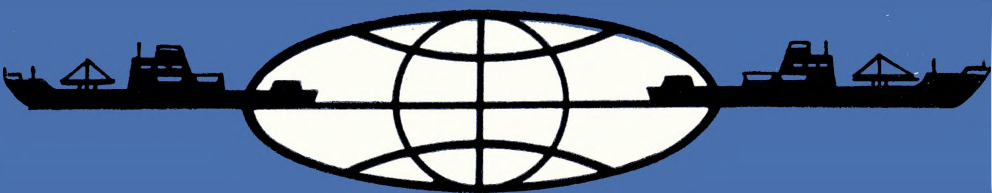


ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
«Р У М Б»



НАБЛЮДАЕМОСТЬ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

ОТРАСЛЕВАЯ СИСТЕМА НТИ



ОБЗОРНО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ
ИНФОРМАЦИЯ

1980

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
«Р У М Б»

НАБЛЮДАЕМОСТЬ
И УПРАВЛЯЕМОСТЬ
ГИРОСКОПИЧЕСКИХ
УСТРОЙСТВ

1980

В обзоре излагаются основы теории наблюдаемости и управляемости типовых гироскопических устройств: гировертикалей, гиросtabilизаторов, гироскопических компасов, гироскопических интеграторов и т. д. Применение методов теории управления в пространстве состояний требует анализа этих свойств для построения закона управления. В литературе по прикладной теории гироскопов этому вопросу уделяется недостаточное внимание, имеются лишь отдельные публикации; настоящий обзор представляет собой попытку систематического построения теории наблюдаемости и управляемости гироскопических устройств. Здесь приводятся условия наблюдаемости (управляемости), на основании которых может быть выбрана структура устройства измерения (управления) в конкретном приборе.

Обзор адресован инженерам и научным работникам, занимающимся проектированием гироскопических приборов, их исследованием и оптимизацией.

Ключевые слова: устройство гироскопическое, наблюдаемость, управляемость, декомпозиция, метод структурный, пространство состояний.

Автор А. В. КОСТРОВ

ВВЕДЕНИЕ

Современный этап развития гироскопического приборостроения характеризуют возросшие требования к точности гироскопических устройств (ГУ) как автономных систем, поскольку их погрешности в значительной мере определяют точность навигации, стабилизации объектов и других задач.

В первом приближении погрешности ГУ можно разделить на два класса: из-за погрешностей чувствительных элементов и динамические. Первые обусловлены в основном конструктивно-технологическими факторами; современные прецизионные ГУ имеют на неподвижном основании эти погрешности порядка единиц секунд дуги или уходы порядка 10^{-6} — 10^{-8} с⁻¹ (0,1—0,001 град/ч). Динамические погрешности являются следствием действия на ГУ возмущений, изменяющихся во времени, и переходных процессов. На подвижном объекте динамические погрешности и уходы ГУ существенно превышают погрешности чувствительных элементов.

Прецизионные ГУ являются, как правило, сложными динамическими системами из гироблоков, акселерометров, подвесов, усилительно-преобразовательных устройств и т. д., в которых реализуются те или иные законы автоматического управления или коррекции. На ГУ действует возмущение, обусловленное помехой в корректирующем сигнале; например, при коррекции ГУ от акселерометра сигнал содержит помеху из-за качки основания. Поскольку требуется весьма высокая точность коррекции, коэффициенты усиления регуляторов принимаются такими, что обеспечивают статическую ошибку на уровне единиц угловых секунд, вследствие чего основными становятся динамические ошибки, главным образом — от помех на входе системы коррекции.

Таким образом, снижение динамических погрешностей является перспективным направлением повышения точности ГУ.

Уменьшить динамические погрешности можно системой коррекции. Наивысшую точность обеспечит оптимальная в данных условиях система коррекции, в связи с этим применение методов

оптимизации для синтеза ГУ в последние годы все более расширяется. Для математического описания ГУ применяют линейризованные уравнения движения, на основании которых могут корректно решаться и задачи построения систем коррекции с использованием линейных методов теории управления. В прикладной гироскопии эффективность методов теории оптимальных систем не вполне изучена из-за высокой размерности математических моделей большинства ГУ, наличия нескольких точек приложения возмущений и управлений, разветвленных внутренних связей и, не в последнюю очередь, чрезвычайно высоких требований к точности.

Наименее исследовано применение методов пространства состояний, вместе с тем уже полученные результаты позволяют судить о высокой эффективности этих методов для синтеза ГУ.

Обзор посвящен систематическому изложению вопросов наблюдаемости и управляемости ГУ; без их решения применять методы пространства состояний, как правило, невозможно. В литературе имеются лишь разрозненные прикладные примеры и нет сколько-нибудь общего рассмотрения этой проблемы.

В главе 1 приводятся основные определения. В главе 2 уравнения движения ГУ приведены к нормальной форме и построены их математические модели в пространстве состояний. В главе 3 рассматривается построение математических моделей воздействий на ГУ в пространстве состояний и вводится классификация моделей, на основании которой в главе 4 получены общие результаты по наблюдаемости ГУ. Основные прикладные результаты содержатся в главе 5.

Следует еще раз подчеркнуть, что линейризованные уравнения движения адекватны синтезу систем коррекции благодаря обратной связи и высокой точности ГУ, в чем состоит одно из важных отличий этих задач от оптимизации навигационных систем; на этом основании в обзоре не обсуждаются полные уравнения движения и методы их получения.

При написании обзора в качестве основных источников использованы: по прикладной теории гироскопов — двухтомная монография С. С. Ривкина [45, 50], а также работы [11, 12, 48, 57], по теории случайных процессов — книга А. А. Свешникова [58], по теории автоматического регулирования — книги В. А. Бесекерского [5, 6]; примеры задач исследования гироскопических систем методами пространства состояний приводятся в [54, 63]. Основные понятия и определения, используемые в обзоре, взяты из работы [22].

Автор надеется, что введенная классификация задач, полученные общие результаты, а также конкретные примеры сделают более доступными методы исследования ГУ на основе моделей в пространстве состояний и будут способствовать внедрению этих эффективных методов в проектирование гироскопических приборов, систем и комплексов.

Автор выражает благодарность рецензентам С. С. Ривкину и Л.П. Несенюку за ценные замечания, учет которых способствовал улучшению содержания обзора.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Пространство состояний

Уменьшение погрешностей гироскопических устройств (ГУ) является основной целью прикладной теории гироскопов, поэтому при составлении уравнений движения в качестве обобщенных координат принимаются углы отклонения ГУ от моделируемой им системы координат. Уравнения ГУ обычно являются уравнениями ошибок. Поворот и качка объекта обуславливают возмущающие моменты, а также появление параметрических воздействий на ГУ, поэтому движение ГУ описывается нелинейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.

Погрешности ГУ весьма малы, и для их исследования эффективно применяют приближенные методы (малого параметра, асимптотические и т. д.) [19, 48]. Уравнения первого приближения или линеаризованные уравнения включают линейные члены, уравнения второго приближения [39] — члены второго порядка малости (произведения и квадраты обобщенных координат и обобщенных скоростей) и т. д. Можно пользоваться методом последовательных приближений с учетом того, что в ГУ обычно выделяют быстрые и медленные составляющие движения.

Уравнения первого приближения позволяют с высокой точностью исследовать вынужденные колебания ГУ и дисперсию случайных колебаний [59]; вопрос о сходимости метода последовательных приближений рассмотрен в [39, 43, 44]. Уравнения второго приближения выявляют систематические уходы ГУ. Для корректируемых ГУ возникают задачи анализа устойчивости, динамической точности, а также качества процессов управления; для их решения линеаризованные уравнения являются адекватной математической моделью.

Линеаризованные уравнения ГУ исследуются инженерными методами теории автоматического регулирования с использованием передаточных функций и частотных характеристик [5, 29]; такой подход, фундаментально изложенный в работах [49, 50], представляет ГУ в виде одномерной динамической системы с одной входной величиной (входом) и одной выходной (выходом). Для этого уравнения преобразуются методом структурных схем. Получаемые передаточные функции ГУ являются дробно-рациональными функциями комплексной переменной, причем степень передаточной функции, характеризующая порядок уравнения, бывает достаточно большой, что затрудняет исследование. Для

упрощения уравнения разделяют нутационное и прецессионное движения [43] и отдельно решают задачи обеспечения устойчивости нутационных колебаний («быстрая» составляющая) и необходимого качества прецессионного движения в процессе коррекции («медленная» составляющая). Модель ГУ разбивается на подсистемы или блоки.

В ряде задач приходится учитывать, что гироскопические приборы и системы многомерны: они характеризуются несколькими переменными, т. е. имеют несколько связанных между собой входов и выходов. Одновременно рассматривать все входы и выходы можно, применив для математического описания ГУ многомерные модели. В качестве таких моделей используют иногда векторно-матричные уравнения в комплексной области и соответствующие передаточные матрицы [71]; их элементы представляют собой передаточные функции системы от соответствующего входа к рассматриваемому выходу. Эта форма модели достаточно компактна.

С ростом числа степеней свободы и определяющих координат [43] усложняется нахождение передаточных матриц и в значительной мере теряется наглядность, например при получении передаточной матрицы гироскопической следящей системы [51]. При случайных внешних воздействиях возникают затруднения из-за необходимости факторизации матриц, и иногда бывает невозможно получить окончательный результат, в том числе и на ЦВМ.

При использовании многих методов фильтрации и управления ГУ исследуют с применением понятий «состояние системы» и «пространство состояний» [3, 14, 17, 20, 54].

Состояние системы — понятие фундаментальное; оно включает некоторую минимальную совокупность параметров, которая отражает предысторию системы и содержит информацию, необходимую для предсказания поведения системы.

Для объектов, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, какими являются ГУ в первом приближении, векторно-матричные уравнения состояния имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Gw; \\ y &= Hx + Cw, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где A , G , C , H — матрицы; x — вектор состояния; w — вектор входных сигналов; y — вектор выходных сигналов.

В состав вектора x входят переменные, удовлетворяющие следующим условиям [71]: выходной сигнал (наблюдение y) определяется входным сигналом w и состоянием системы; состояние в последующий момент времени однозначно определяется входным сигналом w и состоянием в данный момент времени.

Второе уравнение в (1) называют также уравнением наблюдения, соответствующая структурная схема представлена на рис. 1 (матрица B и вектор u вводятся далее).

Пространство, образованное всеми возможными переменными векторами состояния системы (1), называют пространством состояний. Система в пространстве состояний описывается полно, однако не всегда компоненты вектора состояния имеют ясный для исследуемой системы физический смысл, а выбор компонент вектора состояния при синтезе ГУ должен быть обоснованным.

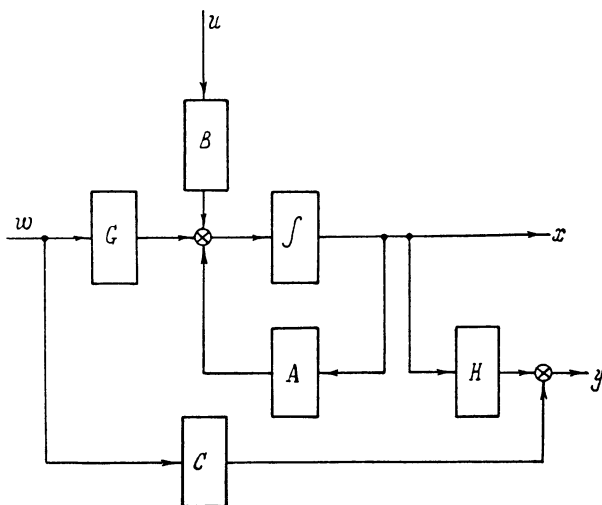


Рис. 1. Структурная схема формирующего фильтра

Входные воздействия на ГУ не всегда могут быть измерены непосредственно, тогда матрица входных воздействий $C = 0$ и уравнения (1) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Gw; \\ y &= Hx. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Схему рис. 1 называют формирующим фильтром, если w — белый шум единичной интенсивности. Матрицы A (состояния), H (наблюдения), G (возмущения), C (входных воздействий) для конкретных ГУ позволяют записать их модель в пространстве состояний; в качестве компонент вектора состояния ГУ обычно принимают обобщенные координаты и их производные по времени. Свойства матриц модели, в свою очередь, характеризуют объект управления и его управляемые движения в пространстве состояний. С управляющими воздействиями

получаются уравнения состояния, которые используют при анализе и синтезе ГУ:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Gw; \\ y &= Hx, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

здесь матрица управления B и вектор управления u имеют соответствующие размерности. В схеме на рис. 1 при этом $C = 0$.

В качестве основных свойств системы (3) рассматриваются наблюдаемость и управляемость, введенные в теорию систем Р. Е. Калманом [20]. Задачи наблюдаемости и управляемости неявно решаются также методами теории автоматического регулирования (алгебраическими, частотными, корневыми), поскольку анализируется распределение нулей и полюсов передаточной функции [6, 21, 31, 47, 68]. В литературе по прикладной теории ГУ метод пространства состояний вообще и анализ этим методом общих свойств ГУ как динамических систем, в частности наблюдаемости и управляемости, отражены лишь в некоторых публикациях [2, 24, 26, 28, 36, 46, 52, 54, 55, 58, 63, 70]. В смежных областях указанные свойства используются широко и являются фундаментальными характеристиками системы наряду с устойчивостью. Примеры анализа ГУ [54] показывают, что в конкретных системах эти свойства не очевидны, для их выявления необходимо, как правило, выполнить специальное исследование. Иногда вводится более детальная структура свойств модели системы: рассматриваются также восстанавливаемость, идентифицируемость, стабилизируемость и соответствующие подпространства в пространстве состояний [22].

В настоящем обзоре на основе уравнений (3) и введенной классификации моделей исследованы управляемость и наблюдаемость линеаризованных моделей ГУ; эти результаты можно использовать при анализе и синтезе оптимальных ГУ методами пространства состояний.

1.2. Наблюдаемость динамических систем

Понятие наблюдаемости линейных динамических систем вводится на основании уравнений состояния в форме (3). Принято, что система наблюдаема, если можно определить ее состояние в некоторый момент t_0 по «будущим» значениям выходной переменной.

Линейная система уравнений состояния (3) полностью наблюдаема, если для всех t_0 существует такое $t_1 < \infty$, что из равенства [22]

$$y(t; t_0, x_0, u) = y(t; t_0, x_0^*, u); \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

для всех $u(t)$ следует $x_0 = x_0^*$.

Поставленная задача нетривиальна, поскольку в матрице H часто число строк l меньше, чем размерность n вектора состояния x , т. е. измеряются не все компоненты вектора состояния; на основании одного измерения выходной переменной невозможно определить начальное состояние, для этого необходимы не менее $n - l$ измерений и x_0 определяется как решение соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. Для систем с постоянными параметрами определение упрощается.

Система (3) полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда ранг матрицы наблюдаемости

$$Y = \begin{bmatrix} H^T & A^T H^T & (A^T)^2 H^T & \dots & (A^T)^{n-1} H^T \end{bmatrix} \quad (4)$$

равен n ; здесь « T » — символ транспонирования.

Условие (4) является критерием наблюдаемости. Оно означает, что при данных матрицах A и H информация в вектор y проходит от всех компонент состояния. Таким образом, свойство наблюдаемости системы определяется парой $\{A; H\}$. Построение оптимальных наблюдающих устройств (оптимальных наблюдателей) для различных систем исследуется во многих работах [14, 16, 31, 37, 38].

Если система не полностью наблюдаема, то в ее пространстве состояний выделяется подпространство ненаблюдаемых состояний. Пусть $x^0 = Qx$, где $Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$ — неособая матрица; ее блок Q_1 , имеющий размерность $(l \times n)$ при $l \leq n$, содержит столбцы, являющиеся базисом подпространства, образованного столбцами матрицы наблюдаемости Y [3]. Строки блоков Q_2 и Q_1 образуют базис n -мерного пространства состояний. Отсюда $x = Q^{-1}x^0$ (символ « -1 » обозначает операцию обращения матрицы), и система (3) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} Q^{-1}\dot{x}^0 &= AQ^{-1}x^0 + Bu + Gw; \\ y &= HQ^{-1}x^0, \end{aligned} \right\}$$

откуда, без учета Gw ,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^0 &= QAQ^{-1}x^0 + QBu; \\ y &= HQ^{-1}x^0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Эти уравнения в канонической форме представляют наблюдаемость системы (3); здесь

$$\left. \begin{aligned} A^0 &= QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^0 & 0 \\ A_{21}^0 & A_{22}^0 \end{bmatrix}; \\ B^0 &= QB = \begin{bmatrix} B_1^0 \\ B_2^0 \end{bmatrix}; \\ H^0 &= \begin{bmatrix} H_1^0 & 0 \end{bmatrix} = Q^{-1}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

субматрица A_{11}^0 имеет размерность $(l \times l)$, пара $\{A_{11}^0; H_1^0\}$ является полностью наблюдаемой. О подвекторе x_2^0 из вектора $x^{0T} = \|x_1^{0T}; x_2^{0T}\|$, имеющем размерность $n - l$, в наблюдениях $y(t)$ информация не поступает. Структурная схема, соответствующая (6), представлена на рис. 2.

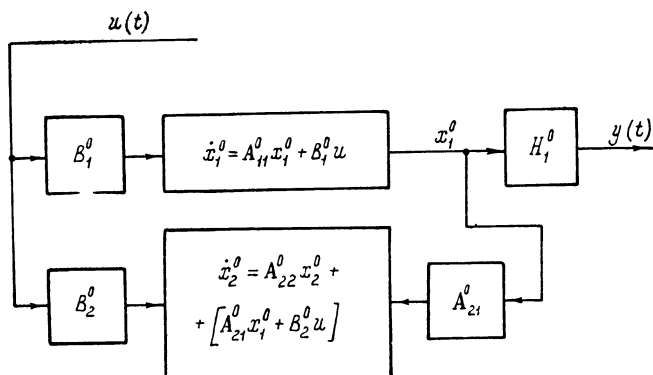


Рис. 2. Структурная схема не полностью наблюдаемой системы

Если система не полностью наблюдаема, то ее состояние определяется с точностью до вектора из подпространства наблюдаемых состояний. В этих условиях ошибка наблюдения не будет нарастать со временем только в том случае, если ненаблюдаемые компоненты вектора состояния стремятся к нулю [22].

1.3. Управляемость динамических систем

Управляемость как свойство линейной динамической системы также определяется на основании уравнений состояния в форме (3).

Линейная система с уравнениями состояния (3) полностью управляема, если из начального состояния $x(0)$ в момент t_0 она может быть переведена в любое другое конечное состояние $x_1 = x(t_1)$ за конечное время $t_1 - t_0$.

Для систем с постоянными параметрами определение упрощается.

Система с уравнениями состояния (3) полностью управляема тогда и только тогда, когда ранг матрицы управляемости

$$U = \|B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B\| \quad (7)$$

равен n — размерности вектора x .

Приведенное условие является критерием управляемости и означает, что управление u воздействует на все компоненты век-

тора состояния; управляемость, как видно, определяется парой $\{A; B\}$. Если система не полностью управляема, то в пространстве состояний выделяется подпространство управляемых состояний, которые могут быть достигнуты системой за конечное время. Это — линейное подпространство, порожаемое столбцами матрицы управляемости [22]. Можно ввести преобразование $x = Tx^*$, где $T = \|T_1 \vdots T_2\|$ — неособая матрица, в которой столбцы блока T_1 образуют m -мерный ($m \leq n$) базис подпро-

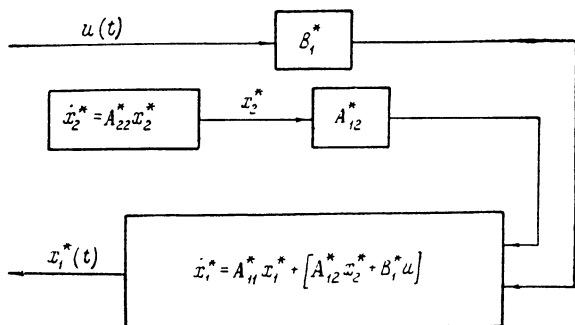


Рис. 3. Структурная схема не полностью управляемой системы

странства управляемых состояний системы (3) и вместе со столбцами блока T_2 — базис n -мерного пространства состояний. На основании (3)

$$T\dot{x}^* = ATx^* + Bu \quad \text{или} \quad \dot{x}^* = T^{-1}ATx^* + T^{-1}Bu;$$

это уравнение в канонической форме представляет управляемость системы (3), с учетом T и T^{-1}

$$\left. \begin{aligned} A^* &= T^{-1}AT = \left\| \begin{array}{cc} A_{11}^* & A_{12}^* \\ 0 & A_{22}^* \end{array} \right\|; \\ B^* &= T^{-1}B = \left\| \begin{array}{c} B_1^* \\ 0 \end{array} \right\|. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь блок A_{11}^* — $(m \times m)$ -матрица, пара $\{A_{11}^*; B_1^*\}$ характеризует подпространство управляемых состояний, т. е. полностью управляем подвектор x_1^* из m первых компонент вектора $x^{*T} = \|x_1^{*T} \vdots x_2^{*T}\|$. Поведение подвектора x_2^* полностью независимо; соответствующая структурная схема с учетом (8) представлена на рис. 3.

При скалярном управлении систему (3) можно преобразовать наглядными приемами к канонической форме. Пусть в (3)

матрица управления имеет вид $B = b = \|1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0\|^T$; без учета Gw имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu; \\ y &= Hx. \end{aligned} \right\}$$

Матрица управляемости здесь

$$U = \|b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b\|; \quad (9)$$

характеристический полином матрицы A

$$\det(sE_n - A) = \sum_{i=0}^n \alpha_i s^{n-i} \quad (\alpha_0 = 1),$$

где E_n — единичная матрица размерности n ; символ \det обозначает определитель матрицы.

Неособая матрица $T = UM$, где U имеет вид (9) и

$$M = \left\| \begin{array}{cccccc} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 & \alpha_0 & \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & \dots & \alpha_0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & 0 & 0 & \\ \alpha_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \end{array} \right\|,$$

преобразует исходную систему уравнений к канонической форме уравнений состояния:

$$\dot{x}^k = \left\| \begin{array}{cccccc} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right\| x^k + \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{array} \right\| u. \quad (10)$$

Система (10) всегда полностью управляема, в противном случае преобразование не существует [22], и, наоборот, если система (3) приводится к виду (10), то она полностью управляема. Система приводится к канонической форме и при векторном управлении, например при построении децентрализованного устройства управления [80].

Задачи анализа наблюдаемости и управляемости дуальны [17]: по результатам анализа, например, наблюдаемости в исходной системе можно по определенным правилам судить об управляемости дуальной системы. Если исходная система описывается уравнениями (3), то дуальная — уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^A &= A^T x^A + H^T u^A; \\ y^A &= B^T x^A, \end{aligned} \right\}$$

и матрица управляемости дуальной системы $U^A = Y$ [Y — матрица (4) наблюдаемости исходной системы].

Таким образом, по результатам исследования наблюдаемости дуальной системы делается вывод об управляемости исходной системы.

При анализе управляемости и наблюдаемости в ряде случаев приходится учитывать устойчивость исследуемой системы. Исследованию устойчивости динамических систем посвящено большое число работ прикладного и теоретического характера [42, 56, 66, 73]. Введено несколько определений устойчивости, теория устойчивости устанавливает условия существования того или иного вида устойчивости в конкретных системах. Далее принято, что линейная система вида (3) с постоянными параметрами асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все характеристические числа матрицы состояния A имеют отрицательные действительные части.

1.4. Алгоритм анализа наблюдаемости (управляемости)

Как следует из приведенных критериев, для обнаружения наблюдаемости и управляемости системы необходимо определить ранг матриц Y и U . При размерности n матрицы состояния исходной системы эти матрицы могут иметь размерность $n \times n^2$ (в общем случае $n \times ln$ или $n \times mn$ соответственно). Необходимо построить и вычислить все определители n -го порядка из соответствующей матрицы. Максимальное число таких определителей $N_{\max} = C_{n^2}^n$ определяется числом сочетаний из максимального числа столбцов n^2 по n . Используя формулу для числа сочетаний [9], можно записать

$$N_{\max} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{n^2 - i}{n - i}$$

или, определяя два первых элемента,

$$N_{\max} = n(n+1) \prod_{i=2}^{n-1} \frac{n^2 - i}{n - i}.$$

Отсюда видно, что N_{\max} весьма велико даже при малых n ; в случае $l < n$ и $m < n$ имеем $N < N_{\max}$.

Если из N определителей n -го порядка исследуемой матрицы хотя бы один не равен нулю, т. е. найдется $\det U_i \neq 0$ ($i = 1, N$) или, соответственно, $\det Y_i \neq 0$ ($i = 1, N$), где U_i и Y_i представляют собой квадратные $(n \times n)$ -субматрицы, составленные из столбцов матриц U и Y соответственно для формирования i -го из N определителей, то тогда система наблюдаема (управляема) по всем компонентам вектора состояния. В этом случае $\text{rank } U = n$ или $\text{rank } Y = n$.

Если в числе N определителей нет ни одного, не равного нулю, то система ненаблюдаема (неуправляема), и неизвестно, к какой компоненте или к каким компонентам вектора состояния это относится. Для выявления ненаблюдаемых (неуправляемых) компонент нужно исключить из вектора состояния какую-либо из компонент, изменить соответствующим образом все матрицы и повторить все для системы $(n - 1)$ -го порядка. При получении отрицательного по исследуемому свойству результата исключается другая компонента и проверяется следующая система $(n - 1)$ -го порядка. Может оказаться необходимой проверка сначала всех систем $(n - 1)$ -го, затем $(n - 2)$ -го, $(n - 3)$ -го и т. д. порядков; описанные процедуры необходимо проделывать до тех пор, пока не будет выяснена полностью картина управляемости (наблюдаемости) в исследуемой системе.

Исследовать наблюдаемость (управляемость) целесообразно с помощью ЦВМ. Можно использовать подпрограмму MFGR из библиотеки научных программ на языке ФОРТРАН-IV в ДОС ЕС, с помощью которой определяется ранг матрицы и отыскиваются линейно независимые строки и столбцы. Ранг определяется стандартным методом Гаусса с ведущим элементом [10], на каждом шаге вычислений величина ведущего (максимального по модулю) элемента сравнивается с величиной $TOL = |a_{ij}^m EPS|$, где a_{ij}^m — максимальный элемент в исходной матрице; EPS — некоторая малая величина, служащая для проверки результата вычислений на нулевое значение и определяемая, как правило, на основе наименьшего из элементов исследуемой матрицы.

Величина EPS должна задаваться извне, поэтому определяемая величина ранга зависит от соотношения EPS и элементов матрицы. Таким образом, при анализе наблюдаемости (управляемости) на ЦВМ искажения могут быть обусловлены погрешностями численной реализации алгоритма, т. е. ошибками округления. Поскольку определить заранее нужную величину EPS невозможно, надо задавать ее по возможности малой, что увеличивает затраты машинного времени.

Таким образом, алгоритмы исследования наблюдаемости и управляемости на основе критериев могут оказаться чрезвычайно громоздкими даже для стационарных систем. Для конкретного класса систем можно упростить исследование и повысить наглядность результатов за счет введения частных критериев с учетом особенностей математических моделей данного класса. Применительно к исследованию ГУ эффективны структурные методы, которые позволяют [78, 79] понизить размерность задачи и получить критерии на основе особенностей структуры конкретных ГУ.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

2.1. Корректирующие системы

В качестве источников корректирующих сигналов для ГУ могут использоваться акселерометры, магнитные и тому подобные системы.

Уравнения движения акселерометра или, иначе говоря, физического маятника, можно записать в виде [19, 51]

$$\ddot{\chi} + 2\zeta n \dot{\chi} + n^2 \chi = k_m W, \quad (11)$$

где сохранены принятые в [51] обозначения. Введя вектор состояния и опустив воздействие в правой части, запишем это уравнение в виде (3) при условии

$$x^T = \|\dot{\chi} \chi\|; \\ A = \left\| \begin{array}{cc} -2\zeta n & -n^2 \\ 1 & 0 \end{array} \right\|. \quad (12)$$

Если в правой части (11) действует управление u , то матрица управления

$$B = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\|. \quad (13)$$

Уравнение наблюдения здесь $y = \chi$, т. е. матрица наблюдения

$$H = \|0 \ 1\|. \quad (14)$$

Матрицы (12)—(14) и векторы x , y , u определяют модель акселерометра в пространстве состояний.

Магнитный компас (МК) можно рассматривать со всеми установленными в подвесе магнитными системами: стрелками, картушками, зондами и т. п. (не рассматриваются магнитометрические приборы, жестко установленные на корпусе объекта-носителя или на платформе). Уравнение движения подвижной

системы такого МК можно записать в виде [54] $\ddot{\varphi} + 2\rho\dot{\varphi} + q^2\varphi = m_b$, где ρ и q — параметры подвижной части, m_b — внешнее воздействие. Как видно, с точностью до обозначений это уравнение совпадает с (11); отсюда следует, что математическая модель рассматриваемых МК в пространстве состояний будет иметь вид (3) с матрицами A , B , H вида (12)—(14) соответственно.

Уравнение движения гиротаксметра [19, 50] $\ddot{\beta} + 2\zeta n\dot{\beta} + n^2\beta = k_{гт}\omega_z$ с точностью до обозначений также совпадает с (11), т. е. гиротаксметр динамически эквивалентен МК и акселерометру.

2.2. Астатический гироскоп

Уравнения движения астатического гироскопа (АГ) имеют вид [49]

$$\left. \begin{aligned} J_{\eta} \ddot{\alpha} + H_{\Gamma} \dot{\theta} + n_1 \dot{\alpha} &= M_{\alpha}; \\ J_{\beta} \ddot{\theta} - H_{\Gamma} \dot{\alpha} + n_2 \dot{\theta} &= M_{\theta}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где сохранены основные обозначения [49]. Если ввести вектор состояния $x^T = \|\dot{\alpha} \dot{\theta} \alpha \theta\|$ и принять, что M_{α} и M_{θ} — управляющие моменты, $u_{\alpha} = M_{\alpha}/J_{\eta}$, $u_{\theta} = M_{\theta}/J_{\beta}$ — управления, то уравнение (15) приводятся к виду (3), где матрица G не фигурирует, поскольку не рассматриваются воздействия.

Здесь

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} A_{11} & 0_2 \\ E_2 & 0_2 \end{vmatrix}; \\ A_{11} &= \begin{vmatrix} -\frac{n_1}{J_{\eta}} & -\frac{H_{\Gamma}}{J_{\eta}} \\ \frac{H_{\Gamma}}{J_{\beta}} & -\frac{n_2}{J_{\beta}} \end{vmatrix}; \\ E_2 &= \text{diag} \{1 \quad 1\}; \end{aligned} \quad (16)$$

нули обозначают нулевые квадратные матрицы размерности (2×2) , $B = \begin{vmatrix} B_1 \\ 0 \end{vmatrix}$, где $B_1 = \text{diag} \{1 \quad 1\} = E_2$.

При измерении двумя датчиками обоих углов поворота АГ уравнение наблюдения $y = Hx$ будет характеризоваться матрицей

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0_2 & I_2 \end{vmatrix},$$

если принять $y^T = \|y_1 \ y_2\| = \|\alpha \ \theta\|$.

При измерении угловых скоростей вращения гироскопа в пространстве, т. е. компонент $\dot{\alpha}$ и $\dot{\theta}$, в матрице H появятся соответствующие ненулевые элементы.

2.3. Курсовые гироскопические устройства

В простейшей форме уравнение движения гироскузита (ГА) можно записать в виде [58] $\dot{\alpha} = m_{\beta} = M_{\beta}/H_{\Gamma}$ (M_{β} — момент внешних сил относительно внутренней оси подвеса). Это уравнение имеет вид (3), где $x = \alpha$, $A = 0$, $B = 1$, если $m_{\beta} = u$ — управление.

С учетом системы коррекции уравнения ГА будут

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= u_{\alpha}; \\ \dot{\beta} &= u_{\beta},\end{aligned}$$

где u_{α} и u_{β} — управления; β — угол поворота гироскопа относительно внутренней оси подвеса.

Как видно, здесь $A = 0_2$, $B = E_2$. Для линейной и безынерционной системы коррекции уравнения будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned}\dot{\alpha} &= u_{\alpha}; \\ \dot{\beta} &= k_{\beta}\beta + u_{\beta},\end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где k_{β} — удельная скорость коррекции по внутренней оси; в этом случае по-прежнему $B = E_2$ и

$$A = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & k_{\beta} \end{array} \right\|.$$

Как видно, модель ГА в простейших вариантах распадается на два канала.

Наземные гирокомпасы (ГК) используются в качестве прецизионных измерителей положения географического меридиана, известны их многочисленные конструктивные варианты [50, 61]; в простейшем случае динамика наземного ГК описывается дифференциальным уравнением [50]

$$J_r \ddot{\alpha} + b_1 \dot{\alpha} + H_r \omega_3 \cos \varphi \cdot \alpha = f(t),$$

где J_r — момент инерции подвижной части системы; α — угол отклонения оси гироскопа от плоскости меридиана; b_1 — коэффициент демпфирования; ω_3 — угловая скорость суточного вращения Земли; φ — широта места; $f(t)$ — возмущения.

Если принять $x^T = \|\dot{\alpha} \ \alpha\|$ и разделить на J_r , то

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{b_1}{J_r} x_1 - \frac{H_r \omega_3 \cos \varphi}{J_r} x_2 + \frac{1}{J_r} f(t); \\ \dot{x}_2 &= x_1,\end{aligned}$$

откуда по форме (3) матрица состояния

$$A = \left\| \begin{array}{cc} -\frac{b_1}{J_r} & -\frac{H_r \omega_3 \cos \varphi}{J_r} \\ 1 & 0 \end{array} \right\|$$

совпадает с точностью до обозначения элементов с (12).

Современные маятниковые двухроторные гирокомпасы — достаточно сложные приборы со значительным периодом собственных колебаний. Их динамика рассматривается обычно на

основе прецессионных уравнений, которые без учета затухания имеют вид [50]

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{IP}{H_r} \beta - \omega_3 \sin \varphi + f_1(t); \\ \dot{\beta} &= -\omega_3 \cos \varphi \cdot \alpha + f_2(t), \end{aligned} \right\}$$

где сохранены используемые в теории ГК обозначения и принято, что $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — возмущения. Если представить вектор состояния в виде $x^T = \|\alpha \beta\|$, то матрица состояния

$$A = \left\| \begin{array}{cc} 0 & \frac{IP}{H_r} \\ -\omega_3 \cos \varphi & 0 \end{array} \right\|. \quad (18)$$

В этих условиях измерению доступна координата β — угол подъема гиросферы, откуда $H = \|0 \ 1\|$.

При введении затухания, например с помощью гидравлического успокоителя, уравнения ГК записывают в виде [50]

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{IP}{H_r} \beta + \frac{c}{H_r} \vartheta - \frac{\omega_3 \sin \varphi}{H_r} + f_1(t); \\ \dot{\beta} &= -\omega_3 \cos \varphi \cdot \alpha + f_2(t); \\ \dot{\vartheta} &= -F\beta - F\vartheta + f_3(t), \end{aligned}$$

где F — фактор перетекания; c — коэффициент формы успокоителя. Вектор состояния здесь $x^T = \|\alpha \beta \vartheta\|$; матрица состояния

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & \frac{IP}{H_r} & \frac{c}{H_r} \\ -\omega_3 \cos \varphi & 0 & 0 \\ \hline 0 & -F & -F \end{array} \right\|.$$

В этом выражении в виде блока выделяется матрица состояния (18), отличия обусловлены учетом динамики перетекания жидкости в успокоителе и действием жидкости на гиросферу. Матрица наблюдения здесь будет иметь вид $H = \|0 \ 1 \ 0\|$, если измеряется угол подъема гиросферы β . Выражения $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ позволяют описать управляющие и возмущающие воздействия.

В окрестности положения равновесия, т. е. при малых α и β , уравнения движения корректируемого ГК приводятся к виду [57]

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{v_N}{R_3} \operatorname{tg} \varphi \cdot \alpha + \left(\frac{k}{H_r} + \omega_3 \cos \varphi \right) \beta + f_1(t); \\ \dot{\beta} &= -\omega_3 \cos \varphi \cdot \alpha - \frac{\mu k}{H_r} \beta + f_2(t), \end{aligned}$$

где, в дополнение к введенным обозначениям, μ и k — постоянные коэффициенты; v_N — северная составляющая скорости движения объекта; R_3 — радиус Земли. Отсюда при $x^T = \|\alpha \beta\|$

$$A = \left\| \begin{array}{cc} \frac{v_N}{R_3} \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{k}{H_r} + \omega_3 \cos \varphi \right) & \\ -\omega_3 \cos \varphi & -\frac{\mu k}{H_r} \end{array} \right\|. \quad (19)$$

Предполагается [57], что ГК установлен на идеально стабилизированной в горизонте платформе; учет ошибок стабилизации усложняет модель системы.

Прецессионное уравнение курсовой системы, состоящей из гироскопа, корректируемого от магнитного компаса (гиромагнитного компаса), имеет вид

$$\dot{\alpha}_r = k_\alpha (\alpha_m - \alpha_r) + f_1(t).$$

С учетом характера погрешности магнитного компаса (см. раздел 2.1) это уравнение можно привести к нормальной форме; после соответствующего преобразования получается система уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\alpha}_r = -k_\alpha \alpha_r + k_\alpha \alpha_m + f_1(t); \\ \dot{\rho} = -2p\rho - q^2 \alpha_m + m_b + f_2(t); \\ \dot{\alpha}_m = \rho, \end{array} \right\}$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — возмущения. Вектор состояния здесь $x^T = \|\alpha_r \dot{\alpha}_m \alpha_m\|$, матрица состояния

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} -k_\alpha & 0 & k_\alpha \\ 0 & -2p & -q^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ 0_{2 \times 1} & A_{22} \end{array} \right\|. \quad (20)$$

В структуре матрицы выделяются диагональные блоки, характеризующие динамику подсистем (A_{11} — корректируемый гироскоп в прецессионной постановке, A_{22} — магнитный компас), и блок A_{12} , характеризующий воздействие второй подсистемы (магнитного компаса) на первую (гироскоп). В этих условиях сигнал измерения $y = \alpha_m - \alpha_r$, поэтому матрица наблюдения $H = \|-1 \ 0 \ 1\|$.

В ряде случаев гиромагнитный компас может рассматриваться как комплекс, состоящий из гироазимута и магнитного компаса [54].

2.4. Гировертикали

В прецессионной постановке уравнение движения одного канала гировертикали (ГВ) на неподвижном основании имеет вид [49] $\dot{\alpha} = m_{\alpha} + f_1(t)$. Если $m_{\alpha} = f(\alpha)$, например $m_{\alpha} = -K_1\alpha$, то $\dot{\alpha} = -K_1\alpha + f_1(t)$; аналогично для второго канала $\dot{\beta} = -K_2\beta + f_2(t)$. В этом случае каналы ГВ автономны, по форме (3) матрицы состояния равны $-K_1$ и $-K_2$ соответственно, матрица наблюдения $H = 1$.

С учетом вращения Земли и движения объекта уравнения ГВ на подвижном основании принимают вид [49]

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \omega_{3\tau}\beta + m_{\alpha}; \\ \dot{\beta} &= -\omega_{3\tau}\alpha + m_{\beta}, \end{aligned} \right\}$$

где U_{τ} — вертикальная составляющая переносной угловой скорости; принято, что другие составляющие переносной угловой скорости компенсированы или входят в m_{α} и m_{β} . Для приведения этих уравнений к виду (3) следует принять

$$\begin{aligned} x^T &= \|\alpha \quad \beta\|; \\ A &= \left\| \begin{array}{cc} 0 & \omega_{3\tau} \\ -\omega_{3\tau} & 0 \end{array} \right\|, \end{aligned}$$

где структура матрицы A совпадает с (18).

Для построения ГВ по этим уравнениям необходимо измерять α и β , т. е. здесь $y^T = \|\alpha \quad \beta\|$ и матрица наблюдения $H = E_2$. Если $m_{\alpha} = -K_1\alpha$ и $m_{\beta} = -K_2\beta$, то уравнения движения ГВ принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= -K_1\alpha + \omega_{3\tau}\beta + f_1(t); \\ \dot{\beta} &= -K_2\beta - \omega_{3\tau}\alpha + f_2(t), \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$A = \left\| \begin{array}{cc} -K_1 & \omega_{3\tau} \\ -\omega_{3\tau} & -K_2 \end{array} \right\|;$$

матрица наблюдения $H = E_2$, как и ранее.

При исследовании ГВ на качающемся основании важно учитывать, что углы α и β измеряются акселерометрами, на которые воздействует качка, т. е. сигналы измерения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \alpha - \chi_1; \\ y_2 &= \beta - \chi_2, \end{aligned} \right\}$$

где χ_1 и χ_2 — отклонения маятников от вертикали [69]. Если для процессов χ_1 и χ_2 использовать уравнение (11) в виде

$$\ddot{\chi}_i + 2\mu_i \dot{\chi}_i + b_i^2 \chi_i = f_i(t);$$

$$i=1, 2; \quad b_i^2 = \mu_i^2 + \lambda_i^2,$$

где μ_i , λ_i , $f_i(t)$ — параметры, характеризующие динамику процессов, то по аналогии с уравнениями ГВ на подвижном основании можно записать систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= -K_1 \alpha + \omega_{3\zeta} \beta + K_1 \chi_1; \\ \dot{\beta} &= -K_2 \beta - \omega_{3\zeta} \alpha + K_2 \chi_2; \\ \dot{\rho}_1 &= -2\mu_1 \rho_1 - b_1^2 \chi_1 + f_1(t); \\ \dot{\chi}_1 &= \rho_1; \\ \dot{\rho}_2 &= -2\mu_2 \rho_2 - b_2^2 \chi_2 + f_2(t); \\ \dot{\chi}_2 &= \rho_2. \end{aligned} \right\}$$

На основании этой системы можно ввести вектор состояния $x^T = \|\alpha \dot{\chi}_1 \chi_1 \beta \dot{\chi}_2 \chi_2\|$; тогда при приведении ее к виду (3) получится матрица состояния

$$A = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} -k_1 & 0 & k_1 & \omega_{3\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & -2\mu_1 & -b_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\omega_{3\zeta} & 0 & 0 & -k_2 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\mu_2 & -b_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Блочная структура этой матрицы состояния имеет вид

$$A = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right\|,$$

где блоки A_{12} и A_{21} содержат только по одному ненулевому элементу; при $U_\zeta = 0$ ГВ распадается на два автономных канала, модели которых на подвижном основании характеризуют соответственно блоки A_{11} и A_{22} с аналогичной структурой. Например, в структуре A_{11} выделяются блоки, характеризующие

гироскоп, акселерометр и связи между этими процессами (см. разделы 2.1 и 2.2):

$$A_1 = \left\| \begin{array}{c|cc} -k_1 & 0 & k_1 \\ \hline 0 & -2\mu_1 & -b_1^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|;$$

приведенная матрица имеет блочную структуру вида (20).

Астатический гироскоп (см. раздел 2.2) с коррекцией от акселерометров в ряде задач должен рассматриваться с учетом нутационных колебаний. Используя (16) для модели АГ, (11) — для описания акселерометра и введенные для ГВ условия наблюдения, можно получить блочную структуру матрицы состояния A в виде (20), если принять вектор состояния

$$x^T = \|\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \alpha \quad \beta \quad \dot{\chi}_1 \quad \chi_1 \quad \dot{\chi}_2 \quad \chi_2\|.$$

Здесь блоки

$$A_{11} = \left\| \begin{array}{cc|cc} -\frac{n_1}{J_\gamma} & -\frac{H_\gamma}{J_\gamma} & 0 & -k_2 \\ \frac{H_\gamma}{J_B} & \frac{n_2}{J_B} & k_1 & 0 \\ \hline E_2 & & & 0_2 \end{array} \right\|;$$

$$A_{22} = \left\| \begin{array}{cc|cc} -2\mu_1 & -b_1^2 & & 0_2 \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 0_2 & -2\mu_2 - b_2^2 \\ & 0_2 & 1 & 0 \end{array} \right\|;$$

$$A_{12} = \left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ \hline & & 0_2 & 0_2 \end{array} \right\|.$$

Изменяя порядок нумерации компонент вектора состояния, можно сгруппировать их по принадлежности к определенному каналу ГВ, однако здесь связи между каналами обусловлены гироскопическим моментом, поэтому матрица A не распадается и каналы не могут рассматриваться как автономные. В матрице A выделяются блоки, описывающие АГ (A_{11}) и акселерометры (A_{22}), что также может быть использовано в задачах анализа.

Если систему коррекции разомкнуть, то $K_1 = K_2 = 0$ и $A_{12} = 0_4$; тогда

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & 0_4 \\ 0_4 & A_{22} \end{vmatrix}, \quad (21)$$

т. е. в таком случае матрица A распадается. Однако поскольку условия измерения при этом не меняются, матрица наблюдения

$$H = \| H_1 | H_2 \| \quad (22)$$

и модель системы не распадается.

Формирование корректирующих моментов сопровождается в ГВ динамическими искажениями сигналов в усилительно-преобразовательном тракте. При наличии, например, динамического запаздывания с постоянными времени T_α и T_β , уравнения ГВ на неподвижном основании с учетом уравнений АГ (15) можно записать в следующей форме:

$$\dot{\rho}_\alpha = -\frac{n_1}{J_\eta} \dot{\alpha} - \frac{H_\Gamma}{J_\eta} \dot{\beta} - u_1 + f_1(t);$$

$$\dot{\alpha} = \rho_\alpha;$$

$$\dot{\rho}_\beta = \frac{H_\Gamma}{J_B} \dot{\alpha} - \frac{n_2}{J_B} \dot{\beta} + u_2 + f_2(t);$$

$$\dot{\beta} = \rho_\beta;$$

$$\dot{u}_1 = -\frac{1}{T_\beta} u_1 + K_2 \beta + f_3(t);$$

$$\dot{u}_2 = -\frac{1}{T_\alpha} u_2 + K_1 \alpha + f_4(t),$$

где $f_i(t)$ ($i = \overline{1, 4}$) — возмущения. Вектор состояния здесь

$$x^T = \| \dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \alpha \quad \beta \quad u_1 \quad u_2 \|,$$

матрица состояния

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc|cc} -\frac{n_1}{J_\eta} & -\frac{H_\Gamma}{J_\eta} & & & -1 & 0 \\ & & 0_2 & & 0 & 1 \\ \hline & & & & & \\ \hline & & E_2 & & 0_2 & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & 0 & K_2 \\ & & & & -\frac{1}{T_\beta} & 0 \\ & & & & 0 & -\frac{1}{T_\alpha} \\ & & 0_2 & & K_1 & 0 \end{array} \right\| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}.$$

В матрице A выделяется блок A_{11} , совпадающий с (16), а также блок A_{22} , отражающий динамику системы коррекции.

Измеряются здесь углы α и β , поэтому матрица наблюдения $H = \| 0_2 \ E_2 \ 0_2 \|$; управляющие воздействия u_1 и u_2 , как правило, измерению не поддаются.

2.5. Курсовертикали

Гироскопические приборы, измеряющие курс и углы наклона объекта, называют курсовертикалями (КВ). Корректируемый гиригоризонткомпас (ГГК) на основе гиросферы двухроторного ГК является курсовертикалью и характеризуется уравнениями движения [57]

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = & \frac{v_N}{R_3} \operatorname{tg} \varphi \cdot \alpha + \left(\frac{k}{H_r} + \omega_3 \cos \varphi \right) \beta - \\ & - \operatorname{tg} \varepsilon \left(\omega_3 \sin \varphi + \frac{v_E}{R_3} \operatorname{tg} \varphi \right) \delta + f_1(t); \end{aligned}$$

$$\dot{\beta} = -\omega_3 \cos \varphi \cdot \alpha - \frac{\mu k}{H_r} \beta + \frac{v_N}{R_3} \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \delta + f_2(t);$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{\sigma k}{H_B} \gamma + \frac{1}{H_B} \left[\kappa + H_r \left(\omega_3 \cos \varphi + \frac{v_E}{R_3} \right) \right] \delta + f_3(t);$$

$$\dot{\delta} = -\frac{k}{H_B} \gamma + f_4(t),$$

где дополнительно (см. раздел 2.3) введены: H_B — составляющая кинетического момента гиросферы; σ , ε , κ — конструктивные параметры гиросферы; v_E — восточная составляющая скорости движения объекта; переменные γ — угол крена гиросферы — и δ — угол разведения гироскопов. Для гиригоризонткомпаса вектор состояния $x^T = \| \alpha \ \beta \ \gamma \ \delta \|$, матрица состояния

$$\begin{aligned} A = & \\ & \left\| \begin{array}{cc|cc} \frac{v_N}{R_3} \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{k}{H_r} + \omega_3 \cos \varphi \right) & -\operatorname{tg} \varepsilon \left(\omega_3 \sin \varphi + \frac{v_E}{R_3} \operatorname{tg} \varphi \right) & 0 & 0 \\ -\omega_3 \cos \varphi & -\frac{\mu k}{H_r} & 0 & \frac{v_N}{R_3} \operatorname{tg} \varepsilon \\ \hline 0_2 & -\frac{\sigma k}{H_B} \frac{1}{H_B} \left[\kappa + H_r \left(\omega_3 \cos \varphi + \frac{v_E}{R_3} \right) \right] & & \\ & -\frac{k}{H_B} & & 0 \end{array} \right\| \\ & = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ 0_2 & A_{22} \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Как видно, в матрице A выделяется блок A_{11} , совпадающий с матрицей состояния двухроторного ГК (19); блочная структура матрицы A совпадает с (20).

В авиационной гироскопической технике широко используется центральный прибор — КВ на двух трехстепенных гироскопах, установленных на общей раме [11, 48]. Один из гироскопов — гировертикаль (см. раздел 2.4), другой — гироскоп направления или гиросазимут (см. раздел 2.3).

2.6. Гироскопические интеграторы

Уравнение движения двухстепенного поплавкового интегрирующего гироскопа (ПИГ) имеет вид [19, 50] $\ddot{\beta} + \frac{1}{T_r} \dot{\beta} = f(t)$, где $f(t)$ — управляющие и возмущающие воздействия. Вводя вектор состояния $x^T = \|\dot{\beta} \ \beta\|$, можно записать

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{1}{T_r} \dot{\beta} + f(t); \\ \dot{\beta} &= \rho. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда матрица состояния

$$A = \left\| \begin{array}{cc} -\frac{1}{T_r} & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right\|$$

с точностью до обозначений совпадает с блочной структурой (16). Доступна измерению величина β , поэтому матрица наблюдения $H = \|0 \ 1\|$ совпадает с (14); матрица управления имеет вид (13), т. е.

$$B = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\|,$$

поскольку управляющий вход один — в правой части первого уравнения (на датчик момента на оси рамки).

Простейшее уравнение гироскопического интегратора линейных ускорений (ГИ) имеет вид [19, 50]

$$\dot{\alpha} = k_n a,$$

где a — ускорение; отсюда вектор состояния $x = \alpha$, матрица состояния $A = 0$, матрица наблюдения $H = 1$ и матрица управления $B = 1$.

Гироскопический интегратор динамически эквивалентен гиросазимуту (см. раздел 2.3).

Если учесть межрамочную коррекцию по внутренней оси ГИ, то уравнения примут вид [50]

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= k_n a; \\ \dot{\beta} &= \frac{1}{T_k} \beta + m_\beta, \end{aligned} \right\}$$

где T_k — постоянная времени коррекции.

Эти уравнения с точностью до обозначений совпадают с уравнениями ГА (17).

С учетом нутационных колебаний уравнения ГИ можно записать в виде

$$\begin{aligned} J_n \ddot{\alpha} + H_\Gamma \dot{\beta} + n_1 \dot{\alpha} + k_k \beta &= f_1(t); \\ J_b \ddot{\beta} - H_\Gamma \dot{\alpha} + n_2 \dot{\beta} &= f_2(t), \end{aligned}$$

где k_k — коэффициент усиления цепи коррекции с выходом по моменту.

Вводя вектор состояния $x^T = \|\dot{\alpha} \ \beta \ \alpha \ \beta\|$, уравнения ГИ можно привести к виду

$$\dot{\rho}_\alpha = -\frac{n_1}{J_n} \dot{\alpha} - \frac{H_\Gamma}{J_n} \dot{\beta} - \frac{k_k}{J_n} \beta + \frac{1}{J_n} f_1(t);$$

$$\dot{\alpha} = \rho_\alpha;$$

$$\dot{\rho}_\beta = \frac{H_\Gamma}{J_b} \dot{\alpha} - \frac{n_2}{J_b} \dot{\beta} + \frac{1}{J_b} f_2(t);$$

$$\dot{\beta} = \rho_\beta;$$

отсюда матрица состояния

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -\frac{n_1}{J_n} & -\frac{H_\Gamma}{J_n} & 0 & -\frac{k_k}{J_n} \\ \frac{H_\Gamma}{J_b} & -\frac{n_2}{J_b} & 0 & 0 \\ \hline & & E_2 & 0_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ E_2 & 0_2 \end{array} \right\|. \quad (23)$$

Выражение (23) отличается от (16) блоком $A_{12} \neq 0$, характеризующим коррекцию; матрица наблюдения здесь

$$H = \|0 \ 0 \ 0 \ 1\|; \quad (24)$$

матрица управления

$$B = \left\| \begin{array}{c} E_2 \\ 0_2 \end{array} \right\|, \quad (25)$$

если вектор управления $u^T = \|u_\alpha \ u_\beta\|$. Выражения (23)—(25) являются обобщениями (12)—(14) соответственно на многомерный случай.

2.7. Стабилизаторы на двухстепенных гироскопах

Основа стабилизаторов на двухстепенных гироскопах — одноосный гиростабилизатор (ОГС). В свою очередь, ОГС строится на астатическом гироскопе, уравнения которого рассмотрены в разделе 2.2 и матрица состояния имеет вид (16). Если в ОГС замкнут контур стабилизации и передаточная функция контура — коэффициент k_c , то уравнениям состояния ОГС будет соответствовать матрица состояния (23), где следует k_k заменить на k_c и переменную β в векторе состояния — переменной θ , как это далее принято.

Если замкнута также цепь пропорциональной коррекции с коэффициентом коррекции k_k , то уравнения ОГС примут вид [50]

$$\begin{aligned} J_H \ddot{\alpha} + H_\Gamma \dot{\theta} + n_1 \dot{\alpha} + k_c \theta &= f_1(t); \\ J_B \ddot{\theta} - H_\Gamma \dot{\alpha} + n_2 \dot{\theta} - k_k \alpha &= f_2(t) \end{aligned}$$

и в нормальной форме

$$\dot{\rho}_\alpha = -\frac{n_1}{J_H} \dot{\alpha} - \frac{H_\Gamma}{J_H} \dot{\theta} - \frac{k_c}{J_H} \theta + \frac{1}{J_H} f_1(t);$$

$$\dot{\rho}_\theta = \frac{H_\Gamma}{J_B} \dot{\alpha} - \frac{n_2}{J_B} \dot{\theta} + \frac{k_k}{J_B} \alpha + \frac{1}{J_B} f_2(t);$$

$$\dot{\alpha} = \rho_\alpha;$$

$$\dot{\theta} = \rho_\theta,$$

откуда матрица состояния

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -\frac{n_1}{J_H} & -\frac{H_\Gamma}{J_H} & 0 & -\frac{k_c}{J_H} \\ \frac{H_\Gamma}{J_B} & -\frac{n_2}{J_B} & \frac{k_k}{J_B} & 0 \\ \hline & & E_2 & O_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ E_2 & O_2 \end{array} \right\|,$$

если принять вектор состояния $x^T = \|\dot{\alpha} \dot{\theta} \alpha \theta\|$.

Здесь матрица A , совпадающая с (23) по структуре, отличается блоком A_{12} ; такая матрица состояния может характеризовать и гировертикаль, построенную на основе АГ и имеющую линейную безынерционную систему коррекции, если в уравнениях АГ учесть инерционные и диссипативные члены. Если в цепях коррекции и стабилизации необходимо учесть динамическое запаздывание, то уравнения становятся такими, как в разделе 2.4 для ГВ. При учете запаздывания только в цепи стабилизации необходимо принять $u_2 = 0$ и включить только θ

(в разделе 2.4 — β) в число измеряемых координат, после чего матрица наблюдения $H = \| 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \|$.

Если в вектор состояния ввести управление u_1 , т. е. принять $x^T = \| \dot{\alpha} \ \dot{\theta} \ u_1 \ \alpha \ \theta \|$, то матрица состояния примет вид

$$A = \left\| \begin{array}{ccc|cc} -\frac{n_1}{J_H} & -\frac{H_\Gamma}{J_H} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{H_\Gamma}{J_B} & -\frac{n_2}{J_B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_\alpha} & 0 & \frac{k_c}{T_\alpha} \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & 0_2 \end{array} \right\|. \quad (26)$$

В полученном выражении блок A_{21} не является единичной матрицей, и в этом смысле оно обобщает (23). Матрица наблюдения $H = \| 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \|$, если изменяется только угол прецессии;

матрица управления $B = \left\| \begin{array}{c} E_2 \\ 0_{3 \times 2} \end{array} \right\|$ при векторе управления

$u^T = \| u_\alpha \ u_\theta \|$.

Конструктивные особенности двухосного гиросtabilизатора (ДГС) и различия в способах расположения гироскопов на платформе отражаются в математическом описании. В ряде случаев применяется прецессионная теория, в частности при описании ГВ на основе ДГС системой уравнений [57]

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \omega_{3z} \beta + f_1(t); \\ \dot{\beta} &= -\omega_{3z} \alpha + f_2(t); \\ \dot{\theta}_1 &= -\omega_{3z} \theta_2 + f_3(t); \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_{3z} \theta_1 + f_4(t), \end{aligned}$$

где, как и ранее, углы α и β — погрешности стабилизации; θ_1 и θ_2 — углы прецессии; $f_i(t)$ ($i = \overline{1, 4}$) — воздействия; ω_{3z} — вертикальная составляющая переносной угловой скорости. Вектор состояния здесь $x^T = \| \alpha \ \beta \ \theta_1 \ \theta_2 \|$; матрица состояния

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & \omega_{3z} & & \\ -\omega_{3z} & 0 & & 0_2 \\ \hline & & 0 & -\omega_{3z} \\ & & \omega_{3z} & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & 0_2 \\ 0_2 & A_{22} \end{array} \right\| \quad (27)$$

по блочной структуре совпадает с (21), т. е. матрица A распадается.

Уравнения четырехгироскопного ДГС в первом приближении можно записать в виде [50]

$$\begin{aligned} J_{\eta} \ddot{\alpha} + 2H_{\Gamma} \dot{\theta}_1 + n_{\alpha} \dot{\alpha} &= M_1; \\ 2J_{\Gamma} \ddot{\theta}_1 - 2H_{\Gamma} \dot{\alpha} + n_{\theta} \dot{\theta}_1 &= M_2; \\ J_{\xi} \ddot{\beta} + 2H_{\Gamma} \dot{\theta}_2 + n_{\beta} \dot{\beta} &= M_3; \\ 2J_{\Gamma} \ddot{\theta}_2 - 2H_{\Gamma} \dot{\beta} + n_{\theta} \dot{\theta}_2 &= M_4. \end{aligned}$$

Связи между каналами в первом приближении отсутствуют, поэтому, по аналогии с (16),

$$A = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & 0_4 \\ E_4 & 0_4 \end{array} \right\|,$$

где

$$A_{11} = \left\| \begin{array}{cccc} -\frac{n_{\alpha}}{J_{\eta}} & 0 & -\frac{2H_{\Gamma}}{J_{\eta}} & 0 \\ 0 & -\frac{n_{\beta}}{J_{\xi}} & 0 & -\frac{2H_{\Gamma}}{J_{\xi}} \\ \frac{H_{\Gamma}}{J_{\Gamma}} & 0 & -\frac{n_{\theta}}{2J_{\Gamma}} & 0 \\ 0 & \frac{H_{\Gamma}}{J_{\Gamma}} & 0 & -\frac{n_{\theta}}{2J_{\Gamma}} \end{array} \right\|,$$

если принять вектор состояния

$$x^T = \|\dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \alpha \ \beta \ \theta_1 \ \theta_2\|.$$

Матрица наблюдения в некорректируемом режиме

$$H = \|\| 0_{2 \times 6} \ E_2 \|\|,$$

если измеряются только углы прецессии; она является обобщением (24) на многомерный случай;

$$H = \|\| E_2 \ 0_{2 \times 4} \ E_2 \|\|,$$

если измеряются и угловые скорости относительно осей стабилизации,— эта матрица имеет вид (22) и является обобщением

(24). Матрица управления $B = \|\| E_4 \|\|$, если вектор управления

$$u^T = \|\| u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \|\|.$$

При пропорциональной характеристике контуров стабилизации [6] в матрице A появится блок

$$A_{12} = \left\| \begin{array}{c|cc} & -\frac{k_c}{J_\eta} & 0 \\ \hline 0_2 & & \\ & 0 & -\frac{k_c}{J_\xi} \\ \hline 0_2 & & 0_2 \end{array} \right\|,$$

при этом матрица A по структуре совпадает с (23). Если в ДГС измерению доступны углы α , β , θ_1 и θ_2 , например в силовой ГВ или гироскопической следящей системе, матрица наблюдения будет $H = \|0_4 \ E_4\|$; матрица управления не изменится.

Другие варианты модели ДГС, в частности с учетом динамического запаздывания в цепях управления, также сводятся в первом приближении к двум автономным моделям соответствующих ОГС.

Вектор состояния трехосного гиросtabilизатора (ТГС) можно записать в виде

$$x^T = \|\dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma} \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \ \alpha \ \beta \ \gamma \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3\|,$$

если дополнить модель ДГС третьим каналом с переменными $\dot{\gamma}$, $\dot{\theta}_3$ и θ_3 . В простейшем случае математические модели ТГС можно получить по аналогии с ДГС соответствующим увеличением размерности матриц и субматриц, если не учитывать связи между каналами.

Связи между каналами в ТГС характеризуются членами первого порядка малости и должны учитываться в рамках линейной теории. Это, в частности, связи по гироскопическому моменту и воздействия относительно осей стабилизации при движении гироскопов относительно осей прецессии. Для ТГС на трех двухстепенных гироскопах [11, 48, 50, 63] можно записать уравнения движения в следующем виде:

$$J_z \ddot{\alpha} + H_r \dot{\gamma} - H_r \dot{\theta}_1 = Q_\alpha + Q_3 + Q_2;$$

$$J_y \ddot{\beta} + H_r \dot{\alpha} - H_r \dot{\theta}_2 = Q_\beta;$$

$$J_x \ddot{\gamma} + H_r \dot{\alpha} - H_r \dot{\theta}_3 = Q_\gamma + Q_1;$$

$$J_B (\ddot{\theta}_1 - \ddot{\gamma}) + H_r \dot{\alpha} = Q_1;$$

$$J_B (\ddot{\theta}_2 - \ddot{\alpha}) + H_r \dot{\beta} = Q_2;$$

$$J_B (\ddot{\theta}_3 - \ddot{\alpha}) + H_r \dot{\gamma} = Q_3,$$

где Q_α , Q_β , Q_γ — обобщенные силы, действующие относительно осей стабилизации; Q_i ($i = \overline{1, 3}$) — то же относительно осей

прецессии. Если выделить из обобщенных сил составляющие, обусловленные вязким трением, а также учесть связи, возникающие при наложении управлений относительно осей прецессии, и вид вектора состояния, то исходные уравнения ТГС можно записать в виде

$$\ddot{\alpha} = -\frac{\mu_{\alpha}}{J_z} \dot{\alpha} - \frac{H_{\Gamma}}{J_z} \dot{\gamma} + \frac{H_{\Gamma}}{J_z} \dot{\theta}_1 + \frac{\mu_{\beta}}{J_z} \dot{\theta}_2 + \frac{\mu_{\beta}}{J_z} \dot{\theta}_3 + q_1;$$

$$\ddot{\beta} = -\frac{\mu_{\beta}}{J_y} \dot{\beta} - \frac{H_{\Gamma}}{J_y} \dot{\alpha} + \frac{H_{\Gamma}}{J_y} \dot{\theta}_2 + q_2;$$

$$\ddot{\gamma} = -\frac{\mu_{\gamma}}{J_x} \dot{\gamma} - \frac{H_{\Gamma}}{J_x} \dot{\alpha} + \frac{\mu_{\beta}}{J_x} \dot{\theta}_1 + \frac{H_{\Gamma}}{J_x} \dot{\theta}_3 + q_3;$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\left(\frac{\mu_{\beta}}{J_{\beta}} - \frac{\mu_{\beta}}{J_x}\right) \dot{\theta}_1 - \left(\frac{H_{\Gamma}}{J_{\beta}} + \frac{H_{\Gamma}}{J_x}\right) \dot{\alpha} - \frac{\mu_{\gamma}}{J_x} \dot{\gamma} + \frac{H_{\Gamma}}{J_x} \dot{\theta}_3 + q_4 + q_3;$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2 = & -\left(\frac{\mu_{\beta}}{J_{\beta}} - \frac{\mu_{\beta}}{J_z}\right) \dot{\theta}_2 - \frac{\mu_{\alpha}}{J_z} \dot{\alpha} - \frac{H_{\Gamma}}{J_z} \dot{\beta} - \frac{H_{\Gamma}}{J_z} \dot{\gamma} + \\ & + \frac{H_{\Gamma}}{J_z} \dot{\theta}_1 + \frac{\mu_{\beta}}{J_z} \dot{\theta}_3 + q_5 + q_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_3 = & -\left(\frac{\mu_{\beta}}{J_{\beta}} - \frac{\mu_{\beta}}{J_z}\right) \dot{\theta}_3 - \frac{\mu_{\alpha}}{J_z} \dot{\alpha} - \left(\frac{H_{\Gamma}}{J_{\beta}} + \frac{H_{\Gamma}}{J_z}\right) \dot{\gamma} + \\ & + \frac{H_{\Gamma}}{J_z} \dot{\theta}_1 + \frac{\mu_{\beta}}{J_z} \dot{\theta}_2 + q_6 + q_1, \end{aligned}$$

здесь воздействия q_i ($i = \overline{1, 6}$) определяются соответствующими обобщенными силами. После этого уравнения приводятся к виду (3), где, в свою очередь, матрица состояния по структуре аналогична (16).

Введя обозначения

$$\frac{1}{T_{\alpha}} = \frac{\mu_{\alpha}}{J_z}; \quad \frac{1}{T_{\beta}} = \frac{\mu_{\beta}}{J_y};$$

$$\frac{1}{T_{\gamma}} = \frac{\mu_{\gamma}}{J_x}; \quad \chi_z = \frac{J_{\beta}}{J_z}; \quad \chi_y = \frac{J_{\beta}}{J_y}; \quad \chi_x = \frac{J_{\beta}}{-J_x};$$

$$\frac{1}{T_{\Gamma}} = \frac{\mu_{\beta}}{J_{\beta}}; \quad \frac{1}{\tau_{\Gamma}} = \frac{H_{\Gamma}}{J_{\beta}},$$

можно записать

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{T_\alpha} & 0 & -\chi_z \frac{1}{\tau_r} & \chi_z \frac{1}{\tau_r} & \chi_z \frac{1}{T_r} & \chi_z \frac{1}{T_r} \\ -\chi_y \frac{1}{\tau_r} & -\frac{1}{T_\beta} & 0 & 0 & \chi_y \frac{1}{\tau_r} & 0 \\ -\chi_x \frac{1}{\tau_r} & 0 & -\frac{1}{T_\gamma} & \chi_z \frac{1}{T_r} & 0 & \chi_x \frac{1}{\tau_r} \\ -\frac{1+\chi_x}{\tau_r} & 0 & -\frac{1}{T_\gamma} & -\frac{1-\chi_x}{T_r} & 0 & \chi_x \frac{1}{\tau_r} \\ -\frac{1}{T_\alpha} & -\frac{1}{\tau_r} & -\chi_z \frac{1}{\tau_r} & \chi_z \frac{1}{\tau_r} & -\frac{1-\chi_z}{T_r} & \chi_z \frac{1}{T_r} \\ -\frac{1}{T_\alpha} & 0 & -\frac{1+\chi_z}{\tau_r} & \chi_z \frac{1}{\tau_r} & \chi_z \frac{1}{T_r} & -\frac{1-\chi_z}{T_r} \end{vmatrix}.$$

Учет связей между каналами привел к появлению новых элементов в матрице состояния по сравнению с ДГС. В частности, эффективность воздействий по осям прецессии снижают параметры χ_x и χ_z в последних трех строках блока A_{11} . Уравнения

ТГС приводятся к виду (3): $\dot{x} = Ax + B_p u + Gw$, где матрицу B_p целесообразно представить в виде $B_p = DB$; матрица D обусловлена конструктивными особенностями ТГС; матрица B определяет входы управлений, в частности, для ТГС можно принять

$B = E_6$. Тогда в рассматриваемых условиях $D = \begin{vmatrix} D_1 \\ 0_6 \end{vmatrix}$, где

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\chi_z & -\chi_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\chi_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\chi_x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1-\chi_z & -\chi_z \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\chi_z & 1-\chi_z \end{vmatrix}; \quad (28)$$

эта матрица преобразует управления, поступающие на ТГС; при $\chi_x \rightarrow 0$ и $\chi_z \rightarrow 0$ матрица D_1 отражает выбор обобщенных координат.

2.8. Индикаторные стабилизаторы на сферических гироскопах

Прецизионные гиросtabilизаторы строятся на неуправляемых сферических гироскопах (СГ). Индикаторный двухосный стабилизатор может быть построен на одном СГ с неконтактным подвесом (аэродинамическим, электростатическим, электромагнитным), который не участвует в формировании разгрузки. Тем не менее в этих гиросtabilизаторах (ГС) движения платформы

действуют на гироскоп пропорционально угловой скорости и углу рассогласования между платформой и ротором. Кроме того, в СГ проекции вращающего момента приводного двигателя по главной оси действуют как уводящие моменты. В результате упругая связь между платформой и сферой влияет на точность ГС. Уравнения ДГС на СГ имеют вид [18]:

$$\begin{aligned} J_z \ddot{\alpha} + \mu_r \dot{\alpha} + k\alpha - \mu_r \dot{\theta}_1 - k\theta_1 &= M_z - W_z(\alpha - \theta_1); \\ J_y \ddot{\beta} + \mu_r \dot{\beta} + k\beta - \mu_r \dot{\theta}_2 - k\theta_2 &= M_y - W_y(\beta - \theta_2); \\ J_r \ddot{\theta}_1 + \mu_r \dot{\theta}_1 + k\theta_1 - \mu_r \dot{\alpha} - k\alpha + M_{дв}\beta - M_{дв}\theta_2 - H_{zy}\dot{\theta}_2 &= M_{зг}, \\ J_r \ddot{\theta}_2 + \mu_r \dot{\theta}_2 + k\theta_2 - \mu_r \dot{\beta} - k\beta + M_{дв}\theta_1 - M_{дв}\alpha + H_{zy}\dot{\theta}_1 &= M_{yг}, \end{aligned}$$

где μ_r — коэффициент вязкого трения в подвесе СГ; k — коэффициент упругой связи ротора СГ с платформой; M_z, M_y — возмущения, действующие на платформу; $M_{зг}, M_{yг}$ — возмущения, действующие на ротор; J_r — момент инерции ротора; J_z, J_y — моменты инерции платформы; W_z, W_y — передаточные функции следящих систем.

Рассматривая гиросtabilизаторы на сферических гироскопах как объект регулирования, целесообразно принять $W_z = W_y = 0$, поскольку передаточные функции выбираются при синтезе ГС; вектор состояния совпадает с принятым в разделе 2.7 для двухосного гиросtabilизатора на поплавковых интегрирующих гироскопах. С учетом этого уравнения ДГС на СГ сводятся к виду (3). Матрица состояния имеет блочную структуру вида (23) соответствующей размерности в отличие от матрицы состояния для силового ДГС, имеющей вид (16). Здесь

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -\frac{\mu_r}{J_z} & 0 & \frac{\mu_r}{J_z} & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_r}{J_r} & 0 & \frac{\mu_r}{J_r} \\ \frac{\mu_r}{J_r} & 0 & -\frac{\mu_r}{J_r} & \frac{H_{zy}}{J_r} \\ 0 & \frac{\mu_r}{J_r} & -\frac{H_{zy}}{J_r} & -\frac{\mu_r}{J_r} \end{vmatrix},$$

т. е. в отличие от силовых ДГС отсутствуют связи по основным составляющим гироскопических моментов; блок

$$A_{12} = \begin{vmatrix} -\frac{k}{J_z} & 0 & \frac{k}{J_z} & 0 \\ 0 & -\frac{k}{J_y} & 0 & \frac{k}{J_y} \\ \frac{k}{J_r} & -\frac{M_{дв}}{J_r} & -\frac{k}{J_r} & \frac{M_{дв}}{J_r} \\ \frac{M_{дв}}{J_r} & \frac{k}{J_r} & -\frac{M_{дв}}{J_r} & -\frac{k}{J_r} \end{vmatrix}$$

характеризует упругие связи ротора с платформой; динамически эти связи эквивалентны наложению пропорциональных управляющих воздействий в силовых ГС (см. раздел 2.7).

Стабилизировать платформу относительно трех осей можно с помощью двух СГ [18]. К уравнениям ДГС добавляется одно уравнение платформы и два уравнения, характеризующие движение второго СГ; вектор состояния такого ГС

$$x^T = \|\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{\gamma} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3 \quad \dot{\theta}_4 \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \|\|$$

и уравнения движения [18]:

$$J_z \ddot{\alpha} + \mu_1 \dot{\alpha} + k_1 \alpha - \mu_1 \dot{\theta}_1 - k_1 \theta_1 = M_z - W_z (\alpha - \theta_1);$$

$$J_y \ddot{\beta} + \mu_2 \dot{\beta} + k_2 \beta - \mu_2 \dot{\theta}_2 - k_2 \theta_2 = M_y - W_y (\beta - \theta_2);$$

$$J_x \ddot{\gamma} + \mu_1 \dot{\gamma} + k_1 \gamma + \mu_2 \dot{\gamma} + k_2 \gamma - \mu_1 \dot{\theta}_2 - k_1 \theta_2 - \mu_2 \dot{\theta}_1 + k_2 \theta_1 = \\ = M_x - W_x (\gamma - \theta_2);$$

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + \mu_1 \dot{\theta}_1 + k_1 \theta_1 - M_{дв} \theta_2 - H_{zx} \dot{\theta}_2 + M_{дв} \dot{\gamma} - \mu_1 \dot{\alpha} - k_1 \alpha = M_{z1};$$

$$J_1 \ddot{\theta}_2 + \mu_1 \dot{\theta}_2 + k_1 \theta_2 + M_{дв} \theta_1 + H_{zx} \dot{\theta}_1 - M_{дв} \alpha - \mu_1 \dot{\gamma} - k_1 \gamma = M_{y1};$$

$$J_2 \ddot{\theta}_3 + \mu_2 \dot{\theta}_3 + k_2 \theta_3 + M_{дв} \theta_1 + H_{xy} \dot{\theta}_4 - \mu_2 \dot{\beta} - k_2 \beta - M_{дв} \dot{\gamma} = \\ = M_{y2} - W_\Gamma (\theta_4 - \gamma);$$

$$J_2 \ddot{\theta}_4 + \mu_2 \dot{\theta}_4 + k_2 \theta_4 - M_{дв} \theta_2 - H_{xy} \dot{\theta}_2 + M_{дв} \dot{\beta} - \mu_2 \dot{\gamma} - k_2 \gamma = M_{x2}.$$

В этих уравнениях параметры двух СГ отмечены индексом «1» или «2»; W_x — передаточная функция следящей системы, работающей относительно оси ox ; W_Γ — передаточная функция арретирующего канала, который ликвидирует четвертую (избыточную) степень свободы у блока из двух СГ.

Блочная структура матрицы состояния аналогична (23). В ней

$$A_{11} = \left\| \begin{array}{ccccccc} -\frac{\mu_1}{J_z} & 0 & 0 & \frac{\mu_1}{J_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_2}{J_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_2}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu_1 + \mu_2}{J_x} & 0 & \frac{\mu_1}{J_x} & 0 & \frac{\mu_2}{J_x} \\ \frac{\mu_1}{J_1} & 0 & 0 & -\frac{\mu_1}{J_1} & \frac{H_{zx}}{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu_1}{J_1} & -\frac{H_{zx}}{J_1} & -\frac{\mu_1}{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_2}{J_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu_2}{J_2} & -\frac{H_{xy}}{J_2} \\ 0 & 0 & \frac{\mu_2}{J_2} & 0 & 0 & \frac{H_{xy}}{J_2} & -\frac{\mu_2}{J_2} \end{array} \right\|;$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{J_z} & 0 & 0 & \frac{k_1}{J_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{J_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{k_2}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_1 + k_2}{J_x} & 0 & \frac{k_1}{J_x} & 0 & \frac{k_2}{J_x} \\ \frac{k_1}{J_1} & 0 & -\frac{M_{дв}}{J_1} & -\frac{k_1}{J_1} & \frac{M_{дв}}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{M_{дв}}{J_1} & 0 & \frac{k_1}{J_1} & -\frac{M_{дв}}{J_1} & -\frac{k_1}{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{J_2} & \frac{M_{дв}}{J_2} & 0 & 0 & -\frac{k_2}{J_2} & -\frac{M_{дв}}{J_2} \\ 0 & -\frac{M_{дв}}{J_2} & \frac{k_2}{J_2} & 0 & 0 & \frac{M_{дв}}{J_2} & -\frac{k_2}{J_2} \end{pmatrix}.$$

Субматрица A_{11} не содержит связей по основным гироскопическим моментам, субматрица A_{12} характеризует упругие связи роторов СГ с платформой, структура ее такая же, как блока A_{12} модели ДГС на СГ.

2.9. Гироскопические следящие системы

Выделение гироскопических следящих систем (ГСС) как класса гироскопических устройств в известной мере условно, поскольку работу многих ГУ можно трактовать как слежение: за вертикалью, за направлением на север, за изменяющимся моментом внешних сил (в системах стабилизации), за измеряемой величиной (например, в гиротахметре) и т. д. Вместе с тем целесообразно выделять в качестве ГСС такие ГУ, которые работают по сигналам коррекции, вырабатываемым радиолокационными, оптическими и т. п. пеленгаторами или другими устройствами, не связанными непосредственно с формой и вращением Земли; в таких ГУ свойство слежения выступает на первый план, кроме того, как правило, от них обычно требуется большее быстроедействие, чем от ГК или ГВ. Гироскопические следящие системы могут строиться на основе АГ и на основе индикаторного, силового или индикаторно-силового ГС [25, 45]. Поэтому математические модели таких ГУ используются при описании ГСС.

Для описания ГСС на основе астатического гироскопа в первом приближении могут применяться математические модели ГВ, если корректирующие сигналы вырабатываются в системе координат, связанной с подвесом гироскопа (см. разделы 2.4 и 2.7); при значительных углах поворота относительно внутренней оси подвеса β следует вместо H_G учитывать величину $H_G \cos \beta$.

При установке координатора гироскопических следящих систем на ГС могут использоваться модели, описанные в разделе 2.7, если координаторы цели не имеют вращающихся элементов со значительным кинетическим моментом. В противном случае модели таких ГСС должны учитывать гироскопические свойства координатора цели. ГСС могут строиться и на основе различных индикаторных ГС, тогда можно использовать соответствующие математические модели (см. раздел 2.8).

3. УСЛОВИЯ РАБОТЫ И КЛАССИФИКАЦИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

3.1. Постановка задачи

На подвижных объектах гироскопические устройства работают при постоянно действующих внешних возмущениях, кроме того собственные погрешности элементов ГУ приводят к дополнительным ошибкам и могут в ряде случаев рассматриваться как внутренние помехи. Оптимизация ГУ требует детального учета условий работы, т. е. характеристик внешних воздействий и внутренних помех. Для большинства методов пространства состояний математическое описание условий работы должно быть приведено к некоторому формирующему фильтру, т. е. воздействия должны быть описаны дифференциальными уравнениями связи с белым шумом единичной интенсивности вида (2) или (3). Это возможно при некоторых допущениях.

Пусть ГУ описывается дифференциальным уравнением состояния

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + F_1 f(t),$$

где $f(t)$ — воздействия на ГУ; x_1 — вектор состояния ГУ; A_{11} — матрица состояния ГУ; F_1 — матрица.

Если воздействие $f(t)$ представляет собой случайный процесс с дробно-рациональной спектральной плотностью, то справедливо его описание в форме (2) [58]:

$$\dot{x}_2 = A_{22}x_2 + G_2 w;$$

$$f(t) = F_2 x_2.$$

В этих условиях вектор состояния системы

$$x = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\|,$$

и уравнения состояния принимают вид (2), т. е.

$$\dot{x} = Ax + Gw,$$

где

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}; \quad G = \begin{vmatrix} 0 \\ G_2 \end{vmatrix}; \quad A_{12} = \dot{F}_1 F_2.$$

В матрице состояния A с блочной структурой вида (20) блок A_{11} отражает уравнения движения собственно ГУ, блок A_{22} — свойства воздействий, блок A_{12} — особенности действия возмущений на ГУ. Матрица наблюдения может иметь вид (22), поскольку в ряде случаев возмущения также измеряются.

Если ГУ имеет уравнение состояния

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + G_1w_1$$

и уравнение наблюдения

$$y = H_1x_1 + H_2v,$$

где помеха $v(t)$ не является единичным белым шумом, то необходимо выполнить некоторые преобразования для построения модели в пространстве состояний. Для помех $v(t)$ с дробно-рациональными спектральными плотностями можно записать уравнение формирующего фильтра

$$\dot{v} = A_{22}v + G_2w_2.$$

Обозначив для единообразия $v = x_2$, можно записать объединенный вектор состояния системы в целом

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix},$$

а также привести модель системы к виду (2), где матрица состояния A имеет вид (21),

$$\dot{G} = \begin{vmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad w = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}.$$

Матрица наблюдения системы в целом имеет вид (22).

Как видно, привести модели ГУ с учетом реальных условий работы к виду формирующего фильтра можно в широком классе задач, при этом дополнительные компоненты вектора состояния характеризуют условия работы, и размерность задачи соответственно возрастает. Свойства ГУ в этих условиях необходимо анализировать по расширенной модели — с учетом компонент, характеризующих воздействия или помехи; наблюдаемость или управляемость ГУ в такой постановке будет зависеть от математического описания воздействий и помех. Модели воздействий

нельзя принимать произвольно (далее эти вопросы рассматриваются с позиций наблюдаемости и управляемости). Математические модели разных ГУ имеют аналогичную структуру, что позволяет классифицировать их в пространстве состояний.

3.2. Характеристика условий работы гироскопических устройств

Условия работы гироскопических устройств — возмущающие и управляющие воздействия — определяются характеристиками объектов, выполняемыми задачами и т. д. Существенную роль в формировании возмущающих воздействий играют кинематическая схема ГУ, конструктивные особенности, способ установки ГУ на объекте. Общая классификация воздействий на ГУ и их анализ приведены в работах [49, 70], для гироскопических приборов систем ориентации и стабилизации высокой точности — в [47]. При исследовании наблюдаемости и управляемости ГУ принята следующая классификация причин воздействий на ГУ:

— вращение Земли и перемещение объекта относительно Земли изменяют положение элементов прибора в поле силы тяжести для некорректируемых ГУ и приводят к появлению управляющих сигналов при коррекции ГУ от маятниковых, магнитных или астрономических систем;

— качка объектов воздействует на ГУ через несбалансированные массы и ускорения качки, через обкатку, если исполнительные устройства на осях подвеса содержат редуктор, и с помощью сил трения в подвесе; в неконтактных подвесах прецизионных ГУ, например, сферических гироскопов, при качке основания возникают уводящие моменты, пропорциональные угловой скорости и углу взаимного вращения элементов подвеса; качка воздействует также на акселерометры и вследствие этого — на ГУ через систему коррекции;

— вибрация и изгибные колебания основания в месте установки ГУ воздействуют аналогично качке основания; они вызваны работой двигателей, аэродинамическими и гидродинамическими силами; в сложных ГУ, в частности трехосных гиростабилизаторах, отмечено даже усиление уровня вибрации на гиростабилизированной платформе (ГСП) по сравнению с вибрацией основания, величина этого отношения (коэффициент динамичности) лежит в пределах 1,3—4,0; частота вибраций очень высока, воздействие их на датчики первичной информации (ДПИ) и ГУ проявляется, в основном, в виде параметрических возмущений [19] и через детектирование — в виде уходов;

— тепловые, магнитные и т. п. процессы в ГУ и вне его деформируют элементы конструкции и наводят вихревые токи, вследствие чего возникают уводящие моменты. Реальные воздействия являются случайными функциями координат объекта, компонент его вектора состояния и других факторов; применять

эти функции непосредственно в задачах исследования практически не удается, однако в большинстве реальных условий воздействия могут быть описаны с достаточной точностью математическими моделями; далее этот вопрос рассматривается для каждого класса воздействий.

Теоретически, на основании анализа физических процессов, обычно не удается получить вероятностные характеристики воздействий на ГУ; их получают статистической обработкой экспериментальных данных [4, 7, 13, 15, 38, 40, 58]. Далее решается задача аппроксимации экспериментальной характеристики. Аппроксимирующая функция должна учитывать основные особенности совокупности экспериментальных точек. Ее аналитическое выражение должно соответствовать реальному процессу, т. е. удовлетворять всем свойствам корреляционной функции (или спектральной плотности) и иметь соответствующее преобразование Фурье.

Этим требованиям удовлетворяют случайные процессы с дробно-рациональными спектральными плотностями. Корреляционные функции аппроксимируются выражением вида [40]

$$K(\tau) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-\alpha_i |\tau|},$$

где A_i — вещественные числа; $\sum_{i=1}^n A_i = \sigma^2$; α_i — вещественные или комплексные числа.

Соответствующие спектральные плотности, например при вещественных α_i , имеют вид

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{2A_i \alpha_i}{\omega^2 + \alpha_i^2}.$$

Математические модели таких процессов в пространстве состояний рассматриваются далее применительно к конкретным воздействиям.

Известны аппроксимации иного вида: процессы «сползания» и «блуждания» [52], процессы с ограниченной полосой [58], многократно дифференцируемые процессы (узкополосный, процесс с экспоненциальным спектром [58]), однако для них нельзя построить формирующий фильтр в виде (2). Данные о стандартных случайных процессах приводятся, например, в работах [58, 59].

3.3. Описание полезных сигналов

Сигналы, формируемые за счет вращения Земли, при задании программы перемещения объекта относительно Земли или относительно другого объекта называются обычно полезными. Они являются случайными, но изменяются достаточно медленно;

быстродействие (удельная скорость коррекции [49]) ГУ определяется вращением вертикали места, поворотом линии визирования цели и должно быть достаточно высоким относительно этих процессов [45].

Относительно медленные входные сигналы целесообразно описывать квазидетерминированными функциями времени. В качестве такой функции можно принять как наиболее простой вариант модели полином

$$m(t) = \sum_{i=0}^r g_i t^i, \quad (29)$$

где g_i ($i = \overline{1, r}$) — случайные вещественные числа.

Усложнение модели непропорционально усложняет задачу.

В такой квазидетерминированной модели параметры функций изменяются в соответствии с маршрутом объекта, скоростью его движения и т. д. В каждой конкретной ситуации эти параметры, строго говоря, случайны, хотя могут оставаться неизменными достаточно продолжительное время. Параметры моделей могут меняться по той или иной программе в зависимости от времени. В ряде случаев необходимо учесть реальные пределы изменения параметров моделей, закон распределения их по множеству возможных значений в этих пределах. Могут быть применены вероятностные методы и методы теории чувствительности [54].

При помощи полинома (29) в качестве модели медленно меняющегося полезного сигнала могут быть наглядно описаны основные режимы работы ГУ.

Полезный сигнал $m(t)$ воспроизводится в режиме слежения. Для этого ГУ должно обладать определенным астатизмом, порядок которого зависит от вида полезного сигнала. При воспроизведении сигнала в виде полинома (29) должен быть $(r+1)$ -й порядок астатизма [54]. При отсутствии полезного сигнала ГУ работает в режиме пространственной стабилизации или просто стабилизации, его называют также режимом памяти. В этом режиме ГУ должно иметь астатизм по отношению к возмущениям, которые необходимо компенсировать.

Определенный порядок астатизма должно обеспечивать ГУ в целом, практически это является требованием к системе коррекции. Гироскопическое устройство со входом по моменту является интегрирующей системой первого порядка [6], и потому для обеспечения $(r+1)$ -го порядка астатизма ГУ в целом система коррекции должна содержать r интегрирующих звеньев, включенных последовательно. Система коррекции должна обеспечить также высокую динамическую точность при случайных возмущениях и помехах во входном сигнале. С повышением порядка астатизма возрастают случайные погрешности ГУ [54], и в ряде случаев при проектировании ГУ допускается система-

тическая погрешность e_c . При полезном сигнале вида (29) она полностью характеризуется коэффициентами ошибок [54] c_i^* :

$$e_c = \sum_{i=0}^r \frac{c_i^*}{i!} \cdot \frac{d^{(i)}m(t)}{dt^i}.$$

В этих условиях должна минимизироваться случайная погрешность ГУ.

Таким образом, для описания полезных сигналов целесообразно использовать квазидетерминированный полином (29) по возможности невысокого порядка. Эквивалентная модель сигнала в пространстве состояний может быть получена следующим образом. В качестве компонент вектора состояния могут быть приняты значения сигнала $m(t)$ и r его производных:

$$\begin{aligned} x_1 &= m^{(r)}; \\ x_2 &= m^{(r-1)}; \\ x_3 &= m^{(r-2)}; \\ &\dots \\ x_{r-1} &= \ddot{m}; \\ x_r &= \dot{m}; \\ x_{r+1} &= m, \end{aligned}$$

где, с учетом (29),

$$\begin{aligned} m &= g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \dots + g_r t^r; \\ \dot{m} &= g_1 + 2g_2 t + \dots + r g_r t^{r-1}; \\ \ddot{m} &= 2g_2 + \dots + r(r-1) g_r t^{r-2}; \\ &\dots \\ m^{(r-1)} &= (r-1)(r-2) \dots 1 \cdot g_{r-1} + r(r-1) \dots 2 \cdot g_r t; \\ m^{(r)} &= r(r-1)(r-2) \dots 1 \cdot g_r. \end{aligned}$$

В этих обозначениях сигналу вида (29) в пространстве состояний соответствует модель вида (2), где матрица $G = 0$ и матрица состояния

$$A = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right\| \quad (30)$$

имеет размерность $(r+1) \times (r+1)$. Компоненты вектора состояния меняются со временем в соответствии с решением однородного уравнения $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$, т. е. в соответствии с начальными условиями по компонентам вектора состояния.

3.4. Модели качки объектов

Качка объектов является для гироскопических устройств основным возмущением ввиду ее высокой интенсивности, особенно в объектах длительного использования. Ослабить качку всего объекта бывает сложно и даже невозможно, хотя для этого строятся специальные системы стабилизации судов и летательных аппаратов; в ряде случаев для ослабления влияния качки на измерители, стабилизируемые в пространстве с помощью ГУ, строятся каскадные гиросистемы [6].

Угловые колебания подвижных объектов и движение центра масс относительно траектории (орбитальное движение) на качке являются случайными процессами. Это подтверждают натурные испытания [7] и теоретические исследования [49, 58, 59, 70]. По математическому описанию процесса качки ведутся широкие исследования, однако окончательное решение задачи не найдено.

Наибольшее применение для описания качки объектов нашли случайные узкополосные процессы с корреляционными функциями

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\mu|\tau|} \left(\cos \lambda\tau + \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda|\tau| \right); \quad (31)$$

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\mu|\tau|} \left(\cos \lambda\tau - \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda|\tau| \right); \quad (32)$$

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\mu|\tau|} \cos \lambda\tau; \quad (33)$$

им соответствуют спектральные плотности

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4\mu\sigma^2 b^2}{\omega^4 + 2a\omega^2 + b^4}; \quad (34)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4\mu\sigma^2 \omega^2}{\omega^4 + 2a\omega^2 + b^4}; \quad (35)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\mu\sigma^2 (b^2 + \omega^2)}{\omega^4 + 2a\omega^2 + b^4}, \quad (36)$$

где σ^2 — дисперсия угла качки; λ — преобладающая частота; μ — коэффициент нерегулярности; $b^2 = \mu^2 + \lambda^2$; $a = \mu^2 - \lambda^2$. Обычно (31) и (33) применяют для описания угла качки и ли-

нейного перемещения, (32) — для описания производных, поскольку этот процесс является в вероятностном смысле первой производной процесса (31) [58].

Если принять (31) — (33) в качестве корреляционной функции одного и того же процесса, то при соответственно одинаковых σ , μ и λ (например, по результатам обработки экспериментальных данных) необходимо иметь в виду и некоторые различия в свойствах этих процессов, отраженных в табл. 1. Из-за различий в низкочастотной области спектров сигналов выбор той или иной модели может привести к принципиальным различиям. Таким образом, выбирать модель качки нельзя произвольно. Пример влияния вида модели качки на показатели ГУ приводится в [30]. Необходимо отметить, что дифференцирование (однократное) допускает только процесс (31), интегрирование (также однократное) с получением конечного стационарного значения дисперсии — процесс (32).

Таблица 1

Характеристики моделей узкополосного случайного процесса

Вариант $K(\tau)$	$K(0)$	Координаты экстремумов спектра	Экстремальные значения ординат спектра	Наклон высокочастотного участка спектра, до/дек
(31)	σ^2	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = \sqrt{-a} = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}$	$S(0) = \frac{2\mu\sigma^2}{\pi b^2}$ $S(\omega_2) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sigma^2 b^2}{\mu \lambda^2}$	40
(32)		$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = b = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$	$S(0) = 0$ $S(\omega_2) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sigma^2}{\mu}$	20
(33)		$\omega_1 = 0$ $\omega = b \sqrt{2 \frac{\lambda}{b} - 1}$	$S(0) = \frac{\mu\sigma^2}{\pi b^2}$ $S(\omega_2) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\mu\sigma^2}{2\lambda b \left(1 - \frac{\lambda}{b}\right)}$	20

Нашли широкое применение также условные спектральные плотности [69, 70].

Как показано в разделе 3.1, модель воздействий на ГУ может быть также приведена к виду (2), т. е. представлена в пространстве состояний. Если ω — белый шум единичной

интенсивности, то спектральная плотность воздействий на ГУ может быть представлена в виде [58]

$$S(\omega) = S_w(\omega) |\Phi(j\omega)|^2 = |\Phi(j\omega)|^2,$$

где $S_w(\omega) = 1$; $\Phi(s)$ — передаточная функция формирующего фильтра ($s = j\omega$).

Отсюда $\Phi(s) = S^+(s)$, здесь $S^+(s)S^-(s) = S(s)$; $S^+(s)$ и $S^-(s)$ получаются факторизацией спектра $S(s)$ [$S^+(s)$ содержит все нули и полюсы $S(s)$, расположенные в левой полуплоскости; $S^-(s)$ — то же в правой].

Если воздействие имеет дробно-рациональный спектр, то и соответствующий фильтр будет дробно-рациональным, т. е. воздействие будет описываться аналогично линейной части исследуемого ГУ и их можно исследовать совместно. Модель воздействия приводится к виду (2) следующим образом.

Если

$$\Phi(s) = \frac{f(s)}{w(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad (37)$$

где $P(s)$ и $Q(s)$ — полиномы, то справедливо дифференциальное уравнение $Q(p)f(t) = P(p)w(t)$ ($p = \frac{d}{dt}$).

Вводя x по аналогии с [52], можно для спектральных плотностей качки (34) — (36) получить соответствующие системы уравнений второго порядка [24, 28]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2\mu x_1 - b^2 x_2 + 2\sigma b \sqrt{\mu w}; \\ \dot{x}_2 &= x_1; \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -b^2 x_1 - 2\mu x_2 + 2\sigma \sqrt{\mu w}; \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= b^2 x_1 - \sigma b \sqrt{2\mu w}; \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2\mu x_2 + \sigma \sqrt{2\mu w}; \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

откуда определяются матрицы A и G для приведения уравнений к виду (2). Компоненты x_1 и x_2 в (38) и (39) связаны между собой операцией интегрирования или дифференцирования и имеют соответствующий физический смысл. В (40) компоненты состояния вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= b^2 \int_0^t f(t) dt - \sigma b \sqrt{2\mu} \int_0^t w(t) dt; \\ x_2 &= f(t). \end{aligned}$$

Компонента x_1 здесь физического смысла не имеет и, кроме того, включает интеграл от белого шума. Применение этой мо-

дели в пространстве состояний нецелесообразно, хотя процесс с корреляционной функцией (33) распространен, в частности для описания случайной составляющей погрешности ГК [54]; физически здесь более обоснована модель вида (38). На основе факторизации спектральной плотности можно построить модели качки и более высокой размерности (например, третьей [24, 28]), которые необходимо применять при учете высших производных угла качки.

Модели второго порядка вошли в практику исследования ГУ; параметры, которыми характеризуются эти модели, вполне наглядны и имеют ясный смысл (σ^2 , λ , μ). При $n \geq 3$ целесообразно сохранить эти параметры и интерпретировать вновь введенные. Для $n = 3$ можно использовать передаточную функцию формирующего фильтра

$$\Phi_3(s) = \Phi_2(s) \frac{s}{s + \nu}, \quad (41)$$

где ν — параметр; $\Phi_2(s)$ — передаточная функция формирующего фильтра процесса второго порядка.

На основании (41) спектральной плотности второго порядка (35) эквивалентно дифференциальное уравнение связи с белым шумом для соответствующего процесса третьего порядка:

$$\ddot{f} + (2\mu + \nu) \dot{f} + (b^2 + 2\mu\nu) f + b^2\nu f = 2\sigma \sqrt{\mu} \dot{w}.$$

Если ввести вектор состояния $x^T = \|\ddot{f} \dot{f} f\|$, то можно записать систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(2\mu + \nu) x_1 - (b^2 + 2\mu\nu) x_2 - b^2\nu x_3 + 2\sigma \sqrt{\mu} w(t); \\ \dot{x}_2 &= x_1; \\ \dot{x}_3 &= x_2, \end{aligned}$$

которая сводится к виду (2) введением матрицы

$$A = \begin{vmatrix} -(2\mu + \nu) & -(b^2 + 2\mu\nu) & -b^2\nu \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad (42)$$

$$G = \begin{vmatrix} 2\sigma \sqrt{\mu} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

По структуре этих матриц можно заключить, что модель такого процесса в пространстве состояний имеет каноническую форму уравнений (10).

При сохранении смысла параметров μ и λ и их численных значениях таких же, как в процессе второго порядка, в модели

третьего порядка изменяется смысл параметра σ_v . Здесь σ_v^2 не является дисперсией процесса. Для оценки отличия следует отыскать дисперсию процесса $f(t)$ на выходе формирующего фильтра $\Phi_3(s)$ при подаче на его вход белого шума с единичной интенсивностью, т. е.

$$D[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_3(j\omega)|^2 d\omega.$$

С учетом выражения (41) и того, что спектральная плотность $\Phi_2(s)$ имеет вид (35), можно записать $D[f] = 4\mu\sigma_v^2 J_3$, где после вычисления интеграла [40]

$$J_3 = \frac{b^2 + 2\mu\nu}{4\mu(\nu^2 + 2\mu\nu + b^2)},$$

т. е. $D[f] \neq \sigma_v^2$. Если принять, что $\sigma_v^2 = \sigma^2$ (здесь σ^2 — дисперсия процесса второго порядка), то $D[f] = \sigma^2 k_v$,

где

$$k_v = \frac{1}{1 + \frac{\nu^2}{b^2 + 2\mu\nu}}.$$

При $\mu \ll b$ (процесс имеет узкополосный характер) и $\nu \ll b$

$$k_v \approx \frac{1}{1 + \frac{\nu^2}{b^2}} \approx 1$$

и $\sigma_v^2 \approx D[f]$, т. е. основные числовые характеристики процессов второго и третьего порядков близки. Поэтому модель третьего порядка может строиться, как второго, с теми же значениями параметров σ , μ и λ , если принимается $\nu \ll b$ или $\nu \ll \lambda$. Спектральные плотности процессов второго и третьего порядков будут отличаться только в высокочастотной области.

Несмотря на усложнение математического описания качки, модели третьего порядка физически обоснованы в тех случаях, когда необходимо одновременно учесть перемещение, скорость и ускорение объекта [24, 28].

3.5. Модели вибраций места установки гироскопических устройств

Быстроизменяющиеся воздействия, какими являются вибрации, целесообразно описывать вероятностными моделями. Вибрации места установки воздействуют на ГУ аналогично качке; можно условно выделить вибрации линейные, угловые, однокомпонентные и т. д. [62]. Для ГУ одним из основных факторов является ускорение или перегрузка в процессе вибраций. По-

этому математическое описание вибраций должно содержать ускорение в явном виде.

Воздействие вибраций на ГУ усиливается при нежесткости элементов конструкции; вибрации и изгибные колебания (угловые вибрации), действуя на чувствительный элемент, вызывают низкочастотный дрейф ГУ, средняя составляющая которого не равна нулю. Уровень вибрации снижают установкой ГУ на амортизаторы. Исследованию поведения на вибрациях чувствительных элементов (акселерометров, гироскопов, гиросинтезаторов) посвящено много работ. Выявлен эффект детектирования вибраций акселерометрами, проанализирована виброустойчивость гиросинтезатора и др.

В ряде работ вибрации описываются в форме полигармонических процессов, где частота и амплитуда принимают ряд значений. Используются также сплошные спектры вибраций в некотором диапазоне частот, тогда в качестве модели принимается случайный процесс со спектральной плотностью

$$S(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} C, & |\omega| \leq \omega_0; \\ 0, & |\omega| > \omega_0, \end{cases}$$

которой соответствует корреляционная функция

$$K(\tau) = \sigma^2 \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau}, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_0 C}{\pi}.$$

В качестве простейшей модели вибраций может быть принят белый шум с корреляционной функцией $K(\tau) = C \delta(\tau)$ и спектральной плотностью $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} C$, где $\delta(\tau)$ — дельта-функция; C — интенсивность шума; можно использовать экспоненциально коррелированный процесс, имеющий корреляционную функцию

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\nu |\tau|} \quad (43)$$

и спектральную плотность

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\sigma^2 \nu}{\omega^2 + \nu^2}, \quad (44)$$

где σ^2 — дисперсия процесса; ν — частота, характеризующая время корреляции $\tau_k = 1/\nu$.

В тех случаях, когда в составе спектра вибраций выделяются участки повышенной интенсивности, целесообразно для их описания использовать узкополосные случайные процессы по аналогии с качкой основания (см. раздел 3.4). При явно выраженных широкополосных и узкополосных составляющих в спектре вибраций применяют комбинации соответствующих моделей.

3.6. Описание внутренних помех

При работе гироскопических устройств, выработке выходных сигналов и их преобразовании возникают искажения, которые условно можно назвать внутренними помехами ГУ. Преобразование сигналов в электрических и электромагнитных элементах усилительно-преобразовательной аппаратуры сопровождается случайными флюктуациями режимов работы и случайными электромагнитными помехами. С повышением требований к точности ГУ увеличиваются коэффициенты усиления элементов, а вместе с тем и влияние искажений. Это приводит к искажениям сигналов, причем искажения имеют, как правило, широкополосный (шумовой) характер. Математическими моделями для описания таких процессов служат белый шум, экспоненциально коррелированный процесс и процесс с ограниченной полосой.

Чувствительные элементы (ЧЭ) гироскопических устройств являются прецизионными приборами. Это — акселерометры, гироскопы, гироскопы линейных ускорений, двухстепенные и трехстепенные гироскопы (ГБ). Однако флюктуации условий работы приводят к дрейфу ЧЭ — медленно меняющейся погрешности. В современных прецизионных ЧЭ, как правило, не удается описать математически формирование дрейфа под влиянием реальных условий работы, в связи с чем применяют стохастические модели дрейфа.

В работах, посвященных исследованию акселерометров, отмечается смещение нуля, которое может быть описано случайной постоянной величиной (она постоянна у данного экземпляра прибора и в каждом запуске и случайна по множеству приборов). Смещение нуля изменяется со временем [19, 47, 74], в связи с чем в качестве модели указанной погрешности целесообразно использовать экспоненциально коррелированный процесс с корреляционной функцией (43) и спектральной плотностью (44); при этом погрешности могут иметь среднеквадратичные значения порядка 10^{-5} — $10^{-6}g$.

Исследован дрейф ГБ [70]; обнаружен случайный характер дрейфа двухстепенных и трехстепенных ГБ. Угловая скорость дрейфа гироскопа математически описывается процессом с корреляционной функцией (43), поскольку изменение угла дрейфа со временем не является стационарным случайным процессом [54, 70]. Дрейф гироскопического интегратора выявлен теоретически и обнаружен экспериментально; он является нестационарным случайным процессом. В зависимости от длительности использования ГИ могут применяться модели дрейфа в форме полинома (29), в виде суммы полинома и низкочастотного случайного процесса с корреляционной функцией (43) и т. д.

Широкополосные процессы позволяют описать некоторые погрешности ГУ, в связи с чем выбор адекватной модели такого процесса имеет важное значение и не может быть произволь-

ным. Простейшая модель процесса с широким спектром — белый шум, она широко применяется в случаях, когда полоса пропускания системы значительно уже спектра воздействия [54, 70].

Белый шум недифференцируем [76]; не имеет производной в среднеквадратичном [58] и процесс с корреляционной функцией (43). Если рассматривается движение ГУ, то в ряде случаев целесообразно в качестве дополнительного условия учитывать дифференцируемость таких физических процессов [58] и выбирать соответствующую математическую модель. Наряду с (43) в качестве корреляционной функции процесса без преобладающей частоты $f(t)$ рассмотрены также [23]

$$K_{\Pi}(\tau) = \sigma^2 e^{-\mu|\tau|} (1 + \mu|\tau|) \quad (45)$$

и

$$K_{\kappa}(\tau) = \sigma^2 e^{-\mu|\tau|} (\cos \mu\tau + \sin \mu|\tau|), \quad (46)$$

которые получаются из (31) при $\lambda \rightarrow 0$ («предельный» процесс) и $\lambda \rightarrow \mu$ («критический» процесс). Соответствующие спектральные плотности:

$$S_{\Pi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4\mu^3\sigma^2}{(\omega^2 + \mu^2)^2}$$

и

$$S_{\kappa}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{8\mu^3\sigma^2}{\omega^4 + 4\mu^4}$$

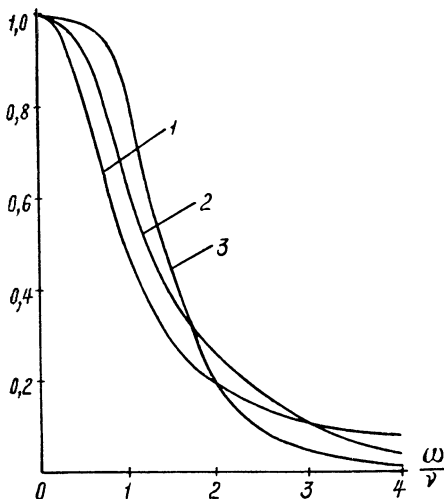


Рис. 4. Графики функций $S_i(\omega)/S_i(0)$:
1 — для $S_{III}(\omega)/S_{III}(0)$; 2 — для $S_{\Pi}(\omega)/S_{\Pi}(0)$;
3 — для $S_{\kappa}(\omega)/S_{\kappa}(0)$

представлены на рис. 4 в относительных координатах. С индексом «и» показана спектральная плотность (44); принято $\mu = 2\nu$ для «предельной» и $\mu = \nu$ для «критической» модели. Эти процессы имеют первую производную с корреляционными функциями соответственно

$$K_{\Pi'}(\tau) = \sigma^2 \mu^2 e^{-\mu|\tau|} (1 - \mu|\tau|)$$

и

$$K_{\kappa'}(\tau) = \sigma^2 \mu^2 e^{-\mu|\tau|} (\cos \mu\tau - \sin \mu|\tau|);$$

спектральные плотности производных получаются умножением соответствующих спектральных плотностей координаты на ω^2 .

Модели (43), (45) и (46) не дают стационарных процессов при интегрировании. В [75] показано, что если процесс $f(t)$

имеет корреляционную функцию (43), то интеграл от него $h(t)$ имеет дисперсию [58]

$$\sigma_h^2(t) = 2 \int_0^t (t - \tau) \cdot K_f(\tau) d\tau,$$

с учетом (43) равную

$$\sigma_h^2(t) = \frac{2\sigma_f^2}{\nu^2} [\nu t - (1 - e^{-\nu t})].$$

Отсюда при $t \ll \frac{1}{\nu}$, разлагая $e^{-\nu t}$ в ряд, можно получить $\sigma_h(t) \approx \sigma_f t$; при $t \gg \frac{1}{\nu}$ $\sigma_h(t) \approx \sqrt{\frac{2}{\nu}} \sigma_f \sqrt{t}$ т. е. вначале гироскоп

уходит пропорционально времени, а затем угол дрейфа нарастает не столь быстро. Если в реальном ГУ угол дрейфа не нарастает со временем, то в качестве корреляционной функции процесса следует принять одну из корреляционных функций, характеризующих производную некоторого другого процесса.

Для описания моделей (45) и (46) в пространстве состояний должны применяться уравнения (38) при соответствующих значениях параметров. На основании спектральной плотности (44) передаточная функция формирующего фильтра (37) примет вид

$$\Phi_1(s) = \frac{\sigma \sqrt{2\nu}}{s + \nu},$$

откуда уравнения состояния для экспоненциально коррелированного процесса (43)

$$\dot{x} = -\nu x + \sigma \sqrt{2\nu} w(t), \quad (47)$$

где x — компонента состояния процесса.

3.7. Классификация моделей гироскопических устройств в пространстве состояний

В главе 2 представлены модели в пространстве состояний большинства известных типов гироскопических устройств, в настоящей главе — модели воздействий на них. На основе анализа уравнений получены матрицы A , H , G , B , приведены варианты вектора состояния x для ГУ и воздействий, подобраны индексы компонент вектора состояния таким образом, что матрица A , как правило, может быть представлена в наглядной блочной форме. Блоки приобретают смысл математического описания частей сложной гироскопической системы, внешних воздействий и связей между частями; вектор состояния также распадается на подвекторы, характеризующие состояние соответствующих

частей ГУ и датчиков первичной информации, используемых для коррекции: акселерометра, магнитного компаса и т. д.

На основании этих данных из множества моделей можно выделить три класса, характеризуемых матрицами A одинаковой блочной структуры (см. табл. 2).

Таблица 2

Классификация линейных многомерных моделей гироскопических устройств

Класс	Вариант матрицы состояния A	Примеры ГУ, ДПИ и систем, входящих в данный класс
1 ГУ _{св}	$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}$	ГУ с корректирующей системой; ГУ с моделями случайных воздействий
2 НГУ	$\begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ E_m & 0 \end{vmatrix}$ $n=2m$	ГС на двухстепенных гироскопах без учета цепей коррекции и стабилизации (ОГС, ДГС, ТГС) Гиросинтегратор линейных ускорений Поплавковый интегрирующий гироскоп
3 КГУ	$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{vmatrix}$ Частный случай: $A_{21}=E_m$	Датчики первичной информации: акселерометр, магнитный компас и т. п. Корректируемые ГУ: маятниковый ГК; наземный ГК; ГК с электромагнитным управлением; гиротахометр; гиротахоакселерометр; вибрационные гироскопы; интегрирующе-дифференцирующий гироскоп; гироскоп-орбитант; гироскопические стабилизаторы на двухстепенных гироскопах с учетом цепей стабилизации и коррекции; гироскопические индикаторные стабилизаторы (в том числе на СГ); гироскопические следящие системы

Примечание: A — $(n \times n)$ — матрица; A_{11} — $(m \times m)$ — матрица; E_m — единичная матрица размерности m .

В моделях класса 1 с матрицами состояния A вида (20) выделяются две подсистемы с матрицами состояния A_{11} и A_{22} ; блок A_{12} отражает воздействие подсистемы с индексом «2» на подсистему с индексом «1». Такое взаимодействие имеет место в случаях, когда A_{11} — матрица состояния собственно ГУ (например, гиросtabilизированной платформы), A_{22} — матрица состояния средств коррекции, рассматриваемых с учетом их динамических характеристик (акселерометров, магнитных систем, астросистем и т. д.). Здесь вектор состояния

$$x^T = \| x_1^T \mid x_2^T \|;$$

блок A_{12} отражает подачу сигналов коррекции на ГУ. При исследовании ГУ на подвижном основании нужно учитывать

также математические модели возникающих воздействий. В тех случаях, когда возмущения могут быть описаны моделью вида (2), вектор состояния системы в целом (с учетом компонент подвектора $x_{св}$, характеризующего возмущения) принимает вид

$$x^T = \| x_{г\dot{y}}^T | x_{св}^T \|,$$

а матрица состояния также относится к классу 1: блок A_{11} характеризует ГУ, блок A_{22} — возмущения как случайный процесс и A_{12} — воздействие возмущений на ГУ. В дальнейшем изучению ГУ, находящихся под действием случайных возмущений, отводится центральное место; класс 1 далее называется классом $ГУ_{св}$.

Матрицы A вида (16) гироскопических устройств, входящих в класс 2, характерны тем, что A_{11} — $(m \times m)$ -матрица, причем $n = 2m$, т. е. введенная в описание единичная матрица имеет размерность m . К этому классу относятся прежде всего собственно ГУ как объекты управления, без учета цепей коррекции и моделей воздействий. Вектор состояния здесь распадается на два подвектора:

$$x^T = \| x_1^T | x_2^T \|,$$

причем $\dot{x}_2 = x_1$. Это означает, что в состав подвектора x_2 включаются все обобщенные координаты ГУ, в состав x_1 — соответствующие обобщенные скорости. В дальнейшем этот класс называется некорректируемыми гироскопическими устройствами (НГУ).

При замыкании в ГУ цепей коррекции матрицы состояния A , определяемые выражением (26), принимают вид, указанный в классе 3: блок A_{12} отражает цепи коррекции. Такие модели ГУ могут рассматриваться в составе моделей систем навигации или управления. В класс 3 входят также ГУ на сферических гироскопах, в которых за счет сил, возникающих в подвесе СГ, каналы оказываются связанными; эти связи отражает блок A_{12} . Общим свойством ГУ класса 3 является наличие корректирующих позиционных сигналов, которые управляют ГУ, поэтому в дальнейшем этот класс называется корректируемыми гироскопическими устройствами (КГУ). В этом классе, в отличие от класса $ГУ_{св}$, модели воздействий в виде отдельных блоков не выделяются.

Приведенный краткий обзор динамических характеристик ГУ, основанных на уравнениях первого приближения, не исчерпывает описания всех конкретных ГУ. Отражены только общие свойства линейных моделей ГУ, которые используются в настоящей работе и представляют интерес в исследованиях и синтезе ГУ. Конкретные динамические характеристики будут вводиться в рассматриваемых далее задачах.

4. ОСНОВЫ СТРУКТУРНОЙ ТЕОРИИ НАБЛЮДАЕМОСТИ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

4.1. Применение структурных методов к анализу наблюдаемости гироскопических устройств

Наблюдаемость ГУ выявляется прямым методом по рангу матрицы наблюдаемости Y , составленной по (4) на основании матриц состояния A и наблюдения H модели ГУ (2) или (3). Размерность этих матриц может быть достаточно высокой; например, для ТГС $n = 12$ даже без учета динамики цепей коррекции и стабилизации и моделей возмущений (см. главу 2). Поэтому непосредственно определить ранг матрицы Y бывает затруднительно. Поскольку прецизионные ГУ строятся преимущественно на основе гиростабилизаторов, исследование подобных систем чрезвычайно важно. Для решения этой задачи на ЦВМ на языке ФОРТРАН-IV может быть построена программа (на основе подпрограммы MFGR для ЕС ЭВМ) определения ранга матрицы и номеров взаимно независимых строк (или столбцов). Однако выявление наблюдаемости систем большой размерности сложно и для ЦВМ, поскольку наглядность прямого метода невысока; кроме того, вычислительные погрешности в ряде случаев искажают результат.

Модель в пространстве состояний можно расчленить на блоки, что эквивалентно разделению ГУ на подсистемы. Вектор состояния также разделяется на подвекторы. Такой метод декомпозиции существенно повышает эффективность анализа наблюдаемости. Снижается размерность задачи за счет введения нескольких задач (подсистем) меньшей размерности; анализируется наблюдаемость сначала каждой из подсистем, затем — ГУ в целом.

Задачей настоящей главы является разработка основ структурной теории наблюдаемости ГУ.

Метод декомпозиции, аналогичный методу структурных схем [71], позволяет большинство схем ГУ представить в виде параллельного или последовательного соединения подсистем S_1 и S_2 , а также включения подсистемы S_2 в обратную связь, охватывающую подсистему S_1 .

Структурные схемы представлены на рис. 5. Матрицы B и G не показаны, поскольку они не участвуют в анализе наблюдаемости по критерию (4).

Порядок системы в целом (размерность вектора состояния) в представленных вариантах структуры равен сумме порядков подсистем. При параллельном соединении (рис. 5, а) наблюдаемость каждой из подсистем является необходимым и достаточным условием наблюдаемости системы в целом. При последовательном соединении (рис. 5, б) наблюдаемость каждой из подсистем необходима, но недостаточна для наблюдаемости

системы в целом. При соединении подсистем в систему с обратной связью (рис. 5, в) необходимым и достаточным условием наблюдаемости замкнутой системы является наблюдаемость системы, разомкнутой на выходе подсистемы S_2 , которая, в свою очередь, определяется по схеме рис. 5, б.

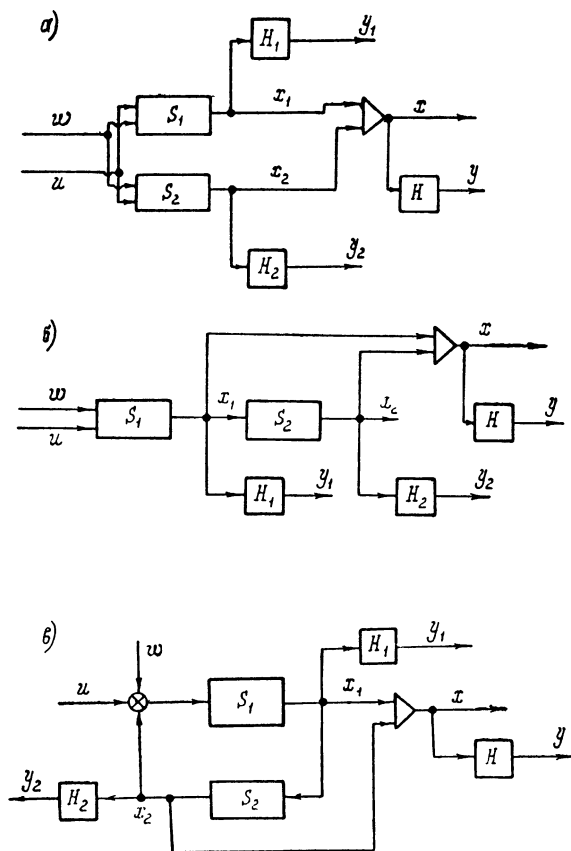


Рис. 5. Структурные схемы ГУ в задачах анализа наблюдаемости: а — параллельная; б — последовательная; в — с обратной связью

При исследовании ГУ методами пространства состояний переход к структурным схемам не всегда нужен, в особенности при решении задачи на ЦВМ. Поэтому при анализе наблюдаемости ГУ на основе векторно-матричной модели в пространстве состояний целесообразно развить и использовать метод декомпозиции, предусматривающий, прежде всего, декомпозицию вектора состояний и представление матриц модели в блочной форме [1].

Некоторые системы класса $ГУ_{св}$, по-видимому, можно представить как системы с обратной связью, класса НГУ — в виде параллельных структур, класса КГУ — в виде систем с обратной связью. Для каждого класса на основании теории блочных матриц [1] можно анализировать наблюдаемость, опираясь на свойства выделенных субматриц-блоков, и связать наблюдаемость системы в целом с наблюдаемостью подсистем. Полученные результаты являются общими для ГУ данного класса.

4.2. Наблюдаемость гироскопических устройств, находящихся под воздействием случайных возмущений

В системах этого класса ($ГУ_{св}$) матрица состояния имеет вид (20), поскольку в составе ГУ выделяются две подсистемы и связи между ними. Наблюдаемый сигнал может быть различным; если и устройство измерения состоит из двух подсистем, то матрица наблюдения имеет вид

$$H = \begin{vmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & H_{22} \end{vmatrix}. \quad (48)$$

Пусть матрицы A и H имеют размерность $(n \times n)$, матрица Y в соответствии с (4) — размерность $(n \times n^2)$;

$$A^T = \begin{vmatrix} A_{11}^T & 0 \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{vmatrix}; \quad H^T = \begin{vmatrix} H_{11}^T & 0 \\ 0 & H_{22}^T \end{vmatrix}$$

и субматрица A_{11} имеет размерность $(m \times m)$ — см. табл. 2. С учетом A^T и H^T матрица наблюдаемости может быть записана в виде

$$Y = \begin{vmatrix} H_{11}^T & 0 & \left| A_{11}^T H_{11}^T & 0 \right| & \cdots & \left| (A_{11}^T)^{n-1} H_{11}^T & 0 \right| \\ 0 & H_{22}^T & \left| A_{12}^T H_{11}^T & A_{22}^T H_{22}^T \right| & \cdots & \left| A^* & (A_{22}^T)^{n-1} H_{22}^T \right| \end{vmatrix}, \quad (49)$$

где A^* — $[(n-m) \times m]$ -матрица, тождественно не равная нулю. В составе вектора состояния можно выделить два подвектора, т. е. $x^T = \begin{vmatrix} x_1^T \\ x_2^T \end{vmatrix}$.

Теорема 1. Если полностью наблюдаемы с учетом (20) и (48) по m переменным — пара $\{A_{11}; H_{11}\}$ или система

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + N_1; \\ y_1 &= H_{11}x_1 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

и по $(n-m)$ переменным — пара $\{A_{22}; H_{22}\}$ или система

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= A_{22}x_2 + N_2; \\ y &= H_{22}x_2, \end{aligned}$$

где N_1 и N_2 — управления, возмущения и т. п., то исходная система (3) полностью наблюдаема, т. е. $\text{rank } Y = n$.

Доказательство этой теоремы основано на том, что поскольку система (50) полностью наблюдаема, для матрицы

$$Y_1 = \left\| \begin{array}{cccc} H_{11}^T & A_{11}^T H_{11}^T & \dots & (A_{11}^T)^{n-1} H_{11}^T \end{array} \right\|,$$

включающей все ненулевые блоки верхней строки матрицы Y по (49), $\text{rank } Y_1 = m$. Как видно, в состав Y полностью включается матрица наблюдаемости первой подсистемы, состоящая из m первых блоков матрицы Y_1 .

Аналогично $\text{rank } Y_2 = n - m$, где матрица

$$Y_2 = \left\| \begin{array}{cccc} H_{22}^T & A_{22}^T H_{22}^T & \dots & (A_{22}^T)^{n-1} H_{22}^T \end{array} \right\|$$

включает все ненулевые блоки нижней строки матрицы Y по (49) и, в связи с этим, — матрицу наблюдаемости второй подсистемы, которая содержит $(n - m)$ первых блоков матрицы Y_2 . На этом основании из Y_1 можно составить квадратную $(m \times m)$ -матрицу D_{11} , определитель которой $\det D_{11} \neq 0$; аналогично из Y_2 составляется $(n - m) \times (n - m)$ -матрица D_{22} , у которой определитель $\det D_{22} \neq 0$. Тогда из матрицы Y составляется по (49) $(n \times n)$ -матрица

$$D = \left\| \begin{array}{cc} D_{11} & 0 \\ D_{21} & D_{22} \end{array} \right\|,$$

где нулевая субматрица имеет размерность $m \times (n - m)$ и субматрица D_{21} получена из столбцов Y при выделении D_{11} в Y_1 .

По аналогии со свойствами обычных треугольных матриц [33, 34, 67, 72], в блочных квазиреугольных матрицах определители диагональных блоков связаны соотношением [1]:

$$\det D = \det D_{11} \cdot \det D_{22}.$$

Отсюда вытекает, что $\det D \neq 0$, т. е. $\text{rank } Y = n$, что и требовалось доказать.

В общем случае, когда $\det D_{11} = 0$ или $\det D_{22} = 0$ [1],

$$\text{rank } D \leq \text{rank } D_{11} + \text{rank } D_{22},$$

откуда следует, что теорема 1 является достаточным условием наблюдаемости этого класса ГУ. В самом деле, при $H_{22} = 0$

$$H = \left\| \begin{array}{c|c} H_1 & 0 \end{array} \right\|; \quad H^T = \left\| \begin{array}{c} H_1^T \\ \hline 0 \end{array} \right\|,$$

откуда матрица наблюдаемости на основании (49) примет вид

$$Y_0 = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} H_1^T & A_{11}^T H_1^T & \cdots & (A_{11}^T)^{n-1} H_1^T \\ \hline 0 & A_{12}^T H_1^T & \cdots & A_0^* \end{array} \right\|,$$

где субматрица A_0^* в общем случае не является нулевой. Как видно, среди миноров n -го порядка матрицы Y_0 хотя бы один может быть не равен нулю, тогда $\text{rang } Y_0 = n$. Поэтому теорема 1 не является необходимым условием.

На основании (49) можно показать, что при H_{11} $\text{rang } Y \leq n - m$, т. е. при таком устройстве измерения подсистема (50) ненаблюдаема. Тот же результат следует и из канонической формы уравнений (5) и (6) (см. раздел 1.2). Поскольку в рассмотренных обозначениях в этом классе вторая подсистема действует на первую, а не наоборот, как при получении выражения (6), это свойство должно рассматриваться относительно второй подсистемы: при $H = \| 0 \mid H_2 \|$ полностью наблюдаема только пара $\{A_{22}; H_2\}$, т. е. вторая подсистема с матрицей состояния A_{11} при этом ненаблюдаема.

4.3. Наблюдаемость некорректируемых гироскопических устройств

Для этого класса гироскопических устройств (НГУ) матрица состояния имеет вид (16), где A_{11} — $(m \times m)$ -матрица, $n = 2m$ и $x^T = \|x_1^T \mid x_2^T\|$, причем подвектор x_2 включает обобщенные координаты — углы поворота в принятой системе координат, а подвектор x_1 — соответствующие угловые скорости (см. раздел 3.7).

Если измеряются углы поворота, то матрица измерения

$$H = \| 0 \mid H_2 \| \quad (51)$$

будет $(m \times n)$ -матрицей, где H_2 — $(m \times m)$ -матрица; кроме того,

$$H^T = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \hline H_2^T \end{array} \right\|; \quad A^T = \left\| \begin{array}{cc} A_{11}^T & E \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Матрица наблюдаемости по (4) для такого случая

$$Y = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} 0 & H_2^T & A_{11}^T H_2^T & \cdots & (A_{11}^T)^{n-2} H_2^T \\ \hline H_2^T & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right\|. \quad (52)$$

Теорема 2. В этих условиях НГУ может быть наблюдаемым полностью тогда и только тогда, когда $\text{rang } H_2 = m$.

Доказательство этой теоремы основано на том, что исходя из (52) в любой не равный нулю минор n -го порядка матрицы должны войти все элементы блока H_2^T , иначе одна из строк

минора будет нулевой. Матрица наблюдаемости может быть представлена в виде

$$Y = \left\| \begin{array}{cc} 0_{(n-m) \times m} & N_B \\ H_2^T & 0_{m \times m(n-1)} \end{array} \right\|,$$

где $0_{(n-m) \times m}$ и $0_{m \times m(n-1)}$ — нулевые матрицы соответствующих размерностей; N_B — матрица, составленная из оставшихся элементов верхней строки Y по (52). Ранг матрицы определяется, например, числом независимых столбцов. Поскольку столбцы, включающие элементы блока H_2^T , и столбцы, включающие элементы блока N_B , взаимно независимы, можно утверждать, что матрица Y может иметь n независимых столбцов только при условии независимости всех столбцов блока H_2^T . Отсюда следует, что может быть $\text{rang} Y = n$ тогда и только тогда, когда $\text{rang} H_2 = m$, что и доказывает теорему.

Строго говоря, $\text{rang} H_2 = m$ может быть при различных структурах устройства измерения. Однако наиболее распространен вариант, когда $H_2 = E_m$, т. е. измеряются все обобщенные координаты; в этом случае на основании матрицы Y по (52) может быть построена $(n \times n)$ -матрица

$$Y_B = \left\| \begin{array}{cc} 0 & E_m \\ E_m & 0 \end{array} \right\|,$$

для которой $\det Y_B = (-1)^m$, т. е. гиросистема класса НГУ полностью наблюдаема, если измеряются все обобщенные координаты.

Таким образом, теорема 2 является условием необходимым и достаточным при измерении всех обобщенных координат. В общем случае достаточное условие состоит в том, что наряду с $\text{rang} H_2 = m$ в субматрице N_B должно быть m независимых столбцов, т. е. $\text{rang} N_B = m$.

Если измеряются только угловые скорости, матрица наблюдения $H = \|H_1^T \ 0\|$. В таком случае матрица Y по (4) с учетом (16) может быть записана в виде

$$Y = \left\| \begin{array}{cccc} H_1^T & A_{11}^T H_1^T & \dots & (A_{11}^T)^{n-1} H_1^T \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|.$$

Отсюда следует непосредственно, что НГУ не будет полностью наблюдаемым; непосредственно из критерия вытекает, что при этом будет m ненаблюдаемых компонент вектора состояния и что ненаблюдаемыми компонентами будут углы поворота.

4.4. Наблюдаемость корректируемых гироскопических устройств

Матрица состояния для этого класса гироскопических устройств (КГУ) имеет вид (26), и вектор состояния $x^T = \left\| \begin{matrix} x_1^T \\ x_2^T \end{matrix} \right\|$. Если измеряются компоненты только подвектора x_2 , то матрица наблюдения имеет вид (51). При

$$A^T = \left\| \begin{matrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & 0 \end{matrix} \right\|, \quad H^T = \left\| \begin{matrix} 0 \\ H_2^T \end{matrix} \right\|$$

и условии, что произведения блоков отсутствуют, можно записать матрицу наблюдаемости по (4) в виде

$$Y = \left\| \begin{matrix} 0 & \left| \begin{matrix} A_{21}^T H_2^T \end{matrix} \right| & A_{11}^T & A_{21}^T H_2^T & \dots \\ H_2^T & \left| \begin{matrix} 0 \end{matrix} \right| & 0 & \left| \begin{matrix} 0 \end{matrix} \right| & \dots \end{matrix} \right\|. \quad (53)$$

Эта матрица аналогично матрице (52) имеет блочную структуру, причем если H_2 — $(m \times m)$ -матрица, то блок A_{11} — $(n-m) \times (n-m)$ -матрица, блок $A_{21}^T H_2^T$ — $[(n-m) \times m]$ -матрица и т. д. В этих условиях может быть доказана теорема, аналогичная теореме 2 для класса НГУ.

Теорема 3. Если матрица состояния КГУ A имеет вид (26), матрица наблюдения H — вид (51), то полная наблюдаемость существует тогда и только тогда, когда $\text{rang } H_2 = m$.

Для доказательства запишем матрицу Y по (53) в виде

$$Y = \left\| \begin{matrix} 0_{(n-m) \times m} & N_D \\ H_2^T & 0_{m \times m(n-1)} \end{matrix} \right\|,$$

где нулевые матрицы $0_{(n-m) \times m}$ и $0_{m \times m(n-1)}$ имеют соответствующие размерности и матрица N_D составлена из оставшихся элементов верхней строки матрицы Y по (53). Эта теорема доказывается аналогично теореме 2, при этом следует учесть, что для наблюдаемого ГУ в составе блока N_D достаточно иметь $(n-m)$ независимых столбцов. Теорема 3 по существу является необходимым условием.

Если $n = 2m$ и $A_{21} = E_m$, то матрица состояния принимает вид (23) и при матрице наблюдения H вида (51) система может быть полностью наблюдаемой тогда и только тогда, когда $\text{rang } H_2 = m$.

Это условие может иметь место при различных устройствах измерения, однако представляют интерес измерения только

компонент подвектора x_2 , а не их комбинаций. В таком случае оно эквивалентно условию $H_2 = E_m$, т. е. должны измеряться все без исключения компоненты подвектора x_2 . Это условие, являющееся необходимым, в ГУ может быть выполнено не всегда (примеры исследования конкретных ГУ приводятся в разделе 5.2).

При измерении компонент только подвектора x_1 матрица наблюдения $H = \|H_1 \mid 0\|$, и матрице состояния A в виде (26) соответствует матрица наблюдаемости по (4)

$$Y = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} H_1^T & A_{11}^T H_1^T & & \\ \hline 0 & A_{12}^T H_1^T & \cdots & \end{array} \right\|,$$

не относящаяся ни к одному из введенных классов; ее ранг должен определяться для каждого типа ГУ прямым методом. В самом деле, при $\text{rang } H_1 < (n - m)$ может найтись не равный нулю минор n -го порядка среди миноров, не включающих столбцы блока H_1^T . Такие системы целесообразно исследовать с помощью ЦВМ.

4.5. Наблюдаемость случайных процессов

При измерении случайных процессов и, прежде всего, при оптимизации наблюдающих устройств необходимо анализировать наблюдаемость принятой модели процесса. Обычно применяют модели в виде дифференциального уравнения связи с белым шумом

$$Q(p)f(t) = P(p)\omega(t) \quad \left(p = \frac{d}{dt}\right), \quad (54)$$

где, как и в разделе 3.4, $Q(p)$ и $P(p)$ — полиномы; $f(t)$ — измеряемый процесс; $\omega(t)$ — белый шум единичной интенсивности. Представляют интерес простые случаи, когда

$$P(p) = 1 \quad (55)$$

или

$$P(p) = p^{n-1}, \quad (56)$$

где n — степень полинома $Q(p)$. В этих случаях (54) сводится к виду векторно-матричного уравнения (2), где компоненты вектора состояния — координата процесса и ее производные до $(n - 1)$ -й включительно.

Наблюдаемость процесса $x(t)$ определяется матрицами A и

H_i модели (2). Для процессов с произвольным n с учетом (54) и (55) матрица состояния A приводится к виду

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (57)$$

Это совпадает по структуре с матрицей A в (10), и уравнение (2) в таких условиях имеет каноническую форму непосредственно. Можно записать также

$$A^T = \left\| \begin{array}{c|cccccc} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hline a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} A_{11}^{(1)} & E_{n-1} \\ a_n & 0_{1 \times (n-1)} \end{array} \right\|;$$

$$(A^T)^2 = \left\| \begin{array}{c|cccccc} a_1^2 + a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 a_2 + a_3 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 a_3 + a_4 & a_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 a_{n-2} + a_{n-1} & a_{n-2} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_1 a_{n-1} + a_n & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 a_n & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} A_{11}^{(2)} & E_{n-2} \\ A_{21}^{(2)} & 0_{2 \times (n-2)} \end{array} \right\|;$$

.....

$$(A^T)^{n-2} = \left\| \begin{array}{c|cc} A_{11}^{(n-2)} & 1 & 0 \\ \hline A_{21}^{(n-2)} & 0 & 1 \\ \hline & 0_{(n-2) \times 2} & \end{array} \right\|;$$

$$(A^T)^{n-1} = \left\| \begin{array}{c|c} A_{11}^{(n-1)} & 1 \\ \hline A_{21}^{(n-1)} & 0_{(n-1) \times 1} \end{array} \right\|.$$

Здесь $A_{ij}^{(k)}$ — субматрица, стоящая в пересечении i -й строки и j -го столбца блочной матрицы $(A^T)^k$. Если

$$H = \parallel 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \parallel, \quad (58)$$

т. е. измеряется только координата процесса, то

$$H^T = \begin{vmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{vmatrix}$$

и матрица наблюдаемости по (4) принимает вид

$$Y_{1B} = \begin{vmatrix} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}}_{H^T} & \underbrace{\begin{vmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}}_{A^T H^T} & \underbrace{\begin{vmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}}_{(A^T)^2 H^T} \dots & \underbrace{\begin{vmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}}_{(A^T)^{n-1} H^T} \end{vmatrix}$$

Отсюда может быть составлен определитель

$$\det Y_{1B} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что $\det Y_{1B} \neq 0$, откуда $\text{rang } Y_{1B} = n$, т. е. все компоненты вектора x при устройстве наблюдения, описываемом (58), наблюдаемы.

Можно показать, что вектор x полностью наблюдаем и при матрицах H типа строки с единицей на любом другом месте. Например, при $H = \parallel 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \parallel$ измеряется непосредственно

первая производная случайного процесса. В этом случае

$$\begin{array}{l}
 A^T H^T = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \vdots \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} ; \\
 \\
 (A^T)^2 H^T = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \vdots \\ \hline \vdots \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} ; \\
 \dots \dots \dots \\
 (A^T)^{n-2} H^T = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \vdots \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} ; \\
 \\
 (A^T)^{n-1} H^T = \begin{array}{|c|} \hline a_1 \\ \hline a_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \vdots \\ \hline a_{n-3} \\ \hline a_{n-2} \\ \hline a_{n-1} \\ \hline a_n \\ \hline \end{array} .
 \end{array}$$

По аналогии с Y_{1B} можно составить вспомогательную матрицу

$$Y_{2B} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & a_{n-3} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_{n-2} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix},$$

определитель которой $\det Y_{2B} \neq 0$, т. е. $\text{rank } Y_{2B} = n$. Это значит, что и с таким устройством наблюдения процесс полностью наблюдаем, т. е. при канонической форме уравнений состояния полная наблюдаемость вектора состояния обеспечивается измерением любой его компоненты.

В частности, для модели случайного процесса второго порядка ($n = 2$), например, качки судна, на основании (57) можно записать

$$A^T = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Если измеряется скорость процесса, то $H = \|1 \ 0\|$ и вспомогательная матрица

$$Y_{1B}^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Определитель $\det Y_{1B}^{(2)} = a_2 \neq 0$, т. е. $\text{rank } Y_{1B}^{(2)} = 2$, и процесс полностью наблюдаем — по измерениям производной может быть восстановлено значение координаты.

Если $H = \|0 \ 1\|$, т. е. измеряется координата, то по аналогии с $Y_{1B}^{(2)}$ можно записать

$$Y_{2B}^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Определитель $\det Y_{2B}^{(2)} = -1 \neq 0$, т. е. процесс полностью наблюдаем и при измерении координаты.

Для моделей третьего порядка ($n = 3$) матрица состояния имеет вид (42). Отсюда

$$A^T = \left\| \begin{array}{c|cc} a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \\ \hline a_3 & 0 & 0 \end{array} \right\|;$$

$$(A^T)^2 = \left\| \begin{array}{c|cc} a_1^2 + a_2 & a_1 & 1 \\ \hline a_1 a_2 + a_3 & a_2 & 0 \\ a_1 a_3 & a_3 & 0 \end{array} \right\|.$$

Если, например, $H = \|1\ 0\ 0\|$, т. е. измеряется ускорение процесса, то вспомогательная матрица

$$Y_{3B}^{(3)} = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & a_1 & a_1^2 + a_2 \\ 0 & a_2 & a_1 a_2 + a_3 \\ 0 & a_3 & a_1 a_3 \end{array} \right\|$$

и определитель $\det Y_{3B}^{(3)} = -a_3^2$ также не равен нулю.

Для моделей четвертого порядка ($n = 4$) матрица состояния

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|,$$

откуда

$$A^T = \left\| \begin{array}{c|ccc} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|;$$

$$(A^T)^2 = \left\| \begin{array}{cc|cc} a_1^2 + a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_1 a_2 + a_3 & a_2 & 0 & 1 \\ \hline a_1 a_3 + a_4 & a_3 & 0 & 0 \\ a_1 a_4 & a_4 & 0 & 0 \end{array} \right\|;$$

$$(A^T)^3 = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} a_1(a_1^2 + a_2) + a_1 a_2 + a_3 & a_1^2 + a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline a_1(a_1 a_2 + a_3) + a_2^2 + a_4 & a_1 a_2 + a_3 & a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_1(a_1 a_3 + a_4) + a_3 a_2 & a_1 a_3 + a_4 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^2 a_4 + a_4 a_2 & a_1 a_4 & a_4 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Если, например, $H = \|1\ 0\ 0\ 0\|$, то вспомогательная матрица

$$Y_{4B}^{(4)} = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & a_1 & a_1^2 + a_2 & a_1(a_1^2 + a_2) + a_1 a_2 + a_3 \\ 0 & a_2 & a_1 a_2 + a_3 & a_1(a_1 a_2 + a_3) + a_2^2 + a_4 \\ 0 & a_3 & a_1 a_3 + a_4 & a_1(a_1 a_3 + a_4) + a_3 a_2 \\ 0 & a_4 & a_1 a_4 & a_1^2 a_4 + a_4 a_2 \end{array} \right\|$$

и ее определитель $\det Y_{4B}^{(4)} = -a_4^3 \neq 0$.

Представленные здесь примеры иллюстрируют особенности анализа наблюдаемости одного класса моделей случайных процессов. Как видно, использование моделей в виде формирующих фильтров (3) с уравнением состояния канонической формы обеспечивает полную наблюдаемость процесса, что соответствует физической природе воздействий на гироскопические устройства, имеющих механическую природу. Это следует иметь в виду при выборе моделей воздействий и других случайных процессов в задачах исследования ГУ.

4.6. Наблюдаемость гироскопических устройств типа гировертикалей

В классе $ГУ_{\text{ов}}$ один частный случай представляет особый интерес и не рассмотрен в разделе 4.2: если матрица состояния A имеет вид (21) и матрица наблюдения описывается выражением (22), то модель ГУ не распадается, хотя подсистемы непосредственно не взаимодействуют, и должна решаться задача полной размерности. Как показано в разделе 2.4, такие модели в определенных условиях могут иметь гировертикали; вопрос о наблюдаемости таких ГУ должен быть рассмотрен особо, поскольку ту же блочную структуру имеют матрицы, характеризующие гироскопические следящие системы и тому подобные ГУ. В связи с этим далее можно говорить о ГУ типа ГВ, относящихся к классу устройств, находящихся под действием случайных возмущений. Основная особенность рассматриваемого класса — измеряется разностный сигнал, на основании чего матрица наблюдения H принимает вид (22), и матрица состояния A имеет квазидиагональную структуру.

Для канала ГУ типа ГВ при случайных воздействиях характерны следующие условия (см. раздел 5.5).

В матрице состояния (21) блок A_{11} характеризует ГВ и полезный сигнал в виде полинома (29) степени r и представляется выражением (30), блок A_{22} характеризует случайный процесс с моделью в канонической форме (10), имеет вид (57) и размерность $(m \times m)$; при скалярном измерении разностного сигнала матрица наблюдения H имеет вид матрицы-строки со структурой (22).

Теорема 4. В этих условиях ГУ полностью наблюдаемо тогда и только тогда, когда в число компонент вектора состояния не входит свободный член полинома g_0 .

Доказательство этой теоремы строится следующим образом. На основании (4) матрица наблюдаемости может быть представлена в виде

$$Y = \left\| \begin{array}{c} H_1^T | A_{11}^T H_1^T | (A_{11}^T)^2 H_1^T | \dots | (A_{11}^T)^{n-1} H_1^T \\ H_2^T | A_{22}^T H_2^T | (A_{22}^T)^2 H_2^T | \dots | (A_{22}^T)^{n-1} H_2^T \end{array} \right\|, \quad (59)$$

где $n = m + r + 2$; H_1 имеет размерность $[1 \times (r + 2)]$, H_2 — размерность $(1 \times m)$; A_{11} представляет собой $(r + 2) \times (r + 2)$ -матрицу, A_{22} — $(m \times m)$ -матрицу. На основании (21) и того, что H_1 и H_2 имеют только по одному ненулевому элементу, можно показать, что матрица Y будет иметь размерность $(n \times n)$.

Матрица наблюдаемости пары $\{A_{11}; H_1\}$

$$Y_1 = \| H_1^T \quad A_{11}^T H_1^T \quad \dots \quad (A_{11}^T)^{r+1} H_1^T \|,$$

пары $\{A_{22}; H_2\}$

$$Y_2 = \| H_2^T \quad A_{22}^T H_2^T \quad \dots \quad (A_{22}^T)^{m-1} H_2^T \|;$$

с учетом этого (59) можно записать в виде

$$Y = \left\| \begin{array}{c} Y_1 \quad N_1 \\ N_2 \quad (A_{22}^T)^{r+2} Y_2 \end{array} \right\|, \quad (60)$$

где матрицы имеют порядок:

$$N_1 - (r + 2) \times m; \quad N_2 - m \times (r + 2);$$

$$Y_1 - (r + 2) \times (r + 2); \quad Y_2 - (m \times m).$$

Сопоставляя верхний ряд матриц (59) и (60), с учетом Y_1 можно записать

$$N_1 = (A_{11}^T)^{r+2} \| H_1^T \quad A_{11}^T H_1^T \quad \dots \quad (A_{11}^T)^{m-1} H_1^T \|.$$

Если угловая скорость $\omega_{3z} = \sum_{i=0}^r g_i t^i$, то подвектор состояния, характеризующий $\omega_{3z}(t)$, можно ввести в виде

$$x_{3z}^T = \| \omega_{3z\xi}^{(r)} \quad \omega_{3z\xi}^{(r-1)} \quad \dots \quad \dot{\omega}_{3z\xi} \quad \omega_{3z\xi} \|$$

который позволяет записать с учетом $\dot{\beta} = \omega_{3z}$

$$A_{11} = \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right\|_{(r+2) \times (r+2)} \quad (61)$$

На этом основании можно показать, что при умножении A_{11}^T на A_{11}^T косой ряд [8] сдвигается на один столбец вправо; при умножении $(A_{11}^T)^2$ на A_{11}^T — еще на столбец вправо и т. д.; $(A_{11}^T)^{r+1}$ имеет только один ненулевой элемент с индексом [1;

$(r+2)$], а $(A_{11}^T)^{r+2} = 0_{r+2}$ и т. д. Тогда $N_1 = 0_{(r+2) \times m}$, и матрица наблюдаемости принимает вид

$$Y = \begin{vmatrix} Y_1 & 0_{(r+2) \times m} \\ N_2 & (A_{22}^T)^{r+2} Y_2 \end{vmatrix}.$$

На основании свойств определителей [1]

$$\det Y = \det Y_1 \cdot \det [(A_{22}^T)^{r+2} Y_2] = \det Y_1 \cdot \det (A_{22}^T)^{r+2} \cdot \det Y_2.$$

Здесь $\det (A_{22}^T)^{r+2} \neq 0$ по условию, поскольку A_{22} имеет вид (57) и $\det A_{22} = -a_n (-1)^{m+1}$; определитель $\det Y_2 \neq 0$ также по условию, поскольку случайный процесс задан в канонической форме и является полностью наблюдаемым (см. раздел 4.5). Таким образом, значение $\det Y_1 \neq 0$ определяет $\det Y \neq 0$ и тем самым — наблюдаемость ГУ.

Для условия $\det Y_1 \neq 0$ достаточно, чтобы матрица A_{11} имела вид (61). В самом деле, при $H_1 = \| 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \|_{1 \times (r+2)}$ и

$$Y_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\det Y_1 = (-1)^{(r+2)(r+3)} \neq 0$, т. е. ГУ полностью наблюдаемо, что доказывает достаточность условия, сформулированного в теореме 4.

Необходимость условия доказывается следующим образом.

При включении свободного члена g_0 в состав вектора состояния получается $x_{\xi^*}^T = \| g_0 \omega_{3\xi}^{(r)} \ \dots \ \dot{\omega}_{3\xi} \omega_{3\xi} \|$, откуда

$$A_{11}^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

и $H_1^* = \| 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \|_{1 \times (r+3)}$. Как видно, при последовательном умножении самой на себя матрицы $(A_{11}^*)^T$ косой ряд также сдвигается на один столбец вправо при каждом умножении, в результате в матрице $[(A_{11}^*)^T]^{r+1}$ будет только один ненулевой элемент с индексом $[2; (r+3)]$; $[(A_{11}^*)^T]^{r+2} = 0_{r+3}$.

Поскольку соответствующая матрица наблюдаемости имеет вид

$$Y_1^* = \left\| (H_1^*)^T \quad (A_{11}^*)^T (H_1^*)^T \quad \dots \quad [(A_{11}^*)^T]^{r+2} (H_1^*)^T \right\|,$$

т. е. содержит один нулевой (последний) столбец, то $\det Y_1^* = 0$. Это доказывает необходимость исключения из вектора состояния свободного члена полинома — модели полезного сигнала.

Применительно к ГУ типа ГВ полученный результат означает, что по измерениям разностного сигнала $y = \beta - \chi_1$ может быть восстановлено текущее значение полезного сигнала — например, угловой скорости вращения вертикали, — и не может быть восстановлено его начальное значение.

Представленные результаты являются основой структурной теории наблюдаемости ГУ, в качестве иллюстрации далее эти задачи решаются для конкретных гироскопических приборов. На основе введенной классификации моделей во многих случаях удается понизить размерность задачи с помощью приведенных теорем; при декомпозиции моделей конкретных ГУ может быть учтена физическая природа блоков, математически описывающих движение ГУ, системы коррекции, стабилизации и усилительно-преобразовательный тракт. Доказанные теоремы имеют смысл достаточных или необходимых условий; они не охватывают всех возможных схем ГУ и систем измерения, и в ряде случаев требуется выполнить непосредственный анализ наблюдаемости прямыми методами.

На основании структурных методов получены общие качественные результаты, позволяющие, как это будет показано дальше, непосредственно по структуре измерительного устройства решить вопрос о наблюдаемости конкретного ГУ.

5. НАБЛЮДАЕМОСТЬ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

5.1. Датчики первичной информации

Датчики первичной информации (ДПИ) — акселерометр, магнитный компас, ПИГ, гиротахометр и т. п. — описываются в задачах оптимизации ГУ дифференциальными уравнениями не выше второго порядка. Если матрица состояния

$$A = \left\| \begin{array}{cc} -a_{11} & -a_{12} \\ 1 & 0 \end{array} \right\|$$

и матрица наблюдения $H = \| 0 \ 1 \|$, то такие ДПИ можно отнести к классу КГУ. Они удовлетворяют условиям, следующим из

теоремы 3 (см. раздел 4.4). Системы этого типа полностью наблюдаемы (см. также раздел 4.6); к ним относятся гироскоп, магнитный компас, акселерометр.

Матрица состояния ПИГ (на основании раздела 2.6)

$$A_{\text{пиг}} = \left\| \begin{array}{cc} -\frac{1}{T_r} & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right\|$$

имеет вид (16); $x_1 = \beta$; $x_2 = \dot{\beta}$; матрица наблюдения $H = \| 0 \ 1 \|$. Таким образом, ПИГ относится к классу НГУ. Матрица наблюдаемости

$$Y_{\text{пиг}} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\|;$$

$\det Y_{\text{пиг}} = -1$, т. е. ПИГ является полностью наблюдаемой системой.

Широкий класс ГУ построен на базе трехстепенного астатического гироскопа. Трехстепенной гироскоп на основе АГ относится к классу НГУ по аналогии с ПИГ, его матрица состояния имеет блок

$$A_{11} = \left\| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right\|.$$

Если измеряются оба угла поворота гироскопа, то матрица измерения вида (51) имеет блоки

$$H = \| 0 \ H_2 \| = \| 0_2 \ E_2 \|. \quad (62)$$

Как видно, такие системы удовлетворяют условиям теоремы 2 и полностью наблюдаемы. Сюда относятся ГВ, гироскопы или ГСС и подобные системы, в которых измеряются обе обобщенные координаты. Если же измеряется угол поворота АГ относительно только одной (например, внутренней) оси подвеса, то матрица измерения (62) содержит блок

$$H_2 = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

для которого $\text{rang } H_2 = 1 < m = 2$, и условия теоремы 2 не выполняются; такие ГУ ненаблюдаемы. Сюда относятся, например, гироскопы, гироскопический интегратор, а также одноосный гироскопический стабилизатор без системы коррекции. В этих ГУ при измерении только одного угла (например, угла прецессии в ОГС) другой угол (обобщенная координата) ненаблюдаем (угол стабилизации в ОГС).

5.2. Стабилизаторы на двухстепенных гироскопах

Математические модели гиросtabilизаторов на двухстепенных гироскопах без учета усилительно-преобразовательных трактов относятся к классу НГУ (см. главу 3), условия наблюдаемости которого определяются теоремой 2. Если измеряются только углы прецессии, то $\text{rang } H_2 = m/2$ и система ненаблюдаема: для полной наблюдаемости должны измеряться также углы стабилизации, тогда $\text{rang } H_2 = m$. При измерении только угловых скоростей относительно осей стабилизации $H_2 = 0$, и матрица наблюдаемости Y имеет вид, представленный для этого случая в разделе 4.3; система ненаблюдаема, наблюдаемой здесь может быть только пара $\{A_{11}; H_1\}$, т. е. только угловые скорости относительно осей стабилизации; углы прецессии не будут наблюдаемыми.

Если в ГС измеряются угловые скорости и углы поворота, то матрица наблюдения H имеет вид (48); при отсутствии в векторе состояния компонент, характеризующих системы коррекции и стабилизации, $n = 2m$ (см. раздел 2.7) и гиросtabilизаторы относятся к классу НГУ. Поскольку матрица A имеет здесь вид (16), матрица наблюдаемости, составленная по (4), в этом случае

$$Y = \left\| \begin{array}{cc|cc|cc} H_{11}^T & 0 & A_{11}^T H_{11}^T & H_{22}^T & (A_{11}^T)^2 H_{11}^T & A_{11}^T H_{22}^T & \dots \\ 0 & H_{22}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & (A_{11}^T)^{n-1} H_{11}^T & (A_{11}^T)^{n-2} H_{22}^T & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\|. \quad (63)$$

Отсюда следует, что наличие в матрице наблюдения субматрицы $H_{11} \neq 0$, характеризующей измерение угловых скоростей в ГС, не изменяет условий наблюдаемости; необходимым для полной наблюдаемости системы остается условие $\text{rang } H_{22} = m$, в противном случае по (63) $\text{rang } Y < n$. Это означает, что и при измерении угловых скоростей относительно осей стабилизации и прецессии в гиросtabilизаторе должны измеряться все углы — стабилизации и прецессии. Это — необходимое условие полной наблюдаемости стабилизаторов на двухстепенных гироскопах; при измерении только углов прецессии углы стабилизации ненаблюдаемы.

В модели трехстепенных гиросtabilизаторов (см. раздел 2.7) $A_{12} = 0$, поскольку без учета усилительно-преобразовательного тракта связи между каналами в первом приближении обусловлены угловыми скоростями и ускорениями и не зависят от углов поворота, т. е. эти связи характеризуются членами субматрицы A_{11} ; условие полной наблюдаемости ТГС сохраняется в форме теоремы 2.

Модели гиросtabilизаторов и прежде всего трехосного имеют достаточно высокую размерность; кроме того, в ряде случаев требования к каналам коррекции и стабилизации могут быть удовлетворены различными приемами. Например, в практике проектирования ГС канал стабилизации в первом приближении синтезируется независимо от канала коррекции. Если в закон управления стабилизирующим двигателем включаются только сигналы, пропорциональные углам прецессии и угловым скоростям относительно осей прецессии и стабилизации, то коэффициенты регулятора войдут в блоки A_{12} и A_{11} и модель ГУ будет относиться к классу КГУ; здесь сохранится $n = 2m$. Необходимое условие наблюдаемости для таких ГУ дает следствие из теоремы 3 (см. раздел 4.4): для обеспечения полной наблюдаемости должны измеряться углы прецессии и углы стабилизации; замыкание канала стабилизации не меняет этого условия, если при управлении в канале стабилизации все углы и угловые скорости измеряются без искажений. Далее влияние искажений рассматривается специально (см. раздел 5.3).

Для ГС на подвижном основании необходимо учитывать модели случайных воздействий (см. раздел 3.1). При исследовании случайных процессов в ГС методами пространства состояний вектор состояния ГС расширяется за счет компонент подвектора состояния этих моделей. Матрицу состояния A целесообразно представлять в виде (20), где A_{11} относится к ГУ, A_{22} к модели случайных воздействий, A_{12} отражает действие случайных возмущений на ГС. Такая система относится к классу ГУ_{св}, и достаточное условие ее наблюдаемости дает теорема 1: для полной наблюдаемости системы достаточно, чтобы были полностью наблюдаемы собственно ГС и случайные возмущения как автономные системы; задача разделяется и для каждой подсистемы (ГС и возмущения) решается по своим критериям.

Наблюдаемость случайных процессов (раздел 4.5) обеспечивается выбором соответствующей модели и измерением, например, одной из компонент подвектора состояния $x_{св}$ (раздел 3.7). Гиросtabilизатор как автономная система наблюдаем полностью только при измерении углов стабилизации и углов прецессии. Уравнения движения одноосного ГС на качающемся основании с учетом моделей раздела 2.7 можно записать в виде [54]

$$\ddot{\alpha}_n = \frac{H_r}{J_{zn}} \dot{\theta} + \frac{\mu_a}{J_{zn}} \dot{\alpha}_c - \frac{\mu_a}{J_{zn}} \dot{\alpha}_n + \xi_a \ddot{\alpha}_c + u_a;$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{H_r}{J_b} \dot{\alpha}_n - \frac{\mu_b}{J_b} \dot{\theta} + u_\theta,$$

где принято, что колебательное движение основания действует на ГС через обкатку и вязкое трение относительно оси стаби-

лизации; сохранены обозначения раздела 2.7 и обозначены через μ_α и μ_θ управления относительно соответствующих осей; кроме того, принято, что относительно оси прецессии действует вязкое трение, а внешних возмущений нет, т. е. рассматривается канал двух- или трехосного гиросtabilизатора, в котором движение основания относительно оси прецессии в первом приближении возмущений не создает.

Для математического описания угла качки основания $\alpha_c(t)$ можно использовать в простейшем случае узкополосный случайный процесс с корреляционной функцией (31), спектральной плотностью (34) и уравнением состояния (38). При синтезе закона управления в канале стабилизации, как правило, не предполагается измерение погрешности стабилизации, поэтому измеряется только угол относительно оси прецессии. На основании теоремы 2 угол стабилизации ненаблюдаем. В этом случае α_{II} не включается в состав вектора состояния.

С учетом обозначений раздела 2.7 можно записать матрицу состояния ГС

$$A_{\text{орг}} = \left\| \begin{array}{ccc|cc} -\frac{1}{T_\alpha} & \chi \frac{k_\Gamma}{T_\Gamma} & 0 & -\xi_\alpha b_c^2 & \frac{1}{T_\alpha} - 2\mu_c \xi_\alpha \\ -\frac{k_\Gamma}{T_\Gamma} & -\frac{1}{T_\Gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & 0_{2 \times 3} & 0 & 1 \\ & & & -b_c^2 & -2\mu_c \end{array} \right\|$$

и матрицу наблюдения

$$H_{\text{орг}} = \| 0 \quad 0 \quad 1 \mid 0 \quad 0 \| = \| H_1 \mid 0_{1 \times 2} \|.$$

Матрица возмущений в этом случае

$$G = \left\| \begin{array}{c} 2\xi_\alpha \sigma_c b_c \sqrt{\mu_c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\sigma_c b_c \sqrt{\mu_c} \end{array} \right\|,$$

где $\sigma_c, \mu_c, b_c^2 = \mu_c^2 + \lambda_c^2$, λ_c — параметры модели качки.

Матрица $A_{\text{орг}}$ имеет вид (20), однако матрица $H_{\text{орг}}$ не приводится к виду (48): субматрица $H_2 = 0$, поэтому компоненты

случайного процесса α_c и $\dot{\alpha}_c$ могут быть ненаблюдаемыми по теореме 1 при данном устройстве наблюдения. Блок

$$A_{11} = \left\| \begin{array}{cc|c} -\frac{1}{T_\alpha} & \chi \frac{k_r}{T_r} & 0 \\ -\frac{k_r}{T_r} & -\frac{1}{T_r} & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|$$

отражает динамику ГС, для него матрица наблюдения $H_\alpha = \| 0 \ 0 \ 1 \|$, отсюда по (4) матрица наблюдаемости ГС

$$Y_{11} = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -\frac{k_r}{T_r} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{T_r} \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Определитель $\det Y_{11} = -\frac{k_r}{T_r}$, на этом основании компоненты

$\dot{\alpha}_n$, $\dot{\theta}$ и θ , характеризующие ОГС на подвижном основании, полностью наблюдаемы.

Исследование трехосного гироскопического стабилизатора на качающемся основании затруднено высокой размерностью математической модели (см. раздел 2.7), в состав которой входят динамические уравнения гиросtabilизированной платформы в подвесе и уравнения формирующих фильтров случайных возмущений. Для ТГС на трех ПИГ [48] вектор состояния

$$x^T = \| \dot{\alpha}_n \ \dot{\beta}_n \ \dot{\gamma}_n \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \ \alpha_n \ \beta_n \ \gamma_n \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ \dot{\alpha}_c \ \dot{\beta}_c \ \dot{\gamma}_c \ \dot{\gamma}_c \|$$

позволяет учесть угловые скорости дрейфа гироскопов ε_i ($i = \overline{1, 3}$) с уравнениями формирующих фильтров вида (47) и качку основания, характеризуемую координатами $\alpha_c(t)$, $\beta_c(t)$ и $\gamma_c(t)$ с корреляционными функциями, как и ранее, в виде (31); размерность вектора состояния $n = 21$. Блочная структура матрицы состояния A может быть записана в виде (20) следующим образом:

$$A = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ 0_{9 \times 12} & A_{22} \end{array} \right\|,$$

где

$$A_{11} = \left\| \begin{array}{cc} A_{11}^0 & 0_6 \\ E_6 & 0_6 \end{array} \right\|;$$

$$A_{22} = \text{diag} \{ A_\varepsilon \quad A_{\alpha c} \quad A_{\beta c} \quad A_{\gamma c} \};$$

$$A_\varepsilon = \text{diag} \left\{ -\frac{1}{T_\varepsilon} \quad -\frac{1}{T_\varepsilon} \quad -\frac{1}{T_\varepsilon} \right\};$$

$$A_{ic} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -b_{ic}^2 & -2\mu_{ic} \end{array} \right\| \quad (i \text{ есть } \alpha, \beta \text{ или } \gamma);$$

$$A_{11}^0 = \left\| \begin{array}{ccc} -\frac{1}{T_\alpha} & 0 & -\chi_z \frac{k_r}{T_r} \\ -\chi_y \frac{k_r}{T_r} & -\frac{1}{T_\beta} & 0 \\ -\chi_x \frac{k_r}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_\gamma} \\ -\frac{k_r}{T_r} (1 + \chi_x) & 0 & -\frac{1}{T_\gamma} \\ -\frac{1}{T_\alpha} & -\frac{k_r}{T_r} & -\chi_z \frac{k_r}{T_r} \\ -\frac{1}{T_\alpha} & 0 & -\frac{k_r}{T_r} (1 + \chi_z) \end{array} \right\|;$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} \chi_z \frac{k_r}{T_r} & \chi_z \frac{1}{T_r} & \chi_z \frac{1}{T_r} \\ 0 & \chi_y \frac{k_r}{T_r} & 0 \\ \chi_x \frac{1}{T_r} & 0 & \chi_x \frac{k_r}{T_r} \\ -\frac{1 - \chi_x}{T_r} & 0 & \chi_x \frac{k_r}{T_r} \\ \chi_z \frac{k_r}{T_r} & -\frac{1 - \chi_z}{T_r} & \chi_z \frac{1}{T_r} \\ \chi_z \frac{k_r}{T_r} & \chi_z \frac{1}{T_r} & -\frac{1 - \chi_z}{T_r} \end{array} \right\|;$$

0	0	0	0
0	0	0	0
$-\epsilon_1 b_2^{rc} - \frac{J^r}{1} - 2\mu_1 \epsilon_1^{cs_1}$	$-\epsilon_1 b_2^{rc}$	0	0
0	0	$-\epsilon_2 b_2^{pc} - \frac{J^p}{1} - 2\mu_2 \epsilon_2^{cs_2}$	0
0	0	0	0

$\frac{1}{1}$	0	0	0	$-\epsilon_a b_2^{ac} - \frac{J^a}{1} - 2\mu_a \epsilon_a^{cs_a}$
$\frac{r_1}{1}$	0	0	0	$-\epsilon_a b_2^{ac} - \frac{J^a}{1} - 2\mu_a \epsilon_a^{cs_a}$
0	0	0	0	0
0_3	0	0	0	$-\epsilon_a b_2^{ac} - \frac{J^a}{1} - 2\mu_a \epsilon_a^{cs_a}$

$$A_{12} = \left\| \begin{array}{c} A_{12}^0 \\ 0_{6 \times 9} \end{array} \right\| ;$$

$$k_r = \frac{H^r}{T^r} = \frac{H^r}{T^r} ;$$

(сохранены обозначения раздела 2.7, а также принятые ранее для ОГС и параметров качки).

При измерении только углов прецессии матрица наблюдения

$$H = \| \| 0_{3 \times 9} \quad E_3 \quad 0_{3 \times 9} \| \| = \| \| H_1 \quad 0_{3 \times 9} \| \|,$$

где матрица H_1 размерности (3×12) входит в пару $\{A_{11}; H_1\}$. В представленной модели шесть процессов — возмущения (три дрейфа и три качки), поэтому вектор белых шумов $\omega^T = \| \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 \omega_6 \|$ и блочная матрица возмущений

$$G = \left\| \left\| \begin{array}{cc} 0 & G_{12} \\ 0 & G_{22} \\ 0 & 0 \\ G_{41} & 0 \\ 0 & G_{52} \end{array} \right\| \right\|,$$

где

$$G_{12} = \text{diag} \{ \xi_\alpha 2b_{\alpha c} \sigma_{\alpha c} \sqrt{\mu_{\alpha c}} \quad \xi_\beta 2b_{\beta c} \sigma_{\beta c} \sqrt{\mu_{\beta c}} \quad \xi_\gamma 2b_{\gamma c} \sigma_{\gamma c} \sqrt{\mu_{\gamma c}} \};$$

$$G_{41} = \text{diag} \left\{ \sigma_\alpha \sqrt{\frac{2}{T_\alpha}} \quad \sigma_\beta \sqrt{\frac{2}{T_\beta}} \quad \sigma_\gamma \sqrt{\frac{2}{T_\gamma}} \right\};$$

$$G_{22} = \left\| \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \xi_\gamma 2b_{\gamma c} \sigma_{\gamma c} \sqrt{\mu_{\gamma c}} \\ \xi_\alpha 2b_{\alpha c} \sigma_{\alpha c} \sqrt{\mu_{\alpha c}} & 0 & 0 \\ \xi_\beta 2b_{\beta c} \sigma_{\beta c} \sqrt{\mu_{\beta c}} & 0 & 0 \end{array} \right\| \right\|;$$

$$G_{52} = \left\| \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 2b_{\alpha c} \sigma_{\alpha c} \sqrt{\mu_{\alpha c}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b_{\beta c} \sigma_{\beta c} \sqrt{\mu_{\beta c}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b_{\gamma c} \sigma_{\gamma c} \sqrt{\mu_{\gamma c}} \end{array} \right\| \right\|.$$

Аналогично рассмотренному ОГС и в модели ТГС возмущения могут быть ненаблюдаемыми при измерении только углов прецессии, поскольку достаточное условие теоремы 1 и в данной модели не выполняется. Пара $\{A_{11}; H_1\}$ не будет полностью наблюдаемой, так как $\text{rank } H_1 = 3$, в то время как число обобщенных координат $m = 6$; условия наблюдаемости таких ГУ из теоремы 2 (см. раздел 4.3) для данной модели ТГС не выполняются. Ненаблюдаемы здесь углы стабилизации α_π , β_π и γ_π , и потому при исследовании и оптимизации ТГС без коррекции (без непосредственного измерения углов стабилизации) эти компоненты в состав вектора состояния включать не следует.

Наблюдаемость компонент вектора состояния, характеризующих возмущения, проверяется прямыми методами по критерию (4).

5.3. Наблюдаемость гироскопических устройств с учетом характеристик усилительно-преобразовательного тракта

При переходных процессах в усилительно-преобразовательных трактах (УПТ) систем коррекции и стабилизации матрица состояния A приводится к виду (26); если матрица наблюдения H такая, как (51), — измеряются только углы поворота ГУ, — то матрица наблюдаемости Y принимает вид (53), откуда необходимо условие наблюдаемости по теореме 3 $\text{rang } H_2 = m$.

Из доказательства теоремы 3 следует также, что при $\text{rang } H_2 = m$ гироскопическое устройство полностью наблюдаемо (достаточное условие), если субматрица N_D имеет $(n - m)$ независимых столбцов, т. е. при

$$\text{rang } N_D = n - m, \quad (64)$$

здесь N_D есть $(n - m) \times m(n - 1)$ -матрица.

Необходимое условие удовлетворяется, например, при $H_2 = E_m$, т. е. если измеряются все углы поворота. Условие (64) нужно рассмотреть дополнительно. Если ГУ имеет m обобщенных (нециклических [39]) координат и компоненты состояния УПТ в их число не входят, то субматрица A_{21}^T содержит $r_0 = n - 2m$ нулевых строк (примеры приведены в главе 2). В произведении $A_{21}^T H_2^T = A_{21}^T$ будет r_0 нулевых строк, однако в $A_{11}^T A_{21}^T H_2^T$ нулевых строк уже не будет и т. д. — см. (53). Имеется в виду, что УПТ замкнут, т. е. сигналы коррекции или стабилизации с его выхода поданы на ГУ. Это значит, что в принятых условиях на основании доказанных теорем наблюдаемость ГУ выявить не удается и ранг субматрицы N_D нужно определять прямыми методами.

При матрице H вида (51) и $\text{rang } H_2 = m + r_0$ (в измеряемый сигнал включены также r_0 позиционных координат состояния УПТ) матрицу состояния A целесообразно представить так, чтобы блок A_{22} имел размерность $(m + r_0) \times (m + r_0)$ и характеризовал именно эти компоненты. Тогда

$$A = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Bmatrix}, \quad (65)$$

где все блоки ненулевые. Матрица наблюдаемости по (4)

$$Y = \begin{Bmatrix} 0 & \{ A_{21}^T H_2^T \} & \{ (A_{11}^T A_{21}^T + A_{21}^T A_{22}^T) H_2^T \} & \dots \\ H_2^T & \{ A_{22}^T H_2^T \} & \{ [A_{12}^T A_{21}^T + (A_{22}^T)^2] H_2^T \} & \dots \end{Bmatrix}; \quad (66)$$

при $H_2 = E_{m+r_0}$ в субматрице A_{21}^T можно выделить блок E_m (см. примеры в главе 2), т. е. представить $A_{21}^T = \|0_{m+r_0} E_m\|$. Поскольку в блоке A_{22}^T все столбцы, соответствующие блоку E_m в A_{21}^T , нулевые, из (66) можно составить матрицу

$$Y_B = \left\| \begin{array}{cc} 0 & E_m \\ E_{m+r_0} & 0 \end{array} \right\|,$$

определитель которой $\det Y_B = \pm 1$ в зависимости от n , и ГУ будет полностью наблюдаемым. При этом должны измеряться позиционные компоненты состояния УПТ. Однако компоненты состояния датчиков угла и момента, стабилизирующих двигателей и другой усилительно-преобразовательной аппаратуры имеют характер силы, момента, какой-либо магнитной величины и измерить их не всегда можно. Следует отметить, что условие (64) является достаточным.

Таким образом, технически трудно обеспечить полную наблюдаемость ГУ с замкнутым усилительно-преобразовательным трактом. Если УПТ не замкнуты, т. е. сигналы с их выхода на ГУ не подаются, то в матрице состояния (65) $A_{12} = 0$ и уравнения принимают каноническую форму наблюдаемости (5) и (6), если $H = \|H_1 \ 0\|$. Пара $\{A_{11}; H_1\}$ полностью наблюдаема, остальные компоненты, в том числе и компоненты состояния УПТ, ненаблюдаемы. Это значит, что при разомкнутых УПТ компоненты их состояния для обеспечения наблюдаемости должны измеряться.

5.4. Гиросtabilизаторы на сферических гироскопах

Гироскопические устройства типа ГС на сферических гироскопах относятся к классу корректируемых (КГУ). Необходимым условием их полной наблюдаемости является следствие из теоремы 3: если матрица наблюдения имеет вид (51), то для обеспечения полной наблюдаемости должны измеряться углы прецессии гироскопов и углы поворота платформы. При измерении автономными датчиками также угловых скоростей относительно осей прецессии или стабилизации матрица наблюдения имеет вид (48) и матрица наблюдаемости по (4)

$$Y = \left\| \begin{array}{cc|cc} H_{11}^T & 0 & A_{11}^T H_{11}^T & H_{22}^T \\ 0 & H_{22}^T & A_{12}^T H_{11}^T & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} [(A_{11}^T)^2 + A_{12}^T] H_{11}^T \\ A_{11}^T H_{22}^T \\ \dots \end{array} \right\|.$$

не относится ни к одному из рассмотренных выше частных случаев блочных матриц. Ее ранг нужно определять прямыми методами. Если $H_{22} = 0$ (измеряются только угловые скорости), матрица принимает вид, описанный для этих условий в разделе 4.4, и ее ранг также нужно определять прямыми методами. При

$H_1 = E$ для двухосного ГС в таком случае можно показать с учетом вида A_{12} (см. раздел 2.8), что для блока $A_{12}^T H_1^T$ определитель $\det A_{12}^T H_1^T \equiv 0$, однако относительно других миноров такой определенный вывод сделать трудно. В то же время состав блока A_{12} , отражающего позиционные связи между каналами ГС, показывает, что система может быть полностью наблюдаемой благодаря связям, обусловленным упругим взаимодействием роторов с платформой и воздействием на движение элементов ГУ вращающих моментов приводных двигателей.

5.5. Гировертикаль

Наблюдаемость компонент вектора состояния ГУ с системой коррекции (ГВ) можно исследовать на разных математических моделях (см. раздел 2.4). При учете только вращения Земли матрица состояния

$$A^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & \omega_{3\tau} \\ -\omega_{3\tau} & 0 \end{vmatrix};$$

при матрице наблюдения $H = E_2$ матрица наблюдаемости

$$Y_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \omega_{3\tau} \\ 0 & 1 & -\omega_{3\tau} & 0 \end{vmatrix}.$$

Поскольку $\text{rang } Y_1 = 2$, гировертикаль полностью наблюдаема.

Если дрейф ГУ, на котором строится гировертикаль, учитывается в форме двух уравнений формирующих фильтров вида (47), то матрица состояния

$$A_e = \left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & \omega_{3\tau} & & \\ -\omega_{3\tau} & 0 & & E_2 \\ \hline & & -\nu_1 & 0 \\ 0_2 & & 0 & -\nu_2 \end{array} \right\|,$$

вектор состояния $x^T = \|\alpha \beta \varepsilon_1 \varepsilon_2\|$, матрица наблюдения $H_e = \|\| E_2 \ 0_2 \|$.

Как видно, пара $\{A_e; H_e\}$ не удовлетворяет условиям теоремы 1, однако это не исключает полной наблюдаемости системы. Составляя матрицу наблюдаемости по (4), можно записать:

$$Y_e = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -\omega_{3\tau} \\ 0 & 1 & \omega_{3\tau} & 0 \\ \hline & & 0 & 1 \\ 0_2 & & 1 & 0 \end{array} \right\| \dots$$

откуда уже по первым четырем столбцам можно найти, что $\text{rank } Y_e = 4$ и система полностью наблюдаема. Этот результат означает, что, в частности, дрейфы в системе могут быть определены на основании показаний системы коррекции.

При компенсации составляющей U_z каналы ГВ в прецессионной постановке разделяются. Если не учитывается дрейф гироскопа, то уравнения состояния канала ГВ на качающемся основании можно записать

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= 0; \\ \dot{\rho} &= -2\mu\rho - b^2\chi + 2\sigma b \sqrt{\mu\omega}; \\ \dot{\chi} &= \rho, \end{aligned} \quad (67)$$

где сохраняются обозначения раздела 3.4, и корреляционная функция колебаний акселерометра принимается в виде (31). Тогда матрица состояния

$$A_k = \left\| \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2\mu & -b^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0_{1 \times 2} \\ \hline 0_{2 \times 1} & A_{22} \end{array} \right\|,$$

вектор состояния $x^T = \|\alpha \ \chi \ \rho\|$ и матрица наблюдения при измерении разностного сигнала $y = \alpha - \chi$ будет иметь вид

$$H_k = \|\ 1 \ | \ 0 \ \ -1 \| = \| H_1 \ \ H_2 \|.$$

Пара $\{A_k; H_k\}$ удовлетворяет условиям теоремы 4 (см. раздел 4.6), и модель ГВ в виде (67) полностью наблюдаема.

При учете дрейфа гироскопа уравнение движения канала ГВ имеет вид $\dot{\alpha} = \varepsilon$; приняв модель процесса $\varepsilon(t)$ в форме (47), для канала ГВ на качающемся основании из (67) можно записать матрицу состояния в виде

$$A_{*k} = \left\| \begin{array}{c|cc} 0 & 1 & \\ \hline 0 & -\nu & 0_2 \\ \hline 0_2 & -2\mu & -b^2 \\ & 1 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} A_{11} & 0_2 \\ \hline 0_2 & A_{22} \end{array} \right\|;$$

если вектор состояния $x^T = \|\alpha \ \varepsilon \ \chi \ \rho\|$, то при измерении сигнала $y = \alpha - \chi$ матрица измерения

$$H_{*k} = \|\ 1 \ \ 0 \ | \ 0 \ \ -1 \| = \| H_1 \ \ H_2 \|.$$

Пара $\{A_{\varepsilon K}; H_{\varepsilon K}\}$ не удовлетворяет условиям ни одной из приведенных выше теорем, и приходится пользоваться прямыми методами. По (4) матрица наблюдаемости

$$Y_{\varepsilon K} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\nu^2 & \nu^2 \\ 0 & -1 & 2\mu & -(4\mu^2 - b^2) \\ -1 & 0 & b^2 & -2\mu b^2 \end{vmatrix},$$

ее определитель $\det Y_{\varepsilon K} = b^2(2\mu\nu - b^2 - \nu^2)$. Отсюда $\text{rank } Y_{\varepsilon K} = 4$, и пара $\{A_{\varepsilon K}; H_{\varepsilon K}\}$ полностью наблюдаема.

Пренебрегая связями между каналами ГВ, опуская дрейф гироскопа и принимая, что по каналу коррекции ГУ (астати́ческий гироскоп или гиросtabilизированная платформа) ведет себя как идеальное интегрирующее звено [49], уравнение движения ГВ в прецессионной постановке можно по одному каналу записать в виде $\dot{\beta} = \omega_{3\xi}$.

В первом приближении можно принять, что угловая скорость вращения вертикали места [49]

$$\omega_{3\xi} = -\omega_3 \cos \varphi \sin K - \frac{V}{R_3}$$

изменяется со временем по формуле вида (29):

$$\omega_{3\xi} = \omega_{3\xi 0} + \omega_{\xi} t,$$

где $\omega_{3\xi 0}$, ω_{ξ} — случайные коэффициенты.

Считая идеальным акселерометр, используемый для коррекции, можно записать выходной сигнал в виде $y = \beta - \chi$, где

$$\chi = \frac{l}{g} \ddot{\psi} \quad (68)$$

— угол отклонения кажущейся вертикали от истинной; l — приведенная длина маятника; ψ — угол дифферента, изменяющийся случайным образом.

Математической моделью случайного процесса $\psi(t)$ может служить дифференциальное уравнение связи с белым шумом третьего порядка, в котором ускорение является компонентой состояния и матрица состояния имеет вид (42) [24, 28]. Можно ввести вектор состояния

$$x^T = \|\omega_{\xi} \quad \omega_{3\xi} \quad \beta \quad \dot{\psi} \quad \psi\|,$$

тогда в приведенном к виду (3) уравнении матрица состояния

$$A_{\xi} = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & 0_3 & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \hline & & & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & 0_3 \\ 0_3 & A_{22} \end{array} \right\|.$$

Система распадается на две подсистемы, т. е. имеет место частный случай класса ГУ_{св} при $A_{12} = 0_3$ (случайного воздействия на ГУ непосредственно нет). Матрица наблюдения

$$H_{\xi} = \left\| \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -\frac{l}{g} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} H_1 & H_2 \end{array} \right\|$$

имеет вид (22). Поскольку матрица A имеет вид (21), блоки A_{11} и A_{22} в ней — соответственно (30) и (42), пара $\{A_{\xi}; H_{\xi}\}$ удовлетворяет условиям теоремы 4 и полностью наблюдаема.

Если учесть, что информация о состоянии ГВ на выходе акселерометра имеет динамическое запаздывание, то в соответствии с разделом 3.1 в модель ГВ должна быть включена модель акселерометра. В простейшем случае акселерометр на частотах

качки можно описать дифференциальным уравнением $T_a \dot{\rho}_a + \rho_a = \beta - \chi$, или, с учетом (68),

$$\dot{\rho}_a = -\frac{1}{T_a} \rho_a + \frac{1}{T_a} \beta - \frac{l}{gT_a} \ddot{\psi},$$

и в качестве модели процесса $\psi(t)$ использовать процесс второго порядка с корреляционной функцией (31). Опуская дрейф ги-

роскопа и вводя вектор состояния $x^T = \left\| \omega_{\xi} \ u_{\xi} \ \beta \ \dot{\psi} \ \psi \ \rho_a \right\|$, можно записать матрицу состояния

$$A_{\rho} = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & 0_3 & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2\mu & -b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_a} & \frac{2\mu l}{gT_a} & \frac{b^2 l}{gT_a} & -\frac{1}{T_a} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & 0_3 \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right\|$$

и матрицу наблюдения при измерении $y = \rho_a$ в виде

$$H_{\rho} = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|_{0_{1 \times 6}} \quad H_2 \left\| \right\|.$$

Математическое описание имеет каноническую форму наблюдаемости (6), и измерение компоненты p_a не обеспечивает полной наблюдаемости системы. Ошибки наблюдения не будут возрастать, если ненаблюдаемые компоненты со временем стремятся к нулю.

Если учесть связи между каналами ГВ через составляющие $\omega_{3\tau}$, дрейф и возмущение ГУ качкой — в виде процесса U_τ , дрейф и возмущение ГУ качкой — в виде процесса с корреляционной функцией (31) по обоим каналам, то введя вектор состояния

$$x^T = \|\alpha \quad \beta \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \dot{\chi}_1 \quad \chi_1 \quad \dot{\chi}_2 \quad \chi_2\|,$$

где сохранены введенные ранее обозначения, получаем матрицу состояния, относящуюся к виду (21):

$$A_\tau = \left\| \begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & \omega_{3\tau} & 0 & 1 & & & & \\ -\omega_{3\tau} & 0 & 1 & 0 & & & & \\ \hline & & & & & & 0_4 & \\ & 0_2 & & -\nu_1 & 0 & & & \\ & & & 0 & -\nu_2 & & & \\ \hline & & & & & & -2\mu_1 & -b_1^2 \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 0_2 \\ \hline & & & & & & & \\ & & & & & & 0_2 & -2\mu_2 & -b_2^2 \\ & & & & & & & 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

При этом матрица наблюдения

$$H_\tau = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\| = \|H_1 \quad H_2\|.$$

В этих условиях матрица наблюдаемости по аналогии с (60) может быть записана в виде

$$Y_\tau = \left\| \begin{array}{l} Y_1 \quad (A_{11}^T)^4 Y_1 \\ Y_2 \quad (A_{22}^T)^4 Y_2 \end{array} \right\|,$$

где Y_1 — (4×8) -матрица наблюдаемости пары $\{A_{11}; H_1\}$;

Y_2 — (4×8) -матрица наблюдаемости пары $\{A_{22}; H_2\}$.

Поскольку здесь $(A_{11}^T)^4$ не является нулевой матрицей, наблюдаемость системы устанавливается прямым методом; исследование с применением специальной программы подтвердило полную наблюдаемость этой системы.

Рассмотренные выше примеры анализа ГВ в прецессионной постановке могут представлять интерес для исследования ГВ как на базе астатического гироскопа, так и на основе гиросtabilизатора в случаях, когда регуляторы в каналах стабилизации позволяют пренебречь динамикой контура стабилизации и принимать ГС в виде интегрирующего звена.

Как известно, в ряде задач можно не учитывать нутационные колебания в ГУ и опираться на прецессионную теорию; в других задачах учет инерционных и диссипативных членов в уравнениях движения необходим [42, 43]. В частности, выявлено, что при увеличении коэффициента усиления системы коррекции гироскопическое устройство теряет устойчивость именно по нутационным колебаниям; при случайном характере процессов в ГУ и переменных значениях коэффициентов усиления может быть потеряна устойчивость в динамике. Поскольку при учете нутационных колебаний размерность задачи увеличивается, исследована возможность применения уравнений прецессионной теории для установления наблюдаемости ГУ. Построена математическая модель применительно к условиям создания ГУ на основе АГ, работающей на качающемся основании.

Модель сформирована на основе уравнений АГ (см. раздел 2.2) и акселерометра с полосой пропускания значительно шире полосы частот качки. Передаточную функцию акселерометра можно принять в виде

$$W_a(s) = \frac{v_a}{g} \cdot \frac{1}{s + v_a},$$

где $T_a = 1/v_a$ — постоянная времени акселерометра.

Качка воздействует на гироскоп (через вязкое трение) и на акселерометр; в этих условиях можно ввести вектор состояния

$$x^T = \left\| \beta \frac{k_c \dot{\psi}}{q} \chi_2 \quad \psi \quad \dot{\psi} \quad \alpha \frac{\dot{\theta}}{k_c q} \chi_1 \quad \theta \quad \dot{\theta} \right\|,$$

где ψ, θ — соответственно углы дифферента и крена, модели которых имеют вид (31); q — частота нутационных колебаний; χ_1, χ_2 — углы отклонения (смещения) акселерометра; $k_c = \sqrt{J_B/J_H}$.

Уравнения состояния можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{q}{k_c} x_2; \\ \dot{x}_2 &= -n_2 \frac{q}{k_c} x_2 + n_2 x_5 + k_c q x_7 + u_\alpha; \\ \dot{x}_3 &= -v_a x_3 - \frac{v_a}{g} b_\psi^2 x_4 - \frac{v_a}{g} 2\mu_\psi x_5 + \frac{v_a}{g} 2\sigma_\psi b_\psi \sqrt{\mu_\psi} \omega_1; \\ \dot{x}_4 &= x_5; \\ \dot{x}_5 &= -b_\psi^2 x_4 - 2\mu_\psi x_5 + 2\sigma_\psi b_\psi \sqrt{\mu_\psi} \omega_1; \\ \dot{x}_6 &= k_c q x_7; \\ \dot{x}_7 &= -\frac{q}{k_c} x_2 - n_1 k_c q x_7 + n_1 x_{10} + u_\beta; \\ \dot{x}_8 &= -v_a x_8 - \frac{v_a}{g} b_\theta^2 x_9 - \frac{v_a}{g} 2\mu_\theta x_{10} + \frac{v_a}{g} 2\sigma_\theta b_\theta \sqrt{\mu_\theta} \omega_2; \\ \dot{x}_9 &= x_{10}; \\ \dot{x}_{10} &= -b_\theta^2 x_9 - 2\mu_\theta x_{10} + 2\sigma_\theta b_\theta \sqrt{\mu_\theta} \omega_2, \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

где u_α и u_β обозначают физически реализуемые воздействия на гироскоп.

Уравнения наблюдения

$$y_1 = \alpha - \chi_1;$$

$$y_2 = \beta - \chi_2,$$

откуда матрица наблюдения

$$H = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| 0_2.$$

Первые пять из уравнений (69) описывают движение относительно внутренней оси подвеса, вторые пять — относительно наружной. Прецессионное уравнение относительно внутренней оси здесь $\dot{\alpha} = 0$, уравнение наблюдения — $y_1 = \alpha - \chi$, где χ удовлетворяет уравнению $\dot{\chi}_1 = -v_a \chi_1 + \frac{v_a}{g} \ddot{\psi}$ и процесс $\psi(t)$ описывается четвертым и пятым уравнениями из (69). Отсюда для одного канала

$$\left. \begin{array}{l} x_{ст} = \left\| \begin{array}{cccc} \alpha & \chi_1 & \psi & \dot{\psi} \end{array} \right\|; \\ H_c = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right\|; \\ A_c = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_a & -\frac{v_a}{g} b_\psi^2 & -\frac{v_a}{g} 2\mu_\psi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b_\psi^2 & -2\mu_\psi \end{array} \right\|; \\ G_c = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \frac{v_a}{g} 2\sigma_\psi b_\psi \sqrt{\mu_\psi} \\ 0 \\ 2\sigma_\psi b_\psi \sqrt{\mu_\psi} \end{array} \right\|. \end{array} \right\} \quad (70)$$

Матрица наблюдаемости по (4) в этом случае отличается от (60):

$$Y_c = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & v_a & -v_a^2 & v_a^3 \\ 0 & \frac{v_a}{g} b_\psi^2 & -\frac{v_a}{g} a_{33} & \frac{v_a}{g} a_{31} \\ 0 & \frac{v_a}{g} 2\mu_\psi & -\frac{v_a}{g} a_{43} & -\frac{v_a}{g} a_{44} \end{array} \right\|,$$

где

$$\begin{aligned} a_{33} &= b_{\psi}^2 (\nu_a + 2\mu_{\psi}); \\ a_{34} &= b_{\psi}^2 (\nu_a^2 + 2\mu_{\psi}\nu_a - b_{\psi}^2 + 4\mu_{\psi}^2); \\ a_{43} &= 2\mu_{\psi}\nu_a - b_{\psi}^2 + 4\mu_{\psi}^2; \\ a_{44} &= -2\mu_{\psi}\nu_a^2 + \nu_a b_{\psi}^2 - 4\mu_{\psi}^2\nu_a + 4\mu_{\psi} b_{\psi}^2 - 8\mu_{\psi}^3. \end{aligned}$$

Определитель

$$\det Y_c = \frac{\nu_a^3 b_{\psi}^6}{g^2} \neq 0,$$

т. е. модель канала ГВ вида (70) полностью наблюдаема. Прецессионная модель движения относительно наружной оси аналогична. Наблюдаемость полной модели с учетом нутационных колебаний надлежит выявлять прямыми методами на основе, например, модели (69).

5.6. Измерения инерциальными приборами на качающемся основании

Обработка показаний инерциальных приборов (акселерометров, гироскопов) на качающемся основании состоит в выработке оценки полезного сигнала в условиях помехи, прежде всего — качки основания и его орбитального движения на волнении [53, 77]. Решение этой задачи методами пространства состояний связано с определением наблюдаемости [27, 41, 60, 68], основой для решения может быть, в частности, теорема 4 (см. раздел 4.6).

Принимая, например, в условиях гравиметрической съемки полезный сигнал в виде полинома (29) первого порядка ($r = 1$)

$$m(t) = \Delta g_0 + \Delta g \cdot t$$

и помеху, обусловленную качкой, в виде случайного процесса третьего порядка (см. раздел 4.5), т. е. пренебрегая погрешностями стабилизации гравиметра, можно записать матрицу состояния измеряемого процесса

$$A_g = \left\| \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 0_{2 \times 3} & \\ \hline & & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 0_{3 \times 2} & & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|. \quad (71)$$

Здесь принято

$$x^T = \|\Delta g \quad m \quad a_k \quad V_k \quad l_k\|,$$

где $a_k(t)$ — ускорение; $V_k(t)$ — скорость; $l_k(t)$ — перемещение места установки гравиметра в процессе качки объекта.

На этом основании матрица состояния имеет вид (21); сигнал наблюдения $y = m(t) + a_k(t)$, поскольку помеха имеет также размерность ускорения, т. е.

$$H_g = \parallel 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 = \parallel H_1 \quad H_2 \parallel.$$

На основании структурных свойств системы (71) можно заключить, что пара $\{A_g; H_g\}$ удовлетворяет условиям теоремы 4, т. е. система полностью наблюдаема. При включении в состав вектора состояния Δg_0 — свободного члена полинома-модели полезного сигнала — система не будет полностью наблюдаемой, т. е. значение Δg_0 по текущим измерениям не может быть восстановлено.

В самом деле, если принять подвектор состояния $x_1^T = \parallel \Delta g_0 \Delta g \ m \parallel$, то в матрице A_g^0 субматрица

$$A_{11}^0 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

в матрице H_g^0 субматрица $H_1^0 = \parallel 0 \ 0 \ 1 \parallel$, откуда матрица наблюдаемости пары $\{A_{11}^0; H_1^0\}$

$$Y_1^0 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Определитель $\det Y_1^0 = 0$, т. е. пара $\{A_{11}^0; H_1^0\}$ в этом случае не будет полностью наблюдаемой.

При измерении инерциальными измерителями параметров колебательного движения, например скорости объекта, возникают аналогичные задачи. Ошибки стабилизации чувствительных инерциальных датчиков существенно усложняют математическую модель, в этом случае по каждому каналу измеряемый процесс можно представить в виде $y(t) = m(t) + n_d(t) + n_b(t)$, где, например, для горизонтально установленного измерителя подлежит оценке полезный сигнал

$$m(t) = V_0 + z_n \dot{\psi} - y_n \dot{\varphi}_p; \quad (72)$$

здесь V_0 — скорость орбитального движения; ψ — угол дифферента; φ_p — угол рысканья; z_n, y_n — координаты места установки прибора относительно центра качания судна. Кроме того, обозначены помехи: n_d — дрейф чувствительного элемента; n_b — погрешность измерения, обусловленная ошибками стабилизации измерителя. Полезный сигнал $m(t)$ выделяется из сигнала $y(t)$

с помощью методов фильтрации. При построении алгоритма фильтрации в пространстве состояний видное место занимает решение задачи о наблюдаемости.

Модель помехи $n_d(t)$ может быть принята, как и ранее, в виде полинома (29), например, первого порядка: $n_d(t) = d_0 + d_1 t$. Для помехи $n_\beta(t)$ в первом приближении можно принять

$$n_\beta(t) = \int_0^t g\beta(t) dt,$$

где $\beta(t)$ — ошибка стабилизации.

При установке измерителя на инерциальную вертикаль, демпфированную по скорости от лага, уравнение ошибок стабилизации можно принять в виде [50]

$$\ddot{\beta} + \nu[1 + F(p)]\dot{\beta} = -\dot{\varepsilon} - \frac{1}{R_3}[1 - F(p)]\delta_a + \frac{1}{R_3}F(p)\delta V_{\text{л}};$$

$$p = \frac{d}{dt},$$

здесь δ_a — погрешность акселерометра; $\delta V_{\text{л}}$ — погрешность лага; ν — частота Шулера; ε — угловая скорость ухода гироскопа.

Для передаточной функции фильтра можно принять, например, выражение

$$F(p) = \frac{a_1 + a_2 p}{a_3 + a_4 p},$$

где a_i ($i = \overline{1, 4}$) — постоянные коэффициенты.

Процессы $\delta_a(t)$ и $\delta V_{\text{л}}(t)$ обычно представляют в виде (47).

Принимая для описания процессов $V_0(t)$, $\psi(t)$ и $\varphi_p(t)$ узкополосные случайные процессы, например, вида (31), математическое описание можно привести к виду (2) с матрицами A_d и H_d вида (21) и (22) соответственно. Не приводя здесь достаточно громоздких выражений, можно утверждать, что на основании теоремы 4 величину d_0 в состав вектора состояния включать не следует; наблюдаемость пары $\{A_{22}; H_2\}$ должна устанавливаться прямым методом. При определении в этой задаче ранга (17×17) -матрицы и при наличии в ее составе элементов порядка 10^{-13} с помощью подпрограммы MFGR получены значения ранга: 12 — при $\text{EPS} = 10^{-7}$; 16 — при $\text{EPS} = 10^{-15}$, 10^{-30} , 10^{-40} . Для (10×10) -матрицы при наличии в ее составе элементов порядка 10^{-12} получены значения ранга: 7 — при $\text{EPS} = 10^{-7}$; 9 — при $\text{EPS} = 10^{-15}$ и 10 — при $\text{EPS} = 10^{-20}$ (полный ранг, что в данной задаче означает полную наблюдаемость процесса).

В данной задаче выявлено, что включение в вектор состояния полезного сигнала $m(t)$ по (72) приводит к появлению

ненаблюдаемых компонент, в то время как при формировании $m(t)$ в специальном устройстве измерения обеспечивается полная наблюдаемость.

5.7. Исследование наблюдаемости при построении корректируемых гироскопических устройств

При рассмотрении ГУ совместно с источниками корректирующей информации — корректирующими системами (КС) — также возникает необходимость анализа наблюдаемости, например при включении ГУ в систему навигации или управления объектом. В настоящем обзоре прежде всего рассматриваются особенности ГУ, но в состав модели ГУ в ряде случаев включается математическое описание КС. Корректируемое ГУ можно рассматривать на основании схемы, представленной на рис. 6.

Если точность КС достаточно высока, то обратная связь OC_2 не требуется; ГУ отслеживает сигнал от КС как полезный, и разностный сигнал отражает, прежде всего, погрешности ГУ.

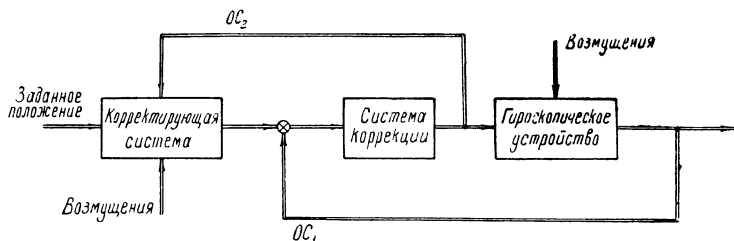


Рис. 6. Структурная схема корректируемого ГУ

Матрица состояния определяется уравнениями ГУ: если все внутренние связи разомкнуты, в том числе OC_1 , то модель относится к классу НГУ и наблюдаемость определяется теоремой 2; если, например в ГС, замкнуты контуры стабилизации, то модель относится к классу КГУ и наблюдаемость определяется теоремой 3. Если обратная связь OC_1 замкнута, то в матрице состояния замыкание системы коррекции отразится блоком $A_{12} \neq 0$ и гироскопическое устройство будет относиться к классу КГУ, что может представлять интерес при его включении в системы навигации или управления объектами.

При существенных собственных динамических погрешностях КС ее выходной сигнал не может считаться идеальным. В таком случае целесообразно модель ошибок КС привести к виду (2) и компоненты ее подвектора состояния включить в вектор состояния системы. Если при этом обратная связь OC_2 разомкнута, а замкнута только OC_1 , то матрица состояния системы приводится к виду (20), т. е. модель ГУ относится к классу

ГУ_{св.} Достаточное условие наблюдаемости дает теорема 1, если матрица наблюдения имеет вид (48). В самом деле, можно привести матрицу состояния к виду

$$A = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{array} \right\|,$$

где соответствующий вектор состояния $x^T = \left\| x_{гy}^T \mid x_{кc}^T \right\|$; A_{11} — матрица состояния ГУ; A_{22} — матрица состояния КС; блок A_{12} отражает воздействие корректирующих сигналов на ГУ (если обратная связь OC_1 замкнута). Достаточное условие наблюдаемости дает теорема 1: для полной наблюдаемости системы в целом должны быть наблюдаемы ГУ и КС как автономные системы. Для такого исследования необходимо измерять параметры состояния ГУ и КС.

При полностью наблюдаемой КС система коррекции может вырабатывать управления, с помощью которых повышается ее точность — замыкается обратная связь OC_2 (см. рис. 6). Матрица A может принять общий вид, и наблюдаемость такого ГУ устанавливается прямым методом. Примером является ГУ на качающемся основании с обратной связью не только на датчик момента гироскопа (OC_1), но и на датчик силы акселерометра (OC_2). Соответствующие уравнения приведены в разделе 5.5.

5.8. Особенности анализа управляемости гироскопических устройств

Управляемость системы можно выявить прямым методом на основании матрицы управляемости U по (7) с использованием подпрограммы MFGR.

Качественные и прикладные результаты для конкретных типов ГУ целесообразно получать структурными методами. Для вариантов структурной схемы ГУ, представленных на рис. 5, получены следующие условия [71]:

- при параллельном соединении подсистем (рис. 5, а) управляемость каждой из них является необходимым и достаточным условием управляемости системы в целом;

- при последовательном соединении (рис. 5, б) управляемость каждой из подсистем является необходимым, но не достаточным условием управляемости системы;

- при соединении подсистем в систему с обратной связью (рис. 5, в) необходимым и достаточным условием управляемости замкнутой системы является управляемость ее в разомкнутом состоянии.

Перечисленные условия аналогичны изложенным в разделе 4.1 применительно к наблюдаемости и отражают дуальность этих свойств.

При исследовании управляемости ГУ методами пространства состояний применены та же классификация моделей (табл. 2 раздела 3.7) и декомпозиция вектора состояния.

Модели класса $ГУ_{св}$ имеют каноническую форму управляемости непосредственно в обобщенных координатах. К этому классу относятся стохастические модели гироскопических устройств, а также модели, построенные с учетом математического описания корректирующих систем. Система полностью управляема, если управляема каждая из двух подсистем как автономная система. Управляемость подсистем — гироскопического устройства и корректирующей системы — должна исследоваться автономно по соответствующим критериям. Система, в математическое описание которой включено описание случайных возмущений, не будет полностью управляемой, так как модели случайных процессов не имеют физических точек приложения управлений и не могут быть управляемыми.

Класс НГУ включает большинство управляемых ГУ, поскольку они описаны здесь как объекты управления без учета систем коррекции или стабилизации. При матрице состояния вида (16) в общем случае может иметь место матрица управления

$$B = \begin{vmatrix} B_1 \\ 0_m \end{vmatrix}, \quad (73)$$

где B_1 — $(m \times m)$ -матрица, если $n = 2m$, т. е. в таких ГУ управление действует только в m физических точках приложения (относительно осей подвеса ГУ). Матрица управляемости, построенная на основании (7), примет вид

$$U_1 = \begin{vmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & A_{11}^2B_1 & \dots & A_{11}^{n-1}B_1 \\ 0_m & B_1 & A_{11}B_1 & \dots & A_{11}^{n-2}B_1 \end{vmatrix}.$$

Теорема 5. В этих условиях исходная система (3) будет полностью управляемой при $\text{rank } B_1 = m$.

Для доказательства теоремы составим вспомогательную квазиреугольную матрицу

$$U_{1в} = \begin{vmatrix} B_1 & A_{11}B_1 \\ 0_n & B_1 \end{vmatrix},$$

для которой $\det U_{1в} = (\det B_1)^2$ [1]. Поскольку $\det B_1 \neq 0$, то и $\det U_{1в} \neq 0$, откуда $\text{rank } U_{1в} = n$, что и требовалось доказать. Это — достаточное условие.

В простейшем и наиболее распространенном случае $B_1 = E_m$, т. е. относительно каждой оси подвеса действует только одно («свое») управление, и ГУ полностью управляемы; сюда относятся гировертикали, гироскомпасы, гироскопические следящие

системы и т. п. При управлении астатическим гироскопом относительно только одной оси полная управляемость не может быть обеспечена. Так, при $B^T = \| b_1 \ 0 \ 0 \ 0 \|$ и субматрице

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

в матрице состояния АГ можно согласно (7) получить

$$U_{1B}^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{11}^2 + a_{12}a_{21} \\ 0 & a_{21} & (a_{11} + a_{22}) a_{21} \\ 0 & 1 & a_{11} \\ 0 & 0 & a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} (a_{11}^2 + a_{12}a_{21}) + (a_{11} + a_{22}) a_{12}a_{21} \\ (a_{11} + a_{21}) a_{11}a_{22} + (a_{12}a_{21} + a_{22}^2) a_{21} \\ a_{11}^2 + a_{12}a_{21} \\ (a_{11} + a_{22}) a_{21} \end{vmatrix} b_1.$$

Хотя в этой матрице нет нулевых столбцов, ее определитель $\det U_{1B}^{(1)} = 0$. Это значит, в частности, что ОГС при таком управлении неуправляем. Если принять вектор состояния в виде $x^T = \| \dot{\alpha} \ \dot{\theta} \ \theta \|$, то матрица управляемости

$$U_{yB}^{(1)} = b_1^T \begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{11}^2 + a_{12}a_{21} \\ 0 & a_{21} & (a_{11} + a_{22}) a_{21} \\ 0 & 0 & a_{21} \end{vmatrix},$$

ее определитель $\det U_{yB}^{(1)} = a_{21}^2 b_1^3$, по этим координатам ОГС управляем и при наложении управления относительно одной оси [2].

Некоторые особенности имеет задача об управляемости ГУ, построенных на трехосном стабилизаторе на основе двухступенных гироскопов. Уравнение состояния таких систем (силовых гировертикалей, гироскопических следящих систем и т. п.) может быть приведено к виду $\dot{x} = Ax + DBu$ (см. раздел 2.7), где матрица D отражает воздействия на оси стабилизации при движении гироскопов относительно осей прецессии; эта матрица имеет ненулевой блок вида (28).

Матрица управления такого ГУ будет $B_p = DB$. Если вектор управления $u^T = \| u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \|$ и исходная матрица управления содержит блок $B_1 = \text{diag} \{b_{ii}\} (i = \overline{1, 6})$, то

$$B_p = \left\| \begin{array}{c|c} D_1 & B_1 \\ \hline 0_m & \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} B_{p1} \\ \hline 0_m \end{array} \right\|.$$

Как видно, и в этих условиях справедлива теорема 5, если вместо матрицы B рассматривать матрицу B_p , т. е. система будет управляемой полностью при $\text{rank } B_{p1} = m = 6$. Можно показать, что

$$\det B_{p1} = \prod_{i=1}^6 b_{ii},$$

т. е. $\text{rank } B_{p1} = 6 = m$ и ГУ на основе такого ТГС полностью управляемо. Так проявляется независимость управляемости от способа установки гироскопов на платформе при создании ТГС. При этом должны налажаться управления относительно всех шести осей подвеса, т. е. осей стабилизации и осей прецессии.

Матрица состояния ГУ класса КГУ имеет вид (26); к такому классу сводится, в частности, коррекция силовых ГС с замкнутыми каналами стабилизации и индикаторных ГС на СГ. При матрице B , заданной выражением (73), и при условии, что существуют произведения блоков, можно записать матрицу управляемости по (7)

$$U_2 = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} B_1 & \{ A_{11} B_1 \} & (A_{11}^2 + A_{12} A_{21}) B_1 & \dots \\ \hline 0_{(n-m) \times m} & \{ A_{21} B_1 \} & A_{21} A_{11} B_1 & \dots \end{array} \right\|. \quad (74)$$

Теорема 6. Если матрица состояния имеет вид (26), а матрица управления — вид (74), то для управляемости системы (3) достаточно, чтобы при размерности $(m \times m)$ субматрицы A_{11} имели место равенства

$$\left. \begin{array}{l} \text{rank } B_1 = m; \\ \text{rank } N_c = n - m, \end{array} \right\} \quad (75)$$

где N_c — матрица, составленная из столбцов нижнего ряда субматриц в U_2 .

Для доказательства рассмотрим структуру матрицы управляемости

$$U_2 = \left\| \begin{array}{c|c} B_1 & N_b \\ \hline 0_{(n-m) \times m} & N_c \end{array} \right\|,$$

где N_c — $(n - m) \times (n - 1)$ -матрица, составленная из нижнего ряда субматриц; N_b — то же из верхнего ряда субматриц в U_2 .

Пусть в N_c найдется $(n - m)$ взаимно независимых столбцов, т. е. $\text{rank } N_c = n - m$, тогда можно составить вспомогательную квадратную $(n \times n)$ -матрицу

$$U_{2B} = \begin{vmatrix} B_1 & N_{B, n-m} \\ 0_{(n-m) \times m} & N_{c, n-m} \end{vmatrix},$$

в которой $N_{B, n-m} - m \times (n - m)$ -матрица; $N_{c, n-m} - (n - m) \times (n - m)$ -матрица.

Согласно [1] $\det U_{2B} = \det B_1 \cdot \det N_{c, n-m}$. Если $\text{rank } B_1 = m$ и $\text{rank } N_{c, n-m} = n - m$, то $\det U_{2B} \neq 0$, откуда $\text{rank } U_2 = n$, что и доказывает теорему 6, являющуюся достаточным условием.

В случае, когда в ГС замкнут канал стабилизации без динамического запаздывания, т. е. реализовано управление без введения в вектор состояния дополнительных компонент, задача также приводится к условиям теоремы 6; дополнительное управление относительно осей стабилизации можно не рассматривать.

В этих условиях

— для ОГС:

$$B_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_{22} \end{vmatrix}; \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & a_{14} \\ 0 & 0 \end{vmatrix};$$

— для ДГС:

$$B_1 = \begin{vmatrix} 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & b_{44} \end{vmatrix}; \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 0_2 & a_{17} & 0 \\ 0 & 0 & a_{28} \\ 0_2 & 0_2 & \end{vmatrix};$$

— для ТГС:

$$B_1 = \begin{vmatrix} 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & b_{44} & 0 & 0 \\ 0_3 & 0 & b_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{66} \end{vmatrix}; \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 0_3 & a_{110} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{211} & 0 \\ 0_3 & 0 & 0 & a_{312} \\ 0_3 & 0_3 & \end{vmatrix}.$$

Как видно, достаточное условие — теорема 6 — в таких системах непосредственно не выполняется. В то же время можно показать непосредственно по (7), что при выделенных в субматрице A_{12} ненулевых блоках отыщется не равный нулю минор матрицы управляемости U_3 n -го порядка, т. е. будет $\text{rank } U_3 = n$. Это значит, что при замыкании каналов стабилизации можно обеспечить управляемость ГУ в целом с помощью сигналов коррекции без дополнительных управлений относительно осей стабилизации; ГУ сохраняет полную управляемость при подаче управлений в каналы коррекции.

При динамическом запаздывании в каналах управления гироскопом, т. е. при появлении дополнительных компонент вектора состояния, характеризующих усилительно-преобразовательный тракт (см. раздел 5.3), анализ управляемости приводится к классу КГУ; ГУ остается полностью управляемым и при наличии запаздываний в УПТ.

Матрица состояния индикаторного гиросtabilизатора на сферических гироскопах также имеет вид (26), причем $n = 2m$. Здесь равенства (75) принимают вид условия $\text{rang } B_1 = m$.

Теорема 7. Индикаторный ГС на СГ полностью управляем, если $\text{rang } B_1 = m$.

Эта теорема доказывается следующим образом. Поскольку для ГС на СГ $A_{21} = E_m$, то из U_2 (см. теорему 6) составляется матрица

$$U_{2д} = \begin{vmatrix} B_1 & A_{11}B_1 \\ 0_m & B_1 \end{vmatrix},$$

определитель которой [1] $\det U_{2д} = (\det B_1)^2$, что и является доказательством. Это — достаточное условие. В простейшем случае $B_1 = E_m$, если $B_1 = \text{diag } \{b_{ii}\}$ ($i = \overline{1, m}$), т. е. ГС на СГ полностью управляем при наложении управлений относительно всех осей.

Прецизионные ГУ в настоящее время часто строят на базе гиросtabilизаторов, в частности трехосных (ТГС) [11, 48], позволяющих создать на объекте «невыбываемые» центральные приборы (курсовертикаль, гироазимутгоризонт, гирогоризонт-компас), а также инерциальные навигационные системы различных типов. Анализ и синтез многоосных ГУ на основе моделей полной размерности ГУ оказывается громоздким, поскольку требуется одновременно рассматривать несколько (в ТГС с дополнительной рамой — более шести) регуляторов [32, 65].

В то же время процессы в каналах коррекции и стабилизации существенно отличаются по частотам, и связи между каналами ГС, как правило, несущественны; кроме того, характеристики воздействий определяются с погрешностями [35, 64].

Сложные системы, в частности ГС, целесообразно представлять в виде совокупности нескольких подсистем (каналов) и применять идею и методы децентрализации [80, 81] с построением управления по нескольким уровням: системы управления первого уровня (локальные регуляторы) оптимизируют процессы, протекающие в подсистемах; системы управления второго уровня (глобальные регуляторы) минимизируют взаимодействие между подсистемами (рис. 7). Алгоритм децентрализации [80, 81] основан на приведении моделей к каноническим формам; в структуре ТГС при этом выделяются каналы (подсистемы) и соответствующие связи между ними, которые, как известно [44, 48], вызывают уход и должны минимизироваться (на

рисунке условно показаны связи только между соседними подсистемами).

Локальные регуляторы и устройства наблюдения можно синтезировать автономно для каждой из подсистем независимо от глобального регулятора. Полная (агрегированная) матрица состояния может служить для исследования, например, устойчивости системы в целом. Децентрализованные системы допускают нелинейный характер связей между каналами [80, 81], что

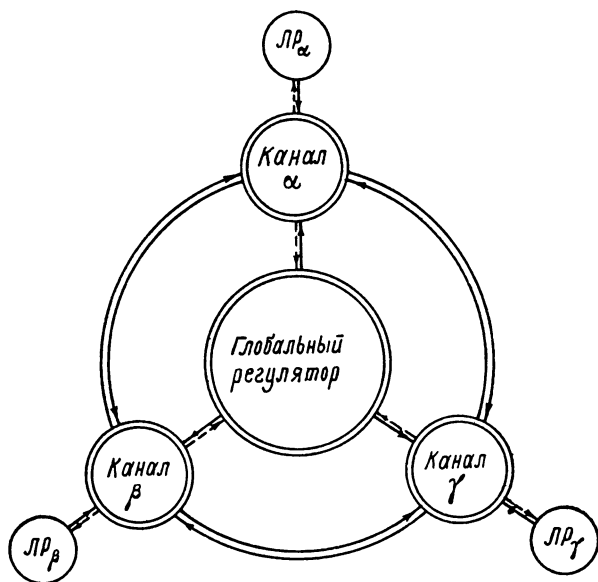


Рис. 7. К задаче децентрализации структуры ТГС: ЛР — локальный регулятор; \dashrightarrow — измерение (наблюдение); \longrightarrow — управление

представляет несомненный интерес для оптимизации ГУ на основе ГС.

Метод децентрализации принят в практике синтеза сложных ГУ и позволяет минимизировать уходы путем отыскания такой структуры регулятора, при которой связи между каналами компенсируются.

Можно упростить модель ГУ, применив системный подход.

При всем разнообразии задач исследования ГУ для сохранения наглядности решения на каждом этапе исследования ГУ учитывают только основные свойства математического описания входящих в него элементов. При исследовании самих этих устройств происходящие в них явления учитывают как можно

более детально. Таким образом, многообразие задач представляет собой иерархическую многоуровневую структуру, которая может быть представлена в виде, показанном на рис. 8 [63].

При создании ЧЭ основным требованием является точность и надежность первичного измерительного элемента, в котором с минимальными инструментальными ошибками используются особенности положенного в основу его функционирования физического явления. Поэтому основными здесь являются конструкторские и технологические задачи: создание подвеса, обеспечение минимального значения «уводящего» момента, термостаби-

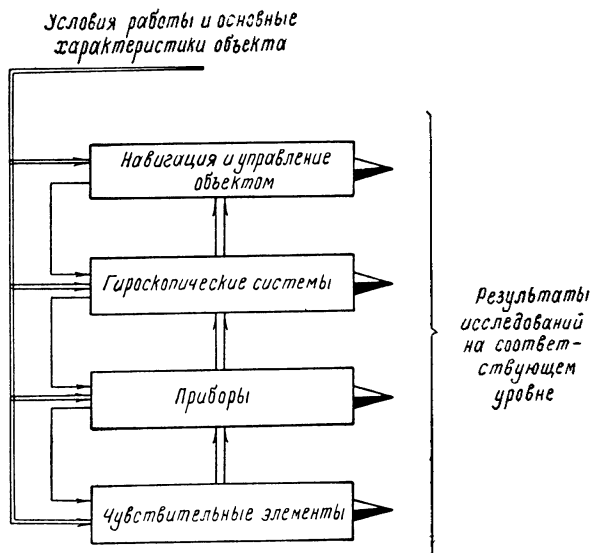


Рис. 8. Структура задач исследования ГУ

лизация и термокомпенсация и т. п., которые на рисунке отнесены к первому уровню.

Исследование точности ЧЭ в реальных условиях работы прибора или объекта отнесено ко второму уровню и включает в себя анализ гироскопов, акселерометров и других первичных приборов или датчиков первичной информации как динамических систем, к которым предъявляются требования высокой динамической точности. Анализ ГУ с учетом математических моделей входящих в него элементов включен в третий уровень. Основным требованием и здесь является точность в реальных условиях.

Решение задач навигации или управления объектом (на рисунке — четвертый, верхний уровень) основано, как правило, на обработке информации, поступающей с определенной избы-

точностью от гироскопических устройств и корректирующих систем (при анализе ГУ избыточность обычно отсутствует).

Таким образом, современное ГУ представляет собой многоуровневую систему, а его исследование — многокритериальную задачу, поскольку в критерий оптимальности входят масса, габариты, надежность, точность, стоимость и другие показатели. Решение этой задачи в общем виде весьма сложно, более эффективно оптимизация ГУ как иерархической системы с рассмотрением задач по уровням. Требования к надежности системы навигации или управления обычно превышают достижимую надежность отдельного датчика первичной информации или гиросистемы, поскольку одной из основных причин выхода из строя ГУ является отказ гироблока из-за разрушения подшипников. На этом основании требования надежности, в основном, удовлетворяются на первом (чувствительные элементы) и четвертом (навигационные комплексы и системы управления) уровнях; на втором и третьем уровнях основным требованием к ГУ является обеспечение точности.

В каждый более высокий уровень вводят только принципиальные результаты предыдущего: характеристики дрейфа, ограничения управляющих моментов, наблюдаемость и управляемость и т. п. В свою очередь, из верхнего уровня в нижний привлекается информация об условиях работы объекта, составе системы и т. п.; эти данные учитываются при исследовании прибора или элемента как возмущающие и управляющие воздействия (на рис. 8 — слева, сверху вниз). Как видно, исследование ГУ как динамических систем важно при оптимизации первичных приборов и гироскопических систем. В настоящей работе исследованы задачи второго и третьего уровней.

В качестве иллюстрации к рис. 8 можно рассмотреть набор задач, возникающих при создании инерциальной навигационной системы на основе трехосного силового гироскопического стабилизатора. Исследование акселерометров и двухстепенных гироскопов можно свести к первому уровню в части исследования подвеса, анализа трения, балансировки и т. п. Анализ погрешностей акселерометра и гироскопа как автономных приборов с учетом управляющих и возмущающих воздействий и идентификация их характеристик относятся ко второму уровню. На третьем уровне ГГС исследуется как динамическая система; при этом выбирается и оптимизируется структура системы управления и устройств наблюдения, после чего оптимизируются корректирующие звенья и т. д. Решение собственно задач навигации — верхний уровень; здесь решаются задачи оптимального комплексирования ГУ и источников внешней информации и т. п., выходящие за рамки настоящего обзора; коррекция гиросtabilизатора как динамический процесс, а также управляемость и наблюдаемость гиросtabilизатора при этом могут не рассматриваться.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящий обзор посвящен разработке основ математического описания гироскопических устройств как объектов управления на основе методов пространства состояний. Применительно к задаче проектирования систем коррекции или управления выполнен структурный анализ уравнений движения гироскопических устройств, введены три класса моделей: «ГУ при случайных воздействиях», «Некорректируемые ГУ» и «Корректируемые ГУ», которые включают все рассмотренные в настоящей работе устройства; классифицированы действующие на ГУ возмущения и полезные сигналы, проанализированы требования к их математическому описанию; построены модели воздействий в пространстве состояний.

Разработаны структурные методы исследования наблюдаемости и управляемости применительно к введенным классам ГУ; доказаны теоремы, представляющие собой достаточные, необходимые или необходимые и достаточные условия наблюдаемости или управляемости ГУ. Для каждого из введенных классов ГУ определены структуры измерительных устройств и устройств управления, при которых ГУ будут полностью наблюдаемыми и управляемыми системами; показано, что ГУ не всегда удовлетворяют этим условиям.

При исследовании наблюдаемости и управляемости ГУ использован единый подход, основанный на декомпозиции вектора состояния и теории блочных матриц. Это позволило снизить размерность моделей и более эффективно решать практические задачи анализа и синтеза ГУ.

На основании выполненных исследований можно составить достаточно полное представление о применяемых в системах навигации, стабилизации и управления гироскопических устройствах как объектах управления с точки зрения их управляемости и наблюдаемости. Обзор может служить в этом смысле справочным пособием. При исследованиях на основе более сложных моделей или гироскопических устройств, не рассмотренных в настоящей работе, приведенные материалы могут быть использованы в качестве методических примеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абгарян К. А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М., «Наука», 1973.
2. Александров А. Г. Аналитическое конструирование оптимального регулятора гироскопа. — «Автоматика и телемеханика», 1967, № 11.
3. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. М., «Наука», 1976.
4. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М., «Мир», 1971.
5. Бесекерский В. А. Динамический синтез систем автоматического регулирования. М., «Наука», 1970.

6. Бесекерский В. А., Фабрикант Е. А. Динамический синтез систем гироскопической стабилизации. Л., «Судостроение», 1968.
7. Бородай И. К., Нецветаев Ю. А. Качка судов на морском волнении. Л., «Судостроение», 1969.
8. Бромберг П. В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М., «Наука», 1967.
9. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М., «Наука», 1969.
10. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. М., «Наука», 1977.
11. Гироскопические системы. Под ред. Д. С. Пельпора. М., «Высшая школа», 1971, 1972.
12. Гироскопические системы. Проектирование гироскопических систем. Под ред. Д. С. Пельпора. М., «Высшая школа», 1971.
13. Грибанов Ю. И., Мальков В. Л. Спектральный анализ случайных процессов. М., «Энергия», 1974.
14. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления (для инженеров). М., «Наука», 1970.
15. Дмитриев С. П., Ривкин Б. С. Определение параметров дифференциальных уравнений в задачах статистической идентификации.— «Автоматика и телемеханика», 1970, № 9.
16. Завгородний А. В., Лебедев С. К., Чушкин Р. А. О возможности измерения вертикальных перемещений судов.— Труды ЛИАП, 1975, вып. 91, с. 129—134.
17. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем (метод пространства состояний). М., «Наука», 1970.
18. Инерциальная навигация. Под ред. К. Ф. О'Доннела. М., «Наука», 1969.
19. История механики гироскопических систем. М., «Наука», 1975.
20. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления.— Труды I конгресса ИФАК. Т. 2. Изд-во АН СССР, 1961.
21. Катковник М. Я., Полуэктов Р. А. Многомерные дискретные системы управления. М., «Наука», 1966.
22. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М., «Мир», 1977.
23. Костров А. В. Об аппроксимации широкополосных случайных процессов в задачах оптимизации.— Сб. научных трудов Пермского политехнического института «Автоматическое управление и вычислительная техника», 1974, № 155, с. 3—6.
24. Костров А. В. Об одной модели узкополосного процесса в задаче оптимальной оценки.— Сб. научных трудов Пермского политехнического института «Приборостроение», 1975, № 176, с. 35—38.
25. Костров А. В. О случайных погрешностях гироскопа, снабженного динамической линейной системой коррекции.— Сб. научных трудов Пермского политехнического института «Приборостроение», 1968, № 47, с. 27—33.
26. Костров А. В., Моисеев В. П. О некоторых особенностях аппроксимации случайных процессов в задаче оптимизации измерения параметров колебаний объекта.— В кн.: Исследования по теории динамической гравиметрии. М., ИФЗ АН СССР, 1977, с. 36—41.
27. Костров А. В., Моисеев В. П. Измерение переменной линейной скорости объекта.— В кн.: Исследования по теории динамической гравиметрии. М., ИФЗ АН СССР, 1977, с. 42—57.
28. Костров А. В., Моисеев В. П. К задаче об одновременной оценке ускорения, скорости и перемещения.— Межвузовский сборник научных трудов «Приборостроение». Изд-во Пермского университета, 1977, № 211, с. 14—18.
29. Костров А. В., Ривкин С. С. Синтез гироскопических устройств.— В кн.: Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. М., «Наука», 1973, с. 432—450.
30. Костров А. В., Ривкин С. С. К выбору аналитической аппроксимации характеристик нерегулярной качки корабля в задачах оптимизации

гироскопических устройств.— «Изв. вузов. Приборостроение», т. XVII, 1974, № 11, с. 75—80.

31. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М., «Машиностроение», 1976.

32. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М., «Наука», 1977.

33. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., «Наука», 1968.

34. Ланкастер П. Теория матриц. М., «Наука», 1978.

35. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1962.

36. Лебедев Д. В. К задаче выставки гиropлатформы инерциальной системы навигации.— «Прикладная механика в приборостроении». Межвузовский сборник. Л., 1978, с. 40—45.

37. Лебедев С. К. Наблюдаемость системы летательный аппарат—цель.— Труды ЛИАП, 1974, вып. 92, с. 197—200.

38. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М., «Наука», 1966.

39. Лунц Я. Л. Ошибки гироскопических приборов. Л., «Судостроение», 1968.

40. Лэннинг Дж. Х., Бэттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. М., Изд-во иностр. лит., 1958.

41. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. М., «Энергия», 1973.

42. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. М., «Наука», 1971.

43. Меркин Д. Р. Гироскопические системы. М., «Наука», 1974.

44. Назаров Б. И. О погрешностях гиросtabilизаторов.— «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика», 1963, № 2.

45. Неусыпин А. К. Гироскопические приводы. М., «Машиностроение», 1978.

46. Парусников Н. А. Задачи о наблюдаемости и коррекция инерциальных навигационных систем.— В кн.: «Аннотации докладов IV Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике». Киев, «Наукова думка», 1967, с. 32.

47. Пельпор Д. С., Осокин Ю. А., Рахтеенко Е. Р. Гироскопические приборы систем ориентации и стабилизации. М., «Машиностроение», 1977.

48. Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. М., «Наука», 1973.

49. Ривкин С. С. Теория гироскопических устройств. Ч. 1. Л., Судпромгиз, 1962.

50. Ривкин С. С. Теория гироскопических устройств. Ч. 2. Л., «Судостроение», 1964.

51. Ривкин С. С. Статистический синтез гироскопических устройств. Л., «Судостроение», 1970.

52. Ривкин С. С. Метод оптимальной фильтрации Калмана и его применение в инерциальных навигационных системах. Ч. 1, 2. Л., «Судостроение», 1973, 1974.

53. Ривкин С. С. Стабилизация измерительных устройств на качающемся основании. М., «Наука», 1978.

54. Ривкин С. С., Ивановский Р. И., Костров А. В. Статистическая оптимизация навигационных систем. Л., «Судостроение», 1976.

55. Ройтенберг Е. Я., Ройтенберг Л. Я. О наблюдаемости нелинейных гироскопических систем при наличии случайных возмущений.— В кн.: «Аннотации докладов IV Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике». Киев, «Наукова думка», 1976, с. 34.

56. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. М., «Наука», 1971.

57. Ройтенберг Я. Н. Гироскопы. Изд. 2-е. М., «Наука», 1975.

58. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. Изд. 2-е. М., «Наука», 1968.
59. Свешников А. А., Ривкин С. С. Вероятностные методы в прикладной теории гироскопов. М., «Наука», 1974.
60. Сейдж Э., Мелс Д. Ж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М., «Связь», 1976.
61. Сергеев М. А. Наземные гироскопы. Л., «Машиностроение», 1969.
62. Случайные колебания. Под ред. С. Кренделла. М., «Мир», 1967.
63. Сольницев Р. И. Вычислительные машины в судовой гироскопии. Л., «Судостроение», 1977.
64. Уилкинсон Д. Ж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М., «Наука», 1970.
65. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М., «Мир», 1978.
66. Фурасов В. Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М., «Наука», 1977.
67. Хедли Дж. Линейная алгебра. М., «Высшая школа», 1966.
68. Чаки Ф. Современная теория управления. Нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М., «Мир», 1975.
69. Челпанов И. Б. Оптимальные динамические характеристики гировертикали при случайном движении объекта и случайном уходе гироскопа.— «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1967, № 4.
70. Челпанов И. Б., Несенюк Л. П., Брагинский М. В. Расчет характеристик навигационных гироскопов. Л., «Судостроение», 1978.
71. Янушевский Р. Т. Теория линейных оптимальных многосвязных систем управления. М., «Наука», 1973.
72. Dietrich G./Stahl H. Grundzüge der Matrizenrechnung.— VEB Fachbuchverlag Leipzig, 8. Auflage, 1972.
73. Fischel E. Die Dämpfung von Kreiselgeräten als Regelproblem.— „Regelungstechnik“, III, 1962, N 3, S. 109—114.
74. Fischer G. W. Elektronisch—gedämpfter analog rückgeführter Pendelbeschleunigungsmesser.— „Archiv für technisches Messen“, N 5 (August 1972), S. 147—152, N 6 (September 1972), S. 167—170.
75. Hammon R. L. An Application of Random Process Theory to Gyro Drift Analysis.— „Trans. IRE PGANE“, v. 7, N 3, 1960.
76. Kempe V. Theorie stochastischer Systeme. Akademie-Verlag Berlin, 1974.
77. Kostrow A. W. Zur Messung senkrechter veränderlicher Verschiebungsgeschwindigkeiten.— 21. Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenau 1976. Vortragsreihe „Grundlagen und Probleme der Prozeßmeßtechnik“, Heft 2, S. 129—132.
78. Mancini R. A. Application of the observer theory to inertial systems.— „Proc. SOUTHEASTCON 74 Reg. 3 Conf.: Invent. Model Future, Orlando, Fla, 1974“. New York, 1974, pp. 444—448.
79. Müller P. C. Schnelligkeitsoptimales Ausrichten von Trägheitsplattenformen.— „Ingenieur—Archiv“, 40, 1971, S. 248—265.
80. Siljak D. D., Vukčević M. B. Decentralization, Stabilization and Estimation of Large—Scale Linear Systems.— „IEEE Trans. on Autom. Contr.“, v. AC-21, N 3, 1976.
81. Siljak D. D., Vukčević M. B. On decentralized estimation.— „Int Journ. Contr.“, 1978, v. 27, N 1, pp. 113—131.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	
1. Основные определения	
1.1. Пространство состояний	
1.2. Наблюдаемость динамических систем	
1.3. Управляемость динамических систем	
1.4. Алгоритм анализа наблюдаемости (управляемости)	
2. Математическое описание гироскопических устройств в пространстве состояний	
2.1. Корректирующие системы	
2.2. Астатический гироскоп	
2.3. Курсовые гироскопические устройства	
2.4. Гировертикали	
2.5. Курсовертикали	
2.6. Гироскопические интеграторы	
2.7. Стабилизаторы на двухстепенных гироскопах	
2.8. Индикаторные стабилизаторы на сферических гироскопах	
2.9. Гироскопические следящие системы	
3. Условия работы и классификация гироскопических устройств	
3.1. Постановка задачи	
3.2. Характеристика условий работы гироскопических устройств	
3.3. Описание полезных сигналов	
3.4. Модели качки объектов	
3.5. Модели вибраций места установки гироскопических устройств	
3.6. Описание внутренних помех	
3.7. Классификация моделей гироскопических устройств в пространстве состояний	
4. Основы структурной теории наблюдаемости гироскопических устройств	
4.1. Применение структурных методов к анализу наблюдаемости гироскопических устройств	
4.2. Наблюдаемость гироскопических устройств, находящихся под действием случайных возмущений	
4.3. Наблюдаемость некорректируемых гироскопических устройств	
4.4. Наблюдаемость корректируемых гироскопических устройств	

4.5. Наблюдаемость случайных процессов	60
4.6. Наблюдаемость гироскопических устройств типа гировертикалей	65
5. Наблюдаемость и управляемость гироскопических устройств	69
5.1. Датчики первичной информации	—
5.2. Стабилизаторы на двухстепенных гироскопах	71
5.3. Наблюдаемость гироскопических устройств с учетом характеристик усилительно-преобразовательного тракта	78
5.4. Гиростабилизаторы на сферических гироскопах	79
5.5. Гировертикаль	80
5.6. Измерения инерциальными приборами на качающемся основании	87
5.7. Исследование наблюдаемости при построении корректируемых гироскопических устройств	90
5.8. Особенности анализа управляемости гироскопических устройств	91
Заключение	100
Литература	—

Ответственный редактор *В. И. Маслевский*
Редактор *И. Ф. Уткина*
Технический редактор *А. В. Мильто*
Корректор *Т. С. Соколова*

Сдано в набор 18.12.79. Подписано в печать 13.03.80. М-26869. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 1. Гарнитура литерат. Печать высокая. Печ. л. 6,75. Уч.-изд. л. 6,22. Тираж 650 экз. Индекс 4750. Заказ 536. Цена 93 коп. (с пересылкой 1 р. 06 к.). Издание подписное.

ЦНИИ «Румб». 198188, Ленинград

Ленинградская типография № 8 ЛПО «Техническая книга»
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
190000, Ленинград, Прачечный пер., 6.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

