mathcal{E}_0}{T}} \Sigma, \quad (6.5)$$

где  $\Sigma^0$  — статистическая сумма в системе отсчета (энергия отсчитывается от общего нуля);  $\Sigma$  — то же для индивидуального нуля;  $\mathcal{E}_0$  — энергия частицы при абсолютном нуле температуры. За общий нуль энергии проще всего принять энергию системы, в которой нет взаимодействия частиц, т. е. все они разведены на бесконечно большое расстояние одна от другой. Практически при вычислении статистических сумм удобнее пользоваться *индивидуальным нулем энергии*, т. е. считать для каждой частицы за нуль ту энергию, которую она имеет при абсолютном нуле температуры. Разность нулевых энергий исходных веществ и конечных продуктов есть тепловой эффект реакции при абсолютном нуле температуры:

$$Q^0 = \Sigma \nu_a \mathcal{E}_{0a} - \Sigma \nu_b \mathcal{E}_{0b}. \quad (6.6)$$

Подставляя выражение (6.3) в формулу (6.2) с учетом равенств (6.5) и (6.6), получаем

$$\frac{n_{b1}^{\nu_{b1}} n_{b2}^{\nu_{b2}} \dots}{n_{a1}^{\nu_{a1}} n_{a2}^{\nu_{a2}} \dots} = \frac{\sum_{b1}^{\nu_{b1}} \sum_{b2}^{\nu_{b2}}}{\sum_{a1}^{\nu_{a1}} \sum_{a2}^{\nu_{a2}} \dots} e^{\frac{Q_0}{T}}. \quad (6.7)$$

Это есть формула закона действующих масс. Для реакции ионизации все стехиометрические коэффициенты  $\nu = 1$ , а тепловой эффект  $Q^0 = -J$ . Если записать для этой реакции химическое уравнение



то уравнение закона действующих масс примет вид

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{\sum_e \sum_i}{\sum_a} e^{-\frac{J}{T}}. \quad (6.9)$$

Статистическая сумма  $\Sigma$  в общем случае может быть представлена как произведение статистических сумм для поступательных, вращательных, колебательных и электронных степеней свободы. У электронов, атомных ионов и свободных атомов вращательные и колебательные степени свободы отсутствуют. Прямое рассмотрение равновесия ионизации молекул едва ли имеет смысл, так как удобнее рассматривать для молекул и молекулярных ионов равновесие диссоциации, а для атомов и атомных ионов — равновесие ионизации. При соблюдении тех и других условий равновесие между молекулами, молекулярными ионами и электронами удовлетворится автоматически. Понимая в дальнейшем под равновесием ионизации только равновесие между атомами, атомными ионами и электронами, можем выразить каждую статистическую сумму как

$$\Sigma = g \Sigma_{tr}, \quad (6.10)$$

где  $\Sigma_{tr}$  — статистическая сумма для поступательных (трансляционных) степеней свободы, а  $g$  — полный статистический вес внутренних степеней свободы. Поступательную статистическую сумму можно вычислить в квазиклассическом приближении, считая, что каждое состояние занимает фазовый объем  $h^3$ , где  $h = 2\pi\hbar$  — обычная постоянная Планка. Тогда

$$\Sigma_{tr} = \sum \frac{\Delta\Gamma}{h^3} e^{-\frac{p^2}{2mT}} \approx \int e^{-\frac{p^2}{2mT}} \frac{d\Gamma}{h^3}, \quad (6.11)$$

где  $\Gamma$  — фазовый объем, выражаемый формулой (5.2). Интегрирование дает

$$\sum_{tr} = \frac{V}{h^3} \int_0^{\infty} 4\pi p^2 e^{-\frac{p^2}{2MT}} dp = \frac{(2\pi MT)^{3/2}}{h^3} V, \quad (6.12)$$

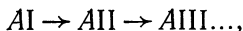
где  $M$  — масса частицы. Подставляя (6.12) в формулу (6.9), получаем

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{g_e g_i}{g_a} \left(\frac{mM_i}{M_a}\right)^{3/2} \frac{(2\pi T)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{J}{T}}, \quad (6.13)$$

где  $n = N/V$  — концентрация (число частиц в единице объема);  $m$  — масса электрона;  $M$  — масса тяжелых частиц. Если пренебречь массой электрона в сравнении с массой иона, что практически всегда допустимо, то можно считать  $M_i/M_a \approx 1$ , после чего формула (6.13) совпадает с формулами (5.10) или (5.11).

## 7. Многоступенчатая ионизация

При невысоких температурах от каждого атома отщепляется не более чем по одному электрону и в плазме присутствуют только однозарядные ионы. Такая плазма называется зарядово-симметричной. В случае водородной плазмы образование однозарядных ионов является единственным процессом ионизации. Если в плазме есть атомы с  $Z > 1$ , то при более высоких температурах происходит ступенчатая ионизация с образованием многозарядных ионов: однозарядный ион отщепляет следующий электрон, превращаясь в двухзарядный ион и т. д. По принятой в спектроскопии символике этот процесс записывается так:



где  $AI$  обозначает нейтральный атом;  $AII$  — однозарядный ион и т. д. Вместо  $A$  ставится химический символ атома.

Формула Саха без труда обобщается на случай многоступенчатой ионизации. Для этого достаточно заменить атом на ион с меньшим зарядом. Обозначая зарядовое число индексом  $i$ , можем записать формулу Саха в виде

$$\frac{n_e n_{i+1}}{n_i} = \frac{g_e g_{i+1}}{g_i} \frac{(2\pi m T)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{J}{T}}, \quad (7.1)$$

## 8. Статистический вес и внутренние степени свободы

Внутренними степенями свободы атомов, ионов и электронов являются пространственная ориентация спина и орбитального момента и электронное возбуждение. Вращательные моменты измеряются в квантовых единицах  $\hbar$ . Измеренный в этих единицах спин обозначается  $S$ , орбитальный момент  $L$ ; эти моменты складываются по правилам квантовой механики, давая полный момент  $\mathcal{Y}$  (т. е. момент количества движения), который может принимать значения от  $|L + S|$  до  $|L - S|$  через единицу. Состояние с моментом  $\mathcal{Y}$  имеет статистический вес

$$g = 2\mathcal{Y} + 1.$$

У свободного электрона  $L = 0$ ;  $\mathcal{Y} = S = 1/2$ , и его статистический вес  $g_e = 2$ . У атомов, а также у ионов, у которых не все электроны оторваны, возможны разные состояния электронного возбуждения. Каждое из них характеризуется энергией возбуждения  $\mathcal{E}_j$  и статистическим весом  $g_j$ . Полным статистическим весом атома или иона называется статистическая сумма по внутренним степеням свободы

$$g = \sum_j g_j e^{-\frac{\mathcal{E}_j}{T}}. \quad (8.1)$$

Если известны энергии и моменты для всех возбужденных уровней, то полный статистический вес атома или иона можно вычислять непосредственно по формуле (8.1), находя статистические веса различных уровней как

$$g_j = 2\mathcal{Y}_j + 1. \quad (8.2)$$

Расчет можно намного упростить, пользуясь *схемой Рессела — Саундерса*, согласно которой уровни, отличающиеся только взаимной ориентацией спина и орбитального момента, объединяются в один *мультиплет* (дублет, триплет и т. д.). Тогда под энергией  $\mathcal{E}_j$  в формуле (8.1) понимают среднюю энергию мультиплета, а статистический вес его

$$g_j = (2L + 1)(2S + 1). \quad (8.3)$$

Полный статистический вес атома или иона находится по схеме Рессела — Саундерса

$$g = \sum_{-J} (2L + 1)(2S + 1)e^{-\frac{\mathcal{E}_j}{T}}, \quad (8.4)$$

где суммирование производится по всем мультиплетам. Для процессов, не сопровождающихся ядерными превращениями, можно понимать под  $L$  и  $S$  орбитальный и спиновый моменты электронных состояний атома или иона, не учитывая ядерных спинов. Тогда для ионов водорода и его изотопов  $g \doteq 1$ . Для остальных ионов и всех атомов вычисление полного статистического веса требует знания энергий, спинов и орбитальных моментов возбужденных электронных состояний, которые берутся из спектроскопических данных. Таблицы этих величин мы даем в приложении 5. Состояния, отличающиеся только взаимной ориентировкой спина и орбитального момента, рассматриваются в схеме Рессела — Саундерса как *компоненты мультиплета*, а разницы между их энергиями — как *тонкая структура (мультиплетное расщепление)*. Мультиплетное расщепление тем сильнее, чем больше электронов в системе. Поэтому схема Рессела — Саундерса является точной для легких атомов или ионов: у них мультиплетное расщепление мало. У тяжелых атомов или ионов величина мультиплетного расщепления того же порядка, что и разница энергий между мультиплетами. К таким системам схема Рессела — Саундерса, строго говоря, неприменима [так называемый случай  $(j - j)$ -связи]. Однако для приближенных термодинамических расчетов ее все же можно использовать, объединяя состояния с одинаковыми  $L$  и  $S$  условно в один мультиплет. Именно таким образом мы поступали при составлении таблиц приложения 5.

Если температура высока в сравнении с энергиями мультиплетного расщепления, но низка в сравнении с энергиями электронного возбуждения, то экспоненциальные множители формулы (8.4) можно считать, кроме первого, равными нулю, и полный статистический вес сводится к статистическому весу основного электронного состояния

$$g \approx (2L + 1)(2S + 1). \quad (8.5)$$

Как правило, энергии возбуждения тем выше, чем выше энергия ионизации. Энергия же отрыва первого электрона

Всегда значительно ниже, чем последующих. По мере отрыва электронов возрастает заряд атомного остатка и он более прочно удерживает следующие электроны. Поэтому при расчете равновесия ионизации обычно достаточно учитывать возбужденные состояния только исходного атома (или иона), а для конечного — ограничиться статистическим весом основного состояния. В большинстве случаев у исходного атома достаточно учитывать только первое возбужденное состояние. Тогда формула Саха (5.11) принимает вид

$$\frac{n_e n_i}{n_a} \approx \frac{2g_i}{g_0 + g_1 e^{-\frac{\mathcal{E}_1}{T}}} 3 \cdot 10^{21} T_{30}^{3/2} e^{-\frac{J}{T}}, \quad (8.6)$$

где  $g_i$  — статистический вес основного состояния иона;  $g_0$  и  $g_1$  — статистические веса основного и первого возбужденного состояния атома;  $\mathcal{E}_1$  — энергия возбуждения. Для многоступенчатой ионизации роль атома играет исходный ион.

## 9. Расходимость и обрезание полного статистического веса

Энергии возбуждения электронных уровней сходятся к пределу ионизации. Это значит, что с приближением к энергии ионизации возбужденные уровни становятся все гуще. Плотность уровней (число их на единицу интервала энергии) с приближением к пределу ионизации стремится к бесконечности. В частном случае водородного атома или водородоподобного иона энергии электронного возбуждения зависят только от главного квантового числа  $k$  (обычно принято обозначение  $n$ , но оно означает у нас концентрацию электронов) и выражаются формулой

$$\mathcal{E}_k = -\frac{J}{k^2}, \quad (9.1)$$

если считать за нуль энергию свободных электрона и иона, или

$$\mathcal{E}_k = J \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right), \quad (9.2)$$

если считать за нуль энергию основного состояния (т. е. принятый нами индивидуальный нуль энергии).

Если температура низка в сравнении с энергией ионизации, то члены суммы в формуле (8.1) быстро уменьшаются по величине и после немногих первых членов становятся пренебрежимо малыми. Таким образом, возникает впечатление, что при не слишком высоких температурах полный статистический вес быстро сходится. Но в действительности он ведет себя как асимптотический ряд. (Так называются в математике ряды, первые члены которых быстро уменьшаются, но полная сумма всех членов ряда расходится.) В этом легко убедиться для общего случая следующим рассуждением. Вблизи энергии ионизации существует бесконечное множество возбужденных уровней, энергии которых (отсчитанные от индивидуального нуля) близки к энергии ионизации и асимптотически к ней стремятся. Каждый из этих уровней дает в полном статистическом весе член. Как бы ни был мал каждый из этих членов, они не стремятся к нулю, а число их бесконечно велико, вследствие чего сумма расходится. Для водородного или водородоподобного атома или иона полный статистический вес

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} 2k^2 e^{-\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \frac{J}{T}}, \quad (9.3)$$

откуда очевидно, что он расходится.

Практически всегда пользуются тем, что называется асимптотической сходимостью, т. е. берут сумму нескольких первых членов, практически не зависящую в некоторых пределах от числа взятых членов. Однако желательнее как-то обосновать эту процедуру и выяснить принципиальный вопрос: как можно пользоваться формулой Саха, если в нее входит по существу расходящаяся величина. Ответ заключается в том, что расходимость возникает только для изолированного атома в бесконечном пространстве. По мере того как энергия возбуждения приближается к энергии ионизации, неограниченно возрастают радиусы электронных орбит. В результате взаимодействия с соседними атомами число уровней оказывается конечным. Устранение расходимости полного статистического веса достигается посредством «обрезания» его на некотором верхнем уровне.

Для высших возбужденных уровней всегда можно пользоваться, как приближенной, водородоподобной формулой (9.3). Возбужденный электрон находится далеко от

атомного остатка, который по отношению к нему можно рассматривать как точечный заряд\*, а это и означает водородоподобность. Обрезание полного статистического веса сводится к нахождению верхнего значения главного квантового числа  $k_m$ . После этого полный статистический вес

$$g = \sum_{k=1}^{k=k_m} g_k e^{-\frac{\mathcal{E}_k}{T}}. \quad (9.4)$$

Для нахождения  $k_m$  обычно используются три предположения:

- 1) наивысший тот уровень, для которого радиус электронной орбиты равен среднему расстоянию между частицами;
- 2) наивысший тот уровень, для которого этот радиус равен длине экранирования (дебаевской длине)  $l_D$ ;
- 3) наивысший тот уровень, выше которого внутренний штарк-эффект приводит к слиянию уровней.

Вопрос об обрезании полного статистического веса тесно связан с вопросом о снижении эффективной энергии ионизации вследствие взаимодействия между частицами. Как для того, так и для другого нужно знать значение  $k_m$ .

Отступление плазмы от законов идеального газа, т. е. кулоновское взаимодействие между частицами, облегчает ионизацию. Вследствие этого в формулу Саха́ следует подставлять вместо истинной энергии ионизации ее уменьшенное эффективное значение

$$J^* = J - \Delta J. \quad (9.5)$$

Поправка  $\Delta J$  определяется двумя эффектами: снижением энергии конечного состояния вследствие кулоновского взаимодействия (рис. 2 справа) и слиянием высших возбужденных уровней (рис. 2 слева). Первый эффект приводит к поправке  $\Delta J$ , равной сумме кулоновских энергий иона и электрона, находимых по формуле (2.9). Для первой ступени ионизации эти энергии равны и дают поправку к энергии ионизации

$$\Delta J = 2 \sqrt{\pi} e^3 \sqrt{\frac{n}{T}} = 1,93 \cdot 10^{-10} \sqrt{\frac{n}{T}}, \quad (9.6)$$

---

\* Атомным остатком называется совокупность ядра и всех остальных электронов, кроме рассматриваемого.

где концентрация  $n$  выражена в  $\text{см}^{-3}$ , температура и энергия—в эв. Второй эффект связан с наличием в плазме *флуктуирующих микрополей*, т. е. нерегулярно меняющихся локальных электрических полей, возбуждаемых заряженными частицами.

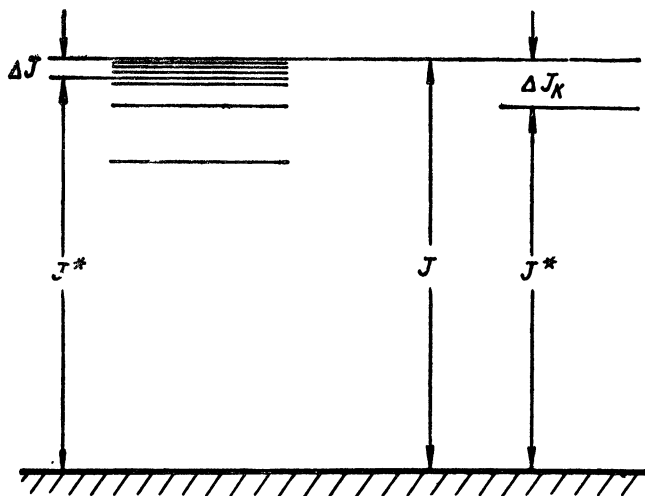


Рис. 2. Снижение энергии ионизации в неидеальной плазме.

Амплитуда напряженности этих полей

$$\tilde{E} \sim \frac{e}{r_0^2} \sim en^{2/3}, \quad (9.7)$$

где  $r_0$  — среднее расстояние между соседними частицами,  $n$  — концентрация частиц в плазме. Их воздействие проявляется в спектрах в виде слияния спектральных линий, испускаемых с верхних возбужденных уровней. Значение главного квантового числа, при котором происходит слияние линий, может быть найдено, если приравнять расстояние между соседними водородоподобными уровнями

$$\Delta \mathcal{E} \sim \frac{e^2}{k^3 a_0} \quad (9.8)$$

и энергию, которую атом приобретает в микрополях амплитуды порядка величины  $\tilde{E}$  (9.7). У атома водорода штарк-эффект линейный, т. е. атом ведет себя в электрическом

поде так, как если бы он имел собственный дипольный момент порядка

$$ea = k^2 ea_0. \quad (9.9)$$

В формуле (9.9)  $a = k^2 a_0$  — радиус орбиты с главным квантовым числом  $k$ ;  $a_0$  — боровский радиус. Если умножить эффективный дипольный момент (9.9) на амплитуду микрополей (9.7) и приравнять разности энергий (9.8), то для  $k_m$  получим выражение

$$k_m \approx a_0^{-2/15} n^{-2/15}. \quad (9.10)$$

Более точный учет статистики микрополей приводит к известной из астрофизики формуле Инглиса — Теллера

$$k_m = 1,04 \cdot 10^3 n^{-2/15}, \quad (9.11)$$

где концентрация  $n$  выражена в  $\text{см}^{-3}$ . Однако следует отличать слияние уровней, обусловленное их расширением вследствие малого времени жизни, от слияния наблюдаемых спектральных линий, которое может быть вызвано не только расширением, но и сдвигом уровней.

По существу рассматриваемый вопрос выходит за рамки формальной термодинамики, и решение его требует строгого определения того, какой электрон считать свободным и какой связанным. Это определение может в свою очередь зависеть от конкретной постановки задачи, для которой рассчитывается равновесие ионизации. Так, в задаче о проводимости плазмы свободными следует считать те электроны, которые способны проводить электрический ток. Пусть электрон находится на одном из высших уровней возбуждения. Формально он является связанным, но энергия его ионизации мала в сравнении с энергией его взаимодействия с другими частицами плазмы. В таких условиях слабо связанный электрон очень легко может оторваться и принять участие в переносе электрического тока. Другой типичной задачей является вопрос об излучении плазмы. Здесь связанными следует считать электроны, испускающие дискретные линии, а свободными — электроны, испускающие непрерывный спектр. Если электрон находится на одном из верхних возбужденных уровней, то у него есть определенная вероятность либо «свалиться» на какой-нибудь из нижних уровней с испусканием кванта дискретного спектра, либо подвергнуться ионизации, в результате которой он окажется

свободным и сможет испустить квант непрерывного спектра. Наиболее строгим представляется кинетическое решение вопроса. В зависимости от значения главного квантового числа  $k$  находятся вероятности переходов между различными уровнями, полная вероятность излучения с переходом на все нижележащие уровни и полная вероятность ионизации с учетом всех возможных процессов: удара электронов и быстрых ионов, ионизации тепловым и резонансным излучением, воздействия флуктуирующих микрополей, а также ионизации прямым действием электрических полей, которая для высших уровней также может оказаться существенной. С учетом всех перечисленных процессов вычисляются заселенности высших возбужденных уровней. Однако этот метод выходит уже за пределы формальной термодинамики, так как в расчет входят величины, характеризующие не равновесие, а вероятности различных процессов.

Наибольшей вероятностью обладают переходы между соседними уровнями (при которых как главное, так и азимутальное квантовые числа меняются на единицу). Поэтому основное значение имеет процесс, который можно назвать диффузией электрона по верхним возбужденным уровням. Ионизация быстро движущихся атомов может происходить и под действием постоянного магнитного поля. Согласно формуле (I.4.1) в сопутствующей системе координат на атом действует электрическое поле  $E^*$ . Если это поле создает на длине, равной радиусу электронной орбиты, разность потенциалов, достаточную для ионизации, то постоянное магнитное поле может оторвать электрон с высокого возбужденного уровня (лоренцева ионизация).

## Задачи к гл. II

**Задача 1.** Считая заданной константу равновесия ионизации, вычислить равновесную степень ионизации для вещества, являющегося малой примесью в плазме, и для вещества, являющегося основным компонентом плазмы. Степенью ионизации называется отношение концентрации ионов к начальной концентрации атомов  $n_i/n_0$ , где  $n_0 = n_a + n_i$ .

**Решение.** Для малой примеси концентрацию электронов можно считать заданной: она определяется ионизацией основного компонента плазмы. Тогда из формулы (4.9)

$$\frac{n_i}{n_0} = \frac{K}{K + n_e}.$$

Если степень ионизации мала, то она обратно пропорциональна общей электронной концентрации в плазме.

Для основного компонента плазмы концентрация электронов определяется самим равновесием ионизации. Для первой ступени ионизации  $n_e = n_i$ . В этом случае формула (4.9) дает

$$n_i^2 = K n_a.$$

Если степень ионизации велика, то заданной следует считать начальную концентрацию атомов  $n_0 = n_a + n_i$ . Тогда

$$n_i^2 = K (n_0 - n_i)$$

или

$$\left(\frac{n_i}{n_0}\right)^2 + \frac{K n_i}{n_0 n_0} - \frac{K}{n_0} = 0.$$

Степень ионизации есть положительный корень квадратного уравнения

$$\frac{n_i}{n_0} = -\frac{1}{2} \frac{K}{n_0} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{K}{n_0}\right)^2 + \frac{K}{n_0}}.$$

Если степень ионизации мала, то  $n_i \ll n_0$  и приближенно

$$n_i \approx \sqrt{K n_0}$$

или

$$\frac{n_i}{n_0} \approx \sqrt{\frac{K}{n_0}}.$$

В этом случае степень ионизации обратно пропорциональна корню квадратному из начальной концентрации.

**Задача 2.** Найти температурную зависимость равновесной концентрации электронов для слабоионизованной плазмы, имеющей основной компонент с энергией ионизации  $J$ .

**Решение.** Согласно результату предыдущей задачи, для основного компонента слабоионизованной плазмы

$$n_e = n_i \approx \sqrt{K}.$$

По формуле Саха температурная зависимость константы равновесия ионизации имеет вид

$$K \approx T^{3/2} e^{-\frac{J}{T}}.$$

Поскольку степень ионизации мала, то и возбужденных атомов будет немного, а следовательно, полные статистические веса совпадают со статистическими весами основных состояний и от температуры не зависят. Тогда

$$n_e \approx T^{3/4} e^{-\frac{J}{2T}}.$$

В узком температурном интервале удобно аппроксимировать зависимость степенной

$$n_e \approx T^\alpha.$$



**Задача 5.** Выразить концентрацию трижды ионизованного кислорода  $O^{IV}$  в плазме, где кислород присутствует в виде малой примеси.

**Решение.** Аналогично предыдущей задаче, но учитывая постоянные коэффициенты, получаем

$$\frac{n_{IV}}{n_I} = \frac{g_{IV}}{g_I} \frac{2^3}{n_e} \left( \frac{3 \cdot 10^{21}}{n_e} \right)^3 T^{9/2} e^{-\frac{J_I + J_{II} + J_{III}}{T}},$$

где по таблице приложения 5

$$g_I = 9 + 5 e^{-\frac{2,0}{T}} + e^{-\frac{4,2}{T}} + \dots,$$

$$g_{IV} = 6 + 10 e^{-\frac{15,7}{T}} + 2 e^{-\frac{20,3}{T}} + 6 e^{-\frac{22,2}{T}} + \dots,$$

$$J_I = 13,614; \quad J_{II} = 35,146; \quad J_{III} = 54,87.$$

**Задача 6.** Записать приближенно формулу Саха через дебройлевскую и комптоновскую длины волны электрона.

**Решение.** Дебройлевская длина волны электрона

$$\lambda = \frac{\hbar}{mv}.$$

В тепловом равновесии среднее значение скорости

$$v \sim \sqrt{\frac{T}{m}};$$

откуда

$$\lambda \sim \frac{\hbar}{\sqrt{mT}}.$$

Сопоставляя с формулой (5.10), заключаем, что формулу Саха можно приближенно записать как

$$\frac{n_i n_e}{n_a} \sim \frac{1}{\lambda^3} e^{-\frac{J}{T}}.$$

Произведение  $n_e \lambda^3 \approx \frac{n_e}{(mv)^3} \hbar^3$  порядка числа электронов в элементарной ячейке фазового пространства. Обозначив это число  $\tilde{n}_e$ , можем записать формулу Саха в виде

$$\frac{n_i}{n_a} \sim \frac{1}{\tilde{n}_e} e^{-\frac{J}{T}}.$$

Комптоновская длина волны электрона

$$\lambda_C = \frac{h}{mc}.$$

Через эту величину формула (5.10) запишется приближенно как

$$\frac{n_e n_i}{n_a} \approx \frac{1}{\lambda_C^3} \left( \frac{T}{mc^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{J}{T}}.$$

Входящая сюда величина  $mc^2$  есть собственная энергия электрона, равная 511 кэв. Комптоновская длина волны электрона  $2,4265 \times 10^{-10}$  см. Полученная формула удобна для грубых численных оценок.

**Задача 7.** Найти зависимость степени ионизации от концентрации для стационарного (но неравновесного) состояния ионизации в разреженной плазме, из которой излучение выходит свободно, так что ионизация происходит электронным ударом, а рекомбинация — с излучением. Ионизацией под действием излучения можно пренебречь из-за того, что излучение свободно выходит из системы, рекомбинацией при тройных столкновениях — из-за малой плотности плазмы.

**Решение.** Приравнявая выражения (4.1) и (4.6), получим

$$\frac{n_i}{n_a} = \frac{k_1}{k_2} = K^*,$$

где величина  $K^*$  уже не может быть найдена из термодинамики, а определяется сечениями процессов ионизации и рекомбинации. Стационарное состояние ионизации не зависит от концентрации электронов. Степень ионизации

$$\frac{n_i}{n_0} = \frac{K^*}{1 + K^*}$$

независимо от того, является ли рассматриваемое вещество малой примесью или основным компонентом плазмы.

## Глава III

### ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ

#### 1. Дрейфовое движение

Если на не слишком плотную плазму действуют достаточно сильные внешние поля, то в разумном приближении можно пренебречь внутренними полями, происходящими от взаимодействия частиц. В этом приближении можно рассматривать плазму как систему независимых заряженных частиц, движущихся по своим траекториям в заданных внешних полях. Единственным внутренним полем, которым никогда нельзя пренебрегать, является электрическое поле поляризации, возникающее вследствие разделения зарядов и обеспечивающее квазинейтральность плазмы.

Уравнение движения заряженной частицы в заданных внешних полях имеет вид

$$M \frac{dv}{dt} = \frac{Ze}{c} [v\mathbf{H}] + \mathbf{F}, \quad (1.1)$$

где  $M$  — масса частицы;  $Z$  — ее зарядовое число;  $\mathbf{V}$  — ее скорость;  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля;  $\mathbf{F}$  — равнодействующая всех остальных сил, действующих на частицу. Уравнение (1.1) векторное и, несмотря на кажущуюся его простоту, не поддается, кроме самых простейших случаев, аналитическому решению. Поэтому важнейшее значение в физике плазмы имеет приближенный метод решения уравнения (1.1), носящий название дрейфового приближения. Этот метод применим, если движение происходит в достаточно сильном внешнем магнитном поле и взаимодействием между частицами можно пренебречь. При этих условиях движение частицы можно разложить на три составляющие:

1) быстрое *циклотронное вращение* вокруг силовых линий магнитного поля;

2) *дрейфовое движение* центра циклотронной окружности поперек магнитного поля;

3) *свободное движение* вдоль силовой линии, на которое магнитное поле не действует.

Иногда дрейфом называют как вторую, так и третью составляющие. Тогда для того движения, которое мы называем дрейфовым, пользуются термином «дрейф поперек поля».

Если сила  $F$  в уравнении (1.1) отсутствует и магнитное поле однородно, то движение частицы представляет собой сочетание циклотронного вращения и движения вдоль силовой линии. В зависимости от характера силы  $F$  на эту простейшую картину накладываются различные виды дрейфового движения. Различают пять разновидностей дрейфа.

1. Электрический дрейф: сила  $F$  есть сила постоянного электрического поля.

Далее следуют две разновидности дрейфа в неоднородном магнитном поле:

2. Градиентный дрейф: поле меняется по величине.

3. Центробежный дрейф: поле меняется по направлению.

В качестве двух остальных видов дрейфового движения рассматриваются:

4. Поляризационный дрейф: в переменном по времени электрическом поле.

5. Дрейф под действием сил неэлектромагнитной природы, например силы тяжести (гравитационный дрейф).

Дрейфовое движение обладает замечательными свойствами. Скорость направлена не вдоль действующей силы, а перпендикулярно к ее направлению и к направлению магнитного поля. Постоянная сила вызывает не равноускоренное, а равномерное движение. Сила электрического поля вызывает движение ионов и электронов в одном направлении, т. е. течение плазмы как целого, а неэлектрические силы возбуждают токи.

Своеобразные свойства дрейфового движения на первый взгляд могут показаться противоречащими законам механики Ньютона. Но разрешение этого парадокса элементарно: дрейф представляет собой *усредненное* движение. Истинное движение, основным компонентом которого является быстрое циклотронное вращение, подчиняется, конечно, обычным законам механики.

Дрейфовое движение является следствием циклотронного вращения. Для того чтобы движение поперек поля имело дрейфовый характер, циклотронное вращение не должно существенно нарушаться. Для этого требуется выполнение двух условий:

1) внешние поля должны мало меняться на длине, равной циклотронному радиусу, и за время, равное периоду циклотронного вращения;

2) взаимодействие между частицами не должно заметным образом возмущать циклотронное вращение.

Первое условие, накладываемое на внешние поля, носит название условия адиабатичности.

Второе условие, накладываемое на взаимодействие между частицами, носит название *условия замагниченности*. Количественно они выражаются формулами (I.13.13) или (I.13.14) и (I.13.15), которые мы уже рассматривали выше. Таким образом, дрейфовое движение есть адиабатическое движение частиц в замагниченной плазме. Мерой взаимодействия между частицами может считаться эффективная частота столкновений, равная обратной величине среднего времени передачи импульса

$$\nu = \frac{1}{\tau}. \quad (1.2)$$

Условие замагниченности для частицы с циклотронной частотой  $\omega_c$  запишется как

$$\omega_c \gg \nu. \quad (1.3)$$

Частицы, для которых это условие выполнено, называются замагниченными. Ввиду того что циклотронная частота у ионов в тысячи раз меньше, чем у электронов, условие замагниченности для электронов осуществляется гораздо легче. Если условие (1.3) выполнено как для электронов, так и для ионов, то все частицы плазмы принимают участие в дрейфовом движении. Возможен и нередко встречается случай, когда

$$\omega_e \gg \nu \gg \omega_i, \quad (1.4)$$

т. е. электроны замагничены, а ионы нет. В этом случае в дрейфовом движении принимают участие только электроны.

Приближенный метод рассмотрения движения частиц в плазме посредством разделения его на циклотронное вращение и дрейфовое движение носит название *дрейфового*

приближения. Во введении (гл. I) при рассмотрении модели сплошной среды мы встречались уже с дрейфовым приближением, для применимости которого необходимо было условие замагниченности, тождественное с введенным здесь. В модели сплошной среды дрейфовое приближение совпадало с приближением идеальной проводимости. Но идеальная проводимость означает отсутствие столкновений, т. е.  $\nu = 0$ . Таким образом, если выполнено условие идеальной проводимости, то условие замагниченности заведомо выполняется, т. е. движение имеет дрейфовый характер.

## 2. Наглядное объяснение дрейфового движения

Чтобы просто и наглядно представить природу дрейфового движения и оценить величину дрейфовой скорости, рассмотрим циклотронную окружность (рис. 3). Сила

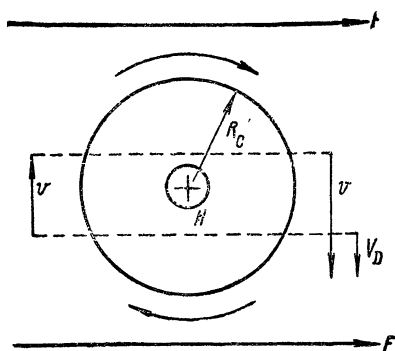


Рис. 3. Схема происхождения дрейфового движения.

$F_{\perp}$ , действующая поперек магнитного поля, в одной половине циклотронного периода действует вдоль направления вращения, в другой — против этого направления. Пусть сила  $F_{\perp}$  действует слева направо, а циклотронное вращение совершается по часовой стрелке. Тогда в верхней половине окружности сила действует по направлению вращения, в нижней — против. В результате частица будет двигаться сверху вниз быстрее, чем снизу

вверх. Разность этих скоростей приведет к смещению циклотронного кружка с постоянной скоростью в направлении, перпендикулярном как к магнитному полю, так и к действующей силе. Это смещение и называется дрейфом. Оценим величину скорости дрейфа. Сила  $F_{\perp}$  создает ускорение  $F_{\perp}/M$ , где  $M$  — масса частицы. За время циклотронного периода приращение скорости  $\Delta v \sim F_{\perp}/M\omega_c$ . В рассмотренном примере скорость вращения в направлении вниз будет на величину такого порядка больше,

вверх — меньше средней. Разность этих скоростей дает скорость дрейфа, величина которой

$$|v| \approx \frac{F_{\perp}}{M\omega_c} \quad (2.1)$$

или, если подставить значение циклотронной частоты,

$$|v| \approx c \frac{F_{\perp}}{ZeH}. \quad (2.2)$$

При оценке мы опускали множители порядка единицы, но, как мы сейчас увидим, результат случайно оказался точным. Чтобы узнать не только величину, но и направление дрейфовой скорости, нужно записать ее выражение в векторной форме, что мы сделаем дальше. Но можно очень легко найти направление дрейфовой скорости с помощью приведенного простого рассуждения. Из него сразу следует, что если циклотронное вращение происходит по часовой стрелке, а сила  $F_{\perp}$  действует слева направо, то дрейфовая скорость будет направлена сверху вниз. Обращение любого из направлений — магнитного поля или циклотронного вращения — обращает направление дрейфовой скорости. При обращении обоих направлений направление дрейфовой скорости сохраняется.

### 3. Количественное рассмотрение дрейфового движения

Направим ось  $z$  вдоль магнитного поля и будем считать магнитное поле и силу  $F_{\perp}$  постоянными в пространстве и во времени. Распишем уравнение (1.1) в проекциях:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{Ze}{Mc} H v_y + \frac{F_x}{M} \equiv \omega_c v_y + \frac{F_x}{M}; \quad (3.1)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{Ze}{Mc} H v_x + \frac{F_y}{M} \equiv -\omega_c v_x + \frac{F_y}{M}. \quad (3.2)$$

Удобно записать эту систему в комплексном виде

$$\frac{d}{dt} (v_x + i v_y) = -i \omega_c (v_x + i v_y) + \frac{F_x + i F_y}{M}. \quad (3.3)$$

Решение этого неоднородного уравнения состоит из общего решения однородного уравнения

$$v_x + i v_y = \text{const } e^{-i(\omega_c t + \varphi)}, \quad (3.4)$$

представляющего циклотронное вращение, и частного решения  $v$  неоднородного уравнения, представляющего дрейфовое движение. Если сила  $F_{\perp}$  постоянна во времени и в пространстве, то частное решение легко получить, приравняв правую часть нулю, откуда

$$v_y = -\frac{F_x}{M\omega_c} = -c \frac{F_x}{ZeH}; \quad (3.5)$$

$$v_x = \frac{F_y}{M\omega_c} = c \frac{F_y}{ZeH}, \quad (3.6)$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{v}_{\perp} = c \frac{[\mathbf{F}\mathbf{H}]}{ZeH^2}. \quad (3.7)$$

При постоянной силе  $F_{\perp}$  разделение движения частицы на циклотронное вращение и дрейфовое движение является точным. Если сила  $F_{\perp}$  медленно меняется в пространстве и во времени, то этот результат будет приближенным. Приближение тем ближе к действительности, чем лучше выполняется условие адиабатичности. Величина дрейфовой скорости  $v$ , согласно формулам (3.5)—(3.6), точно совпадает с оценкой (2.2), полученной наглядным методом.

Отсюда следует, что физическая природа дрейфового движения описывается рассмотренной выше наглядной моделью. Направление дрейфовой скорости можно определить с помощью формулы (3.7) по правилам векторного умножения.

Векторное выражение для дрейфовой скорости можно получить непосредственно из уравнения (1.1), положив в нем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_d, \quad (3.8)$$

где  $\mathbf{v}_c$  — скорость циклотронного вращения, удовлетворяющая уравнению

$$M \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \frac{Ze}{c} [\mathbf{v}_c \mathbf{H}]. \quad (3.9)$$

Скорость же  $\mathbf{v}_d$  медленно меняется со временем, так что производной ее по времени можно пренебречь. Тогда для дрейфовой скорости  $\mathbf{v}_d$  получим

$$[\mathbf{v}_d \mathbf{H}] = -c \frac{\mathbf{F}}{Ze}. \quad (3.10)$$

Умножение векторно справа на  $\mathbf{H}$  дает

$$[\mathbf{v}_d \mathbf{H}] \mathbf{H} = -c \frac{[\mathbf{F}\mathbf{H}]}{Ze}, \quad (3.11)$$

или

$$[\mathbf{H}[\mathbf{v}_d \mathbf{H}]]_i = c \frac{[\mathbf{F}\mathbf{H}]}{Ze}. \quad (3.12)$$

Раскрывая двойное векторное произведение, получаем

$$\mathbf{v}_d H^2 - \mathbf{H}(\mathbf{H}\mathbf{v}_d) = -c \frac{[\mathbf{F}\mathbf{H}]}{Ze}. \quad (3.13)$$

Если скорость  $\mathbf{v}_d$  перпендикулярна к  $\mathbf{H}$ , то второй член слева равен нулю, и получается

$$\mathbf{v}_\perp H^2 = c \frac{[\mathbf{F}\mathbf{H}]}{Ze} \quad (3.14)$$

в согласии с результатом (3.7). Удобно записать плотность тока, переносимого дрейфовым движением

$$\mathbf{j}_k = n_k Z_k e \mathbf{v}_k = c \frac{n_k [\mathbf{F}_k \mathbf{H}]}{H^2}. \quad (3.15)$$

Индекс  $k$  означает, что речь идет о токе, переносимом частицами данного вида, на которые действует сила  $\mathbf{F}_k$ , зависящая, вообще говоря, от массы и заряда частицы. Полная плотность тока находится суммированием по индексу  $k$ , нумерующему как электроны, так и ионы.

#### 4. Электрический дрейф

Простейший случай дрейфового движения тот, когда силой  $\mathbf{F}_\perp$  является сила электрического поля. Такой дрейф называется электрическим. Его называют также дрейфом в скрещенных полях, так как электрическое поле здесь направлено поперек магнитного. Электрическое поле  $\mathbf{E}$  действует на частицу с зарядовым числом  $Z$  с силой

$$\mathbf{F} = Ze \mathbf{E}. \quad (4.1)$$

Отсюда скорость электрического дрейфа согласно формуле (3.7)

$$\mathbf{v}_E = c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{H^2}, \quad (4.2)$$

или по абсолютному значению

$$|v_E| = c \frac{E}{H}. \quad (4.3)$$

В практических единицах

$$|v_E|_{\left[ \frac{\text{см}}{\text{сек}} \right]} = 10^8 \frac{E_{\left[ \frac{\text{э}}{\text{см}} \right]}}{H_{\left[ \text{эрстед} \right]}}.$$

Очевидно, эти формулы применимы лишь при условии, что в гауссовой системе единиц напряженность электрического поля значительно меньше напряженности магнитного

$$E \ll H. \quad (4.4)$$

В противном случае скорость дрейфа будет приближаться к скорости света и нужно будет пользоваться релятивист-

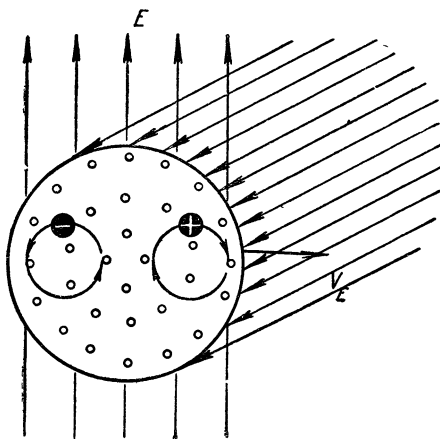


Рис. 4. Электрический дрейф.

ской механикой. Особенность формулы (4.2) заключается в том, что при выводе ее зарядовое число сокращается. Вследствие этого скорость электрического дрейфа не зависит от заряда частицы. Электроны и ионы дрейфуют при этом в одном направлении и с одинаковой скоростью. Если магнитное поле направлено к нам, а электрическое поле вверх, то все частицы дрейфуют вправо (рис. 4). Таким образом, если и электроны, и ионы замагничены, то

Электрический дрейф не приводит к разделению зарядов, а вызывает только движение плазмы как целого. Скорость дрейфа совпадает с той скоростью, которая получалась в модели проводящей жидкости из условия идеальной проводимости [формула (1.4.4)]. В полностью замагниченной плазме электрический дрейф происходит таким же образом, как в идеально проводящей жидкости.

Картина резко изменяется в случае, если выполнено неравенство (1.4.), т. е. если замагничены только электроны, но не ионы. В этом случае дрейфуют только электроны и электрический дрейф приводит к разделению зарядов.

## 5. Дрейф в неоднородном магнитном поле

Строгое рассмотрение движения заряженных частиц в неоднородных магнитных полях требует громоздких математических выкладок. Мы покажем, как получить правильные результаты из нестрогих, но наглядных допущений.

Изменение напряженности магнитного поля по величине (градиент поля) приводит к изменению циклотронного радиуса частицы  $R_c$ , что и является причиной *градиентного дрейфа*.

Ввиду того что циклотронное вращение происходит в плоскости, перпендикулярной к силовым линиям, дрейф вызывается только градиентом магнитного поля поперек его направления, который мы будем называть поперечным градиентом и обозначать посредством  $\nabla_{\perp} H^*$ . Если бы половина циклотронного оборота совершалась с малым радиусом  $R_1$ , а половина — с большим радиусом  $R_2$ , то среднее положение частицы смещалось бы за один оборот на расстояние  $\Delta x = 2(R_2 - R_1) = 2\Delta R$  (рис. 5). Смещение за единицу времени (т. е. дрейфовая скорость) есть смещение за период, умноженное на частоту  $\frac{\omega}{2\pi}$ . Если учесть, что циклотронный радиус меняется не скачком, а непрерывно, то оказывается\*\*, что  $\Delta x = \pi \Delta R_c$ , и для скорости градиентного дрейфа получается простой результат

$$|v_H| = \frac{1}{2} \Delta R_c \omega_c, \quad (5.1)$$

\* Под знаком градиента стоит, конечно, не *вектор* напряженности магнитного поля, а ее *величина*.

\*\* См. задачу 1.

где  $\Delta R_c$  — изменение циклотронного радиуса на его собственной длине

$$\Delta R_c = R_c \nabla_{\perp} R_c = - \frac{R_c^2}{H} \nabla_{\perp} H,$$

так как циклотронный радиус  $R_c = M c v_{\perp} / ZeH$  обратно пропорционален напряженности поля. Отсюда

$$|v_{\text{н}}| = \frac{1}{2} \frac{R_c^2 \omega_c}{H} \nabla_{\perp} H.$$

Подставляя  $\omega_c = v_{\perp} / R_c$ , получаем окончательно

$$|v_{\text{н}}| = \frac{1}{2} \frac{R_c v_{\perp}}{H} \nabla_{\perp} H. \quad (5.2)$$

Если магнитное поле направлено к нам, то положительные частицы движутся по часовой стрелке, отрицательные —

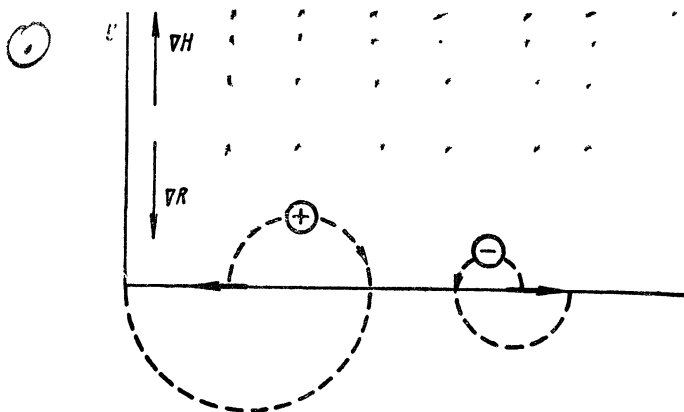


Рис. 5. Схема происхождения градиентного дрейфа.

против часовой стрелки. Если при этом напряженность магнитного поля возрастает вверх, то положительные частицы будут дрейфовать влево, а отрицательные — вправо, как видно из рис. 5 и 6.

Формула (5.2) определяет скорость градиентного дрейфа только по величине, но не по направлению. Чтобы определить направление дрейфовой скорости, нужно записать формулу (5.2) в векторной форме. Составляющую градиента в направлении, перпендикулярном к  $H$ , можно пред-

ставить как векторное произведение

$$\nabla_{\perp} H = [\nabla H \cdot \mathbf{h}] = -[\mathbf{h} \nabla H],$$

где  $\mathbf{h}$  — единичный вектор в направлении магнитного поля. Подстановка в формулу (5.2) дает выражение скорости градиентного дрейфа в векторном виде

$$v_{\text{н}} = \frac{1}{2} R_c v_{\perp} \frac{[\mathbf{h} \nabla H]}{H} = \frac{1}{2} R_c v_{\perp} \frac{[\mathbf{H} \nabla H]}{H^2}. \quad (5.2a)$$

С помощью рис. 5 можно проверить, что эта формула дает правильное направление дрейфовой скорости.

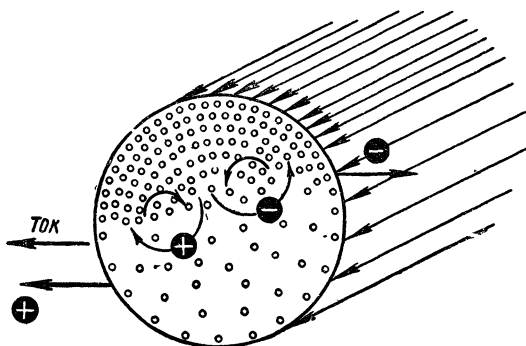


Рис. 6. Градиентный дрейф.

Магнитное поле направлено к нам и возрастает вверх. Положительные частицы дрейфуют влево, отрицательные — вправо. Дрейфовый ток направлен влево.

Подстановка в формулу (5.2a) значения  $R_c$  дает

$$\mathbf{v}_{\text{н}} = c \frac{M v_{\perp}^2}{2ZeH^3} [\mathbf{H} \nabla H]. \quad (5.3)$$

Заметим, что тождественный результат можно получить из общего выражения дрейфовой скорости (3.7), если подставить в него фиктивную силу

$$\mathbf{F} = -\mu \nabla H, \quad (5.4)$$

где  $\mu$  — магнитный момент орбиты, определенный как отношение кинетической энергии вращения к напряженности поля

$$\mu = \frac{M v_{\perp}^2}{2H}. \quad (5.5)$$

При этом, однако, приходится рассматривать магнитный момент как скаляр. Формула (5.4) очень удобна и дает совершенно точный результат для скорости дрейфа, но не имеет прямого физического смысла.

Изменение направления магнитного поля может быть описано как искривление магнитных силовых линий. Центр циклотронного кружка движется по искривленной силовой линии и можно считать, что на него действует центробежная сила, величина которой

$$F_c = \frac{Mv_{\parallel}^2}{R}, \quad (5.6)$$

где  $R$  — радиус кривизны силовой линии. Эта сила направлена вдоль радиуса кривизны, т. е. по нормали к силовой линии. Следовательно, ее можно подставлять в формулу (2.2) как  $F_{\perp}$ . Величина скорости центробежного дрейфа определится согласно формуле (2.2) как

$$|v_c| = c \frac{F_c}{ZeH} = c \frac{Mv_{\parallel}^2}{ZeHR}. \quad (5.7)$$

Чтобы найти направление дрейфовой скорости, нужно воспользоваться векторной формулой (3.7). Если рассматривать радиус кривизны как вектор  $\mathbf{R}$  (радиус-вектор), направленный от центра кривизны к силовой линии, то в векторном виде центробежная сила

$$\mathbf{F} = \frac{Mv_{\parallel}^2}{R^2} \mathbf{R} \quad (5.6a)$$

и после подстановки в формулу (3.7) получится векторная формула для скорости центробежного дрейфа

$$\mathbf{v}_c = c \frac{Mv_{\parallel}^2}{ZeH^2 R^2} [\mathbf{R}\mathbf{H}]. \quad (5.8)$$

Если магнитное поле направлено к нам и выпукло вверх, то положительные частицы дрейфуют вправо, отрицательные влево (рис. 7).

Скорости градиентного и центробежного дрейфов зависят от заряда частицы, так что противоположно заряженные частицы дрейфуют в противоположных направлениях. Следовательно, неоднородность магнитного поля возбуждает в плазме дрейфовые токи, приводящие к разделению

зарядов. Плотность дрейфового тока

$$\mathbf{j} = Zen \mathbf{v}_d, \quad (5.9)$$

откуда для градиентного дрейфа

$$\mathbf{j}_H = c \frac{nMv_{\perp}^2}{2H^3} [\mathbf{H}\nabla H] \quad (5.10)$$

и для центробежного

$$\mathbf{j}_c = c \frac{nMv_{\parallel}^2}{H^2 R^2} [\mathbf{R}\mathbf{H}], \quad (5.11)$$

где  $n$  — концентрация, т. е. число частиц в единице объема.

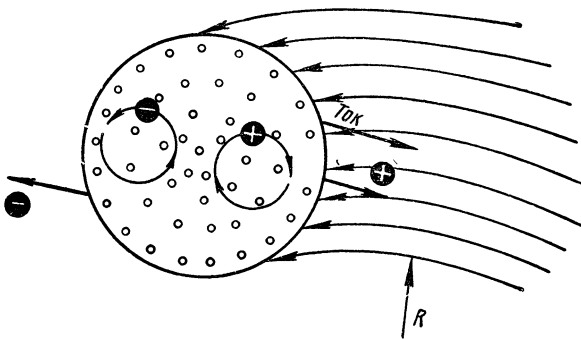


Рис. 7. Центробежный дрейф.

Магнитное поле направлено к нам и выпукло вверх. Положительные частицы дрейфуют вправо, отрицательные—влево. Дрейфовый ток направлен вправо.

Эти выражения можно упростить, если ввести продольное  $P_{\parallel}$  и поперечное  $P_{\perp}$  давления плазмы. Давление равно произведению концентрации на среднюю энергию, приходящуюся на две степени свободы. В продольном направлении частица имеет одну степень свободы, в поперечном — две, откуда

$$P_{\parallel} = nMv_{\parallel}^2; \quad (5.12)$$

$$P_{\perp} = n \frac{Mv_{\perp}^2}{2}. \quad (5.13)$$

Таким образом, градиентный дрейф определяется поперечным, а центробежный — продольным давлением плазмы

согласно формулам

$$\mathbf{j}_n = c \frac{P_{\perp}}{H^3} [\mathbf{H} \nabla H]; \quad (5.14)$$

$$\mathbf{j}_c = c \frac{P_{\parallel}}{H^2 R^2} [\mathbf{R}\mathbf{H}]. \quad (5.15)$$

Эти формулы дают суммарный ток, переносимый частицами всех родов, поскольку как давления, так и дрейфовые токи складываются. По величине

$$|j_n| = c \frac{P_{\perp}}{H^2} |\nabla H| = c \frac{P_{\perp}}{HL}, \quad (5.16)$$

где

$$L = \frac{H}{\nabla H}$$

есть характерная длина изменения магнитного поля;

$$|j_c| = c \frac{P_{\parallel}}{HR}, \quad (5.17)$$

где  $R$  — радиус кривизны силовой линии.

Чтобы не путать вектор  $\mathbf{H}$  с его величиной, иногда пишут формулы для градиентного дрейфа в несколько ином виде, заменяя  $\nabla H$  на  $\frac{1}{2H} \nabla H^2$ . Тогда формула (5.3) примет вид

$$\mathbf{v}_n = c \frac{Mv_{\perp}^2}{4ZeH^4} [\mathbf{H} \nabla H^2], \quad (5.18)$$

а формула (5.14) —

$$\mathbf{j}_n = c \frac{P_{\perp}}{2H^4} [\mathbf{H} \nabla H^2]. \quad (5.19)$$

## 6. Поляризационный дрейф

Если частицы испытывают постоянное или медленно меняющееся ускорение  $\dot{\mathbf{v}}$ , то уравнение движения можно записать в виде

$$M \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \dot{\mathbf{v}} \right) = \frac{Ze}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] + \mathbf{F}, \quad (6.1)$$

что совпадает с уравнением (1.1), если к силе  $\mathbf{F}$  добавить инерционную силу

$$\mathbf{F}^* = -M\dot{\mathbf{v}}. \quad (6.2)$$

Инерционные силы вызывают инерционный дрейф, проявляющийся в соответственном дрейфовом токе. Важнейшим случаем инерционного дрейфа является *поляризационный дрейф*, где ускорение происходит от изменения скорости электрического дрейфа, вызванного переменным электрическим полем. Если скорость изменения электрического поля есть  $\dot{\mathbf{E}}$ , то электрический дрейф происходит с ускорением

$$\mathbf{v}_E = c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{H^2}, \quad (6.3)$$

создающим инерционную силу

$$\mathbf{F}^* = -Mc \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{H^2}. \quad (6.4)$$

Эта сила, согласно формуле (3.7), вызывает дрейф частиц со скоростью

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\pi &= -Mc^2 \frac{[[\dot{\mathbf{E}}\mathbf{H}]\mathbf{H}]}{ZeH^4} = Mc^2 \frac{[\mathbf{H}[\dot{\mathbf{E}}\mathbf{H}]]}{ZeH^4} = \\ &= Mc^2 \frac{\dot{\mathbf{E}}}{ZeH^2} - Mc^2 \frac{(\dot{\mathbf{E}}\mathbf{H})}{ZeH^4} \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Рассмотрим простейший случай, когда переменное электрическое поле направлено поперек магнитного. В этом случае второй член обращается в нуль и скорость поляризационного дрейфа оказывается направленной вдоль электрического поля

$$\mathbf{v}_\pi = \frac{Mc^2}{ZeH^2} \dot{\mathbf{E}}. \quad (6.6)$$

Таким образом, поперечное переменное электрическое поле вызывает в замагниченной плазме дрейфовый ток плотностью

$$\mathbf{j}_\pi = \frac{\sum n_k M_k c^2}{H^2} \dot{\mathbf{E}} = -\frac{\rho c^2}{H^2} \dot{\mathbf{E}}, \quad (6.7)$$

где  $\rho = \sum_k M_k n_k$  — плотность плазмы.

Плотность дрейфового тока пропорциональна массе частицы, так что он переносится практически целиком ионами. Этот дрейфовый ток во многих случаях оказывается гораздо существеннее, чем ток, происходящий от поперечной проводимости плазмы,

Дрейфовый ток пропорционален не самой напряженности электрического поля, а скорости ее изменения. В этом смысле он аналогичен току смещения  $\mathbf{j}_d$ , возникающему при поляризации диэлектриков. Согласно уравнению Максвелла

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_p. \quad (6.8)$$

Из сопоставления с формулой (6.7) следует, что в переменном электрическом поле, направленном поперек магнитного, плазму можно рассматривать как среду с электрической проницаемостью

$$\varepsilon_{\perp} = 1 + \frac{4\pi\rho c^2}{H^2}. \quad (6.9)$$

Если  $\varepsilon_{\perp} \gg 1$ , то соответствующий показатель преломления

$$n_{\perp} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}} \approx \frac{c\sqrt{4\pi\rho}}{H}. \quad (6.10)$$

Ему отвечает фазовая скорость волны

$$u_A = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (6.11)$$

называемая *альфвеновской скоростью*.

Эти результаты справедливы, если справедливо дрейфовое приближение, т. е. движение можно считать адиабатическим. Для этого частоты рассматриваемых процессов должны быть малы в сравнении с наименьшей из циклотронных частот, т. е. с ионной циклотронной частотой  $\omega_i$ .

## 7. Ток намагничивания

В неоднородной плазме, кроме тока проводимости и дрейфовых токов, имеется еще один механизм возникновения электрического тока, связанный с пространственной неоднородностью. Возникающий от этого ток называется током намагничивания. При этом под неоднородностью понимается переменность в пространстве любой из основных величин, характеризующих плазму: концентрации заряженных частиц, температуры (или средней кинетической энергии циклотронного вращения) и напряженности магнитного поля. Однородной мы называем только такую плазму, у которой все эти величины не меняются в пространстве.

Переменность хотя бы одной из них приводит к возникновению тока намагничивания. Мы уже видели, что вращение заряженных частиц вокруг магнитных силовых линий создает магнитный момент орбиты, который мы определили только по величине как

$$\mu = \frac{Mv_{\perp}^2}{2H}. \quad (7.1)$$

Для количественного описания тока намагничивания необходимо определить магнитный момент циклотронной орбиты не только по величине, но и по направлению, т. е. рассматривать его как вектор. Заметим, что магнитный момент замкнутого тока  $J$ , обтекающего виток площади  $S$

$$\mu = \frac{JS}{c} \mathbf{n}, \quad (7.2)$$

где  $\mathbf{n}$  — правовинтовая нормаль к плоскости витка. Если ток течет по часовой стрелке, то магнитный момент его направлен от нас. Ток, переносимый вращающимся зарядом, равен произведению заряда  $Ze$  на число оборотов  $\omega_c/2\pi$

$$J = \frac{Ze\omega_c}{2\pi}. \quad (7.3)$$

Площадь орбиты

$$S = \pi R_c^2 = \pi \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c^2}, \quad (7.4)$$

где  $v_{\perp}$  — линейная скорость вращения в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Подстановка в формулу (7.2) дает

$$\mu = \frac{Ze}{2c} \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c} \mathbf{n}, \quad (7.5)$$

что после подстановки значения  $\omega_c$  позволит получить результат, тождественный с результатом формулы (7.1). Частицы с зарядами разных знаков вращаются в противоположных направлениях, но токи, переносимые ими, направлены одинаково, а следовательно, одинаково направлены и магнитные моменты. Как мы видели, если магнитное поле направлено к нам, то положительные частицы вращаются по часовой стрелке, отрицательные — против. Ток, переносимый теми и другими, направлен по часовой

стрелке. Магнитный момент этого тока (так же как и поле, возбуждаемое им) направлен от нас, т. е. против направления внешнего магнитного поля. Таким образом, циклотронное вращение создает диамагнетизм плазмы. Магнитный момент циклотронного вращеня для всех частиц направлен против внешнего поля  $H$  и в векторной форме формулу (7.1) следует писать как

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{Mv_{\perp}^2}{2H^2} \mathbf{H} \quad (7.6)$$

независимо от знака заряда частицы. Магнитное поле, создаваемое циклотронным вращением, всегда ослабляет внешнее поле. Магнитная индукция внутри плазмы

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'.$$

где  $\mathbf{H}_0$  — внешнее поле;  $\mathbf{H}'$  — поле, вызванное циклотронным вращением. Как известно из электродинамики,

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}_0 (1 + 4\pi\chi), \quad (7.7)$$

где  $\chi$  — магнитная восприимчивость плазмы.

$$\chi = \frac{\sum_k n_k \boldsymbol{\mu}_k}{\mathbf{H}_0}. \quad (7.8)$$

Величина  $\sum n_k \boldsymbol{\mu}_k$  есть магнитный момент единицы объема (намагничивание плазмы). Здесь  $n_k$  — число частиц с магнитным моментом  $\boldsymbol{\mu}_k$  в единице объема. Индекс  $k$  нумерует все частицы, как ионы, так и электроны. Поскольку магнитные моменты  $\boldsymbol{\mu}$  всех частиц плазмы направлены против внешнего поля  $\mathbf{H}_0$ , магнитная восприимчивость  $\chi$  отрицательна. Из сопоставления равенства (7.7) с равенством (7.8) следует

$$\mathbf{H}' = 4\pi\chi \mathbf{H}_0 = 4\pi \sum_k n_k \boldsymbol{\mu}_k. \quad (7.9)$$

Если намагничивание плазмы постоянно во времени, но меняется в пространстве, то, согласно уравнению Максвелла, с полем  $\mathbf{H}'$  связан ток

$$\mathbf{j}_M = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H}' = c \text{rot } \sum_k n_k \boldsymbol{\mu}_k. \quad (7.10)$$

Этот ток называют *током намагничивания*, или, иначе, *диамагнитным*, *циклотронным* или *ларморовским* током. Удобно рассматривать ток намагничивания вместе с внешними токами. Тогда величина, определенная формулой (7.7), будет рассматриваться не как индукция, а как напряженность магнитного поля внутри плазмы.

Существование тока намагничивания является очень важным свойством неоднородной плазмы. И если его не учитывать, то это приводит к ряду тяжелых парадоксов, которым уделено много места в литературе по физике плазмы.

После подстановки значения магнитного момента  $\mu$  из формулы (7.6) выражение для тока намагничивания (7.10) принимает вид

$$\mathbf{j}_m = -c \operatorname{rot} \sum_k \left( \frac{n_k M_k v_{\perp k}^2}{2H^2} \right) \mathbf{H}. \quad (7.11)$$

Так же, как и в случае дрейфового тока, ток намагничивания очень удобно выразить через давление плазмы с помощью соотношения (5.13). Здесь только надо учесть направление вектора  $\mu$  согласно формуле (7.6), откуда

$$\mathbf{j}_m = -c \operatorname{rot} \frac{P \dot{\mathbf{i}}}{H^2} \mathbf{H}. \quad (7.12)$$

Поясним наглядно происхождение тока намагничивания. В однородной плазме циклотронные токи всех частиц взаимно погашаются. Это погашение происходит не от квазинейтральности, а от однородности. Частицы разных зарядов вращаются в противоположных направлениях и, следовательно, дают круговые токи одинакового направления. Магнитные моменты и циклотронные токи электронов и ионов не погашаются, а складываются. С точки зрения магнитного момента и циклотронного тока квазинейтральная плазма не отличается от электронного газа, состоящего из частиц одинакового знака. Но однородность плазмы приводит к взаимному погашению циклотронных токов, переносимых частицами, находящимися в разных точках, независимо от их заряда.

Пусть магнитное поле направлено к нам. Следовательно, все круговые токи текут по часовой стрелке (рис. 8). Токи от кружков, ведущие центры которых лежат выше рассматриваемой линии, текут влево, от нижних кружков — вправо. В однородной плазме эти токи полностью погаша-

ются (рис. 8, а). В неоднородной плазме (рис. 8, б) погашения не будет. Если магнитное поле направлено к нам, а плотность плазмы возрастает вверх, то ток намагничивания будет течь влево. Аналогичный результат получится и от неоднородности поперечной скорости или магнитного поля. В дальнейшем мы будем всегда рассматривать ток намагничивания на равных правах с внешними токами, текущими через плазму. Тогда магнитную индукцию в плазме, так же как и в пустом пространстве, можно считать

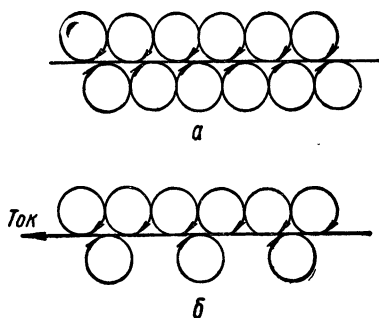


Рис. 8. Происхождение тока намагничивания:  
а — однородная; б — неоднородная плазма.

равной (в гауссовой системе единиц) напряженности магнитного поля  $H$ , как мы и будем поступать. Дيامagnetизм плазмы при этом учитывается тем, что к заданным внешним токам добавляется ток намагничивания, создающий магнитное поле, направленное против приложенного внешнего поля.

Кроме диамагнитных свойств, связанных с циклотронным вращением, плазма может проявлять также и парамагнитные свойства. Как мы увидим в разделе (III.9), упругое отражение частиц от ограничивающих плазму поверхностей приводит к возникновению парамагнитного краевого тока. При полном термодинамическом равновесии краевой ток полностью компенсирует диамагнетизм плазмы, так что магнитная восприимчивость равновесной плазмы оказывается равной нулю.

Кроме краевого парамагнетизма в плазме возможен и небольшой внутренний парамагнетизм, связанный с анизотропией столкновений.

## 8. Квазигидродинамическое приближение

Ток намагничивания вместе с дрейфовым током создает механизм передачи давления в разреженной плазме. В газе из нейтральных частиц передача давления происходит только посредством столкновений. Гидродинамическое описание поведения такого газа с помощью силы градиента

давления допустимо только при достаточно высоких плотностях, когда длина свободного пробега частиц мала в сравнении с рассматриваемыми размерами. В замагниченной плазме в направлении поперек магнитного поля уравнения, подобные гидродинамическим, оказываются применимы и при низких плотностях, т. е. больших длинах пробега. Такое приближенное описание свойств разреженной плазмы с использованием силы градиента давления носит название *квазигидродинамического приближения*. Оно оказывается возможным в силу существования механизма передачи давления токами, текущими в плазме, — дрейфовым током и током намагничивания.

Уравнение, описывающее движение плазмы в квазигидродинамическом приближении, можно получить чрезвычайно простым путем. Для этого выразим плотность тока через магнитное поле из уравнения Максвелла. При этом для медленных движений пренебрегаем током смещения и записываем уравнение Максвелла в виде

$$\mathbf{j} \approx \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (8.1)$$

В это уравнение подставляем в качестве плотности тока сумму всех дрейфовых токов и тока намагничивания. Для того чтобы включить в рассмотрение нестационарные процессы, вводим, кроме градиентного и центробежного, также и инерционный дрейф. Для этого подставим формулу (6.2) в выражение (3.15) и просуммируем по всем сортам частиц, обозначенным индексом  $k$ . Тогда полный ток инерционного дрейфа

$$\mathbf{j}_i = -\frac{c}{H^2} \sum_k n_k M_k [\dot{\mathbf{v}}_k \mathbf{H}] = -\frac{c\rho}{H^2} [\dot{\mathbf{v}} \mathbf{H}], \quad (8.2)$$

где

$$\rho = \sum_k n_k M_k \quad (8.3)$$

плотность плазмы;

$$\mathbf{v} = \frac{\sum_k n_k M_k \mathbf{v}_k}{\sum_k n_k M_k} \quad (8.4)$$

средняя массовая скорость. Полный дрейфовый ток поперек магнитного поля определится суммированием токов от

градиентного, центробежного и инерционного дрейфов и тока намагничивания

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{c}{H^2} \left( \frac{P_{\perp}}{H} [\mathbf{H} \nabla H] + \frac{P_{\parallel}}{R^2} [\mathbf{R}\mathbf{H}] - \rho [\dot{\mathbf{v}}\mathbf{H}] \right) - c \operatorname{rot} \frac{P_{\perp}}{H_2} H. \quad (8.5)$$

Для упрощения этого выражения воспользуемся формулой векторного анализа

$$\operatorname{rot} u\mathbf{V} = u \operatorname{rot} \mathbf{V} + [\nabla u \mathbf{V}],$$

откуда

$$\operatorname{rot} \frac{P_{\perp}}{H^2} \mathbf{H} = \frac{P_{\perp}}{H^2} \operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{1}{H^2} [\nabla P_{\perp} \cdot \mathbf{H}] - \frac{2P_{\perp}}{H^3} [\nabla H \cdot \mathbf{H}]. \quad (8.6)$$

Подставив выражение (8.6) в выражение (8.5), получаем, учитывая, что  $(\mathbf{H} \nabla H) = -[\nabla H \cdot \mathbf{H}]$ :

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{c}{H^2} \left( \frac{P_{\perp}}{H} [\nabla H \cdot \mathbf{H}] + \frac{P_{\parallel}}{R^2} [\mathbf{R}\mathbf{H}] - [\nabla P_{\perp} \cdot \mathbf{H}] - \right. \\ \left. - \rho [\dot{\mathbf{v}}\mathbf{H}] - P_{\perp} \operatorname{rot} \mathbf{H} \right). \quad (8.7)$$

Подстановка этого значения  $\mathbf{j}_{\perp}$  в уравнение (8.1) дает результат, который мы запишем в виде

$$[\mathbf{F}\mathbf{H}] = \left( \frac{H^2}{4\pi} + P_{\perp} \right) \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad (8.8)$$

где вектор  $\mathbf{F}$  есть сумма всех движущих сил, вызывающих токи

$$\mathbf{F} = \frac{P_{\perp}}{H} \nabla H + \frac{P_{\parallel}}{R^2} \mathbf{R} - \nabla P_{\perp} - \rho \dot{\mathbf{v}}. \quad (8.9)$$

Векторное произведение  $[\mathbf{F}\mathbf{H}]$  зависит только от поперечной составляющей вектора  $\mathbf{F}$ , так что его можно заменить на  $[\mathbf{F}_{\perp}\mathbf{H}]$ . Умножим обе части равенства (8.8) слева векторно на  $\mathbf{H}$  и преобразуем правую часть по формуле (I.3.7). Результат можно записать как

$$H^2 \mathbf{F}_{\perp} = \left( \frac{H^2}{4\pi} + P_{\perp} \right) \left( \frac{1}{2} \nabla H^2 - (\mathbf{H} \nabla) H \right). \quad (8.10)$$

Поскольку уравнение выведено из дрейфового приближения, то реальный смысл имеет только поперечная его составляющая (к движению вдоль поля дрейфовое приближение неприменимо). Если магнитное поле меняется только попе-

рек своего направления, то  $(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} = 0$ , откуда

$$\mathbf{F}_\perp = \nabla_\perp \frac{H^2}{8\pi} + \frac{P_\perp}{H} \nabla_\perp H. \quad (8.11)$$

После подстановки значения  $\mathbf{F}$  из выражения (8.9) для этого частного случая

$$\rho \dot{\mathbf{v}}_\perp = -\nabla_\perp P_\perp - \nabla_\perp \frac{H^2}{8\pi} + \frac{P_\parallel}{R^2} \mathbf{R}. \quad (8.12)$$

В это уравнение входят только составляющие векторов, перпендикулярные к магнитному полю. Оно отличается от уравнения магнитной гидродинамики (1.3.9) только последним членом правой части, учитывающим центробежную силу, происходящую от искривления магнитных силовых линий.

## 9. Плазма как диамагнитная среда

Как видно из формул (7.9) и (7.6), циклотронное вращение внутри объема, занятого замагниченной плазмой, позволяет приписать ей внутреннюю диамагнитную восприимчивость

$$\chi = \frac{\sum_k n_k \mu_k}{H_0} = - \frac{\sum_k n_k M_k v_{\perp k}^2}{2H_0^2} \quad (9.1)$$

или, после подстановки формулы (5.13),

$$\chi = \frac{P_\perp}{H_0^2}. \quad (9.2)$$

Мы называем эту восприимчивость внутренней, потому что она связана только с круговыми токами, текущими *внутри* плазменного объема. Полный магнитный момент плазмы зависит от краевых условий. В необходимости их учета можно убедиться из общих термодинамических соображений. Магнитное поле не совершает над частицей никакой работы. Но если плазма обладает магнитной восприимчивостью, то возбуждаемый в ней внешним полем магнитный момент приобретает в том же поле энергию. Следовательно, в идеализированном случае полного термодинамического равновесия, когда полная энергия плазмы однозначно связана с энергиями частиц, магнитная восприимчивость плазмы должна быть равной нулю в кажущемся противоречии с формулой (9.1).

Этот парадокс разрешается учетом краевых условий. Если плазма находится в полном термодинамическом равновесии, то она не должна отдавать энергию наружу, т. е. частицы должны упруго отражаться от границы плазмы. Но в результате упругого отражения возникает краевой ток, циркулирующий в направлении, обратном току циклотронного вращения (рис. 9). Пусть магнитное поле направлено к нам, циклотронные токи текут по часовой стрелке,

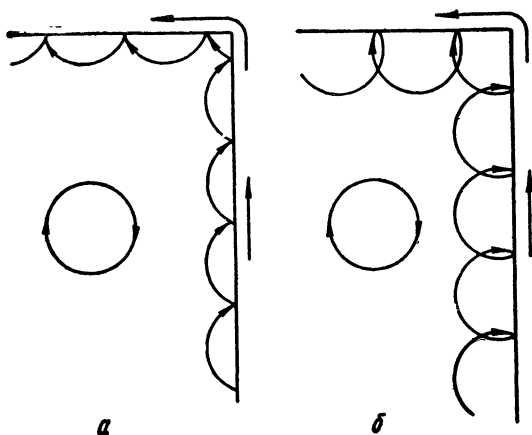


Рис. 9. Краевой парамагнитный ток при упругом отражении частиц:

*a* — отражение под острым углом; *b* — отражение под тупым углом.

тогда краевой ток течет против часовой стрелки. Этот ток возникает по чисто геометрической причине, из-за того что при упругом отражении угол отражения равен углу падения. Краевой ток создает парамагнитный момент, направленный по исходному полю. Величина магнитного момента тока пропорциональна площади витка. Поэтому, хотя в создании парамагнитного тока участвуют только краевые частицы, величина магнитного момента пропорциональна полному числу частиц в плазме. Расчет показывает, что при идеальном упругом отражении парамагнитный момент краевого тока в точности компенсирует внутренний диамагнитный момент и полная восприимчивость плазмы равна нулю, как этого и требует термодинамика. Если условия идеального упругого отражения

не наблюдаются, т. е. имеются потери энергии, то магнитная восприимчивость плазмы зависит от краевых условий. Противоположный предельный случай будет возможен, когда частицы совсем не отражаются от поверхности плазмы (например, если при каждом ударе о стенку происходит рекомбинация). В этом случае полная восприимчивость будет равна внутренней, т. е. выражаться формулами (9.1) или (9.2). Эти формулы дают, таким образом, наибольшее возможное значение магнитной восприимчивости плазмы. Реальное значение лежит между нулем и этим максимальным значением в зависимости от краевых условий. Выше мы вводили как безразмерную характеристику плазмы величину отношения газового давления к магнитному

$$\beta = \frac{8\pi P}{H_0^2}.$$

Максимальное значение магнитной восприимчивости замагниченной плазмы, определяемой по формуле (9.2), очень просто связано с этой величиной

$$\chi_m = \frac{\beta}{8\pi}. \quad (9.3)$$

Холодной мы называем плазму, у которой  $\beta \ll 1$ . Как видим, у холодной плазмы магнитная восприимчивость мала. Для плазмы, удерживаемой магнитным полем, значение  $\beta$  не может превосходить единицы, а следовательно, магнитная восприимчивость даже и в сильно неравновесном состоянии не может достигать больших значений. При приближении к термодинамическому равновесию она всегда стремится к нулю.

Все приведенные результаты, касающиеся магнитной восприимчивости, относились к плазме, в которой циклотронное вращение не нарушается столкновениями. Такую плазму мы называем замагниченной. Для замагниченности нужно, чтобы время передачи импульса  $\tau$  было велико в сравнении с периодом циклотронного вращения ( $\omega_e \tau \gg 1$ ) или, что то же самое, чтобы длина свободного пробега  $l$  была велика в сравнении с циклотронным радиусом ( $l \gg R_c$ ). Если это условие нарушается, то магнитная восприимчивость плазмы уменьшается и в пределе при малых длинах пробега стремится к нулю, так как упорядоченные круговые токи исчезают.

Для количественной оценки магнитной восприимчивости плотной плазмы можно по-прежнему пользоваться формулой (7.2), но считать, что ток течет не по кругу, а по двойному сегменту с радиусом кривизны, равным циклотронному радиусу  $R_c$ , и хордой, равной длине пробега  $l$ . Площадь такого сегмента, умноженная на ток и деленная на скорость света, даст магнитный момент орбиты.

При пользовании уравнениями Максвелла для описания поведения плазмы в электромагнитных полях различие между напряженностью магнитного поля и магнитной индукцией проявляется, если не включать ток намагничивания в число действующих токов. Однако, как мы видели, не учитывать ток намагничивания неудобно, так как это приводит к ряду сложных парадоксов. Практически целесообразно рассматривать ток намагничивания наравне с током проводимости и дрейфовыми токами и включать его в общую плотность тока. При таком методе описания плазмы напряженность магнитного поля в ней тождественно равна магнитной индукции, т. е. магнитная проницаемость тождественно равна единице. В литературе о плазме так чаще всего и поступают, причем одну и ту же величину одни авторы называют напряженностью магнитного поля, другие — магнитной индукцией.

Значение парамагнитного краевого тока можно найти, не рассматривая траектории частиц. Представим себе, что на границе между плазмой и удерживающим ее магнитным полем помещена идеальная бесконечно тонкая оболочка, упруго отражающая частицы и полностью передающая получаемый импульс магнитному полю. Согласно условию магнитостатического равновесия (I.3.9), скачок давления плазмы на поверхности оболочки должен уравниваться скачком магнитного давления:

$$\Delta(H^2/8\pi) \approx H\Delta H/4\pi = -P_{\perp}.$$

Из граничных условий к уравнениям электродинамики следует, что скачку магнитного поля должен отвечать поверхностный ток

$$I = \frac{-c}{4\pi} \Delta H \approx c \frac{P_{\perp}}{H}$$

(в единицу длины плазменного столба), который создает магнитный момент  $\frac{IS}{c} \approx \frac{P_{\perp}}{H} S$ , компенсирующий внутренний диамагнитный момент плазмы  $\sum_k n_k \mu_k S$ .

### Задачи к гл. III

**Задача 1.** Вывести выражение для скорости градиентного дрейфа, учитывая непрерывность изменения циклотронного радиуса.

**Решение.** Пусть магнитное поле направлено по оси  $z$  и меняется вдоль оси  $y$ . Радиус кривизны траектории частицы в каждой точке равен значению циклотронного радиуса для этой точки

$$\frac{ds}{d\vartheta} = R_c,$$

где  $s$  — расстояние вдоль траектории;  $\vartheta$  — угол между касательной к траектории и произвольным фиксированным направлением. Если взять это направление вдоль оси  $x$ , то

$$dx = ds \cos \vartheta = R_c \cos \vartheta d\vartheta.$$

В дрейфовом приближении циклотронный радиус меняется медленно и его можно разложить в ряд

$$R_c = R_c(0) + \frac{dR_c}{dy} y + \dots,$$

где

$$y \approx R_c \cos \vartheta.$$

Смещение частицы за один оборот

$$\Delta x = \frac{dR_c}{dy} \int_0^{2\pi} y \cos \vartheta d\vartheta \approx R_c \frac{dR_c}{dy} \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta.$$

Интеграл равен  $\pi$ , откуда дрейфовая скорость

$$v_H = \Delta x \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2} R_c \frac{dR_c}{dy} \omega_c,$$

что совпадает с формулой (5.1).

**Задача 2.** Рассмотреть движение заряженной частицы в магнитном поле прямого тока и сравнить с дрейфовым приближением.

**Решение.** Радиус кривизны траектории в каждой точке равен циклотронному радиусу частицы

$$\frac{ds}{d\vartheta} = R_c,$$

где  $\vartheta$  — угол между касательной к траектории и произвольным фиксированным направлением;  $s$  — длина, отсчитываемая вдоль траектории. Поскольку движение вдоль поля происходит по инерции, то его рассматривать не нужно. Будем считать, что искомая траектория лежит в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Пусть проводник с током пересекает эту плоскость в точке  $O$ , которую примем за начало полярной системы координат. Проведем из точки  $O$  радиус-вектор к частице и угол между радиусом-век-

тором  $OA$  и касательной к траектории  $BA$  обозначим  $\theta$  (рис. 10) и  $\varphi$  — угол между радиусом-вектором и произвольным фиксированным направлением  $Ox$ . Тогда

$$\begin{aligned}\vartheta &= \theta + \varphi; \\ dr &= ds \cos \theta.\end{aligned}$$

Для радиуса кривизны  $R$  получим уравнение

$$\frac{1}{R} = \frac{d\vartheta}{ds} = \cos \theta \left( \frac{d\theta}{dr} + \frac{d\varphi}{dr} \right).$$

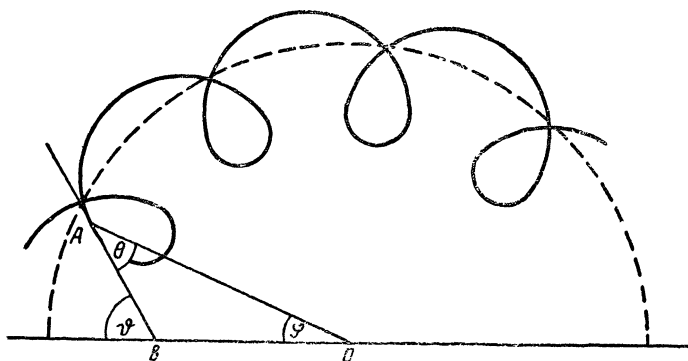


Рис. 10. Движение заряженной частицы в магнитном поле прямого тока.

С другой стороны, из рис. 10

$$r \, d\varphi = dr \, \operatorname{tg} \theta.$$

Комбинируя эти два уравнения, получаем  $\frac{r}{R} d\varphi = \sin \theta (d\theta + d\varphi)$ .

Для магнитного поля прямого тока  $H \propto 1/r$ ;  $R = R_c \propto r$ , т. е.  $r/R$  — величина постоянная. В этом случае легко найти угол между двумя соответственными положениями частицы

$$\Delta\varphi = \frac{R}{r} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \, d\theta}{1 - \frac{R}{r} \sin \theta} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2} - 1}. \quad (*)$$

В дрейфовом приближении (5.2) циклотронная орбита перемещается с дрейфовой скоростью

$$|v_H| = \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}}{H} R_c \left| \frac{dH}{dr} \right|.$$

Для магнитного поля прямого тока  $dH/dr = -H/r$ , откуда

$$|v_H| = \frac{v_{\perp}}{2} \frac{R_c}{r}.$$

Угловое перемещение за один период

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi v_H}{\omega_c r} = \pi \left( \frac{R_c}{r} \right)^2.$$

Тот же результат получится, если точную формулу (\*) разложить в ряд и отбросить члены со степенями  $R/r$ , начиная от четвертой. Очевидно, что дрейфовое приближение применимо только при условии, если  $R/r$  — малая величина.

**Задача 3.** Выразить в явном виде условие применимости дрейфового приближения для движения заряженной частицы в магнитном поле прямого тока.

**Решение.** Напряженность магнитного поля прямого тока  $J$

$$H = \frac{2J}{cr},$$

где  $r$  — расстояние в плоскости, перпендикулярной к току. Циклотронный радиус

$$R_c = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{Mc^2 v_{\perp}}{2JZe} r.$$

Характерная длина изменения магнитного поля равна в данном случае расстоянию  $r$ , так как

$$\frac{d \ln H}{dr} = - \frac{1}{r}.$$

Условие применимости дрейфового приближения имеет вид

$$\frac{R_c}{r} \ll 1$$

в согласии с результатом задачи 2. Подстановка значения  $R_c$  даст условие в явном виде

$$\frac{Mc^2 v_{\perp}}{2JZe} \ll 1.$$

Расстояние  $r$  сюда не входит, так что если дрейфовое приближение применимо, то оно применимо на любых расстояниях.

**Задача 4.** На плазменный цилиндр наложено радиальное электрическое поле, заставляющее плазму вращаться. Найти энергию системы, считая, что вращение происходит со скоростью электрического дрейфа. Из сравнения с энергией цилиндрического конденсатора определить эффективную поперечную диэлектрическую проницаемость плазмы.

Решение. Если вращение происходит со скоростью электрического дрейфа, то кинетическая энергия на единицу объема

$$\rho \frac{v_E^2}{2} = \rho c^2 \frac{E^2}{2H^2}.$$

Полная плотность энергии

$$\frac{E^2}{8\pi} + \rho c^2 \frac{E^2}{2H^2} = \frac{E^2}{8\pi} \left( 1 + \frac{4\pi\rho c^2}{H^2} \right).$$

Если рассматривать ту же систему как цилиндрический конденсатор, наполненный средой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , то плотность энергии составит  $\epsilon E^2/8\pi$ . Из сравнения находим эффективную диэлектрическую проницаемость плазмы поперек магнитного поля

$$\epsilon_{\perp} = 1 + \frac{4\pi\rho c^2}{H^2}$$

в согласии с формулой (6.9), полученной из рассмотрения поляризованного дрейфа.

## Глава IV

### КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ

#### 1. Основные понятия и определения

Холодной мы называем плазму, у которой газовое давление мало в сравнении с магнитным

$$\beta \equiv \frac{8\pi P}{H^2} \ll 1.$$

Если это условие выполнено, то при рассмотрении большинства вопросов, относящихся к колебаниям плазмы, можно полностью пренебречь тепловым движением и рассматривать только усредненное движение под действием внешних сил. Будем сначала пренебрегать также столкновениями и всеми процессами, приводящими к затуханию колебаний, т. е. к рассеянию (диссипации) энергии. Такое приближение иногда называют приближением *идеальной\** плазмы. Затухание введем позже как малую поправку.

Теория колебаний холодной плазмы заключается в совместном рассмотрении уравнений движения проводящей среды и уравнений электродинамики Максвелла. Для анализа колебаний уравнения Максвелла удобно преобразовать.

Применяя операции **rot** к обеим частям уравнения

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

получаем

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{rot} \mathbf{H}.$$

---

\* Здесь идеальность понимается в гидродинамическом смысле в отличие от термодинамического, с которым мы имели дело в гл. II.

Подстановка сюда уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (1.2)$$

дает

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}.$$

Раскрывая операцию  $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$  по формулам векторного анализа, приходим к результату

$$\Delta \mathbf{E} - \nabla \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (1.3)$$

Ищем решение в виде плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , в которой любая величина  $f$  должна зависеть от координаты и времени как

$$f = \tilde{f} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (1.4)$$

где  $\tilde{f}$  — комплексная амплитуда;  $\omega$  — круговая частота;  $k$  — волновое число. Фазовая скорость волны  $u_\phi \equiv \omega/k$ ; групповая скорость  $u_g = \partial\omega/\partial k$ . Уравнение, связывающее  $\omega$  и  $k$ , называется дисперсионным уравнением. Показатель преломления  $N = c/u_\phi \equiv kc/\omega$ , где  $c$  — скорость света в пустоте. Если фазовая скорость не зависит от частоты ( $\omega :: k$ ), то групповая скорость численно равна фазовой; в этом случае можно говорить просто о скорости распространения волны. Зависимость фазовой скорости от частоты называется *дисперсией*; она приводит к различию между групповой и фазовой скоростями.

Чтобы определить фазовую и групповую скорости не только по величине, но и по направлению, вводят волновой вектор  $\mathbf{k}$ , длина которого равна волновому числу; а направление определено таким образом, чтобы в плоской волне любая величина  $f$  зависела от координат и времени как

$$f = \tilde{f} e^{i[(kx) - \omega t]}. \quad (1.4a)$$

Направление фазовой скорости есть направление волнового вектора, т. е. направление, в котором распространяется определенная фаза волны. В анизотропной среде частота связана не только с величиной, но и с направлением волнового вектора, т. е. дисперсионное уравнение имеет вид

$$F(\omega, k_1, k_2, k_3) = 0,$$

где  $k_1, k_2, k_3$  — составляющие волнового вектора. В результате дифференцирования этого уравнения получим

$$d\omega = u_1 dk_1 + u_2 dk_2 + u_3 dk_3.$$

Коэффициенты  $u_1, u_2, u_3$  имеют размерность скорости и рассматриваются как составляющие вектора групповой скорости. В векторной форме

$$d\omega = (\mathbf{u}_g d\mathbf{k}),$$

что иногда записывают символически как

$$\mathbf{u}_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}.$$

Направление групповой скорости есть направление переноса энергии волной.

В дальнейшем оси координат будем выбирать так, чтобы  $k_2 = 0$ . Под  $k_1$  будет пониматься составляющая волнового вектора по нормали к магнитному полю, под  $k_3$  — вдоль поля.

В линейном приближении уравнения для комплексных амплитуд  $\tilde{f}$  имеют такой же вид, как и уравнения для величин  $f$ . В дальнейшем не будем делать различия между обозначениями комплексных амплитуд и переменных величин там, где это специально не необходимо. Для плоской волны дифференциальным операторам отвечают алгебраические операции:

$$\Delta \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}; \quad \nabla \operatorname{div} \mathbf{E} = -\mathbf{k}(\mathbf{kE});$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E}; \quad \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{j}.$$

Уравнение (1.3) дает

$$k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{kE}) = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \mathbf{j}. \quad (1.5)$$

Уравнения движения электронов и ионов без учета столкновений и других диссипативных процессов имеют вид:

$$m \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] \right); \quad (1.6)$$

$$M \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = Ze \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}] \right). \quad (1.7)$$

Будем рассматривать линейные колебания. Тогда лагранжу производную  $d/dt$  можно заменить частной производной  $\partial/\partial t$  и в произведении  $[\mathbf{vH}]$  пренебречь собственным

полем волны, т. е. заменить  $\mathbf{H}$  на постоянное внешнее поле  $\mathbf{H}_0$ . В дальнейшем собственное магнитное поле волны, когда оно нам понадобится, будем обозначать  $\tilde{\mathbf{H}}$ . Преобразуем уравнения (1.6) и (1.7) так, чтобы получить уравнения для массовой скорости

$$\mathbf{v} = \frac{n_e m \mathbf{v}_e + n_i M \mathbf{v}_i}{n_e m + n_i M} \equiv \frac{n_e m \mathbf{v}_e + n_i M \mathbf{v}_i}{\rho} \quad (1.8)$$

и плотности тока

$$\mathbf{j} = e (Z n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e) \approx ne (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e). \quad (1.9)$$

При этом будем пользоваться условием квазинейтральности

$$n_e = Z n_i \equiv n \quad (1.10)$$

и пренебрегать массой электрона  $m$  в сравнении с массой иона  $M$ . Сложение уравнений (1.6) и (1.7) с весами  $n_e m$  и  $n_i M$  дает гидродинамическое уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} [\mathbf{j} \mathbf{H}_0]. \quad (1.11)$$

Вычитание этих уравнений с пренебрежением членами, содержащими большую массу  $M$  в знаменателе, дает уравнение для плотности тока

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] \right) - \frac{e}{mc} [\mathbf{j} \mathbf{H}_0]. \quad (1.12)$$

Система уравнений (1.11)—(1.12) совпадает с системой уравнений магнитной гидродинамики для идеального проводника, из которых выброшены силы давления. В соответствии с этим приближение холодной плазмы называют иногда гидродинамическим приближением. Удобно ввести характерные частоты плазмы: плазменную частоту\*

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}} \quad (1.13)$$

\* Если не пренебрегать массой электрона в сравнении с массой иона, то плазменная частота определяется так, чтобы квадрат ее равнялся сумме квадратов электронной и ионной плазменных частот

$$\omega_0^2 = \omega_{0e}^2 + \omega_{0i}^2,$$

где

$$\omega_{0e}^2 = \frac{4\pi ne^2}{m};$$

$$\omega_{0i}^2 = \frac{4\pi n_i Z^2 e^2}{M}$$

и циклотронные частоты

$$\omega_e = \frac{eH_0}{mc}, \quad (1.14)$$

$$\omega_i = \frac{ZeH_0}{Mc}. \quad (1.15)$$

Тогда уравнение (1.12) переписывается как

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{\omega_0^2}{4\pi} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] \right) - \omega_e [\mathbf{j}\mathbf{h}], \quad (1.16)$$

где  $\mathbf{h}$  — единичный вектор в направлении постоянного внешнего магнитного поля. Для плоской волны вида (1.4) уравнения (1.11) и (1.16) принимают вид:

$$\mathbf{v} = \frac{i}{\omega\rho c} [\mathbf{j}\mathbf{H}_0]; \quad (1.17)$$

$$\omega^2 \mathbf{j} = i \frac{\omega_0^2 \omega}{4\pi} \mathbf{E} + \omega_i \omega_e \{ \mathbf{j} - \mathbf{h} (\mathbf{j}\mathbf{h}) \} - i\omega\omega_e [\mathbf{j}\mathbf{h}]. \quad (1.18)$$

В последнем уравнении двойное векторное произведение раскрыто по формуле  $[\mathbf{A} [\mathbf{B}\mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{B})$  и использовано соотношение

$$\frac{\omega_0^2 H_0^2}{4\pi c^2 \rho} \approx \frac{ne^2 H_0^2}{Mmn_i c^2} = \frac{Ze^2 H_0^2}{Mmc^2} = \omega_i \omega_e. \quad (1.19)$$

Теперь рассмотрение всех типов колебаний холодной плазмы сводится к совместному решению системы уравнений (1.5) и (1.18). При выводе этой системы сделаны следующие допущения:

1) амплитуды всех переменных величин в волне полагаются малыми, чтобы можно было пренебречь всеми квадратичными членами (*линейное приближение*);

2) тепловое (газовое) давление считается малым в сравнении с магнитным давлением (*приближение холодной плазмы*);

или с учетом условия электронейтральности

$$\omega_{0i}^2 = \frac{4\pi Zne^2}{M}.$$

Отсюда

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi ne^2}{m} \left( 1 + \frac{Zm}{M} \right).$$

Эта величина настолько мало отличается от электронной плазменной частоты, что мы не будем их различать.

3) пренебрегается всеми диссипативными процессами, т. е. колебания полагаются адиабатическими. Это приближение иногда называют *приближением идеальной плазмы*;

4) отбрасываются члены порядка отношения массы электрона к массе иона. Это допустимо, если приближение проведено аккуратно в математическом отношении.

Таким образом, можно сказать, что система (1.5)—(1.18) описывает линейные адиабатические колебания холодной плазмы, или линейные колебания холодной идеальной плазмы.

Кроме того, в настоящей книге речь идет о полностью ионизованной плазме.

## 2. Волны в плазме без магнитного поля

Если магнитное поле отсутствует, то  $\omega_i = \omega_e = 0$  и уравнение (1.18) сводится к виду

$$\mathbf{j} = \frac{\omega_0^2}{4\pi\omega} \mathbf{E}. \quad (2.1)$$

После этого из выражения (1.5) получаем

$$k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{kE}) = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} \right) \mathbf{E}. \quad (2.2)$$

Произвольную волну в плазме без магнитного поля можно разложить на две независимые волны: продольную ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}$ ) и поперечную ( $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$ ). Для продольной волны  $\mathbf{k}(\mathbf{kE}) = k^2 \mathbf{E}$  и из выражения (2.2) получим

$$\omega^2 = \omega_0^2. \quad (2.3)$$

Это уже знакомые нам электростатические плазменные колебания, которые в случае холодной плазмы возможны только на фиксированной плазменной частоте. Для поперечных волн  $\mathbf{k}(\mathbf{kE}) = 0$  и уравнение (2.2) дает

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_0^2. \quad (2.4)$$

Это — дисперсионное уравнение для распространения электромагнитных волн в плазме без магнитного поля. Распространение возможно только при частотах выше плазменной. Для  $\omega^2 < \omega_0^2$  волновое число и показатель преломления становятся мнимыми, т. е. волна отражается от границы

плазмы. Фазовая скорость

$$u_{\phi} = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}}. \quad (2.5)$$

В области, где фазовая скорость вещественна ( $\omega^2 > \omega_0^2$ ), она всегда больше скорости света и при приближении к плазменной частоте стремится к бесконечности. Групповая скорость находится дифференцированием формулы (2.4)

$$u_{\Gamma} = \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{u_{\phi}}, \quad (2.6)$$

откуда

$$u_{\phi} u_{\Gamma} = c^2. \quad (2.7)$$

Групповая скорость всегда меньше скорости света. При частотах гораздо больше плазменной как фазовая, так и групповая скорости стремятся к скорости света: волна распространяется, как в пустоте. При стремлении частоты волны к плазменной частоте фазовая скорость стремится к бесконечности, а групповая скорость — к нулю.

### 3. Простейшие случаи распространения волн при наличии магнитного поля

Кажущаяся простой алгебраическая система векторных уравнений (1.5)—(1.18) оказывается в действительности для произвольного направления распространения довольно громоздкой. Начнем с наиболее простых случаев, в которых магнитное поле не действует на распространение волн. Рассмотрим составляющую векторного уравнения (1.18) вдоль магнитного поля. Поскольку составляющая  $\mathbf{j}_{\parallel}$  вдоль магнитного поля равна  $(\mathbf{j}\mathbf{h})$ , то

$$\mathbf{j}_{\parallel} = i \frac{\omega_0^2}{4\pi\omega} \mathbf{E}_{\parallel}. \quad (3.1)$$

Составляющая уравнения (1.5) вдоль магнитного поля не содержит поперечного поля  $\mathbf{E}_{\perp}$  в двух случаях: при распространении поперек поля, когда  $k_z = 0$ , и при распространении вдоль поля, когда  $\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}) = k^2\mathbf{E}_{\parallel}$ . В этих двух простейших случаях колебания с электрическим полем, параллельным магнитному, отщепляются, т. е. представляют собой независимые ветви колебаний. Магнитное поле на эти ветви колебаний не действует. В гидродинамическом приближении это утверждение является точным. В кине-

тике, как мы увидим ниже, вблизи циклотронных частот и их обертонов возникают некоторые особенности. Если отвлечься от этих особых точек, то можно сказать, что колебания с электрическим полем вдоль магнитного распространяются вдоль или поперек магнитного поля так же, как и в его отсутствие. Для распространения вдоль магнитного поля уравнение (1.5) сводится к виду

$$\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = -i \frac{4\pi\omega}{c^2} \mathbf{j}, \quad (3.2)$$

что после подстановки формулы (3.1) дает

$$\omega^2 = \omega_0^2. \quad (3.3)$$

Это значит, что колебания, поляризованные вдоль магнитного поля и распространяющиеся вдоль него, представляют собой электростатические плазменные колебания, о которых мы уже говорили. Если пренебречь тепловым движением, то эти колебания возможны только на одной фиксированной частоте, которая равна плазменной частоте  $\omega_0$ . При учете теплового движения получается дисперсионное уравнение для плазменных волн, которое мы рассмотрим в следующей главе. Для волн, распространяющихся поперек магнитного поля, но поляризованных вдоль него, уравнение (1.5) сводится к виду

$$k^2 \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \mathbf{j}, \quad (3.4)$$

что при подстановке выражения (3.1) дает дисперсионное уравнение

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_0^2. \quad (3.5)$$

Оно тождественно с уравнением (2.4), описывающим распространение электромагнитных волн в плазме. Распространение возможно только при частотах выше плазменной. Ниже плазменной частоты волновое число становится мнимым, т. е. волна отражается от границы плазмы. На этом основаны микроволновое зондирование плазмы для определения ее концентрации и отражение радиоволн от ионосферы, делающее возможным дальнюю радиосвязь по атмосферному волноводу.

Фазовая и групповая скорости выражаются так же, как и в отсутствие магнитного поля, т. е. формулами (2.5) и (2.6).

Рассмотренные типы колебаний, поляризованные вдоль магнитного поля и распространяющиеся вдоль и поперек него, являются единственными, на которые магнитное поле в приближении холодной плазмы не действует.

Из формулы (3.5) квадрат показателя преломления плазмы для волн, поляризованных вдоль магнитного поля,

$$N_{\parallel}^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 - \frac{4\pi n e^2}{m \omega^2}. \quad (3.6)$$

Эту величину можно рассматривать как продольную диэлектрическую проницаемость плазмы. Таков же предельный вид диэлектрической проницаемости любого вещества на больших частотах, который выводится в электродинамике сплошных сред [12]. В отсутствие магнитного поля диэлектрическая проницаемость плазмы изотропна и для любого направления дается выражением (3.6). При наличии магнитного поля поперечная проницаемость отлична от продольной, как мы уже видели при рассмотрении поляризационного дрейфа.

#### 4. Магнитогидродинамические волны

Рассмотрим теперь волны, распространяющиеся в плазме вдоль магнитного поля, при произвольном направлении поляризации. Как показано выше, такую волну можно разложить на две независимые волны, у одной из которых электрическое поле параллельно, у другой — перпендикулярно к магнитному. Волна, у которой как направление распространения, так и направление поляризации параллельны магнитному полю, в холодной плазме вырождается в плазменные колебания фиксированной частоты  $\omega = \omega_0$ . Перейдем теперь к волне, распространяющейся вдоль магнитного поля, но поляризованной поперек него. Для этой волны

$$(\mathbf{k} \mathbf{E}) = 0, \quad (4.1)$$

и уравнение (1.5) сводится к виду

$$k^2 \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \mathbf{j}. \quad (4.2)$$

Допустим, что током смещения, т. е. членом  $(\omega^2/c^2) \mathbf{E}$ , можно пренебречь. Для этого нужно, чтобы показатель преломле-

ния плазмы был велик

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} \gg 1. \quad (4.3)$$

Условия применимости этого допущения мы проверим ниже. Если условие (4.3) выполнено, то вместо уравнения (4.2) можно написать

$$\mathbf{E} \approx i \frac{4\pi\omega}{k^2 c^2} \mathbf{j}. \quad (4.4)$$

Из уравнения (4.2) видно, что ток параллелен электрическому полю, т. е. для рассматриваемых волн перпендикулярен к магнитному. Следовательно, уравнение (1.18) принимает вид

$$\omega^2 \mathbf{j} = i \frac{\omega_0^2 \omega}{4\pi} \mathbf{E} + \omega_i \omega_e \mathbf{j} - i\omega\omega_e [\mathbf{j}\mathbf{h}], \quad (4.5)$$

что после подстановки выражения (4.4) дает

$$\omega^2 \mathbf{j} = \left( \omega_i \omega_e - \frac{\omega_0^2 \omega^2}{k^2 c^2} \right) \mathbf{j} - i\omega\omega_e [\mathbf{j}\mathbf{h}]. \quad (4.6)$$

Последний член справа показывает, что по отношению к рассматриваемым волнам замагниченная плазма обладает своеобразной анизотропией: свойства волны зависят от того, образуют ли векторы  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{h}$  правую или левую тройку. Среды с подобными свойствами называются *гиротропными*. Кроме плазмы к ним относятся, например, ферриты, широко используемые в радиотехнике.

Рассмотрим сначала предельную область очень низких частот

$$\omega \ll \omega_i. \quad (4.7)$$

В этой области членами, содержащими  $\omega^2$  и  $\omega\omega_e$ , можно пренебречь в сравнении с членом, содержащим  $\omega_i\omega_e$ , вследствие чего гиротропные свойства плазмы не проявляются. Из уравнения (4.6) для этого предельного случая получается простое дисперсионное уравнение

$$\omega_i \omega_e = \frac{\omega_0^2 \omega^2}{k^2 c^2}, \quad (4.8)$$

откуда квадрат показателя преломления

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_i \omega_e} = \frac{4\pi n M c^2}{Z H_0^2} = \frac{4\pi n_i M c^2}{H_0^2}, \quad (4.9)$$

и фазовая скорость волны

$$u_{\phi} = \frac{\dot{\omega}}{k} = \sqrt{\frac{\omega_i \omega_e c^2}{\omega_0^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}} \equiv u_A, \quad (4.10)$$

где  $\rho$  — плотность плазмы,

$$\rho \approx n_i M = \frac{nM}{Z}. \quad (4.11)$$

Скорость распространения, выражаемая формулой (4.10), называется *альфвеновской скоростью*, а сами волны — *альфвеновскими* или *магнитогидродинамическими*. Квадрат альфвеновского показателя преломления (4.9) равен значению поперечной диэлектрической проницаемости плазмы, которое мы получили выше при рассмотрении поляризационного дрейфа\*. Предельная область (4.7) полностью описывается уравнениями магнитной гидродинамики, и формулу (4.10) легко получить из модели идеально проводящей жидкости. Для этого достаточно написать линеаризованное уравнение движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} [\mathbf{j} \mathbf{H}_0] \quad (4.12)$$

или

$$-i\omega \mathbf{v} = \frac{H_0}{\rho c} [\mathbf{j} \mathbf{h}]. \quad (4.13)$$

Если выразить  $\mathbf{j}$  через  $\mathbf{E}$  из формулы (4.4), то это уравнение переходит в

$$\mathbf{v} = \frac{k^2 c^2}{4\pi\rho c\omega^2} [\mathbf{E} \mathbf{H}_0]. \quad (4.14)$$

Далее используется условие идеальной проводимости

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0], \quad (4.15)$$

и для  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}_0$  получается дисперсионное уравнение

$$\frac{k^2 H_0^2}{4\pi\rho\omega^2} = 1, \quad (4.16)$$

откуда для фазовой скорости следует значение по формуле (4.10). Условие (4.15) обеспечивает вмороженность магнитного поля. Отсюда можно понять физическую картину

\* С точностью до первого слагаемого, которое происходит от тока смещения (см. задачу 1).

магнитогиродинамических волн. Они могут рассматриваться как поперечные колебания силовых линий вместе с плазмой, в которую они заморожены, наподобие упругих колебаний струны. В области низких частот, удовлетворяющих условию (4.7), магнитогиродинамические волны распространяются с постоянной скоростью, т. е. дисперсия отсутствует и групповая скорость равна фазовой. Чтобы наряду с условием (4.7) выполнялось также и неравенство (4.3), т. е. альфвеновский показатель преломления был велик, требуется, согласно выражению (4.9),

$$n_i M c^2 \gg \frac{H_0^2}{4\pi}, \quad (4.17)$$

т. е. магнитная энергия плазмы должна быть мала в сравнении с энергией покоя. При малой плотности плазмы или очень сильном магнитном поле это условие может не выполняться. В этих случаях простое дисперсионное уравнение (4.16) должно быть заменено несколько более сложным соотношением (см. задачу 1).

## 5. Дисперсия вблизи циклотронных частот

Если для волн, распространяющихся вдоль магнитного поля, условие (4.7) не выполнено, то возникает дисперсия и проявляются гиротропные свойства плазмы. Для рассмотрения этой области распишем уравнение (4.6) в проекциях, направив вдоль магнитного поля ось  $z$ :

$$\omega^2 j_x = \left( \omega_i \omega_e - \frac{\omega_0^2 \omega^2}{k^2 c^2} \right) j_x - i \omega \omega_e j_y; \quad (5.1)$$

$$\omega^2 j_y = \left( \omega_i \omega_e - \frac{\omega_0^2 \omega^2}{k^2 c^2} \right) j_y + i \omega \omega_e j_x. \quad (5.1')$$

Дисперсионное уравнение получается приравниванием нулю определителя этой системы линейных однородных уравнений, что проще всего сделать, выразив отношение амплитуд

$$\frac{j_y}{j_x} = i \frac{\frac{\omega_0^2 \omega^2}{k^2 c^2} - \omega_i \omega_e + \omega^2}{\omega \omega_e} = i \frac{\omega \omega_e}{\frac{\omega_0^2 \omega^2}{k^2 c^2} - \omega_i \omega_e + \omega^2}, \quad (5.2)$$

откуда

$$\frac{\omega_0^2 \omega^2}{k^2 c^2} - \omega_i \omega_e + \omega^2 \pm \omega \omega_e = 0. \quad (5.3)$$

Для квадрата показателя преломления плазмы отсюда получается

$$N^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_i \omega_e - \omega^2 \pm \omega \omega_e}. \quad (5.4)$$

При двух частотах, обращающих в нуль знаменатель, показатель преломления обращается в бесконечность. Эти частоты именуют обычно резонансными; правильнее называть их частотами аномальной дисперсии. Если при выводе дисперсионного уравнения не пренебрегать массой электрона в сравнении с массой иона, то частоты аномальной дисперсии оказываются в точности равны электронной и ионной циклотронным частотам. Из уравнения (5.4) получаются очень близкие значения с точностью до величин порядка  $\omega_i/\omega_e$ , опущенных при выводе уравнения (1.12). Из уравнения (5.2) следует

$$\left| \frac{j_x}{j_y} \right| = \left| \frac{j_y}{j_x} \right|,$$

т. е.

$$|j_x| = |j_y|. \quad (5.5)$$

Таким образом, амплитуда тока одинакова во всех направлениях, перпендикулярных к магнитному полю, что в силу равенства (4.2) относится и к амплитуде электрического поля. В течение цикла меняется только фаза волны, т. е. волна вращается вокруг направления магнитного поля. Такие волны называются волнами с круговой поляризацией. Двум знакам в дисперсионном уравнении (5.3) отвечают две волны, вращающиеся в противоположных направлениях. Одна из них может распространяться в плазме только при частотах ниже ионной циклотронной и называется *обыкновенной волной*. Вторая волна распространяется при частотах ниже электронной циклотронной и называется *необыкновенной волной*. У обыкновенной волны электрический вектор вращается в том же направлении, как положительный заряд, у необыкновенной, — как отрицательный заряд в магнитном поле.

Суперпозицией двух волн, поляризованных по кругу в противоположных направлениях, можно получить линей-

но поляризованную волну. Но в области между ионной и электронной циклотронными частотами способна распространяться только необыкновенная волна и, следовательно, линейная поляризация невозможна. При частотах ниже ионной циклотронной, но близких к ней, обыкновенная и необыкновенная волны распространяются с разными скоростями и, следовательно, линейно поляризованная волна самопроизвольно расщепляется на две волны с круговой поляризацией. Но при частотах гораздо ниже ионной циклотронной скорости распространения обыкновенной и необыкновенной волн различаются настолько мало, что расщепление линейно поляризованной волны происходит лишь очень медленно. Приблизительно оно может быть описано как медленное вращение плоскости поляризации (эффект Фарадея).

Поэтому применительно к области низких частот мы говорим уже о магнитогидродинамических или альфвеновских волнах, которые могут быть поляризованы произвольным образом в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения.

Волны, распространяющиеся в плазме вдоль магнитного поля и поляризованные поперек магнитного поля при частотах между ионной и электронной циклотронными, могут рассматриваться либо как продолжение магнитогидродинамических волн в сторону высоких частот, либо как электромагнитные волны, которые под влиянием магнитного поля стали способны распространяться при частотах ниже плазменной. В литературе называют эти волны по-разному. Проще всего называть их прямо *волнами с круговой поляризацией*. Этот тип волн имеет существенное значение в физике ионосферы, где они проявляются в виде низкочастотных радиопомех.

Различают два рода таких ионосферных сигналов. Одни из них возбуждаются грозowymi разрядами в атмосфере. Это так называемые *свистящие атмосферерики* или просто *свисты*. Другая разновидность носит название *сигналов ультранизкой частоты* (УНЧ). Они происходят от возмущений ионосферы, вызванных ударом плазменных потоков, испускаемых солнцем. Частоты этих колебаний гораздо ниже, чем плазменная частота в ионосфере, так что они могут распространяться только при наличии магнитного поля. Исследования показали, что они распространяются вдоль магнитных силовых линий.

Характер распространения существенным образом зависит от того, совпадает ли направление распространения точно с направлением магнитного поля или составляет с ним малый угол, но на этих деталях мы останавливаться не будем. Ввиду того что наиболее изученным примером рассмотренного типа волн являются свистящие атмосферерики, волны с круговой поляризацией в плазме иногда так и называют *свистящими атмосферериками или геликонами*.

## 6. Магнитный звук

Перейдем к рассмотрению волн, распространяющихся перпендикулярно к магнитному полю. В этом случае, как и в предыдущем, волна, поляризованная вдоль поля, отщепляется (это электромагнитная волна), и достаточно рассмотреть волны, у которых плоскость поляризации перпендикулярна к магнитному полю. Расположим в этой плоскости ось  $x$  вдоль направления распространения (параллельно вектору  $k$ ), ось  $y$  — перпендикулярно к нему (ось  $z$  направлена вдоль магнитного поля). Тогда составляющие уравнения (1.5) по осям  $x$  и  $y$  примут вид:

$$0 = \frac{\omega^2}{c^2} E_x + i \frac{4\pi\omega}{c^2} j_x; \quad (6.1)$$

$$k^2 E_y = \frac{\omega^2}{c^2} E_y + i \frac{4\pi\omega}{c^2} j_y. \quad (6.2)$$

Выразив отсюда составляющие электрического поля и подставив в уравнение (1.18), получаем:

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + \omega_i \omega_e) j_x - i\omega\omega_e j_y = 0; \quad (6.3)$$

$$\left( -\frac{\omega_0^2 \omega^2}{k^2 c^2 - \omega^2} - \omega^2 + \omega_i \omega_e \right) j_y + i\omega\omega_e j_x = 0. \quad (6.4)$$

Здесь уже амплитуды токов и полей в направлениях  $x$  и  $y$  не одинаковы, т. е. волна имеет эллиптическую поляризацию. Дисперсионное уравнение получается приравниванием нулю определителя системы (6.3)—(6.4).

Рассмотрим прежде всего предельную область очень низких частот

$$\omega \ll \omega_i. \quad (6.5)$$

Предположим, кроме того, что показатель преломления плазмы велик, т. е. скорость распространения волны мала

в сравнении со скоростью света

$$k^2 c^2 \gg \omega^2 \quad (6.6)$$

(иными словами, можно пренебречь током смещения).

В этом предельном случае из уравнения (6.3) сразу следует

$$j_x \ll j_y \quad (6.7)$$

и из системы уравнений (6.1)—(6.2)

$$E_x \ll E_y. \quad (6.8)$$

Это значит, что в предельной области низких частот эллиптическая волна вырождается в линейно поляризованную. Приближенный вид дисперсионного уравнения для этой области можно получить, рассматривая только уравнение (6.4), которое в сделанных приближениях принимает вид

$$\left( \frac{\omega_0^2 \omega^2}{k^2 c^2} - \omega_i \omega_e \right) j_y = i \omega \omega_e j_x. \quad (6.9)$$

Если учесть неравенство (6.7), то видно, что коэффициент при  $j_y$  должен быть мал, т. е. в области низких частот дисперсионное уравнение стремится к приближенному виду

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} \approx \frac{\omega_0^2}{\omega_i \omega_e}, \quad (6.10)$$

что не отличается от уравнения (4.8).

Таким образом, при низких частотах волны в плазме распространяются как параллельно, так и перпендикулярно к магнитному полю с одной и той же альфвеновской скоростью, которая дается формулой (4.10). Однако физическая природа этих волн различна. Вдоль магнитного поля распространяются поперечные колебания, подобные колебаниям струны. Они называются, как мы уже говорили, магнитогидродинамическими или альфвеновскими. Согласно уравнению (1.17), гидродинамическая скорость вещества для волн в холодной плазме всегда направлена поперек магнитного поля. Следовательно, альфвеновские волны являются поперечными как в электродинамическом, так и в гидродинамическом смысле.

Совсем иной характер имеют волны, распространяющиеся поперек магнитного поля. При частотах, низких в сравнении с ионной циклотронной, эти волны поляризованы почти линейно. Если направить ось  $z$  вдоль постоянного

магнитного поля, а ось  $x$  — вдоль направления распространения, то ток и электрическое поле волны направлены по оси  $y$ , а гидродинамическая скорость, согласно уравнению (1.17), по оси  $x$ .

Таким образом, волна является поперечной в электродинамическом смысле, но продольной в гидродинамическом. Переменное магнитное поле волны параллельно постоянно-му внешнему магнитному полю. Процесс колебания можно рассматривать как периодическое сжатие и расширение плазмы вместе с замороженным в нее магнитным полем. По физическому механизму этот процесс аналогичен распространению звука, вследствие чего он и называется магнитным звуком. Вместо газового давления здесь действует магнитное давление  $H^2/8\pi$ . Если в обычную формулу для скорости звука

$$u = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$$

вместо давления  $P$  подставить  $H^2/8\pi$ , а для замороженного поля  $\gamma_m = 2$ , то получится

$$u = \frac{|H|}{\sqrt{4\pi\rho}},$$

что совпадает с формулой (4.10).

При частотах, низких в сравнении с ионной циклотронной, скорость распространения магнитного звука не зависит от частоты аналогично обычной акустике. Эту область малых частот мы называем магнитоакустической областью. При частотах порядка или выше ионной циклотронной при том же физическом механизме возникает дисперсия. В этой области частот колебания остаются магнитно-звуковыми, но не являются уже магнитоакустическими.

## 7. Гибридные частоты

Для рассмотрения дисперсии магнитного звука необходимо прежде всего найти частоты аномальной дисперсии, при которых показатель преломления обращается в бесконечность (т. е. фазовая скорость в нуль). Частоты аномальной дисперсии магнитного звука для распространения точно поперек магнитного поля принято называть *гибридными частотами*  $\omega_h$ . Для их нахождения достаточно, приравняв нулю определитель системы (6.3)—(6.4), устремить

волновое число  $k$  к бесконечности. Таким образом, для гибридных частот  $\omega_h$  получается уравнение

$$(\omega_0^2 + \omega_i \omega_e - \omega_h^2)(\omega_i \omega_e - \omega_h^2) = \omega_e^2 \omega_h^2. \quad (7.1)$$

Это биквадратное уравнение имеет два корня для  $\omega_h^2$ . Простые приближенные выражения для гибридных частот получаются, если принять, что одна из них велика в сравнении со средней геометрической из электронной и ионной циклотронных частот, а другая мала в сравнении с плазменной частотой. Тогда при нахождении верхней гибридной частоты можно в обеих скобках левой части уравнения (7.1) пренебречь величиной  $\omega_i \omega_e$  в сравнении с  $\omega_h^2$ . Отсюда

$$\omega_{h1}^2 \approx \omega_0^2 + \omega_e^2. \quad (7.2)$$

В силу малости массы электрона в сравнении с массой иона уже один второй член правой части равенства (7.2) всегда велик в сравнении с  $\omega_i \omega_e$ . Таким образом, допущение, сделанное при нахождении верхней гибридной частоты, оправдывается всегда, и результат (7.2) можно считать правильным с точностью до отношения массы электрона к массе иона. Верхняя гибридная частота зависит только от плазменной и электронной циклотронной частот, вследствие чего ее называют электронно-плазменной гибридной частотой.

При нахождении второй гибридной частоты можно в первой скобке левой части уравнения (7.1) пренебречь величиной  $\omega_h^2$  в сравнении с  $\omega_0^2$ . В результате этого получаем

$$\omega_{h2}^2 \approx \omega_i \omega_e \frac{\omega_0^2 + \omega_i \omega_e}{\omega_0^2 + \omega_i \omega_e + \omega_e^2}. \quad (7.3)$$

Малость массы электрона в сравнении с массой иона позволяет всегда пренебречь в знаменателе величиной  $\omega_i \omega_e$  в сравнении с  $\omega_e^2$ . Поэтому вместо выражения (7.3) всегда можно написать

$$\omega_{h2}^2 \approx \omega_i \omega_e \frac{\omega_0^2 + \omega_i \omega_e}{\omega_0^2 + \omega_e^2}. \quad (7.4)$$

Величина  $\omega_0^2$  пропорциональна плотности плазмы. В плотной плазме, если  $\omega_0^2 \gg \omega_i \omega_e$ , формула (7.4) прибли-

женно записывается как

$$\omega_{h2}^2 \approx \frac{\omega_i \omega_e}{1 + \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2}}. \quad (7.5)$$

Если же плазменная частота велика и в сравнении с электронной циклотронной, то вторая гибридная частота стремится к средней геометрической из электронной и ионной циклотронных частот

$$\omega_{h2}^2 \approx \omega_i \omega_e. \quad (7.6)$$

При уменьшении плотности плазмы возникает довольно широкая промежуточная область, в которой выполнены неравенства

$$\omega_e^2 \gg \omega_0^2 \gg \omega_i \omega_e. \quad (7.7)$$

В этой области формула (7.4) дает

$$\omega_{h2}^2 \approx \omega_0^2 \frac{\omega_i}{\omega_e}. \quad (7.8)$$

Сделанное допущение  $\omega_{h2}^2 \ll \omega_0^2$  при этом оправдывается. При дальнейшем уменьшении плотности плазмы это допущение перестает уже быть справедливым, но непосредственно из уравнения (7.1) видно, что вторая гибридная частота стремится к ионной циклотронной, — результат, который получается также и из приближенной формулы (7.4). Таким образом, формулу (7.4) можно считать справедливой всегда.

Вторая гибридная частота зависит в основном от электронной и ионной циклотронных частот, вследствие чего ее и называют *электронно-ионной* гибридной частотой. Для плазмы, содержащей ионы только одного сорта, электронно-ионная частота является нижней гибридной частотой. Если плазма содержит несколько сортов ионов, то возникают еще ион-ионные гибридные частоты, каждая из которых лежит между двумя ионными циклотронными частотами.

## 8. Дисперсия магнитного звука

Из уравнений (6.3) и (6.4) находим

$$i \frac{j_x}{j_y} = - \frac{\omega \omega_e}{\omega_0^2 + \omega_i \omega_e - \omega^2} = \frac{\omega_0^2 \frac{\omega^2}{k^2 c^2 - \omega^2} + \omega^2 - \omega_i \omega_e}{\omega \omega_e}. \quad (8.1)$$

Отсюда получается дисперсионное уравнение

$$(\omega_0^2 + \omega_i \omega_e - \omega^2) \left( \omega_0^2 \frac{\omega^2}{k^2 c^2 - \omega^2} + \omega^2 - \omega_i \omega_e \right) = -\omega^2 \omega_e^2. \quad (8.2)$$

То же уравнение получится, конечно, если приравнять нулю определитель системы (6.3)—(6.4). Разрешив уравнение (8.2) относительно волнового числа  $k$ , можно записать дисперсионное уравнение в виде

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_i \omega_e - \omega^2 \left( 1 + \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2 + \omega_i \omega_e - \omega^2} \right)}. \quad (8.3)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой квадрат показателя преломления плазмы.

Формулы (8.2) или (8.3) выражают общее дисперсионное уравнение для колебаний, распространяющихся в плазме поперек магнитного поля и поляризованных в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. При высоких частотах это уравнение описывает так называемую необыкновенную электромагнитную волну\*. В пределе, когда частота волны велика в сравнении как с плазменной, так и с циклотронными частотами, уравнение (8.3) переходит в

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} \approx 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (8.4)$$

что совпадает с формулой (2.4), описывающей распространение электромагнитных волн в плазме без постоянного магнитного поля. При столь высоких частотах внешнее магнитное поле не влияет на распространение волн.

Частоты аномальной дисперсии, при которых показатель преломления плазмы обращается в бесконечность, можно найти, приравняв нулю знаменатель второго члена в правой части формулы (8.3). При этом получится уравнение, тождественное с уравнением (7.1). Частотами аномальной дисперсии при поперечном распространении являются рассмотренные уже выше гибридные частоты.

Магнитно-звуковыми мы называем колебания плотной плазмы, у которой плазменная частота велика в сравнении как с частотой колебаний, так и с циклотронными частота-

\* Обыкновенной при поперечном распространении называется волна, у которой электрическое поле параллельно постоянному внешнему магнитному полю.

ми. Как видно из уравнения (8.3), в этом предельном случае показатель преломления плазмы велик, и в правой части этого уравнения можно пренебречь единицей (что означает пренебрежение током смещения). Если выполнены условия

$$\omega_0^2 \gg \omega_i \omega_e; \quad \omega_0^2 \gg \omega^2,$$

то уравнение (8.3) принимает вид

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} \approx \frac{\omega_0^2}{\omega_i \omega_e - \omega^2 \left( 1 + \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2} \right)}, \quad (8.5)$$

чему соответствует выражение (7.5) для гибридной частоты.

Если же плотность плазмы настолько велика, что плазменная частота гораздо больше электронной циклотронной, то дисперсионное уравнение стремится к простому виду

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} \approx \frac{\omega_0^2}{\omega_i \omega_e - \omega^2}. \quad (8.6)$$

Согласно формуле (7.6), в рассматриваемом предельном случае электронно-ионная гибридная частота равна среднему геометрическому из электронной и ионной циклотронных частот. При частотах значительно ниже гибридной уравнение (8.6) стремится к предельному виду (6.10). В этой магнитоакустической области магнитный звук распространяется с альфвеновской скоростью.

При приближении к гибридной частоте наблюдается дисперсия: показатель преломления возрастает, т. е. фазовая скорость уменьшается. Мы пока полностью пренебрегаем тепловым движением и всеми диссипативными процессами, ведущими к затуханию волн. В этом приближении, если частота волн стремится снизу к гибридной частоте, то показатель преломления стремится к бесконечности, т. е. фазовая скорость к нулю. При переходе через гибридную частоту квадрат показателя преломления скачком меняется от  $+\infty$  до  $-\infty$ , и при частотах выше гибридной показатель преломления становится мнимым. Это значит, что магнитно-звуковые волны с частотой выше электронно-ионной гибридной частоты не могут проникать в холодную плазму точно поперек магнитного поля. Мнимый показатель преломления означает, что волна отражается от границы плазмы. При еще более высоких частотах поперечное распространение вновь становится возможным вблизи электрон-

но-плазменной (верхней) гибридной частоты, т. е. в области электромагнитных волн.

В области, где поперечное распространение запрещено, магнитный звук может распространяться в виде косых волн, которые мы рассмотрим ниже. Как мы увидим, уже малое отклонение от строго поперечного направления распространения снимает ограничение, налагаемое гибридной частотой.

В плазме с несколькими сортами ионов в выражение для электронно-ионной гибридной частоты надлежит подставлять вместо ионной циклотронной частоты величину

$$\tilde{\omega}_i = \left( \frac{\bar{Z}}{M} \right) \frac{eH}{c}, \quad (8.7)$$

где отношение  $Z/M$  усредняется по закону

$$\left( \frac{\bar{Z}}{M} \right) = \frac{1}{\sum_i Z_i n_i} \sum_i \frac{Z_i^2}{M} n_i. \quad (8.8)$$

Индексом  $i$  нумеруются только ионы. Кроме того, возникают дополнительные узкие области аномальной дисперсии вблизи ион-ионных гибридных частот. Для плазмы с двумя сортами ионов ион-ионная гибридная частота  $\omega_{ii}$  определяется соотношением

$$\omega_{ii}^2 = \omega_{i1} \omega_{i2} \frac{Z_1}{M_1} \frac{Z_2}{M_2} \frac{\sum_i n_i M_i}{\sum_i \frac{Z}{M_i} n_i}. \quad (8.9)$$

При прохождении снизу через эту частоту квадрат показателя преломления скачком меняется от  $+\infty$  до  $-\infty$ .

После очень узкой области частот, в которой волна не проникает в плазму, он быстро возвращается к первоначальному значению.

Если учесть тепловое движение, то вместо скачка квадрат показателя преломления будет резко уменьшаться при прохождении снизу узкого интервала частот вблизи каждой из гибридных частот. Уменьшение показателя преломления с возрастанием частоты называется в оптике аномальной дисперсией, причем в наиболее характерных случаях аномальной дисперсии это уменьшение происходит резко, в узком интервале частот. Именно поэтому гибридные частоты и следует называть частотами аномальной дисперсии.

## 9. Структура прямых волн в плотной плазме

Волны, распространяющиеся точно вдоль или поперек постоянного внешнего магнитного поля, мы называем *прямыми волнами*. Как мы видели, в этих простейших случаях волны с электрическим полем, параллельным и перпендикулярным к постоянному внешнему магнитному полю, оказываются независимыми. Волна с электрическим полем вдоль внешнего магнитного поля является плазменной при распространении вдоль поля и электромагнитной при распространении поперек поля. Сейчас нас интересуют волны, у которых электрическое поле лежит в плоскости, перпендикулярной к постоянному внешнему магнитному полю. При распространении вдоль поля это будут прямые волны с круговой поляризацией, переходящие при низких частотах в альфвеновскую волну, при распространении поперек поля — прямые магнитно-звуковые волны.

Если электрическое поле лежит в плоскости, перпендикулярной к постоянному магнитному, то и ток должен течь в той же плоскости. Это видно из уравнения (1.12), согласно которому продольный ток может вызываться только продольным электрическим полем. Вследствие перпендикулярности между направлениями тока и постоянного внешнего магнитного поля уравнения, описывающие структуру волн, упрощаются. Из уравнения (1.17) можно найти амплитуду массовой скорости

$$|\tilde{\mathbf{v}}| \approx \frac{H_0}{\rho c \omega} |\tilde{\mathbf{j}}|. \quad (9.1)$$

В дальнейшем будем рассматривать волны в плотной плазме ( $\omega_0^2 \gg \omega_i \omega_e$ ;  $\omega_0^2 \gg \omega^2$ ), у которых, как видно из предыдущего, показатель преломления велик и, следовательно, током смещения можно пренебречь. Тогда из уравнений Максвелла

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{H}} \approx \frac{4\pi}{c} \tilde{\mathbf{j}} \quad (9.2)$$

или для плоской волны

$$i [\mathbf{k} \tilde{\mathbf{H}}] = \frac{4\pi}{c} \tilde{\mathbf{j}}. \quad (9.3)$$

Если в плазме нет других токов, кроме связанных с рассматриваемой волной, то поле  $\mathbf{H}_0$  безвихревое и, следовательно, в формулы (9.2) или (9.3) входит только собственное

магнитное поле волны. Как видно из этих формул, оно перпендикулярно как к току, так и к направлению распространения. Следовательно, у волн, распространяющихся вдоль поля, собственное магнитное поле перпендикулярно, а у прямых магнитно-звуковых — параллельно внешнему. Из уравнения (9.3) можно найти связь между плотностью тока и собственным магнитным полем волны

$$|\tilde{\mathbf{H}}| \approx \frac{4\pi}{kc} |\tilde{\mathbf{j}}|. \quad (9.4)$$

Если выразить плотность тока через собственное магнитное поле волны и подставить в формулу (9.1), то получится связь между переменным магнитным полем и массовой скоростью

$$|\tilde{\mathbf{v}}| = \frac{k}{\omega} \frac{H_0}{4\pi\rho} |\tilde{\mathbf{H}}|. \quad (9.5)$$

Учитывая, что  $\omega/k = u_\phi$  есть фазовая скорость волны, это выражение можно переписать в виде

$$|\tilde{\mathbf{v}}| = \frac{H_0}{4\pi\rho u_\phi} |\tilde{\mathbf{H}}| = \frac{u_A^2}{u_\phi H_0} |\tilde{\mathbf{H}}|. \quad (9.6)$$

Переходя от точных уравнений к линейному приближению, мы заменяли лагранжеву производную эйлеровой и пренебрегали магнитным полем волны с сравнением с внешним постоянным полем. Последнее допустимо при очевидном условии

$$|\tilde{\mathbf{H}}| \ll |H_0|. \quad (9.7)$$

Замена лагранжевой производной на эйлерову допустима, если

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \approx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t},$$

т. е. при условии

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \ll \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t},$$

что для плоской волны принимает вид

$$k\tilde{v}^2 \ll \omega|\tilde{v}|$$

или

$$|\tilde{v}| \ll \frac{\omega}{k} \equiv u_\phi. \quad (9.8)$$

Таким образом, условия линейного приближения сводятся к тому, что амплитуда собственного магнитного поля волны должна быть мала в сравнении с внешним полем и амплитуда скорости вещества в волне — в сравнении с фазовой скоростью распространения волны. При низких частотах (в магнитоакустической области) скорости распространения как магнитогидродинамических, так и магнитно-звуковых волн стремятся к альфвеновской скорости

$$u_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (9.9)$$

Тогда для амплитуды скорости движения вещества из выражения (9.6) получается простое выражение

$$|\tilde{v}| \approx \frac{|\tilde{H}|}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (9.10)$$

Отсюда следует, что в магнитоакустической области

$$\frac{|\tilde{v}|}{u_A} \approx \frac{|\tilde{H}|}{H_0}, \quad (9.11)$$

и малая амплитуда переменного магнитного поля становится необходимым и достаточным условием для линейного приближения.

Напротив, близ частот аномальной дисперсии, где фазовая скорость стремится к нулю, амплитуда скорости вещества, согласно выражению (9.6), стремится к бесконечности, т. е. линейное приближение становится непригодным даже при малых амплитудах переменного поля. Это значит, что вблизи частот аномальной дисперсии возбуждение прямых волн потребовало бы очень большой затраты энергии. В действительности в таких условиях могут возбуждаться только косые волны.

Из формул (1.11) или (1.17) видно, что скорость движения вещества всегда перпендикулярна как к направлению внешнего магнитного поля, так и к направлению тока в волне. Волны, распространяющиеся вдоль поля, имеют круговую поляризацию. Это относится и к полям, и к токам, и к скорости движения плазмы. У этих волн направление тока, согласно формуле (4.2), совпадает с направлением электрического поля. Движение вещества при этом происходит в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения и под углом в  $90^\circ$  к направлению тока и электрического поля, т. е., следовательно, вдоль направления переменного магнитного поля волны.

Структура волны с круговой поляризацией показана на рис. 11. Изображенные на рисунке векторы вращаются вокруг направления внешнего магнитного поля. С уменьшением частоты волны вращение замедляется и в пределе получается альфвеновская волна.

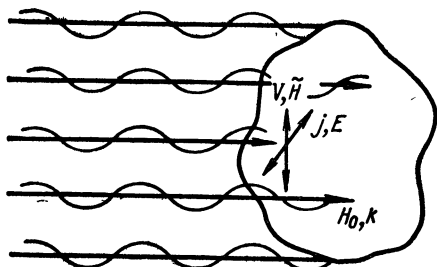


Рис. 11. Структура волны с круговой поляризацией.

и перпендикулярно к нему (ось  $y$ ) выражается формулой (8.1) и

$$\frac{|j_x|}{|j_y|} = \frac{\omega \omega_e}{\omega_0^2 + \omega_i \omega_e - \omega^2}. \quad (9.12)$$

Отношение амплитуд электрического поля находится из уравнений (6.1) и (6.2)

$$\frac{E_x}{E_y} = \left( \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{|j_x|}{|j_y|}. \quad (9.13)$$

Речь идет о прямой магнитно-звуковой волне, следовательно, поля и токи лежат в плоскости, перпендикулярной к внешнему магнитному полю. Движение вещества происходит в той же плоскости. Переменное магнитное поле волны параллельно внешнему магнитному полю.

Структура волны упрощается, если считать, что плазма достаточно плотная

$$\omega_0^2 \gg \omega_e \omega_i.$$

При этом, как видно из предыдущего, показатель преломления плазмы велик, и током смещения можно пренебречь. В плотной плазме формула (9.12) принимает вид

$$\frac{|j_x|}{|j_y|} \approx \frac{\omega \omega_e}{\omega_0^2} \ll 1, \quad (9.14)$$

а формула (9.13) — вид

$$\frac{|E_x|}{|E_y|} \approx \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \frac{\omega \omega_e}{\omega_0^2}. \quad (9.15)$$

Подставив сюда показатель преломления плотной плазмы для прямых магнитно-звуковых волн из уравнения (8.6), получаем

$$\frac{|E_x|}{|E_y|} \approx \frac{\omega \omega_e}{\omega_i \omega_e - \omega^2}. \quad (9.16)$$

Таким образом, в плотной плазме ток течет в основном поперек направления распространения. Вещество движется перпендикулярно к току, т. е. в основном вдоль направле-

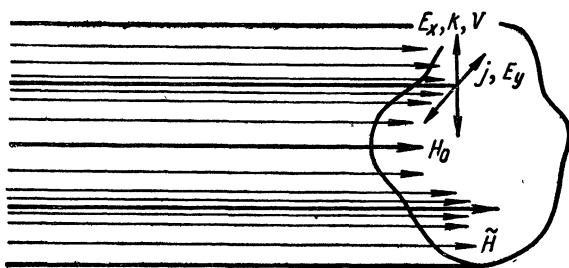


Рис. 12. Структура магнитно-звуковой волны.

ния распространения. Поляризация же электрического поля остается эллиптической, и вытянутость эллипса зависит от частоты. Вблизи гибридной частоты  $E_x \gg E_y$ , т. е. электрическое поле поляризовано в основном вдоль направления распространения и перпендикулярно к току. В магнито-акустической области ( $\omega^2 \ll \omega_i \omega_e$ ) вытянутость эллипса поляризации выражается как

$$\frac{|E_x|}{|E_y|} \approx \frac{\omega}{\omega_i}. \quad (9.17)$$

При частотах гораздо ниже ионной циклотронной поляризация становится поперечной (по отношению к направлению распространения). То, что ток вдоль направления распространения мал, означает, что в этом направлении электроны и ионы движутся с одинаковой скоростью. Перпендикулярно к направлению распространения в плотной плазме движутся только электроны, переносящие ток.

Структура прямой магнитно-звуковой волны в плотной плазме показана на рис. 12.

До сих пор мы имели в виду плоские волны. *Цилиндрическая магнитно-звуковая волна* отличается от плоской только тем, что распределения всех величин по радиусу выражаются линейными комбинациями из функций Бесселя. Дисперсионное уравнение для цилиндрических волн тождественно с рассмотренным выше дисперсионным уравнением для плоских волн. Прямой плоской волне отвечает чисто радиальная цилиндрическая магнитно-звуковая волна, у которой направление распространения совпадает с радиусом. У таких волн переменное магнитное поле направлено (так же как и постоянное) вдоль оси цилиндра. В плотной плазме вещество сжимается и расширяется в радиальном направлении, а замкнутые токи текут по азимуту.

## 10. Косые волны и тензорные характеристики плазмы

Для общего случая волн, распространяющихся под произвольным углом к постоянному магнитному полю, выкладки настолько усложняются, что желательно прибегнуть к сокращенной форме записи. Такая форма дается тензорным представлением электромагнитных свойств плазмы. Помимо удобства записи, тензорная форма позволяет яснее выявить анизотропный характер процессов распространения волн в плазме и включить эти процессы в общую формальную теорию распространения электромагнитных волн в анизотропных средах.

Тензором\* называется линейный оператор, превращающий один вектор в другой. В общем виде эта операция имеет вид

$$V'_a = \sum_b T_{ab} V_b. \quad (10.1)$$

Здесь  $V_b$  — составляющие начального вектора;  $V'_a$  — составляющие конечного вектора;  $T_{ab}$  — компоненты тензора\*\*.

\* Строго говоря, тензором второго ранга, но в этой книге с тензорами более высоких рангов мы не имеем дела.

\*\* В специальной литературе знак суммирования принято опускать, так как условлено, что всегда подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Мы не будем пользоваться этой условностью, поскольку в нашем курсе тензоры занимают слишком малое место, чтобы успеть привыкнуть к технике пользования ими.

Индексы  $a, b$  нумеруют координаты. Символически операция (10.1) записывается как

$$\mathbf{V}' = T\mathbf{V}. \quad (10.1a)$$

Поскольку речь идет о векторах в обычном трехмерном пространстве, тензор имеет девять компонентов и представляется таблицей (*матрицей*) вида

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

Компоненты, расположенные вдоль главной диагонали (слева сверху вправо вниз), называются *диагональными компонентами* тензора. Единичный тензор, оставляющий вектор без изменения, обозначается как

$$\delta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

Можно ввести обратный тензор  $T^{-1}$ , определенный условием

$$T^{-1}T = \delta_{ab}, \quad (10.4)$$

где знак умножения означает последовательное применение обоих операторов (порядок сомножителей в таком операторном произведении не безразличен). Умножая обе части символического равенства (10.1a) слева на  $T^{-1}$  и учитывая определение единичного тензора, находим

$$\mathbf{V} = T^{-1}\mathbf{V}'$$

или

$$\mathbf{V}_a = \sum_b T_{ab}^{-1} \mathbf{V}'_b.$$

Если рассматривать выражение (10.1) как систему линейных уравнений и разрешить ее относительно составляющих вектора, то получится формула, связывающая элементы прямой и обратной матрицы  $T$  и  $T^{-1}$ :

$$T_{ba}^{-1} = \frac{A_{ab}}{\Delta}, \quad (10.5)$$

где  $\Delta$  — определитель матрицы тензора  $T$ ;  $A_{ab}$  — алгебраическое дополнение элемента  $T_{ab}$  в этом определителе. Нахождение матрицы  $T^{-1}$  называется обращением матрицы  $T$ .

Связь между током и электрическим полем в анизотропной среде дается *тензором комплексной проводимости*

$$\mathbf{j}_a = \sum_b \sigma_{ab} \mathbf{E}_b. \quad (10.6)$$

Следует подчеркнуть, что в этой главе речь идет о тензоре комплексной проводимости для волновых процессов определенной частоты  $\omega$ . Он коренным образом отличается от обычной вещественной проводимости для постоянного тока. Название «тензор проводимости» происходит только от формальной аналогии между тензорной формулой (10.6) и обычным законом Ома. Но физический смысл здесь совершенно иной. В настоящем разделе мы пренебрегаем столкновениями, т. е. считаем проводимость для постоянного тока бесконечной вдоль магнитного поля и равной нулю поперек него. Компоненты тензора проводимости стремятся к этим предельным значениям лишь при стремлении частоты  $\omega$  к нулю. Тензор проводимости без столкновений характеризует индуктивность плазмы. По физическому механизму сопротивление плазмы для постоянного тока, выражаемое тензором (1.8.7), связано со столкновениями (или кулоновским трением); то же относится и к проводимости для постоянного тока (1.8.3) или (1.8.11). Между тем тензор комплексной проводимости для плазмы без столкновений связан с инерцией носителей тока (электронов и ионов).

Нам будет удобно ввести тензор удельного сопротивления плазмы  $R$ , определенный условием

$$\mathbf{E}_a = \sum_b R_{ab} \mathbf{j}_b. \quad (10.7)$$

Направим ось  $z$  в направлении внешнего магнитного поля, а ось  $x$  — так, чтобы волновой вектор лежал в плоскости  $xz$ . Тогда из уравнения (1.18)

$$R = \frac{4\pi}{\omega_0^2 \omega} \begin{pmatrix} i\alpha & \beta & 0 \\ -\beta & i\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega^2 \end{pmatrix}, \quad (10.8)$$

где

$$\alpha = \omega_i \omega_e - \omega^2; \quad (10.9)$$

$$\beta = \omega \omega_e. \quad (10.10)$$

Определитель матрицы

$$\Delta = i\omega^2(\alpha^2 - \beta^2). \quad (10.11)$$

Обращение матрицы  $R$  по формуле (10.5) дает

$$\sigma = \frac{\omega_0^2 \omega}{4\pi} \begin{pmatrix} -i \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} & \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2} & 0 \\ -\frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2} & -i \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

Обычно принято пользоваться вместо тензора проводимости однозначно связанным с ним тензором комплексной электрической проницаемости  $\epsilon$ . Он определяется формально условием

$$\mathbf{D}_a = \sum_b \epsilon_{ab} \mathbf{E}_b, \quad (10.13)$$

где электрическая индукция  $D$  определена уравнением

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{D}}{dt}. \quad (10.14)$$

Сопоставление уравнений (10.14) и (1.2) с учетом условия (10.6) дает для полей, зависящих от времени как  $e^{-i\omega t}$ , связь между тензорами проводимости и диэлектрической проницаемости в виде

$$\epsilon_{ab} = \delta_{ab} + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{ab}, \quad (10.15)$$

где  $\delta_{ab}$  — единичный тензор (10.3). Подстановка выражения (10.12) дает формулу для тензора диэлектрической проницаемости в обычно принятых обозначениях

$$\epsilon_{ab} = \begin{pmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (10.16)$$

где

$$\epsilon = 1 + \omega_0^2 \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}; \quad (10.17)$$

$$g = \omega_0^2 \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}; \quad (10.18)$$

$$\eta = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (10.19)$$

Если для компонентов тензора сопротивления воспользоваться значениями (10.9)—(10.10), полученными из уравнения для плотности тока (1.18), то формулы для  $\varepsilon$  и  $g$  примут вид

$$\varepsilon = 1 + \omega_0^2 \frac{\omega_i \omega_e - \omega^2}{(\omega_i \omega_e - \omega^2)^2 - \omega_e^2 \omega^2}; \quad (10.17a)$$

$$g = \omega_0^2 \frac{\omega_e \omega}{(\omega_i \omega_e - \omega^2)^2 - \omega_e^2 \omega^2}. \quad (10.18a)$$

Полученные выражения являются приближенными, поскольку при выводе уравнения (1.18) были опущены члены порядка отношения массы электрона к массе иона. Точные выражения компонентов тензора (10.16) для холодной плазмы без столкновений получаются непосредственно из уравнений движения (1.6)—(1.7)

Для вывода этих выражений представим полную плотность тока как сумму частичных токов, переносимых частицами разного рода

$$\mathbf{j} = \sum_k \mathbf{j}_k = e \sum_k Z_k n_k \mathbf{v}_k,$$

где индекс  $k$  нумерует все сорта частиц, включая и электроны, которым приписывается  $Z = -1$ . Для плоской волны уравнения движения (1.6)—(1.7) можно записать в виде

$$-i\omega \mathbf{v}_k = \frac{Z_k e}{M_k} \mathbf{E} + \omega_{ck} [\mathbf{v}_k \mathbf{h}], \quad (1.7a)$$

где  $\mathbf{h}$  — единичный вектор в направлении магнитного поля. В общей записи циклотронная частота  $\omega_c = ZeH/Mc$  имеет тот же знак, что и заряд  $Z$ , и, следовательно, для электронов должна считаться отрицательной. Когда мы будем в окончательных формулах подставлять вместо нее  $\omega_e$  и  $\omega_i$ , то они будут считаться существенно положительными.

Удобно ввести аналогично определению (10.7) тензор частичного электрического сопротивления плазмы  $R_k$ , связывающий электрическое поле и ток, переносимый частицами данного рода,

$$\mathbf{E} = R_k \mathbf{j}_k. \quad (10.7a)$$

Из уравнения (1.7a)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & - \frac{M_k}{n_k Z_k^2 e^2} (\omega_{ck} [\mathbf{j}_k \mathbf{h}] + i\omega \mathbf{j}_k) \equiv - \frac{4\pi}{\omega_{0k}^2} \times \\ & \times (\omega_{ck} [\mathbf{j}_k \mathbf{h}] + i\omega \mathbf{j}_k), \end{aligned}$$

где  $\omega_{0k}$  и  $\omega_{ck}$  — плазменная и циклотронная частоты для частиц, обозначенных индексом  $k$ . Отсюда для тензора частичного электрического сопротивления плазмы получается

$$R_k^j = \frac{4\pi}{\omega_{0k}^2} T_{kj}$$

где вспомогательный тензор  $T_k$  для частиц каждого рода определен равенством

$$T_k \mathbf{j} \equiv -(\omega_c [\mathbf{j}\mathbf{h}] + i\omega\mathbf{j}).$$

В прямоугольной системе координат с осью  $z$  вдоль магнитного поля тензор

$$T_k = \begin{pmatrix} -i\omega & -\omega_c & 0 \\ & c & -i\omega & 0 \\ & 0 & 0 & -i\omega \end{pmatrix}.$$

Обращением матрицы тензора сопротивления получается тензор частичной проводимости плазмы

$$\mathbf{j}_k = \sigma_k \mathbf{E} = R_k^{-1} \mathbf{E}.$$

Следовательно, полный тензор проводимости

$$\sigma = \sum_k R_k^{-1}.$$

Таким образом, тензор полного сопротивления плазмы (10.7) связан с тензорами частичного сопротивления равенством

$$R = \left( \sum_k R_k^{-1} \right)^{-1},$$

как при параллельном соединении проводников.

Выражая тензор проводимости через вспомогательный тензор  $T_k$ , получаем

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \sum_k \omega_{0k}^2 T_k^{-1}.$$

Тензор электрической проницаемости по определению

$$\varepsilon = \delta + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma = \delta + \frac{i}{\omega} \sum_k \omega_{0k}^2 T_k^{-1}.$$

Обращение матрицы тензора  $\Gamma_k$  дает

$$\Gamma_k^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{i\omega}{\omega_c^2 - \omega^2} & \frac{\omega_c}{\omega_c^2 - \omega^2} & 0 \\ -\frac{\omega_c}{\omega_c^2 - \omega^2} & -\frac{i\omega}{\omega_c^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{\omega} \end{pmatrix}.$$

После подстановки этого результата тензор  $\epsilon$  примет вид выражения (10.16) со значениями компонентов:

$$\epsilon = 1 + \sum_k \frac{\omega_{0k}^2}{\omega_{ck}^2 - \omega^2}; \quad (10.176)$$

$$g = \sum_k \frac{\omega_{0k}^2 \omega_{ck}}{\omega (\omega_{ck}^2 - \omega^2)}; \quad (10.186)$$

$$\eta = 1 - \sum_k \frac{\omega_{0k}^2}{\omega^2}. \quad (10.196)$$

В этих выражениях суммирование производится по всем сортам частиц, присутствующих в плазме, причем для электронов циклотронная частота  $\omega_c$  считается отрицательной. Если плазма состоит из электронов и одного сорта ионов с зарядовым числом  $Z$ , то, используя соотношения

$$\omega_{0i}^2 \omega_e^2 = \omega_{0e}^2 \omega_i \omega_e,$$

$$\omega_{0e}^2 \omega_i^2 = \omega_{0i}^2 \omega_i \omega_e,$$

легко привести эти выражения к виду

$$\epsilon = 1 + (\omega_{0e}^2 + \omega_{0i}^2) \frac{\omega_i \omega_e - \omega^2}{(\omega_e^2 - \omega^2)(\omega_i^2 - \omega^2)}; \quad (10.17в)$$

$$g = \omega_{0e}^2 \left(1 - \frac{\omega_i^2}{\omega_e^2}\right) \frac{\omega \omega_e}{(\omega_e^2 - \omega^2)(\omega_i^2 - \omega^2)}. \quad (10.18в)$$

Постоянные коэффициенты в этих формулах весьма мало отличаются от электронной плазменной частоты. Практически без ущерба для точности можно доложить

$$\omega_{0e}^2 + \omega_{0i}^2 \approx \omega_{0e}^2 \left(1 - \frac{\omega_i^2}{\omega_e^2}\right) \equiv \omega_0^2.$$

Тогда формулы для компонентов тензора  $\varepsilon$  в двухкомпонентной плазме примут вид

$$\varepsilon = 1 + \omega_0^2 \frac{\omega_i \omega_e - \omega^2}{(\omega_e^2 - \omega^2)(\omega_i^2 - \omega^2)}; \quad (10.17г)$$

$$g = \omega_0^2 \frac{\omega \omega_e}{(\omega_e^2 - \omega^2)(\omega_i^2 - \omega^2)}. \quad (10.18г)$$

Точное выражение компонента  $\eta$  отличается от приближенного только значением  $\omega_0$ . Точные и приближенные выражения компонентов  $\varepsilon$  и  $g$  отличаются от приближенных, кроме того, еще и знаменателями в правой части. Если расположить эти знаменатели по степеням  $\omega$ , то они имеют следующий вид: в приближенных выражениях, полученных из уравнения для плотности тока,

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_e^2 + 2\omega_i \omega_e) + (\omega_i \omega_e)^2;$$

в точных выражениях, полученных из уравнений движения,

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_e^2 + \omega_i^2) + (\omega_i \omega_e)^2.$$

Как видим, различие только в членах порядка  $\omega_i/\omega_e$ , стоящих при  $\omega^2$ . Знаменатель точных выражений обращается в нуль при циклотронных частотах, знаменатель приближенных выражений — при частотах, весьма близких к ним. Приближенные выражения могут давать заметную ошибку только в непосредственной близости циклотронных частот, где знаменатель стремится к нулю. Следует, впрочем, иметь в виду, что вблизи как самих циклотронных частот, так и их обертонов даже и весьма слабое тепловое движение сильно меняет характер распространения волн, так что при этих частотах само приближение холодной плазмы практически неприменимо. Здесь надлежит пользоваться методами физической кинетики.

Диагональные компоненты тензора электрической проницаемости имеют простой смысл. Компонент  $\eta$  есть проницаемость плазмы вдоль магнитного поля. Она не отличается от проницаемости в отсутствие магнитного поля. Компонент  $\varepsilon$  есть проницаемость поперек магнитного поля. При низких частотах она стремится к значению

$$\varepsilon_{0\perp} = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_i \omega_e} = 1 + \frac{4\pi n_i M c^2}{H^2}. \quad (10.20)$$

Если пренебречь в правой части единицей, происходящей от тока смещения, то эта величина равна квадрату альфвеновского показателя преломления, т. е. тому значению поперечной диэлектрической проницаемости плазмы, которое было получено выше при рассмотрении поляризационного дрейфа. Компонент  $g$  характеризует гиротропные свойства плазмы. При низких частотах он стремится к нулю.

Общее дисперсионное уравнение для косых волн получается, если расписать векторное уравнение (1.5) в проекциях, выразить ток через поле или поле через ток и приравнять нулю определитель получившейся системы линейных уравнений. Дисперсионное уравнение имеет довольно громоздкий вид. Для сокращения письма его принято записывать через компоненты тензора комплексной диэлектрической проницаемости (10.16) в виде

$$\left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon\right) \left[ \varepsilon \left(\frac{k_1^2 c^2}{\omega^2} - \eta\right) + \frac{k_3^2 c^2}{\omega^2} \eta \right] + g^2 \left(\frac{k_1^2 c^2}{\omega^2} - \eta\right) = 0. \quad (10.21)$$

Здесь  $k_1$  — составляющая волнового вектора поперек магнитного поля (по оси  $x$ );  $k_3$  — составляющая волнового вектора вдоль магнитного поля (по оси  $z$ )

$$k^2 = k_1^2 + k_3^2.$$

При рассмотрении волн в неограниченной среде задача ставится обычно так: какова будет фазовая скорость распространения волны с заданной частотой в заданном направлении? Тогда удобно считать искомой величиной показатель преломления плазмы  $N$  и писать дисперсионное уравнение в виде

$$(N^2 - \varepsilon) \left[ \varepsilon (N_{\perp}^2 - \eta) + N_{\parallel}^2 \eta \right] + g^2 (N_{\perp}^2 - \eta) = 0, \quad (10.22)$$

где

$$N = \frac{k^2 c^2}{\omega^2}$$

показатель преломления плазмы:

$$N_{\parallel} = N \cos \theta;$$

$$N_{\perp} = N \sin \theta.$$

Здесь  $\theta$  — угол между направлением волнового вектора и направлением постоянного магнитного поля

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_1}{k_3}.$$

Направлением распространения волны считается обычно направление волнового вектора, т. е. фазовой скорости. Чтобы найти групповую скорость, нужно продифференцировать дисперсионное уравнение и представить результат в виде

$$d\omega = u_{\perp} dk_1 + u_{\parallel} dk_3. \quad (10.23)$$

Величины  $u_{\perp}$  и  $u_{\parallel}$  будут составляющими групповой скорости поперек и вдоль магнитного поля.

При рассмотрении колебаний ограниченного объема плазмы волновой вектор  $k$  или по крайней мере одна из его составляющих задается геометрическими размерами плазменного объема, как мы увидим ниже, при рассмотрении плазменных волноводов и резонаторов. Частоты аномальной дисперсии, при которых показатель преломления плазмы обращается в бесконечность, для произвольного направления распространения можно найти, если в уравнении (10.22) оставить только члены с высшими степенями  $N$ . Тогда для особенностей показателя преломления получим уравнение

$$\varepsilon \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta = 0$$

или

$$\operatorname{tg}^2 \theta = -\frac{\eta}{\varepsilon}. \quad (10.24)$$

Выражение (10.17г) удобно представить в виде

$$\varepsilon = \frac{\omega^4 - \omega^2(\omega_0^2 + \omega_e^2 + \omega_i^2) + \omega_i \omega_e (\omega_0^2 + \omega_i \omega_e)}{(\omega_e^2 - \omega^2)(\omega_i^2 - \omega^2)}. \quad (10.17в)$$

Тогда уравнение (10.24) принимает вид

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\omega^2} \times \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_e^2 - \omega^2)(\omega_i^2 - \omega^2)}{\omega^4 - \omega^2(\omega_0^2 + \omega_e^2 + \omega_i^2) + \omega_i \omega_e (\omega_0^2 + \omega_i \omega_e)}. \quad (10.25)$$

Отсюда видно, что для распространения вдоль магнитного поля ( $\theta = 0$ ) частоты аномальной дисперсии совпадают

с плазменной, а также электронной и ионной циклотронными частотами.

Для распространения точно поперек поля ( $\theta = \pi/2$ ) они равны корням знаменателя правой части уравнения (10.25) (гибридные частоты). Для косо́го распространения нужно решать кубическое уравнение относительно квадрата частоты. Отметим только одно простое и важное свойство этого уравнения. Предположим, что нижняя из частот аномальной дисперсии удовлетворяет условиям  $\omega_h^2 \ll \omega_0^2$  и  $\omega_h^2 \ll \omega_i \omega_e$ . Тогда для этой частоты из уравнения (10.25) получим

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{\omega_e}{\omega_i \left(1 + \frac{\omega_i \omega_e}{\omega_0^2}\right)} \frac{\omega_i^2 - \omega_h^2}{\omega_h^2}. \quad (10.26)$$

Для распространения точно поперек поля нижняя частота аномальной дисперсии обращается в нуль. Но уже при малых угловых отклонениях ( $\operatorname{tg}^2 \theta \sim M/Zm$ ) она стремится к ионной циклотронной частоте, т. е. к тому же значению, что и для распространения вдоль поля.

Покажем, как из общего дисперсионного уравнения получаются рассмотренные выше простейшие случаи. Для распространения вдоль магнитного поля  $\theta = 0$  уравнение (10.22) переходит в

$$N^4 - 2N^2 \varepsilon + \varepsilon^2 = g^2,$$

откуда

$$N^2 = \varepsilon \pm g. \quad (10.27)$$

Для распространения поперек поля получается

$$(N^2 - \eta)(N^2 \varepsilon - \varepsilon^2 + g^2) = 0, \quad (10.28)$$

т. е. дисперсионное уравнение распадается на два. Одно из них

$$N^2 = \eta \quad (10.29)$$

описывает электромагнитную волну, поляризованную вдоль магнитного поля. Второе

$$N^2 = \frac{\varepsilon^2 - g^2}{\varepsilon} \quad (10.30)$$

описывает прямую магнитно-звуковую волну. Если для компонентов тензора воспользоваться полученными из

уравнения для плотности тока выражениями (10.17)—(10.19), то уравнения (10.27), (10.29) и (10.30) совпадут соответственно с выражениями (3.5), (5.3) и (8.3).

Структура косых волн определяется значением безразмерного числа

$$\rho = i \frac{E_y}{E_x} = \frac{g}{N^2 - \varepsilon}, \quad (10.31)$$

которое мы называем гиротропным числом, так как оно связано с гиротропными свойствами плазмы. Для волн, распространяющихся вдоль постоянного магнитного поля, согласно уравнению (10.27)

$$\rho_{\parallel} = \pm 1, \quad (10.32)$$

что отвечает круговой поляризации волн. Для прямой магнитно-звуковой волны, согласно уравнению (10.30)

$$\rho_{\perp} = -\frac{\varepsilon}{g}. \quad (10.33)$$

В плотной плазме при низких частотах

$$\rho_{\perp} \approx -\frac{\omega_i}{\omega} \quad (10.34)$$

в согласии с полученным ранее результатом (9.17). Абсолютное значение  $\rho$  характеризует непосредственно вытянутость эллипса поляризации.

Рассмотрим поведение косых волн при низких частотах. При стремлении частоты к нулю продольная проницаемость  $\eta$  стремится к бесконечности как квадрат частоты, а компонента  $g$  стремится к нулю как первая степень частоты. Следовательно, в дисперсионном уравнении (10.21) для низких частот следует сохранить только члены, содержащие  $\eta$  и не содержащие  $g^2$ , что дает

$$\left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon\right) \left(\frac{k_3^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon\right) = 0. \quad (10.35)$$

Но, как мы видели, поперечная проницаемость  $\varepsilon$  при низких частотах стремится к квадрату альфвеновского показателя преломления. Таким образом, в магнитоакустической области возможны две волны. У одной из них фазовая скорость равна альфвеновской независимо от направления распространения, у другой фазовая скорость зависит от направления распространения так, что ее составляющая вдоль магнитного поля равна альфвеновской скорости.

Первая волна при распространении точно поперек поля переходит в прямую магнитно-звуковую волну; естественно назвать ее косой магнитно-звуковой волной. Вторая волна при распространении точно вдоль поля переходит в альфвеновскую (магнитогидродинамическую); естественно назвать ее косой альфвеновской волной. Дисперсионное уравнение для этой волны не содержит  $k_1$ . Следовательно, согласно уравнению (10.23), групповая скорость ее направлена вдоль магнитного поля.

В области дисперсии свойства косых волн сильно усложняются, и мы не будем их подробно разбирать.

## 11. Волны в плазме с конечной проводимостью

Если понимать буквально приближение холодной плазмы, т. е. приписывать электронам и ионам только упорядоченные скорости, то из всех диссипативных процессов должна рассматриваться только передача импульса между электронами и ионами, т. е. конечная проводимость. Диссипация, связанная с этим механизмом, есть обычное джоулево тепло. Все остальные диссипативные процессы связаны уже с тепловым движением. Необходимо только заметить, что эти процессы становятся весьма существенными, когда фазовая скорость волны приближается к скоростям теплового движения частиц. Поэтому вблизи частот аномальной дисперсии, где фазовая скорость стремится к нулю, приближение холодной плазмы становится непригодным даже при очень низких температурах. Передача импульса между заряженными частицами происходит посредством непрерывного кулоновского взаимодействия («кулоновское трение»). Оно учитывается введением дополнительных членов в правые части уравнений движения (1.6)—(1.7) аналогично уравнениям (1.7.1)—(1.7.6) или (1.7.14)—(1.7.15). Входящие в эти члены эффективные частоты столкновений электронов и ионов  $\nu_{ei}$  и  $\nu_{ie}$  связаны соотношением (1.7.16). При переходе от уравнений движения частиц к макроскопическим уравнениям уравнение для массовой скорости (1.11) не изменится. В уравнение для плотности тока (1.16), если пренебречь членами, содержащими массу иона в знаменателе, войдет только член, выражающий потерю импульса электронами

$$-\tilde{m}\nu_{ei}(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i), \quad (11.1)$$

где  $\nu_{ei}$  — эффективное число столкновений электронов с ионами,  $m$  — приведенная масса. Вместо эффективной частоты столкновений часто пользуются обратной величиной — средним временем передачи импульса, которое определяется соотношением

$$\frac{1}{\tau_{ei}} = \nu_{ei}. \quad (11.2)$$

Для полностью ионизованной плазмы в макроскопические уравнения войдет только член, выражающий передачу импульса от электронов к ионам, так что индекс  $ei$  можно опустить. Кроме того, в принятом приближении приведенная масса не отличается от массы электрона, так что в дальнейшем будем полагать

$$\nu_{ei} \equiv \nu; \quad \tau_{ei} \equiv \tau; \quad \tilde{m} \approx m. \quad (11.3)$$

Обобщенный закон Ома (1.6) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{\omega_0^2}{4\pi} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] \right) - \omega_e [\mathbf{jh}] - \frac{\mathbf{j}}{\tau}. \quad (11.4)$$

Для постоянного тока получим

$$\mathbf{j} + \omega_e \tau_{ei} [\mathbf{jh}] = \frac{\omega_0^2 \tau_{ei}}{4\pi} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] \right). \quad (11.4a)$$

Уравнение (11.4) или (11.4a) называют обобщенным законом Ома. Роль проводимости играет здесь величина

$$\sigma_0 = \frac{\omega_0^2 \tau_{ei}}{4\pi} = \frac{ne^2}{m} \tau. \quad (11.5)$$

Это соотношение позволяет рассматривать время передачи импульса электронами как феноменологическую характеристику плазмы, связанную с проводимостью для постоянного тока.

Для колебательного процесса, в котором все величины зависят от времени как  $e^{-i\omega t}$ , получим вместо уравнения (1.18)

$$\omega (\omega + i\nu) \mathbf{j} = i \frac{\omega_0^2 \omega^2}{4\pi} \mathbf{E} + \omega_i \omega_e [\mathbf{j} - \mathbf{h}(\mathbf{jh})] - i\omega \omega_e [\mathbf{jh}]. \quad (11.6)$$

В тензоре комплексного сопротивления плазмы изменятся только диагональные компоненты. В них величина  $\omega^2$  заменится на

$$\omega (\omega + i\nu). \quad (11.7)$$

Отсюда по формулам (10.17)—(10.18) получаются компоненты тензора комплексной диэлектрической проницаемости; нет необходимости их выписывать. Подстановка в уравнение (10.21) дает дисперсионное уравнение с учетом конечной проводимости, имеющее довольно громоздкий вид. Решение этого уравнения позволяет найти затухание волны в пространстве или во времени. Для бегущей волны с заданной вещественной частотой получится комплексное волновое число, мнимая часть которого описывает затухание волны в пространстве. Для стоячей волны с заданным вещественным волновым числом получится комплексная частота, мнимая часть которой описывает затухание волны во времени.

Энергия, поглощаемая плазмой в единице объема за единицу времени, выражается как среднее значение по периоду колебаний скалярного произведения вещественных частей комплексных векторов электрического поля и плотности тока

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{4} \sum_a (\mathbf{j}_a E_a^* + E_a \mathbf{j}_a^*), \quad (11.8)$$

где  $e$  — плотность энергии; индекс  $a$  нумерует координаты; звездочка означает комплексно-сопряженную величину. Через тензоры проводимости и диэлектрической проницаемости поглощенная энергия выражается как

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \sigma'_{ab} E_a^* E_b = \frac{1}{2} \frac{\omega}{4\pi} \sum_{a,b} \varepsilon''_{ab} E_a^* E_b. \quad (11.9)$$

Здесь

$$\sigma'_{ab} = \frac{1}{2} (\sigma_{ab} + \sigma_{ba}^*); \quad (11.10)$$

$$\varepsilon''_{ab} = \frac{1}{2i} (\varepsilon_{ab} - \varepsilon_{ba}^*). \quad (11.11)$$

Величины  $\sigma'_{ab}$  содержат только те слагаемые компонентов тензора  $\sigma$ , которые не изменяются при комплексном сопряжении и перестановке индексов; такие величины называются эрмитовскими. Таким образом,  $\sigma'$  есть эрмитовская часть тензора проводимости. Величины  $\varepsilon''_{ab}$  изменяют свой знак после тех же операций, т. е. представляют собой антиэрмитовскую часть тензора диэлектрической проницаемости. Эрмитовскую часть тензора проводимости составляют вещественные части диагональных и мнимые части недиагональ-

ных компонентов. Антиэрмитовскую часть тензора диэлектрической проницаемости составляют мнимые части диагональных и вещественные части недиагональных компонентов. Именно эти части тензоров приводят к поглощению энергии волны, а следовательно, и к затуханию.

Чтобы выяснить конкретный характер затухания волны из-за конечной проводимости, рассмотрим в качестве простейшего случая волну, распространяющуюся вдоль магнитного поля. Из выражения (11.7) следует, что дисперсионное уравнение (5.4) примет при учете конечной проводимости вид

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_i \omega_e - \omega(\omega + i\nu) \mp \omega \omega_e}. \quad (11.12)$$

Избавляясь от мнимости в знаменателе, получаем

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2 (\omega_i \omega_e - \omega^2 \mp \omega \omega_e) + i\omega_0^2 \omega \nu}{(\omega_i \omega_e - \omega^2 \mp \omega \omega_e)^2 + \omega^2 \nu^2}. \quad (11.13)$$

Величина, стоящая в скобках, согласно (5.4), равна  $\frac{\omega_0^2}{N_0^2}$ , где  $N_0$  — показатель преломления плазмы без поправки на затухание. Следовательно, формулу (11.13) можно записать в виде

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^4 N_0^2 + i\omega_0^2 N^4 \omega \nu}{\omega_0^4 + N_0^4 \omega^2 \nu^2}. \quad (11.13a)$$

Для бегущей волны заменяем  $k$  на комплексное волновое число

$$\tilde{k} = k + \kappa i. \quad (11.14)$$

Легко найти мнимую часть  $\kappa$ , представляющую пространственное затухание. Из формул (11.13a) и (11.14) следует

$$k^2 - \kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} N_0^2 \frac{1}{1 + N_0^4 \frac{\omega^2 \nu^2}{\omega_0^4}}; \quad (11.15)$$

$$\kappa = \frac{1}{1 + N_0^4 \frac{\omega^2 \nu^2}{\omega_0^4}} \frac{1}{2k} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{N_0^4}{\omega_0^2} \omega \nu. \quad (11.16)$$

При слабом затухании и вдали от частот аномальной дисперсии

$$\frac{\kappa}{k} \approx \frac{1}{2} N_0^2 \frac{\omega \nu}{\omega_0^2}. \quad (11.17)$$

Эта величина представляет относительное затухание на одной длине волны.

Для стоячей волны заменяем  $\omega$  на комплексную частоту

$$\tilde{\omega} = \omega - i\delta \quad (11.18)$$

и подобно предыдущему получаем для слабого затухания

$$\frac{\delta}{\omega} \approx \frac{1}{2} N_0^2 \frac{\omega \nu}{\omega_0^2}. \quad (11.19)$$

Эта величина дает относительное затухание за один период. Тождественные результаты получаются из уравнения (8.6) для магнитного звука.

При низких частотах (в магнитоакустической области), подставив вместо  $N_0$  альфвеновский показатель преломления, получаем совсем простой результат

$$\frac{\kappa}{k} = \frac{\delta}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\omega \nu}{\omega_i \omega_e}. \quad (11.20)$$

Этот результат применим не только к плазме, но к любой проводящей текучей среде; следовательно, его можно выразить через макроскопические величины. И действительно, пользуясь формулами (11.5) и (1.19); можем записать результат (11.20) в виде\*

$$\frac{\kappa}{k} = \frac{\delta}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\omega \rho c^2}{\sigma H^2} = 2\pi \frac{\omega \rho}{H^2} D_M = \frac{1}{2} \frac{\omega}{u_A^2} D_M. \quad (11.20a)$$

Здесь  $D_M = c^2/4\pi\sigma$  — коэффициент диффузии магнитного поля.

---

\* Другой вывод этого результата можно найти в книге [12], где, кроме того, показано, что при учете вязкости к  $D_M$  надо добавить кинематическую вязкость. В формуле, выведенной в указанном курсе, содержится опечатка. В наших обозначениях напечатано

$$\kappa = \frac{\omega^3}{2u_A^2} D_M \text{ должно быть } \kappa = \frac{\omega^2}{2u_A^3} D_M \quad (\text{кинематическую вязкость опускаем}).$$

## 12. Резонансы поглощения

Вблизи частот аномальной дисперсии даже и малая конечная проводимость, согласно выражениям (11.13)—(11.16), коренным образом меняет характер распространения волн. Показатель преломления уже не обращается в бесконечность. Вещественная часть его сохраняет конечное значение, мнимая же часть, характеризующая затухание, в области аномальной дисперсии резко возрастает. При той частоте, при которой в идеальной плазме показатель преломления обращался в бесконечность, мнимая часть его оказывается обратно пропорциональной эффективной частоте столкновений, т. е. прямо пропорциональной проводимости. При возрастании проводимости область частот, где существенно затухание, сужается, но максимальное значение мнимой части волнового числа возрастает. В этом смысле частоты аномальной дисперсии обладают резонансными свойствами, почему их и называют часто резонансными частотами плазмы. Резонансные свойства частот аномальной дисперсии проявляются еще сильнее, если учесть не только столкновения, но и тепловое движение. Уменьшение фазовой скорости волны с приближением к частотам аномальной дисперсии приводит к увеличению числа частиц, движущихся в резонансе с волной, т. е. с тепловой скоростью, равной фазовой скорости волны. При частотах аномальной дисперсии сколь угодно слабое тепловое движение уже приводит к резонансному поглощению энергии. Таким образом, к затуханию из-за конечной проводимости добавляются еще весьма существенные кинетические резонансные эффекты.

Говоря о резонансных частотах плазмы, следует различать два совершенно различных вида резонансных явлений. При частотах аномальной дисперсии происходят, как мы видели, *резонансы поглощения*. Резонансные явления имеют при этом характер резкого усиления затухания волн в узком интервале частот. Эти области частот зависят только от свойств плазмы и магнитного поля, но не зависят от геометрии и размеров плазменного объема.

Совершенно другой характер имеют резонансные явления, связанные с возникновением стоячих волн в ограниченном плазменном объеме. Такой объем имеет резонансные частоты, зависящие от его размеров и формы. При соблюдении резонансных условий резко возрастает амплитуда

стоячих волн при заданном возбуждении. Такого рода резонансы раскачки мы рассмотрим ниже.

### 13. Плазменные волноводы

В ограниченном объеме плазмы на волновое число накладываются граничные условия. Объем, имеющий ограниченное поперечное сечение, но неограниченную длину, называется волноводом. Граничные условия на боковой поверхности волновода определяют поперечное волновое число.

При заданной частоте волны и геометрии поперечного сечения дисперсионное уравнение определяет продольное волновое число, а следовательно, и скорость распространения вдоль волновода. При определенных значениях частоты продольное волновое число может стать мнимым, т. е. распространение волны невозможным. Такие частоты называются *граничными*.

Рассмотрим цилиндрический плазменный волновод с продольным магнитным полем. В таком волноводе могут распространяться цилиндрические и винтовые волны, в которых все величины зависят от координат и времени как

$$f(z, r, \varphi, t) = Z(k_1 r) e^{i t}. \quad (13.1)$$

Здесь  $Z$  — цилиндрическая функция, т. е. линейная комбинация функций Бесселя;  $k_1$  — радиальное волновое число;

$$\psi = k_3 z + m\varphi - \omega t; \quad (13.2)$$

$k_3$  — осевое (продольное) волновое число;  $m$  — азимутальное число. Для волн с азимутальным числом  $m$  радиальные функции  $Z(k_1 r)$  для поперечных составляющих векторов внутри плазмы имеют вид

$$Z_{r, \varphi}(k_1 r) = A_+ J_{m+1}(k_1 r) + A_- J_{m-1}(k_1 r). \quad (13.3)$$

Соотношение между функциями Бесселя

$$\frac{dJ_m}{dx} = \frac{1}{2} (J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x))$$

позволяет выразить  $Z_{r,\varphi}$  через функцию Бесселя порядка  $m - 1$  или  $m + 1$  и производную от функции порядка  $m$

$$\begin{aligned} Z_{r,\varphi}(k_1 r) &= (A_+ + A_-) J_{m+1}(k_1 r) + 2 \frac{A_-}{k_1} \frac{dJ_m(k_1 r)}{dr} = \\ &= (A_+ + A_-) J_{m-1}(k_1 r) - \frac{2A_+}{k_1} \frac{dJ_m(k_1 r)}{dr}. \end{aligned} \quad (13.3a)$$

Коэффициенты  $A_+$  и  $A_-$  не являются независимыми: их отношение определяется свойствами плазмы. Так, для азимутальной составляющей электрического поля

$$A_+ = A(1 - p); \quad A_- = A(1 + p), \quad (13.4)$$

где  $p$  — гиротропное число, определенное формулой (10.31). Для осевых составляющих векторов радиальная функция внутри плазмы выражается как

$$Z_z(k_1 r) = A_z J_m(k_1 r). \quad (13.5)$$

Для осевой составляющей электрического поля коэффициент

$$A_z = A \frac{N_{\parallel} N_{\perp}}{N_{\perp}^2 - \eta} = A \frac{k_1 k_3 c^2}{k_1^2 c^2 + \omega_0^2 - \omega^2}. \quad (13.6)$$

Составляющие переменного магнитного поля связаны с составляющими электрического поля уравнением Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial t} = i \frac{\omega}{c} \tilde{\mathbf{H}}. \quad (13.7)$$

С помощью этого уравнения радиальное переменное магнитное поле выражается в конечном виде через составляющие электрического поля

$$\tilde{\mathbf{H}}_r = m \frac{c}{\omega r} \mathbf{E}_z - \frac{k_3 c}{\omega} \mathbf{E}_{\varphi}. \quad (13.8)$$

Остальные составляющие переменного магнитного поля выражаются через другие линейные комбинации функций Бесселя

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\varphi} = i \frac{k_3 c}{\omega} A [(q - p) J_{m+1}(k_1 r) - (q + p) J_{m-1}(k_1 r)] \cdot e^{i\psi}. \quad (13.9)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_z = 2ipA \frac{k_1 c}{\omega} J_m(k_1 r) e^{i\psi}. \quad (13.10)$$

Здесь

$$q = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{k_1^2 c^2 + \omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{\eta \omega^2}{k_1^2 c^2 - \eta \omega^2}. \quad (13.11)$$

Граничные условия на боковой поверхности волновода могут быть различными. Если плазма непосредственно граничит с металлическими стенками и проводимость плазмы мала в сравнении с проводимостью металла, то металл в сравнении с плазмой можно считать идеальным проводником и граничное условие требует обращения в нуль тангенциальных составляющих электрического поля  $E_z$  и  $E_\varphi$ . Согласно соотношению (13.8), граничное условие для  $H_r$  при этом удовлетворяется автоматически.

Если боковая поверхность волновода свободно излучает электромагнитные волны в пространство, то граничные условия на этой поверхности заключаются в сопряжении волны в плазме с волной в окружающей среде. Для низкочастотных волн показатель преломления плазмы велик и граничное условие на свободной поверхности сводится приблизительно к обращению в нуль тангенциальных составляющих магнитного поля. Излучение волн в пространство связано с потерей энергии, которая добавляется к диссипации и увеличивает затухание волн. Но при большом показателе преломления это добавочное затухание невелико. Указанные два вида граничных условий являются простейшими предельными случаями. Если между плазмой и металлическими стенами имеется зазор, то граничные условия усложняются. ■

По своим гиротропным свойствам плазма аналогична таким гиротропным средам, как ферриты, широко применяемые в радиотехнике. Расчет плазменного волновода может быть выполнен общими методами, разработанными в радиотехнике для гиротропных сред, т. е. в основном для ферритов. Мы не будем излагать здесь эту довольно громоздкую методику расчета, отсылая интересующихся к специальной литературе, а остановимся на простейших случаях.

Если азимутальное число  $m = 0$ , то винтовая волна переходит в осесимметричную цилиндрическую волну. Приведенные выше формулы для радиального распределения амплитуд в этом случае упрощаются. Азимутальная и радиальная составляющие электрического поля пропорциональны функции  $J_1(k_1 r)$ , осевые составляющие электрического и магнитного полей — функции  $J_0(k_1 r)$ . Однако, ввиду того что граничные условия наложены одновременно на две составляющие поля, удовлетворить им может только линейная комбинация двух простых цилиндрических волн с разными значениями  $k_1$ . Такая комбинация всегда может быть

построена, так как дисперсионное уравнение является биквадратным по отношению к  $k_1$  и имеет два корня для  $k_1^2$ .

В предельном случае низких частот дисперсионное уравнение принимает простой вид (10.35). При этом в тензоре электрической проницаемости компонент  $\eta$  стремится к бесконечности, а следовательно, согласно соотношению (13.6), осевой составляющей электрического поля можно пренебречь. В этом предельном случае плазменный волновод не отличается от магнитоакустического. Граничное условие при контакте с металлическими стенками накладывается на азимутальную составляющую электрического поля и имеет вид

$$J_1(k_1 R) = 0. \quad (13.12)$$

При свободно излучающей поверхности плазмы граничное условие накладывается на осевую составляющую магнитного поля и имеет вид

$$J_0(k_1 R) = 0. \quad (13.13)$$

Здесь  $R$  — радиус волновода. У функции Бесселя счетное множество корней.

Как видно из дисперсионного уравнения (10.35), в магнитоакустическом волноводе возможны два типа волн. Одни из них — магнитогидродинамические — отвечают условию

$$\frac{k_3^2 c^2}{\omega^2} = \epsilon. \quad (13.14)$$

Для этих волн фазовая скорость вдоль волновода равна альфвеновской независимо от радиального волнового числа. Волны второго типа получаются из условия

$$k^2 c^2 \equiv k_1^2 c^2 + k_3^2 c^2 = \epsilon \omega^2, \quad (13.15)$$

откуда в магнитоакустической области

$$k_1^2 + k_3^2 = \frac{\omega^2}{u_A^2}, \quad (13.16)$$

где  $u_A$  — альфвеновская скорость. Это косые магнитно-звуковые волны. Значение  $k_1$  находится из граничного условия

$$k_1 = \frac{\alpha}{R}, \quad (13.17)$$

где  $\alpha$  — один из корней соответствующей функции Бесселя.

Подстановка этого значения в соотношение (13.16) дает

$$k_3^2 = \frac{\omega^2}{u_A^2} - \frac{\alpha^2}{R^2}. \quad (13.18)$$

Скорость распространения вдоль волновода выражается отсюда как

$$u_{||}^2 \equiv \frac{\omega^2}{k_3^2} = \frac{u_A^2}{1 - \frac{\alpha^2 u_A^2}{\omega^2 R^2}}. \quad (13.19)$$

Скорость распространения косых магнитно-звуковых волн в волноводе всегда больше альфвеновской скорости. С уменьшением частоты скорость распространения в волноводе возрастает и при граничной частоте

$$\omega_k = \frac{\alpha u_A}{R} \quad (13.20)$$

стремится к бесконечности. При частотах ниже граничной косые магнитно-звуковые волны в волноводе не распространяются.

#### 14. Магнитно-звуковой резонанс

Отрезок волновода можно превратить в резонатор, закрыв его торцы отражающими поверхностями. При соблюдении резонансных условий возникают стоячие волны и амплитуда волны при заданном возбуждении резко возрастает. Резонансные условия зависят от размеров и формы плазменного объема. Такого рода резонансы мы называем резонансами раскочки. Важнейшим из них является магнитно-звуковой резонанс. Для плазменного объема конечной длины резонансные (собственные) частоты равны частотам волн, распространяющихся с соответствующим значением  $k_z$  в волноводе. С увеличением длины резонатора его собственные частоты стремятся к предельным значениям. Собственная частота резонатора бесконечной длины равна граничной частоте волновода.

При частотах ниже гибридной в цилиндрическом объеме возможны чисто радиальные магнитно-звуковые колебания. Граничные условия для них выражаются формулами (13.12) или (13.13) и дают значение волнового числа (13.17) в зависимости от радиуса цилиндра  $R$ . Для чисто радиальных

колебаний  $k = k_1$ , и подстановка этого значения  $k$  в дисперсионное уравнение магнитного звука (8.3) позволяет определить резонансную частоту.

Будем считать, что плазменная частота велика в сравнении с частотой колебаний и с циклотронными частотами. При этом показатель преломления плазмы велик и током смещения можно пренебречь. Дисперсионное уравнение (8.3) принимает приближенный вид (8.5). Подставим значение  $k$  (13.17) и, умножив обе части равенства на  $\omega_0^2 / \omega^2$ , запишем результат в виде

$$\frac{\omega_0^2 R^2}{\alpha^2 c^2} = \frac{\omega_i \omega_e}{\omega^2} - \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2} - 1. \quad (14.1)$$

Величина, стоящая в левой части,

$$\frac{\omega_0^2 R^2}{\alpha^2 c^2} = \frac{4\pi n e^2 R^2}{\alpha^2 m c^2} \equiv \frac{4}{\alpha} \Pi, \quad (14.2)$$

где  $\Pi$  — погонное число электронов на длине, равной классическому радиусу электрона  $e^2/mc^2$ . Назовем эту величину эффективным погонным числом электронов

$$\Pi^* \equiv \frac{4}{\alpha} \Pi = \frac{\omega_0^2}{k_1^2 c^2}. \quad (14.3)$$

Теперь из выражения (14.1) можем выразить в явном виде резонансную частоту магнитного звука

$$\omega^2 = \frac{\omega_i \omega_e}{\Pi^* + \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2} + 1}. \quad (14.4)$$

При большом погонном числе электронов магнитно-звуковой резонанс сдвигается к низким частотам, в магнитоакустическую область. В этой области резонансная частота выражается как

$$\omega^2 = \frac{\omega_i \omega_e}{\Pi^*} = \frac{\alpha^2 u_A^2}{R^2}, \quad (14.5)$$

где  $u_A$  — альфвеновская скорость;  $\alpha$  — корень соответствующей функции Бесселя. Она совпадает с граничной частотой магнитоакустического волновода (13.20). При малом погонном числе электронов резонансная частота чисто радиальных

магнитно-звуковых колебаний должна стремиться к гибридной частоте.

В действительности при малом погонном числе электронов колебания перестают быть чисто радиальными — возникают косые магнитно-звуковые волны, частота которых может быть выше гибридной. В длинном цилиндре при частотах порядка гибридной резонансная частота магнитного звука может быть найдена по приближенной формуле

$$\omega^2 \approx \omega_i \omega_e \frac{1 + \frac{1}{\Pi^* + 1} \frac{\omega_e}{\omega_i} \frac{k_3^2}{k_1^2}}{\Pi^* + 1 + \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2}}. \quad (14.6)$$

Здесь радиальное волновое число  $k_1$  находится по-прежнему по формуле (13.17), а осевое волновое число  $k_3$  определяется длиной цилиндра, согласно соотношению

$$k_3 = l \frac{\pi}{L}, \quad (14.7)$$

где  $l$  — целое число.

### Задачи к гл. IV

**Задача 1.** Как изменится скорость распространения прямых магнитогидродинамических и магнитно-звуковых волн при приближении ее к скорости света?

**Решение.** Приближение фазовой скорости к скорости света означает малый показатель преломления, т. е. невыполнение условия (4.3). При этом из выражения (4.2) или (6.1) вместо формулы (4.4) получается

$$\mathbf{E} = i \frac{4\pi\omega}{k^2 c^2 - \omega^2} \mathbf{j}.$$

Дисперсионное уравнение вместо вида (4.8) или (6.10) примет вид

$$\omega_i \omega_e = \frac{\omega_0^2 \omega^2}{k^2 c^2 - \omega^2},$$

откуда для фазовой скорости  $u_\Phi$  получим

$$\frac{1}{u_\Phi^2} = \frac{1}{u_A^2} + \frac{1}{c^2},$$

где  $u_A$  — альфвеновская скорость, определенная выражением (4.10). Таким образом, хотя формально альфвеновская скорость при малых плотностях и сильных магнитных полях может быть сколь угодно больше скорости света, скорость распространения магнитно-

то гидродинамических и магнитно-звуковых волн не превышает скорости света. При частотах, низких в сравнении с ионной циклотронной, дисперсия по-прежнему отсутствует и групповая скорость равна фазовой.

**Задача 2.** Каково должно быть соотношение между циклотронными частотами и плазменной частотой, для того чтобы альфвеновская скорость была мала в сравнении со скоростью света?

**Решение.** Умножив обе части неравенства (4.17) на  $\frac{Ze^2}{Mmc^2}$ , приведем его к виду

$$\frac{Ze^2 H^2}{Mmc^2} \ll \frac{4\pi ne^2}{m},$$

т. е.  $\omega_i \omega_e \ll \omega_0^2$ . Это значит, что энергия магнитного поля должна быть мала в сравнении с собственной энергией ионов  $n_i M c^2$ . При  $\omega_i \omega_e \gg \omega_0^2$  магнитогидродинамические и магнитно-звуковые волны распространяются со скоростью света.

**Задача 3.** Вычислить групповую скорость прямых магнитно-звуковых волн в плотной плазме.

**Решение.** Дифференцирование приближенного дисперсионного уравнения (8.6) дает

$$u_{\Gamma} \equiv \frac{d\omega}{dk} = \frac{k^2 c^2 (\omega_i \omega_e - \omega^2)^2}{\omega_0^2 \omega \omega_i \omega_e}.$$

Фазовая скорость из того же уравнения

$$u_{\Phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\omega_0} \sqrt{\omega_i \omega_e - \omega^2}.$$

Исключив с помощью последнего соотношения волновое число, получим связь между групповой и фазовой скоростями:

$$u_{\Gamma} = u_{\Phi} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_i \omega_e} \right).$$

В магнитоакустической области  $\omega^2 \ll \omega_i \omega_e$  и групповая скорость совпадает с фазовой. При приближении к электрон-ионной гибридной частоте групповая скорость стремится к нулю еще быстрее, чем фазовая.

**Задача 4.** Найти максимальное значение фазовой скорости волн с круговой поляризацией, распространяющихся в плазме вдоль магнитного поля.

**Решение.** Из формулы (5.4)

$$u_{\Phi}^2 \equiv \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{\omega_0^2} (\omega_i \omega_e - \omega^2 \pm \omega \omega_e);$$

$$\frac{du_{\Phi}^2}{d\omega} = \frac{c^2}{\omega_0^2} (-2\omega \pm \omega_e).$$

Отсюда видно, что максимум имеется только для необыкновенной волны и достигается при частоте  $\omega = \frac{\omega_e}{2}$ . Фазовая скорость при этом

$$u_{\text{макс}} \approx \sqrt{\frac{1}{4} \frac{c^2 \omega_e^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{2} \frac{H}{\sqrt{4\pi n m}}.$$

Таким образом, максимальное значение фазовой скорости волн с круговой поляризацией равно половине «электронной альфвеновской скорости» с точностью до величин порядка отношения массы электрона к массе иона.

**Задача 5.** Получить выражения для гибридных частот из точного тензора электрической проницаемости холодной плазмы.

Решение. Для волны, распространяющейся поперек магнитного поля, показатель преломления обращается в бесконечность, если компонент  $\varepsilon = 0$ . Приравняв нулю правую часть формулы (10.17в), получаем для гибридной частоты биквадратное уравнение

$$\omega_h^4 - \omega_h^2 (\omega_0^2 + \omega_e^2 + \omega_i^2) + \omega_i \omega_e (\omega_0^2 + \omega_i \omega_e) = 0,$$

где

$$\omega_0^2 = \omega_{0e}^2 + \omega_{0i}^2.$$

Если плазменная частота велика в сравнении с циклотронными частотами, то приближенные значения корней этого уравнения получаются отбрасыванием третьего и первого членов:

$$\omega_{h_1}^2 = \omega_0^2 + \omega_e^2;$$

$$\omega_{h_2}^2 \approx \omega_i \omega_e \frac{\omega_0^2 + \omega_i \omega_e}{\omega_0^2 + \omega_e^2 + \omega_i^2}.$$

Полученное значение для верхней гибридной частоты совпадает с формулой (7.2), для нижней — отличается от формулы (7.3) только на величину порядка  $\omega_i/\omega_e$ .

## Глава V

### КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ГОРЯЧЕЙ ПЛАЗМЕ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

#### 1. Уравнения гидродинамического приближения

Для приближенного описания влияния теплового движения в уравнения усредненных скоростей вводят силы давления. При этом принимают, что электронное давление действует только на электроны, а ионное — только на ионы. Взаимодействие же между теми и другими описывается, как в модели двух жидкостей, эффективным числом столкновений, т. е. электрическим сопротивлением плазмы. Такой метод описания движения плазмы носит название гидродинамического приближения. Если при этом рассматривается предельный случай идеальной проводимости, то взаимодействие между ионами и электронами вообще не учитывается: они движутся друг сквозь друга как две независимые жидкости. Конечная проводимость, т. е. взаимодействие между электронами и ионами, приводит, как и в случае холодной плазмы, к затуханию колебаний. Уравнения движения электронов и ионов в линейном гидродинамическом приближении без взаимодействия имеют вид

$$n_e \frac{\partial m v_e}{\partial t} = -n_e e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_e \mathbf{H}) \right) - \nabla p_e; \quad (1.1)$$

$$n_i \frac{\partial M v_i}{\partial t} = Z n_i e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}] \right) - \nabla p_i. \quad (1.2)$$

Полные производные по времени заменены частными в силу линейного приближения. Если сложить эти уравнения с учетом условия электронейтральности

$$Z n_i = n_e \equiv n \quad (1.3)$$

и определения плотности тока

$$\mathbf{j} = e(Zn_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e), \quad (1.4)$$

то получится для массовой скорости уравнение магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} [\mathbf{jH}] - \frac{1}{\rho} \nabla P, \quad (1.5)$$

где

$$\mathbf{v} \equiv \frac{Mn_i \mathbf{v}_i + mn_e \mathbf{v}_e}{Mn_i + mn_e}, \quad (1.6)$$

— массовая скорость и

$$\rho = Mn_i + mn_e \quad (1.7)$$

— плотность плазмы.

Если разделить уравнение (1.1) на массу электрона, уравнение (1.2) на массу иона и вычесть первое из второго, опустив члены, содержащие в знаменателе массу иона, то получится уравнение идеальной проводимости

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] \right) - \frac{e}{mc} [\mathbf{jH}] + \frac{e}{m} \nabla p_e. \quad (1.8)$$

Для учета джоулевой диссипации в правую часть этого уравнения добавляют член  $-\mathbf{v}\mathbf{j}$  так же, как в уравнении (IV.11.4). Тогда получится обобщенный закон Ома с учетом электронного давления

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] \right) + \frac{e}{mc} [\mathbf{jH}] + \frac{e}{mc} \nabla p_e - \mathbf{v}\mathbf{j}, \quad (1.9)$$

где  $\mathbf{v} = \frac{1}{\tau_{ei}}$ .

Описание колебаний плазмы с помощью уравнений (1.1)—(1.8) неточно в двух отношениях. С одной стороны, давление полагается изотропным, в то время как в разреженной плазме давление может быть не скаляром, а тензором. Эта неточность гидродинамического приближения имеет обычно лишь второстепенное значение. Гораздо существеннее то, что гидродинамическое приближение не описывает специфического затухания колебаний, связанного с диссипацией без столкновений. При этом волна передает свою энергию частицам, у которых составляющая скорости теплового движения вдоль направления распространения близка к фазовой скорости волны,

Для волн с низкой фазовой скоростью специфическое затухание оказывается весьма сильным. Оно может приводить к тому, что некоторые типы колебаний, получающиеся из гидродинамического приближения, в действительности вообще не осуществляются. Этот вопрос может быть рассмотрен только методами физической кинетики.

В обычном газе из нейтральных частиц возмущения давления распространяются, как звуковые волны. В плазме волны подобного рода сопровождаются разделением зарядов. Если магнитное поле отсутствует, то волновые движения происходят под действием градиентов давления и электрического поля, возникающего от разделения зарядов. С понижением температуры эти движения переходят в знакомые уже нам электростатические плазменные колебания. В холодной плазме плазменные колебания имеют одну фиксированную частоту, не зависящую от волнового числа, т. е. не являются распространяющимися волнами. Можно сказать, что групповая скорость их равна нулю, а фазовая не имеет определенного значения. Если же ввести тепловое (газовое) давление, то плазменные колебания переходят в распространяющиеся волны. В этих волнах действуют одновременно электростатические силы (как в плазменных колебаниях) и силы давления (как в звуке). Поэтому иногда их называют *плазменными*, а иногда — *электрорезонансными волнами*. Таким же образом происходит и распространение плазменных волн вдоль внешнего магнитного поля. В этом направлении поперечные (магнитогидродинамические и электромагнитные) волны распространяются независимо от продольных плазменных или электрорезонансных волн. При распространении волн поперек внешнего магнитного поля силы газового давления складываются с силами магнитного давления. Возникают ускоренные магнитно-звуковые волны, которые с понижением температуры переходят в знакомые нам магнитно-звуковые колебания холодной плазмы. При распространении под косым углом к магнитному полю, кроме ускоренных, возможны также и замедленные магнитно-звуковые волны.

## 2. Скорость звука

Для описания влияния давления на волновые движения необходимо связать градиент давления со скоростью движения вещества. Это делается так же, как и в обычной теории распространения звука. Пренебрегая диссипативными

процессами, считают, что изменение состояния вещества происходит по адиабатическому закону

$$P :: n^\gamma,$$

откуда

$$d \ln P = \gamma d \ln n; \quad (2.1)$$

$$\frac{\nabla P}{P} = \gamma \frac{\nabla n}{n}, \quad (2.2)$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты. Связь между изменениями концентрации  $n$  и скорости  $\mathbf{v}$  дается уравнением непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \operatorname{div} n\mathbf{v}, \quad (2.3)$$

которое в линейном приближении сводится к

$$\frac{\partial n'}{\partial t} \approx - n \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2.4)$$

Здесь  $n'$  — возмущение концентрации;  $n$  — невозмущенная концентрация. Для плоской волны вида  $\exp i[(\mathbf{k}\mathbf{r}) - \omega t]$  из уравнения (2.4) получим

$$n' = \frac{n}{\omega} (\mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (2.5)$$

Если невозмущенная концентрация постоянна в пространстве, то

$$\nabla n' = i \frac{n}{\omega} \mathbf{k} (\mathbf{k}\mathbf{v}) \quad (2.6)$$

и тогда из соотношения (2.2) получим

$$\nabla P = i\gamma \frac{P}{\omega} \mathbf{k} (\mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (2.7)$$

Это уравнение решается совместно с уравнениями движения. Поскольку мы пренебрегаем взаимодействием между ионами и электронами, уравнения (2.1)—(2.7) могут применяться отдельно как к ионам, так и к электронам. При этом подразумевается, что плазма совершенно неизотермична — температуры ионов и электронов меняются независимо.

Для газа из нейтральных частиц уравнение (2.7) решается совместно с линеаризованным уравнением Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \nabla P, \quad (2.8)$$

которое для плоской волны дает

$$i\omega\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \nabla P. \quad (2.9)$$

Если выразить отсюда  $\mathbf{v}$  и подставить в уравнение (2.7), то для продольных волн ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{v}$ ) получится дисперсионное уравнение

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \gamma \frac{P}{\rho} \equiv u^2. \quad (2.10)$$

Здесь  $u$  — обычная скорость звука. По аналогии удобно ввести ионную и электронную скорости звука, определив их соотношениями

$$u_i^2 = \gamma_i \frac{P_i}{Mn_i} = \gamma_i \frac{T_i}{M}; \quad (2.11)$$

$$u_e^2 = \gamma_e \frac{P_e}{mn_e} = \gamma_e \frac{T_e}{m}, \quad (2.12)$$

где  $T_i$  и  $T_e$  — ионная и электронная температуры в энергетических единицах. Тогда уравнение (2.2) для ионов и электронов можно записать в виде

$$\nabla p_i = u_i^2 M \nabla n_i; \quad (2.13)$$

$$\nabla p_e = u_e^2 m \nabla n_e, \quad (2.14)$$

и уравнение (2.7) — в виде

$$\nabla p_i = i \frac{u_i^2 M n_i}{\omega} \mathbf{k} (k\mathbf{v}); \quad (2.15)$$

$$\nabla p_e = i \frac{u_e^2 m n_e}{\omega} \mathbf{k} (k\mathbf{v}). \quad (2.16)$$

Допустим, что в плазме могут распространяться обычные звуковые волны, для которых разделением зарядов и электрическими токами можно пренебречь. Это значит, что электроны и ионы должны иметь одинаковые упорядоченные скорости

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_e \equiv \mathbf{v}. \quad (2.17)$$

Тогда сложение уравнений (2.15) и (2.16) даст с учетом условия электронейтральности ( $n_e = Zn_i$ ) для общего давления

$$\nabla P = i \frac{n_i}{\omega} (u_i^2 M + u_e^2 Zm) \mathbf{k} (k\mathbf{v}). \quad (2.18)$$

Этот результат можно записать в виде, аналогичном уравнению (2.15),

$$\nabla P = i \frac{u_s M n_i}{\omega} \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v}) \approx i \frac{u_s^2 \rho}{\omega} \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v}), \quad (2.19)$$

если определить скорость звука  $u_s$  соотношением

$$u_s^2 = u_i^2 + \frac{Zm}{M} u_e^2 = \gamma_i \frac{T_i}{M} + \gamma_e \frac{ZT_e}{M}. \quad (2.20)$$

Это так называемая *скорость ионного звука* (в отличие от ионной скорости звука  $u_i$ ). Она определяется «суммарной» температурой электронов и ионов  $T_i + ZT_e$  и массой ионов. Электронная температура входит множителем  $Z$ , потому что это число электронов на один ион. В каких условиях в плазме реально могут распространяться звуковые волны без разделения зарядов, будет видно из дальнейшего. Но уже сейчас мы можем сказать, что скорость их должна определяться формулой (2.20).

### 3. Плазменные волны и ионный звук

Рассмотрим сначала продольные волны без магнитного поля. Продольными волнами называются такие, у которых скорости движения частиц направлены вдоль волнового вектора, т. е.  $\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v}) = k^2 \mathbf{v}$ . Уравнения движения (1.1) и (1.2) для продольных волн без магнитного поля с учетом соотношений (2.15) и (2.16) принимают вид

$$-i\omega \mathbf{v}_e = -\frac{e}{m} \mathbf{E} - i \frac{u_e^2}{\omega} k^2 \mathbf{v}_e; \quad (3.1)$$

$$-i\omega \mathbf{v}_i = \frac{Ze}{M} \mathbf{E} - i \frac{u_i^2}{\omega} k^2 \mathbf{v}_i. \quad (3.2)$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае и электрическое поле также направлено вдоль волнового вектора. Эти уравнения решаются совместно с уравнением

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi q, \quad (3.3)$$

где  $q$  — плотность электрического заряда

$$q = e(Zn_i - n_e). \quad (3.4)$$

Поскольку невозмущенные концентрации удовлетворяют условию электронейтральности, то в уравнение (3.4) входят только возмущения концентраций, выражаемые форму-

лой (2.5), откуда для продольных волн

$$q = \frac{ek}{\omega} (Zn_i v_i - n_e v_e). \quad (3.5)$$

Этот результат выражает закон сохранения электрического заряда

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j}. \quad (3.6)$$

Подстановка выражения (3.5) в уравнение (3.3) дает для продольной плоской волны

$$\mathbf{E} = -i \frac{4\pi e}{\omega} (Zn_i v_i - n_e v_e) \quad (3.7)$$

или с учетом условия квазинейтральности (1.3)

$$\mathbf{E} = -i \frac{4\pi n e}{\omega} (v_i - v_e). \quad (3.8)$$

Подстановка этого выражения в уравнения (3.1) и (3.2) приводит к системе уравнений для скоростей электронов и ионов

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + k^2 u_e^2) v_e - \omega_0^2 v_i = 0; \quad (3.9)$$

$$-\frac{Zm}{M} \omega_0^2 v_e + \left( \frac{Zm}{M} \omega_0^2 - \omega^2 + k^2 u_i^2 \right) v_i = 0. \quad (3.10)$$

Определитель этой системы дает дисперсионное уравнение для продольных волн в плазме без магнитного поля

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + k^2 u_e^2) \left( \frac{Zm}{M} \omega_0^2 - \omega^2 + k^2 u_i^2 \right) - \frac{Zm}{M} \omega_0^4 = 0. \quad (3.11)$$

Здесь  $\omega_0$  — электронная плазменная частота. Заметим, что величина

$$\frac{Zm}{M} \omega_0^2 = \frac{4\pi Z n e^2}{M} = \frac{4\pi Z^2 n_i e^2}{M} \quad (3.12)$$

есть квадрат ионной плазменной частоты. Если расположить уравнение (3.11) по степеням частоты волны, то получим

$$\begin{aligned} \omega^4 - \omega^2 \left[ \omega_0^2 \left( 1 + \frac{Zm}{M} \right) + k^2 (u_e^2 + u_i^2) \right] + \\ + k^2 u_i^2 \omega_0^2 + k^2 u_e^2 \frac{Zm}{M} \omega_0^2 + k^4 u_i^2 u_e^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Если отвлечься от частного случая, когда корни уравнения (3.13) близки по величине, это уравнение определяет

две отдельные ветви колебаний. Высокочастотная или электронная ветвь получается, если пренебречь свободным членом. Дисперсионное уравнение при этом принимает вид

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 + k^2 (u_e^2 + u_i^2). \quad (3.14)$$

Практически без ограничения общности можно считать, что электронная скорость звука гораздо выше ионной, и тогда

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 + k^2 u_e^2 = \omega_0^2 + k^2 \gamma_e \frac{T_e}{m}. \quad (3.14a)$$

Сюда входят величины, относящиеся только к электронам, что и оправдывает наименование «электронная ветвь». Множитель  $(1 + Zm/M)$  при квадрате электронной плазменной частоты столь близок к единице, что его можно не учитывать. Частота колебаний на этой ветви всегда выше электронной плазменной частоты, а скорость распространения волн больше каждой из скоростей звука (электронной и ионной). С понижением температуры плазмы или с возрастанием длины волны колебания высокочастотной ветви стремятся к электростатическим колебаниям холодной плазмы с фиксированной частотой  $\omega_0$ , которые принято называть плазменными колебаниями. Соответственно волны высокочастотной ветви называются *плазменными волнами*. Иногда их именуют также *электровздуковыми*.

Низкочастотная или ионная ветвь получается, если в уравнении (3.13) отбросить член  $\omega^4$ . Тогда дисперсионное уравнение принимает вид

$$\omega^2 \approx \frac{k^2 u_e^2 \frac{Zm}{M} \omega_0^2 + k^2 u_i^2 \omega_0^2 + k^4 u_e^2 u_i^2}{\omega_0^2 + k^2 (u_e^2 + u_i^2)}. \quad (3.15)$$

Для длинных волн ( $k \rightarrow 0$ ) дисперсионное уравнение ионной ветви стремится к

$$\omega^2 \approx k^2 \left( u_i^2 + \frac{Zm}{M} u_e^2 \right) = k^2 \left( \gamma_i \frac{T_i}{M} + \gamma_e \frac{ZT_e}{M} \right). \quad (3.16)$$

Это отвечает скорости распространения ионного звука (2.20). Для коротких волн ( $k \rightarrow \infty$ ) предельный вид будет

$$\omega^2 \approx k^2 \frac{u_e^2 u_i^2}{u_e^2 + u_i^2} \approx k^2 u_i^2, \quad (3.17)$$

так как электронная скорость звука гораздо больше ионной.

Для коротких волн фазовые скорости как электронной, так и ионной ветвей стремятся к соответствующим скоростям звука, т. е. близки к средним скоростям теплового движения. При этом колебания быстро затухают по причине фазового резонанса с частицами, у которых скорость теплового движения равна фазовой скорости волны. Реальное значение имеют длинноволновые колебания. При этом электронная ветвь имеет частоту, близкую к плазменной (но всегда выше ее). Скорость же распространения ионного звука выражается формулой (2.20). Если электронная температура значительно выше ионной, то скорость ионного звука ниже тепловых скоростей электронов, но выше тепловых скоростей ионов, и возможно распространение без быстрого затухания.

В случае холодных ионов ( $T_i \rightarrow 0$ ) дисперсионное уравнение ионной ветви переходит в

$$\omega^2 \approx \frac{k^2 u_e^2 \frac{Zm}{M} \omega_0^2}{\omega_0^2 + k^2 u_e^2}. \quad (3.18)$$

Своеобразный результат получается, если выполнены неравенства

$$k^2 u_e^2 \gg \omega_0^2 \gg \frac{M}{Zm} k^2 u_i^2. \quad (3.19)$$

Эти неравенства совместимы, если  $T_i \ll ZT_e$ . При этом ионная ветвь переходит в колебания с фиксированной частотой

$$\omega^2 \approx \frac{Zm}{M} \omega_0^2. \quad (3.20)$$

Как видно из формулы (3.12), это — ионная плазменная частота. Таким образом, в области, определяемой неравенствами (3.19), возможны электростатические колебания холодных ионов на однородном электронном фоне, размазанном тепловым движением.

Все рассмотренные виды продольных волн могут распространяться также и при наличии магнитного поля, если направление распространения параллельно силовым линиям магнитного поля. Магнитное поле не влияет на распространение продольных волн вдоль своего направления.

Как видно из предыдущего, при рассмотрении продольных волн неправильно было бы заранее опускать члены порядка отношения массы электрона к массе иона, т. е.

пользоваться уравнением для плотности тока в форме (1.8). Поэтому мы и исходили непосредственно из уравнений движения электронов и ионов.

#### 4. Тензорные характеристики горячей плазмы и пространственная дисперсия

Рассмотрим теперь влияние газового давления на колебания плазмы в магнитном поле. Будем исходить из системы макроскопических уравнений (1.5) и (1.8) или (1.9), в которых уже опущены члены порядка отношения массы электрона к массе иона. Изменения состояния вещества в волне будем считать адиабатическими в термодинамическом смысле, что позволяет выразить градиенты давления через скорость звука. Для уравнения (1.5), описывающего движение плазмы как целого, градиент общего давления выражается через скорость ионного звука согласно формуле (2.19), после чего уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{c\rho} [\mathbf{jH}] - i \frac{u_3^2}{\omega} \mathbf{k} (k\mathbf{v}). \quad (4.1)$$

Здесь  $u_3$  — скорость ионного звука, выражаемая формулой (2.20). Для плоских волн уравнение (4.1) дает

$$\mathbf{v} - \frac{u_3^2}{\omega^2} \mathbf{k} (k\mathbf{v}) = i \frac{H_0}{c\rho\omega} [\mathbf{jh}], \quad (4.2)$$

где  $\mathbf{h}$  — одиночный вектор в направлении магнитного поля. Здесь нам будет удобно выбрать ось  $x$  в направлении волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Направление оси  $z$  выберем так, чтобы магнитное поле лежало в плоскости  $xz$ . Выбранная система координат ориентирована по вектору  $\mathbf{k}$ ; мы будем называть ее  $k$ -системой в отличие от применяемой обычно  $H$ -системы, в которой ось  $z$  ориентирована по магнитному полю  $H$ .

В  $k$ -системе уравнение (4.2) позволяет выразить составляющие общей скорости плазмы в простом виде:

$$v_x = i \frac{H}{c\rho\omega} \cdot \frac{j_y h_z}{1 - \frac{k^2 u_3^2}{\omega^2}}; \quad (4.3)$$

$$v_y = i \frac{H}{c\rho\omega} (j_z h_x - j_x h_z); \quad (4.4)$$

$$v_z = -i \frac{H}{c\rho\omega} j_y h_x. \quad (4.5)$$

Если магнитное поле направлено под углом  $\theta$  к волновому вектору, то  $h_x = \cos \theta$ ;  $h_z = \sin \theta$ ;  $h_y = 0$ .

Составляющие электрического поля из уравнения электродинамики (IV.1.5) выражаются в  $k$ -системе формулами:

$$E_x = -i \frac{4\pi}{\omega} j_x; \quad (4.6)$$

$$E_y = i \frac{4\pi\omega}{k^2 c^2 - \omega^2} j_y; \quad (4.7)$$

$$E_z = i \frac{4\pi\omega}{k^2 c^2 - \omega^2} j_z. \quad (4.8)$$

Подстановка выражений (4.3)—(4.8) в векторное уравнение обобщенного закона Ома (1.9) дает систему линейных однородных алгебраических уравнений для составляющих плотности тока. Если приравнять нулю определитель этой системы, то можно получить дисперсионное уравнение. Мы проведем этот вывод в два приема: сначала подставим в обобщенный закон Ома выражения (4.3)—(4.5) для составляющих скорости и получим связь между электрическим полем и током, определяемую свойствами плазмы, которую можно выразить через тензор электрического сопротивления  $R$ :

$$E_a = R_{ab} j_b. \quad (4.9)$$

Подставив затем в тензорное соотношение (4.9) составляющие электрического поля (4.6)—(4.8), получим систему однородных уравнений, дающую дисперсионное уравнение. Такой порядок вычислений позволяет выписать в явном виде тензор сопротивления плазмы, который может оказаться полезным.

Пренебрежем затуханием волн, т. е. вместо обобщенного закона Ома (1.9) воспользуемся уравнением идеальной проводимости (1.8). В этом уравнении градиент электронного давления выразим по формуле (2.16) через упорядоченную скорость электронов, которая в свою очередь может быть выражена через массовую скорость плазмы и плотность тока как

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{j}}{ne}.$$

После этих подстановок уравнение (1.8) для плоской волны принимает вид

$$-i\omega^2 \mathbf{j} = \frac{\omega_0^2 \omega}{4\pi} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] \right) - \frac{e\omega}{mc} [\mathbf{jH}] + \\ + i\omega u_e^2 (\mathbf{k}\mathbf{v}) \mathbf{k} - iu_e^2 (\mathbf{k}\mathbf{j}) \mathbf{k}. \quad (4.10)$$

Расписав это уравнение в составляющих, подставив для составляющих скорости выражения (4.3)—(4.5) и сравнив с выражением (4.9), получим тензор сопротивления горячей плазмы

$$R = \frac{4\pi}{\omega_0^2 \omega} T^*, \quad (4.11)$$

где компоненты тензора  $T^*$  в  $k$ -системе координат

$$\left. \begin{aligned} T_{xx}^* &= i(-\omega^2 + \omega_i \omega_e \sin^2 \theta + k^2 u_e^2); \\ T_{xy}^* &= \omega \omega_e \left( 1 + \frac{\omega_i}{\omega_e} \frac{k^2 u_e^2}{\omega^2 - k^2 u_3^2} \right) \sin \theta; \\ T_{xz}^* &= -i\omega_i \omega_e \sin \theta \cos \theta; \\ T_{yx}^* &= -\omega \omega_e \sin \theta; \\ T_{yy}^* &= i \left[ \omega_i \omega_e \left( \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{1 - \frac{k^2 u_3^2}{\omega^2}} \right) - \omega^2 \right]; \\ T_{yz}^* &= \omega \omega_e \cos \theta; \\ T_{zx}^* &= -i\omega_i \omega_e \sin \theta \cos \theta; \\ T_{zy}^* &= -\omega \omega_e \cos \theta; \\ T_{zz}^* &= i(\omega_i \omega_e \cos^2 \theta - \omega^2). \end{aligned} \right\} \quad (4.11a)$$

Если устремить скорости электронного и ионного звука к нулю, то получится тензор сопротивления холодной плазмы в  $k$ -системе; тот же тензор в  $H$ -системе выражается формулой (IV.10.8). Связь между этими двумя представлениями тензора сопротивления легко получить из формул преобразования тензоров при повороте системы координат. Чтобы учесть конечную проводимость, достаточно, как видно из сопоставления уравнений (1.8) и (1.9), заменить в диагональных членах  $\omega^2$  на  $\omega^2 + i\omega\nu$ , где  $\nu$  — эффективная частота столкновений.

Тензор сопротивления горячей плазмы можно получить и из микроскопических уравнений движения частиц (1.1)—(1.2). Запишем эти уравнения в общем виде для частицы с зарядовым числом  $Z$  и массой  $M$  как

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Ze}{M} \mathbf{E} + \omega_c [\mathbf{v}\mathbf{h}] - \frac{1}{Mn} \nabla p, \quad (4.12)$$

где  $\mathbf{h}$  — единичный вектор в направлении магнитного поля. Перейдем к плоской волне и выразим градиенты давления через скорости звука  $u$  согласно выражениям (2.15)—(2.16). Введем для каждого сорта частиц тензор частичного электрического сопротивления  $R_k$ , определенный согласно формуле (IV. 10.7а), и выразим его через вспомогательный тензор  $T_k$ :

$$R_k = \frac{4\pi\omega}{\omega_{0k}^2} T_k. \quad (4.13)$$

Тензор частичного сопротивления выражается проще в  $H$ -системе координат, в которой ось  $z$  направлена вдоль магнитного поля. В этой системе координат вспомогательный тензор для каждого сорта частиц выражается как

$$T = \left\{ \begin{array}{ccc} -i \left( 1 - \frac{k_x^2 u^2}{\omega^2} \right) & -\frac{\omega_c}{\omega} & i \frac{k_x k_z u^2}{\omega^2} \\ \frac{\omega_c}{\omega} & -i & 0 \\ i \frac{k_x k_z u^2}{\omega^2} & 0 & -i \left( 1 - \frac{k_z^2 u^2}{\omega^2} \right) \end{array} \right\} \quad (4.14)$$

Здесь  $u$  — скорость звука для частиц данного сорта.

Обращением матрицы тензора  $T_k$  можно получить тензор  $T_k^{-1}$  и аналогично выводу формул (IV.10.176)—(IV. 10. 196) — тензор полного сопротивления

$$R = \left( \sum_k (R_k^{-1}) \right)^{-1} = 4\pi\omega \left( \sum_k \omega_{0k}^2 T_k^{-1} \right)^{-1}. \quad (4.15)$$

Здесь суммирование производится по всем сортам частиц, присутствующих в плазме.

Мы не будем проводить довольно громоздкие выкладки. Если перейти в  $k$ -систему координат посредством поворота осей, то окончательное выражение для тензора сопротивления будет отличаться от выражения (4.11) только величинами порядка  $m/M$ , опущенными при выводе макроскопических уравнений.

От тензора сопротивления легко перейти к тензорам проводимости  $\sigma$  и электрической проницаемости  $\varepsilon$  горячей плазмы:

$$\sigma \equiv R^{-1} = \sum_k \frac{\omega_{0k}^2}{4\pi\omega} T_k^{-1}; \quad (4.16)$$

$$\varepsilon = \delta_{ik} + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma = \delta_{ik} + i \sum_k \frac{\omega_{0k}^2}{\omega^2} T_k^{-1}. \quad (4.17)$$

Важнейшая особенность тензора электрической проницаемости горячей плазмы заключается в том, что он явным образом зависит не только от частоты, но и от волнового вектора. Последняя зависимость носит название *пространственной дисперсии*. Она является следствием теплового движения, приводящего к прямому переносу частиц из одной точки пространства в другую. Как видим, это свойство теплового движения проявляется уже в гидродинамическом приближении. Пространственная дисперсия сильно усложняет теорию колебаний горячей плазмы.

## 5. Ускоренные и замедленные магнитно-звуковые волны

Подстановка в тензорное равенство (4.9) компонентов тензора (4.11) и составляющих электрического поля (4.6)—(4.8) дает систему линейных однородных алгебраических уравнений для составляющих тока в  $k$ -системе координат. Ту же систему уравнений можно получить, расписав векторное уравнение (1.8) в составляющих и подставив выражения (4.3)→(4.8). Дисперсионное уравнение получается приравниванием нулю определителя этой системы. Тождественный определитель имеет и система уравнений для составляющих электрического поля, которую можно получить подстановкой компонентов тензора проводимости в тензорное соотношение  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ . Выпишем систему уравнений для составляющих плотности тока, полученную с помощью тензора (4.11):

$$\begin{aligned} \omega^2 j_x = & \omega_0^2 j_x + \omega_i \omega_e (j_x \sin^2 \theta - j_z \sin \theta \cos \theta) - \\ & - i \omega \omega_e j_y \sin \theta \left( 1 + \frac{\omega_i}{\omega_e} \frac{k^2 u_e^2}{\omega^2 - k^2 u_3^2} \right) + k^2 u_e^2 j_x; \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\omega^2 j_y = -\frac{\omega_0^2 \omega^2}{k^2 c^2 - \omega^2} j_y + \omega_i \omega_e \left( \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{1 - \frac{k^2 u_3^2}{\omega^2}} \right) j_y - i\omega \omega_e (j_z \cos \theta - j_x \sin \theta); \quad (5.2)$$

$$\omega^2 j_z = -\frac{\omega_0^2 \omega^2}{k^2 c^2 - \omega^2} j_z + \omega_i \omega_e (j_z \cos^2 \theta - j_x \sin \theta \cos \theta) + i\omega \omega_e j_y \cos \theta. \quad (5.3)$$

Здесь  $\theta$  — угол между направлениями магнитного поля и волнового вектора.

Определитель этой системы в общем случае имеет довольно громоздкий вид, и мы не будем его выписывать. Рассмотрим прежде всего предельный случай низких частот в плотной плазме (магнитоакустическую область). В этом случае можно пренебречь величинами  $\omega^2$  и  $\omega \omega_e$ , после чего уравнение для  $j_y$  отщепляется и получается два независимых дисперсионных уравнения. Одно из них описывает волны, в которых электрический ток направлен перпендикулярно как направлению магнитного поля, так и к направлению распространения волны ( $j = j_y$ ). Как видно из формул (4.6)—(4.8), электрическое поле при этом направлено так же, как и ток, скорость же течения плазмы перпендикулярна к току, т. е. лежит в плоскости ( $kH$ ). Дисперсионное уравнение для этих волн получается непосредственно из уравнения (5.2) и имеет вид

$$\frac{\omega_0^2 \omega^2}{k^2 c^2 - \omega^2} = \omega_i \omega_e \left( \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{1 - \frac{k^2 u_3^2}{\omega^2}} \right) \quad (5.4)$$

или

$$\frac{\omega_0^2}{N^2 - 1} + \omega_i \omega_e \frac{1 - N_3^2 \cos^2 \theta}{N_3^2 - 1} = 0, \quad (5.4a)$$

где

$$N = \frac{kc}{\omega}; \quad N_3 = \frac{ku_3}{\omega}.$$

Рассмотрим простейший случай, когда показатель преломления плазмы велик:  $N \gg 1$ , т. е. можно пренебречь током смещения, но плотность плазмы столь велика, что  $\omega_0^2 \gg k^2 c^2$  (эффективное погонное число электронов велико). Эти допущения соответствуют приближению магнитной

гидродинамики, т. е. магнитоакустической области. При этом уравнение (5.4) принимает вид

$$\frac{\omega_0^2 \omega^2}{k^2 c^2} = \omega_i \omega_e \left( \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{1 - \frac{k^2 u_3^2}{\omega^2}} \right). \quad (5.5)$$

Удобно ввести альфвеновскую скорость  $u_A$ , определенную согласно (IV.4.10), и фазовую скорость  $u_\phi \equiv \omega/k$ . В этих обозначениях дисперсионное уравнение (5.5) переписывается как

$$u_\phi^2 = u_A^2 \left( \cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{1 - \frac{u_3^2}{u_\phi^2}} \right) \quad (5.6)$$

или

$$u_\phi^2 - u_3^2 = u_A^2 \left( 1 - \frac{u_3^2}{u_\phi^2} \cos^2 \theta \right). \quad (5.6a)$$

Располагая члены по степеням фазовой скорости, получим биквадратное уравнение

$$u_\phi^4 - u_\phi^2 (u_A^2 + u_3^2) + u_A^2 u_3^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (5.6b)$$

Если альфвеновская и звуковая скорости сильно отличаются или  $\cos \theta \ll 1$ , то корни этого уравнения сильно отличаются по величине и\* больший из них можно грубо оценить, отбрасывая свободный член

$$u_{\phi 1}^2 \approx u_A^2 + u_3^2. \quad (5.7)$$

Это решение описывает *ускоренную магнитно-звуковую волну*. Меньший корень можно оценить, отбрасывая член с высшей степенью  $u_\phi$ , откуда

$$u_{\phi 2}^2 \approx \frac{u_A^2 u_3^2}{u_A^2 + u_3^2} \cos^2 \theta \quad (5.8)$$

или

$$\frac{1}{u_{\phi 2}^2} \approx \left( \frac{1}{u_A^2} + \frac{1}{u_3^2} \right) \sec^2 \theta. \quad (5.9)$$

Это решение описывает *замедленную магнитно-звуковую волну*. Очевидно, что фазовая скорость ускоренной волны всегда больше как альфвеновской скорости, так и скорости ионного звука, в то время как фазовая скорость замедленной волны всегда меньше каждой из этих величин.

Если плазма находится в сильном магнитном поле, то фазовая скорость ускоренных волн гораздо больше тепловых скоростей частиц, а фазовая скорость замедленных волн близка к ним. Вследствие этого замедленные волны легко передают свою энергию частицам и затухают по механизму диссипации без столкновений (фазового резонанса). Для замагниченной плазмы основное значение имеют ускоренные магнитно-звуковые волны. При стремлении скорости ионного звука к нулю ускоренная волна переходит в магнитный звук в холодной плазме, который мы рассматривали в гл. IV. Фазовая же скорость замедленной волны стремится к нулю как при переходе к холодной плазме, так и при распространении точно поперек магнитного поля ( $\cos \theta = 0$ ). Легко убедиться, что при распространении вдоль поля ( $\cos \theta = 1$ ) один из корней уравнения (5.6) равен альфвеновской, другой — звуковой скорости, т. е. ускоренная волна переходит в магнитогидродинамическую, а замедленная — в обычный ионный звук.

Таким образом, замедленные магнитно-звуковые волны возможны только при косом распространении в горячей плазме.

Рассмотренные волны, у которых ток перпендикулярен к плоскости ( $\mathbf{k}, \mathbf{H}$ ), естественно называть косыми магнитно-звуковыми волнами. Кроме них, возможны еще волны, у которых ток лежит в плоскости ( $\mathbf{k}, \mathbf{H}$ ). Дисперсионное уравнение для этих волн получается приравниванием нулю определителя системы двух уравнений (5.1) и (5.3). В предельном случае низких частот скорость звука выпадает из этих уравнений; мы имеем здесь дело с косыми магнитогидродинамическими волнами, на которые тепловое движение не влияет. Для них получается приближенное дисперсионное уравнение вида

$$\frac{\omega^2}{k^2 c^2} \approx \frac{\omega_i \omega_e}{\omega_0^2} \cos^2 \theta, \quad (5.10)$$

откуда фазовая скорость

$$u_\phi \approx u_A \cos \theta \quad (5.11)$$

в согласии с результатом, полученным из уравнения (IV.10.35).

Заметим, что для распространения точно вдоль поля ( $\theta = 0$ ) уравнение для  $j_x$  отщепляется и дает дисперсионное уравнение плазменных волн, совпадающее с уравнением

(3.11), а из остальных двух уравнений скорость звука выпадает. Таким образом, на распространение магнито-гидродинамических волн вдоль магнитного поля тепловое движение не влияет.

## 6. Дисперсия магнитного звука в горячей плазме

Переходя к предельному случаю низких частот, мы пренебрегли гиротропными членами. Поэтому полученные в предыдущем разделе результаты не описывают дисперсию в области циклотронных частот. Если сохранить гиротропные члены, то получаются громоздкие формулы, которые мы выписывать не будем. Вопрос о дисперсии рассмотрим только для простейшего случая прямой магнитно-звуковой волны, распространяющейся точно поперек магнитного поля. В этом простейшем случае уравнение для  $j_z$  отщепляется; оно описывает волну, поляризованную вдоль магнитного поля, т. е. электромагнитную волну, на которую в гидродинамическом приближении при поперечном распространении ни тепловое движение, ни магнитное поле не действуют. Остающаяся система (5.1)—(5.2) переходит в уравнения, описывающие прямую магнитно-звуковую волну, у которой как направление распространения, так и плоскость поляризации перпендикулярны к магнитному полю.

$$\begin{aligned} & (\omega_0^2 - \omega^2 + \omega_i \omega_e + k^2 u_e^2) j_x - \\ & - i\omega\omega_e \left( 1 + \frac{\omega_i}{\omega_e} \frac{k^2 u_e^2}{\omega^2 - k^2 u_s^2} \right) j_y = 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\left( -\frac{\omega_0^2 \omega^2}{k^2 c^2 - \omega^2} - \omega^2 + \frac{\omega_i \omega_e}{1 - \frac{k^2 u_s^2}{\omega^2}} \right) j_y + i\omega\omega_e j_x = 0. \quad (6.2)$$

Если устремить обе скорости звука к нулю, то эта система перейдет в уравнения (IV.6.3)—(IV.6.4), описывающие магнитный звук в холодной плазме. Приравняв нулю определитель системы (6.1)—(6.2), легко получить дисперсионное уравнение в виде

$$\frac{\omega_0^2}{N^2 - 1} - \frac{\omega_i \omega_e}{1 - N_s^2} + \omega^2 \left[ 1 + \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2} \left( 1 + \frac{\omega_i}{\omega_e} \frac{N_e^2}{1 - N_s^2} \right) \right] = 0, \quad (6.3)$$

где

$$N = \frac{kc}{\omega}; \quad N_s = \frac{ku_s}{\omega}; \quad N_e = \frac{ku_e}{\omega};$$

$$\tilde{\omega}_0^2 = \omega_0^2 + \omega_i \omega_e - \omega^2 + k^2 u_e^2.$$

В плотной плазме  $\tilde{\omega}_0^2 \approx \omega_0^2$ . Для низких частот уравнение (6.3) стремится к тому же виду, какой получится из уравнения (5.4а), если положить  $\theta = \pi/2$ .

Как видно из уравнения (6.3), ограничения, накладываемые гибридной частотой, в горячей плазме снимаются. При частотах выше гибридной фазовая скорость остается вещественной и при высоких частотах стремится к скорости ионного звука (см. задачи 2 и 3).

### Задачи к гл. V

**Задача 1.** Найти фазовую и групповую скорости электронных плазменных волн как функции частоты и температуры.

**Решение.** Выразив из дисперсионного уравнения (3.14) волновое число, получим

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{u_e^2 + u_i^2},$$

откуда

$$u_\Phi^2 \equiv \frac{\omega^2}{k^2} = (u_e^2 + u_i^2) \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2};$$

$$u_\Gamma^2 = (u_e^2 + u_i^2) \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right).$$

Здесь скорости звука являются известными функциями температуры

$$u_e = \gamma_e \frac{T_e}{m}; \quad u_i = \gamma_i \frac{T_i}{M}.$$

Если устремить температуру к нулю, то групповая скорость независимо от частоты обратится в нуль. Фазовая же скорость обращается при этом в нуль для всех частот, кроме  $\omega = \omega_0$ , когда она становится неопределенной.

**Задача 2.** Найти зависимость резонансной частоты и фазовой скорости магнитного звука от эффективного погонного числа электронов в плотной горячей плазме.

Решение. Для плотной плазмы можем принять

$$\tilde{\omega}_0^2 \approx \omega_0^2 \gg \omega_e^2; N^2 \gg 1,$$

после чего дисперсионное уравнение (6.3) примет простой вид

$$\frac{\omega_0^2}{k^2 c^2} - \frac{\omega_i \omega_e}{\omega^2 - k^2 u_3^2} + 1 = 0.$$

Отсюда частота находится в явном виде

$$\omega^2 = k^2 u_3^2 + \frac{\omega_i \omega_e}{1 + \frac{\omega_0^2}{k^2 c^2}} \equiv k^2 u_3^2 + \frac{\omega_i \omega_e}{1 + \Pi^*},$$

где  $\Pi^*$  — эффективное погонное число электронов (IV.14.3). Это выражение дает непосредственно резонансную частоту прямого магнитного звука в плотной горячей плазме. При малом погонном числе электронов она уже не стремится к гибридной частоте. Для фазовой скорости получаем

$$u_\Phi^2 \equiv \frac{\omega^2}{k^2} = u_3^2 + \frac{\omega_i \omega_e c^2}{\omega_0^2 + k^2 c^2} = u_3^2 + \frac{u_A^2}{1 + \frac{1}{\Pi^*}}.$$

При большом погонном числе электронов (в магнитоакустической области) фазовая скорость стремится к  $\sqrt{u_A^2 + u_3^2}$  в соответствии с результатом (5.7). При малом погонном числе электронов она стремится к скорости ионного звука.

**Задача 3.** Найти зависимость фазовой скорости от частоты для магнитного звука в плотной горячей плазме.

Решение. В приближениях предыдущей задачи приводим уравнение (6.3) к общему знаменателю и располагаем по степеням волнового числа  $k$ . Получается биквадратное уравнение

$$k^4 c^2 u_3^2 + k^2 [\omega_0^2 u_3^2 + (\omega_i \omega_e - \omega^2) c^2] - \omega_0^2 \omega^2 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня, описывающие коротковолновую и длинноволновую ветви колебаний. Один из корней для  $k^2$  всегда положителен, т. е. дает вещественное значение фазовой скорости. Для коротковолновой ветви (большие  $k$ ) пренебрегаем свободным членом, после чего для фазовой скорости получаем

$$u_\Phi^2 \approx \frac{\omega^2 u_3^2 c^2}{\omega^2 c^2 - (\omega_0^2 u_3^2 + \omega_i \omega_e c^2)}.$$

Эта ветвь дает вещественные решения только при высоких частотах

$$\omega^2 > \omega_i \omega_e + \frac{u_3^2}{c^2} \omega_0^2.$$

Фазовая скорость коротковолновой ветви больше скорости ионного звука и в предельном случае очень высоких частот стремится к ней.

Для длинноволновой ветви (малые  $k$ ) пренебрегаем высшей степенью  $k$ , после чего для фазовой скорости получаем выражение

$$u_{\Phi}^2 \approx u_3^2 + \frac{c^2}{\omega_0^2} (\omega_i \omega_e - \omega^2) = u_3^2 + u_A^2 \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_i \omega_e} \right).$$

При низких частотах это решение стремится к (5.7). Кроме того, возможен промежуточный случай, когда корни биквадратного уравнения близки по абсолютной величине, т. е. коротковолновая и длинноволновая ветви не разделяются. Этот случай осуществляется при достаточно малых скоростях звука и частотах, близких к нижней гибридной

$$\frac{u_3}{c} \ll \frac{\omega}{\omega_0}; \quad \omega \sim \sqrt{\omega_i \omega_e}.$$

При этом в левой части биквадратного уравнения можно пренебречь средним членом\*, и приближенное решение будет иметь вид

$$k^2 \approx \frac{\omega_0 \omega}{cu_3},$$

откуда

$$u_{\Phi}^2 \approx \frac{\omega}{\omega_0} cu_3.$$

**Задача 4.** Найти фазовую скорость магнитного звука в плотной горячей плазме при электронно-ионной гибридной частоте.

Решение. Электронно-ионная гибридная частота в плотной плазме определяется соотношением  $\omega^2 = \omega_i \omega_e$ . При этом биквадратное уравнение предыдущей задачи принимает вид

$$k^4 + k^2 \frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\omega_0^2 \omega^2}{c^2 u_3^2} = 0.$$

Корни этого уравнения

$$k^2 = -\frac{\omega_0^2}{2c^2} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^4}{4c^4} + \frac{\omega_0^2 \omega^2}{c^2 u_3^2}}.$$

---

\* Для квадратного уравнения  $x^2 + px - q = 0$  ( $p > 0$ ,  $q > 0$ ) корни сильно отличаются, если  $q \ll p^2/4$ . Рассматриваемый случай, когда ветви не разделяются, осуществляется при условии  $q \gg p^2/4$ . При этом решение стремится к  $x = \sqrt{q}$ , т. е. можно пренебречь средним членом.

Если скорость звука велика

$$u_z \gg \frac{\omega}{\omega_0} c,$$

то вещественный корень лежит на длинноволновой ветви

$$u_{\phi} \approx u_z,$$

т. е. фазовая скорость равна звуковой.

Если же скорость звука мала

$$u_z \ll \frac{\omega}{\omega_0} c,$$

то осуществляется промежуточный случай

$$u_{\phi}^2 = \frac{\omega}{\omega_0} c u_z = \sqrt{\frac{\omega_l \omega_e}{\omega_0}} c u_z = u_A \bar{u}_z.$$

В этом случае фазовая скорость прямого магнитного звука равна средней геометрической из альфвеновской и звуковой скоростей.

## Глава VI

### ФИЗИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА ПЛАЗМЫ

В предшествующих главах рассматривалось усредненное движение частиц плазмы: всем частицам, находящимся в данном элементе объема, приписывалась одна средняя скорость. В действительности на эту среднюю скорость накладывается хаотическое тепловое движение. Количественное описание теплового движения частиц составляет предмет физической кинетики.

Важнейшими проявлениями теплового движения являются процессы переноса вещества, импульса и энергии: диффузия, вязкость и теплопроводность. Кроме того, тепловое движение влияет на колебательные и волновые процессы в плазме и приводит, в частности, к дополнительному затуханию, не зависящему от столкновений.

#### 1. Функция распределения

В тепловом движении различные частицы имеют различные по величине и направлению скорости. Основным объектом исследования в физической кинетике является функция распределения скоростей  $f$ . Эта функция показывает, какое среднее по времени число частиц данного рода в данном элементе объема имеет скорости, лежащие в данном интервале. Иными словами, функция распределения есть плотность частиц на единицу интервала скоростей. Описание состояния с помощью функции распределения имеет статистический характер, так как функция распределения есть среднее значение указанной плотности\*.

---

\* Можно рассматривать функцию распределения как вероятность нахождения частицы в данном интервале скоростей. При этом она должна быть нормирована так, чтобы интеграл по всем возможным значениям скорости равнялся единице. Такую нормированную функцию распределения мы будем обозначать прямой буквой  $f$ .

Тепловое движение приводит к непрерывным случайным изменениям (флуктуациям) числа частиц как в данном элементе объема, так и в данном интервале скоростей. Функция распределения усреднена по этим флуктуациям. Если бы частицы двигались только в одном направлении, то движение их определялось бы одним числом — численным значением скорости  $v$ . При этом мы определили бы функцию распределения соотношением

$$dn = f dv,$$

где  $dn$  — плотность частиц со скоростями в интервале от  $v$  до  $v + dv$ .

Реально движение происходит в трехмерном пространстве, и скорость частицы есть вектор  $\mathbf{v}$ , для определения которого нужно задать три числа, т. е. три составляющие этого вектора вдоль осей координат. Проще всего пользоваться прямоугольной декартовой системой координат. Тогда этими составляющими будут  $v_x, v_y, v_z$ . В трехмерном случае функция распределения есть плотность частиц в данной точке пространства на единицу интервала каждой из составляющих скорости. Она определяется соотношением

$$dn = f dv_x dv_y dv_z, \quad (1.1)$$

где  $dn$  — плотность частиц с составляющими скорости в интервалах: от  $v_x$  до  $v_x + dv_x$ ; от  $v_y$  до  $v_y + dv_y$ ; от  $v_z$  до  $v_z + dv_z$ .

Совокупность интервалов составляющих определяет интервал значений вектора  $\mathbf{v}$ , который сокращенно обозначается

$$dv = dv_x dv_y dv_z. \quad (1.2)$$

Соответственно определение (1.1) можно записать

$$dn = f dv, \quad (1.3)$$

откуда

$$\int f dv = n. \quad (1.4)$$

Следует иметь в виду, что символ  $d\mathbf{v}$  означает трехмерный интервал значений вектора, но не векторный дифференциал. Дифференциал вектора  $d\mathbf{v}$  есть векторная разность его значений в двух бесконечно близких точках.

Интервал значений вектора скорости, определенный формулой (1.2), можно рассматривать так же, как элемент объема в пространстве скоростей. В этом пространстве роль координат играют составляющие скорости.

Плазма состоит всегда из частиц разного рода (в простейшем случае — из электронов и ионов). Поэтому плазма описывается набором функций распределения для всех сортов частиц. Если плазма находится в термодинамическом равновесии, то ее состояние описывается равновесной функцией распределения Максвелла

$$f^0 = \text{const } e^{-\frac{Mv^2}{2T}}. \quad (1.5)$$

где  $T$  — температура в энергетических единицах.

*Термической* мы называем плазму, у которой хотя бы для частиц данного рода или для скоростей в данном направлении распределение является максвелловским. Понятие температуры применимо только к термической плазме.

## 2. Фазовое пространство

В декартовой системе координат функция распределения зависит от трех координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и от трех составляющих скорости  $v_x$ ,  $v_y$  и  $v_z$ :

$$f_{\underline{r}} = f(x, y, z, v_x, v_y, v_z). \quad (2.1)$$

Можно рассматривать все шесть независимых переменных как координаты шестимерного *фазового пространства частицы*, элемент объема которого

$$d\Gamma = dx dy dz dv_x dv_y dv_z. \quad (2.2)$$

Величина  $\Gamma$  называется *фазовым объемом*. Число частиц в элементе фазового объема

$$dN = f d\Gamma. \quad (2.3)$$

Таким образом, функция распределения есть  $f_{\underline{r}}$  плотность частиц в фазовом пространстве.

В соответствии с определением интервала значений вектора элемент обычного объема можно рассматривать как интервал значений радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , имеющего составляющие  $x$ ,  $y$ ,  $z$

$$d\mathbf{r} = dx dy dz. \quad (2.4)$$

Тогда

$$d\Gamma = dr dv. \quad (2.5)$$

Определенное указанным образом фазовое пространство частицы представляет собой совокупность обычного пространства и *пространства скоростей*. Понятие фазового пространства можно обобщить на систему из произвольного числа частиц. В аналитической механике Гамильтона вводятся канонические переменные: обобщенные координаты  $q$  и сопряженные с ними обобщенные импульсы  $p$ . Они служат координатами *канонического фазового пространства*. При этом вводится функция Гамильтона  $H$  (гамильтониан), которая представляет собою энергию, выраженную в виде функции от канонических переменных. Производные канонических переменных по времени связаны с частными производными от гамильтониана уравнениями Гамильтона

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq}{dt}; \quad \frac{\partial H}{\partial q} = - \frac{dp}{dt}. \quad (2.6)$$

Ввиду общего характера механики Гамильтона каноническое фазовое пространство пригодно для описания любой сколь угодно сложной классической системы. Каноническое фазовое пространство системы представляет собой совокупность *конфигурационного пространства*, составленного из координат всех частиц, и *пространства импульсов*. При переходе от сложной системы к отдельной частице роль конфигурационного играет обычное пространство. В применении к частице, не имеющей внутренних степеней свободы, связь между каноническим и неканоническим фазовым пространством становится тривиальной. Импульс в этом случае связан со скоростью простым соотношением

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v},$$

где  $M$  — масса частицы. Элемент объема канонического фазового пространства

$$d\Gamma^* = dp dr = M^3 d\Gamma. \quad (2.7)$$

Соответственно функция распределения в каноническом фазовом пространстве

$$f^* = \frac{f}{M^3}. \quad (2.8)$$

Она определена так, что число частиц в элементе канонического фазового объема

$$dN = f^* d\Gamma^*. \quad (2.9)$$

Каноническим фазовым пространством удобно пользоваться при решении задач, в которых играют роль квантовые явления. Канонический фазовый объем имеет размерность действия в кубе. Объем элементарной ячейки канонического фазового пространства равен кубу постоянной Планка

$$\Delta\Gamma^* = h^3 = (2\pi\hbar)^3. \quad (2.10)$$

Для частиц данной массы переход к каноническому фазовому пространству меняет функцию распределения только на постоянный множитель. Для наших целей проще пользоваться неканоническим фазовым пространством, составленным из конфигурационного пространства и пространства скоростей.

### 3. Моменты функции распределения

Часто желательно рассматривать отдельно зависимость функции распределения от абсолютного (численного) значения скорости и отдельно — от ее направления. Для этого вводится единичный вектор  $\bar{\Omega}$  в направлении скорости  $\mathbf{v}$ . Вектор скорости можно представить как произведение ее численного значения на вектор направления

$$\bar{\mathbf{v}} = v\bar{\Omega}. \quad (3.1)$$

Интервал значений вектора скорости удобно при этом выразить в сферической системе координат

$$d\mathbf{v} = v^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dv, \quad (3.2)$$

где  $\vartheta$  — полярный угол между направлением скорости и осью  $z$ ;  $\varphi$  — азимутальный угол между проекцией скорости на плоскость  $x, y$  и осью  $x$ . Сомножитель, зависящий только от углов, можно рассматривать как интервал значений вектора направления  $\bar{\Omega}$

$$d\bar{\Omega} = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (3.3)$$

Поскольку эта величина совпадает с элементом телесного угла, то вектор направления  $\bar{\Omega}$  называют также вектором телесного угла.

В угловых переменных функция распределения определяется соотношением

$$dN = f(\mathbf{r}, v\Omega) dr^3 dv^3 d\Omega. \quad (3.4)$$

В задачах, где имеется выделенное направление, его удобно принять за ось  $z$  сферической системы координат и отсчитывать от него полярный угол  $\vartheta$ . Если от азимутального угла  $\varphi$  ничто не зависит, то по  $\varphi$  можно сразу произвести интегрирование. После этого

$$d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = -2\pi d\mu, \quad (3.5)$$

где

$$\mu = \cos \vartheta. \quad (3.6)$$

Для задач, в которых все величины меняются только в одном направлении  $z$ , функция распределения может быть определена посредством соотношения

$$dN = -f(\mathbf{r}, v, \mu) dr^3 dv^3 d\mu, \quad (3.7)$$

где  $\mu$  — косинус угла между направлением скорости  $v$  и осью  $z$ . Определенная таким образом функция распределения отличается от функции, определенной по общему правилу (3.1), постоянным множителем  $2\pi$ . Умножением функции распределения на различные степени косинуса  $\mu$  и интегрированием по телесному углу получают соответствующие моменты:

$$[f]_0 = \int f d\Omega = 2\pi \int_{-1}^{+1} f d\mu; \quad (3.8)$$

$$[f]_1 = \int f\mu d\Omega = 2\pi \int_{-1}^{+1} f\mu d\mu; \quad (3.9)$$

$$[f]_2 = \int f\mu^2 d\Omega = 2\pi \int_{-1}^{+1} f\mu^2 d\mu. \quad (3.10)$$

Моменты функции распределения имеют простой физический смысл. Полная концентрация частиц с данным числом значением скорости получается интегрированием функции распределения по всем телесным углам, т. е. равна нулевому моменту

$$\bar{n}(v) = [f]_0. \quad (3.11)$$

Поток частиц данной скорости в направлении оси  $z$

$$J(v) = \int v \mu f d\Omega = v [f]_1. \quad (3.12)$$

Поток  $z$ -й составляющей импульса, переносимый частицами данной скорости в направлении  $z$ , равен производимому ими в этом направлении давлению, вообще говоря, анизотропному\*

$$P(v) = \int p_z v_z f d\Omega = Mv^2 [f]_2. \quad (3.13)$$

Наконец, поток энергии (тепловой поток), переносимый частицами скорости  $v$ , выражается как

$$q(v) = \int \frac{Mv^2}{2} v \mu f d\Omega = \frac{Mv^3}{2} [f]_1, \quad (3.14)$$

т. е. так же, как и поток частиц выражается через первый угловой момент. Таким образом, нулевой момент функции распределения характеризует концентрацию частиц, первый момент — диффузионный и тепловой потоки и второй момент — давление в данном направлении.

Простейшим видом углового распределения является изотропное распределение, в котором функция распределения не зависит от направления скорости. Для изотропного распределения моменты выражаются следующим образом:

$$[f]_0 = 2\pi f \int_{-1}^1 d\mu = 4\pi f; \quad (3.15)$$

$$[f]_1 = 2\pi f \int_{-1}^1 \mu d\mu = 0; \quad (3.16)$$

$$[f]_2 = 2\pi f \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu = \frac{4}{3} \pi f = \frac{1}{3} [f]_0. \quad (3.17)$$

Все нечетные моменты от изотропного распределения (как и от всякой четной функции) тождественно обращаются в нуль. Четные моменты от изотропного распределения

\* Более полное макроскопическое описание системы может быть достигнуто, если вычислить интегралы вида (3.13) для потока  $i$ -й составляющей импульса в направлении  $k$ -й координаты. Тогда получится тензор  $P_{ik}$ , диагональные компоненты которого представляют анизотропное давление, а не диагональные — силы вязкости.

выражаются очень просто

$$[f]_{2m} = \frac{4\pi}{2m+1} f. \quad (3.18)$$

Из уравнения для нулевого момента можно выразить изотропную функцию распределения через концентрацию частиц с данным абсолютным значением скорости

$$f = \frac{n(v)}{4\pi}. \quad (3.19)$$

Это значит, что в изотропном случае функция распределения равна концентрации на единицу телесного угла. Второй момент изотропного распределения

$$[f]_2 = \frac{1}{3} n(v). \quad (3.20)$$

В однородной среде, находящейся в равновесии, распределение всегда изотропно. При этом диффузионные потоки отсутствуют. Явления переноса возможны только в результате анизотропии функции распределения, приводящей к неисчезающему первому моменту.

Всякая пространственная неоднородность нарушает изотропию распределения и вызывает процессы переноса. При этом, если неоднородность существенна лишь на длинах, больших в сравнении с длиной пробега, то функция распределения оказывается почти изотропной, т. е. отступление от изотропии можно рассматривать как малую поправку. В случае почти изотропной функции распределения применим приближенный способ рассмотрения процессов переноса, называемый диффузионным приближением.

#### 4. Уравнение Фоккера—Планка

В силу сложности взаимодействия в системах с большим числом частиц, в физической кинетике приходится широко использовать приближенные методы. Простейшие из них отвечают предельным случаям дискретного и непрерывного взаимодействия. В приближении дискретного взаимодействия принимается, что частицы взаимодействуют между собою только при тесных сближениях, которые можно трактовать как столкновения. При каждом подобном акте взаимодействия происходит резкое скачкообразное изменение направления движения частицы. Поведение функции распределения в приближении дискретного взаимодействия

описывается кинетическим уравнением Больцмана, о котором речь будет идти ниже. Приближение дискретного взаимодействия широко используется в кинетике обычных газов, состоящих из нейтральных частиц, так как силы взаимодействия между нейтральными частицами столь быстро спадают с расстоянием, что можно с полным основанием пренебречь непрерывными далекими взаимодействиями. В плазме взаимодействие между заряженными частицами осуществляется посредством дальнедействующих кулоновских сил. Направление движения частицы меняется в основном непрерывно; тесные сближения играют лишь второстепенную роль. В таких условиях вполне оправдано использование приближения непрерывного взаимодействия.

Поведение функции распределения в приближении непрерывного взаимодействия описывается *уравнением Фоккера — Планка*. Мы выведем здесь это уравнение в самом общем виде для функции распределения по произвольным величинам в системе с произвольными свойствами. Конкретные случаи уравнения Фоккера — Планка для распределений по координатам и скоростям будут рассмотрены в разделах (VI.5) и (VI.19).

Пусть функция распределения  $f$  зависит от набора величин  $X_\alpha$ , совокупность которых обозначим символом  $X$ , и от времени  $t$  и пусть  $w(X', X, \Delta t)$  есть вероятность перехода системы из состояния  $X'$  в состояние  $X$  за время  $\Delta t$ . Тогда функция  $f$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(X, t + \Delta t) = \int f(X', t) w(X', X, \Delta t) dX'. \quad (4.1)$$

Это уравнение можно преобразовать в дифференциальное уравнение в частных производных, если разложить подинтегральную функцию в ряд по степеням величины

$$\Delta X \equiv X' - X. \quad (4.2)$$

Получающиеся ряды хорошо сходятся, если вероятность  $w$  достаточно быстро спадает с возрастанием  $\Delta X$ , что отвечает приближению непрерывного взаимодействия.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда вероятность зависит от  $X'$  и  $X$  только через их разность  $\Delta X$ . В этом случае достаточно разложить в правой части (4.1) функцию  $f(X', t)$  в ряд Тейлора по степеням  $\Delta X$ , после чего уравнение (4.1) примет вид

$$f(X, t + \Delta t) = f(X, t) + \sum_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial X_{\alpha}} \overline{\Delta X_{\alpha}} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 f}{\partial X_{\alpha} \partial X_{\beta}} \overline{\Delta X_{\alpha} \Delta X_{\beta}} + \dots, \quad (4.3)$$

где

$$\int \omega(\Delta X, \Delta t) d\Delta X = 1; \quad (4.4)$$

$$\int \omega(\Delta X, \Delta t) \Delta X_{\alpha} d\Delta X \equiv \overline{\Delta X_{\alpha}}; \quad (4.5)$$

$$\int \omega(\Delta X, \Delta t) \Delta X_{\alpha} \Delta X_{\beta} d\Delta X \equiv \overline{\Delta X_{\alpha} \Delta X_{\beta}}. \quad (4.6)$$

В этих интегралах под  $d\Delta X$  подразумевается интервал изменения всего набора величин  $\Delta X$ , т. е. произведение их дифференциалов. Выражение (4.4) есть условие нормировки вероятности  $\omega$ , выражения (4.5) и (4.6) — обычные определения средних значений. Если теперь разложить левую часть по степеням  $\Delta t$  и ограничиться первым членом разложения, то получится дифференциальное уравнение\*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial X_{\alpha}} \frac{\overline{\Delta X_{\alpha}}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 f}{\partial X_{\alpha} \partial X_{\beta}} \frac{\overline{\Delta X_{\alpha} \Delta X_{\beta}}}{\Delta t}. \quad (4.7)$$

Ввиду того что промежуток времени  $\Delta t$  был выбран произвольно, величины  $\overline{\Delta X_{\alpha}}$  и  $\overline{\Delta X_{\alpha} \Delta X_{\beta}}$  должны быть пропорциональны величине  $\Delta t$ . Отношения

$$A_{\alpha} = - \frac{\overline{\Delta X_{\alpha}}}{\Delta t}; \quad (4.8)$$

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{\overline{\Delta X_{\alpha} \Delta X_{\beta}}}{\Delta t} \quad (4.9)$$

называются коэффициентами Фоккера — Планка. Если вероятность  $\omega$  зависит от  $X'$  и  $X$  только через их разность  $\Delta X$ , то коэффициенты Фоккера — Планка не зависят от  $X$  и их можно вносить под знак производной. Удобно записать уравнение (4.7) в форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}} \left( A_{\alpha} f - \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial X_{\beta}} \right). \quad (4.7a)$$

\* Это уравнение для случая, когда  $X$  представляет собой пространственные координаты, было впервые получено в теории броуновского движения Эйнштейна.

Выписанные до сих пор формулы были применимы к любому набору величин  $X$ . Если же эти величины являются составляющими вектора  $\mathbf{X}$ , то коэффициенты  $A_\alpha$  становятся составляющими вектора  $\mathbf{A}$ , а коэффициенты  $B_{\alpha\beta}$  — компонентами тензора  $\mathbf{B}$ . Уравнение (4.7) в этом случае может быть записано в векторной форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\operatorname{div}(\mathbf{A}f - \mathbf{B}\nabla f). \quad (4.7б)$$

Но, согласно теореме Гаусса, это выражение можно записать как

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J}, \quad (4.10)$$

где  $\mathbf{J}$  — обобщенный поток по величине  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}f - \mathbf{B}\nabla f. \quad (4.11)$$

Коэффициенты  $A_\alpha$  образуют вектор скорости переноса по величине  $\mathbf{X}$ , а коэффициенты  $B_{\alpha\beta}$  — тензор обобщенных коэффициентов диффузии. В частном случае, когда вероятность изотропна, он вырождается в скалярный коэффициент диффузии]

$$D = \frac{1}{2} \frac{\overline{\Delta X_\alpha^2}}{\Delta t} = \frac{1}{6} \frac{\overline{\Delta X^2}}{\Delta t}, \quad (4.12)$$

так как в этом случае  $\overline{\Delta X^2} = \overline{\Delta X_1^2} + \overline{\Delta X_2^2} + \overline{\Delta X_3^2} = 3\overline{\Delta X_\alpha^2}$ .

Теперь осталось обобщить полученные результаты на случай, когда коэффициенты  $A$  и  $B$  переменны, т. е. вероятность  $w$  зависит от  $X'$  и  $X$  не только через  $\Delta X$ . Для этого переходят от переменных  $X', X$  к переменным  $X', \Delta X$  и записывают уравнение (4.1) в виде

$$f(X, t + \Delta t) = \int f(X', t) w(X', \Delta X, \Delta t) d\Delta X, \quad (4.13)$$

где интеграл в правой части берется при фиксированном  $X$ . Затем разлагают подынтегральную функцию  $f w$  в ряд Тейлора только по величине  $\Delta X$ , входящей через  $X'$ , оставляя нетронутым второй аргумент функции  $w$ :

$$\begin{aligned} f(X', t) w(X', \Delta X, \Delta t) &= f(X, t) w(X, \Delta X, \Delta t) + \\ &+ \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}} [f(X, t) w(X, \Delta X, \Delta t)] \Delta X_{\alpha} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2}{\partial X_{\alpha} \partial X_{\beta}} [f(X, t) w(X, \Delta X, \Delta t)] \Delta X_{\alpha} \Delta X_{\beta} + \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

Полученный ряд подставляется в правую часть уравнения (4.13), и операторы дифференцирования по  $X$  и функция  $f(X, t)$  выносятся за знак интегрирования по  $\Delta X$ , что дает

$$f(X, t + \Delta t) = f(X, t) + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}} \left[ f(X, t) \int \omega(X, \Delta X, \Delta t) \times \right. \\ \left. \times \Delta X_{\alpha} d\Delta X \right] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2}{\partial X_{\alpha} \partial X_{\beta}} \times \\ \times \left[ f(X, t) \int \omega(X, \Delta X, \Delta t) \Delta X_{\alpha} \Delta X_{\beta} d\Delta X \right] + \dots \quad (4.15)$$

Если разложить левую часть по степеням  $\Delta t$  и ограничиться первым членом разложения, то получится *первая форма уравнения Фоккера — Планка*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}} A'_{\alpha} f + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2}{\partial X_{\alpha} \partial X_{\beta}} B_{\alpha\beta} f; \quad (4.16)$$

$$A'_{\alpha} = - \frac{1}{\Delta t} \int \omega(X, \Delta X, \Delta t) \Delta X_{\alpha} d\Delta X \equiv - \frac{\overline{\Delta X_{\alpha}}}{\Delta t}; \quad (4.17)$$

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\Delta t} \int \omega(X, \Delta X, \Delta t) \Delta X_{\alpha} \Delta X_{\beta} d\Delta X \equiv \frac{\overline{\Delta X_{\alpha} \Delta X_{\beta}}}{2\Delta t}. \quad (4.18)$$

Для важнейших случаев, когда величины  $X$  являются компонентами вектора, эта форма, однако, оказывается неудобной, так как правая часть не выражается через дивергенцию потока. Предпочтительно привести уравнение (4.16) к виду, аналогичному (4.7), для чего расписывают его как

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}} A'_{\alpha} f + \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}} f \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial X_{\beta}} + \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}} B_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial X_{\beta}}. \quad (4.19)$$

Если объединить два первых члена правой части, то получится *вторая форма уравнения Фоккера — Планка*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial X_{\alpha}} \left( A_{\alpha} f - \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial X_{\beta}} \right), \quad (4.20)$$

где

$$A_{\alpha} = A'_{\alpha} - \sum_{\beta} \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial X_{\beta}}. \quad (4.21)$$

Для векторных величин  $X$  вторая форма уравнения Фоккера — Планка совпадает по виду с уравнением (4.7 б), отличаясь от него только несколько более сложным определением вектора  $A$ . При этом сохраняется удобное выражение (4.11) для потока.

Если за векторную величину  $X$  принять вектор положения в обычном пространстве, то уравнение Фоккера — Планка будет описывать процессы переноса, которые мы рассмотрим в следующем разделе. Если же принять за  $X$  вектор скорости, то уравнение Фоккера — Планка будет описывать диффузию в пространстве скоростей, т. е. процессы *релаксации*, приводящие к установлению равновесного распределения Максвелла. Об этих процессах речь будет идти в разделе (VI.19).

### 5. Феноменологическое описание процессов переноса

Если за переменные  $X_\alpha$  в уравнении Фоккера — Планка принять координаты обычного пространства, то уравнение (4.20) или (4.7б) будет представлять собою обычное уравнение диффузии. Вектор  $A$  представляет в этом случае скорость макроскопического течения  $v$ , а тензор  $B$  составлен из коэффициентов диффузии  $D_{\alpha\beta}$ . В отсутствие магнитного поля он вырождается в скалярный коэффициент диффузии, величину которого можно оценить по формуле (4.12). При этом в качестве промежутка времени  $\Delta t$  выбирают время, за которое частица существенно меняет направление своего движения, т. е. среднее время передачи импульса  $\tau$ . Средний квадрат смещения выражают в виде  $\overline{\Delta X^2} \equiv l^2$  и величину  $l$  называют *длиной свободного пробега* (или просто *пробегом*). По физическому смыслу это есть расстояние, на котором заметно меняется направление скорости. Для частиц со скоростью  $v$  по порядку величины

$$l \approx v\tau; \quad D \approx lv.$$

При наличии магнитного поля диффузия становится анизотропной и коэффициент диффузии — тензорной величиной. Оценка величины компонентов тензора диффузии может производиться по формуле (4.9). Продольный коэффициент диффузии (вдоль магнитного поля) сохраняет ту же величину, что и в отсутствие поля

$$D \approx \frac{l^2}{\tau} \approx lv \approx \overline{v^2}\tau. \quad (5.1)$$

При оценке поперечного коэффициента диффузии (поперек магнитного поля) следует считать, что смещение частицы заключается в перескоке с одной циклотронной орбиты на другую, откуда

$$D_{\perp} \approx \frac{R_c^2}{\tau}, \quad (5.2)$$

где  $R_c$  — циклотронный радиус;  $\tau$  — среднее время передачи импульса. Если подставить значение циклотронного радиуса из формулы (1.13.10), то

$$D_{\perp} \approx \frac{\overline{v^2}}{\omega_c^2 \tau} \approx \frac{l v}{\omega_c^2 \tau^2}. \quad (5.2a)$$

В замагниченной плазме при больших значениях величины  $\omega_c \tau$  поперечный коэффициент диффузии должен быть в  $(\omega_c \tau)^2$  раз меньше продольного и уменьшаться обратно пропорционально квадрату напряженности магнитного поля. Следует отметить, что на поперечную диффузию в реальных условиях обычно накладываются турбулентные движения, связанные с неустойчивостью плазмы. Вследствие этого на опыте поперечный коэффициент диффузии обычно уменьшается примерно как первая степень напряженности магнитного поля (*боровская диффузия*). В некоторых экспериментальных условиях наблюдается даже резкое возрастание скорости поперечной диффузии при увеличении напряженности магнитного поля сверх некоторого критического значения (*аномальная диффузия*). Это явление находит свое объяснение в теории неустойчивости плазмы.

Для описания процессов переноса при слабой анизотропии, т. е. в отсутствие магнитного поля, можно воспользоваться более наглядным методом угловых моментов. Для этого представляю функцию распределения как сумму основной изотропной функции  $f^0$  и малой анизотропной добавки  $f^1$ . Поскольку в однородной среде функция распределения была изотропной, то анизотропная добавка возникла от пространственной неоднородности основной функции и может быть разложена в ряд по степеням ее градиента. Если магнитное поле отсутствует, то угловая зависимость функции  $f^1$  может быть представлена разложением по полиномам Лежандра  $P(\mu)$ , где  $\mu$  — косинус угла между рассматриваемым направлением и вектором  $\nabla f^0$ . В первом

приближении сохраняют только первые члены обоих разложений и записывают анизотропную добавку в виде\*

$$f^1 = -\mu l \nabla f^0. \quad (5.3)$$

Это приближение и называется диффузионным. Из размерности обеих частей равенства видно, что множитель пропорциональности  $l$  должен иметь размерность длины. Он называется *длиной пробега* для частиц со скоростью  $v$ . Для того чтобы  $f^1$  была малой величиной, нужно, чтобы относительное изменение  $f^0$  на длине пробега было мало. Поскольку, согласно формуле (3.16), изотропная функция  $f^0$  не дает вклада в первый угловой момент, он вычисляется посредством подстановки выражения (5.3) в формулу (3.9):

$$[f]_1 = -2\pi l(v) \nabla f^0 \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu = -\frac{4\pi}{3} l(v) \nabla f^0. \quad (5.4)$$

Но так как  $f^0$ , по предположению, изотропная функция, а добавка вида (5.3) не дает вклада в нулевой момент, то, согласно выражению (3.19),

$$f^0 = \frac{n(v)}{4\pi},$$

где  $n(v)$  — концентрация частиц с данным абсолютным значением скорости. Таким образом, формулу (5.4) можно записать в виде

$$[f]_1 = -\frac{l(v)}{3} \nabla n(v). \quad (5.4a)$$

По формуле (3.12) диффузионный поток

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{3} \int_0^\infty v l(v) \nabla n(v) dv. \quad (5.5)$$

По формуле (3.14) тепловой поток

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{Mv^3}{2} l(v) \nabla n(v) dv. \quad (5.6)$$

---

\* Знак минус означает, что частицы движутся преимущественно в направлении падающей концентрации.

В этих формулах интегралы берутся по абсолютному значению скорости.

Рассмотрим простейший случай, когда в пространстве меняется только полная концентрация частиц, а вид распределения остается неизменным. В этом случае формула (5.5) может быть записана в виде

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{3} \langle lv \rangle \nabla n, \quad (5.7)$$

где угловые скобки означают усреднение по основной функции распределения. Множитель пропорциональности между диффузионным потоком и градиентом концентрации носит название коэффициента диффузии  $D$ . Согласно формуле (5.7), для плазмы без магнитного поля

$$D = \frac{\langle lv \rangle}{3}. \quad (5.8)$$

Для термической плазмы функция  $n(v)$  содержит в качестве параметра температуру  $T$ . Если температура меняется в пространстве, то для поддержания механического равновесия необходимо постоянство давления (а не концентрации частиц). Отсюда

$$\nabla n(v) = \left( \frac{\partial n(v)}{\partial T} \right)_p \nabla T.$$

Тогда, согласно формуле (5.6), тепловой поток в плазме без магнитного поля

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{3} \left\langle \frac{Mv^3}{2} l \cdot \left( \frac{\partial n(v)}{\partial T} \right)_p \right\rangle \nabla T. \quad (5.9)$$

Множитель пропорциональности между тепловым потоком и градиентом температуры носит название коэффициента теплопроводности  $\lambda$ . Согласно формуле (5.9), для плазмы без магнитного поля

$$\lambda = \frac{1}{3} \left\langle \frac{Mv^3}{2} l \cdot \left( \frac{\partial n(v)}{\partial T} \right)_p \right\rangle. \quad (5.10)$$

Ввиду того что для функции  $n(v)$  температура является параметром, а скорость  $v$  — аргументом, скорость можно вносить под знак дифференцирования по температуре. Удобно представить выражение (5.10) в таком виде, чтобы

под знаком производной по температуре стояла величина

$$\mathcal{E}(v) = \frac{Mv^2}{2} n(v), \quad (5.11)$$

которая представляет тепловую энергию частиц с данной скоростью на единицу объема. Через эту величину коэффициент теплопроводности

$$\lambda = \frac{1}{3} \left\langle lv \left( \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial T} \right)_p \right\rangle. \quad (5.12)$$

По порядку величины он равен произведению коэффициента диффузии на теплоемкость единицы объема при постоянном давлении. Формулы (5.8) и (5.12) часто пишут в виде

$$D \approx \frac{1}{3} lv; \quad (5.8a)$$

$$\lambda \approx c_p \rho D, \quad (5.12a)$$

где  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении на единицу массы;  $\rho$  — плотность. При этом  $v$  рассматривается как средняя скорость теплового движения,  $l$  — как средний пробег. Ввиду того что при таком написании формул среднее значение произведения заменяется на произведение средних значений, формулы (5.8a) и (5.12a) верны с точностью до численных множителей порядка единицы, зависящих от способа усреднения.

Точное значение пробега  $l$  находится посредством решения кинетического уравнения, о чем речь будет идти ниже. Для грубой оценки можно воспользоваться элементарными физическими соображениями. По физическому смыслу пробег есть среднее расстояние, проходимое частицей без резкого изменения направления движения, т. е. без заметной передачи импульса. Отсюда следует оценочная формула для пробега

$$l(v) \approx v\tau \quad (5.13)$$

и для коэффициента диффузии вдоль магнитного поля  $D_{\parallel}$

$$D_{\parallel} \approx v^2 \tau. \quad (5.8b)$$

Из сопоставления с формулой (5.2) следует

$$\frac{D_{\perp}}{D_{\parallel}} = \frac{R_c^2}{v^2 \tau^2} = \frac{1}{\omega_c^2 \tau^2}. \quad (5.14)$$

Таким образом, поперечный коэффициент диффузии в замагниченной плазме должен быть мал в сравнении с продольным и уменьшаться обратно пропорционально квадрату напряженности поля. То же относится, как мы видели в разделе (1.8), и к проводимости, а также и ко всем остальным коэффициентам переноса. В этом проявляется *анизотропия процессов переноса* в магнитном поле. Формула (5.14) пригодна для замагниченной плазмы, т. е. при  $\omega\tau \gg 1$ . В переходной области действует формула, аналогичная формуле (1.8.12)

$$D_{\perp} = \frac{D_{\parallel}}{1 + \omega_c^2 \tau^2}. \quad (5.15)$$

Мы рассмотрели простейшие случаи, когда имеется либо только диффузионный, либо только тепловой поток, и считали основную функцию распределения изотропной, а электрические поля отсутствующими. В более сложных случаях получатся и более сложные результаты. При одновременном протекании процессов диффузии и теплопередачи диффузионный поток будет зависеть также и от градиента температуры, а тепловой — также и от градиента концентрации. Эти явления носят название термодиффузии и диффузионной теплопроводности. Соответствующие коэффициенты связаны между собой *соотношениями Онсагера*, вытекающими из термодинамики необратимых процессов. Если в плазме происходят макроскопические движения, то основная функция распределения изотропна только в локальной системе координат, движущейся со средней скоростью частиц в данной точке. В общей для всей плазмы системе координат основная функция распределения оказывается анизотропной, что приводит к появлению дополнительных членов в выражении (3.13) для потока импульса, описывающих силы вязкости.

Важнейшим фактором, влияющим на процессы переноса в плазме, является действие электрических полей. Поскольку ионы и электроны диффундируют с разной скоростью, то диффузия в плазме неизбежно приводит к разделению зарядов, а следовательно, и к возникновению электрических полей. Если разделение зарядов не снимается внешними проводниками, контактирующими с плазмой, то ионы и электроны не могут диффундировать независимо друг от друга. Возникающее электрическое поле вынуждает их к совместной, или *амбиполярной диффузии*.

Для описания этого процесса нужно включить в число коэффициентов переноса также и *подвижности* электронов и ионов  $\mu$ , характеризующие перенос их под действием электрического поля. Подвижность определяется таким образом, что при равновесии силы электрического поля и сил трения средняя скорость стационарного движения частиц

$$\bar{v} = \mu E,$$

откуда поток частиц  $\mathbf{J} = \bar{v}n$  под действием электрического поля  $E$  выражается как

$$\mathbf{J} = \mu n E, \quad (5.16)$$

где  $n$  — концентрация частиц данного рода. Нет необходимости находить подвижность методами физической кинетики. Связь между диффузией и подвижностью дается соотношением *Эйнштейна*, которое вытекает из совершенно общих термодинамических соображений. Для вывода этого соотношения достаточно рассмотреть равновесие плазмы в однородном электрическом поле  $E$  при температуре  $T$  (в энергетических единицах). Потенциальная энергия частицы с зарядовым числом  $Z$  зависит при этом от координаты  $x$  как  $-ZeEx$ , откуда, согласно распределению Больцмана, концентрация должна меняться по закону\*

$$n = n_0 e^{\frac{ZeEx}{T}}. \quad (5.17)$$

Но в состоянии равновесия поток под действием электрического поля должен компенсироваться диффузионным потоком

$$D \nabla n = \mu n E. \quad (5.18)$$

Согласно распределению (5.17)

$$\nabla n = \frac{ZeE}{T} n, \quad (5.19)$$

---

\* Этот закон совершенно аналогичен барометрической формуле Лапласа и подобно ей может быть получен (без обращения к статистической физике) решением уравнения гидростатики в электрическом поле. При этом нужно учесть, что положительно заряженная частица, двигаясь по полю, превращает свою потенциальную энергию в кинетическую, так что потенциальная энергия становится отрицательной.

что после подстановки в равенство (5.18) дает

$$\bar{\mu} = \frac{Z_e}{T} D. \quad (5.20)$$

Это и есть соотношение Эйнштейна. Чтобы получить закон амбиполярной диффузии, полный поток частиц каждого рода записывают как сумму диффузионного потока и потока, вызванного электрическим полем

$$\mathbf{J}_\alpha = -D \nabla n + \mu n \mathbf{E}. \quad (5.21)$$

Если плазма не контактирует с внешними проводниками, то суммарный перенос заряда должен отсутствовать

$$\sum_k Z_k \mathbf{J}_k = 0. \quad (5.22)$$

Кроме того, если все размеры велики в сравнении с дебаевской длиной, то можно считать выполненным условие квазинейтральности

$$\sum_k Z_k n_k = 0. \quad (5.23)$$

В этих формулах суммирование производится по всем сортам частиц, присутствующим в плазме, включая электроны, которым приписывается  $Z = -1$ . Концентрации различных родов ионов в плазме должны быть заданы. Тогда концентрация электронов находится из условия (5.23). Условие (5.22) после подстановки формулы (5.21) позволяет определить электрическое поле, подстановка которого в выражение (5.21) дает окончательные выражения для потоков всех частиц, переносимых амбиполярной диффузией.

Рассмотрим простейший случай, когда плазма состоит только из электронов и однозарядных ионов одного рода. Тогда условие (5.23) дает

$$n_e = n_i \equiv n$$

и условие (5.22)

$$\mathbf{J}_e = \mathbf{J}_i,$$

или после подстановки выражения (5.21)

$$-D_e \nabla n + \mu_e n \mathbf{E} = -D_i \nabla n + \mu_i n \mathbf{E},$$

откуда

$$\mathbf{E} = \frac{D_e - D_i}{\mu_e - \mu_i} \frac{\nabla n}{n}. \quad (5.24)$$

Подстановка этого результата в выражение (5.21) дает поток амбиполярной диффузии в виде

$$\mathbf{J} = - \frac{\mu_e D_i - \mu_i D_e}{\mu_e - \mu_i} \nabla n. \quad (5.25)$$

Но, согласно формуле (5.20), подвижность электронов отрицательна, и для однозарядных ионов

$$\mu_e = - \frac{D_e}{D_i} \mu_i.$$

С учетом этого соотношения формула (5.25) может быть записана в виде

$$\mathbf{J} = - D_a \nabla n, \quad (5.26)$$

где коэффициент амбиполярной диффузии

$$D_a = \frac{2D_e D_i}{D_e + D_i}. \quad (5.27)$$

В отсутствие магнитного поля коэффициент диффузии для электронов гораздо больше, чем для ионов, вследствие чего коэффициент амбиполярной диффузии оказывается равен удвоенному коэффициенту диффузии ионов. Но результат (5.27) сохраняет силу и при наличии магнитного поля, где поперек поля ионы диффундируют гораздо быстрее электронов. Во всех случаях при большом различии между положительными и отрицательными частицами коэффициент амбиполярной диффузии оказывается равен удвоенному меньшему из их коэффициентов.

## 6. Кинетическое уравнение без столкновений

Изменение функции распределения во времени и в пространстве описывается кинетическим уравнением Больцмана. Допустим сначала, что известны все силы, действующие на каждую частицу, как определенные функции от координат и времени. Уравнение, выведенное в таком допущении, называется кинетическим уравнением без столкно-

вений. Ввиду важности этого уравнения выведем его двумя различными способами. Удобно выводить кинетическое уравнение из рассмотрения движения частиц в фазовом пространстве. Из аналитической механики Гамильтона следует теорема Лиувилля, выражающая закон сохранения фазового объема. Согласно этой теореме, при движении совокупности частиц величина занимаемого ими фазового объема сохраняется. Из сохранения фазового объема следует, что при постоянном числе частиц плотность частиц в фазовом пространстве, т. е. функция распределения, должна быть постоянной во времени

$$\frac{Df}{Dt} = 0, \quad (6.1)$$

где  $D/Dt$  — полная производная по времени, взятая вдоль траектории частицы в фазовом пространстве. Если выразить по правилам дифференциального исчисления полную производную через частные, то получится кинетическое уравнение без столкновений

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v_x} \frac{dv_x}{dt} + \\ + \frac{\partial f}{\partial v_y} \frac{dv_y}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v_z} \frac{dv_z}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Из механики Гамильтона закон сохранения получается непосредственно для канонического фазового объема. Но для простой частицы импульс и скорость отличаются только постоянным множителем (массой), так что теорема Лиувилля одинаково справедлива как для пространства импульсов, так и для пространства скоростей.

Поскольку производная в теореме Лиувилля берется вдоль траектории частицы, то производные от координат по времени представляют собой составляющие скорости  $\mathbf{v}$ , а производные от составляющих скорости по времени — составляющие ускорения. Следовательно, уравнение (6.2) в компактной векторной форме имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) f + \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \nabla_v \right) f = 0, \quad (6.3)$$

где символ  $\nabla$  означает обычный градиент, а символ  $\nabla_v$  — градиент в пространстве скоростей, т. е. символический

вектор с составляющими  $\frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y}, \frac{\partial}{\partial v_z}$  по осям  $x, y, z$ . Иногда вместо этих символов пользуются равнозначными

$$\nabla f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}; \quad \nabla_v f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}.$$

Если воспользоваться еще вторым законом Ньютона

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{M},$$

где  $M$  — масса частицы,  $\mathbf{F}$  — действующая на нее сила, то можно записать кинетическое уравнение без столкновений как

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) f + \frac{1}{M} (\mathbf{F} \nabla_v) f = 0. \quad (6.4)$$

Нетрудно получить тот же результат и без помощи теоремы Лиувилля. Для этого достаточно рассматривать кинетическое уравнение как уравнение непрерывности в фазовом пространстве. Изменение функции распределения в данной точке пространства и для данного фиксированного значения скорости равно разности входящих и выходящих потоков по координатам и скоростям. При этом необходимо рассмотреть потоки как в обычном пространстве, так и в пространстве скоростей. Поток в обычном пространстве есть число частиц, проходящих за единицу времени через единицу площади поверхности, ограничивающей рассматриваемый элемент объема. За время  $dt$  через такую поверхность пройдут все частицы, которые в начальный момент находились от нее на расстояниях меньше  $v_x dt$ , где  $x$  — координата, нормальная к поверхности. Отсюда входящий поток равен  $f v_x$ . Выходящий поток есть  $(f + \frac{\partial f}{\partial x} dx) v_x$  (так как скорость  $v_x$  рассматривается как фиксированный параметр). Разность потоков вдоль координаты  $x$  равна, таким образом,  $-\frac{\partial f}{\partial x} v_x dx$ .

Теперь мы должны ввести поток в пространстве скоростей. Это есть число частиц, которые вследствие ускорения  $\mathbf{a}$  изменяют свою скорость так, что попадают в рассматриваемый интервал пространства скоростей. Поток вдоль оси скоростей  $v_x$  рассчитывается на единицу времени и единицу «площади» в плоскости  $v_y, v_z$ . За время  $dt$  через эту «пло-

щадь» пройдут все частицы, у которых в начальный момент составляющая скорости  $v_x$  отличалась от рассматриваемого значения меньше чем на  $a_x dt$ , где  $a_x = \frac{dv_x}{dt}$  — ускорение в направлении  $x$ . Отсюда входящий поток вдоль оси скоростей  $v_x$  равен  $f a_x$ , выходящий — равен  $(f + \frac{\partial f}{\partial v_x} dv_x) a_x$  и разность потоков равна  $-\frac{\partial f}{\partial v_x} a_x dv_x$ . Если умножить каждое из полученных выражений на площадь, просуммировать по трем координатам и трем скоростям и разделить на элемент фазового объема, то получится изменение функции распределения в данной точке фазового пространства

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & -v_x \frac{\partial f}{\partial x} - v_y \frac{\partial f}{\partial y} - v_z \frac{\partial f}{\partial z} - a_x \frac{\partial f}{\partial v_x} - \\ & - a_y \frac{\partial f}{\partial v_y} - a_z \frac{\partial f}{\partial v_z}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

то совпадает с уравнением (6.2).

Если бы все силы  $F$ , действующие на частицы, были заданы извне и не зависели от самой функции распределения, то вопрос о ее нахождении решался бы кинетическим уравнением без столкновений. В действительности, однако, движение частиц зависит от их взаимодействия. Точное математическое описание системы из большого числа частиц с учетом всех взаимодействий становится довольно сложной задачей.

В принципе точное решение этой задачи можно было бы получить с помощью обобщения понятия фазового пространства. Рассмотрим вместо фазового пространства одной частицы многомерное *фазовое пространство системы*, координатами которого служат все величины, описывающие состояние системы. В качестве таких величин можно выбрать просто координаты и составляющие скоростей всех частиц, образующих систему. Более общий характер имеет *каноническое фазовое пространство системы*, в котором роль координат выполняют обобщенные координаты и импульсы, описывающие состояние системы в аналитической механике Гамильтона. Для системы из  $N$  частиц число измерений этого довольно громоздкого пространства равно  $6N$ . Функция распределения  $f$  для системы частиц определяется как вероятность нахождения в данном элементе

фазового объема системы или как плотность в фазовом пространстве для ансамбля систем со случайными начальными состояниями. Эта функция для системы из  $N$  частиц называется  $N$ -частичной функцией распределения. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема справедлива для систем с любым числом степеней свободы, а поэтому остается в силе и в фазовом пространстве системы. Следовательно,  $N$ -частичная функция распределения удовлетворяет уравнению (6.1), которое в применении ко всей системе называется *уравнением Лиувилля*. Если расписать его в канонических переменных  $p$  и  $q$ , то получится

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{dp_{\alpha}}{dt} + \sum_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{dq_{\alpha}}{dt} = 0. \quad (6.5a)$$

Здесь индекс  $\alpha$  нумерует все степени свободы системы, каждой из которых отвечает обобщенная координата  $q$  и обобщенный импульс  $p$ . Если подставить значения производных из уравнений Гамильтона (2.6), то уравнение Лиувилля примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha} \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right\} = 0. \quad (6.6)$$

Выражение в фигурных скобках называется *скобкой Пуассона* от  $f$  и  $H$  для одной степени свободы. Сумма этих выражений есть скобка Пуассона от функции распределения и полного гамильтониана системы

$$\{f, H\} \equiv \sum_{\alpha} \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right\}. \quad (6.7)$$

С помощью этого символа уравнение Лиувилля записывают в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0. \quad (6.8)$$

Если система состоит из простых частиц, не имеющих внутренних степеней свободы, то уравнение Лиувилля можно записать и не в канонических переменных, а как

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha} v_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha} a_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial v_{\alpha}} = 0, \quad (6.9)$$

где  $x$  — координаты;  $v$  — скорости;  $a = F/M$  — ускорения всех частиц системы. Уравнение Лиувилля определяет

$N$ -частичную функцию распределения. Проинтегрировав уравнение Лиувилля по координатам одной из частиц, можно получить уравнение для  $(N - 1)$ -частичной функции распределения и т. д. Однако эта процедура практически осуществима только при отсутствии взаимодействия между частицами. Последовательным применением ее можно дойти до уравнения для одночастичной функции распределения, которое при отсутствии взаимодействия совпадает с уравнением (6.3).

Для системы из большого числа взаимодействующих частиц решение уравнения Лиувилля практически неосуществимо и приходится прибегать к приближенным методам, к рассмотрению которых мы и обратимся.

## 7. Самосогласованное поле

Самое простое, что можно сделать для описания взаимодействия между частицами, — это вычислить силу  $\mathbf{F}$  по средним значениям функции распределения, пренебрегая флуктуациями. При этом находится распределение частиц, создающее силовое поле, поддерживающее это самое распределение. Такое поле называется самосогласованным. С частным случаем самосогласованного электростатического поля мы уже встречались в теории электростатического экранирования Дебая.

Рассмотрим теперь более общий случай самосогласованного электромагнитного поля. Метод самосогласованного поля применим только к дальним взаимодействиям, так как на ближних взаимодействиях сильно сказываются флуктуации. Будем считать, что дальнедействующие силы в плазме имеют только электромагнитный характер. Тогда сила  $\mathbf{F}$ , действующая на частицу с зарядом  $Ze$ , запишется как

$$\mathbf{F} = Ze \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right). \quad (7.1)$$

Здесь под  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  понимаются самосогласованные электрическое и магнитное поля, вычисляемые по уравнениям Максвелла, в которые подставляются плотности заряда  $q$  и тока  $\mathbf{j}$ , найденные из усредненных функций распределения

$$q = e \sum_k Z_k \int f_k(v) dv; \quad (7.2)$$

$$\mathbf{j} = e \sum_k Z_k \int f_k(v) \mathbf{v} dv. \quad (7.3)$$

Индекс  $k$  нумерует разные сорта частиц в плазме, включая электроны, которым приписывается  $Z = -1$ . Формулы (7.2) и (7.3) являются естественным обобщением формул (I.2.6) и (IV.1.9) на многоскоростную задачу.

После подстановки выражения (7.1) в уравнение (6.4) система кинетических уравнений для плазмы принимает вид

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) f_k + \frac{Z_k e}{M_k} \left\{ \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right) \nabla_v \right\} f_k = 0. \quad (7.4)$$

Если поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  находятся по уравнениям Максвелла с использованием выражений (7.2)—(7.3), то уравнение (7.4) будет называться *кинетическим уравнением с самосогласованным полем* или *уравнением Власова*.

Неточность метода самосогласованного поля заключается в пренебрежении флуктуациями (в частности, столкновениями), т. е. в замене средних значений функций функциями от средних значений. Такая замена вполне законна в линейном приближении по напряженностям полей. Отсюда следует, что метод самосогласованного поля является наиболее подходящим для линейной теории колебаний и волн в плазме.

## 8. Кинетическая теория пламенных волн

В качестве простейшего примера применения метода самосогласованного поля рассмотрим высокочастотные линейные продольные колебания плазмы без внешнего магнитного поля. Для высокочастотной ветви движением ионов можно пренебречь. Поскольку движутся только электроны, уравнение (7.4) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) f - \frac{e}{m} \left\{ \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right) \nabla_v \right\} f = 0. \quad (8.1)$$

В линейном приближении записываем функцию распределения как сумму основной функции  $f^0$  и малого возмущения  $f^1$ . Функция  $f^0$  является равновесной по отношению к рассматриваемому колебательному процессу. Но она вовсе не обязательно должна отвечать состоянию полного термодинамического равновесия. В разреженной плазме очень часто именно отступления от термодинамического равновесия приводят к колебательной неустойчивости, т. е. раскату колебаний, установление же полного равновесия

происходит только в процессе весьма медленной диссипации энергии возникающих колебаний. Поэтому мы будем считать функцию  $f^0$  не обязательно равновесной (как это часто делают), но вообще некоторым фоном, на котором происходят колебания. Пусть колебания происходят на однородном фоне; тогда функция  $f^0$  постоянна в пространстве и во времени и является заданной функцией скоростей. В этих предположениях из уравнения (8.1) получается уравнение первого приближения для определения функции  $f^1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^1}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f^1 - \frac{e}{mc} ([\mathbf{v}\mathbf{H}_0] \nabla_v) f^1 = \\ = \frac{e}{m} \left\{ \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\tilde{\mathbf{H}}] \right) \cdot \nabla_v \right\} f^0, \end{aligned} \quad (8.2)$$

где  $\mathbf{H}_0$  — внешнее магнитное поле;  $\tilde{\mathbf{H}}$  — собственное магнитное поле волны. Рассмотрим плоскую волну вида  $\exp(-i\omega t + ikx)$ . Согласно уравнению Максвелла,

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

переменное магнитное поле происходит только от вихревого электрического поля. В плоской продольной волне электрическое поле безвихревое ( $E_x$  зависит только от  $x$ ). Следовательно, при отсутствии внешнего магнитного поля собственное магнитное поле волны отсутствует и уравнение (8.2) принимает вид

$$-i\omega f^1 + iv_x k f^1 = \frac{e}{m} E_x \frac{\partial f^0}{\partial v_x}. \quad (8.3)$$

Электрическое поле находим из уравнения Максвелла и выражения (7.2):

$$ikE_x = 4\pi q = -4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} f^1 dv_x. \quad (8.4)$$

Поскольку мы не вводили внешнего электрического поля  $E_0$ , функция  $f^0$  должна давать нулевую плотность заряда.

Для получения дисперсионного уравнения следует выразить из уравнения (8.3)  $f^1$  через  $f^0$  и подставить в уравнение (8.4). Согласно уравнению (8.3),

$$f^1 = -i \frac{e}{m} \frac{1}{kv_x - \omega} \frac{\partial f^0}{\partial v_x} E_x. \quad (8.5)$$

Подстановка в уравнение (8.4) дает

$$\frac{4\pi e^2}{mk^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial f_0}{\partial v_x}}{v_x - \frac{\omega}{k}} dv_x = 1. \quad (8.6)$$

Это и есть дисперсионное уравнение, связывающее  $\omega$  и  $k$ . В общем случае оно оказывается трансцендентным, что характерно вообще для кинетической теории колебаний плазмы. В дальнейшем индекс  $x$  при составляющей скорости будем опускать\*.

Удобно ввести нормированную основную функцию распределения  $f$ , определенную соотношением

$$f_0 = nf, \quad (8.7)$$

где  $n$  — полная концентрация электронов. Нормированная функция распределения удовлетворяет условию

$$\int f dv = 1. \quad (8.8)$$

С помощью нормированной функции распределения дисперсионное уравнение плазменных волн можно записать в виде

$$\frac{\omega_0^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{v - \frac{\omega}{k}} dv = 1, \quad (8.9)$$

где  $\omega_0$  — электронная плазменная частота. Для того чтобы интеграл (8.8) сходил, функция распределения на пределах интегрирования должна обращаться в нуль. Воспользовавшись этим, можно преобразовать интеграл в левой части уравнений (8.6) или (8.9) интегрированием по частям как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{v - \frac{\omega}{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} f \frac{dv}{\left(v - \frac{\omega}{k}\right)^2},$$

\* Поскольку в настоящем разделе рассматривается только движение в одном направлении  $x$ , полагаем здесь  $v_x = v$  и относим функцию распределения к единичному интервалу значений  $v_x$ , а не к векторному интервалу  $dv$ . В конечные результаты будет входить произведение  $kv$ , которое в реальном трехмерном случае должно заменяться скалярным произведением двух векторов  $(\mathbf{k}\mathbf{v})$ .

после чего дисперсионное уравнение принимает вид

$$\omega_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(v)}{(\omega - kv)^2} dv = 1. \quad (8.10)$$

Заметим, что дисперсионное уравнение можно представить и еще в одной совершенно равноценной форме. Для этого достаточно умножить подынтегральную функцию в левой части уравнения (8.9) на величину

$$\frac{k}{\omega} \left( v - \frac{\omega}{k} - v \right) \equiv -1.$$

После этого интеграл примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial f}{\partial v} dv}{v - \frac{\omega}{k}} = -\frac{k}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{k}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{v dv}{v - \frac{\omega}{k}}.$$

Первый интеграл в силу условия  $f(\pm \infty) = 0$  обращается в нуль. Таким образом, уравнение (8.9) или (8.10) можно записать также и в форме

$$\frac{\omega_0^2}{k\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{v dv}{v - \frac{\omega}{k}} = 1. \quad (8.9a)$$

Эквивалентность уравнений (8.9) и (8.9a) означает, что составляющая скорости частиц вдоль направления распространения, усредненная по подынтегральной функции уравнения (8.9), равна фазовой скорости волны

$$\frac{\int v \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{v - \frac{\omega}{k}} dv}{\int \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{v - \frac{\omega}{k}} dv} = \frac{\omega}{k}$$

независимо от конкретного вида функции  $f$ , лишь бы она удовлетворяла условию интегрируемости, т. е. обращалась в нуль на бесконечности. Если это условие не выполнено, то интегралы теряют смысл.

Приближенное решение дисперсионного уравнения легко получить для случаев, когда функция распределения  $f$  быстро спадает с возрастанием скорости и при фазовой скорости  $v = \omega/k$  уже достаточно мала. Если это так, то подынтегральная функция заметно отличается от нуля только в двух областях: при малых скоростях и вблизи особой точки  $v = \omega/k \equiv u_\phi$ . Интеграл можно, таким образом, разбить на две части  $J_1$  и  $J_2$ , отвечающие двум указанным областям.

Интеграл по области малых скоростей находится посредством разложения подынтегральной функции по степеням малой в этой области величины

$$\frac{kv}{\omega} \equiv \frac{v}{u_\phi}.$$

При этом удобно исходить из дисперсионного уравнения в форме (8.10), записав его как

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(v)}{\left(1 - \frac{kv}{\omega}\right)^2} dv = 1 \quad (8.10a)$$

и разложив величину  $\left(1 - \frac{kv}{\omega}\right)^{-2}$  в биномиальный ряд\*:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{kv}{\omega}\right)^{-2} &= 1 + 2 \frac{kv}{\omega} + 3 \left(\frac{kv}{\omega}\right)^2 + \\ &+ 4 \left(\frac{kv}{\omega}\right)^3 + 5 \left(\frac{kv}{\omega}\right)^4 + \dots \end{aligned}$$

После этого преобразования интеграл по малым скоростям выразится как

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-\infty}^{v_1} \frac{f(v)}{\left(1 - \frac{kv}{\omega}\right)^2} dv = 1 + 2 \frac{k}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} v f dv + \\ &+ 3 \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f dv + \dots, \end{aligned} \quad (8.11)$$

---

\* Этот ряд проще всего получить дифференцированием геометрической прогрессии

$$\frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

где  $v_1$  — точно не определенное значение скорости, при котором функция распределения уже пренебрежимо мала, но которое еще меньше, чем фазовая скорость  $\omega/k$ . Интегралы в правой части уравнения (8.11) сходятся только при условии, если с возрастанием  $|v|$  функция распределения  $f$  спадает быстрее, чем любая степень скорости. Для равновесной максвелловской функции это условие выполнено, так как она спадает экспоненциально. Будем считать, что имеются только токи, связанные с самой волной, т. е. что сторонние токи отсутствуют, тогда первый интеграл в правой части уравнения (8.11) равен нулю. Если колебания происходят на изотропном фоне, то  $f(v)$  — четная функция и в уравнении (8.11) остаются только интегралы с четными степенями скорости

$$J_1 = \int_{-\infty}^{v_1} \frac{f(v) dv}{\left(1 - \frac{kv}{\omega}\right)^2} = 1 + 3\left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f dv + \\ + 5\left(\frac{k}{\omega}\right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} v^4 f dv + \dots \quad (8.11a)$$

Перейдем к вычислению интеграла по области вблизи особой точки:  $v \approx u_\phi$ . Этот интеграл удобнее вычислять исходя из дисперсионного уравнения в форме (8.9), где особая точка представляет собой простой полюс. Запишем интеграл в виде

$$J_2 \approx \left[ \frac{\partial f}{\partial v} \right]_{v = \frac{\omega}{k}} \int_{\frac{\omega}{k} - \varepsilon_1}^{\frac{\omega}{k} + \varepsilon_2} \frac{dv}{v - \frac{\omega}{k}}.$$

Этот интеграл несобственный, непосредственное интегрирование дает результат:

$$J_2 \approx \left[ \frac{\partial f}{\partial v} \right]_{v = \frac{\omega}{k}} \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

который зависит от выбора  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  и при устремлении этих величин порознь к нулю не стремится ни к какому определенному значению. Кроме того, в теории функций комплексного переменного логарифм является многозначной функ-

цией, которая и при действительном аргументе может иметь мнимую часть.

Действительная часть интеграла  $J_2$  приобретает определенное значение, если положить  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . Это значение называется *главным значением* интеграла. Если вблизи точки  $v = \omega/k$  значение  $\partial f/\partial v$  близко к нулю, то главное значение интеграла  $J_2$  пренебрежимо мало.

Для нахождения мнимой части интегрирование выполняется в комплексной плоскости. Здесь можно выбрать контур интегрирования, обходящий особую точку по

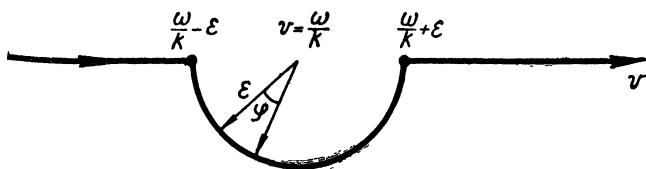


Рис. 13. Обход особой точки по правилу Ландау.

полуокружности (рис. 13). Направление обхода определяется правилом Ландау, о котором речь будет ниже. На этой полуокружности

$$v - \frac{\omega}{k} = \varepsilon e^{i\varphi};$$

$$dv = i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi$$

и интеграл сводится к

$$J_2 \approx \left[ \frac{\partial f}{\partial v} \right]_{v = \frac{\omega}{k}} \int_0^\pi \frac{i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} = i\pi \left[ \frac{\partial f}{\partial v} \right]_{v = \frac{\omega}{k}}, \quad (8.12)$$

независимо от значения  $\varepsilon$ , которое можно устремить к нулю. Этот результат можно было бы получить и непосредственно из теоремы вычетов, согласно которой интеграл по половине замкнутого контура, обходящего особую точку, равен  $\pi i$ , умноженному на вычет, который в данном слу-

чае равен просто числителю подынтегральной функции\*. Подстановка значений  $J_1$  и  $J_2$  в уравнения (8.10) и (8.9) дает дисперсионное уравнение в виде

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} J_1 + \frac{\omega_0^2}{k^2} J_2 = 1,$$

или после подстановки значений (8.11) и (8.12), ограничиваясь низшими степенями  $\frac{kv}{\omega}$ ,

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left[ 1 + 3 \left( \frac{k}{\omega} \right)^2 \bar{v}^2 \right] + i\pi \frac{\omega_0^2}{k^2} \left[ \frac{\partial f}{\partial v} \right]_{v=\frac{\omega}{k}} = 1. \quad (8.13)$$

Но в этом приближении и при малом затухании  $\omega$  мало отличается от  $\omega_0$ . Следовательно, результат (8.13) можно записать приближенно как

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 + 3k^2 \bar{v}^2 + i\pi \omega_0^2 \left( \frac{\omega}{k} \right)^2 \left[ \frac{\partial f}{\partial v} \right]_{v=\frac{\omega}{k}}, \quad (8.14)$$

где  $\bar{v}^2$  — квадрат скорости движения в одном направлении, усредненный по функции  $f$ . Если представить комплексную частоту в виде

$$\tilde{\omega} = \omega - i\delta,$$

где  $\delta$  — декремент затухания, то

$$\tilde{\omega}^2 \approx \omega^2 - 2i\omega\delta.$$

Из результата (8.14) для вещественной и мнимой частей получится (считая  $\delta$  малой величиной)

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 + 3k^2 \bar{v}^2; \quad (8.15)$$

$$\delta \approx -\frac{\pi\omega_0}{2} u_\Phi^2 \left[ \frac{\partial f}{\partial v} \right]_{v=u_\Phi}, \quad (8.16)$$

---

\* Иногда результат (8.12) выражают с помощью  $\delta$ -функции

$$\frac{1}{v - \frac{\omega}{k}} = P \frac{1}{v - \frac{\omega}{k}} + i\pi\delta \left( v - \frac{\omega}{k} \right), \quad (8.12a)$$

где  $P$  означает, что интеграл от соответствующего члена следует понимать в смысле главного значения;  $\delta$  означает функцию, интеграл от которой через нуль равен единице, в то время как во всех других точках она равна нулю. В общем случае перед мнимым членом стоит знак « $\pm$ ». Выбор знака « $+$ » дается правилом обхода Ландау.

где  $u_\phi = \omega/k$  — фазовая скорость волны. При принятой нами записи плоской волны в виде  $e^{i\omega t + ikx}$  зависимость от времени выражается множителем

$$e^{-i\tilde{\omega}t} \equiv e^{i\omega t} e^{-\delta t}.$$

Следовательно, положительные значения  $\delta$  отвечают затуханию, отрицательные — раскачке колебаний. Если функция распределения  $f$  уменьшается при возрастании абсолютного значения скорости, то мнимый член приводит к затуханию колебаний\*. Раскачка получится в том, и только в том случае, когда у функции распределения имеется «горб» при скоростях частиц, близких по величине и направлению к фазовой скорости волны.

Таким образом, мнимый член формулы (8.13) описывает затухание плазменных волн при отсутствии столкновений между частицами, которое называется *затуханием Ландау*. Оно является простейшим примером диссипации без столкновений — важнейшего явления в кинетике разреженной плазмы. Из формул (8.14) или (8.16) видно, что этот эффект происходит от наличия в плазме частиц, движущихся со скоростями, близкими к фазовой скорости волны, т. е. находящихся в фазовом резонансе с волной. На такие частицы электрическое поле волны действует все время почти в одной фазе, т. е. они наиболее тесно взаимодействуют с волной. Частицы, движущиеся немного медленнее фазовой скорости волны, отбирают у нее энергию; частицы, движущиеся немного быстрее, передают свою энергию волне. Затухание происходит тогда, когда преобладают частицы, слегка отстающие от волны, раскачка — когда преобладают слегка обгоняющие, что и выражается формулой (8.16).

В реальном случае трехмерного движения под  $kv$  следует понимать скалярное произведение  $(kv)$ , и условие фазового резонанса принимает вид  $(kv) = \omega$ . Это значит, что составляющая скорости частицы в направлении волнового вектора равна фазовой скорости волны. Для частицы, скорость которой больше фазовой скорости волны, всегда найдется такой угол, при котором это условие выполняется.

---

\* Рассматривается одномерная задача, так что под скоростью подразумевается скорость в одном направлении. При максвеллов-

ском распределении  $f$  зависит от нее как  $e^{-\frac{Mv^2}{2T}}$ , т. е. монотонно уменьшается с возрастанием  $|v|$ . Таким образом, на термодинамически равновесном фоне колебания могут только затухать.

Затухание или раскачка плазменных волн при фазовом резонансе с частицами может рассматриваться как проявление *эффекта Вавилова — Черенкова* — поглощения или испускания волн частицами, движущимися со скоростью порядка или выше фазовой скорости волны в среде. Соответственно эти явления называют иногда *черенковским затуханием* (или возбуждением) колебаний. Следует отметить, что знак мнимого члена в формуле (8.14) зависит от направления обхода контуром интегрирования особой точки. Поэтому приведенный вывод является по существу нестрогим. Строгое рассмотрение показывает, что при наличии теплового движения плазменные колебания не имеют в точности вида плоских волн, а лишь асимптотически к нему стремятся. Для асимптотического решения получается дисперсионное уравнение, совпадающее с полученным выше, но знак мнимого члена оказывается уже определенным. Он дается *правилом обхода Ландау*, согласно которому, если плоская волна записана в виде  $\exp(-i\omega t + ikx)$ , то особая точка должна обходиться против часовой стрелки, т. е. снизу, как это и было сделано выше\*.

Применим теперь полученные результаты к случаю, когда колебания происходят вокруг состояния термодинамического равновесия, т. е.  $f^0$  есть функция распределения Максвелла

$$f^0 = \text{const} e^{-\frac{mv^2}{2T}}, \quad (8.17)$$

где  $v$  — составляющая скорости в одном направлении;  $T$  — температура в энергетических единицах. Нормированная функция распределения

$$f = \frac{e^{-\frac{mv^2}{2T}}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2T}} dv} = \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} e^{-\frac{mv^2}{2T}}. \quad (8.17a)$$

---

\* Для решения кинетического уравнения в начальных условиях удобнее пользоваться не разложением по плоским волнам (т. е. преобразованием Фурье как по координате, так и по времени), а преобразованием Фурье по координате и преобразованием Лапласа по времени.

Усреднение квадрата скорости движения в одном направлении дает

$$\overline{v^2} = \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2T}} dv = \frac{T}{m}. \quad (8.18)$$

Формулы (8.15) и (8.16) для равновесной термической плазмы принимают вид

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 3k^2 \frac{T}{m}; \quad (8.19)$$

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi} \omega_0}{2\sqrt{2}} u_{\Phi}^3 \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mu_{\Phi}^2}{2T}}. \quad (8.20)$$

Последнюю формулу удобно преобразовать так, чтобы была явно видна зависимость затухания от волнового числа. Для этого воспользуемся тем, что формула применима лишь при частотах, близких к плазменной, откуда

$$u_{\Phi} \equiv \frac{\omega}{k} \approx \frac{\omega_0}{k}, \quad (8.21)$$

и введем дебаевскую длину  $l_D$ , определенную как

$$l_D^2 = \frac{\overline{v^2}}{\omega_0^2} = \frac{T}{m\omega_0^2}, \quad (8.22)$$

что совпадает с соотношением (1.18) в гл. I. Теперь формулу (8.20) можно записать в виде

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi} \omega_0}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(kl_D)^3} e^{-\frac{1}{2k^2 l_D^2}}. \quad (8.23)$$

Таким образом, если длина волны меньше дебаевской, то затухание происходит за время порядка периода колебаний. Напротив, для длинных волн затухание экспоненциально мало. Но частота длинных волн близка к плазменной, что и оправдывает сделанные при выводе приближения.

Действительная часть дисперсионного уравнения (8.19) совпадает с гидродинамическим приближением (V.3.14a), если показателю адиабаты приписывать значение

$$\gamma = 3, \quad (8.24)$$

отвечающее движению в одном направлении.

## 9. Волны в магнитном поле и тензорные характеристики плазмы

Если на плазму наложено магнитное поле, то кинетическое описание волновых процессов резко усложняется. Необходимо учитывать движение не только электронов, но и всех сортов ионов, присутствующих в плазме. Для каждого рода частиц с зарядовым числом  $Z$  и массой  $M$  должно быть решено кинетическое уравнение (7.4). Для малых колебаний линеаризация его дает, аналогично уравнению (8.2), для плоской волны

$$\begin{aligned} i(kv - \omega) f^1 + \frac{Ze}{Mc} ([\mathbf{v}\mathbf{H}_0] \nabla_v) f^1 = \\ = -\frac{Ze}{M} \left\{ \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\tilde{\mathbf{H}}] \right) \nabla_v \right\} f^0, \end{aligned} \quad (9.1)$$

где  $\mathbf{H}_0$  — внешнее магнитное поле;  $\tilde{\mathbf{H}}$  — собственное магнитное поле волны, которое полагается малым, так же как и электрическое поле волны  $\tilde{\mathbf{E}}$  (внешние электрические поля и сторонние токи отсутствуют).

Решение линеаризованного кинетического уравнения дает функцию  $f^1$  для каждого из компонентов плазмы в зависимости от электрического поля волны. Полная плотность тока выражается через эти функции как

$$\mathbf{j} = e \sum_k Z_k \int f_k^1 \mathbf{v} dv. \quad (9.2)$$

Составляющие электрического поля входят в выражение плотности тока как параметры функций  $f^1$ . Подстановка выражения (9.2) в уравнение электродинамики (IV.1.3) позволяет получить систему линейных однородных алгебраических уравнений для составляющих электрического поля и, приравняв ее определитель нулю, — дисперсионное уравнение. Удобно проводить вывод дисперсионного уравнения в два приема: сначала посредством решения линеаризованного кинетического уравнения находятся тензорные характеристики плазмы, а затем уже они подставляются в уравнения электродинамики.

Покажем сначала в общем виде, как получаются тензорные характеристики плазмы. Линеаризованное кинетическое уравнение (9.1) дает возмущение функции распределения  $f^1$  как линейную комбинацию из составляющих элект-

рического поля волны  $E$ , умноженных на коэффициенты, которые мы обозначим  $df/dE_b$

$$f^1 = \sum_b \frac{\partial f}{\partial E_b} E_b, \quad (9.3)$$

где индекс  $b$  нумерует три координаты пространства. Если сторонние токи отсутствуют, то плотность тока, переносимого каждым из компонентов плазмы, выражается в соответствии с формулой (9.2) как

$$j_a = Ze \int f^1 v_a dv, \quad (9.4)$$

что после подстановки выражения (9.3) для  $f^1$  даст

$$j_a = Ze \sum_b E_b \int \frac{\partial f}{\partial E_b} v_a dv. \quad (9.5)$$

Сопоставляя этот результат с определением тензора проводимости, находим, что компоненты тензора частичной проводимости плазмы для частиц каждого рода выражаются как

$$\sigma_{ab} = Ze \int v_a \frac{\partial f}{\partial E_b} dv. \quad (9.6)$$

Для получения тензора полной проводимости плазмы эти выражения нужно просуммировать по всем сортам частиц, присутствующих в плазме.

Величины  $df/dE_b$  суть коэффициенты разложения функции распределения  $f$  по составляющим электрического поля волны, которое полагается малым. Совокупность величин  $df/dE_b$  образует вектор  $df/dE$ .

Как видно из изложенного, кинетическое рассмотрение дает непосредственно тензор проводимости. Тензор сопротивления, который был для нас столь удобен в гидродинамическом приближении, здесь теряет свою ценность. От тензора проводимости обычно принято переходить к тензору электрической проницаемости плазмы

$$\epsilon_{ab} = \delta_{ab} + i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{ab}. \quad (9.7)$$

В соответствии с формулой (9.6) компоненты этого тензора выражаются как

$$\epsilon_{ab} = \delta_{ab} + i \frac{4\pi}{\omega} e \sum_k Z_k \int v_a \frac{\partial f_k}{\partial E_b} dv. \quad (9.8)$$

Тензор электрической проницаемости не дает никаких преимуществ при вычислениях перед тензором проводимости. Им предпочитают пользоваться из чисто физических соображений: для разреженной плазмы без столкновений проводимость является чисто мнимой величиной (выражаясь на языке электротехники, сопротивление ее не активное, а чисто реактивное), так что физически правильнее говорить не о проводимости, а об электрической проницаемости.

Следует отметить, что тензорные характеристики плазмы получаются методом самосогласованного поля и потому применимы только к линейным возмущениям, которые можно разложить по плоским волнам. В нелинейной области электрические свойства плазмы могут оказаться совсем иными.

Конкретные формулы для компонентов тензора проводимости или электрической проницаемости плазмы получаются подстановкой в формулы (9.6) или (9.8) составляющих вектора  $df/dE$ , полученных решением линеаризованного кинетического уравнения. Эти формулы будут получены в следующем разделе.

## 10. Решение кинетического уравнения с помощью интегрирования по углу

Известен ряд методов решения линеаризованного кинетического уравнения (9.1). Наиболее наглядным из них представляется метод, в котором решение с самого начала ищется в виде плоской волны. При этом возникают трудности, связанные с направлением обхода особых точек. Примем без доказательства, что эти трудности разрешаются правилом обхода Ландау.

Будем считать, что колебания происходят на изотропном фоне. Это значит, что основная функция распределения  $f^0$  не зависит от направления скорости, но зависит только от ее абсолютного значения. Следовательно,  $f^0$  можно представить как функцию от квадрата скорости. Определим нормированную функцию  $f$  равенством

$$f^0 = n f(v^2), \quad (10.1)$$

где  $n$  — полная концентрация частиц. Как видно из формулы (1.4), функция  $f$  удовлетворяет условию нормировки

$$\int f dv = 1. \quad (10.2)$$

Отметим, что функция  $f$  отнесена по-прежнему к единице фазового объема, а не к интервалу абсолютной скорости.

Составляющая вектора  $\nabla_v f^0$  по любому направлению выразится при изотропном фоне как

$$(\nabla_v f^0)_x \equiv \frac{\partial f^0}{\partial v_x} = n \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{v^2}{2}\right)} \frac{d}{dv_x} \left(\frac{v^2}{2}\right) = nv_x \frac{df}{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}. \quad (10.3)$$

Этот результат можно записать в векторной форме

$$\nabla_v f^0 = nv f', \quad (10.3a)$$

где

$$f' \equiv \frac{df}{d\left(\frac{v^2}{2}\right)} \quad (10.4)$$

Результат (10.3) означает, что для изотропной функции  $f^0$  вектор  $\nabla_v f^0$  направлен вдоль вектора скорости (подобно тому, как в обычном пространстве градиент изотропной сферически симметричной функции, зависящей только от радиуса  $r$ , направлен вдоль радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ ).

Но векторное произведение  $[\mathbf{v}\mathbf{H}]$  перпендикулярно к вектору скорости. Второй же член в правой части уравнения (9.1) содержит скалярное произведение его на  $\Delta_v f^0$ . Следовательно, при изотропном фоне этот член обращается в нуль и линеаризованное кинетическое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f^1}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) f^1 + \frac{Ze}{Mc} ([\mathbf{v}\mathbf{H}_0] \nabla_v) f^1 = -\frac{Ze}{M} (\mathbf{E}\nabla_v) f^0. \quad (10.5)$$

При изотропном фоне собственное магнитное поле волны выпадает из уравнений. Переходя к плоской волне, введя циклотронную частоту  $\omega_c$  и единичный вектор  $\mathbf{h}$  в направлении магнитного поля, а также воспользовавшись результатом (10.3a), можно записать уравнение (10.5) в виде

$$i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega) f^1 + \omega_c ([\mathbf{v}\mathbf{h}] \nabla_v) f^1 = -\frac{nZe}{M} (\mathbf{E}\mathbf{v}) f' \quad (10.6)$$

Направим ось  $z$  вдоль магнитного поля и расположим ось  $x$  так, чтобы волновой вектор лежал в плоскости  $xz$ . Составляющую этого вектора по оси  $x$  (поперек магнитного поля) будем обозначать  $k_1$ , составляющую по оси  $z$  (вдоль

поля) —  $k_3$ . В этой системе координат (мы называли ее  $H$ -системой) уравнение (10.6) запишем как

$$i(k_1 v_x + k_3 v_z - \omega) f^1 + \omega_c \left( v_y \frac{\partial f^1}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial f^1}{\partial v_y} \right) = - \frac{nZe}{M} (\mathbf{E}\mathbf{v}) f'. \quad (10.6a)$$

Уравнение упростится, если перейти к цилиндрическим координатам в пространстве скоростей

$$v_x = v_{\perp} \cos \varphi; \quad (10.7)$$

$$\left. \begin{aligned} v_y &= v_{\perp} \sin \varphi; \\ v_z &\equiv v_{\parallel}. \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

В этих координатах

$$\frac{\partial f^1}{\partial \varphi} = \frac{\partial f^1}{\partial v_x} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f^1}{\partial v_y} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial \varphi} = -v_y \frac{\partial f^1}{\partial v_x} + v_x \frac{\partial f^1}{\partial v_y}, \quad (10.9)$$

и уравнение (10.6a) принимает вид

$$\frac{\partial f^1}{\partial \varphi} = i(\alpha \cos \varphi + \beta) f^1 + \frac{nZe}{M\omega_c} (\mathbf{E}\mathbf{v}) f', \quad (10.10)$$

где

$$\alpha = \frac{k_1 v_{\perp}}{\omega_c}; \quad (10.11)$$

$$\beta = \frac{k_3 v_z - \omega}{\omega_c}; \quad (10.12)$$

$$(\mathbf{E}\mathbf{v}) = v_{\perp} (E_x \cos \varphi + E_y \sin \varphi) + E_z v_{\parallel}. \quad (10.13)$$

Уравнение (10.10) можно рассматривать как линейное дифференциальное уравнение с правой частью, дающее зависимость функции  $f^1$  от азимутального угла  $\varphi$ ; общее его решение имеет вид

$$f^1 = \frac{nZe}{M\omega_c} f' e^{i(\alpha \sin \varphi + \beta \varphi)} \left[ \int_0^{\varphi} e^{-i(\alpha \sin \varphi' + \beta \varphi')} (\mathbf{E}\mathbf{v}) d\varphi' + C \right]. \quad (10.14)$$

Постоянная интегрирования  $C$  может быть произвольной функцией от других переменных, кроме  $\varphi$ . Она должна определяться из условия, чтобы  $f^1$  была периодической функцией от  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ . Для выполнения интегриро-

вания в правой части уравнения (10.14) и нахождения постоянной  $C$  используется разложение в ряд по функциям Бесселя всех порядков (см. приложение 3)

$$e^{-iy \sin \varphi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(y) e^{-is\varphi}, \quad (10.15)$$

где  $s$  — целое число. При этом тригонометрические функции выражаются через комплексные экспоненты

$$E_x \cos \varphi + E_y \sin \varphi = \frac{1}{2} (E_+ e^{-i\varphi} + E_- e^{i\varphi}),$$

где

$$E_{\pm} = E_x \pm iE_y.$$

Постоянная интегрирования  $C$  определяется так, чтобы обратить в нуль постоянные слагаемые у всех интегралов, происходящие от нижнего предела интегрирования. При этом множители  $e^{-i\beta\varphi}$  и  $e^{i\beta\varphi}$  взаимно уничтожаются и остаются только функции, удовлетворяющие условию периодичности по  $\varphi$ . Результат интегрирования имеет вид

$$f^1 = i \frac{nZe}{M\omega_c} f' e^{i\alpha \sin \varphi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(\alpha) \left[ \frac{v_{\perp}}{2} \left( \frac{E_+ e^{-i(s+1)\varphi}}{\beta + s + 1} + \frac{E_- e^{-i(s-1)\varphi}}{\beta + s - 1} \right) + E_z v_{\parallel} \frac{e^{-is\varphi}}{s + \beta} \right]. \quad (10.16)$$

Для упрощения формул можно воспользоваться тем обстоятельством, что  $s$  есть текущий индекс, по которому суммирование производится от  $-\infty$  до  $\infty$ , и, следовательно, его значения можно сдвигать на любое постоянное число. Сумму в правой части формулы (10.16) можно разбить на три суммы и в первой из них заменить  $s + 1$  на  $s$ , во второй  $s - 1$  на  $s$ , после чего формула (10.16) примет вид

$$f^1 = i \frac{nZe}{M\omega_c} f' e^{i\alpha \sin \varphi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-is\varphi}}{\beta + s} \left[ \frac{v_{\perp}}{2} (E_+ J_{s-1}(\alpha) + E_- J_{s+1}(\alpha)) + v_{\parallel} E_z J_s(\alpha) \right]. \quad (10.16a)$$

Теперь удобно перейти от  $E_+$  и  $E_-$  к составляющим электрического поля в прямоугольных координатах. При этом

для дальнейшего упрощения формул используются рекуррентные соотношения между функциями Бесселя (см. приложение 3):

$$J_{s-1}(\alpha) + J_{s+1}(\alpha) = \frac{2s}{\alpha} J_s(\alpha);$$

$$J_{s-1}(\alpha) - J_{s+1}(\alpha) = 2 \frac{dJ_s(\alpha)}{d\alpha}.$$

С помощью этих соотношений решение кинетического уравнения принимает окончательный вид

$$f^1 = i \frac{nZe}{M\omega_c} f' e^{i\alpha \sin \varphi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-is\varphi}}{\beta + s} \times \\ \times \left[ v_{\perp} \left( \frac{s}{\alpha} J_s E_x + i J'_s E_y \right) + v_{\parallel} J_s E_z \right], \quad (10.17)$$

где

$$J_s \equiv J_s(\alpha); \quad J'_s \equiv \frac{dJ_s(\alpha)}{d\alpha}.$$

Коэффициенты при составляющих электрического поля в этом выражении есть составляющие вектора  $\partial f / \partial \mathbf{E}$ , подстановка которых в формулу (9.6) с учетом выражений (10.7) и (10.8) дает компоненты тензора проводимости. Интегралы по азимутальному углу  $\varphi$  берутся с помощью интегрального представления функции Бесселя (см. приложение 3)

$$J_s(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \sin \varphi} e^{-is\varphi} d\varphi. \quad (10.18)$$

Получающиеся комбинации функций Бесселя еще раз упрощаются с помощью рекуррентных соотношений.

Вычисление дает тензор комплексной проводимости плазмы для частиц данного рода в виде

$$\sigma = i \frac{\omega_0^2}{4\pi\omega_c} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int \frac{f'}{\beta + s} T_s(\alpha) dv, \quad (10.19)$$

где  $\omega_0$  и  $\omega_c$  — плазменная и циклотронная частоты;

$$\alpha = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} = k_{\perp} R_c;$$

$$\beta = \frac{k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega}{\omega_c};$$

$T_s(\alpha)$  — вспомогательный тензор, составленный из функций Бесселя, который в системе координат с осью  $z$  вдоль магнитного поля и осью  $x$  в плоскости  $(\mathbf{k}, \mathbf{H})$  выражается как

$$T_s(\alpha) = \begin{pmatrix} v_{\perp}^2 \frac{s^2}{\alpha^2} J_s^2 & i v_{\perp}^2 \frac{s}{\alpha} J_s J'_s & v_{\perp} v'_{\parallel} \frac{s}{\alpha} J_s^2 \\ -i v_{\perp}^2 \frac{s}{\alpha} J_s J'_s & v_{\perp}^2 J_s'^2 & -i v_{\perp} v_{\parallel} J_s J'_s \\ v_{\perp} v_{\parallel} \frac{s}{\alpha} J_s^2 & i v_{\perp} v_{\parallel} J_s J'_s & v_{\parallel}^2 J_s^2 \end{pmatrix}. \quad (10.20)$$

Здесь

$$J_s \equiv J_s(\alpha); \quad J'_s \equiv \frac{dJ_s(\alpha)}{d\alpha}; \quad \alpha = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c}.$$

Подставляя значения  $\alpha$  и  $\beta$ , можно записать тензор комплексной проводимости в явном виде

$$\sigma = i \frac{\omega_0^2}{4\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int \frac{f'}{k_s v_{\parallel} - \omega + s\omega_c} T_s dv, \quad (10.19a)$$

где

$$T_s = \begin{pmatrix} \left(\frac{\omega_c}{k_{\perp}}\right)^2 s^2 J_s^2 & i \frac{\omega_c}{k_{\perp}} v_{\perp} s J_s J'_s & \frac{\omega_c}{k_{\perp}} v_{\parallel} s J_s^2 \\ -i \frac{\omega_c}{k_{\perp}} v_{\perp} s J_s J'_s & v_{\perp}^2 J_s'^2 & -i v_{\perp} v_{\parallel} J_s J'_s \\ \frac{\omega_c}{k_{\perp}} v_{\parallel} s J_s^2 & i v_{\perp} v_{\parallel} J_s J'_s & v_{\parallel}^2 J_s^2 \end{pmatrix}. \quad (10.20a)$$

Тензор электрической проницаемости для частиц данного рода выражается отсюда как

$$\varepsilon_{ab} = \delta_{ab} - \frac{\omega_0^2}{\omega} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int \frac{f'}{k_s v_{\parallel} - \omega + s\omega_c} T_s dv. \quad (10.21)$$

Полученные выражения должны еще быть просуммированы по всем сортам частиц, присутствующим в плазме.

Аргументом всех функций Бесселя является величина

$$\alpha = \frac{k_1 v_{\perp}}{\omega_c} = k_1 R_c.$$

Поскольку интегрирование по азимутальному углу  $\varphi$  уже выполнено, то подынтегральные функции не зависят от  $\varphi$ . Поэтому интегрирование по  $dv = v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\varphi$  можно заменить интегрированием по  $v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}$ , если изменить соответствующим образом нормировку функции  $f$ : вместо условия (10.2) нормировать ее согласно условию

$$\int f v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} = 1. \quad (10.22)$$

Здесь  $v_{\perp}$  меняется от 0 до  $\infty$ , а  $v_{\parallel}$  — от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

При интегрировании по продольной скорости приходится обходить особые точки, в которых знаменатели  $\beta + s$  обращаются в нуль. Эти особые точки дают мнимые части интегралов, описывающие затухание или раскачку колебаний аналогично формуле (8.12).

## 11. Специфическое затухание и раскачка колебаний

Входящие в выражения тензорных характеристик плазмы (10.19) или (10.21) интегралы по продольной скорости являются несобственными. Вследствие этого компоненты тензоров не являются аналитическими функциями от составляющих волнового вектора. Подынтегральная функция представляет собой сумму бесконечного ряда по индексу  $s$ , каждый член которого расходится при значении  $v_{\parallel}$ , обращающем знаменатель в нуль,

$$v_{\parallel} = \frac{\omega - s\omega_c}{k_z}. \quad (11.1)$$

Заметим, что по формуле эффекта Доплера  $\omega - k_z v_{\parallel}$  есть частота волны в системе координат, движущейся вдоль магнитного поля вместе с частицей. Таким образом, условие (11.1) выполнено, когда частота волны в этой системе равна либо нулю, либо циклотронной частоте или одному из ее обертонов.

Как было показано при выводе формулы (8.12), каждая особая точка дает в интеграле мнимое слагаемое, равное  $i\pi$ , умноженному на вычет подынтегральной функции в этой точке. Знак мнимого члена определяется правилом обхода

Ландау. Это правило можно записать в виде

$$\frac{1}{v_{\parallel} - \frac{\omega - s\omega_c}{k_z}} = P \frac{1}{v_{\parallel} - \frac{\omega - s\omega_c}{k_z}} + i\pi\delta\left(v_{\parallel} - \frac{\omega - s\omega_c}{k_z}\right), \quad (11.2)$$

где символ  $P$  означает, что интеграл от соответствующего члена понимается в смысле главного значения. Для равновесной плазмы  $f' < 0$ , и мнимые члены приводят к затуханию колебаний. В неравновесной плазме возможны случаи, когда в особых точках  $f' > 0$ , что приведет к раскачке колебаний (кинетическая неустойчивость).

Про частицы, продольная скорость которых удовлетворяет условию (11.1), говорят, что они находятся в фазовом резонансе с волной. Но при наличии магнитного поля понятие фазового резонанса приобретает более сложный смысл, чем в его отсутствие. Только для одного члена суммы с индексом  $s = 0$  условие фазового резонанса сводится к равенству продольных составляющих скорости частицы и фазовой скорости волны. Этот член приводит к затуханию без столкновений, не зависящему от магнитного поля, которое называют *черенковским затуханием*. Член с  $s = \pm 1$  дает фазовый резонанс при условии, если в системе координат, движущейся вместе с частицей, частота волны вследствие эффекта Доплера сравняется с циклотронной частотой. Этот вид фазового резонанса называют *циклотронным резонансом*. Члены с остальными значениями  $s$  дают *резонансы на циклотронных обертонах*. Все эти три вида специфического затухания волн описываются резонансными знаменателями одного и того же вида (11.1). Их можно рассматривать как разновидности одного и того же механизма диссипации без столкновений, который называется *затуханием по Ландау\**.

Теперь можно пояснить физический смысл формального разложения (10.15). Оно оказывается разложением по циклотронным обертонам, а индекс  $s$  нумерует эти обертоны. Таким образом, бесконечные суммы, входящие в выражения тензорных характеристик плазмы, имеют смысл сумм по циклотронным обертонам.

---

\* Иногда термин «затухание Ландау» сохраняют только для члена с  $s = 0$  (вместо термина «черенковское затухание»), а затухание на циклотронной частоте и ее обертонах рассматривают как самостоятельные механизмы.

## 12. Слабая и сильная пространственная дисперсия

Пространственной дисперсией называется явная зависимость электрической проницаемости (или проводимости) от волнового числа. В формулах (10.20) или (10.21) эффект пространственной дисперсии проявляется двояким образом: в аргументе функций Бесселя  $\alpha = k_1 v_{\perp} / \omega_c$  и в резонансных знаменателях, содержащих величину  $k_3 v_{\parallel}$ . Если выполнено условие

$$(kv) \ll \omega_c, \quad (12.1)$$

то зависимость тензорных характеристик плазмы от волнового числа становится слабой; в этом случае говорят о *слабой пространственной дисперсии*. Физически условие (12.1) означает, что циклотронный радиус должен быть мал в сравнении с длиной волны. Если же циклотронный радиус порядка или больше длины волны, то возникают гораздо более сложные явления *сильной пространственной дисперсии*. Эти явления называют иногда *эффектами конечного циклотронного радиуса*.

Для случая слабой пространственной дисперсии действительные части компонентов тензора (10.20) могут быть разложены в ряды по степеням  $\alpha$ . При образовании бесконечных сумм по  $s$  низшие степени  $\alpha$  будут содержаться только в членах с малыми значениями  $s$ . Если, кроме того, разложить величины  $1/(\beta + s)$  по степеням  $k_3 v_{\parallel} / \omega_c$  и в получающихся разложениях оставить только первые члены, то получится приближение холодной плазмы; следующие члены дадут результат, эквивалентный гидродинамическому приближению. Но, кроме того, полюса подынтегральных функций дадут затухание на фазовых резонансах — эффект, который может быть получен только из физической кинетики. Таким образом, в случае слабой пространственной дисперсии методы физической кинетики добавляют к результатам гидродинамического приближения только специфическое затухание, которое, однако, может быть весьма существенным и даже привести к практическому исчезновению некоторых ветвей колебаний с фазовыми скоростями, близкими к скоростям теплового движения.

Если при вычислении специфического затухания последовательно проводить разложение по отношению циклотронного радиуса к длине волны, то в выражениях для компонентов тензора проводимости достаточно оставить низ-

шие неисчезающие члены по  $s$ . Такими для одних компонентов являются члены с  $s = 0$ , для других с  $s = \pm 1$ . Первые представляют черенковское, вторые, если их сгруппировать попарно, — циклотронное затухание. Циклотронные обертоны в приближении слабой пространственной дисперсии можно не учитывать.

Гораздо более существенными оказываются кинетические эффекты в случае сильной пространственной дисперсии (большие циклотронные радиусы). Здесь они могут не только дать дополнительное затухание, но и коренным образом изменить вид дисперсионного уравнения. Из условия (12.1) видно, что сильная пространственная дисперсия обязательно возникает в горячей плазме при недостаточно сильных магнитных полях. Но и в почти холодной плазме сильная пространственная дисперсия может возникнуть вблизи особых частот, при которых показатель преломления (а с ним и волновое число) резко возрастает, т. е. фазовая скорость волны падает.

Так обстоит дело, например, для поперечного распространения вблизи гибридных частот, при которых у холодной плазмы имелись особенности показателя преломления, а также вблизи циклотронной частоты и ее обертонов, где такие особенности могут возникнуть вследствие теплового движения. При этом кроме специфического затухания, происходящего от уменьшения фазовой скорости волны, возможно также возникновение новых ветвей колебаний, связанных с сильной пространственной дисперсией.

### 13. Волны на анизотропном фоне

Если невозмущенная функция распределения  $f^0$  анизотропна, то результат (10.3) теряет силу. В этом случае в уравнении (9.1) нельзя уже отбрасывать член, содержащий собственное магнитное поле волны  $\tilde{H}$ . Последнее приходится находить из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}, \quad (13.1)$$

которое для плоской волны дает

$$\tilde{H} = \frac{c}{\omega} [kE]. \quad (13.2)$$

Если функция  $f^0$  постоянна в пространстве и во времени и сторонние электрические поля отсутствуют, то кинетическое уравнение для  $f^0$  сводится к виду

$$([\mathbf{vH}] \nabla_v) f^0 = 0, \quad (13.3)$$

что после преобразования к цилиндрическим координатам аналогично уравнению (10.6а) даст, согласно уравнению (10.9),

$$\frac{\partial f^0}{\partial \phi} = 0. \quad (13.4)$$

Таким образом, при анизотропном, но однородном фоне функция  $f^0$  не должна зависеть от азимутального угла  $\phi$ . Азимутальная анизотропия вызвала бы пондеромоторную силу, стремящуюся нарушить пространственную однородность. Анизотропия однородного фона может заключаться только в различном распределении поперечных и продольных (по отношению к магнитному полю) скоростей. Несимметрия же основной функции распределения относительно продольной скорости означала бы наличие стороннего тока. Следовательно, если сторонние электрические поля и токи отсутствуют, то основная функция распределения для пространственно однородного фона должна иметь вид

$$f^0 = f^0(v_{\perp}^2, v_{\parallel}^2). \quad (13.5)$$

Подстановка выражения (13.2) в правую часть кинетического уравнения (9.1) дает после раскрытия двойного векторного произведения

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] = \mathbf{E} \left(1 - \frac{\mathbf{kv}}{\omega}\right) + \mathbf{k} \frac{(\mathbf{vE})}{\omega}. \quad (13.6)$$

Таким образом, при анизотропном фоне в правой части уравнения (10.6) величина  $(\mathbf{Ev})f'$  должна быть заменена на

$$\left(1 - \frac{\mathbf{kv}}{\omega}\right) (\mathbf{E} \nabla_v) f + \frac{(\mathbf{vE})}{\omega} (\mathbf{k} \nabla_v) f. \quad (13.7)$$

Для функции вида (13.5) это выражение принимает вид

$$\begin{aligned} & \left[ \left(1 - \frac{k_z v_{\parallel}}{\omega}\right) (f'_{\perp} - f'_{\parallel}) + f'_{\parallel} \right] (\mathbf{E} \nabla) - \\ & - \left(1 - \frac{\mathbf{kv}}{\omega}\right) (f'_{\perp} - f'_{\parallel}) E_z v_{\parallel}, \end{aligned} \quad (13.8)$$

где

$$f'_{\perp} \equiv \frac{\partial f}{\partial \left( \frac{v_{\perp}^2}{2} \right)}; \quad f'_{\parallel} = \frac{\partial f}{\partial \left( \frac{v_{\parallel}^2}{2} \right)};$$

$f$  — нормированная основная функция распределения. Подставив выражение (13.8) вместо  $(Ev)f^1$  в формулу (10.14), можно получить тензорные характеристики анизотропной плазмы.

С анизотропной плазмой приходится встречаться при рассмотрении вопросов магнитного удержания, где функции распределения скоростей вдоль и поперек магнитного поля могут существенно различаться. Обычно анизотропную функцию распределения представляют как произведение продольной и поперечной максвелловских функций с различными температурами. Для такого фона интегрирование по продольным и поперечным скоростям может быть выполнено в явном виде и результаты выражены через табулированные функции. При сильной анизотропии фона мнимая часть  $\omega$  может оказаться положительной, т. е. возникает неустойчивость.

#### 14. Тензорные характеристики термической плазмы

Ранее нами рассматривались общие выражения тензорных характеристик плазмы для произвольного вида основной функции распределения  $f^0$ . Для практического использования результатов необходимо задаться конкретным видом этой функции. В разреженной плазме он зависит, вообще говоря, от начальных условий.

В плотной плазме взаимодействие между частицами приводит к быстрому установлению равновесного максвелловского распределения. При этом состояние плазмы описывается одним значением температуры (полное термодинамическое равновесие).

Если для описания состояния плазмы применимо в какой-либо мере понятие температуры, то такую плазму мы называем *термической*. Чтобы плазма была термической, она должна находиться в состоянии хотя бы частичного термодинамического равновесия, т. е. состояние ее должно описываться набором функций Максвелла, если и не с одной, то хотя бы с несколькими различными температурами.

Если их несколько, то у плазмы есть несколько температур: электронная и ионная, продольная и поперечная, температура основного распределения и температура пучка быстрых частиц. Ограничимся рассмотрением изотропного фона и примем, что для частиц данного рода основной функцией  $f$  является функция распределения Максвелла

$$f = \text{const } e^{-\frac{Mv^2}{2T}}. \quad (14.1)$$

В этом случае ее производная пропорциональна самой функции

$$f' \equiv \frac{df}{d\left(\frac{v^2}{2}\right)} = -\frac{M}{T} f, \quad (14.2)$$

и интегрирование по скоростям сводится к усреднению по распределению Максвелла. Все интегралы, входящие в тензорные характеристики плазмы, могут в этом случае быть выражены через табулированные специальные функции.

Рассмотрим прежде всего интегрирование по продольной скорости. Несобственный интеграл вида \*

$$w(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{z-t} dt \quad (14.3)$$

можно выразить через интегралы, у которых подынтегральная функция не имеет особенностей. Проще всего это сделать с помощью дифференцирования по параметру  $z$  под знаком интеграла с последующим интегрированием по частям

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{(z-t)^2} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{d}{dt} \frac{1}{z-t} = \\ &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{z-t} e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

---

\* В литературе принято вводить в определение этой функции мнимый множитель, что только усложняет формулы.

Прибавляя и вычитая в числителе  $z$ , получаем

$$\frac{dw}{dz} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt - 2z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{z-t} dt = 2\sqrt{\pi} - 2zw.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение, решение которого дает  $w$  как функцию от параметра  $z$

$$w = e^{-z^2} \left( 2\sqrt{\pi} \int_0^z e^{u^2} du + C \right). \quad (14.4)$$

Постоянная интегрирования  $C$  определяется из начального условия: должно быть задано значение  $w$  при  $z = 0$ , т. е. вклад, происходящий от особой точки. В этом и проявляется то, что интеграл несобственный. В рассматриваемом случае роль начального условия играет правило обхода Ландау, согласно которому

$$C = -\pi i.$$

Отсюда окончательно

$$w(z) = 2\sqrt{\pi} e^{-z^2} \int_0^z e^{u^2} du - i\pi e^{-z^2}. \quad (14.5)$$

Входящая сюда функция

$$\Phi(z) = \int_0^z e^{u^2} du \quad (14.6)$$

табулирована; ее численные значения приводятся в таблицах интеграла вероятностей. При больших значениях  $z$  для нее легко получить асимптотическое разложение. Для этого делается подстановка

$$u = z - \alpha,$$

и интеграл принимает вид

$$\Phi(z) = e^{z^2} \int_0^z e^{-2\alpha z} e^{\alpha^2} d\alpha = e^{z^2} \int_0^z e^{-2\alpha z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{n!} d\alpha.$$

Для больших значений  $z$  верхний предел интегрирования можно заменить на бесконечность. После этого интегралы

берутся по известной формуле

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

и получается искомое разложение в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) &\approx \frac{e^{z^2}}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! (2z)^{2n}} = \\ &= \frac{e^{z^2}}{2z} \left( 1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{4z^4} + \frac{15}{8z^6} + \dots \right), \end{aligned} \quad (14.7)$$

откуда при больших значениях  $z$

$$\omega(z) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{z} \left( 1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{4z^4} + \frac{15}{8z^6} + \dots \right) - i\pi e^{-z^2}. \quad (14.8)$$

Посредством прибавления и вычитания параметра  $z$  легко находятся и интегралы

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{e^{-t^2}}{z-t} dt = \omega z - \sqrt{\pi}; \\ \omega_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{e^{-t^2}}{z-t} dt = z\omega_1 = z(\omega z - \sqrt{\pi}). \end{aligned}$$

При подобных вычислениях следует помнить, что интегралы от нечетных функций в этих пределах обращаются в нуль.

Интегрирование по поперечным скоростям производится при помощи формулы второго экспоненциального интеграла Вебера (см. приложение 3):

$$\begin{aligned} J &\equiv \int_0^{\infty} ye^{-\frac{p^2 y^2}{2}} J_s(\lambda y) J_s(\mu y) dy = \\ &= \frac{1}{p^2} e^{-\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2p^2}} I_s \left( \frac{\lambda \mu}{p^2} \right). \end{aligned} \quad (14.9)$$

Таким образом, в результате интегрирования функции Бесселя переходят в модифицированные функции  $I$ . Для вычисления всех интегралов, входящих в тензор  $T_s(\alpha)$

(10.20), достаточно продифференцировать формулу (14.9) сначала по одному из индексов  $\lambda$  или  $\mu$ , а затем по обоим:

$$\frac{\partial J}{\partial \mu} = \frac{1}{p^4} (\lambda I'_s - \mu I_s) e^{-\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2p^2}};$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \mu \partial \lambda} = \frac{1}{p^6} (p^2 \lambda I'_s + \lambda \mu I''_s - \mu^2 I'_s - \lambda^2 I'_s + \lambda \mu I_s) e^{-\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2p^2}},$$

где

$$I \equiv I\left(\frac{\lambda \mu}{p^2}\right),$$

и в полученных результатах положить  $\mu = \lambda$ :

$$\int_0^{\infty} y e^{-\frac{p^2 y^2}{2}} J_s^2(\lambda y) dy = \frac{1}{p^2} I_s e^{-\frac{\lambda^2}{p^2}}; \quad (14.10)$$

$$\int_0^{\infty} y^2 e^{-\frac{p^2 y^2}{2}} J_s(\lambda y) J'_s(\lambda y) dy = \frac{\lambda}{p^4} (I'_s - I_s) e^{-\frac{\lambda^2}{p^2}}; \quad (14.11)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} y^3 e^{-\frac{p^2 y^2}{2}} J_s'^2(\lambda y) dy = \\ & = \frac{\lambda^2}{p^6} \left[ I''_s + \left(\frac{p^2}{\lambda} - 2\right) I'_s + I_s \right] e^{-\frac{\lambda^2}{p^2}}, \end{aligned} \quad (14.12)$$

где  $I \equiv I(\lambda^2/p^2)$ ;  $I'$ ,  $I''$  — производные по аргументу. После подстановки полученных результатов тензор проводимости термической плазмы для частиц данного рода оказывается функцией безразмерных переменных:

$$y = \frac{k_1^2}{\omega_c^2} \frac{T}{M} \approx \frac{k_1^2}{\omega_c^2} v_{\perp}^2; \quad (14.13)$$

$$z_s = \sqrt{\frac{M}{2T}} \frac{\omega - s\omega_c}{k_3} \approx \frac{\omega - s\omega_c}{k_3 v_{\parallel}}. \quad (14.14)$$

Поперечная переменная  $y$  является аргументом модифицированных функций Бесселя  $I_s \equiv I_s(y)$  и их производных  $I'_s \equiv \frac{dI_s(y)}{dy}$  и  $I''_s \equiv \frac{d^2 I_s(y)}{dy^2}$ .

Продольные переменные  $z_s$  являются аргументами функций

$$\omega(z) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{z} \left( 1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{4z^4} + \frac{15}{8z^6} + \dots \right) - i\pi e^{-z^2}; \quad (14.15)$$

$$\omega_1(z) \approx \sqrt{\pi} \left( \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{4z^4} + \frac{15}{8z^6} + \dots \right) - i\pi z e^{-z^2}; \quad (14.15a)$$

$$\omega_2(z) \approx \sqrt{\pi} \left( \frac{1}{2z} + \frac{3}{4z^3} + \frac{15}{8z^5} + \dots \right) - i\pi z^2 e^{-z^2}. \quad (14.15b)$$

Нормировка максвелловой функции распределения по поперечным и продольным скоростям по условию (10.22) дает (см. приложение 6):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{Mv_{\parallel}^2}{2T}} dv_{\parallel} = \sqrt{\frac{2\pi T}{M}};$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{Mv_{\perp}^2}{2T}} v_{\perp} dv_{\perp} = \frac{T}{M}.$$

Отсюда

$$f' = -\frac{M}{T} f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{M}{T} \right)^{5/2} e^{-\frac{M(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)}{2T}},$$

и выражение тензора проводимости принимает вид

$$\sigma = i \frac{\omega_0^2}{4\pi} \frac{1}{k_3 \sqrt{2\pi}} \left( \frac{M}{T} \right)^{5/2} \times$$

$$\times \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{Mv_{\parallel}^2}{2T}} dv_{\parallel}}{v_{\parallel} - \frac{\omega_s - s\omega_c}{k_3}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{Mv_{\perp}^2}{2T}} T_s v_{\perp} dv_{\perp}, \quad (14.16)$$

где  $T_s$  выражается формулой (10.20).

После интегрирования получается окончательное выражение тензора проводимости в виде

$$\sigma = i \frac{\omega_0^2}{4\pi} e^{-y} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{z_s}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\omega - s\omega_c} \tau_s, \quad (14.17)$$

где вспомогательный тензор  $\tau_s$  равен\*

$$\tau_s = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{y} s^2 I_s & i\omega s (I'_s - I_s) & \omega_1 \sqrt{\frac{2}{y}} s I_s \\ -i\omega s (I'_s - I_s) & \omega \left[ \frac{s^2}{y} I_s + 2y(I_s - I'_s) \right] & -i\omega_1 \sqrt{2y} (I'_s - I_s) \\ -\omega_1 \sqrt{\frac{2}{y}} s I_s & i\omega_1 \sqrt{2y} (I'_s - I_s) & 2\omega_2 I_s \end{pmatrix}, \quad (14.18)$$

где

$$I_s \equiv I_s(y); \quad I'_s \equiv \frac{dI_s(y)}{dy}; \quad \omega = \omega(z).$$

Слагаемые  $i\pi z^n e^{-z^2}$  в функциях  $i\omega_\alpha$  описывают затухание колебаний (или раскачку при взаимодействии плазмы с пучком, когда в полном тензоре проводимости это слагаемое приобретает обратный знак).

Применение тензорных характеристик плазмы, полученных методами физической кинетики, к конкретным вычислениям затрудняется наличием бесконечных сумм по индексу  $s$ , нумерующему циклотронные обертоны. Для распространения поперек магнитного поля суммы эти удаётся с помощью интегральных представлений функций Бесселя и теоремы вычетов свести к квадратурам, которые, однако, все равно не выражаются через табулированные функции. Получающиеся функции связаны с функциями Бесселя, и надо надеяться, что для них скоро будут составлены таблицы.

Напомним, что для получения полного тензора проводимости необходимо еще просуммировать полученные выражения по всем сортам частиц, присутствующих в плазме.

## 15. Предельные случаи

Тензорные характеристики плазмы, полученные методами физической кинетики, имеют довольно сложный вид вследствие наличия бесконечных сумм по циклотронным обертонам. Посмотрим, как упрощаются эти выражения при переходе к различным предельным случаям.

\* Для упрощения выражения компонента  $\tau_{syu}$  вторая производная  $I''$  выражена через  $I$  и  $I'$  с помощью рекуррентных соотношений для модифицированных функций Бесселя.

Простейший случай холодной плазмы получается предельным переходом:  $\alpha \rightarrow 0$  или  $y \rightarrow 0$ ;  $z \rightarrow \infty$ . При этом

$$\omega(z) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{z}} = \sqrt{\pi} k_3 \sqrt{\frac{2T}{M}} \frac{1}{\omega - s\omega_c}, \quad (15.1)$$

а от функций Бесселя берутся первые неисчезающие члены разложения по степеням  $\alpha$  или  $y$ . Предельный переход к холодной плазме можно с одинаковым успехом производить, исходя как из выражений, проинтегрированных по скоростям для термической плазмы (14.17), так и из общих непроинтегрированных выражений (10.19)—(10.20). Результаты получаются тождественными с формулами (IV.10.176)—(IV.10.196).

Члены, описывающие специфическое затухание, все содержат множитель  $e^{-z^2}$  и потому для холодной плазмы исчезают. Следует, однако, иметь в виду, что при приближении к циклотронным частотам или их обертонам требования, предъявляемые к температуре, для того чтобы плазму можно было считать «холодной», становятся все более жесткими. В непосредственной близости от циклотронных частот или обертонов сколь угодно слабое тепловое движение уже оказывается существенным.

Следующим простым случаем являются волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля, для которых  $k_1 = 0$ ,  $k_3 = k$ . В этом случае  $y = 0$ , но  $z$  сохраняет конечное значение. Тензор проводимости имеет вид, подобный тензору для холодной плазмы с той только разницей, что компоненты  $\epsilon$  и  $g$  умножаются на

$$\frac{\omega(z)}{\omega(\infty)} = \frac{\omega z}{\sqrt{\pi}} = 1 + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{4z^3} + \frac{15}{8z^6} + \dots - i\pi z e^{-z^2}, \quad (15.2)$$

а компонент  $\eta$  умножается на

$$\frac{\omega_2(z)}{\omega_2(\infty)} = 2z\omega_2(z) = 1 + \frac{3}{2z^2} + \frac{15}{4z^3} + \dots - 2\pi iz^3 e^{-z^2}. \quad (15.3)$$

В этих формулах  $z$  берется для  $s = 1$ .

Для распространения точно поперек магнитного поля (например, для прямой магнитно-звуковой волны)  $k_1 = k$ ;  $k_3 = 0$ . В общих выражениях (10.19) или (10.21) знаменатели перестают зависеть от скорости и могут быть вынесены за знак интеграла, после чего интегрирование сводится к усреднению тензора  $T_s$  по функции  $f$ . Все компоненты тензоров, содержащие первую степень начальной ско-

рости, при отсутствии сторонних токов обращаются в нуль. В формуле (14.17) для термической плазмы нужно для этого случая, как видно из формулы (14.14), устремить  $z$  к бесконечности, причем все компоненты, содержащие  $\omega_1$ , обратятся в нуль.

Тензор электрической проницаемости для распространения поперек магнитного поля может быть записан в виде

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} \quad (15.4)$$

отличающемся от тензора холодной плазмы (IV.10.16) только тем, что компоненты  $\varepsilon_{xx}$  и  $\varepsilon_{yy}$  не равны между собою. Отсюда и из уравнения (IV.1.5) дисперсионное уравнение для волн, распространяющихся поперек поля, имеет в кинетике вид

$$\left( \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_2 \right) \left[ \varepsilon_1 \left( \frac{k_1^2 c^2}{\omega^2} - \eta \right) + \frac{k_3^2 c^2}{\omega^2} \eta \right] + g^2 \left( \frac{k_1^2 c^2}{\omega^2} - \eta \right) = 0, \quad (15.5)$$

мало отличающийся от уравнения (IV.10.21) для холодной плазмы.

Выражения компонентов тензора хотя и упрощаются, но все же содержат бесконечные суммы по циклотронным обертонам. Однако при отсутствии функций  $\omega$  эти суммы могут быть сведены к квадратурам. Специфическое затухание при распространении точно поперек поля происходит только от релятивистских эффектов, которые будут рассмотрены ниже.

Некоторые трудности возникают при предельном переходе к случаю отсутствия магнитного поля ( $\alpha \rightarrow \infty$ ), ( $y \rightarrow \infty$ ). При этом разложение (10.15) перестает сходиться, так что приходится исходить непосредственно из линеаризованного кинетического уравнения. У тензоров проводимости и электрической проницаемости в отсутствие магнитного поля остаются только диагональные компоненты. При этом выделенным оказывается направление волнового вектора, и компоненты тензоров вдоль и поперек этого направления при точном учете теплового движения несколько отличаются друг от друга (см. задачу 2).

Можно рассмотреть еще предельный переход к проводимости для постоянного тока, устремив к нулю как  $k_1$  и  $k_3$ ,

так и частоту  $\omega$ . Тензорные характеристики плазмы, полученные в приближении самосогласованного поля, дадут при этом предельном переходе тривиальный результат: продольная проводимость обратится в бесконечность, а поперечная — в нуль. Но если учесть флуктуационное взаимодействие (кулоновское трение, или, как принято говорить, кулоновские столкновения), то получится правильное выражение тензора проводимости для постоянного тока, которое, впрочем, проще получить непосредственно.

## 16. Релятивистские эффекты и синхротронное излучение

При больших скоростях теплового движения, сравнимых со скоростью света  $c$ , зависимость массы частицы от ее скорости, вытекающая из теории относительности, приводит к тому, что циклотронная частота также становится зависящей от скорости. Во все выведенные формулы вместо массы и циклотронной частоты должны подставляться величины

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad (16.1)$$

$$\omega'_c = \omega_c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \omega_c \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (16.2)$$

Практически релятивистские эффекты имеют значение только для электронов; для ионов ими можно полностью пренебречь. Следует иметь в виду, что в кинетике разреженной плазмы релятивистские эффекты могут иметь определенное значение даже и тогда, когда средняя скорость теплового движения еще мала в сравнении со скоростью света. Важнейшим эффектом такого рода является специфическое затухание волн, распространяющихся точно поперек магнитного поля. В нерелятивистском приближении для таких волн специфическое затухание вообще отсутствует, так как знаменатели формулы (10.19) при  $k_z = 0$  перестают зависеть от скорости, т. е. особенности подынтегральной функции исчезают\*. Если же учесть релятивистские эффек-

---

\* Речь идет об особых точках, через которые проходит путь интегрирования по продольной скорости при фиксированной частоте.

ты, то указанные знаменатели принимают вид

$$k_3 v_{||} - \omega + s\omega_c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx k_3 v_{||} - \omega + s\omega_c \times \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (16.3)$$

Эти выражения как функции от скорости имеют и для чисто поперечного распространения вещественные корни, что приводит к специфическому затуханию. Затухание происходит тогда, когда в системе координат, связанной с частицей, частота волны становится равной циклотронной частоте или одному из ее обертонов. Если волновой вектор имеет составляющую вдоль магнитного поля, то это происходит вследствие обычного эффекта Допплера первого порядка. Для волн же, распространяющихся точно поперек поля, действует квадратичный релятивистский эффект Допплера. Легко оценить, какой из обоих эффектов существеннее в любом конкретном случае: для этого надо сравнить величины  $k_3 v_{||}$  и  $s\omega_c (v^2/2c^2)$ . Для совсем грубой оценки релятивистских эффектов в специфической диссипации можно при вычислении продольной переменной  $z$  по формуле (14.14) к величине  $k_3 \sqrt{2T/M} \approx k_3 v_{||}$  прибавить релятивистскую поправку  $sT/mc^2$ , существенную для высоких обертонов,

$$z' \approx \frac{\omega - s\omega_c}{k_3 v_{||} + s \frac{mc^2}{T}}. \quad (16.4)$$

Тогда и для распространения точно поперек магнитного поля  $z$  не будет обращаться в бесконечность. Конечно, такая грубая оценка допустима только для диссипативных поправок. В остальном при вычислении тензорных характеристик плазмы при релятивистских скоростях теплового движения интегрирование по скоростям должно производиться уже при помощи релятивистского распределения Максвелла.

Согласно закону Кирхгофа, всякому поглощению волн на определенных частотах должен отвечать обратный процесс испускания на тех же частотах. Для релятивистского поглощения на обертонах циклотронной частоты таким обратным процессом является *синхротронное* или *магнитное излучение\**, которое имеет большое значение как для

\* Иногда его называют также циклотронным или магнитно-тормозным.

термоядерной проблемы, так и для астрофизики. Обычно при расчете синхротронного излучения исходят из рассмотрения движения отдельных частиц. В принципе можно исходить и из тензорных характеристик плазмы, однако практически это связано с серьезными математическими трудностями.

## 17. Интегрирование по траекториям

Поскольку кинетическое уравнение без столкновений было выведено из уравнений движения отдельных частиц, то очевидно, что и результаты его решения могут быть получены из рассмотрения траекторий частиц. Для каждого сорта частиц, присутствующих в плазме, записывают уравнение движения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \frac{Ze}{M} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right); \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

и ищут формальное решение этого уравнения, полагая электрическое и магнитное поля заданными. Если, кроме того, заданы и начальные условия, то решение уравнения (17.1) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}(t, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0); \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0). \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

Здесь  $t$  рассматривается как независимая переменная, поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — как переменные параметры и начальные условия,  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{r}_0$  — как постоянные параметры.

Пусть уравнения (17.2) однозначно разрешимы относительно параметров  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{v}_0$ . Тогда решение можно записать как

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \mathbf{E}, \mathbf{H}); \quad (17.3)$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad (17.4)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  играют роль переменных параметров, зависящих от  $\mathbf{r}$  и  $t$  пока неизвестным образом. Для решения кинетической задачи в начальных условиях должна быть задана начальная функция распределения  $f_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ . Если движе-

ние частиц происходит только под действием полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . То каждая частица, находившаяся в начальный момент в точке фазового пространства  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ , окажется в момент  $t$  в точке  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ . Следовательно, функция распределения в любой момент выразится как

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0[\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)] \quad (17.5)$$

с неизвестными переменными параметрами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Если найдены решения вида (17.5) для всех сортов частиц, то для нахождения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  можно воспользоваться методом самосогласованных полей. Для этого по найденным функциям распределения вычисляются плотности заряда и тока

$$q = e \sum_k z_k \int f_k d\mathbf{v}; \quad (17.6)$$

$$\mathbf{j} = e \sum_k z_k \int f_k \mathbf{v} d\mathbf{v}, \quad (17.7)$$

которые затем подставляются в уравнения Максвелла. Получается система интегродифференциальных уравнений для нахождения полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ; подстановка этих полей в уравнения (17.3)—(17.7) дает полное решение задачи.

К сожалению, реальное выполнение этой процедуры связано с большими трудностями как принципиального, так и практического характера. Принципиальная трудность связана с требованием разрешимости уравнений (17.2). Физически это требование означает, что в каждую данную точку фазового пространства частицы должны приходить только по одному определенному пути, т. е. что траектории частиц в фазовом пространстве не должны пересекаться. Это довольно жесткое условие может быть нарушено, если у траекторий частиц имеются особые точки, т. е. при столкновениях частиц между собой, со стенкой или при прохождении их через особые точки или линии поля. Практически решение сложной системы интегродифференциальных уравнений удается, только если траектории найдены в аналитическом виде. Но простое по внешности уравнение (17.1) при неизвестных переменных полях не имеет общего аналитического решения. Приходится прибегать к различным приближениям. Так, если на плазму наложено сильное внешнее магнитное поле, то во многих случаях оказывается допустимым пренебречь собственным полем плазмы. Этого

еще недостаточно для получения аналитического решения уравнения (17.1); но в сильных и медленно меняющихся внешних полях для нахождения траекторий часто бывает возможно воспользоваться дрейфовым приближением.

Метод траекторий аналогичен методу характеристик, применяемому при решении дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа (например, волнового уравнения). Можно сказать, что траектории частиц являются характеристиками кинетического уравнения. Естественным обобщением метода траекторий является метод интегралов движения. Если удастся преобразовать функцию распределения к таким переменным, которые не меняются при движении частиц по траекториям, то в этих переменных функция распределения будет постоянной. Величины, сохраняющиеся при движении, называются интегралами движения. Начальные координаты и скорости, которые используются в методе траекторий, являются частными примерами интегралов движения.

## 18. Применение метода траекторий к линеаризованному кинетическому уравнению

Общий метод интегрирования по траекториям, изложенный выше, может применяться для решения нелинейных задач. При рассмотрении малых колебаний плазмы метод траекторий используется в несколько иной форме: он применяется к разысканию не полной функции распределения  $f$ , а только ее возмущенной части  $f^1$ . Рассмотрим сначала этот метод в общем виде, исходя из кинетического уравнения (6.3). Линеаризация этого уравнения дает

$$\frac{\partial f^1}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) f^1 + \left(\frac{\mathbf{F}^0}{M} \nabla_{\mathbf{v}}\right) f^1 = - \left(\frac{\mathbf{F}^1}{M} \nabla_{\mathbf{v}}\right) f^0, \quad (18.1)$$

где индекс 0 сверху относится к невозмущенным величинам, индекс 1 сверху — к малым возмущениям. В такой форме  $f^1$  рассматривается как функция от положения и скорости частиц в данный момент времени. Но уравнение значительно упростится, если за независимые переменные взять координаты и скорости частиц в некоторый фиксированный момент времени  $t_0$  (аналогично лагранжевым координатам в гидродинамике). Обозначим эти новые переменные посредством  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{v}_0$ . Они связаны с обычными переменными

$\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  уравнениями траекторий

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v} dt'; \quad (18.2)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \frac{\mathbf{F}}{M} dt'. \quad (18.3)$$

Найдем частную производную функции  $f^1$  по времени в новых переменных, т. е. при постоянных  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{v}_0$ . По правилам дифференцирования функций от многих переменных

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f^1}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0} &= \left(\frac{\partial f^1}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}, \mathbf{v}} + \sum_a \frac{\partial f^1}{\partial r_a} \left(\frac{\partial r_a}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0} + \\ &+ \sum_a \frac{\partial f^1}{\partial v_a} \left(\frac{\partial v_a}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0}. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Запишем уравнения траекторий для невозмущенного движения:

$$\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}^0 dt'; \quad (18.5)$$

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \frac{\mathbf{F}^0}{M} dt'. \quad (18.6)$$

Индекс 0 сверху относится к невозмущенным величинам, а снизу — к моменту времени  $t_0$ . Если теперь в выражении частной производной (18.4) пренебречь величинами второго порядка малости, то оно примет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f^1}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0} &= \left(\frac{\partial f^1}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}, \mathbf{v}} + \\ &+ \sum_a v_a^0 \frac{df^1}{dr_a} + \sum_a \frac{F_a^0}{M} \frac{\partial f^1}{\partial v_a}, \end{aligned}$$

что тождественно с левой частью уравнения (18.1). Таким образом, в первом приближении линейризованное кинетическое уравнение можно записать в очень простом виде

$$\left(\frac{\partial f^1}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0} = -\left(\frac{\mathbf{F}^1}{M} \nabla_{\mathbf{v}}\right) f^0. \quad (18.7)$$

Иными словами, траектории невозмущенного движения частиц являются характеристиками линейризованного кинетического уравнения

тического уравнения. Метод траекторий позволяет в принципе рассматривать неустановившиеся процессы под действием внешних сил, если включить возмущающую силу  $F^1$  в определенный момент времени  $t_0$ . Интегрирование дает

$$f^1(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t) = - \int_{-\infty}^t \left( \frac{\mathbf{F}^1}{M} \nabla_v \right) f^0 dt', \quad (18.8)$$

где  $F^1 \equiv F^1[\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t')]$ . Интегрирование производится по невозмущенной траектории (18.5). В изотропной плазме, согласно уравнениям (10.4) и (10.5), возмущающей силой в правой части линеаризованного уравнения (18.1) является только сила электрического поля волны

$$\left( \frac{\mathbf{F}^1}{M} \nabla_v \right) f^0 = \frac{nZe}{M} (\mathbf{E}\mathbf{v}) f'. \quad (18.9)$$

Невозмущенное же движение происходит только под действием лоренцевой силы  $\frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}]$ , и уравнения траекторий (18.5)—(18.6) принимают вид

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{mc} [\mathbf{v}\mathbf{H}] = \omega_c [\mathbf{v}\mathbf{h}], \quad (18.10)$$

или в составляющих (в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{dv_x}{dt} = v_y \omega_c; \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{dv_y}{dt} = -v_x \omega_c. \end{aligned} \quad (18.11)$$

Если выразить составляющие скорости в цилиндрической системе координат с осью  $z$  вдоль магнитного поля, тогда

$$\begin{aligned} v_x &= v_{\perp} \cos \varphi; \quad v_y = v_{\perp} \sin \varphi; \\ \frac{dv_{\perp}^2}{dt} &= 0; \quad v_y \frac{dv_x}{dt} - v_x \frac{dv_y}{dt} = -v_{\perp}^2 \frac{d\varphi}{dt}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega_c.$$

Таким образом, невозмущенное движение представляет собою просто винтовое движение с вращением по цикло-

тронной окружности\*. Интегрирование уравнений (18.11) дает

$$\begin{aligned} v_x &= v_{\perp} \cos \omega_c t; & v_y &= -v_{\perp} \sin \omega_c t; \\ x &= \frac{v_{\perp}}{\omega_c} (\sin \omega_c t - \sin \omega_c t_0); & y &= \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \times \\ & & & \times (\cos \omega_c t - \cos \omega_c t_0). \end{aligned}$$

Можно перейти от переменной  $t$  к переменной  $\varphi$

$$\varphi = -\omega_c t + \omega_c t_0 = -\omega_c t + \varphi_0.$$

Тогда результат (18.8) примет вид

$$f^1(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \varphi) = \frac{nZe}{M} f' \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \varphi') v(\varphi') d\varphi'. \quad (18.12)$$

В плоской волне электрическое поле зависит от времени как

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}' - \omega t')}. \quad (18.13)$$

Если выбрать систему координат так, чтобы  $k_y = 0$ , то

$$\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t = k_1 x + k_3 z - \omega t,$$

или, переходя от переменной  $t$  к переменной  $\varphi$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\mathbf{r}' - \omega t' &= -\frac{k_1 v_{\perp}}{\omega_c} (\sin \varphi' - \sin \varphi_0) - \\ &- \frac{\omega}{\omega_c} (\varphi' - \varphi_0). \end{aligned} \quad (18.14)$$

Если подставить выражение (18.14) в (18.13) и полученный результат в формулу (18.12), то она совпадет с решением (10.14). При этом нужно только заменить  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, \varphi_0)$  на  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \varphi)$ , что всегда допустимо, так как для установившейся плоской волны момент  $t_0$  и точка  $\mathbf{r}_0$  ничем не выделены. Дальнейшие выкладки совпадают с приведенными в разделе (VI.10).

Таким образом, все приведенные выше результаты могут быть получены методом интегрирования по траекториям. Но прямое интегрирование кинетического уравнения по углу обладает преимуществом наглядности.

\* Продольная скорость  $v_z$  невозмущенного винтового движения от времени не зависит и в дальнейшие формулы не входит. Движение частиц характеризуется в них только фазой циклотронного вращения  $\varphi$ , которая принимается за переменную интегрирования вместо времени  $t$ .

## 19. Флуктуационное взаимодействие и кулоновские столкновения

Приближение самосогласованного поля оперирует сглаженными полями, т. е. не учитывает флуктуационных взаимодействий, которые являются основным механизмом диссипации энергии в плотной плазме. Флуктуации сильнее всего проявляются тогда, когда они приводят к тесному сближению частиц, которое можно трактовать как столкновение. Поэтому уравнение самосогласованного поля часто называют кинетическим уравнением без столкновений, а дополнительный член, учитывающий флуктуации, — интегралом столкновений. Такое отождествление флуктуационного взаимодействия со столкновениями вполне закономерно для газа из нейтральных частиц, силы взаимодействия между которыми очень быстро спадают с расстоянием. В плазме действуют кулоновские силы, спадающие обратно пропорционально лишь квадрату расстояния. Для единообразия с кинетикой нейтрального газа часто пользуются и здесь условным понятием «кулоновских столкновений». Но для плазмы столь же правомерно понимать флуктуационное взаимодействие как непрерывно действующую силу *кулоновского трения*. В газе из нейтральных частиц флуктуации проявляются только в *близкодействии*. В плазме необходимо учитывать также и *флуктуационное дальнеедействие*; множитель, учитывающий его, носит название кулоновского логарифма. Как видно из сказанного, существуют две качественно отличные модели флуктуационного взаимодействия, дискретная и непрерывная. Для получения конкретных количественных результатов приходится использовать обе модели, переходя на разных этапах вывода от одной к другой.

В непрерывной модели флуктуационного взаимодействия используется уравнение Фоккера — Планка в пространстве скоростей. При этом сглаженные самосогласованные поля выделяются, т. е. под вероятностью  $\omega$  в уравнении (4.1) понимается только вероятность перехода с одной фазовой траектории на другую под влиянием флуктуационного взаимодействия. Тогда в формулах раздела (VI.4) частная производная  $df/\partial t$  заменяется на производную по времени вдоль невозмущенной фазовой траектории  $Df/Dt$ . В соответствии с этим, воспользовавшись уравнениями (4.16) или (4.20), можно записать первую и вторую формы урав-

нения Фоккера — Планка в пространстве скоростей как

$$\frac{Df}{Dt} = - \sum_a \frac{\partial}{\partial v_a} A'_a f + \sum_{a, b} \frac{\partial^2}{\partial v_a \partial v_b} B_{ab} f \quad (19.1)$$

или

$$\frac{Df}{Dt} = - \sum_a \frac{\partial}{\partial v_a} \left( A_a f - \sum_b B_{ab} \frac{\partial f}{\partial v_b} \right), \quad (19.2)$$

где

$$A' = - \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t}; \quad (19.3)$$

$$A = A' - \sum_b \frac{\partial B_{ab}}{\partial v_b}; \quad (19.3a)$$

$$B_{ab} = \frac{1}{2} \frac{\overline{\Delta v_a \Delta v_b}}{\Delta t}; \quad (19.4)$$

$Df/Dt$  должна подставляться вместо нуля в правую часть уравнений (6.2), (6.3) или (6.4). Величина  $A$  есть коэффициент динамического трения; величины  $B_{ab}$  образуют тензор *диффузионных коэффициентов в пространстве скоростей*. Если в формуле (4.1) вероятность  $\omega$  есть четная функция от  $\Delta v$ , то коэффициент  $A'_a$  обращается в нуль. Основное значение имеет второй член правой части уравнения (19.2), который называют *диффузионным членом*. Для грубой оценки можно ограничиться этим членом и положить

$$B \approx \frac{\overline{(\Delta v)^2}}{\Delta t}. \quad (19.5)$$

Заметим, что если коэффициенты  $A_a$  не зависят от скорости, то первый член правой части можно записать как  $(\mathbf{A} \nabla_v) f$  и присоединить к третьему члену левой части уравнения (6.4), после чего уравнение Фоккера — Планка примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) f + \left( \frac{\mathbf{F}^*}{M} \nabla_v \right) f = \text{div } B \nabla_v f,$$

где

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F} + M\mathbf{A}.$$

Таким образом, первый коэффициент Фоккера — Планка можно рассматривать как дополнительную силу, действующую на частицу. В соответствии со знаком в формуле (4.8) или (4.17) сила эта действует против направления скорости;

ее называют *силой динамического трения*. Тензор  $B$  описывает *диффузию в пространстве скоростей*. Если функция распределения постоянна в пространстве, то уравнение Фоккера — Планка будет описывать процесс установления равновесного максвелловского распределения скоростей, который называется *процессом релаксации*. Если при этом отсутствуют также и электромагнитные поля, то в левой части уравнений (19.1) и (19.2) можно вернуться от  $Df/Dt$  к частной производной  $\partial f/\partial t$ , т. е. уравнение Фоккера — Планка примет тот же вид, что и в разделе (VI.4). Оценка по порядку величины, согласно формуле (19.5), дает для времени релаксации

$$\tau_r \approx \frac{\bar{v}^2}{B}, \quad (19.6)$$

где вместо  $\bar{v}^2$  можно подставлять среднюю квадратичную скорость в конечном (равновесном) состоянии, т. е. для частиц массы  $M$

$$\tau_r \approx 3 \frac{T}{MB}. \quad (19.6a)$$

Уравнение Фоккера — Планка, как феноменологическое, формально применимо к сколь угодно плотной плазме. Однако конкретные значения коэффициентов известны только для не слишком плотной плазмы, в которой, помимо самосогласованного поля, можно учитывать только двойные флуктуационные взаимодействия. При этом коэффициенты проще всего вычислять из дискретного описания.

В дискретной модели флуктуационное взаимодействие рассматривается как совокупность сближений пар частиц — *кулоновских столкновений*. При этом учитываются только двойные взаимодействия, что ограничивает область применимости результатов не слишком высокими плотностями. Если в плазме присутствуют нейтральные частицы, то столкновения с ними требуют уже по существу дискретного описания.

В общем виде дискретное описание дается *кинетическим уравнением Больцмана*. Для его вывода уравнение (6.1) или (6.4) дополняется правой частью, описывающей изменение числа частиц на фазовой траектории вследствие рассеяния при столкновениях. Если  $Q(u, \theta)$  есть дифференциальное (на единицу телесного угла) сечение рассеяния на угол  $\theta$  при относительной скорости  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ , то число

частиц, выбиваемых с рассматриваемой фазовой траектории, определяется числом «прямых» столкновений

$$Quf(\mathbf{v}_1)f(\mathbf{v}_2),$$

а число частиц, приходящихся на рассматриваемую фазовую траекторию, — числом «обратных» столкновений\*

$$Quf(\tilde{\mathbf{v}}_1)f(\tilde{\mathbf{v}}_2).$$

В силу обратимости законов механики, скорости, начальные для обратного столкновения, являются конечными для прямого. Следовательно,  $\tilde{\mathbf{v}}_1$  и  $\tilde{\mathbf{v}}_2$  есть конечные скорости, приобретаемые частицами после столкновения. Чтобы найти полное изменение числа частиц на фазовой траектории, нужно разность этих выражений проинтегрировать по телесному углу  $\Omega$  и по скорости  $\mathbf{v}_2$ . Отсюда получается кинетическое уравнение Больцмана в виде

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + (v\nabla)f_k + \left(\frac{F}{M}\nabla_v\right)f_k = \sum_k st_{kl}, \quad (19.7)$$

где величины  $st_{kl}$  называются интегралами столкновений\*\* и выражаются как

$$st_{kl} = \int d\mathbf{v}_l \int d\Omega Q_{kl}(u, \theta) u [f_k(\tilde{\mathbf{v}}_k)f_l(\tilde{\mathbf{v}}_l) - f_k(\mathbf{v}_k)f_l(\mathbf{v}_l)]. \quad (19.8)$$

Здесь индексы  $k$  и  $l$  нумеруют разные сорта частиц, присутствующих в плазме. Связь  $\tilde{\mathbf{v}}_1$  и  $\tilde{\mathbf{v}}_2$  с  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  дается механикой столкновения;  $u$  — относительная скорость

$$u = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|.$$

Если рассматривать частицы как твердые шарики, то сечение столкновения определяется их геометрическими размерами. Если же рассматривать частицы как центры сил, то сечение рассеяния

$$Q = \pi b^2,$$

\* Точнее, их следовало бы называть встречными (в смысле замены  $t$  на  $-t$ ), но для интересующих нас вопросов различие между обратными и встречными столкновениями несущественно.

\*\* Обозначение  $st$  происходит от немецкого слова *stoss* — столкновение (иногда интегралы столкновения называют штосс-членами).

где  $b$  — прицельный параметр, т. е. расстояние по перпендикуляру от одной частицы до невозмущенной траектории другой. Отсюда дифференциальное сечение (на единицу телесного угла отклонения)

$$Q(u, \theta) \equiv \frac{dQ}{d\Omega} = 2\pi b \frac{db}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|, \quad (19.9)$$

где  $b$  — значение прицельного параметра, отвечающее рассеянию на угол  $\theta$ .

Если на больших расстояниях взаимодействие отсутствует (модель твердых шариков), то при соответствующих значениях прицельного параметра конечные скорости не будут отличаться от начальных, и в правой части уравнения (19.8) выражение в квадратных скобках обратится в нуль. Поэтому для столкновений с участием нейтральных частиц, которым можно приписывать конечное геометрическое сечение, интегралы столкновений используются непосредственно в виде (19.8).

Иначе обстоит дело с взаимодействиями, в которых участвуют только заряженные частицы. Кулоновское взаимодействие проявляется на расстояниях, во много раз превышающих геометрические размеры частиц, которые поэтому можно рассматривать как точки (центры сил). Для этого случая требуется специальная форма интеграла столкновений.

Для кулоновского взаимодействия двух заряженных частиц с зарядовыми числами  $Z_1$  и  $Z_2$  значение прицельного параметра связано с углом рассеяния известной из атомной физики формулой Резерфорда

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\tilde{m} u^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \equiv b_0 \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, \quad (19.10)$$

где  $\tilde{m}$  — приведенная масса,

$$\tilde{m} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}.$$

Отклонению на угол  $\frac{\pi}{2}$  отвечает  $\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = 1$ , и, следовательно, значение прицельного параметра

$$b_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\tilde{m} u^2}. \quad (19.11)$$

Величину (19.11) мы называем *расстоянием ближнего взаимодействия*. Это расстояние, на котором потенциальная энергия взаимодействия становится вдвое больше начальной кинетической энергии. Сближение на расстояние порядка  $b_0$  приводит к резкому изменению направления движения частицы.

Подстановка выражения (19.10) в формулу (19.9) с учетом выражения (19.11) дает для дифференциального сечения рассеяния результат

$$Q(u, \theta) = \frac{b_0^2}{\sin \theta} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \left| \frac{d}{d\theta} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right|.$$

После дифференцирования получим

$$\frac{d}{d\theta} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

откуда

$$Q(u, \theta) = \frac{b_0^2}{2} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2} \sin \theta}. \quad (19.12)$$

Если умножить числитель и знаменатель на  $2 \sin \frac{\theta}{2}$ , то в числителе получится  $2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$  и формула для дифференциального сечения кулоновского (резерфордовского) рассеяния примет окончательный вид

$$Q(u, \theta) = \frac{b_0^2}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (19.13)$$

Из этой формулы видно, что дифференциальное сечение рассеяния при малых углах, т. е. больших прицельных параметрах, расходится. Расходимость является следствием дальнедействующего характера кулоновских сил. Для устранения расходимости при интегрировании по углам в правой части уравнения (19.7) приходится «обрезать» подынтегральную функцию на минимальном значении угла рассеяния, которое отвечает максимальному значению прицельного параметра, равному дебаевской длине

$$b_{\max} = l_D.$$

На расстояниях, превышающих дебаевскую длину, кулоновское взаимодействие снимается электростатическим экранированием.

Расходимость интеграла в правой части уравнения (19.7) при малых углах (т. е. больших прицельных параметрах) оказывается гораздо слабее, чем можно было бы думать по виду выражения (19.13), из-за того что при слабом взаимодействии конечные скорости мало отличаются от начальных и выражение в квадратных скобках становится малым. Для далеких столкновений изменение скорости при одном столкновении мало, и интеграл столкновений можно заменить диффузионным членом формулы Фоккера — Планка.

Для грубой оценки в формуле (19.5) за  $\Delta t$  принимают промежуток времени между кулоновскими столкновениями. Тогда диффузионный коэффициент в пространстве скоростей выражается просто как

$$B \approx \frac{\overline{\Delta v^2}}{\tau},$$

и кинетическое уравнение, которое при такой трактовке совпадает с уравнением Фоккера — Планка, примет приближенный вид

$$\frac{Df}{Dt} \approx -\frac{f - f_0}{\tau_r}, \quad (19.14)$$

где  $f_0$  — равновесная функция распределения, а  $\tau_r$  — время релаксации, определенное как

$$\frac{1}{\tau_r} = \sum_k n_k u_k \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{(\Delta v)^2}{v^2} 2\pi b db, \quad (19.15)$$

где  $n_k$  — концентрации частиц различного рода. Здесь  $\Delta v$  — изменение скорости при столкновении

$$(\Delta v)^2 = \overline{v^2} \sin^2 \theta = 4v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

Из выражения (19.10)

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{b_0^2}{b_0^2 + b^2}; \\ \cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{b^2}{b_0^2 + b^2}, \end{aligned}$$

что после подстановки в формулу (19.15) дает

$$\frac{1}{\tau_r} = \sum_k n_k u_k \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} 8\pi b_0^2 \frac{b^3 db}{(b_0^2 + b^2)^2}. \quad (19.16)$$

Если  $b_{\max} \gg b_{\min}$ , то основной вклад в интеграл дает область  $b \gg b_0$  (приближение непрерывного взаимодействия), и время релаксации выразится как

$$\frac{1}{\tau_r} \approx \sum_k n_k u_k Q_{ik}, \quad (19.17)$$

где эффективные кулоновские сечения

$$Q_{ik} \approx 8\pi b_0^2 \ln \Lambda; \quad (19.18)$$

$$\Lambda = \frac{b_{\max}}{b_{\min}}. \quad (19.19)$$

Величина  $\ln \Lambda$  называется кулоновским логарифмом. При его нахождении за максимальное значение прицельного параметра берется дебаевская длина, за минимальное — большая из двух величин: расстояния ближнего взаимодействия  $b_0$  и квантовомеханической длины волны частицы

$$\lambda = \frac{\hbar}{mv}. \quad (19.20)$$

Практически в обычных для плазмы условиях кулоновский логарифм оказывается порядка 10, что и оправдывает использование модели непрерывного взаимодействия. Приближение (19.14) мы называем *релаксационным приближением*. Для еще более грубой оценки можно пренебречь в выражении (19.14) зависимостью времени релаксации  $\tau_r$  от скорости  $v$  и воспользоваться приближением *среднего времени релаксации*, которое оценивается по формуле (19.6а).

Чтобы в релаксационном приближении учесть влияние флуктуационного взаимодействия на тензорные характеристики плазмы, можно заменить в диагональных компонентах частоту  $\omega$  на величину

$$\tilde{\omega} = \omega + i\nu, \quad (19.21)$$

где  $\nu$  — эффективная частота кулоновских столкновений

$$\nu = \frac{1}{\tau_r}, \quad (19.22)$$

определяемая по формулам (19.17)—(19.19).

Таким образом, может быть, в частности, найден тензор проводимости для постоянного тока.

Для грубой оценки коэффициентов переноса можно подставлять то же значение  $\tau$  в формулы (5.1)—(5.2).

Если в плазме присутствуют нейтральные частицы, то для них в формулу (19.17) подставляются сечения, взятые из экспериментальных данных или из теории столкновений.

Для более точного вычисления эффектов, связанных с флуктуационным взаимодействием, точная формула для кулоновского сечения (19.13) подставляется в выражение (19.8), но при этом изменение скорости при каждом столкновении полагается малым. Тогда кулоновский интеграл столкновений может быть представлен аналогично формуле (4.10) как дивергенция потока в пространстве импульсов

$$\text{st}_{kl} = - \sum \frac{\partial}{\partial p_a} J_a. \quad (19.23)$$

Поток в пространстве импульсов  $\mathbf{J}$  представляет собой вектор с составляющими

$$J_a = 2\pi (Z_k Z_l)^2 e^4 \ln \Lambda \sum_b \int \left( f \frac{\partial f'}{\partial p_b} - f' \frac{\partial f}{\partial p_b} \right) \alpha_{ab} du', \quad (19.24)$$

где величины  $\alpha_{ab}$  являются компонентами тензора. В системе координат, в которой ось  $x$  направлена вдоль относительной скорости  $\mathbf{u} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ , этот тензор оказывается диагональным с компонентами

$$\alpha_{xx} = 0; \quad \alpha_{yy} = \alpha_{zz} = \frac{1}{u}. \quad (19.25)$$

В произвольной системе координат в тензорных обозначениях

$$\alpha_{ab} = \frac{u^2 \delta_{ab} - u_a u_b}{u^3}. \quad (19.26)$$

Если положить  $u = u_x$ ;  $u_y = u_z = 0$ , то формула (19.26) перейдет в формулу (19.25).

В этих формулах тензорные индексы  $a$  и  $b$  нумеруют три координаты пространства, индексы  $k$  и  $l$  — разные сор-

та частиц, включая электроны и ионы. Формулы (19.23)—(19.24) дают вклад в правую часть кинетического уравнения от взаимодействия частиц сорта  $k$  с частицами сорта  $l$ . Чтобы получить полный поток в пространстве импульсов частиц сорта  $k$ , нужно просуммировать по всем  $l$ . В формуле (19.24)  $p = M_k v$  есть импульс частиц сорта  $k$ ;  $v$  — их скорость;  $p' = M_l v'$  есть импульс частиц сорта  $l$ ;  $v'$  — их скорость;  $f \equiv f(v)$ ;  $f' \equiv f(v')$ ;  $\ln \Lambda$  есть кулоновский логарифм, определенный формулой (19.19). Он, как медленно меняющаяся функция, вынесен за знак интегрирования по скоростям при некотором усредненном значении своего аргумента. Величина (19.23)—(19.24) называется *интегралом столкновений в форме Ландау*. Она имеет вид правой части второй формы уравнения Фоккера — Планка. Поэтому кинетическое уравнение (19.7) с интегралом столкновений (19.23)—(19.24) иногда называют также уравнением Фоккера — Планка в форме Ландау.

Использование приведенных формул проще всего для случаев частичного термодинамического равновесия, когда функция распределения может быть представлена набором нескольких функций Максвелла с различными температурами. В подобных случаях:

$$f \propto e^{-\frac{p^2}{2MT}},$$

откуда

$$\frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{v}{T} f. \quad (19.27)$$

Формула (19.24) принимает при этом вид

$$J_a = 2\pi (Z_k Z_l e^2)^2 \ln \Lambda \sum_b \int f f' \left( \frac{v_b}{T} - \frac{v'_b}{T'} \right) \alpha_{ab} dv', \quad (19.28)$$

где тензор  $\alpha$  дается формулой (19.26). Если частицы разных сортов имеют разные температуры, то для дальнейшего упрощения следует подставить

$$v'_b = v_b + u_b$$

и учесть, что, как видно из формулы (19.25),

$$\sum_b u_b \alpha_{ab} = 0.$$

Тогда поток в пространстве импульсов (19.28) выразится как

$$J_a = 2\pi (Z_k Z_l e^2)^2 \ln \Lambda \frac{T' - T}{T' T} \sum_b v_b \int f f' \alpha_{ab} dv'. \quad (19.29)$$

Для процессов выравнивания температур при отсутствии пространственных неоднородностей и электрических полей\* кинетическое уравнение (19.7) с интегралом столкновений (19.23) принимает простой вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_a \frac{\partial}{\partial p_a} J_a. \quad (19.30)$$

Передаваемая энергия в фиксированном энергетическом интервале

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} f = \mathcal{E} \frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_a \mathcal{E} \frac{\partial}{\partial p_a} J_a.$$

Полная передаваемая энергия находится интегрированием по частям с применением теоремы Гаусса и учетом того, что при импульсе, стремящемся к бесконечности, поток отсутствует

$$W = \int \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} f dv = \sum_a \int J_a \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_a} dv. \quad (19.31)$$

Здесь  $\mathcal{E}$  — энергия частицы

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_a} = \frac{p_a}{M} = v_a.$$

Таким образом, передаваемая энергия выражается через поток частиц в пространстве импульсов как

$$W = \sum_a \int J_a v_a dv. \quad (19.32)$$

Подстановкой выражения (19.29) в формулу (19.32) получаются после интегрирования по углам выражения для скоростей выравнивания электронной и ионной температур. Аналогичным образом находится и скорость выравни-

\* Магнитное поле не сообщает частицам энергию.

вания продольной и поперечной температур в замагниченной плазме. В этом случае только в формуле (19.28) разные температуры должны приписываться не разным частицам, а разным координатам  $b$ . Другим простым применением кулоновского интеграла столкновений является затухание волн в плазме, где максвелловская функция распределения искажается вследствие фазового резонанса лишь в узком интервале скорости в одном направлении вблизи фазовой скорости волны  $\omega/k \equiv u_\phi$ . При этом интеграл столкновений между электронами приводится к приближенному виду

$$st = \frac{12\pi e^4 n \ln \Lambda}{m^2 u_\phi^3} \frac{\partial}{\partial v} \left( v f + \frac{T}{m} \frac{\partial f}{\partial v} \right). \quad (19.33)$$

Это есть частный вид уравнения Фоккера — Планка (19.2).

## Задачи к гл. VI

**Задача 1.** Вывести общее выражение для потока амбиполярной диффузии в плазме произвольного состава и получить из него простейшие частные случаи.

**Решение.** Подстановка результата (5.20) в равенство (5.21) дает

$$\mathbf{J} = D \left( -\nabla n + \frac{e\mathbf{E}}{T} Z n \right)$$

и после подстановки в выражение (5.22) получим

$$\sum_k Z_k D_k \nabla n_k = \frac{e\mathbf{E}}{T} \sum_k Z_k^2 n_k D_k,$$

откуда

$$\frac{e\mathbf{E}}{T} = \frac{\sum_k Z_k D_k \nabla n_k}{\sum_k Z_k^2 n_k D_k}.$$

Подстановка в равенство (5.21) дает

$$\mathbf{J}_j = -D_j \frac{\nabla n_j \sum_k Z_k^2 n_k D_k - Z_j n_j \sum_k Z_k D_k \nabla n_k}{\sum_k Z_k^2 n_k D_k}.$$

Это и есть совершенно общее выражение для потока амбиполярной диффузии. Здесь индекс  $k$  нумерует все составные части плазмы, индекс  $j$  выделяет ту составную часть, для которой вычисляется

поток. Если выделить электроны и нумеровать ионы разного рода индексом  $i$ , то получится

$$\mathbf{J}_e = -D_e \frac{\sum_i Z_i^2 n_i D_i \nabla n_e + n_e \sum_i Z_i D_i \nabla n_i}{n_e D_e + \sum_i Z_i^2 n_i D_i}.$$

В общем случае диффузионный поток зависит от всех концентрационных градиентов. Если же вся плазма диффундирует как целое, то

$$\nabla n_i = \frac{n_i}{n_e} \nabla n_e,$$

и предыдущее выражение переходит в

$$\mathbf{J}_e = -D_a \nabla n_e,$$

где коэффициент амбиполярной диффузии

$$D_a = D_e \frac{\sum_i Z_i (Z_i + 1) n_i D_i}{n_e D_e + \sum_i Z_i^2 n_i D_i}.$$

При  $Z = 1$  получится формула (5.27). Если в плазме есть ионы только одного рода с зарядовым числом  $Z$ , то с учетом условия (5.23)

$$D_a = \frac{(Z + 1) D_e D_i}{D_e + Z D_i}.$$

В отсутствие магнитного поля  $D_e \gg D_i$  и  $D_a \approx (Z + 1) D_i$ ; поперек магнитного поля в замагниченной плазме  $D_e \ll D_i$ , откуда  $D_a \approx \frac{Z + 1}{Z} D_e$ .

**Задача 2.** Вывести из кинетического уравнения дисперсионное уравнение для распространения высокочастотных электромагнитных волн в плазме.

**Решение.** Выражение (8.5) для возмущения функции распределения не изменится. Но так как электрическое поле теперь меняется только поперек своего направления (волна поперечная), то  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  и объемный заряд отсутствует. Дисперсионное уравнение получится из формулы (IV.1.5), если положить в ней  $(\mathbf{kE}) = 0$ , откуда

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{E} = i \frac{4\pi\omega}{c^2} \mathbf{j},$$

где плотность тока находится по формуле (7.3).

Если направить ось  $x$  вдоль волнового вектора и ось  $z$  вдоль направления электрического поля, то

$$j = j_z = i \frac{e^2 E_z}{m} \int \frac{\partial f_0}{\partial v_z} v_z dv,$$

и дисперсионное уравнение принимает вид

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) = \frac{\omega_0^2}{c^2} \int \frac{\frac{\partial f}{\partial v_z}}{1 - \frac{kv_x}{\omega}} v_z dv,$$

где  $\omega_0$  — плазменная частота,  $f$  — нормированная основная функция распределения. Интегрированием по частям по  $v_z$  интеграл приводится к простому виду

$$\int \frac{\frac{\partial f}{\partial v_z}}{1 - \frac{kv_x}{\omega}} v_z dv_x dv_y dv_z = \int \frac{f}{1 - \frac{kv_x}{\omega}} dv_x dv_y dv_z.$$

В дальнейшем можно считать  $f$  функцией только от  $v_x$ . Действительная часть интеграла находится разложением подынтегральной функции в ряд

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f dv}{1 - \frac{kv}{\omega}} = 1 + \frac{k}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} v f dv + \frac{k^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f dv + \frac{k^3}{\omega^3} \int_{-\infty}^{\infty} v^3 f dv + \dots$$

Каждый член этого ряда, содержащий скорость в степени  $m$ , в  $m + 1$  раз меньше, чем соответствующий член ряда (8.11). В этом и проявляется различие между компонентами тензоров вдоль и поперек направления распространения. Для изотропного фона остаются только члены с четными степенями. Мнимая часть интеграла находится аналогично решению (8.12) и имеет вид

$$\int_{\frac{\omega}{k} - \varepsilon}^{\frac{\omega}{k} + \varepsilon} \frac{f dv}{1 - \frac{kv}{\omega}} = -\frac{\omega}{k} \int_{\frac{\omega}{k} - \varepsilon}^{\frac{\omega}{k} + \varepsilon} \frac{f dv}{v - \frac{\omega}{k}} = -i\pi \frac{\omega}{k} |f|_{v=\frac{\omega}{k}}.$$

Окончательно дисперсионное уравнение получается в виде

$$k^2 c^2 \approx \omega^2 - \omega_0^2 \left\{ 1 + \frac{k^2}{\omega^2} \overline{v_x^2} + \dots - i\pi \frac{\omega}{k} |f|_{v=\frac{\omega}{k}} \right\},$$

отличающемся от уравнения (IV.2.4) двумя добавочными членами, первый из которых описывает пространственную дисперсию, а второй — специфическое затухание (черенковское).

Для термической плазмы, согласно уравнениям (8.17а) и (8.18), дисперсионное уравнение принимает вид

$$k^2 c^2 \approx \omega^2 + \omega_0^2 \left( 1 + \frac{k^2 T}{\omega^2 m} + \dots - i \sqrt{\frac{\pi m}{2T}} \frac{\omega}{k} e^{-\frac{m\omega^2}{2k^2 T}} \right).$$

**Задача 3.** Вывести общие выражения тензорных характеристик для плазмы без магнитного поля.

**Решение.** Обобщая выражение (8.5) для частиц с произвольной массой  $M_k$  и зарядовым числом  $Z_k$ , подставляя в формулу (9.6) и суммируя по всем сортам частиц, находим

$$f^1 = i \frac{Ze}{M} \cdot \frac{1}{kv - \omega} \cdot \frac{\partial f^0}{\partial v_x} E_x;$$

$$\sigma_{ab} = -i \sum_k \frac{\omega_{0k}^2}{4\pi\omega} \int \frac{v_a \frac{\partial f}{\partial v_b}}{1 - \frac{kv}{\omega}} dv$$

и, согласно выражению (9.7),

$$\epsilon_{ab} = \delta_{ab} + \sum_k \frac{\omega_{0k}^2}{\omega^2} \int \frac{v_a \frac{\partial f}{\partial v_b}}{1 - \frac{kv}{\omega}} dv.$$

Интегралы берутся так же, как в разделе (VI.8) и в предыдущей задаче. Для изотропного фона, используя формулу (10.3), приводим результаты к виду

$$\sigma_{ab} = -i \sum_k \frac{\omega_{0k}^2}{4\pi\omega} \int \frac{f'}{1 - \frac{kv}{\omega}} v_a v_b dv;$$

$$\epsilon_{ab} = \delta_{ab} + \sum_k \frac{\omega_{0k}^2}{\omega^2} \int \frac{f'}{1 - \frac{kv}{\omega}} v_a v_b dv,$$

где  $f'$  дается формулой (10.4). Для термической плазмы, согласно формуле (14.2),

$$\sigma_{ab} = i \sum_k \frac{n_k Z_k^2 e^2}{\omega T} \left\langle \frac{v_a v_b}{1 - \frac{kv}{\omega}} \right\rangle;$$

$$\epsilon_{ab} = \delta_{ab} + \sum_k \frac{4\pi n_k Z_k^2 e^2}{\omega^2 T} \left\langle \frac{v_a v_b}{1 - \frac{kv}{\omega}} \right\rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение по максвелловской функции распределения.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Гауссова система единиц

В настоящей книге используется симметричная гауссова система единиц (ГОСТ 8033—56 с дополнением 1962 г.), в которой электрические величины выражены в электрических, а магнитные — в магнитных единицах. Единицы измерения взяты из абсолютной системы единиц СГС (сантиметр, грамм, секунда).

Электрическая и магнитная проницаемости пустого пространства в гауссовой системе равны единице, т. е. в пустом пространстве напряженность поля и индукция выражаются одним и тем же числом.

Везде, где это специально не оговаривается, мы пользуемся представлениями микроскопической электродинамики.

В соответствии с этим мы не делаем различия между напряженностью полей в плазме и индукцией. В зарубежной литературе принято характеризовать электрическое поле напряженностью  $\mathbf{E}$ , а магнитное — индукцией  $\mathbf{H}$ . В соответствии с традицией, принятой в нашей литературе, в частности в классическом курсе теоретической физики Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, мы пользуемся для магнитного поля напряженностью  $\mathbf{H}$ , причем для пустого пространства эта величина совпадает с индукцией  $\mathbf{H}$ . В этих единицах и обозначениях уравнения электродинамики Максвелла имеют вид:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi q; \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0.\end{aligned}$$

В системе СГС напряженность магнитного поля выражается в эрстедах, а магнитная индукция — в гауссах. Для плазмы эти единицы идентичны. Плотность энергии электромагнитного поля в гауссовой системе единиц выражается симметричной формулой

$$e = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}.$$

В технической литературе предпочтение отдается рационализированным системам единиц, в которых уравнения электродинамики не содержат множителя  $4\pi$ , но зато пустому пространству приписываются электрическая и магнитная проницаемости, не равные единице. Рационализированная система МКС (метр, килограмм, секунда) принята в качестве Международной системы единиц СИ. Но мы сохраняем в настоящем курсе гауссову систему, поскольку она пока еще остается основной в учебной литературе по физике и допущена к употреблению в дополнение к международной системе\*.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Сведения из векторного анализа

Для решения векторного уравнения

$$[\mathbf{X}\mathbf{B}] = \mathbf{C} \quad (*)$$

его умножают векторно слева на вектор  $\mathbf{B}$ , что дает

$$\mathbf{XB}^2 - \mathbf{B}(\mathbf{B}\mathbf{X}) = [\mathbf{B}\mathbf{C}].$$

Но так как уравнение (\*) определяет только перпендикулярную к  $\mathbf{B}$  составляющую  $\mathbf{X}$ , то его можно записать в виде

$$[\mathbf{X}_\perp \mathbf{B}] = \mathbf{C},$$

откуда

$$\mathbf{X}_\perp \mathbf{B}^2 = [\mathbf{B}\mathbf{C}].$$

Таким образом, перпендикулярная составляющая

$$\mathbf{X}_\perp = \frac{[\mathbf{B}\mathbf{C}]}{B^2}.$$

Параллельная составляющая  $\mathbf{X}_\parallel$  из уравнения (\*) определена быть не может.

*Цилиндрические координаты.* В физике плазмы часто рассматриваются системы с аксиальной симметрией, для описания которых удобны цилиндрические координаты  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ .

Градиент в цилиндрических координатах

$$(\nabla U)_r = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad (\nabla U)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}; \quad (\nabla U)_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (1)$$

Дивергенция в цилиндрических координатах

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (2)$$

\* См. книгу А. Г. Чертова «Международная система единиц измерения». М., Росвузиздат, 1963.

Ротор в цилиндрических координатах

$$\left. \begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}; \\ (\operatorname{rot} \mathbf{A})_\varphi &= \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{\partial A_z}{\partial r}; \\ (\operatorname{rot} \mathbf{A})_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Лапласиан скаляра в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Лапласиан вектора в цилиндрических координатах

$$\left. \begin{aligned} (\Delta \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{A_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}; \\ (\Delta \mathbf{A})_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}; \\ (\Delta \mathbf{A})_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Нужно помнить, что в криволинейных координатах составляющая лапласиана не равна лапласиану от составляющей вектора. Забвение этого важного обстоятельства легко приводит к ошибкам.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

### Свойства функций Бесселя

Функция Бесселя первого рода порядка  $s$  является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dz}{dy} + \left(1 - \frac{s}{y^2}\right) z = 0.$$

Решение этого уравнения

$$z = J_s(y).$$

Функции разных порядков связаны рекуррентными соотношениями

$$J_{s-1}(y) + J_{s+1}(y) = \frac{2s}{y} J_s(y);$$

$$J_{s-1}(y) - J_{s+1}(y) = 2 \frac{dJ_s(y)}{dy}.$$

Функция отрицательного порядка

$$J_{-s}(y) = (-1)^s J_s(y).$$

Модифицированные функции Бесселя относятся к обычным так же, как гиперболические к тригонометрическим.

Модифицированная функция Бесселя порядка  $s$  определяется как

$$I_s(y) = i^{-s} J_s(iy).$$

Модифицированные функции Бесселя отрицательного порядка

$$I_{-s}(y) = I_s(y).$$

Между модифицированными функциями существуют рекуррентные соотношения

$$I_{s-1}(y) - I_{s+1}(y) = \frac{2s}{y} I_s(y);$$

$$I_{s-1}(y) + I_{s+1}(y) = 2 \frac{dI_s(y)}{dy}.$$

При малых значениях аргумента функции разлагаются в ряды. Для целого положительного порядка  $s$

$$J_s(y) = \frac{y^s}{2^s s!} - \frac{y^{s+2}}{2^{s+2} (s+1)!} + \dots;$$

$$I_s(y) = \frac{y^s}{2^s s!} + \frac{y^{s+2}}{2^{s+2} (s+1)!} + \dots$$

При больших значениях аргумента действуют асимптотические разложения

$$J_s(y) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \cos\left(y - \frac{s\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$I_s(y) \approx \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}}.$$

Функция Бесселя имеет интегральное представление

$$\begin{aligned} 2\pi J_s(y) &= \int e^{-iy \sin \varphi + is\varphi} d\varphi = \int e^{+iy \sin \varphi - is\varphi} d\varphi = \\ &= i^s \int e^{-iy \cos \varphi - is\varphi} d\varphi = (-i)^s \int e^{+iy \cos \varphi + is\varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Здесь интегралы берутся по любому интервалу от  $\varphi$  до  $\varphi + 2\pi$ . С помощью этого интегрального представления может быть получено разложение функции  $e^{-iy \sin \varphi}$  в ряде Фурье. Для этого ищут коэффициенты  $C_s$  разложения

$$e^{-iy \sin \varphi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s e^{-is\varphi}.$$

Умножая обе части равенства на  $e^{is\varphi}$  и интегрируя по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , находят с учетом ортогональности

$$C_s = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iy \sin \varphi + is\varphi} d\varphi = J_s(y).$$

Отсюда искомое разложение

$$e^{-iy \sin \varphi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(y) e^{-is\varphi}.$$

Для вычисления интегралов, содержащих функции Бесселя, полезны две формулы Вебера:

первый экспоненциальный интеграл Вебера

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda y) e^{-\rho^2 y^2} y dy = \frac{1}{2\rho^2} e^{-\frac{\lambda^2}{4\rho^2}};$$

второй экспоненциальный интеграл Вебера

$$\int_0^{\infty} J_s(\lambda y) J_s(\mu y) e^{-\rho^2 y^2} y dy = \frac{1}{2\rho^2} e^{-\frac{\lambda^2 + \mu^2}{4\rho^2}} I_s\left(\frac{\lambda\mu}{2\rho^2}\right).$$

## Основные формулы статистической термодинамики

Рассматриваемая система характеризуется *энергетическим спектром*, т. е. набором возможных значений энергии  $\mathcal{E}_k$ , который удобно считать дискретным. Результаты для непрерывного спектра можно получить посредством предельного перехода.

Вероятность нахождения системы в состоянии с энергией  $\mathcal{E}_k$  дается *каноническим распределением Гиббса*

$$\omega_k = e^{-\frac{F - \mathcal{E}_k}{T}}, \quad (1)$$

где  $T$  — температура в энергетических единицах;  $F$  — величина, называемая *свободной энергией*. Индекс  $k$  нумерует все состояния системы. Каноническое распределение справедливо для систем, находящихся в термическом равновесии с тепловым резервуаром (термостатом) температуры  $T$ .

Если у системы имеется несколько состояний с одинаковой энергией  $\mathcal{E}_k$ , то их удобно рассматривать как одно *вырожденное состояние*. Число физически различных состояний с одинаковым значением энергии называется *статистическим весом*  $g_i$  вырожденного состояния. Вероятность нахождения системы в вырожденном состоянии

$$\omega_i = g_i e^{-\frac{F - \mathcal{E}_i}{T}}, \quad (2)$$

где индекс  $i$  нумерует все значения энергии системы (т. е. все вырожденные состояния).

Вероятности подчиняются *условию нормировки*

$$\sum_k \omega_k = \sum_i \omega_i = 1.$$

Отсюда

$$e^{-\frac{F}{T}} \sum_i g_i e^{-\frac{\mathcal{E}_i}{T}} = 1. \quad (3)$$

Входящая сюда сумма называется *статистической суммой*. Обозначим ее просто  $\Sigma$ :

$$\sum_i g_i e^{-\frac{\mathcal{E}_i}{T}} = \Sigma. \quad (4)$$

Тогда из формулы (3)

$$F = -T \ln \Sigma. \quad (5)$$

Дифференцирование формулы (4), определяющей статистическую сумму, по параметру  $(1/T)$  дает

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \left(\frac{1}{T}\right)} = - \sum_i g_i \mathcal{E}_i e^{-\frac{\mathcal{E}_i}{T}}. \quad (6)$$

Среднее значение любой величины  $A$  по статистическому распределению определяется как

$$\bar{A} = \sum_i w_i A_i. \quad (7)$$

Следовательно, средняя энергия системы

$$\bar{\mathcal{E}} = \sum_i w_i \mathcal{E}_i = \sum_i g_i \mathcal{E}_i e^{-\frac{F - \mathcal{E}_i}{T}}. \quad (8)$$

Сопоставление с формулами (6) и (3) дает

$$\bar{\mathcal{E}} = e^{\frac{F}{T}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \left(\frac{1}{T}\right)} = T^2 \frac{\partial \ln \Sigma}{\partial T}.$$

Определенная таким образом средняя энергия называется в термодинамике просто внутренней энергией системы. В дальнейшем мы будем опускать знак усреднения, т. е. вместо  $\bar{\mathcal{E}}$  писать просто  $\mathcal{E}$ .

При дифференцировании формулы (5) получим

$$\frac{\partial F}{\partial T} = - \ln \Sigma - T \frac{\partial \ln \Sigma}{\partial T},$$

откуда

$$T \frac{\partial F}{\partial T} = F - T^2 \frac{\partial \ln \Sigma}{\partial T} = F - \mathcal{E}. \quad (9)$$

Результаты совпадают с известными формулами термодинамики и позволяют ввести энтропию  $S$ , определив ее как

$$S = - \frac{\partial F}{\partial T} = \ln \Sigma + T \frac{\partial \ln \Sigma}{\partial T}, \quad (10)$$

после чего из формулы (9) следует

$$F = \mathcal{E} - TS.$$

Эти формулы позволяют, если известен энергетический спектр, вычислить статистическую сумму, а из нее — энергию и свободную энергию системы. После этого все остальные термодинамические функции могут быть найдены по известным формулам термодинамики.

## Данные для расчета равновесий ионизации \*

## Легкие элементы

Z	Элемент	Нейтральный атом			Однозарядный ион		
		основное состояние	энергия ионизации	возбужденные состояния	основное состояние	энергия ионизации	возбужденные состояния
1	H . . . . .	<sup>2</sup> S	13,595	<sup>2</sup> S10,15; <sup>2</sup> P10,15	—	—	—
2	He . . . . .	<sup>1</sup> S	24,580	<sup>3</sup> S19,14; <sup>1</sup> S20,5 <sup>3</sup> P20,96; <sup>2</sup> P21,13	<sup>2</sup> S	54,403	<sup>2</sup> S40,9; <sup>2</sup> P40,9
3	Li . . . . .	<sup>2</sup> S	5,390	<sup>2</sup> P1,84	<sup>1</sup> S	75,619	<sup>3</sup> S58,8
4	Be . . . . .	<sup>1</sup> S	9,320	<sup>3</sup> P2,71; <sup>1</sup> P5,25	<sup>2</sup> S	18,206	<sup>2</sup> P4,0
5	B . . . . .	<sup>2</sup> P	8,296	<sup>4</sup> P3,57; <sup>2</sup> S4,94	<sup>1</sup> S	25,149	<sup>2</sup> P9,2
6	C . . . . .	<sup>3</sup> P	11,264	<sup>1</sup> D1,3; <sup>1</sup> S2,7; <sup>5</sup> S4,16	<sup>2</sup> P	24,376	<sup>4</sup> P5,2; <sup>2</sup> D9,2; <sup>2</sup> S11,95
7	N . . . . .	<sup>4</sup> S	14,54	<sup>2</sup> D2,2; <sup>2</sup> P3,6	<sup>3</sup> P	29,605	<sup>1</sup> D1,89; <sup>1</sup> S4,03
8	O . . . . .	<sup>3</sup> P	13,614	<sup>1</sup> D2,0; <sup>1</sup> S4,2	<sup>4</sup> S	35,146	<sup>2</sup> D3,3; <sup>2</sup> P4,9
9	F . . . . .	<sup>2</sup> P	17,418	<sup>4</sup> P12,69; <sup>2</sup> P12,98	<sup>3</sup> P	34,98	<sup>3</sup> P20,3; <sup>5</sup> S21,6; <sup>3</sup> S22,5
10	Ne . . . . .	<sup>1</sup> S	21,559	<sup>3</sup> P16,62; <sup>1</sup> P16,84	<sup>2</sup> P	41,07	<sup>2</sup> S26,8; <sup>4</sup> P27,0; <sup>2</sup> P27,6
11	Na . . . . .	<sup>2</sup> S	5,138	<sup>2</sup> P2,10	<sup>1</sup> S	47,29	<sup>3</sup> P32,5; <sup>1</sup> P32,5
12	Mg . . . . .	<sup>1</sup> S	7,644	<sup>3</sup> P2,71; <sup>1</sup> P4,33	<sup>2</sup> S	15,03	<sup>2</sup> P4,4; <sup>2</sup> S8,3; <sup>2</sup> D8,3
13	Al . . . . .	<sup>2</sup> P	5,984	<sup>2</sup> S3,13; <sup>4</sup> P3,5; <sup>2</sup> D4,0; <sup>2</sup> P4,0	<sup>1</sup> S	18,823	<sup>3</sup> P4,7
14	Si . . . . .	<sup>3</sup> P	8,149	<sup>1</sup> D0,80; <sup>1</sup> S1,92; <sup>3</sup> P4,93	<sup>2</sup> P	16,34	<sup>2</sup> D6,84; <sup>2</sup> S8,09

\* Все энергии даны в электронвольтах (эв). Цифры при символах возбужденных состояний означают энергии возбуждения.

## Щелочные металлы

Z	Элемент	Нейтральный атом			Однозарядный ион		
		основное состояние	энергия ионизации	возбужденное состояние	основное состояние	энергия ионизации	возбужденные состояния
3	Li . . . . .	<sup>2</sup> S	5,390	<sup>2</sup> P <sub>1,84</sub>	<sup>1</sup> S	75,619	<sup>3</sup> S 58,8
11	Na . . . . .	<sup>2</sup> S	5,138	<sup>2</sup> P <sub>2,10</sub>	<sup>1</sup> S	47,29	<sup>3</sup> P <sub>32,5</sub> ; <sup>1</sup> P <sub>32,5</sub>
19	K . . . . .	<sup>2</sup> S	4,339	<sup>2</sup> P <sub>1,61</sub>	<sup>1</sup> S	31,81	<sup>3</sup> P <sub>20,2</sub> ; <sup>1</sup> P <sub>20,2</sub>
37	Rb . . . . .	<sup>2</sup> S	4,176	<sup>2</sup> P <sub>1,56</sub>	<sup>1</sup> S	27,5	<sup>3</sup> P <sub>17*</sub> ; <sup>1</sup> P <sub>18*</sub>
55	Cs . . . . .	<sup>2</sup> S	3,893	<sup>2</sup> P <sub>1,38</sub>	<sup>1</sup> S	25,1	<sup>3</sup> P <sub>14*</sub> ; <sup>1</sup> P <sub>16*</sub>

\* Для ионов рубидия и цезия мультиплетное расщепление возбужденных уровней столь велико, что схема Рессела—Саундерса по существу неприменима. Но при термодинамических расчетах мы пользуемся этой схемой как условной, давая средние значения энергии возбуждения для девяти уровней, которые можно объединить в уровень <sup>3</sup>P, и для трех уровней, которые можно объединить в уровень <sup>1</sup>P. Ввиду высоких значений энергии возбуждения эти уровни все равно реального значения не имеют.

### Возбужденные уровни нейтральных атомов щелочных металлов

Z	Элемент	Возбужденные состояния*					
3	Li . . . . .	<sup>2</sup> P <sub>1,84</sub> ;	<sup>2</sup> S <sub>3,36</sub> ;	<sup>2</sup> P <sub>3,74</sub> ;	<sup>2</sup> D <sub>3,85</sub> ;	<sup>2</sup> S <sub>4,31</sub>	
11	Na . . . . .	<sup>2</sup> P <sub>2,10</sub> ;	<sup>2</sup> S <sub>3,17</sub> ;	<sup>2</sup> D <sub>3,60</sub> ;	<sup>2</sup> P <sub>3,74</sub> ;	<sup>2</sup> S <sub>4,10</sub>	
19	K . . . . .	<sup>2</sup> P <sub>1,61</sub> ;	<sup>2</sup> S <sub>2,60</sub> ;	<sup>2</sup> D <sub>2,65</sub> ;	<sup>2</sup> P <sub>3,07</sub>		
37	Rb . . . . .	<sup>2</sup> P <sub>1,56</sub> ;	<sup>2</sup> D <sub>2,38</sub> ;	<sup>2</sup> S <sub>2,48</sub> ;	<sup>2</sup> P <sub>2,94</sub>		
55	Cs . . . . .	<sup>2</sup> P <sub>1,38</sub> ;	<sup>2</sup> D <sub>1,80</sub> ;	<sup>2</sup> S <sub>2,28</sub> ;	<sup>2</sup> P <sub>2,70</sub>		

\* Более высоким значениям энергии возбуждения отвечает большее число густо расположенных уровней, сходящихся к пределу ионизации.

### Многочарядные ионы

Ион	Энергия ионизации	Основное состояние	Возбужденные состояния
-----	-------------------	--------------------	------------------------

#### Углерод

СIII . . . . .	47,65	<sup>1</sup> S	<sup>3</sup> P <sub>6,45</sub> ; <sup>1</sup> P <sub>12,65</sub> ; <sup>3</sup> P <sub>16,95</sub> ; <sup>1</sup> D <sub>1,80</sub> ; <sup>1</sup> S <sub>22,5</sub>
СIV . . . . .	64,22	<sup>2</sup> S	<sup>2</sup> P <sub>7,97</sub> ; <sup>2</sup> S <sub>37,4</sub> ; <sup>2</sup> P <sub>39,4</sub> ; <sup>2</sup> D <sub>40,0</sub>
СV . . . . .	389,9	<sup>1</sup> S	<sup>1</sup> P <sub>307</sub>

Ион	Энер- гия иони- зации	Основ- ное состоя- ние	Возбужденные состояния
-----	--------------------------------	---------------------------------	------------------------

## К и с л о р о д

OIII . . . .	54,87	<sup>3</sup> P	<sup>1</sup> D <sub>2,81</sub> ; <sup>1</sup> S <sub>5,33</sub> ; <sup>3</sup> D <sub>14,8</sub> ; <sup>3</sup> P <sub>17,6</sub>
OIV . . . .	77,5	<sup>2</sup> P	<sup>2</sup> D <sub>15,7</sub> ; <sup>2</sup> S <sub>20,3</sub> ; <sup>2</sup> P <sub>22,2</sub>
OV . . . .	113	<sup>1</sup> S	<sup>1</sup> P <sub>19,6</sub> ; <sup>1</sup> D <sub>28,6</sub> ; <sup>1</sup> S <sub>35,5</sub> ; <sup>1</sup> P <sub>71,8</sub>
OVI . . . .	137,48	<sup>2</sup> S	<sup>2</sup> P <sub>11,8</sub> ; <sup>2</sup> S <sub>79</sub> ; <sup>2</sup> P <sub>82</sub> ; <sup>2</sup> D <sub>83</sub>

## К р е м н и й

SiIII . . . .	33,35	<sup>1</sup> S	<sup>3</sup> P <sub>6,5</sub> ; <sup>1</sup> P <sub>10,2</sub> ; <sup>3</sup> P <sub>16,0</sub> ; <sup>3</sup> D <sub>17,7</sub>
SiIV . . . .	44,93	<sup>2</sup> S	<sup>2</sup> P <sub>8,8</sub> ; <sup>2</sup> D <sub>19,5</sub> ; <sup>2</sup> S <sub>24,0</sub> ; <sup>2</sup> P <sub>27,0</sub>
SiV . . . .	167,4	<sup>1</sup> S	<sup>3</sup> P <sub>104</sub> ; <sup>1</sup> P <sub>105</sub>

## П Р И Л О Ж Е Н И Е 6

## Интегралы от распределения Максвелла

Все интересующие нас здесь интегралы могут быть получены из основного интеграла

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Для его вычисления проще всего воспользоваться следующим приемом. Запишем тождественный интеграл через переменную  $y$  и перемножим их:

$$J^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy.$$

Теперь будем рассматривать  $x$  и  $y$  как полярные координаты на плоскости и произведем замену переменных:

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

$$dx dy = r dr d\varphi.$$

После перехода от переменных  $x$  и  $y$  к переменным  $r$  и  $\varphi$  получим

$$J^2 = \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \pi.$$

Отсюда исходный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Сделаем подстановку

$$x^2 = \alpha z^2; \quad dx = \sqrt{\alpha} dz.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Дифференцированием по параметру  $\alpha$  получаются формулы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\alpha z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^{-3/2};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^4 e^{-\alpha z^2} dz = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \alpha^{-5/2};$$

⋮  
⋮

Для нечетных степеней  $z$  интегралы в этих пределах равны нулю. В пределах от 0 до  $\infty$  интегралы с четными степенями вдвое меньше приведенных значений:

$$\int_0^{\infty} z^2 e^{-\alpha z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \alpha^{-3/2};$$

$$\int_0^{\infty} z^4 e^{-\alpha z^2} dz = \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \alpha^{-5/2}.$$

Интегралы с нечетными степенями  $z$  в пределах от 0 до  $\infty$  берутся подстановкой  $\alpha z^2 = u$  и интегрированием по частям.

$$\int_0^{\infty} z e^{-\alpha z^2} dz = \frac{1}{2\alpha} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{1}{2\alpha};$$

$$\int_0^{\infty} z^3 e^{-\alpha z^2} dz = \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^{\infty} u e^{-u} du = \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{1}{2\alpha^2}.$$

Для распределения Максвелла  $z = v$ ;  $\alpha = M/(2T)$ , где  $T$  — температура в энергетических единицах. Для этого случая приведенные

выше формулы имеют вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Mv^2}{2T}} dv = \sqrt{\frac{2\pi T}{M}};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Mv^2}{2T}} dv = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Mv^2}{2T}} dv \right)^3 = \left( \frac{2\pi T}{M} \right)^{3/2};$$

$$\int_0^{\infty} v e^{-\frac{Mv^2}{2T}} dv = \frac{T}{M};$$

$$\int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2T}} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left( \frac{M}{2T} \right)^{-3/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{T}{M} \right)^{3/2}.$$

Отсюда получаются следующие результаты. Нормированная функция распределения Максвелла по полным скоростям

$$f = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( \frac{M}{T} \right)^{3/2} e^{-\frac{Mv^2}{2T}}.$$

Нормированная функция распределения скоростей в одном направлении

$$f = \sqrt{\frac{M}{2\pi T}} e^{-\frac{Mv^2}{2T}}.$$

Среднее абсолютное значение скорости в одном направлении

$$\langle |\overline{v_x}| \rangle = \sqrt{\frac{M}{2\pi T}} \int_0^{\infty} v e^{-\frac{Mv^2}{2T}} dv = \sqrt{\frac{T}{2\pi M}}$$

Средний квадрат скорости в одном направлении

$$\langle v_x^2 \rangle = \sqrt{\frac{M}{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2T}} dv = \frac{T}{2M}.$$

Средний квадрат полной скорости

$$\langle v^2 \rangle = \left( \frac{M}{2\pi T} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) e^{-\frac{M(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2T}} \times$$

$$\times dv_x dv_y dv_z = 3 \left( \frac{M}{2\pi T} \right)^{3/2} \cdot 2 \int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2T}} dv \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Mv^2}{2T}} dv \right]^2 =$$

$$= 3 \sqrt{\frac{M}{2\pi T}} \cdot 2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{T}{M} \right)^{3/2} = 3 \frac{T}{M}.$$

Угловые скобки означают усреднение по распределению скоростей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А л ь ф в е н Х. Космическая электродинамика. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
2. А р ц и м о в и ч Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1961.
3. Б и ш о п А. С. Проект Шервуд. Программа США по управляемому термоядерному синтезу. Перев. с англ. М., Атомиздат, 1960.
4. Б р а у н С. Элементарные процессы в плазме газового разряда. Перев. с англ. М., Госатомиздат, 1961.
5. Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 1—4. М., Атомиздат, 1963—1964.
6. Г и н з б у р г В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., Физматгиз, 1960.
7. G l a s s t o n e S. and L o v e b e r g R. H. Controlled Thermonuclear Reactions. Van Nostrand, Princeton, 1960.
8. Д а н ж и Дж. Космическая электродинамика. Перев. с англ. М., Госатомиздат, 1961.
9. Движущаяся плазма. Сборник переводов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
10. Ионные, плазменные и дуговые ракетные двигатели. Сборник статей. Перев. с англ. М., Госатомиздат, 1961.
11. К а у л и н г Т. Магнитная гидродинамика. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
12. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
13. П и к е л ь н е р С. Б. Основы космической электродинамики. М., Физматгиз, 1961.
14. Плазма в магнитном поле и прямое преобразование тепловой энергии в электрическую. Сборник статей. Перев. с англ. М., Госатомиздат, 1962.
15. Получение и исследование высокотемпературной плазмы. Сборник статей. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
16. Р о у з Д., К л а р к М. Физика плазмы и управляемые термоядерные реакции. Перев. с англ. М., Госатомиздат, 1963.
17. Р у с а н о в В. Д. Современные методы исследования плазмы. М., Госатомиздат, 1962.
18. С и л и н В. П., Р у х а д з е А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Госатомиздат, 1961.

19. Simon A. L. An Introduction to Thermonuclear Research. Pergamon Press, 1960.
20. С п и т ц е р Л. Физика полностью ионизованного газа. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
21. Thompson W. B. An Introduction to Plasma Physics. Oxford, Pergamon Press, 1962.
22. Ferraro V. and Plumpton C. An Introduction to Magnetofluid Mechanics. Oxford University Press, 1961.
23. Физика плазмы и магнитная гидродинамика. Сборник статей. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
24. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Под редакцией М. А. Леонтовича. Т. I—IV. М., Изд-во АН СССР, 1958.
25. Ф р а н к - К а м е н е ц к и й Д. А. Плазма — четвертое состояние вещества. Изд. 3, исправленное. М., Госатомиздат, 1968.
26. Chandrasekhar S. Plasma Physics. Chicago University Press, 1958.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Анизотропия процессов переноса 202  
Атмосферика свистящие 123  
Власова уравнение 211  
Волна альфвеновская 119  
— — косая 148  
— — линейно поляризованная 121  
— — магнитно-звуковая 123  
— — — замедленная 165, 178  
— — — косая 148  
— — — прямая 131  
— — — ускоренная 165, 178  
— — — цилиндрическая 136  
— — необыкновенная 121, 128  
— — обыкновенная 121, 128  
— — плазменная 165, 170  
— — прямая 131  
— — с круговой поляризацией 122  
— — электромагнитная 114  
Вязкость 39  
Гидродинамика магнитная 15  
Давление магнитное 17  
Декремент затухания 218  
Диамагнетизм плазмы 96  
Диамагнитная восприимчивость плазмы внутренняя 101  
Дисперсия 110  
— пространственная 176, 232  
— — сильная 232  
— — слабая 232  
Диффузии коэффициент 38, 197  
Диффузия амбиполярная 202, 204  
Диффузия аномальная 198  
— бомовская 198  
Диэлектрическая проницаемость поперечная 94, 119  
— — продольная 117  
Длина Дебая 14  
— скиновая 26  
Допплера эффект 231  
— — квадратичный 245  
Дрейф 19  
— гравитационный 80  
— градиентный 80, 87  
— инерционный 93  
— поляризационный 80, 92  
— центробежный 80, 90  
— электрический 19, 80, 85  
Закон действующих масс 59  
— Кирхгофа 245  
— Ома 16  
— — обобщенный 164  
Затухание Ландау 219, 231  
— черенковское 231  
Звук магнитный 123  
Излучение синхротронное 244  
Инвариант адиабатический 42  
Интеграл столкновений 255  
— — в форме Ландау 261  
Ионизации степень 74  
Квазинейтральность плазмы 8  
Колебания ленгмюровские (плазменные) 9, 114  
— магнитно-звуковые 128  
Коэффициент диффузии 38, 197  
— теплопроводности 200  
Ландау правило обхода 217, 220  
Лиувилля теорема 206  
Логарифм кулоновский 34, 259  
Лоренцева ионизация 74

- Микрополя флуктуирующие 72  
 Модель проводящей жидкости 15  
 Момент магнитный циклотронной орбиты 42, 95  
 Моменты функции распределения 189  
 Намагничивание плазмы 96  
 Намагничивания ток 94, 97  
 Нуль энергии индивидуальный 64  
 — — общий 64  
 Парамагнетизм плазмы 102  
 Параметр прицельный 33, 256  
 Перезарядка 35  
 — резонансная 36  
 Плазма замагниченная 43, 103  
 — зарядово-симметричная 66  
 — идеальная 56, 61, 109  
 — изотермическая 53  
 — однородная 94  
 — термическая 187  
 Плазма холодная 103, 109  
 Поле самосогласованное 13, 40, 210  
 Поляризация плазмы 12  
 Представление Лагранжа 16  
 — Эйлера 16  
 Приближение гидродинамическое 163  
 — дискретного взаимодействия 192  
 — диффузионное 192, 199  
 — дрейфовое 20, 79, 81, 248  
 — идеальной проводимости 18, 82  
 — квазигидродинамическое 98  
 — линейное 113  
 — непрерывного взаимодействия 192  
 — релаксационное 259  
 — холодной плазмы 113  
 Принцип детального равновесия 58  
 Проводимость идеальная 18, 82  
 — нормальная 31  
 Пространство импульсов 188  
 — конфигурационное 188  
 — фазовое системы 208  
 — фазовое частицы 187  
 — каноническое 188  
 Пуассона скобка 209  
 Равновесие тепловое или термическое 52  
 Равновесие термодинамическое полное 53  
 — — частичное 53  
 Равновесия константа 59  
 Радиус ларморовский 41  
 Распределение изотропное 191  
 Расстояние ближнего взаимодействия 34  
 Резонанс магнитно-звуковой 158  
 — поглощения 153  
 — раскачки 154  
 — фазовый 230  
 — циклотронный 230  
 Релаксации время 35, 254  
 — процессы 197  
 Ряд асимптотический 70  
 Скин-слой 26  
 Скорость альфвеновская 94, 119  
 — групповая 110, 111  
 — диффузионная 38  
 — дрейфовая 19, 80  
 — ионного звука 168  
 — фазовая 110  
 Соотношения Онсагера 202  
 — Эйнштейна 203  
 Среда гиротропная  
 Статистический вес 62  
 — полный атома 68  
 Схема Рассела — Саундерса 68  
 Тензор 31, 136  
 Тензор комплексной проводимости 138, 223  
 — — электрической проницаемости 139, 223  
 — обратный 137  
 — проводимости 31  
 — сопротивления 31  
 — частичного электрического сопротивления 141, 175  
 — частичной проводимости 141, 223  
 Уравнение Власова 205, 211  
 — дисперсионное 110  
 — кинетическое 205  
 — Лиувилля 209  
 — Фоккера — Планка 192  
 Условия адиабатичности 42  
 — замагниченности 81

Формула закона действующих масс 59  
— Инглиса — Теллера 73  
— Резерфорда 256  
— Саха́ 61  
— Эльверта 60  
Функция распределения скоростей 185  
— — *N*-частичная 209  
Частота аномальной дисперсии 121  
— гибридная 125  
— — электронно-ионная 127  
— граничная волновода 154  
— плазменная 9  
— — ионная 12  
— циклотронная или лармовская 41  
— электронная циклотронная 31

Число Альфвена 50  
— Гартмана 48  
— гиротропное 147  
— Рейнольдса 51  
— Рейнольдса магнитное 50  
— частиц погонное 45  
— электронов погонное  
— — эффективное погонное 159  
Эффект Вавилова — Черенкова 220  
— конечного циклотронного радиуса 232  
— Фарадея 122  
— Холла 32  
Явление диффузионной теплопроводности 202  
— термодиффузии 202

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
Обозначения . . . . .	5

### Глава I. Основные понятия

1. Квазинейтральность и разделение зарядов . . . . .	8
2. Электростатическое экранирование . . . . .	13
3. Плазма как сплошная среда . . . . .	15
4. Идеальная проводимость и дрейфовое движение . . . . .	18
5. Вмороженное поле . . . . .	20
6. Диффузия магнитного поля . . . . .	24
7. Модель двух жидкостей . . . . .	27
8. Проводимость плазмы . . . . .	30
9. Кулоновские столкновения . . . . .	32
10. Столкновения с нейтральными частицами и перезарядка . . . . .	35
11. Гидродинамическое представление диффузионных процессов . . . . .	36
12. Вязкое течение . . . . .	39
13. Плазма как система независимых частиц . . . . .	40
Задачи к гл. I . . . . .	44

### Глава II. Термодинамика плазмы

1. Температура плазмы . . . . .	52
2. Тепловая и кулоновская энергия плазмы . . . . .	53
3. Кулоновские поправки к свободной энергии и давлению плазмы . . . . .	56
4. Равновесие ионизации . . . . .	58
5. Вывод формулы Саха из квазиклассической статистики . . . . .	61
6. Вывод формулы Саха из химической термодинамики . . . . .	63
7. Многоступенчатая ионизация . . . . .	66
8. Статистический вес и внутренние степени свободы . . . . .	67
9. Расходимость и обрезание полного статистического веса . . . . .	69
Задачи к гл. II . . . . .	74

### Глава III. Траектории частиц в плазме

1. Дрейфовое движение . . . . .	79
2. Наглядное объяснение дрейфового движения . . . . .	82
3. Количественное рассмотрение дрейфового движения . . . . .	83

4. Электрический дрейф . . . . .	85
5. Дрейф в неоднородном магнитном поле . . . . .	87
6. Поляризационный дрейф . . . . .	92
7. Ток намагничивания . . . . .	94
8. Квазигидродинамическое приближение . . . . .	98
9. Плазма как диамагнитная среда . . . . .	101
Задачи к гл. III . . . . .	105

#### Глава IV. Колебания и волны в холодной плазме

1. Основные понятия и определения . . . . .	109
2. Волны в плазме без магнитного поля . . . . .	114
3. Простейшие случаи распространения волн при наличии магнитного поля . . . . .	115
4. Магнитогидродинамические волны . . . . .	117
5. Дисперсия вблизи циклотронных частот . . . . .	120
6. Магнитный звук . . . . .	123
7. Гибридные частоты . . . . .	125
8. Дисперсия магнитного звука . . . . .	127
9. Структура прямых волн в плотной плазме . . . . .	131
10. Косые волны и тензорные характеристики плазмы . . . . .	136
11. Волны в плазме с конечной проводимостью . . . . .	148
12. Резонансы поглощения . . . . .	153
13. Плазменные волноводы . . . . .	154
14. Магнитно-звуковой резонанс . . . . .	158
Задачи к гл. IV . . . . .	160

#### Глава V. Колебания и волны в горячей плазме в гидродинамическом приближении

1. Уравнения гидродинамического приближения . . . . .	163
2. Скорость звука . . . . .	165
3. Плазменные волны и ионный звук . . . . .	168
4. Тензорные характеристики горячей плазмы и пространственная дисперсия . . . . .	172
5. Ускоренные и замедленные магнитно-звуковые волны . . . . .	176
6. Дисперсия магнитного звука в горячей плазме . . . . .	180
Задачи к гл. V. . . . .	181

#### Глава VI. Физическая кинетика плазмы

1. Функция распределения . . . . .	185
2. Фазовое пространство . . . . .	187
3. Моменты функции распределения . . . . .	189
4. Уравнение Фоккера—Планка . . . . .	192
5. Феноменологическое описание процессов переноса . . . . .	197
6. Кинетическое уравнение без столкновений . . . . .	205
7. Самосогласованное поле . . . . .	210
8. Кинетическая теория плазменных волн . . . . .	211
9. Волны в магнитном поле и тензорные характеристики плазмы . . . . .	222
10. Решение кинетического уравнения с помощью интегрирования по углу . . . . .	224
11. Специфическое затухание и раскачка колебаний . . . . .	230
12. Слабая и сильная пространственная дисперсия . . . . .	232

13. Волны на анизотропном фоне . . . . .	235
14. Тензорные характеристики термической плазмы . . . . .	235
15. Предельные случаи . . . . .	241
16. Релятивистские эффекты и синхротронное излучение	244
17. Интегрирование по траекториям . . . . .	246
18. Применение метода траекторий к линеаризованному кинетическому уравнению . . . . .	248
Флуктуационное взаимодействие и кулоновские столкновения . . . . .	252
Задачи к гл. VI . . . . .	263
Приложение 1. Гауссова система единиц . . . . .	267
Приложение 2. Сведения из векторного анализа . . . . .	268
Приложение 3. Свойства функции Бесселя . . . . .	269
Приложение 4. Основные формулы статистической термодинамики . . . . .	272
Приложение 5. Данные для расчета равновесий ионизации	274
Приложение 6. Интегралы от распределения Максвелла . . . . .	276
Литература . . . . .	279
Предметный указатель . . . . .	281

Давид Альбертович Франк-Каменецкий  
**ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ**

Редактор *В. Е. Санков*

Художественный редактор *А. С. Александров*

Технический редактор *В. И. Фирсова*

Корректор *М. И. Дунаевская*

Сдано в набор 27/XII 1967 г.

Подписано в печать 15/IV 1968 г. Т—12819

Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub> Бумага типографская №

Усл. печ. л. 15,12 Уч. изд. л. 12,99

Тираж 21 500 экз. Заказ изд. 2052. Цена 53 коп.

Заказ тип. 1881.

Атомиздат, К-31, ул. Жданова, 5/7.

Московская типография № 4  
Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете  
Министров СССР  
Б. Переяславская, 46.

## **ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ**

**В III кв. 1968 года выходит из печати  
книга:**

**Смирнов Б. М. Атомные столкновения  
и элементарные процессы в плазме.  
32 л., 5000 экз., 2 р. 20 к.**

В книге рассматриваются столкновения атомных частиц и процессы, происходящие в низкотемпературной плазме. Такая плазма реализуется в газовом разряде, газовом лазере, МГД-генераторе, термоэлектронном преобразователе и других системах. Кроме того, рассмотренные процессы имеют отношение к физике верхних слоев атмосферы и астрофизике.

Монография представляет собой основную сводку теоретических материалов и фундаментальных экспериментов, касающихся элементарных процессов в ионизованных газах.

Книга рассчитана на научных работников, специализирующихся в области физики плазмы и атомных столкновений, а также на студентов старших курсов физических факультетов.

Темплан 1968 года

***Заказы на книги направляйте в книжный магазин № 8 по адресу:  
Москва, Центр, Петровка, 15.***

**АТОМИЗДАТ**