



Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)

М. В. Черкасова, М. В. Котельников, С. С. Крылов

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПОЛЫХ КАТОДАХ

Под редакцией проф. В. А. Котельникова



Москва ♦ Ижевск

2023

УДК 533  
ББК 22.333  
К 73

Рецензенты: д. ф.-м. н., чл.-корр. РАН, профессор Л. Е. Украинский;  
д. т. н., профессор Н. П. Полуэктов.

**Черкасова М. В., Котельников М. В., Крылов С. С.**

Математическое моделирование физических процессов в полых катодах / Под ред. проф. В. А. Котельникова. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2023. — 254 с.

Монография посвящена исследованию физических процессов в многоканальных полых катодах — важнейших элементах конструкций современных электрореактивных двигателей. Методами математического моделирования исследована плазменная динамика полого катода с учетом эмиссии электронов и самосогласованного электрического поля, рассмотрены тепловые процессы и эрозия стенок полого катода, что позволяет прогнозировать сроки службы катодных систем.

Представлены результаты натурных экспериментов с многоканальными полыми катодами, проведено их сравнение с результатами вычислительных экспериментов, что позволило подтвердить надежность предложенных в работе методов исследования и расчета полых катодов.

Для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов, интересующихся вопросами математического моделирования пристеночной плазмы, вопросами надежности и долговечности работы катодных систем современных плазменных двигателей.

The monograph is devoted to the study of physical processes in multichannel hollow cathodes — the most important structural elements of modern electric jet engines. Using mathematical modeling methods, the plasmodynamics of a hollow cathode has been studied, taking into account electron emission and a self-consistent electric field, thermal processes and erosion of the walls of a hollow cathode are considered, which makes it possible to predict the service life of cathode systems.

The results of field experiments with multichannel hollow cathodes are presented, their comparison with the results of computational experiments is carried out, which allowed us to confirm the reliability of the methods proposed in the study and calculation of hollow cathodes.

For researchers, engineers, postgraduates and students interested in mathematical modeling of wall plasma, reliability and durability of cathode systems of modern plasma engines.

© М. В. Черкасова, М. В. Котельников, С. С. Крылов, 2023

**ISBN 978-5-4344-1010-6**

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |    |
|---|----|
| <b>Обозначения, индексы и сокращения</b> .....  | 7  |
| <b>Введение</b> .....   | 10 |
| <b>Глава 1. Математическое моделирование плазменного участка<br/>полого катода</b> .....      | 18 |
| 1.1. Физическая модель плазменного участка полого катода .....                                | 18 |
| 1.2. Математические модели плазменного участка полого<br>катода .....                         | 21 |
| 1.2.1. Плазменный участок в режиме сплошной среды<br>( $Kn \ll 1$ ) .....                     | 21 |
| 1.2.2. Плазменный участок в молекулярном режиме<br>( $Kn \gg 1$ ) .....                       | 24 |
| 1.3. Вычислительная модель плазменного участка полого катода<br>в режиме сплошной среды ..... | 26 |
| 1.3.1. Метод последовательных итераций по времени .....                                       | 28 |
| 1.3.2. Метод крупных частиц Давыдова .....  | 33 |
| 1.3.3. Метод численного решения уравнения Пуассона .....                                      | 35 |
| 1.4. Вычислительная модель плазменного участка полого катода<br>в молекулярном режиме .....   | 37 |
| 1.4.1. Метод последовательных итераций по времени<br>( $Kn \gg 1$ ) .....                     | 38 |
| 1.4.2. Классический метод характеристик .....   | 39 |
| 1.4.3. Усовершенствованный метод характеристик .....  | 44 |
| 1.5. Результаты вычислительных экспериментов .....  | 50 |
| 1.5.1. Результаты вычислительных экспериментов<br>в режиме сплошной среды .....               | 50 |
| 1.5.2. Результаты вычислительных экспериментов<br>в молекулярном режиме .....                 | 53 |
| 1.6. Течение плазмы в каналах полого катода вдоль его оси .....                               | 57 |

## **Глава 2. Математические модели тепловых процессов**

|  |    |
|--|----|
| <b>в многоканальных полых катодах</b> .....  | 66 |
| Введение .....   | 66 |
| 2.1. Уравнение теплопроводности для единичного стержня<br>в продольном направлении ..... | 69 |
| 2.2. Уравнение теплопроводности в радиальном направлении<br>набивного катода .....       | 74 |
| 2.3. Электрообмен и тепловое состояние полого катода .....                               | 77 |

## **Глава 3. Математическое моделирование процессов эрозии**

|  |     |
|--|-----|
| <b>в многоканальном полом катоде</b> .....   | 85  |
| Введение .....   | 85  |
| 3.1. Физическая модель эрозии в полых катодах .....  | 94  |
| 3.2. Математические и численные модели эрозии<br>многоканального полого катода .....             | 96  |
| 3.2.1. Газодинамическая модель эрозии многоканального<br>полого катода .....                     | 96  |
| 3.2.2. Свободномолекулярный режим эрозии полого катода .....                                     | 113 |
| 3.3. Результаты вычислительных и физических экспериментов<br>по эрозии полого катода .....       | 118 |
| 3.3.1. Распыление поверхности полого катода<br>при бомбардировке ее ионами низких энергий .....  | 118 |
| 3.3.2. Уравнения баланса примеси продуктов эрозии<br>полого катода .....                         | 130 |
| 3.3.3. Расчет скорости процесса рециклинга .....   | 133 |
| 3.4. Система уравнений для пятикомпонентной плазмы .....   | 135 |
| 3.5. Методика численного интегрирования уравнений<br>массопереноса в каналах полого катода ..... | 141 |
| Заключение к главе 3 .....   | 144 |

## **Глава 4. Натурные эксперименты с многоканальными полыми**

|  |     |
|--|-----|
| <b>катодами и сравнение их с результатами моделирования</b> .....              | 146 |
| 4.1. Многоканальный катод с прокачкой лития НИИ ПМЭ .....                      | 146 |
| 4.2. Многоканальные полые катоды конструкции Alta S.p.A<br>и НИИ ПМЭ МАИ ..... | 151 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.2.1. Моделирование характеристик полномасштабного<br>полого катода (Full-scale Cathode).....   | 152 |
| 4.2.2. Моделирование характеристик уменьшенного<br>катода (Scale-down Cathode). Сравнение результатов<br>вычислительного и натурального экспериментов..... | 165 |
| Заключение к главе 4.....  | 176 |
| <b>Литература</b> .....  | 178 |

### Приложения

|  |     |
|--|-----|
| <b>Приложение 1. Методика расчета плавающего потенциала</b> .....  | 193 |
| <b>Приложение 2. Вывод граничного значения ФРЭ при наличии<br/>термоэмиссии</b> .....  | 195 |
| <b>Приложение 3. Уравнения Власова и система уравнений<br/>характеристик для тел цилиндрической геометрии</b> .....  | 196 |
| <b>Приложение 4. Обзор физических процессов в плазменном<br/>участке полого катода, если плазма имеет переменные свойства<br/>и химические реакции не заморожены</b> ..... | 200 |
| Введение .....   | 200 |
| П4.1. Модели основных ударно-радиационных процессов.....   | 204 |
| П4.2. Модели эффективных сечений основных процессов .....  | 208 |
| П4.3. Модель ускользания излучения из плазменного объема .....   | 213 |
| П4.4. Система кинетических уравнений плазменной модели .....   | 215 |
| П4.5. Метод решения системы кинетических уравнений.....  | 220 |
| П4.6. Метод расчета $Q$ -факторов и решения системы<br>кинетических уравнений с учетом многократных<br>квантовых переходов .....   | 223 |
| <b>Приложение 5. Вывод некоторых формул по главе 3</b> .....   | 232 |
| П5.1. Получение соотношений для коэффициентов степенного<br>разложения концентраций частиц $n_a$ и $n_i$ (п. 3.2.1) .....  | 232 |
| П5.2. Вычисление определенных интегралов и пределов<br>для модели свободномолекулярного течения (п. 3.2.2) .....   | 234 |
| П5.3. Усреднение по радиусу канала уравнений переноса.....   | 237 |

|   |     |
|---|-----|
| П5.4. Решение уравнений переноса атомов и ионов для плоской поверхности в полубесконечном объеме с применением преобразования Фурье ..... | 242 |
| П5.5. Применение асимптотического разложения интеграла Фурье .....  | 247 |
| П5.6. Разложение в ряд фурье-образа $\tilde{G}(k)$ по малому параметру в окрестности нуля .....   | 249 |

# ОБОЗНАЧЕНИЯ, ИНДЕКСЫ И СОКРАЩЕНИЯ

## Обозначения

$T$  — температура

$d$  — диаметр канала

$I$  — сила тока

$V$  — напряжение

$h$  — постоянная Планка

$m$  — масса частицы

$L_k$  — длина стержня набивки полого катода

$L_p$  — длина активной зоны в канале полого катода

$j_M$  — плотность тока в стержне набивки полого катода

$j_\varepsilon$  — плотность тока термоэмиссии с поверхности стержня набивки

$j_{id}$  — плотность ионного диффузионного тока

$j_{ez}$  — продольная плотность тока в плазменном канале

$j_{ik}$  — плотность ионного тока из плазмы на поверхность стержня

$\Delta\varphi_k$  — скачок потенциала у поверхности стержня

$\omega_e$  — скорость ионизации и рекомбинации плазмообразующего газа

$\omega_{ek}$  — скорость ионизации и рекомбинации атомов примеси в составе плазмы

$K_e$  — энергетический эквивалент потерь энергии электронами в неупругих столкновениях

$\alpha_e$  — обобщенная функция ионизации-рекомбинации неравновесной плазмы

$X_i$  — степень ионизации плазмы

$X_{ik}$  — доля ионов примеси в составе плазмы

$X_{ак}$  — доля атомов примеси в составе плазмы

$G_g$  — расход плазмообразующего газа

$P_g$  — общее давление многокомпонентной плазмы в канале

$P_e$  — давление электронного газа в канале

$k$  — постоянная Больцмана

$\lambda$  — пробег частицы

$r$  — радиус ПК

$e\Phi$  — работа выхода

$u, v$  — скорость

$J$  — поток

$D$  — коэффициент диффузии

$n$  — концентрация частиц

$E$  — напряженность электрического поля

$\varphi$  — потенциал электрического поля

$\nu$  — частота столкновений

$\varepsilon = \frac{T_i}{T_e}$  — отношение температур

$t$  — время

$f$  — функция распределения частиц

$q$  — заряд, плотность теплового потока

$r_D$  — радиус Дебая

$M$  — масштаб, масса частицы

$N$  — число стержней в набивке

$W$  — энергия

$\Delta$  — оператор Лапласа

$\nabla$  — градиент

### Индексы

$e$  — электрон

$i$  — ион

$a$  — атом

$\alpha$  —  $e, i, a$

$o$  — индекс безразмерной величины

$p$  — индекс поверхности

$\infty$  — индекс внешней границы расчетной области

$eэ$  — эмитированные электроны

пл, плав — «плавающий» потенциал

---

**Сокращения**

ПК — полый катод

МКПК — многоканальный полый катод

$Kn$  — число Кнудсена

$Re$  — число Рейнольдса

$Nu$  — число Нуссельта

$Sh$  — число Шоттки

МГД — магнитоплазмотермика

НИИ ПМЭ — Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики

МАИ — Московский авиационный институт

НИИ ТП — НИИ тепловых процессов

## ВВЕДЕНИЕ

Полый катод (ПК) в простейшем варианте представляет собой трубку из тугоплавкого материала с внутренним диаметром от долей миллиметра до нескольких миллиметров. С одной стороны в трубку поступает холодный газ (например, Хе, Аг и др.), а с противоположной стороны истекает сильно ионизованная плазма. Если несколько трубок объединить в пучок, то возникает многоканальный полый катод. Интерес к полым катодам появился во второй половине прошлого века в связи с разработкой электрореактивных двигателей (ЭРД) большой мощности. Такие двигатели используются для коррекции положения спутников связи, при подъеме космических аппаратов с промежуточных орбит на рабочие орбиты, при утилизации отработавших свой срок аппаратов, а в обозримом будущем — при полетах обитаемых космических кораблей к планетам Солнечной системы. В последние годы специальные ЭРД используются для нейтрализации электрических зарядов, возникающих на высотных спутниках и приводящих к порче бортовой аппаратуры. Отсюда следует, что необходимый срок работы ЭРД должен составлять несколько лет. Поэтому должны быть созданы катодные системы двигателей, имеющие ресурс работы до 20 000 часов и более. А для этого необходимо проводить физическое и математическое моделирование электродных систем, особенно наиболее напряженных узлов, к которым относятся участки полых катодов, омываемые плазменными образованиями.

Именно этой теме — математическому моделированию физических процессов в полых катодах — посвящена настоящая монография. Авторы монографии в течение нескольких десятков лет занимались исследованием плазменных двигателей, в том числе и полых катодов, как важнейших элементов конструкции ЭРД. Основное внимание уделено недостаточно исследованным вопросам, влияющим на срок службы двигателя:

- влияние термоэмиссии на прикатодную область,
- тепловые процессы в ПК,
- эрозия стенок ПК под воздействием различных физических процессов внутри двигателя и др.

Ниже приведем краткий обзор по истории создания полых катодов и их совершенствованию вплоть до настоящего времени. Обзор сделан по литературным источникам с соответствующими ссылками.

Первые одноканальные полые катоды в виде трубок из тугоплавкого металла были созданы в шестидесятых годах прошлого века [1]. Разряд зажигался внутри трубки (рис. В.1), когда стенки трубок достигали достаточно высокой температуры ( $T \geq 2000$  К).

В дальнейшем с целью снижения температуры стенки и продления срока службы катодного узла были сконструированы полые катоды с диафрагмой (так называемые «orifice cathode») и катоды со вставками из материалов с низкой работой выхода (оксид бария, гексаборид лантана и др.) (рис. В.2) [2–4].

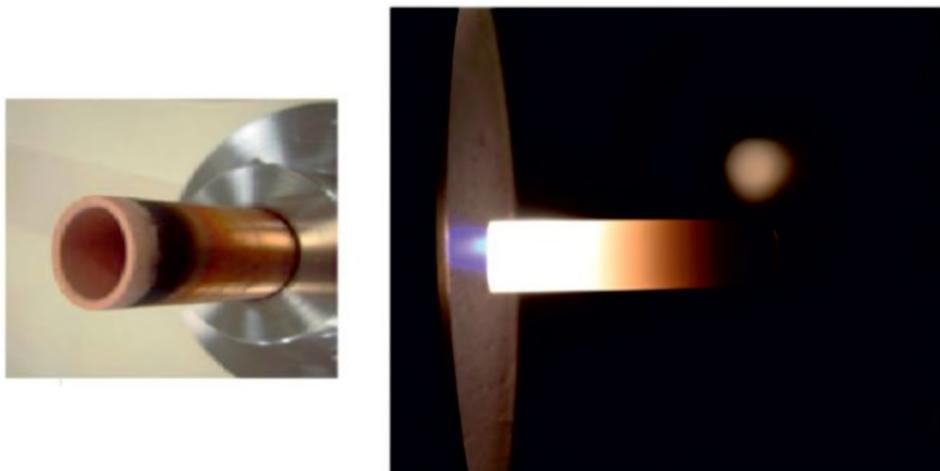


Рис. В.1. Внешний вид одноканального полого катода и рабочий режим катода



Рис. В.2. Конструкция катода с диафрагмой и внешним нагревателем

В дальнейшем для вывода на орбиту более значительной полезной нагрузки и увеличения дальности космических перелетов потребовались электрореактивные двигатели большой мощности ( $100 \div 1000$  кВт). В таких двигателях сила разрядного тока достигала более 1 000 А. Такие токовые нагрузки могли выдержать только многоканальные полые катоды, которые имеют и другие преимущества по сравнению с одноканальными:

- имеют более низкое рабочее напряжение разряда,
- работают при более низкой средней температуре,
- имеют конструктивные преимущества и оказываются более экономичными по массе катодного узла в расчете на единицу мощности.

Для подтверждения сказанного приведем экспериментально полученные распределения температуры стенки вдоль оси полого катода (рис. В.3) и напряжения горения разряда в зависимости от силы тока (рис. В.4), заимствованные из работы [5].

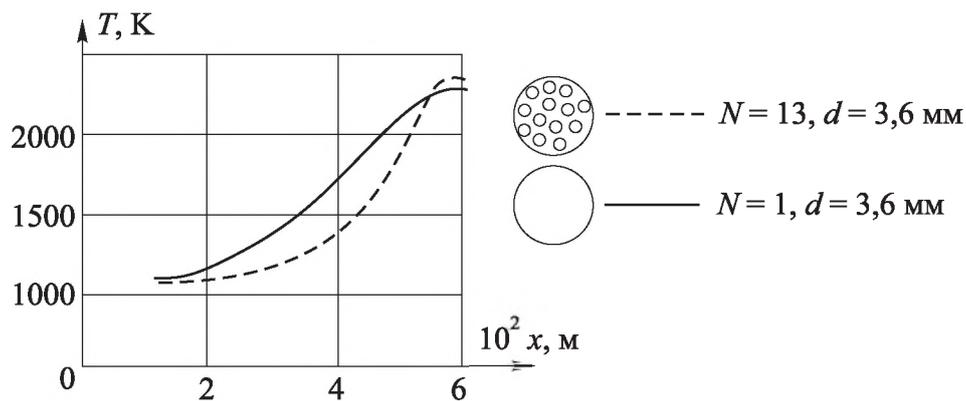


Рис. В.3. Влияние количества каналов многоканального полого катода на температуру внешней стенки катода

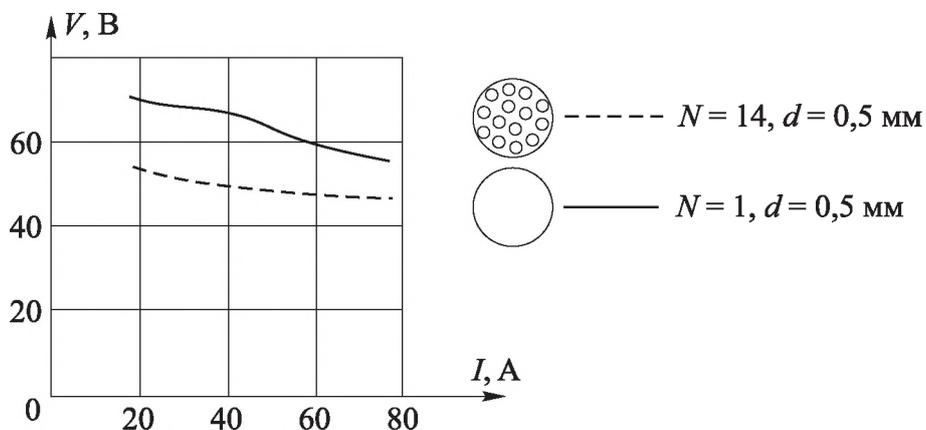


Рис. В.4. Зависимость напряжения от тока разряда в ЭРД с полым катодом

В работе [6] исследована глубина проникновения плазменного образования в каналы многоканального полого катода. Учитывая относительно небольшой диаметр каналов, эксперимент оказался технически сложным, поэтому результаты получены с существенным разбросом. В эксперименте показана зависимость глубины проникновения от расхода плазмообразующего газа (с ростом расхода глубина проникновения уменьшилась) и от величины разрядного тока (с ростом тока глубина проникновения возрастает). Если силу тока менять от 20 до 100 А, а расход газа — от 0,2 до 1 мг/с, то глубина проникновения плазмы в каналы катода менялась от нескольких миллиметров до нескольких десятков миллиметров [6].

В 80-е и 90-е годы прошлого столетия в нашей стране проводились экспериментальные и теоретические исследования многоканальных полых катодов. В работе [7] отражены результаты экспериментального изучения разряда с многоканальным катодом, в котором внешняя оболочка представляла собой вольфрамовую трубку с внутренним диаметром 16 мм и толщиной стенки 2 мм. Девятнадцать каналов диаметром 2 мм изготавливались из вольфрамовой фольги толщиной 0,05 мм, открытых на конце. Катод работал с прокачкой лития. Исследование было сосредоточено прежде всего на измерении параметров внешней плазмы разряда. Теоретическая модель функционирования ПК в работе не обсуждалась.

В работе [8] рассмотрена модель многоканального катода с прокачкой лития, которая включала тепловое излучение, теплопроводность, поверхностную ионизацию, испарение вольфрама, теплопроводность плазмы, резистивный нагрев катода и термоэлектронную эмиссию. Однако модель не рассматривала прикатодные процессы внутри канала. Предполагалось, что напряжение прикатодного слоя равно потенциалу ионизации нейтрального лития, что плазма полностью ионизирована, а глубина проникновения плазмы в каналы косвенно определяется максимальным осевым электрическим полем в пределах канала. Катод состоял из трубки с внутренним диаметром 26 мм, содержащей набивку из вольфрамовых стержней диаметром 1, 2 и 3 мм.

В работе [9] изучались пленочные катоды без прокачки рабочего газа.

В 1994–1998 годах Московский авиационный институт (МАИ) провел первые обширные испытания литиевого электрореактивного ус-

корителя, испытав несколько многоканальных катодных конструкций [10]. Эксперименты дали качественное обоснование для выбора оптимальной конструкции многоканального катода. Тестировалось шесть различных геометрий катодов в согласовании с характеристиками всей конструкции. Эксперименты включали разработку и испытания трех различных двигателей малой тяги мощностью 30 кВт, 150 кВт и 200 кВт. Также изучалось введение добавок в поток литиевого ракетного топлива. Сообщалось о значительном снижении эрозии материала стенки катода во время экспериментов, в которых в разряд вводилось некоторое количество бария. В это же время в МАИ совместно с НИИ ПМЭ проводились теоретические исследования и разрабатывалась квазиодномерная модель одноканального полого катода, включая инженерную методику расчета эрозии катода [11–13].

Среди работ иностранных авторов отметим исследования, проведенные в Принстонском университете, где проводились обширные исследования катодов с прокачкой лития. В работе [6] проводилось сравнение характеристик одноканального и многоканального катодов в эксперименте и в теоретическом моделировании, однако модель позволила верифицировать только температурный профиль (рис. В.5) и катодное напряжение.

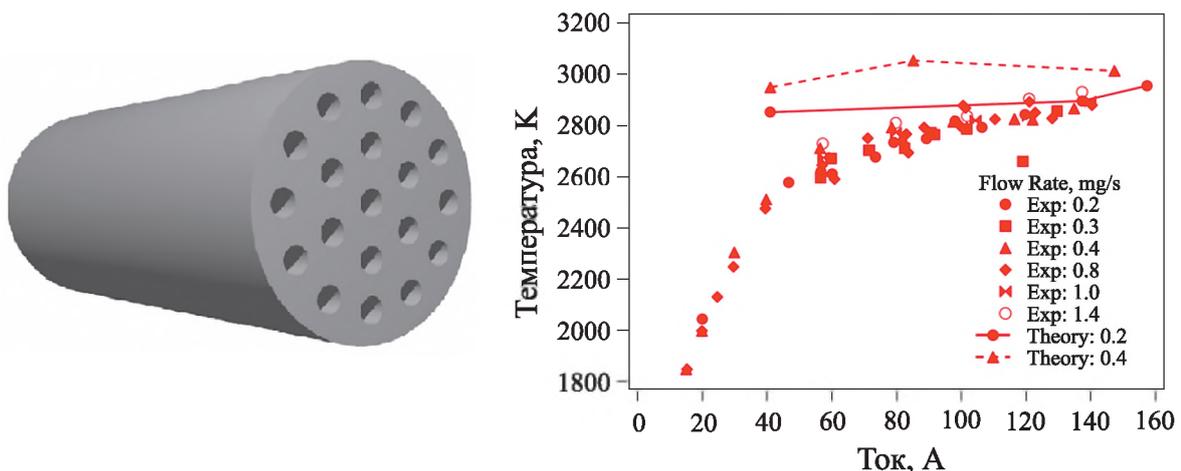


Рис. В.5. Максимальная температура внешней поверхности катода: сравнение экспериментальных данных и результата моделирования [6]

Позднее, в 2006 г., опубликована диссертация [14], в которой подробно рассмотрена модель одноканального полого катода в дуговом ре-

жине с прокачкой лития и сделана попытка распространения модели на случай многоканального катода. Плазма лития в активной зоне считается однородной, с высокой степенью ионизации, до 95 %.

Исследования полых катодов проводились в Университете Южной Калифорнии (США). И в 2008 г. опубликована диссертация [16], в которой изложена модель одноканального полого катода, в которой плазма рассматривается как квазинейтральная, столкновительная, сильно ионизированная жидкость, управляемая магнитогидродинамическими (МГД) уравнениями. Процессы переноса массы, импульса и энергии смоделированы как классические двухчастичные столкновения: ионно-нейтральные, электрон-нейтральные, электрон-ионные. В рассматриваемой модели каждый вид частиц (электрон, ион и нейтрал) управлялся собственным набором уравнений сохранения, наряду с другими уравнениями, описывающими взаимодействие заряженных частиц в присутствии электрического поля. Модель прикатодного слоя не рассматривается, автор просто принимает температурный профиль катода в качестве входного параметра. Также в качестве входных параметров используются известные из эксперимента потенциал и плотность плазмы на выходе из канала катода. Размер активной зоны был определен как область материала катодной стенки, отвечающая за 75 % термоэмиссии электронов. В данной работе не рассматривается возможность на основе модели одноканального катода создания модели расчета многоканального катода. Всего лишь отмечены известные экспериментальные факты для многоканальных катодов.

В течение примерно 10 лет исследования многоканальных катодов проводились в Университете г. Пизы (Италия) совместно с компанией Alta-Centrosazio. Результаты исследований приведены в работах [17, 18]. Первоначально была разработана модель одноканального полого катода, на основе которой потом была сформирована модель трубчатого многоканального катода. Модель способна предсказать плазменные параметры, температуру катода (рис. В.6) и распределения плотностей тока ионов и электронов вдоль оси канала как функцию геометрии катода, а также скорости потока. В работах приведены результаты моделирования температурных профилей и электрических характеристик катода, удовлетворительно согласующиеся с экспериментальными данными. Также в Университете г. Пизы проводились теоретические исследования

механизмов процессов эмиссии электронов с поверхности катода и особенностей плазменных процессов в полом катоде [15].

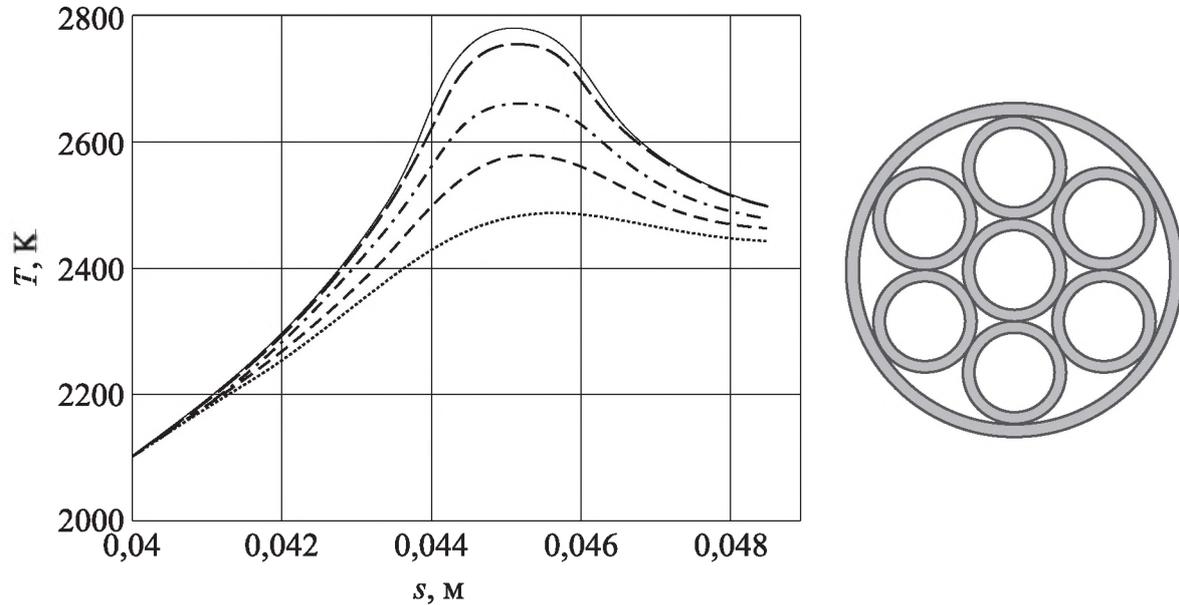


Рис. В.6. Результаты моделирования температуры каналов трубчатого полого катода (различные кривые соответствуют различным значениям расхода рабочего газа в ПК)

В разрабатываемых моделях многоканальных катодов существуют проблемы моделирования процессов переноса в радиальном направлении, поскольку необходимо учитывать конкретный вид конструкции катода и плазменные характеристики (теплопроводность и вязкость). Остается практически не затронутым вопрос прогнозирования ресурса катода, поскольку не моделируются процессы разрушения поверхностей катода.

На кафедре физики МАИ более 20 лет проводились экспериментальные и теоретические исследования полых катодов. Одним из авторов данной монографии была сформулирована замкнутая физико-математическая модель одноканального термоэмиссионного полого катода, работающего в дуговом режиме. Результаты исследований оформлены в диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в 2007 г. [19]. Расширенная модель физических процессов уже применительно к многоканальным катодам изложена ниже в данной монографии. Создана компьютерная модель и оформлено свидетельство о государственной регистрации программы [20]. С 2010

---

по 2012 г. НИИ ПМЭ МАИ совместно с Университетом г. Пизы и компанией Alta S.p.A. проводились экспериментальные исследования рабочих параметров сильноточного многоканального полого катода и верификация теоретических моделей Университета г. Пизы и НИИ ПМЭ МАИ. Результаты совместных исследований опубликованы в работах [21–23].

Учитывая приведенный обзор работ предшествующих авторов, ниже будут представлены физические, математические и вычислительные модели плазмодинамики полого катода, а также модели тепловых и эрозионных процессов, что позволяет прогнозировать сроки службы катодных узлов электрореактивных двигателей.

## ГЛАВА 1

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАЗМЕННОГО УЧАСТКА ПОЛОГО КАТОДА

### 1.1. Физическая модель плазменного участка полого катода

Будем рассматривать классический одноканальный полый катод, который представляет собой тонкостенный цилиндр. Холодный рабочий газ (например, Хе или Ar) поступает в торец канала и достигает области фронта ионизации, где имеет место термоэмиссия электронов. Считаем, что часть эмитируемых электронов обладает достаточной энергией, чтобы производить ионизацию газа. Пренебрегая вторичной эмиссией, фотоэмиссией и автоэмиссией, будем считать, что имеет место только термоэмиссия с поверхности ПК, которая определяется законом Ричардсона–Дешмана для плотности потока термоэлектронов [24]:

$$j_{e3} = \frac{4\pi m_e e k^2}{h^3} T_p^2 \exp\left(-\frac{e\Phi}{kT_p}\right), \quad (1.1)$$

где  $h$  — постоянная Планка,  $T_p$  — температура эмитирующей поверхности,  $e\Phi$  — работа выхода электронов из поверхности катода. В случае наличия электрических полей у поверхности ПК формула (1.1) должна быть модифицирована с учетом эффекта Шотки [24]. Если температура поверхности  $T_p$  изменяется по длине полого катода, то и плотность эмиссионного тока будет меняться в соответствии с формулой (1.1).

Вследствие ионизации внутри полого катода возникает плазменное образование, которое называют «внутренним положительным столбом разряда» или «активной зоной полого катода», в которой плазма достигает достаточно высокой степени ионизации. Математическая модель возникающего плазменного образования зависит от значения числа Кнудсена, равного отношению среднего пробега частиц плазмы  $\lambda$  к ха-

ракетному размеру задачи  $r_p$  (рис. 1.2). Если  $Kn = \frac{\lambda}{r_p} \gg 1$ , то режим называется молекулярным. Если  $Kn = \frac{\lambda}{r_p} \ll 1$ , то возникает режим сплошной среды. В случае  $Kn = \frac{\lambda}{r_p} \sim 1$  режим называется переходным.

Если расход рабочего газа достаточно большой и на всем участке активной зоны  $\lambda \ll r_p$ , то в активной зоне канала полого катода установится режим сплошной среды. Если же расход рабочего газа мал, а на выходе из канала имеет место вакуумное пространство, то на некотором участке вблизи выхода могут возникнуть условия, когда  $\lambda \gg r_p$ , и на этом участке возникает молекулярный режим, к которому примыкает участок с переходным режимом.

Будем предполагать, что участок катода с переходным режимом мал, и его существованием будем пренебрегать.

Рассматриваемый в данной работе одиночный полый канал можно в первом приближении считать элементом более сложного многоканального полого катода, что следует из рис. 1.1.

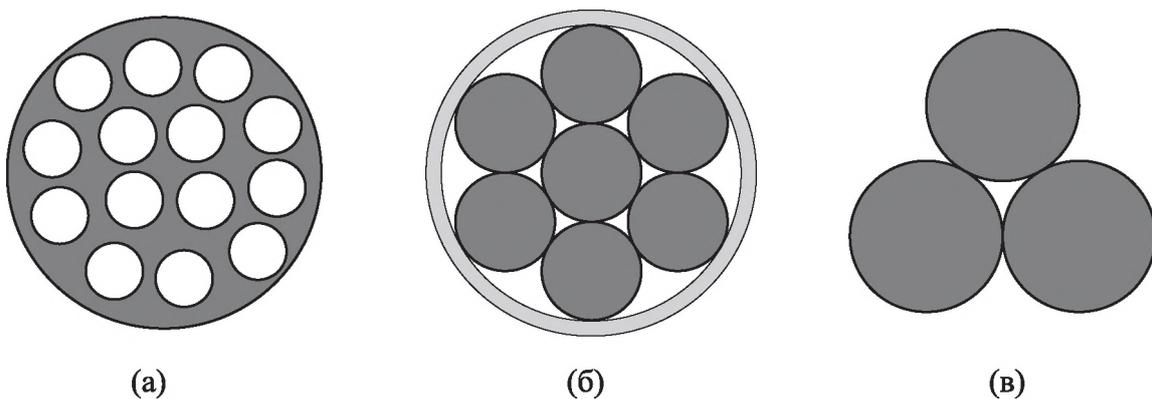


Рис. 1.1. Поперечное сечение многоканальных полых катодов:  
 а) сборка из полых трубок; б) сборка из сплошных стержней;  
 в) сборка из сплошных стержней в увеличенном масштабе

Из рис. 1.1 видно, что сечение одиночного канала может иметь разную форму в зависимости от компоновки многоканальной системы. В дальнейшем ограничимся рассмотрением только одиночного канала,

как на рис. 1.1, в, предполагая, что результаты исследования будут близки к другим формам канала.

Рассмотрим более подробно физические процессы, происходящие в плазменном образовании вблизи стенки полого катода, если установилось стационарное состояние, возникающее под действием процессов ионизации термоэмиссионными электронами и термализованными электронами в плазменном столбе и процессов рекомбинации в тройных столкновениях. В момент включения катодной системы и образования плазмы электроны, как более быстрые частицы, первыми попадают на внутреннюю стенку полого катода и заряжают ее отрицательным потенциалом. Вследствие этого последующие порции электронов замедляются, а положительно заряженные ионы ускоряются. Процесс заряда стенки заканчивается, когда потоки ионов и электронов на нее уравниваются. Если принять потенциал пространства за ноль, то потенциал стенки будет отрицательным (порядка нескольких вольт). Этот потенциал называется потенциалом плавающего тела. Он зависит от параметров плазмы: концентраций заряженных частиц, их температур и направленных скоростей.

Размеры слоя, возникающего вблизи стенки ПК объемного заряда, будут рассчитаны ниже. Положительно заряженные ионы под действием плавающего потенциала стенки приобретают дополнительную энергию. В момент столкновения со стенкой они нейтрализуются и отражаются в виде нейтральных атомов или однозарядных ионов. Они могут также вызывать эрозию стенки ПК, вследствие чего со стенки возникает поток нейтральных атомов и однозарядных ионов материала стенки. Эти процессы подробно рассмотрены в главе 3 настоящей монографии. Концентрация частиц из материала стенки ПК всегда много меньше концентрации частиц плазмообразующего газа.

Как показано в приложении 1, под влиянием электронной эмиссии с поверхности прикатодный слой объемного заряда может изменять знак. Вблизи поверхности полого катода за счет эмиссии электронов могут возникать отрицательные потенциальные ямы, так что градиент потенциала меняет знак, а вместе с ним меняет знак и сила электрического поля, действующая на электроны. Увеличение плотности тока эмиссии электронов ведет к росту глубины потенциальной ямы, и это может стать препятствием для дальнейшего увеличения плотности тока эмиссии. Плавающий потенциал стенки ПК под действием термоэмиссии также

несколько растет по модулю. Более подробно возможные физические процессы в пристеночном слое рассмотрены в приложении 4, однако они должны учитываться только в более сложных моделях рассмотрения пристеночной плазмы по сравнению с теми моделями, которые рассмотрены ниже в п. 1.2.

## 1.2. Математические модели плазменного участка полого катода

### 1.2.1. Плазменный участок в режиме сплошной среды ( $Kn \ll 1$ )

Сформулируем математическую модель в данном случае при выполнении следующих предположений.

1. Модели для плотной плазмы, представленные в главе 1, записаны в предположении, что степень ионизации может быть достаточно большой. Следовательно, разделить задачу на газодинамическую часть и электродинамическую часть, которые решались бы независимо, нельзя.

2. В полом катоде большую роль играет термоэмиссия, которую нужно учитывать при формулировке граничного условия для электронов.

3. Учитывая форму выбранного полого катода (рис. 1.1, в), удобно использовать цилиндрическую систему координат.

4. Имеют место следующие упрощающие предположения, касающиеся свойств пристеночной плазмы в ПК:

- плазма имеет постоянные свойства и замороженные химические реакции;
- магнитные поля малы;
- вязкостью пренебрегается.

В данном случае модель Эйлера – Пуассона имеет вид [25]

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} J_i = 0, \quad J_i = -D_i \left( \frac{1}{T_i} \nabla n_i T_i - \frac{en_i}{kT_i} E \right); \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} J_e = 0, \quad J_e = -D_e \left( \frac{1}{T_e} \nabla n_e T_e + \frac{en_e}{kT_e} E \right); \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \operatorname{div} J_a = 0, \quad J_a = -D_a \frac{1}{T_a} \nabla n_a T_a; \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial n_{e\alpha}}{\partial t} + \operatorname{div}(n_{e\alpha} u_{e\alpha}) = 0; \quad (1.5)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{e}{\varepsilon_0}(n_i - n_e), \quad E = -\nabla \varphi, \quad (1.6)$$

где  $n$  — концентрация,  $T$  — температура,  $D$  — коэффициент диффузии,  $E, \varphi$  — напряженность и потенциал электрического поля,  $e$  — модуль заряда электрона,  $k$  — постоянная Больцмана,  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная. Индексы  $\alpha = i, e, e\alpha$  означают:  $i$  — ионы,  $e$  — электроны,  $e\alpha$  — эмитированные электроны.

Учитывая важность процесса термоэмиссии, изменение скорости эмитированных электронов  $u_{e\alpha}$  со временем, согласно [24] находим из уравнения (закон сохранения импульса)

$$m_e n_{e\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_{e\alpha} \nabla \right) u_{e\alpha} = -e n_{e\alpha} E - k \nabla (n_{e\alpha} T_{e\alpha}) + m_e n_{e\alpha} \sum_{\alpha} (u_{\alpha} - u_{e\alpha}) \nu_{e\alpha, \alpha}. \quad (1.7)$$

В (1.7)  $\nu_{e\alpha, \alpha}$  — частота столкновений эмитированных электронов с компонентами плазмы. В частности, частота столкновений эмитированных электронов с атомами согласно [24] имеет вид

$$\nu_{e\alpha, a} = n_a \nu_{e\alpha} \sigma_{ea}, \quad \sigma_{ea} = c k T_{e\alpha}, \quad (1.8)$$

где  $\nu_{e\alpha}$  — тепловая скорость эмитированных электронов,  $c$  — постоянная, затабулированная в [24]. Уравнение движения вдоль оси канала не вошло в математическую модель, поскольку направленная скорость вдоль оси канала мало влияет на плазмодинамику полого катода. Движение плазмы вдоль оси канала будет рассмотрено ниже в п. 1.6.

В случае необходимости математическую модель можно усложнить, добавив законы сохранения энергии и импульса [25].

Система дифференциальных уравнений (1.2)–(1.8) дополняется стандартной системой начальных и граничных условий [25].

### Начальные условия

В качестве начального распределения концентраций ионов и электронов следует брать установившиеся распределения ионов и электро-

нов, однако они заранее не известны. Из опыта математического моделирования пристеночной плазмы предлагаются следующий подход к выбору начального условия [29]

$$n_i(r, 0) = n_e(r, 0) = \text{const.}$$

Если в качестве масштаба концентрации выбрано  $n_{i\infty} = n_{e\infty}$ , то константу удобно приравнять к единице.

Такой выбор ведет к ошибкам в переходном процессе от начального распределения к конечному. Однако опыт показал, что конечное распределение слабо зависит от начального распределения и обычно близко к истинному. Поэтому такой подход допустим, если нас не интересует переходный процесс, а необходимо только установившееся решение.

Начальное распределение для электрического потенциала определяется решением уравнения Пуассона. Граничные условия для потенциала стенки и потенциала на внешней границе расчетной области рассмотрены ниже.

Начальное распределение эмитированных электронов выбирается нулевым. Это означает, что эмиссия начинается в момент времени  $t > 0$ .

### Граничные условия

Расчетная область вблизи стенки полого катода должна превышать возмущенную зону, создаваемую заряженной стенкой с эмиссией. Поэтому на внешней границе расчетной области потенциал принимается равным нулю, а концентрации и температуры — их значениям в невозмущенной плазме.

$$\begin{aligned} \varphi(r_\infty, t) &= 0, \\ n_{i,e,a}(r_\infty, t) &= (n_{i,e,a})_\infty, \\ T_{i,e,a}(r_\infty, t) &= (T_{i,e,a})_\infty. \end{aligned} \tag{1.9}$$

На стенке полого катода пока без учета эмиссии электронов имеем

$$\begin{aligned} (\varphi)_p &= \varphi_{\text{шлав}}, \\ (n_e)_p &= 0, \\ (n_i)_p &= f(r_0, \varphi_0, \varepsilon). \end{aligned} \tag{1.10}$$

В (1.10) плавающий потенциал  $\varphi_{\text{плав}}$  определяется по методике, изложенной в приложении 1 к данной монографии. В зависимости от параметров задачи  $r_0 = \frac{r_p}{r_D}$ ,  $\varphi_0 = \frac{e\varphi}{kT_i}$ ,  $\varepsilon = \frac{T_{i\infty}}{T_{e\infty}}$ ,  $\varphi_{\text{плав}}$  имеет отрицательный знак относительно потенциала невозмущенной плазмы, принятой за ноль. Его значение по модулю изменяется от нескольких десятых долей Вольта до нескольких Вольт.  $(n_e)_p = 0$ , поскольку электроны отталкиваются от отрицательно заряженной стенки. Значение  $(n_i)_p$  определяется по методике, изложенной в [25], и может составлять

$$0,3n_{i\infty} \leq n_{ip} \leq 0,75n_{i\infty}, \quad (1.11)$$

если  $5 \leq r_0 \leq 25$ ,  $-30 \leq \varphi_0 \leq 10$ ,  $0,25 \leq \varepsilon \leq 1$ .

Для эмиссионного потока

$$\begin{aligned} n_{e\text{эм}}(r_\infty, t) &= 0, \\ n_{e\text{эм}}(r_p, t) &= \frac{j_{\text{эм}}(T_p)}{eu_{e\text{эм}}(r_p, t)}, \\ u_{e\text{эм}}(r_p, t) &= u_{e\text{эм}}^0(t). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Скорость вылета электронов из эмитирующей поверхности зависит от ряда факторов, в частности от материала стенки полого катода, состояния его поверхности, параметров задачи  $(r_0, \varphi_0, \varepsilon)$  и др. Источниками информации о значении  $u_{e\text{эм}}^0$  могут служить величина  $j_{\text{эм}}$ , рассчитанная по формуле (1.1) или измеренная экспериментально, и величина  $n_{e\text{эм}}(r_p)$ , также измеренная экспериментально, например зондовыми методами.

### 1.2.2. Плазменный участок в молекулярном режиме ( $\text{Kn} \gg 1$ )

Рассмотрим теперь случай  $\text{Kn} \gg 1$ , если это имеет место в условиях работы полого катода. В этом случае вблизи свободного торца полого катода возникают условия, когда средний пробег частиц  $\lambda \gg r_p$ , где  $r_p$  — характерный размер катода. Рассматривается участок полого катода радиусом  $r_p$ , который контактирует с разреженной плазмой, концен-

трация которой  $n_\alpha$ , температура —  $T_{\alpha\infty}$ , масса плазмообразующих частиц —  $m_\alpha$ , где  $\alpha = i, e$  ( $i$  — ионы,  $e$  — электроны).

Поверхность катода предполагается идеально каталитической, с нее истекает поток эмитируемых электронов, зависящий от температуры его поверхности  $T_p$  по закону Ричардсона – Дешмана (1.1). Потенциал поверхности равен плавающему потенциалу  $\varphi_{шт}$ , метод расчета которого обсужден в приложении 1. Магнитное поле предполагается настолько слабым, что его влиянием на процессы переноса в пристеночной области можно пренебречь. Требуется получить эволюцию функций распределения  $f_\alpha$ , их моментов  $n_\alpha, T_\alpha$ , потенциал электрического поля  $\varphi(r)$  в возмущенной зоне. Это есть задача Власова – Пуассона с системой начальных и граничных условий. Используется цилиндрическая система координат  $(r, \theta, z)$  (рис. 1.2).

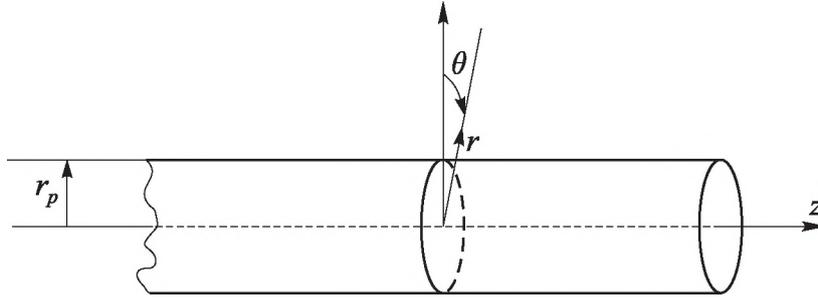


Рис. 1.2. Цилиндрическая система координат

Учитывая, что радиус стержня  $r_p$  мал, будем предполагать, что область молекулярного режима по оси  $z$  имеет размер  $l \gg r_p$ . В этом случае параметры плазмы вдоль оси  $z$  будут меняться незначительно и зависимость  $f_\alpha$  от координат  $z$  и  $v_z$  выпадает [25]:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} + \left( \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_r \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_r} + \left( \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_\theta - \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\theta} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_\alpha n_\alpha, \quad \alpha = i, e, \quad (1.13)$$

$$E = -\nabla \varphi.$$

Вывод уравнения (1.13) имеется в приложении 3.

В качестве начальной функции распределения выбираем функцию Максвелла.

Концентрации заряженных частиц, как моменты функций распределения, имеют стандартный вид:

$$n_\alpha(r, \theta, t) = \left( \frac{2kT_\alpha}{m_\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int f_\alpha(r, \theta, v_r, v_\theta, t) dv_r dv_\theta. \quad (1.14)$$

С использованием (1.14) путем решения уравнения Пуассона находится начальное распределение  $\varphi(r, t=0)$ . Значение  $\varphi_{\text{шт}}$  на поверхности цилиндра определяется по методике, изложенной в приложении 1.

Учтем эмиссию электронов с поверхности цилиндра с использованием закона Ричардсона – Дешмана (1.1) и получим граничное условие на поверхности в виде [30], подробно изложенном в приложении 2.

$$f_{e\text{эм}}(r, v) = \frac{2m_e^3}{h^3} \exp\left\{ \frac{-e\Phi}{kT_p} \right\} \exp\left[ -\frac{m_e v^2}{2kT_p} \right]. \quad (1.15)$$

На внешней границе возмущенной зоны  $f_{e\text{э}} = 0$ .

### 1.3. Вычислительная модель плазменного участка полого катода в режиме сплошной среды

Запишем уравнения (1.2)–(1.8) с системой начальных и граничных условий в безразмерном виде с помощью следующей системы масштабов:

$$\left. \begin{aligned} \text{масштаб концентрации: } M_n &= n_{i\infty}, \\ \text{масштаб длины: } M_L = r_D &= \left( \frac{\varepsilon_0 k T_{i\infty}}{n_{i\infty} e^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad r_D \text{ — радиус Дебая,} \\ \text{масштаб времени: } M_t &= \frac{M_L^2}{D_i}, \quad D_i \text{ — коэффициент диффузии,} \\ \text{масштаб электрического потенциала: } M_\varphi &= \frac{k T_{i\infty}}{e}. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Остальные масштабы находятся по формулам размерностей.

Система уравнений (1.2)–(1.8) в безразмерном виде записывается так:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} J_i = 0, \quad J_i = -\nabla n_i + n_i E; \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} J_e = 0, \quad J_e = -D(\nabla n_e + \varepsilon n_e E); \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \operatorname{div} J_a = 0, \quad J_a = -\nabla n_a; \quad (1.19)$$

$$\Delta \varphi = n_e - n_i, \quad E = -\nabla \varphi; \quad (1.20)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha \nabla \right) u_\alpha = -A [n_\alpha E + \nabla (n_\alpha T_\alpha)] + \sum_j (u_j - u_\alpha) \nu_{\alpha j}, \quad \alpha = i, e, a, \quad A = \frac{kT_{i\infty} r_D^2}{m_e D_i^2} \quad \text{для } \alpha = e; \quad (1.21)$$

$$D = \frac{D_e}{D_i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_i T_e}{m_e T_i}} = D_0 \varepsilon^{-1/2}, \quad \varepsilon = \frac{T_i}{T_e}, \quad D_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}. \quad (1.22)$$

В (1.22) коэффициенты диффузии рассчитывались с помощью модели твердых сфер.

Система граничных и начальных условий для случая цилиндрической геометрии тела радиусом  $r_0 = \frac{r_p}{r_D}$  в безразмерном виде следующая:

$$n_i(r_0, t) = n_e(r_0, t) = 0,$$

$$\varphi(r_0, t) = \varphi_0(t),$$

$$n_i(r_\infty, t) = n_e(r_\infty, t) = 1,$$

$$\varphi(r_\infty, t) = 0,$$

$$n_i(r_0, 0) = n_i(r), \quad n_e(r_0, 0) = n_e(r),$$

$$\varphi(r, 0) = \varphi(r).$$

Здесь  $r_\infty$  — радиус внешней границы расчетной области;  $n_i(r)$ ,  $n_e(r)$ ,  $\varphi(r)$  — начальные распределения концентраций и потенциала.

Система (1.17)–(1.22) с начальными и граничными условиями решалась методами последовательных итераций по времени с применением метода крупных частиц для уравнений неразрывности и схемы среднего арифметического для уравнения движения термоэлектронов. Схема среднего арифметического основана на разбиении каждого временного шага на два «дробных» и определении решения на полном шаге как полусуммы решений на двух «дробных» [26].

В связи с пространственно-временным развитием эмиссионного электронного облака внешняя граница возмущенной зоны делалась динамической и расширялась по мере необходимости.

Решение уравнения Пуассона осуществлялось с использованием спектральных методов.

### 1.3.1. Метод последовательных итераций по времени

Алгоритм метода заключается в следующем. В начальный момент времени заданы распределения концентраций и потенциалов в начальном стационарном состоянии плазмы. Потенциал стенки полого катода в этом состоянии —  $\varphi_1$ , а плотность ионного тока на стенку —  $j_1$ . В момент времени  $t = 0$  на катод подается прямоугольный импульс потенциала  $\Delta\varphi$ , так что новое значение потенциала равно  $\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi$  и оно поддерживается постоянным. Пренебрегая током смещения, требуется найти эволюцию плотности тока проводимости от начального значения  $j_1$  до конечного стационарного состояния  $j_2$ , соответствующего конечному значению потенциала стенки  $\varphi_2$ . Расчет изменения плотности тока со временем ведется последовательно с интервалом времени  $\Delta t$ . Оптимальная величина шага по времени выбирается путем методических исследований. Согласно классическим представлениям в методе крупных частиц при интегрировании уравнений переноса используется, как правило, явная схема интегрирования первого порядка точности. Как показано в [26], условие устойчивости Неймана применительно к линейным гиперболическим уравнениям будет выполняться, если использовать известную схему Лакса [27]. Анализ устойчивости схемы, проведенный в [27], приводит к неравенству  $\left| \frac{v\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$ , где  $v$  — физическая скорость среды,  $\Delta t$  — шаг по времени,  $\Delta x$  — шаг по пространственной координате.

Отсюда вытекает ограничение на шаг по времени  $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|v_{\max}|}$ , где  $v_{\max}$  — максимальная скорость крупных частиц. Это условие для шага по времени является примером условия устойчивости Куранта – Фридрихса – Леви [27] применительно к линейным гиперболическим уравнениям. Полученное неравенство означает, что в явном методе шаг по времени нужно выбирать меньше наименьшего характерного физического времени задачи, которое в случае уравнений переноса есть время, за которое скорость  $v$  приводит к переносу на расстояние  $\Delta x$ . Условие Куранта – Фридрихса – Леви включает требование, чтобы физическая скорость  $v$  была меньше сеточной скорости  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ .

Однако многочисленные вычислительные эксперименты [25] с пристеночной плазмой как в молекулярном, так и в континуальном режимах показали, что приведенное ограничение на шаг по времени оказывается слишком жестким [28]. Кривая распределения потенциала имеет максимальный градиент вблизи поверхности, следовательно, вблизи поверхности максимален перенос, связанный с подвижностью. Во многих задачах вблизи поверхности максимален также и градиент концентрации заряженных частиц, поэтому максимален перенос, связанный с процессом диффузии. Из сказанного следует, что именно вблизи поверхности находятся самые высокоскоростные частицы среды, которые и влияют на шаг по времени через условие Куранта – Фридрихса – Леви.

Учитывая каталитические свойства поверхности для заряженных частиц, можно ожидать, что самые высокоскоростные притягивающиеся частицы за несколько шагов по времени поглощаются стенкой и выбывают из рассмотрения. Иными словами, в условие Куранта – Фридрихса – Леви входят скорости очень малого числа короткоживущих частиц, не отражающих динамику всего массива.

Многочисленные вычислительные эксперименты, приведенные в работах [25, 36], позволяют сделать вывод, что шаг по времени как в молекулярном, так и в континуальном режимах может быть увеличен в 3–5 раз по сравнению с его величиной, вытекающей из условия Куранта – Фридрихса – Леви, без нарушения устойчивости и точности решения. Поскольку исследуемые в [25, 36] системы дифференциальных уравнений являются нелинейными, сделанный выше вывод рассматрива-

ется нами как начальная информация для проведения методических исследований. Эти исследования показали, что шаг по времени, вытекающий из условия КФЛ для линейных систем, и в случае нелинейных систем может быть увеличен в 3–5 раз без нарушения устойчивости решения.

Еще одна особенность предложенной вычислительной схемы состоит в следующем. При постановке граничного условия на идеально каталитической поверхности в ряде работ [29] полагалось

$$n_{i,e}(r_p, t) = 0. \quad (1.23)$$

Как показано в [25], такой подход справедлив для отталкивающихся частиц и, с некоторыми натяжками, для притягивающихся частиц, если выполняется неравенство

$$r_p \gg r_D \gg \lambda,$$

где  $r_p$  — характерный размер задачи,  $\lambda$  — средняя длина свободного пробега,  $r_D$  — радиус Дебая, характеризующий порядок толщины слоя объемного заряда.

Если выполняется другое неравенство:

$$r_p \gg \lambda \gg r_D,$$

то режим сплошной среды имеет место в невозмущенной области, а в слое объемного заряда — молекулярный режим.

В этих условиях концентрация заряженных частиц на поверхности ПК определяется решением кинетических уравнений, как это сделано в п. 1.4 настоящей монографии, и оно для притягивающихся частиц отлично от нуля. Вычислительные эксперименты показали [25, 36], что значение граничной концентрации влияет на структуру возмущенной зоны и процесс эволюции, однако величина установившегося значения ионного тока на стенку ПК изменяется незначительно. Поэтому в [25] сделан вывод о том, что в задачах обтекания тел плотной плазмой можно использовать условие (1.23), если исследуются только стационарные процессы переноса заряда. Если же важны реальные распределения концентрации вблизи электрода и реальный переходный процесс, то модельное условие (1.23) должно быть заменено на более корректное.

Ниже предложен способ нахождения такого корректного граничного условия на примере тела плоской геометрии. На рис. 1.3 изображена плоскость ленточного типа с указанием слоев с различными режимами описания поведения плазмы.

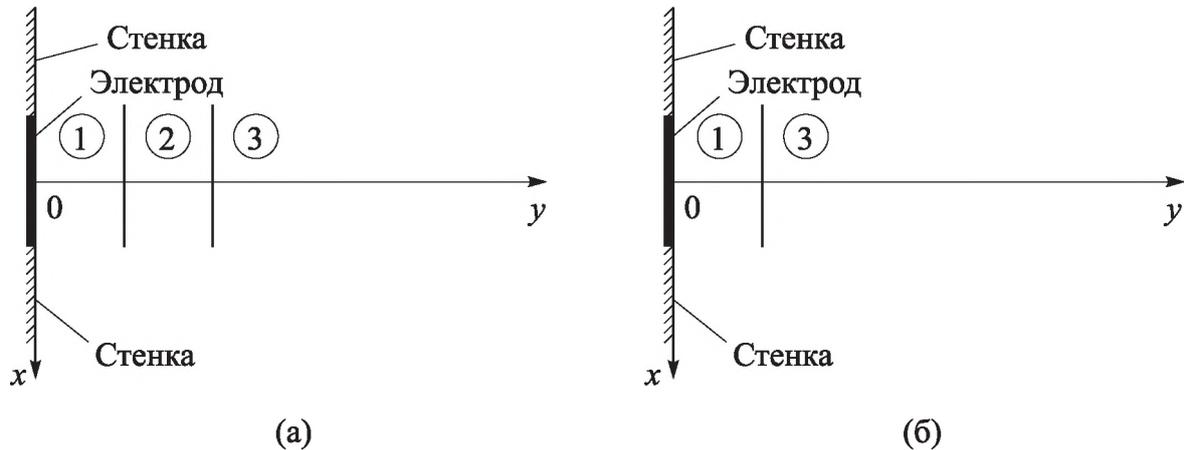


Рис. 1.3. Структура пристеночной области:

- 1 — свободномолекулярная область ( $Kn \gg 1$ );
- 2 — переходная область ( $Kn \approx 1$ );
- 3 — континуальная область ( $Kn \ll 1$ )

Если перемещаться от плоскости электрода по нормали, то вначале имеет место свободномолекулярная область (1), затем переходная область (2) и после нее континуальная область (3). Деление на указанные области достаточно условно, однако в каждой из них имеет место своя математическая модель. В первой области — уравнения для свободномолекулярного режима, во второй — для переходного режима, в третьей — для режима сплошной среды. На границах областей необходимо проводить сшивание решений.

Для упрощения решения данная задача (рис. 1.3, а) заменена на более простую задачу (рис. 1.3, б), в которой сделано предположение о малости переходной области (2).

Задача в молекулярном режиме решалась по алгоритму, изложенному в п. 1.4 монографии. Концентрация на стенке определялась через моменты от функций распределения. Концентрации на границе между областями 1 и 3 рассматривались как граничные условия для задачи в континуальной области 3. Алгоритм решения этой задачи подробно изложен ниже в п. 1.3.2 и п. 1.3.3.

Стыковка решений в обеих зонах обеспечивалась общим электрическим полем и равенством граничных значений концентраций ионов и электронов. Решения осуществлялись на координатной сетке  $N_t \times N_x \times N_y$  (в зоне 3) и на сетке  $N_t \times N_x \times N_y \times N_{v_x} \times N_{v_y}$  (в зоне 1). Из методических расчетов были выбраны:  $N_t = 200$ ,  $N_x = 30$ ,  $N_y = 20$ ,  $N_{v_x} = 10$ ,  $N_{v_y} = 10$ . В численных экспериментах варьировались безразмерный радиус плоскости  $r_0 = \frac{r_p}{r_D}$  ( $5 \leq r_0 \leq 25$ ), безразмерный потенциал

$\varphi_0 = \frac{e\varphi_p}{kT_i}$  ( $-30 \leq \varphi_0 \leq 10$ ) и величина  $\frac{\lambda}{r_D}$  ( $2 \leq \frac{\lambda}{r_D} \leq 5$ ).

Для примера на рисунке 1.4 приведены установившиеся распределения концентраций ионов и электронов для следующего набора параметров:  $r_0 = 10$ ,  $\frac{\lambda}{r_D} = 2$  при трех значениях потенциала тела:  $\varphi_0 = -9$  (кривая 1),  $\varphi_0 = -6$  (кривая 2),  $\varphi_0 = -3$  (кривая 3). Координата  $X$  полагалась равной нулю.

Для примера на рисунке 1.4 приведены установившиеся распределения концентраций ионов и электронов для следующего набора параметров:  $r_0 = 10$ ,  $\frac{\lambda}{r_D} = 2$  при трех значениях потенциала тела:  $\varphi_0 = -9$  (кривая 1),  $\varphi_0 = -6$  (кривая 2),  $\varphi_0 = -3$  (кривая 3). Координата  $X$  полагалась равной нулю.

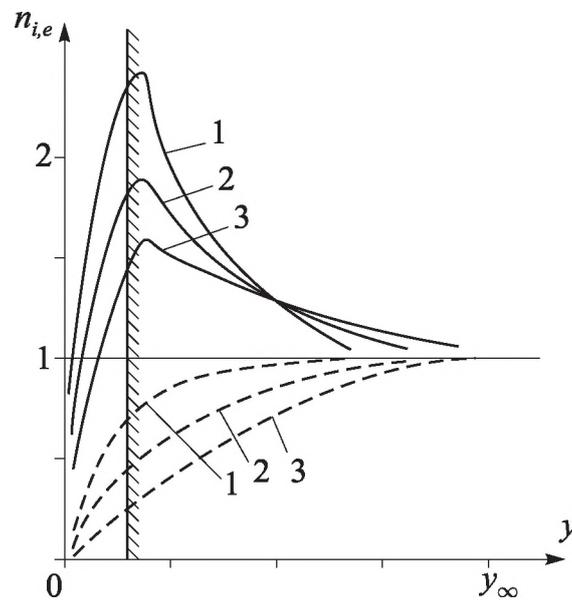


Рис. 1.4. Распределение концентрации  $n_{i,e}$  вдоль оси  $y$   $\left( r_0 = 10, \frac{\lambda}{r_D} = 2 \right)$ :

1)  $\varphi_0 = -9$ ; 2)  $\varphi_0 = -6$ ; 3)  $\varphi_0 = -3$ ; —————  $n_i$ ; - - - -  $n_e$ ;

////// граница раздела свободномолекулярной и континуальной областей

Из рисунка 1.4 следует, что значения концентрации притягивающихся частиц у поверхности полого катода

$$0,3n_{i\infty} \leq n_{ip} \leq 0,75n_{i\infty}.$$

При уменьшении характерного размера  $r_0$  граничная концентрация притягивающихся частиц может возрастать и достигать значения  $n_{ip} > n_{i\infty}$ .

В заключение отметим, что граничные условия на поверхности тела могут осложняться наличием эмиссии электронов.

### 1.3.2. Метод крупных частиц Давыдова

Метод крупных частиц был разработан Ю. М. Давыдовым [31, 32] первоначально применительно к задачам газовой динамики для расчета сжимаемых течений сплошной среды.

В дальнейшем он был распространен на широкий круг задач, в том числе в работах авторов монографии и на расчет взаимодействия заряженных тел с потоками разреженной и плотной плазмы, включая расчет пристеночных возмущенных слоев и процессов переноса из пристеночной области на обтекаемые плазмой тела. Изменяя потенциал внесенного в плазму тела и подсчитывая перенос на него заряда из окружающей плазмы, можно получить набор зависимостей токов на внесенное в плазму тело от потенциалов этого тела. Эти зависимости играют важную роль, например, в области зондовой диагностики плазмы.

Уравнения, описывающие плотную и разреженную плазму, оказались чрезвычайно удобными для их решения методом крупных частиц. Суть метода крупных частиц заключается в том, что в нем осуществляется расщепление процесса эволюции системы по физическим процессам. Вначале изучается изменение внутреннего состояния подсистем, находящихся в ячейках эйлеровой сетки в предположении их замороженности, а затем рассматривается смещение этих подсистем (крупных частиц) пропорционально их скорости и времени  $\Delta t$  без изменения их внутреннего состояния с последующим перераспределением массы и заряда в исходных эйлеровых ячейках.

Согласно идеям Ю. М. Давыдова моделируемая среда заменяется системой частиц, совпадающих в данный момент времени с ячейками

эйлеровой сетки. Расчет каждого временного шага разбивается на три этапа.

1-й этап называется эйлеровым. На этом этапе рассматривается изменение за время  $\Delta t$  импульса и энергии крупной частицы, т. е. элемента объема, заключенного внутри эйлеровой ячейки. При этом процессы переноса между крупными частицами отсутствуют, границы самих ячеек не изменяются относительно начального положения.

2-й этап называется лагранжевым. На этом этапе моделируется движение крупных частиц под действием всех внешних сил, действующих на ячейки. Если среда обладает объемным зарядом и имеются внешние и собственные электромагнитные поля, то на крупные частицы действуют силы со стороны электромагнитного поля, под действием которых и происходит их движение. Интервал времени  $\Delta t$  (шаг по времени), в течение которого рассматривается перенос, обычно определяется из условия Куранта – Фридрихса – Леви [27], которое выведено для линейных систем. Как показано в [28], это условие оказывается слишком жестким для нелинейных задач механики и электродинамики пристеночной плазмы. Поэтому шаг по времени уточнялся с помощью методических расчетов.

3-й этап называется заключительным. На этом этапе рассчитывается перераспределение массы и заряда по пространству, вызванное их переносом на втором этапе.

Таким образом, весь эволюционный процесс, вплоть до установления, моделируется повторением трех указанных этапов вычислительного алгоритма.

Отметим некоторые особенности метода крупных частиц Давыдова применительно к решению уравнений, описывающих плотную и разреженную плазму.

- Метод удобен для использования в многомерных нестационарных задачах.
- Алгоритм метода позволяет естественным путем учитывать многочисленные физические процессы, протекающие в объеме пристеночной плазмы и на поверхности тела.
- Схема метода консервативна. В процессе эволюции системы осуществляется контроль за потоками массы и заряда. Небольшие по-

грешности в расчете концентраций заряженных частиц могут существенно влиять на самосогласованные поля, поскольку в уравнении Пуассона концентрации связаны со второй производной от потенциала электрического поля.

- Метод удобен для организации параллельного счета.
- Метод естественным образом позволяет рассчитывать процессы переноса, а также процессы перемешивания и гомогенизации различных компонент под действием конвекции, диффузии и подвижности.
- В работе Ю. М. Давыдова [31] рекомендуется при построении численной модели использовать однородные и изотропные вычислительные пространства. Если эти условия не выполняются, то могут возникнуть неконтролируемые ошибки в вычислительных экспериментах. В случае плоских тел используется декартова система координат, которая удовлетворяет условиям однородности и изотропности. Использование цилиндрической системы координат, очевидно, ведет к неоднородности вычислительного пространства. Для оценки возможных ошибок был создан дополнительный программный блок с использованием прямоугольной системы координат. При этом осложнилась программная реализация граничного условия на поверхности цилиндра. Вычислительные эксперименты показали, что возможные ошибки, связанные с неоднородностью пространства, составляет несколько процентов. Описанная ситуация возникает также при переходе от плоской геометрии к цилиндрической с помощью конформных преобразований.

### **1.3.3. Метод численного решения уравнения Пуассона**

Для решения уравнения Пуассона в случае полого катода удобен численно-аналитический метод, основанный на методе разделения переменных Фурье. Он позволяет перейти от граничной задачи для уравнения Пуассона к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим более подробно решение задачи Дирихле для полых катодов, изображенных на рис. 1.3, в цилиндрической системе координат. Обсудим решение задачи для тел цилиндрической геометрии.

Уравнение Пуассона для потенциала вблизи заряженного цилиндра имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \sigma(r, \theta), \quad (1.24)$$

где правая часть оказывается периодической четной функцией  $\theta$ :

$$\sigma(r, \theta) = \sigma(r, \theta + 2\pi); \quad \sigma(r, \theta) = \sigma(r, -\theta),$$

граничные условия:

$$\varphi(r_0, \theta) = \varphi_0, \quad \varphi(r_\infty, \theta) = 0. \quad (1.25)$$

Учитывая четность по  $\theta$ , ищем решение в виде разложения по косинусам:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) \cos k\theta. \quad (1.26)$$

Разлагаем в ряд по косинусам и правую часть (1.24):

$$\sigma(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sigma(r, \tilde{\theta}) d\tilde{\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cos k\theta}{\pi} \int_0^\pi \sigma(r, \tilde{\theta}) \cos k\tilde{\theta} d\tilde{\theta}. \quad (1.27)$$

Подставляем (1.26) и (1.27) в уравнение и граничные условия. После собирания членов одного порядка задача Дирихле (1.24), (1.25) сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$a_0'' + \frac{1}{r} a_0' = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sigma(r, \tilde{\theta}) d\tilde{\theta},$$

$$a_k'' + \frac{1}{r} a_k' - \frac{k^2}{r^2} a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sigma(r, \tilde{\theta}) \cos k\tilde{\theta} d\tilde{\theta},$$

$$a_0(r_0) = \varphi_0, \quad a_0(r_\infty) = 0,$$

$$a_k(r_0) = \theta_0, \quad a_k(r_\infty) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Учитывая, что тригонометрические ряды достаточно быстро сходятся, в приближенных расчетах можно ограничиться несколькими первыми членами ряда, обеспечивающими заданную точность.

Итак, решение системы Эйлера – Пуассона осуществляется методом последовательных итераций по времени, а уравнение (1.7) — методом среднего арифметического. На каждом временном слое уравнения неразрывности для заряженных частиц (1.2)–(1.3) корректируются. Значение вектора  $\mathbf{E}$ , входящее в эти уравнения, вычисляется с учетом концентраций заряженных частиц, рассчитанных на предыдущем временном слое.

### 1.4. Вычислительная модель плазменного участка полого катода в молекулярном режиме

Для приведения математической модели к безразмерному виду в молекулярном режиме использовалась следующая система масштабов:

$$\left. \begin{aligned} \text{масштаб длины } M_L = r_D &= \left( \frac{\varepsilon_0 k T_{i\infty}}{n_{i\infty} e^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \text{масштаб скорости } M_{v_i} &= \left( \frac{2kT_{i\infty}}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \text{масштаб потенциала } M_\varphi &= \frac{kT_{i\infty}}{e}, \\ \text{масштаб концентрации } M_n &= n_{i\infty}. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Остальные масштабы находятся по формулам размерностей.

После обезразмеривания система имеет следующий вид (см. приложение 3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \sqrt{\delta_\alpha} \left\{ v_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} + \left( \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{E_r z_\alpha}{2\varepsilon_\alpha} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_r} + \right. \\ \left. + \left( \frac{E_\theta z_\alpha}{2\varepsilon_\alpha} - \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\theta} = 0, \quad \alpha = i, e; \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = n_e - n_i; \quad (1.30)$$

$$n_\alpha(r, \theta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(r, \theta, v_r, v_\theta, t) dv_r dv_\theta; \quad (1.31)$$

$$j_\alpha(\theta, t) = \sqrt{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \int f_\alpha(r, \theta, v_r, v_\theta, t) v_r dv_r dv_\theta; \quad (1.32)$$

$$z_\alpha = \varepsilon_\alpha = \delta_\alpha = 1 \text{ при } \alpha = i,$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{T_\alpha}{T_i}, \quad \delta_\alpha = \frac{T_\alpha}{T_i} \frac{m_i}{m_\alpha} = \varepsilon_\alpha \frac{m_i}{m_e}, \quad z_\alpha = -1 \text{ при } \alpha = e.$$

#### 1.4.1. Метод последовательных итераций по времени ( $K_n \gg 1$ )

Система (1.29)–(1.32) является нестационарной, многомерной и многопараметрической. Её удобно решать методом последовательных итераций по времени, как это делалось в п. 1.3, где формулировалась вычислительная модель Эйлера – Пуассона в режиме сплошной среды. Поэтому без подробного описания метода отметим лишь некоторые особенности, имеющие место в молекулярном режиме [25].

- В режиме сплошной среды максимальная размерность задачи равна трём, а в молекулярном режиме задачи решаются в фазовом пространстве. При этом максимальная размерность задачи равна шести, что ведет к существенному увеличению необходимых ресурсов ЭВМ. Поэтому здесь особенно важно оптимизировать вычислительный алгоритм.
- Если уравнения Власова для ионов и электронов решаются методом крупных частиц Давыдова, то при выборе шага по времени по условию Куранта – Фридрихса – Леви далее его можно увеличить в 3–5 раз по причинам, обоснованным в п. 1.3.
- Если уравнения Власова решаются методом характеристик, то следует пользоваться не классическим общепринятым [26], а усовершенствованным методом характеристик для задач расчета параметров пристеночной плазмы [34]. Обоснование этого вывода будет дано ниже в пп. 1.4.2, 1.4.3.
- Время, затрачиваемое на вычислительный эксперимент, может существенно уменьшить разумное использование методов параллельного программирования. Система Власова – Пуассона включает в себя два кинетических уравнения — для ионов и электронов. Эти уравнения не связаны друг с другом и удобны для использова-

ния алгоритма параллельного счета. Из существующих в настоящее время средств распараллеливания наиболее перспективной оказалась библиотека OpenMP, использование которой не предполагает существенных изменений кодов и сводится к вставке в нужные места программы необходимых директив. Методические исследования показали, что время счета до установления решения уменьшается примерно на 40 %. Для дальнейшего ускорения счета представляется перспективным распараллеливание циклических процессов метода крупных частиц, осуществляющих смещение центров крупных частиц на лагранжевом этапе. Поскольку каждая крупная частица смещается независимо от других, такие циклы являются взаимно независимыми, что позволяет их распараллелить. Рассмотренные выше и другие методические разработки позволяют существенно сократить время вычислительных экспериментов с пристеночной плазмой и проводить их на ЭВМ средней мощности.

#### 1.4.2. Классический метод характеристик

Математическая модель пристеночной плазмы — система дифференциальных уравнений Власова – Пуассона или Власова – Максвелла — это достаточно сложные системы нестационарных нелинейных дифференциальных уравнений, дополняемые нетривиальными начальными и граничными условиями, некоторые из которых являются существенно нелинейными или разрывными. Сложность задачи увеличивается при наличии направленных скоростей плазмы или внешних электромагнитных полей, приводящих к нарушению симметрии возмущенной зоны и многомерности фазового пространства.

Уравнение Власова — это квазилинейное уравнение первого порядка. Отметим, что обобщенное уравнение Власова — это уравнение второго порядка. Однако в данном разделе речь пойдет об уравнении Власова только первого порядка. Его общий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum a_i(x, v) \frac{\partial f}{\partial x_i} + b_i(t, x, v, f) \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0, \quad (1.33)$$

$$f(0, x, v) = f^0(x, v),$$

где  $x = x(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  — координаты,  $v = v(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$  — скорости.

Зависимость коэффициентов  $b_i$  от  $f$  появляется вследствие само-согласованного характера распределения частиц плазмы, когда сама функция распределения  $f$  определяет величины сил, действующих на частицы. Общая теория решения уравнений такого рода имеется в [33], где изложены формальные принципы построения решения задачи Коши (1.33).

Рассмотрим векторное поле  $U$  с компонентами  $\{1, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$  и введем производную функции  $f$  по направлению этого поля. Тогда уравнение (1.33) запишется в виде

$$L_u f = 0, \quad (1.34)$$

где  $L_u$  — производная Ли.

Уравнению (1.33) или (1.34) соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений характеристик:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i^*}{dt} &= a_i(x^*, v^*), \quad i = \overline{1, n}, \\ \frac{dv_i^*}{dt} &= b_i(t^*, x^*, v^*, f^*), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Таким образом, нахождение решений квазилинейного уравнения (1.34) сводится к нахождению его характеристик, т. е. решений системы (1.35).

Общие принципы численной реализации метода характеристик для решения уравнения Власова разработан в [26, 33]. Численный метод моделирует эволюцию функции распределения и содержит следующие основные этапы.

1. Введение ограниченного носителя функции распределения в фазовом пространстве. Разбиение носителя дискретной сеткой.

2. Выбор шага по времени, с которым производится пересчет функции распределения  $t^{s+1} = t^s + \Delta t$  ( $s$  — индекс времени).

3. Введение сеточных функций распределения  $(f_{i_1, \dots, i_{2n}})$  ( $i_1, i_2, \dots, i_{2n}$  — индексы сетки по фазовым переменным), а также вспомогательных сеточных функций для коэффициентов кинетического уравнения.

4. Для определения  $(f)_{i_1, \dots, i_{2n}}^S$  на момент времени  $t^* = t^S$  производится численное решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.35) на отрезке  $[0, t^S]$  с краевыми условиями:

$$x_i^*(t^S) = x_i, \quad v_i^*(t^S) = v_i, \quad f^*(0) = f^0(x^*(0), v^*(0)), \quad (1.36)$$

где  $x_i, v_i$  берутся во всех узлах сетки на фазовом пространстве. При численной реализации краевой задачи используются значения функций распределения на предыдущих шагах по времени. Для обеспечения консервативности метода полученные значения  $(f)_{i_1, \dots, i_{2n}}^S$  домножаются на корректирующие множители  $\gamma_{i_1, \dots, i_{2n}}^S$ , которые подбираются так, чтобы моменты уточненной функции распределения удовлетворяли системе уравнений Эйлера. Обычно достаточно выполнить условие консервативности только по отношению к закону сохранения количества вещества. После заполнения матриц  $(f)_{i_1, \dots, i_{2n}}^S$  ( $i_1 = \overline{1, N_1}, \dots, i_{2n} = \overline{1, N_{2n}}$ ) осуществляется переход к следующему шагу по времени.

Точность метода и необходимые ресурсы ЭВМ зависят от величин шагов сетки по фазовыми переменным, величины шага по времени, выбора метода решения краевой задачи для уравнения характеристик, размера расчетной области и других параметров задачи. Алгоритм расчета по своей структуре является сквозным, так как на каждом шаге по времени вдоль характеристик пересчитывается исходная функция распределения, как правило, заданная аналитически. Это обеспечивает минимизацию возможной численной диффузии. Кроме того, для оптимизации вычислительного алгоритма можно проводить коррекцию положения центра тяжести носителя функции распределения в фазовом пространстве по мере его эволюции. Уточнению расчетов способствует также применение внутреннего шага по времени (более мелкого, чем шаг пересчета) в процессе решения краевых задач.

Рассмотрим более подробно сформулированные выше этапы численного метода характеристик применительно к уравнению Власова на примере ПК цилиндрической геометрии в потоке разреженной плазмы.

Система уравнений Власова в данном случае в цилиндрической системе  $(r, \theta, v_r, v_\theta)$  имеет вид (см. приложение 1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} + \left( \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_r(t, r, \theta) \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_r} + \\ + \left( \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_\theta(t, r, \theta) - \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\theta} = 0, \quad \alpha = i, e; \end{aligned}$$

начальное распределение имеет вид

$$f_\alpha^0 = n_\infty \pi^{-1} \left( \frac{m_\alpha}{2kT_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_\alpha}{2kT_\alpha} [v_r^2 + v_\theta^2] \right\}.$$

Компоненты  $E_r$  и  $E_\theta$  самосогласованного поля определяются решением уравнения Пуассона, правая часть которого зависит от функций распределения  $f_\alpha$ . В алгоритме численного метода значения  $E_r$ ,  $E_\theta$  вычисляются по значениям функций распределения на предыдущем шаге.

Система уравнений характеристик имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dr^*}{dt^*} &= v_r^*, \\ \frac{d\theta^*}{dt^*} &= \frac{v_\theta^*}{r^*}, \\ \frac{dv_r^*}{dt^*} &= \frac{v_\theta^{*2}}{r^*} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_r(t^*, r^*, \theta^*), \\ \frac{dv_\theta^*}{dt^*} &= \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_\theta(t^*, r^*, \theta^*) - \frac{v_r^* v_\theta^*}{r^*}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Условия на текущий момент:

$$r^*(t) = r, \quad \theta^*(t) = \theta, \quad v_r^*(t) = v_r, \quad v_\theta^*(t) = v_\theta. \tag{1.38}$$

### 1-й этап

В качестве ограниченного носителя функций распределения рассматривается следующий компакт в фазовом пространстве:

$$\begin{aligned} \sup p f_\alpha = \{ & (r, \theta, v_r, v_\theta): r \in [r_0, r_\infty], \theta \in [0, \pi], \\ & \begin{cases} v_r \in [-v_{\max} - u_\infty \cos \theta, v_{\max} - u_\infty \cos \theta], \\ v_\theta \in [-v_{\max} + u_\infty \sin \theta, v_{\max} + u_\infty \sin \theta]. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Здесь  $r_0$  — радиус цилиндра,  $r_\infty$  — расстояние до внешней границы возмущенной зоны,  $v_{\max}$  — граница обрезания «хвоста» функции распределения Максвелла.  $r_\infty$  и  $v_{\max}$  выбираются на основании методических расчетов. По переменной  $\theta$  используется симметрия возмущенной зоны, а следовательно, и функций распределения. Максимум начальной максвелловской функции распределения должен находиться в центре квадрата со стороной  $2v_{\max}$ . Число узлов сетки на носителе выбирается из компромиссных соображений. С увеличением числа узлов растет и необходимое машинное время. С другой стороны, расчетная область должна быть больше размера возмущенной зоны. Поэтому выбор числа узлов сетки определяется методическими расчетами.

### 2-й этап

Выбор шага по времени также проводится из компромиссных соображений. Использование слишком мелкого шага везет к большим затратам машинного времени при интегрировании уравнений характеристик на растущих отрезках времени  $[0, t]$ . Отметим, что алгоритм сквозного счета по характеристикам допускает относительно большие шаги по времени по сравнению с некоторыми другими методами расчета.

### 3-й этап

Введем сеточные функции  $(f_\alpha)_{ijkl}, (E_r)_{ij}^s, (E_\theta)_{ij}^s$ , где индексы  $s, i, j, k, l$  соответствуют координатам  $t, r, \theta, v_r, v_\theta$ .

Значения  $(E_r)_{ij}^s, (E_\theta)_{ij}^s$  вычисляются после решения уравнения Пуассона для электрического поля с правой частью, определяемой значениями функций распределения на предыдущем шаге по времени. После заполнения массивов  $(E_r)_{ij}^s$  и  $(E_\theta)_{ij}^s$  не требуется запоминать значения

функций распределения на предыдущих шагах, поскольку они не используются при интегрировании уравнений характеристик.

#### 4-й этап

В случае использования уравнения Власова функция распределения постоянна вдоль характеристик, поэтому вместо краевой задачи, решаемой в общем случае, имеем обратную задачу Коши для системы (1.35).

После решения системы уравнений характеристик на отрезке  $[t^s, 0]$  значение функции распределения в узле  $(r_i, \theta_j, v_{rk}, v_{\theta l})$  определяется по формуле

$$(f_\alpha)_{ijkl}^s = f_\alpha(t^s, r_i, \theta_j, v_{rk}, v_{\theta l}) = f_\alpha^0(r^*(0), \theta^*(0), v_r^*(0), v_\theta^*(0)).$$

Метод численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений характеристик должен иметь хорошую сходимость и высокое быстродействие. В противном случае в условиях многократного интегрирования системы на каждом шаге по времени не удастся получить эволюцию функций распределения до установления за приемлемое время на машинах средней мощности. В расчетах рекомендуется использовать метод Рунге – Кутты – Фельберга четвертого порядка с автоматическим выбором шага [33].

Вычисление значений  $E_r, E_\theta$  в неузловых точках производилось с помощью полилинейной интерполяции. Другие более сложные виды интерполяции существенно увеличивают затраты машинного времени.

#### 1.4.3. Усовершенствованный метод характеристик

Усовершенствованный метод характеристик для решения уравнения Власова в пристеночных областях плазмы предложен проф. М. В. Котельниковым [34].

В отличие от классического метода характеристик, алгоритм которого предполагает интегрирование системы уравнений характеристик от текущего момента времени до нуля, предлагается проинтегрировать систему уравнений характеристик один раз и сместиться вдоль характеристик на предыдущий временной слой. Далее путем интерполяции пред-

лагается определить значение функции распределения в полученной не-узловой точке фазового пространства по значениям функций распределения, полученным на предыдущем временном слое в окружающих узлах расчетной сетки. Этим действием мы получаем искомое значение функции распределения для рассматриваемого узла расчетной сетки, которое постоянно вдоль характеристик.

Рассмотрим более подробно этапы нового алгоритма метода характеристик на примере цилиндрического тела, расположенного в разреженной плазме. Уравнению Власова соответствует система уравнений характеристик (1.37) с условиями на текущий момент времени (1.38).

В качестве ограниченного носителя функции распределения в фазовом пространстве выберем компакт (1.39). Расчетная сетка не изменяется.

Вводятся сеточные функции  $(f_\alpha)_{ijkl}$ ,  $(f_\alpha)_{ijkl}^{old}$ ,  $(E_r)_{ij}$ ,  $(E_\theta)_{ij}$ . Индексы  $i, j, k, l$  соответствуют  $r, \theta, V_r, V_\theta$ . Функция распределения  $(f_\alpha)_{ijkl}$  соответствует текущему временному слою. Функция распределения  $(f_\alpha)_{ijkl}^{old}$  вычислена на предыдущем временном слое. Значения  $(E_r)_{ij}$ ,  $(E_\theta)_{ij}$  вычисляются после решения уравнения Пуассона на текущем временном слое с правой частью, определяемой значениями функции распределения на предыдущем временном слое. При этом нет необходимости хранить значения напряженностей самосогласованного электрического поля на предыдущих временных слоях (как в классическом методе характеристик), так как они не используются в расчете.

Решаем обратную задачу Коши для системы (1.37) с условиями (1.38) на отрезке времени  $[t_s, t_{s-1}]$ , где  $s$  — индекс времени. В итоге значение функции распределения в узле  $(r_i, \theta_j, v_{r_k}, v_{\theta_l})$  будет определяться путем интерполяции по известным значениям функции распределения в соседних с исследуемой точкой узлах расчетной сетки на предыдущем временном слое.

Метод интерполяции выбирался с помощью дополнительных расчетов. В работе использовалась многомерная интерполяция в четырехмерном фазовом пространстве. При этом линейно аппроксимировалось

значение функции распределения в точке с использованием известных значений в шестнадцати окружающих точках.

Отметим особенности алгоритма, возникающие при интегрировании системы уравнений характеристик.

1. Решение системы уравнений характеристик попало в область расположения обтекаемого плазмой тела. В этом случае существование рассматриваемой частицы плазмы не имеет физического смысла, так как тело, по условию задачи, не является источником заряженных частиц. В соответствии с этим функцию распределения соответствующей частицы приравняем к нулю.

2. Решение системы уравнений характеристик попало за пределы расчетной области в пространстве скоростей. В этом случае функцию распределения соответствующей частицы приравняем к нулю (носитель функции распределения по скоростям изначально должен выбираться так, чтобы за его пределами данная функция была достаточно мала, тогда ее можно считать равной нулю без ущерба для точности расчета).

3. Решение системы уравнений характеристик попало за внешнюю границу расчетной области  $r_\infty$ . В этом случае необходимо использовать граничное условие для функции распределения. Подставив в него решение системы уравнений характеристик, получим значение функции распределения в исследуемой точке.

### Результаты тестовых расчетов

На рис. 1.5, *a*, *б* представлены эволюционные кривые ионного тока на цилиндр, полученные в вычислительных экспериментах с использованием классического и усовершенствованного метода характеристик. Известно, что при относительно больших скоростях потока плазмы и относительно небольших радиусах установившийся ионный ток на цилиндр хорошо аппроксимируется формулой Ленгмюра и Мотта – Смита для движущейся плазмы [35], которая имеет следующий вид:

$$I_i = en_{i\infty} 2r_p u_\infty \left( 1 + \frac{2e|\phi|}{m_i u_\infty^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.40)$$

Результаты расчетов и значение ионного тока, полученное из формулы (1.40), представлены в таблице 1.1.

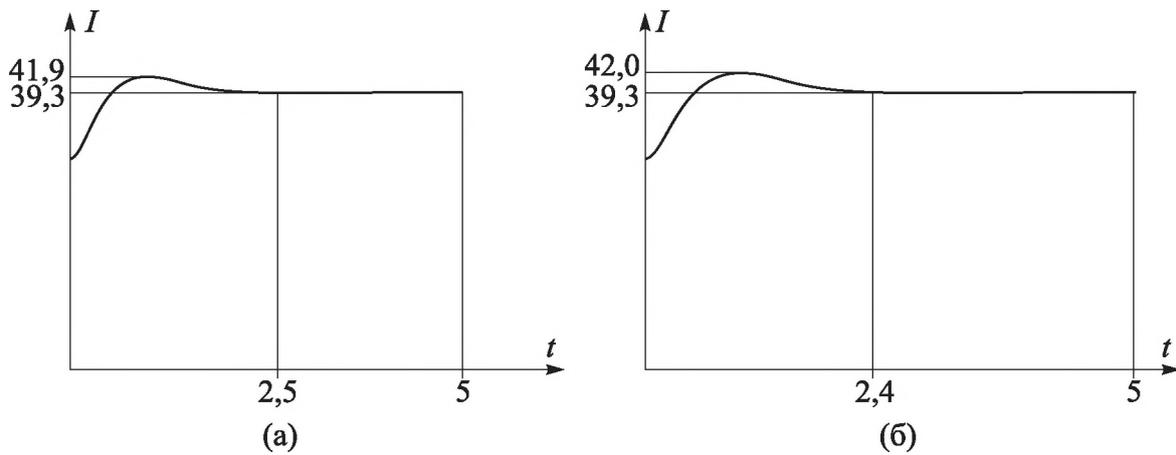


Рис. 1.5. Эволюция ионного тока на цилиндр ( $r_0 = 3, \varphi_0 = -20, v_0 = 5, \varepsilon = 1$ ):  
 а) классический метод характеристик;  
 б) усовершенствованный метод характеристик

Таблица 1.1

| Классический метод характеристик | Усовершенствованный метод характеристик | Формула Ленгмюра и Мотта – Смита |
|----------------------------------|---|----------------------------------|
| 39,3                             | 39,3                                    | 40,2                             |

Из таблицы 1.1 следует практическое совпадение результатов обоих методов, а также хорошее согласование этих результатов с расчетом по формуле (1.40). При этом результат по формуле (1.40) немного превышает результаты вычислительных экспериментов. Этого и следовало ожидать, так как формула (1.40) получена в предельном случае орбитального движения и расчет по ней дает верхнюю границу для ионного тока [35].

На рис. 1.6 представлены эволюционные кривые ионного тока на цилиндр в случае покоящейся плазмы, полученные в вычислительных экспериментах с использованием классического и усовершенствованного метода характеристик.

Результаты вычислительных экспериментов представлены в таблице 1.2. Там же представлены результаты расчетов американского ученого Лафрамбуаза, которые аппроксимированы формулами Кайла и Телбота [29]. Для этого был написан отдельный программный блок, реализующий алгоритмы формул Кайла и Телбота методом последовательных приближений.

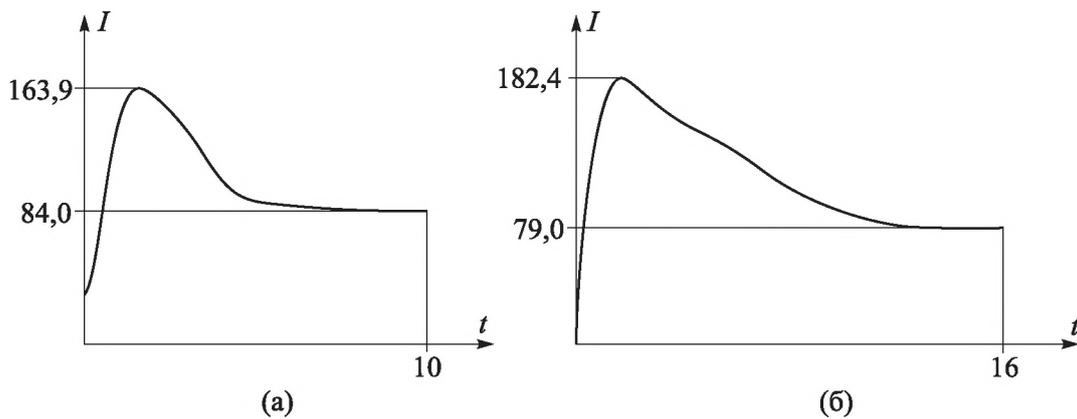


Рис. 1.6. Эволюция ионного тока на цилиндр ( $r_0 = 20$ ,  $\varphi_0 = -10$ ,  $v_0 = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ):  
 а) классический метод характеристик;  
 б) усовершенствованный метод характеристик

Таблица 1.2

| Классический метод характеристик | Усовершенствованный метод характеристик | Формула Кайла | Формула Телбота |
|----------------------------------|---|---------------|-----------------|
| 84,0                             | 79,0                                    | 77,12         | 80,25           |

Из таблицы 1.2 следует удовлетворительное согласование результатов обоих методов, а также удовлетворительное согласование этих результатов с данными Лафрамбуаза. При этом усовершенствованный метод характеристик дает практическое совпадение с данными Лафрамбуаза, что повышает доверие к результатам, полученным с использованием предложенного метода.

В процессе методических экспериментов также контролировалось машинное время расчета до установления стационарного значения ионного тока. В случае классического метода характеристик (расчет проводился с шагом по времени 0,02) оно составило 240 минут, в случае усовершенствованного метода характеристик (расчет проводился с шагом по времени 0,01) — 47 минут. Таким образом, машинное время расчета до установления предложенным методом оказалось примерно в 5 раз меньше, чем с использованием классического метода характеристик.

На рис. 1.7 представлены изолинии функций распределения ионов, зафиксированных вблизи поверхности цилиндра в покоящейся плазме.

В обоих случаях наблюдается характерная подковообразная форма функций распределения, отмеченная ранее в работе [36].

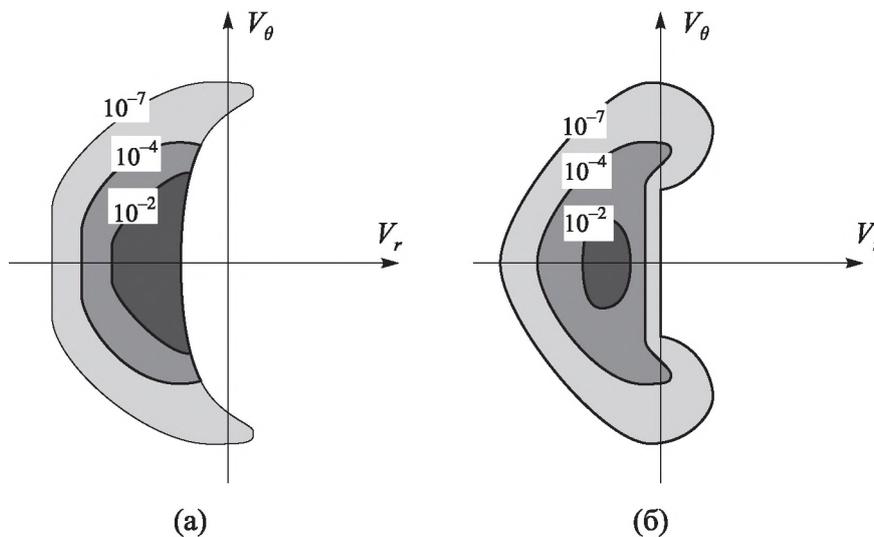


Рис. 1.7. Функция распределения ионов вблизи цилиндра ( $r_0 = 20$ ,  $\varphi_0 = -10$ ,  $v_0 = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ): а) классический метод характеристик; б) усовершенствованный метод характеристик

### Выводы

Предложенный численный метод хорошо себя зарекомендовал при использовании в задачах расчета пристеночных слоев разреженной плазмы. Метод показал хорошую сходимость, которая контролировалась путем сравнений результатов расчетов с результатами, полученными с помощью классического метода характеристик и с данными независимых авторов. Устойчивость метода была обеспечена подбором оптимальных шагов по координатам и времени в процессе вычислительного эксперимента. В частности, для нахождения начального приближения шага по времени использовалось условие устойчивости Куранта – Фридрихса – Леви. Однако шаг по времени удавалось повысить еще в несколько раз относительно начального приближения без нарушения устойчивости. Данный эффект для задач расчета пристеночных слоев плазмы обоснован в работе [28].

Предложенный метод, на взгляд авторов, имеет следующие преимущества перед классическим методом характеристик.

1. Метод не так требователен к ресурсам памяти ЭВМ. При реализации классического метода приходится хранить массив напряженностей на каждом шаге по времени, без чего невозможен алгоритм сквозного счета по характеристикам. Соответственно, приходится резервировать в памяти ЭВМ соответствующий массив.

2. В предложенном методе время расчета на каждом временном слое одинаково, так как происходит однократное интегрирование системы уравнений характеристик. В то же время в классическом методе с ростом времени растет и время расчета на текущем временном слое, так как приходится интегрировать систему уравнений характеристик все большее количество раз. Соответственно, расчет классическим методом задач с затянутой эволюцией может иметь неприемлемое машинное время. Предложенный метод не содержит этого недостатка.

3. Как показали вычислительные эксперименты, машинное время счета до установления с использованием предложенного метода в среднем в несколько раз меньше, чем соответствующее время счета с использованием классического метода. В случае затянутой эволюции это время может быть меньше на порядок и более. Отсюда можно предположить, что предложенный метод более рационален.

К недостаткам предложенного метода можно отнести следующее.

1. Предложенный метод предполагает использование многомерных массивов. В рассматриваемом примере это четырехмерный массив для функции распределения. В общем случае фазовое пространство шестимерно, и, соответственно, придется использовать шестимерный массив, что существенно осложняет написание и отладку кода. Как уже отмечалось выше, классический метод предполагает использование лишь трехмерного массива для напряженностей самосогласованного электрического поля.

2. Предложенный метод оказался более чувствительным к выбору шага по времени. Классический метод сквозного счета по характеристикам позволяет использовать в несколько раз большие шаги по времени, что показал вычислительный эксперимент.

## 1.5. Результаты вычислительных экспериментов

### 1.5.1. Результаты вычислительных экспериментов в режиме сплошной среды

На рис. 1.8 представлены распределения электрического потенциала  $\varphi(r)$  вблизи стенки полого катода при различных значениях плотности потока электронов эмиссии  $j_{e3}$ . Характерные параметры задачи имели следующие значения:  $\varphi_0 = -5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $D_0 = 32$ ,  $2 \leq r_0 \leq 10$ ,  $0 \leq j_{e3} \leq 100$ .

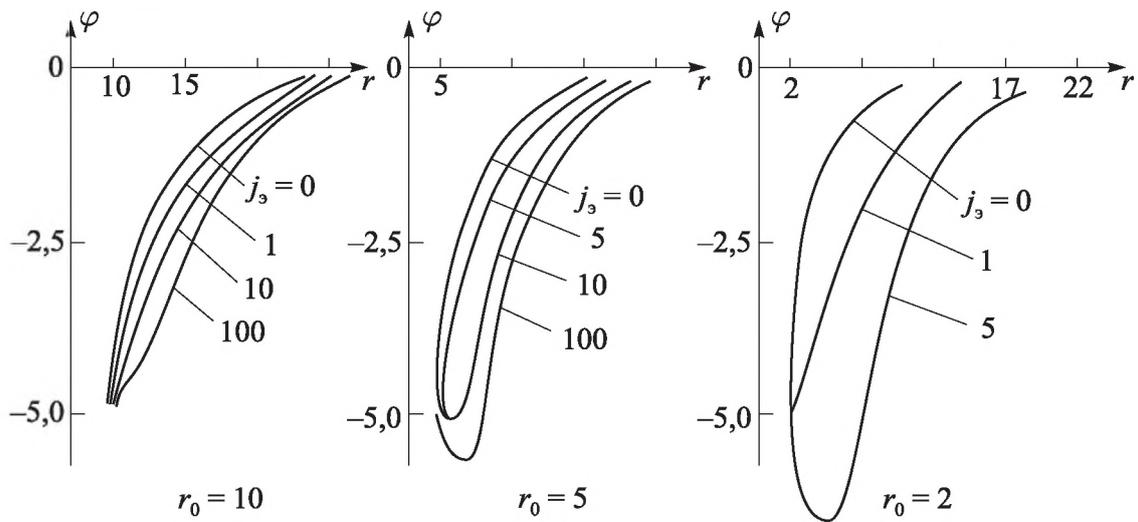


Рис. 1.8. Зависимость электрического потенциала от радиуса  
 ( $\varphi_0 = -5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $D_0 = 32$ ,  $2 \leq r_0 \leq 10$ , цилиндр)

Кривые, приведенные на рис. 1.8, наглядно демонстрируют нелинейный характер зависимостей  $\varphi(r)$  при наличии эмиссии электронов. Величина потенциальных ям растет с уменьшением размера ПК  $r_0$ , при этом отрицательный объемный заряд располагается ближе к стенке. Наличие потенциальных ям означает, что напряженность электрического поля  $E_p$  меняет свой знак.

Распределения вдоль радиуса концентраций заряженных частиц вблизи стенки полого катода под действием эмиссии электронов представлены на рис. 1.9 при значении  $\varphi_0 = -5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $D_0 = 32$ ,  $r_0 = 5$ .

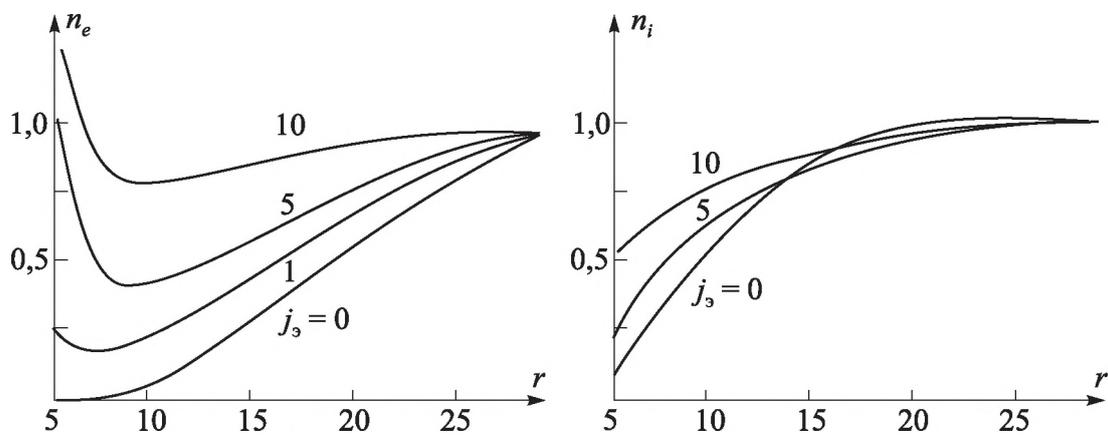


Рис. 1.9. Распределение концентраций ионов  $n_i$  и электронов  $n_e$  вдоль радиуса  
 ( $\varphi_0 = -5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $D_0 = 32$ ,  $r_0 = 5$ )

Как следует из рис. 1.9, профили концентраций заряженных частиц заметно деформируются под действием  $j_{e3}$ . Объемный заряд вследствие эмиссии электронов располагается ближе к стенке полого катода.

Как следует из алгоритма решения задачи, концентрации заряженных частиц связаны с профилем потенциала через уравнение Пуассона, т. е. задача является самосогласованной.

Поскольку плавающий потенциал стенки полого катода отрицателен, плотность тока на стенку складывается из плотности эмиссионного тока  $j_{e3}$  и плотности потока положительно заряженных ионов из плазмы:

$$j_{\Sigma} = j_{e3} + j_i. \quad (1.41)$$

На рис. П1.1 приложения 1 приведены зависимости  $j_{\Sigma}$  от потенциала стенки  $\varphi_0$  при различных значениях радиуса полого катода  $r_0$  и  $j_{e3}$ .

Численный эксперимент позволяет разделить поступающий на стенку ток на составляющую, связанную с эмиссией  $j_{e3}$ , и на составляющую, связанную с потоком заряженных частиц из плазмы на стенку  $j_i$ , которая определяется градиентом потенциала  $\nabla\varphi$  и градиентом концентрации  $\nabla n_{\infty}$ . Как следует из вычислительных экспериментов [30], под влиянием  $j_{e3}$  градиент потенциала изменяется более существенно, чем градиент концентрации, поэтому основное влияние на  $j_{\Sigma}$  оказывает профиль потенциала  $\varphi(r)$ .

Полученные в данном разделе результаты вычислительных экспериментов сравнивались с имеющимися в литературе теоретическими [38] и экспериментальными [39] данными других авторов (рис. 1.10). Сравне-

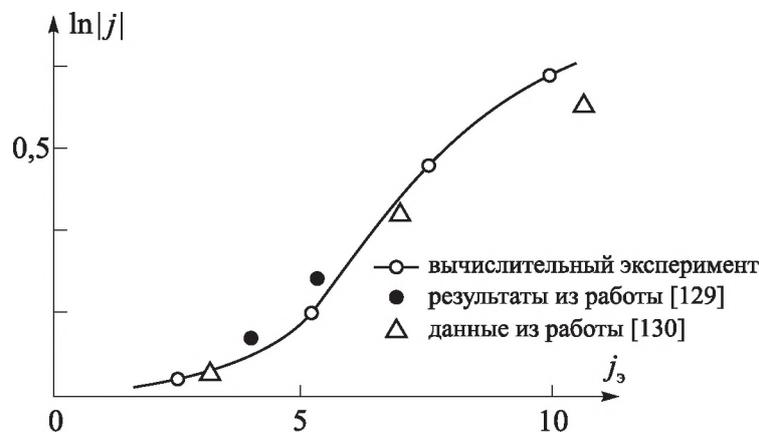


Рис. 1.10. Сравнение полученных результатов с результатами других авторов

ние плотности тока на эмитирующую стенку показывает достаточно хорошее совпадение результатов, что дополнительно свидетельствует о достоверности используемых математических и вычислительных моделей.

### 1.5.2. Результаты вычислительных экспериментов в молекулярном режиме

На рис. 1.4–1.14 представлены некоторые результаты вычислительных экспериментов при следующих параметрах пристеночной плазмы:  $n_{i,e\infty} = 10^{12} \text{ м}^{-3}$ ,  $T_{i,e\infty} = 10^3 \text{ К}$ . В качестве материала полого катода рассматривается сплав с работой выхода электронов  $|e\Phi| = (4,5 \div 5,5) \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ .

Варьировались плотность тока эмиссии электронов  $j_{e3}$  и в некоторых случаях отношение масс  $\frac{m_e}{m_i}$  плазмообразующего газа. Безразмер-

ный радиус канала полого катода —  $r_0 = \frac{r_p}{r_D} = 7$ . Приведенные функции

распределения и их моменты, а также электрические поля вблизи стенки при значении  $\varphi_0 = \frac{\varphi_p}{M_\varphi} = -10$  соответствовали моменту установления решения задачи (1.29)–(1.32) с соответствующей системой начальных и граничных условий.

На рис. 1.11, 1.12 приведены функции распределения ионов (ФРИ) (рис. 1.12) и электронов (ФРЭ) (рис. 1.13) вблизи стенки полого катода.

Функция распределения ионной компоненты в пристеночном слое практически ничем не отличается от ФРИ без учета эмиссии электронов с ее поверхности, кроме времени релаксации и глубины деформируемой зоны купола ФРИ. Вследствие отрицательного потенциала поверхности стенки полого катода возникает направленная скорость положительно заряженных ионов к стенке, что ведет к смещению центра тяжести ФРИ. Это смещение тем больше, чем выше значение  $j_{e3}$ .

В отличие от ФРИ ФРЭ ведет себя иначе (рис. 1.12). Купол ФРЭ имеет второй максимум в области  $v_r \geq 0$ , и ее носитель ориентирован

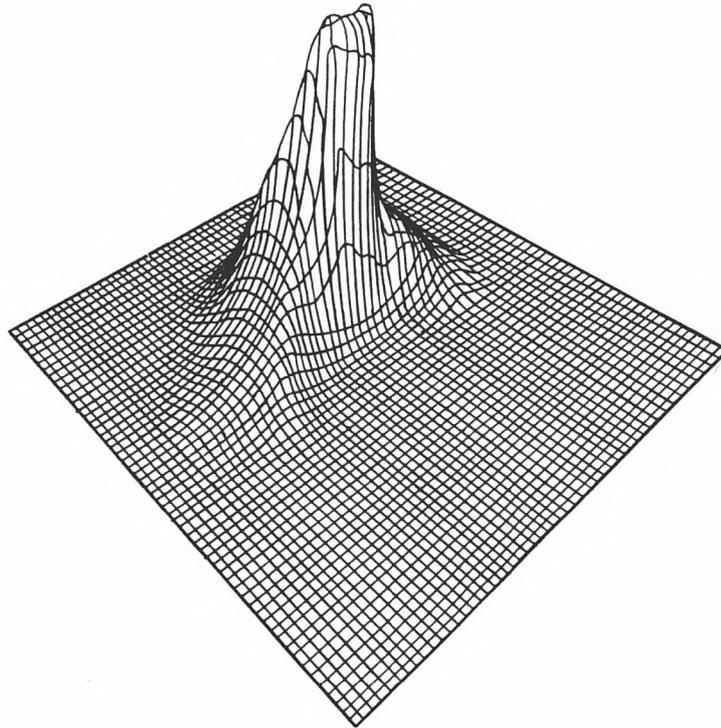


Рис. 1.11. ФРИ ( $j_{e3} = 10^{-2}$ ,  $\frac{m_e}{m_i} = 5 \cdot 10^{-4}$ )

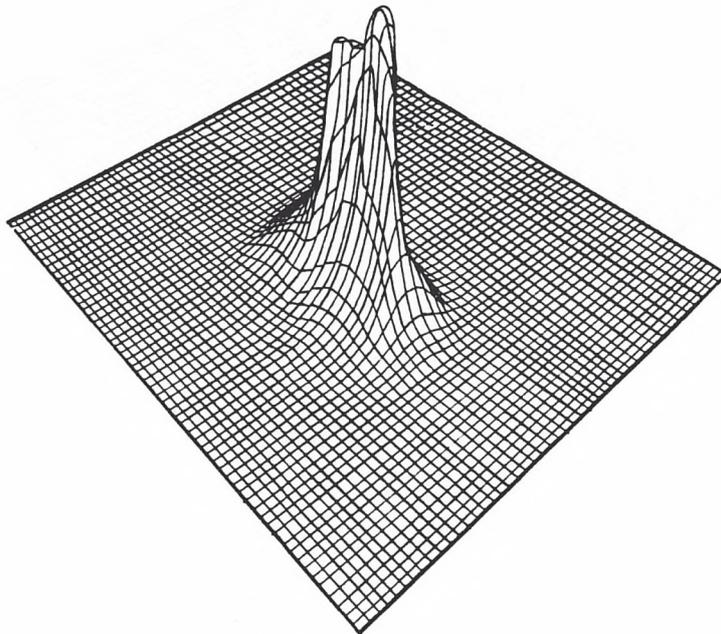


Рис. 1.12. ФРЭ ( $j_{e3} = 5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\frac{m_e}{m_i} = 5 \cdot 10^{-4}$ )

вдоль оси  $v_r$ . Положение и форма дополнительного максимума определяются отношением температур электронов эмиссии ( $T_{pэ}$ ) и электронов плазмы  $T_{e\infty}$ . С увеличением  $\frac{T_{pэ}}{T_{e\infty}}$  увеличивается поток электронов эмиссии, и, как следствие, дополнительный максимум ФРЭ увеличивается в объеме. К аналогичному результату приводит также уменьшение отношения  $\frac{m_e}{m_i}$ .

На рис. 1.13 даны кривые распределения потенциала вдоль радиуса в пристеночной области полого катода при различных значениях плотности эмиссионного тока электронов  $j_{eэ}$ . Из рисунка следует, что с увеличением  $j_{eэ}$  растет отрицательная потенциальная яма, которая может препятствовать дальнейшей эмиссии электронов.

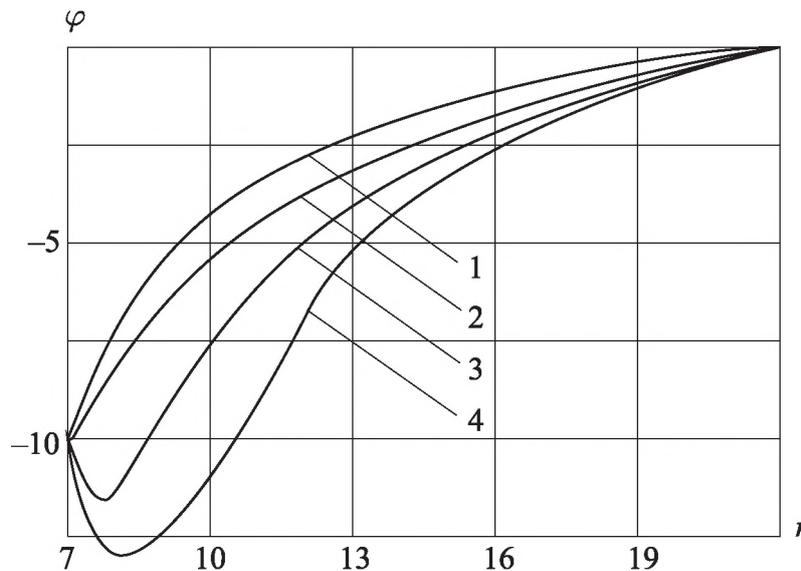


Рис. 1.13. Распределение электрического потенциала по нормали к стенке

$$(r_{p0} = 7, \varphi_0 = -10, \varepsilon = 1, \frac{m_e}{m_i} = 5 \cdot 10^{-4}):$$

$$1 — j_{eэ} = 0, 2 — 10^{-2}, 3 — 5 \cdot 10^{-2}, 4 — 5 \cdot 10^{-1}$$

С уменьшением характерного размера задачи  $r_0$  также наблюдается рост потенциальной ямы, кроме того, объемный отрицательный заряд концентрируется ближе к стенке.

На рис. 1.14, *a*, *б* приведены распределения концентраций заряженных частиц  $n_{i,e}$  вдоль радиуса, согласованные с распределением потенциала, представленного на рис. 1.13. Увеличение  $j_{e3}$  ведет к росту концентрации заряженных частиц в возмущенной зоне, при этом профиль  $n_e(r)$  становится все более крутым, что указывает на увеличение отрицательного объемного заряда вблизи стенки.

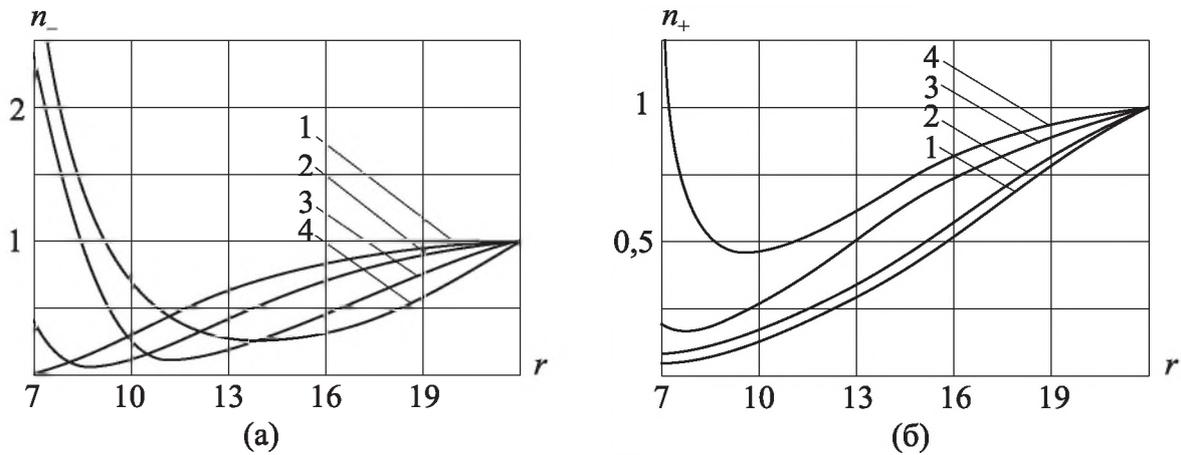


Рис. 1.14. Распределение концентрации  $n_{i,e}$  вдоль радиуса

$$(r_0 = 7, \varphi_0 = -10, \varepsilon = 1, \frac{m_e}{m_i} = 5 \cdot 10^{-4}):$$

$$1 — j_{e3} = 0, 2 — 10^{-2}, 3 — 5 \cdot 10^{-2}, 4 — 5 \cdot 10^{-1}$$

Как следует из рис. 1.14, *a*, *б*, при достаточно больших значениях  $j_{e3}$  в непосредственной близости от поверхности объемная плотность заряда —  $\rho = e(n_i - n_e) < 0$ , а на расстоянии от стенки  $r > 12r_D$  —  $\rho = e(n_i - n_e) > 0$ .

В заключение приведем сравнение результатов, полученных в данном разделе, с результатами других авторов [125, 131], где получено удовлетворительное совпадение результатов (рис. 1.15).

В рассмотренных выше разделах гл. 1 исследовались физические процессы в плазменных образованиях в полых катодах без учета движения плазмы вдоль оси катода. Такое течение будет рассмотрено ниже в п. 1.6 главы 1.

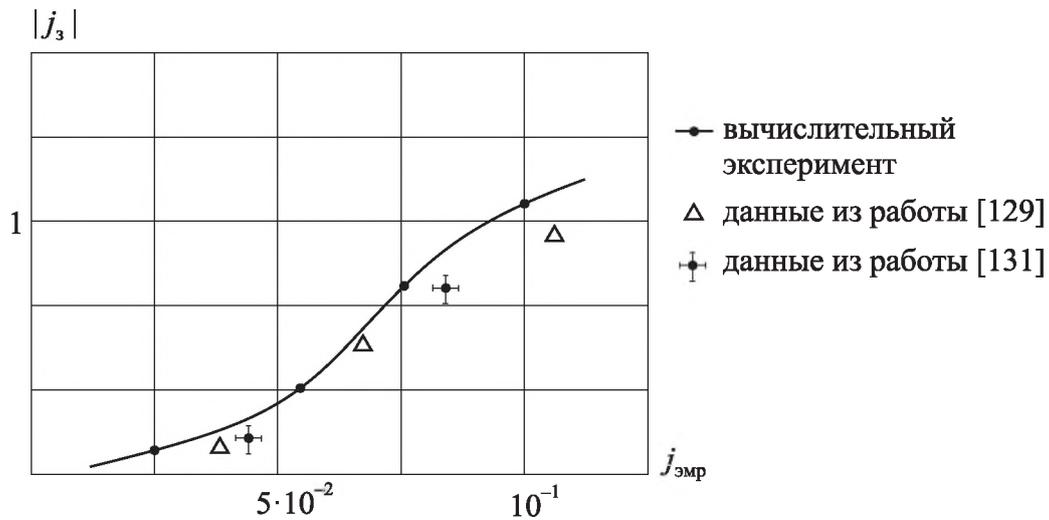


Рис. 1.15. Сравнение результатов вычислительных экспериментов с результатами других авторов

### 1.6. Течение плазмы в каналах полого катода вдоль его оси

Рассмотрим движение частично ионизованной плазмы в каналах катода. Сформулируем единое уравнение движения рабочего газа по всей длине канала, учтем, что в активной зоне канала будут изменяться концентрации всех заряженных и нейтральных частиц вследствие перехода газа в плазменное состояние. Будем пренебрегать внешними и собственными магнитными полями. Тогда уравнение Навье – Стокса в общем виде имеет нулевую правую часть [43]:

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho \cdot u_\alpha \cdot u_\beta + P_g \cdot \delta_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha\beta}) = 0,$$

где  $\rho$  — плотность смеси;  $u_\alpha, u_\beta$  — компоненты скорости потока по координатам  $\alpha$  и  $\beta$ ;  $P_g$  — давление смеси;  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера,  $\tau_{\alpha\beta}$  — тензор напряжений вязкого трения.

Для течения в тонком канале многоканального катода пренебрегаем изменением скорости потока по радиальной координате  $u_r = \text{const}$ . Тогда в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  (рис. 1.2) с учетом азимутальной симметрии для установившегося течения можем записать [41]

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot u_z^2 + P_g - \tau_{zz}) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot \tau_{zr})}{\partial r}, \quad (1.42)$$

где  $\tau_{zr}$  — касательное напряжение трения,  $\tau_{zz}$  — нормальное напряжение трения. В классической гидродинамике [42] напряжения вязкого трения  $\tau_{zr} = \eta \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r}$  и  $\tau_{zz} = \frac{4}{3} \eta \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z}$ ,  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости.

Каналы между стержнями набивки в рассматриваемом типе полого катода можно считать капиллярами (длина катода  $L_k$  много больше условного радиуса канала), имеющими сложную неправильную форму. Для описания поперечного размера канала введем условный эффективный радиус канала —  $r_{\text{эфф}}$ . Для тонкого длинного канала изменением скорости  $\frac{\partial u_z}{\partial z}$  вдоль оси  $Z$  будем пренебрегать. Тогда уравнение движения смеси в одиночном канале примет вид

$$\frac{\partial P_g}{\partial z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot \tau_{zr})}{\partial r}. \quad (1.43)$$

На основании формул классической гидродинамики для течения в канале в нашем случае узкого канала с учетом вязкости уравнение (1.43) принимает вид [43]

$$\frac{\partial P_g}{\partial z} = -\xi \frac{\rho \cdot u_z^2}{2} \cdot \frac{1}{D}, \quad (1.44)$$

где  $\xi$  — коэффициент скольжения,  $D$  — гидродинамический диаметр канала,  $D = \frac{4S_k}{\ell_p}$ ,  $S_k$  — площадь поперечного сечения канала,  $\ell_p$  — смачиваемый течением периметр.

Приближенно примем для ламинарного течения со скольжением в узком канале коэффициент скольжения равным  $\xi = \frac{64\pi^2}{\text{Re} \cdot \left(1 + 8c \frac{\lambda_{\text{ср}}}{D}\right)}$ , где

$\text{Re} = \frac{\rho \cdot u_z \cdot D}{\eta}$  — число Рейнольдса,  $\lambda_{\text{ср}}$  — средняя длина свободного

пробега частиц,  $c = \frac{2-\sigma}{\sigma}$ ,  $\sigma$  — доля диффузно отраженных молекул [43].

После подстановки коэффициентов в уравнение движения получаем уравнение, которое применимо к движению одного компонента смеси:

$$\frac{d}{dz}(P_g) = -\frac{64\pi^2 \cdot u_z \cdot \eta}{2D^2 \cdot \left(1 + 8c \frac{\lambda_{cp}}{D}\right)}. \quad (1.45)$$

Для построения уравнения движения смеси как целого необходимо рассмотреть средние длины пробега и коэффициенты вязкости всех компонент смеси.

Средняя длина свободного пробега  $\lambda_s$  для частиц сорта  $s$  может быть определена согласно [44] как

$$\lambda_s = \frac{1}{\sum_{r=i,e,a} 2\sqrt{\frac{m_{sr}}{m_s}} n_r Q_{sr}},$$

где  $n_r$  — концентрация частиц сорта  $r$ ,  $m_r$  — масса частицы сорта  $r$ ,  $Q_{sr}$  — сечение столкновений частиц сорта  $s$  и сорта  $r$  с передачей им-

пульса,  $m_\alpha = \sqrt{\frac{m_s m_\alpha}{m_s + m_\alpha}}$  — приведенная масса частиц  $\alpha = i, e, a$ .

Тяжелые частицы слабо отклоняются при столкновениях с легкими частицами. Для частично ионизованного газа, в котором концентрации электронов и ионов примерно равны, можем записать, что средняя длина свободного пробега электронов

$$\lambda_e \approx \frac{1}{(\sqrt{2} + 2)n_e Q_{ei} + 2n_a Q_{ea}}.$$

Аналогично средняя длина свободного пробега ионов и атомов

$$\lambda_i \approx \lambda_a \approx \frac{1}{2\sqrt{\frac{m_i}{m_i + m_e}} n_e Q_{ei} + \sqrt{2}n_i Q_{ii} + \sqrt{2}n_a Q_{ia}}.$$

Сечения столкновений приняты согласно [44, 55, 140]:  $Q_{aa} = Q_{\infty} \left(1 + \frac{C}{T}\right)$ ,

постоянная Сазерленда  $C = 170$  К;  $Q_{ii} = \frac{\pi \cdot F^4 \cdot \ln(\Lambda)}{3(4\pi\epsilon_0)^2 R^2 \cdot N_A^2 \cdot T^2}$ , число Фа-

радея  $F = 9,65 \cdot 10^4$  Кл/моль,  $\ln(\Lambda) = \ln\left(1,24 \cdot 10^7 \sqrt{\frac{T^3}{n_e}}\right)$  — кулоновский

логарифм;  $Q_{ea} = \frac{1,182 \cdot 10^{-5} T_e}{1 + 0,2879 \cdot 10^{-4} T_e}$ ,  $Q_{ei} = \frac{4,4 \cdot 10^{-9}}{T_e^2}$ , где  $T$  — температура

тяжелых частиц в канале,  $T_e$  — температура электронов в плазме канала.

Длины пробега электронов, как правило, больше длины пробега ионов, так как у частиц разные массы, а в неизотермической плазме еще и разные температуры. Сравним коэффициенты вязкости электронов и ионов:

$$\frac{\eta_e}{\eta_i} = \frac{m_e n_e v_e \lambda_e}{m_i n_i v_i \lambda_i} = \frac{m_e}{m_i} \cdot \sqrt{\frac{8k \cdot T_e}{\pi \cdot m_e}} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot m_i}{8k \cdot T_i}} = \sqrt{\frac{m_e T_e}{m_i T_i}} \ll 1.$$

Следовательно, вклад электронов в вязкость газа пренебрежимо мал. Применим к расчету вязкости газа принцип смеси [44] и суммирование будем выполнять по ионам и атомам без учета электронов:

$$\eta = \sum_{s=i,a} \left( \frac{n_s}{\sum_{r=i,e,a} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{m_s} n_r} \frac{Q_\alpha}{Q_{ss}}} \cdot \eta_s^* \right), \quad (1.46)$$

где  $\eta_s^* = m_s n_s v_s \lambda_s$  — коэффициент вязкости «простого» газа, состоящего из частиц одного сорта.

Можно также воспользоваться результатом работы [45] и рассчитать отдельно вязкость ионов и атомов:

$$\eta_a = \sqrt{\frac{R \cdot m_a}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{T}}{n_a \cdot Q_{aa}}, \quad \eta_i = 0,407 \frac{(4\pi\epsilon_0)^2}{\Lambda \cdot F^4} N_A \cdot \sqrt{m_a} \cdot \left(RT^{5/2}\right),$$

где  $m_a$  — масса атома,  $F$  — число Фарадея,  $N_A$  — число Авогадро.

Массовый расход плазмообразующего газа  $G_g$  по всем каналам катода можно записать через скорости движения частиц как

$$G_g = S_k \cdot N_k \cdot m_a (n_i \cdot u_{iz} + n_a \cdot u_{az}),$$

где  $N_k$  — количество каналов, по которым прокачивается рабочий газ,  $S_k$  — среднее поперечное сечение канала. В первом приближении можно считать площади каналов примерно одинаковыми. Учитываем определение гидродинамической скорости ионизованного газа [41]:

$$u_z = \frac{n_i \cdot u_{iz} + n_a \cdot u_{az}}{n_i + n_a} = \frac{G_g}{S_p N_k \cdot m_a} \cdot \frac{1}{n_i + n_a}.$$

Давление в канале определяется по закону Дальтона для смеси:

$$P_g = P_e + P_i + P_a = N_e \cdot kT_e + (n_i + n_a) \cdot kT_i = kT \left( n_e \frac{T_e}{T} + (n_i + n_a) \right),$$

где  $T_i \approx T_a = T$  — считаем температуру тяжелых частиц примерно равной температуре катодных стержней, окружающих канал.

Введем степень ионизации газа  $X_i = \frac{n_i}{n_i + n_a}$  и преобразуем уравнение (1.45) к виду

$$\frac{d}{dz}(P_g) = - \frac{64\pi^2 \cdot \eta}{2D^2 \cdot \left(1 + 8c \frac{\lambda_{cp}}{D}\right)} \cdot \frac{RT}{S_p N_k \cdot m_a \cdot P_g} \cdot G_g \cdot \left(1 + X_i \cdot \frac{T_e}{T}\right).$$

Внося давление газа под знак дифференциала, получим уравнение для определения профиля давления по длине канала между стержнями набивки:

$$\frac{d}{dz}(P_g^2) = - \frac{64\pi^2 \cdot \eta}{D^2 \cdot \left(1 + 8c \frac{\lambda_{cp}}{D}\right)} \cdot \frac{R \cdot T \cdot G_g}{S_p N_k \cdot m_a} \cdot \left(1 + X_i \cdot \frac{T_e}{T}\right). \quad (1.47)$$

Давление в каналах между стержнями набивки будет различным в зависимости от положения канала относительно оси катода, поскольку изме-

няется температура стержней набивки и, соответственно, изменяются характеристики плазмы в каналах.

На закрепленном конце катода при  $z = 0$  давление доступно для измерения в эксперименте, и его значение можно использовать для контроля адекватности моделирования. Для построения возможно более общей модели величина входного давления не будет рассматриваться в качестве граничного условия.

На свободном конце катода при  $z = L_k$  происходит истечение газа в вакуум, соответственно, в качестве граничного условия можно использовать равенство средней скорости ее значению на выходе из канала. Профиль скорости по радиусу канала параболический [43]. Если скорость на выходе из канала равна скорости звука, то получаем следующее выражение для граничного условия:

$$P_g(L_k) = \frac{G_g}{S_p N_k} \cdot \sqrt{\frac{RT(L_k)}{\gamma \cdot m_a}} \cdot \sqrt{1 + X_i(L_k) \cdot \frac{T_e(L_k)}{T(L_k)}}, \quad (1.48)$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты. Таким образом, давление в каналах рассчитывается прямым интегрированием с учетом граничного условия (1.46):

$$P_g^2(z) = P_g^2(L_k) + \int_z^{L_k} \frac{64\pi^2 \cdot \eta}{D^2 \cdot \left(1 + 8c \frac{\lambda_{cp}}{D}\right)} \cdot \frac{R \cdot T \cdot G_g}{S_p N_k \cdot m_a} \cdot \left(1 + X_i \cdot \frac{T_e}{T}\right) dz. \quad (1.49)$$

Так как для течения в канале должен выполняться закон сохранения массы  $\operatorname{div}(\rho \cdot \mathbf{v}) = 0$ , то для трехкомпонентной плазмы

$$\operatorname{div}(m_e \cdot \Gamma_e + m_i \cdot \Gamma_i + m_a \cdot \Gamma_a) = \operatorname{div}(\rho \cdot \mathbf{v}) = 0, \quad (1.50)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость плазмы в целом,  $\Gamma_e$ ,  $\Gamma_i$  и  $\Gamma_a$  — плотности потоков электронов, ионов и атомов соответственно. Плотности потока частиц подчиняются уравнениям неразрывности:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\Gamma_e) &= \omega_e, \\ \operatorname{div}(\Gamma_i) &= \omega_i, \\ \operatorname{div}(\Gamma_a) &= \omega_a, \end{aligned} \quad (1.51)$$

где  $\omega_e$ ,  $\omega_i$  и  $\omega_a$  — источники частиц в плазме.

Для заряженных частиц плотности токов пропорциональны плотности потоков частиц  $\mathbf{j}_e = -e \cdot \mathbf{\Gamma}_e$  и  $\mathbf{j}_i = e \cdot \mathbf{\Gamma}_i$ . Поэтому возможен переход от соотношений (1.51) к уравнениям баланса для ионов и электронов:

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}_e) = -e \cdot \omega_e, \quad \operatorname{div}(\mathbf{j}_i) = e \cdot \omega_i. \quad (1.52)$$

При этом из уравнения неразрывности тока  $\operatorname{div}(\mathbf{j}) = \operatorname{div}(\mathbf{j}_i + \mathbf{j}_e) = 0$  следует, что скорости процессов для электронов и ионов одинаковы  $\omega_e = \omega_i$ . Сложим в уравнениях (1.51) левые и правые части:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(m_e \cdot \mathbf{\Gamma}_e) &= m_e \cdot \omega_e, \\ \operatorname{div}(M_i \cdot \mathbf{\Gamma}_i) &= m_i \cdot \omega_i, \\ \operatorname{div}(M_a \cdot \mathbf{\Gamma}_a) &= m_a \cdot \omega_a, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\operatorname{div}(m_e \cdot \mathbf{\Gamma}_e + m_i \cdot \mathbf{\Gamma}_i + m_a \cdot \mathbf{\Gamma}_a) = m_e \cdot \omega_e + m_i \cdot \omega_i + m_a \cdot \omega_a.$$

В полученном выражении левая часть соответствует закону сохранения массы (1.50), следовательно,  $m_e \cdot \omega_e + m_i \cdot \omega_i + m_a \cdot \omega_a = 0$ . Поскольку  $m_e + m_i = m_a$ , получаем  $(m_e + m_i) \cdot \omega_e = -m_a \cdot \omega_a$ , и скорость рождения электронов равна скорости убыли числа атомов.

Запишем уравнения (1.52) в цилиндрической системе координат с учетом азимутальной симметрии:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot j_{er}) + \frac{\partial}{\partial z}(j_{ez}) = -e \cdot \omega_e, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot j_{ir}) + \frac{\partial}{\partial z}(j_{iz}) = e \cdot \omega_e. \end{cases}$$

Проинтегрируем уравнения по площади канала в пределах введенного ранее условного радиуса канала  $r_{\text{эфф}}$ , предварительно умножив оба уравнения на площадь элементарного кольца  $dS = 2\pi \cdot r dr$ :

$$\begin{cases} \int_0^{r_{\text{эфф}}} 2\pi \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot j_{er}) dr + \int_0^{r_{\text{эфф}}} 2\pi r \cdot \frac{\partial}{\partial z}(j_{ez}) dr = -2\pi \cdot e \cdot \int_0^{r_{\text{эфф}}} r \cdot \omega_e dr, \\ \int_0^{r_{\text{эфф}}} 2\pi \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot j_{ir}) dr + \int_0^{r_{\text{эфф}}} 2\pi r \cdot \frac{\partial}{\partial z}(j_{iz}) dr = 2\pi \cdot e \cdot \int_0^{r_{\text{эфф}}} r \cdot \omega_e dr. \end{cases} \quad (1.53)$$

Первые слагаемые в уравнениях (1.53) вычисляются. В остальных слагаемых в условиях длинного тонкого канала величины можно считать независимыми от радиальной координаты или заменить на средние по сечению канала величины:

$$\begin{cases} -\ell_p \cdot j_{ek} + \frac{d}{dz}(j_{ez}) \cdot S_k = -e \cdot \omega_e \cdot S_k, \\ \ell_p \cdot j_{ik} + \frac{d}{dz}(j_{iz}) \cdot S_k = e \cdot \omega_e \cdot S_k, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dz}(j_{ez}) = \frac{\ell_p}{S_k} \cdot j_{ek} - e \cdot \omega_e, \\ \frac{d}{dz}(j_{iz}) = e \cdot \omega_e - \frac{\ell_p}{S_k} \cdot j_{ik}. \end{cases} \quad (1.54)$$

Таким образом, получены соотношения для продольного ионного и электронного токов в каналах между стержнями катода.

Можно определять продольные плотности токов исходя из других соотношений [41, 45]. Продольная составляющая плотности ионного тока складывается из конвективного тока и диффузионного тока (если пренебречь подвижностью):

$$j_{iz} = j_{\text{конв}} + j_{\text{дифф}}.$$

Плотность конвективного тока можно выразить через степень ионизации плазмы:

$$j_{\text{конв}} = \frac{F \cdot G_g}{m_a \cdot S_p} X_i.$$

Плотность диффузионного тока ионов определяется амбиполярной диффузией, которая зависит от продольного градиента концентрации ионов в канале:

$$j_{\text{дифф}} \approx j_{ad} = -\frac{e \cdot D_{ad}}{L_k} \cdot \frac{d(N_i)}{dz},$$

где  $N_i = N_e$  и  $D_{ad}$  — коэффициент амбиполярной диффузии<sup>1</sup>. Тогда продольная плотность ионного тока может определяться как

$$j_{iz} = \frac{F \cdot G_g}{M_a \cdot S_p} X_i - \frac{e \cdot D_{ad}}{L_k} \cdot \frac{d(N_e)}{dz}. \quad (1.55)$$

<sup>1</sup> Коэффициент амбиполярной диффузии будет получен в главе 2 монографии (формула (2.26)).

Для продольной плотности электронного тока  $j_{ez}$  можно использовать обобщенный закон Ома:

$$j_{ez} \approx \frac{\sigma_p}{1 + \frac{\nu_{ea}}{\nu_{ei}}} \left( E_z + \frac{L_k}{eN_e} \frac{dP_e}{dz} \right), \quad (1.56)$$

где  $\sigma_p$  — электропроводность плазмы,  $E_z$  — осевая составляющая напряженности электрического поля в плазме,  $P_e$  — давление электронного газа,  $\nu_{ea}$ ,  $\nu_{ei}$  — частоты столкновений электрона с атомами и ионами.

## ГЛАВА 2

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ ПОЛЫХ КАТОДАХ

### Введение

Сложные многоканальные катодные узлы из-за наличия большого числа составных элементов следует рассматривать как объект с некоторыми усредненными эффективными свойствами. Поэтому задача формулируется для отдельного элемента катода, характерные продольные размеры которого велики по сравнению с поперечными размерами. В такой ситуации правомерно применить метод расщепления переменных [46, 47].

Под элементом катода будем подразумевать его простейшую структурную единицу. В случае многоканального катода такой единицей является нить, стержень или трубка, из которых может быть собран многоканальный катод. Очевидно, что граничные условия на поверхности отдельных элементов сложного катода будут существенно различаться. Так, например, периферийные элементы с точки зрения особенностей тепло-, массо- и электрообмена находятся в иных условиях, чем внутренние, поскольку каждый внутренний элемент обменивается энергией со смежными элементами, а периферийные элементы и оболочка катода излучают энергию в окружающую среду. Соответственно, формулировка граничных условий при постановке задачи расчета состояния каждого структурного элемента представляет наибольшую трудность. Поэтому формулируемая система уравнений обязательно должна быть дивергентной для катода в целом. В подобной ситуации теоретическое исследование систем должно проводиться в тесной связи с экспериментом.

Рассмотрим тепловую модель набивного катода, составленного из плотно упакованных  $N$  нитей. При достаточно большом числе нитей тело

катода можно рассматривать как некоторый композиционный материал, обладающий рядом анизотропных свойств. Прежде всего, следует отличать для катода в целом продольную теплопроводность от поперечной. Также различна и электропроводность катода в поперечном и продольном направлениях, а также его электрическое сопротивление. Такая особенность присуща всем типам многоканальных полых катодов.

Пусть катод составлен из  $N$  стержней радиусом  $r_k$  и длиной  $L_k$ . Положим, что привязка разряда осуществляется во внутренней полости к некоторой части поверхности стержней (активная зона полого катода). Если  $Z_k = 2\pi \cdot r_k N$  — полный периметр всех стержней, составляющих катод, то  $Z_{кр} = 2\pi \cdot r_k N \cdot \omega_p$  — часть периметра, смачиваемая плазмой. Для набивного полого катода долю смачиваемого ( $\omega_p$ ) и не смачиваемого ( $\omega_n$ ) плазмой периметра можно выразить через количество стержней  $N$  согласно формулам

$$\omega_n = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{N} \right) = \frac{Z_{кн}}{Z_k} \quad \text{и} \quad \omega_p = 1 - \omega_n = \frac{Z_{кр}}{Z_k}, \quad (2.1)$$

где  $Z_{кн}$  — часть периметра, не смачиваемого плазмой:  $Z_k = Z_{кр} + Z_{кн}$ . Введем параметр, показывающий, во сколько раз отличается наружная поверхность периферийных стержней от их внутренней поверхности, смачиваемой плазмой:

$$\bar{\ell}_n = \frac{Z_{кн}}{Z_{кр}} = \frac{\omega_n}{\omega_p}.$$

В установившемся режиме внутренние элементы, за исключением торцов, практически находятся в теплоизолированном состоянии. Сброс энергии с боковой поверхности катода происходит через периферийные стержни и внешнюю оболочку катода. Число периферийных элементов может быть приближенно оценено для заданной упаковки. Так, для плотной упаковки, при которой каждые три стержня образуют канал (рис. 1.1, б, в), можно найти [19]

$$N_s = 6 \left( \sqrt{1/3(N-1)} - 0,5 \right), \quad (2.2)$$

если же канал образуется каждым из четырех стержней, то

$$N_s = 4N^{1/2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{N}} \right). \quad (2.3)$$

Можно найти также число каналов, образованных упакованными соприкасающимися стержнями. В первой конфигурации это число каналов определяется формулой

$$N_{\text{кр}} = 6 \left( \sqrt{1/3(N-1) + 0,25} - 0,5 \right)^2 = N - N_s, \quad (2.4)$$

а во второй конфигурации — формулой

$$N_{\text{кр}} = N \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^2. \quad (2.5)$$

Для достаточно больших  $N$  «обойма» катода может быть в принципе произвольной формы (окружность, квадрат и т. п.). Рассматривая некий элемент такого сложного катода, можно сказать, что сброс энергии с внешней поверхности пропорционален суммарной наружной поверхности периферийных элементов и зависит от их числа  $N_s$ , а внутренние стержни передают энергию за счет теплообмена с плазмой и джоулева разогрева протекающим током разряда. Этот процесс определяется числом работающих нитей  $N$ .

Поскольку многоканальный полый катод состоит из одноканальных элементов, при рассмотрении тепловых процессов в многоканальном полом катоде целесообразно начать с теплового состояния одноканального полого катода. В этом случае удобно воспользоваться полученными в главе 1 решениями задачи Эйлера–Пуассона с учетом термоэмиссии с поверхности катода, а также процессов переноса — конвекции, диффузии и подвижности. В случае необходимости можно учесть переменные свойства плазмы и наличие различных химических реакций, вынесенных в приложение 4. При рассмотрении теплового состояния полого катода потребуются полученные в главе 1 распределения концентраций заряженных и нейтральных частиц, электрических токов ионов и электронов, самосогласованных электрических полей в пристеночных областях. Например, если учесть условие пропорциональности теплового потока электронов  $q_e$  и плотности электронного тока  $j_e$ , то очевидно, что  $q_e \sim j_e$ .

## 2.1. Уравнение теплопроводности для единичного стержня в продольном направлении

Составим уравнение теплового баланса для бесконечно малого элемента отдельного стержня. Примем в качестве продольной координаты координату  $Z$ , положительное направление которой будем совмещать с направлением электрического тока в элементе катода. Строгий расчет теплового состояния нити должен проводиться на основании интегрирования уравнения теплопроводности при соответствующих граничных условиях:

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}_w) = \rho_M j_M^2, \quad (2.6)$$

где  $q_w$  — плотность потока энергии в стержне катода,  $\rho_M$  — удельная электропроводность металла,  $j_M$  — плотность тока в стержне катода.

Правая часть уравнения представляет собой объемную плотность энергии по закону Джоуля – Ленца. Для полого катода с набивкой из цилиндрических стержней в цилиндрической оболочке удобно рассматривать задачу в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$ . С учетом азимутальной симметрии задачи уравнение (2.6) примет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot q_r) + \frac{\partial}{\partial z} (q_z) = \rho_M j_M^2, \quad (2.7)$$

где  $q_z$ ,  $q_r$  — плотности потока тепла вдоль стержня и по радиусу.

Для получения уравнения теплопроводности по длине стержня в соответствии с принципом расщепления сначала проинтегрируем уравнение (2.7) по элементу объема стержня  $dV = S_M dz$ , вводя поверхностные источники тепла для стержня:  $q_{кр}$  — в области активной зоны (энергообмен с плазмой и тепловое излучение),  $q_{кн}$  — плотность потока излучения в области течения нейтрального газа:

$$\frac{d[S_M q_M(z)]}{dz} + Z_{кр} q_{кр} + Z_{кн} q_{кн} = \rho_M j_M^2 S_M, \quad (2.8)$$

где  $S_M$  — площадь поперечного сечения индивидуального стержня.

Полагая, что продольный тепловой поток обусловлен теплопроводностью стержня,  $q_M(z) = -\chi_M \frac{dT}{dz}$ , и вводя характерный поперечный

масштаб  $h^* = \frac{S_M}{Z_{кр}}$ , получаем уравнение теплопроводности в продольном направлении для отдельного стержня в составе набивного полого катода:

$$\chi_M \frac{d^2 T}{dz^2} - \frac{1}{h^*} q_{кр} - \frac{1}{h^*} \bar{l}_H q_{кн} + \rho_M j_M^2 = 0, \quad (2.9)$$

где  $\chi_M$  — коэффициент теплопроводности металла стержня.

Подробно плотности тепловых потоков были рассмотрены в теории одноканального полого катода [19].

Плотность потока энергии, уносимой излучением, запишется по закону Стефана – Больцмана:

$$q_{изл} = \varepsilon_{эфф}(T) \cdot \sigma_{С-Б} \cdot (T)^4, \quad (2.10)$$

где  $\sigma_{С-Б}$  — постоянная Стефана – Больцмана,  $\varepsilon_{эфф}$  — эффективная степень черноты поверхности стержня.

Для поверхности стержня можно использовать аппроксимирующую формулу зависимости степени черноты от температуры поверхности в диапазоне температур  $1000 \text{ К} \leq T \leq 3500 \text{ К}$  [53]:

$$\varepsilon_{эфф}^H(T) = \nu_0 + \nu_1 T,$$

где  $\nu_0 = 0,0185$  и  $\nu_1 = 1,05 \cdot 10^{-4} \text{ 1/К}$ .

Для длинного канала с сильным градиентом температуры в области фронта ионизации необходимо учитывать переизлучение горячих областей стержня, находящихся в активной зоне разряда, на холодные области, не смачиваемые плазмой [53]:

$$\varepsilon_{эфф} = \varepsilon^H \cdot \frac{1 - \varepsilon^B}{1 - \varepsilon^H},$$

где вне активной зоны канала

$$\varepsilon^B = \sqrt{\varepsilon_{эфф}^H} + \left(1 - \sqrt{\varepsilon_{эфф}^H}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{L_k \cdot r}}\right),$$

в активной зоне канала

$$\varepsilon^H = \sqrt{\varepsilon_{\text{эфф}}^H} + \left(1 - \sqrt{\varepsilon_{\text{эфф}}^H}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{L_k - z}{L_k \cdot r}}\right).$$

Наиболее сложным моментом является теплообмен между стержнем набивки и плазмой внутреннего положительного столба. Запишем плотность потока энергии из плазмы на стержень в следующем виде [19]:

$$q_p = j_i \cdot a_w \left( \Delta \varphi_k + \frac{\langle W_i \rangle}{e} \right) + j_{ik} \cdot a_H (V_i - \Phi_{e \text{эфф}}) - j_{e3} \cdot \Phi_{e \text{эфф}}. \quad (2.11)$$

*Первое слагаемое* в (2.11) учитывает плотность потока энергии, приносимой ионами, которые затем отражаются от поверхности в виде ионов:

$j_i$  — плотность ионного тока, поступающего на поверхность стержня,

$\langle W_i \rangle$  — средняя энергия ионов на границе слоя объемного заряда,

$\Delta \varphi_k$  — прикатодный скачок потенциала у поверхности стержня,

$a_w$  — коэффициент аккомодации кинетической энергии ионов.

В модели катодных процессов коэффициент аккомодации является внешним параметром, но его неопределенность существенно сказывается лишь на величине прикатодного скачка потенциала, а на другие характеристики прикатодной области влияет слабо. В экспериментальном исследовании [54] было показано, что наилучшее согласование с экспериментом получается при использовании величины коэффициента аккомодации кинетической энергии иона  $a_w = 0,8$ .

*Второе слагаемое* описывает плотность потока энергии, приносимой ионами, рекомбинирующими на стенке:

$j_{ik}$  — плотность ионного тока, рекомбинирующая на поверхности ПК;

$V_i$  — потенциал ионизации атома плазмообразующего газа;

$\Phi_{e \text{эфф}}$  — эффективный потенциал, равный отношению работы выхода электрона из металла к заряду электрона;

$a_H$  — коэффициент аккомодации рекомбинирующего иона.

В теоретических исследованиях часто полагают  $a_H = 1$ . Однако ион может передать катодному стержню энергию не полностью. Часть энергии при этом излучается или превращается в кинетическую энергию образующегося атома в случае его отражения от поверхности катода. Поэтому значение  $a_H$  для условий катода в дуговом разряде также является варьируемым параметром.

*Третье слагаемое* представляет собой плотность потока энергии, уносимой электронами, эмитируемыми из металла,  $j_{e3}$  — плотность эмиссионного тока с поверхности катода.

Плотность потока энергии, приносимой нейтральными атомами из плазмы на стержень катода, запишется следующим образом [19]:

$$q_a = \frac{1}{4} n_a \langle u_a \rangle 2kT_a, \quad (2.12)$$

где  $n_a$ ,  $\langle u_a \rangle$ ,  $T_a$  — концентрация, средняя скорость и температура атомов. Однако необходимо учитывать, что атомы, образовавшиеся в результате нейтрализации ионов на стенке, возвращают в плазму часть энергии, т. е. существует плотность потока энергии обратных «восстановленных» атомов

$$q_a^{\text{обп}} = (1 - a_W) j_{ik} \left( \Delta\phi_k + \frac{\langle W_i \rangle}{e} \right). \quad (2.13)$$

Кроме того, возможно наличие «обратных» электронов, идущих из плазмы на катод. Тогда плотность потока энергии таких электронов [19]

$$q_e^{\text{обп}} = \left( 2kT_e + e\Phi_{\text{эфф}} \right) \frac{1}{4} a_e n_e \langle u_e \rangle \cdot e^{-\frac{e\Delta\phi_k}{kT_e}}, \quad (2.14)$$

где  $a_e$  — коэффициент аккомодации кинетической энергии электронов,  $n_e$  — концентрация электронов,  $\langle u_e \rangle$  — средняя скорость электронов.

Что касается граничных условий, то, как правило, известна температура закрепленного конца стержня, т. е.

$$\text{при } z = 0 \text{ задано } T = T_0. \quad (2.15)$$

Для незакрепленного конца стержня будем полагать, что основную роль играют потери энергии излучением:

$$-\lambda_m \frac{dT}{dz} = \varepsilon_{\text{эфф}}(T) \cdot \sigma_{\text{С-Б}} \cdot (T)^4 + q_T, \quad (2.16)$$

где  $q_T$  — плотность потока энергии с торцевой части поверхности катода.

Таким образом, уравнение продольной теплопроводности (2.9) рассматривается с поверхностными источниками тепла (2.10)–(2.14) и граничными условиями (2.15), (2.16).

В теории одноканального полого катода [19] показано, что для катодов правильной геометрической формы тепловое состояние катода можно описать средней безразмерной температурой  $T(r, z)$ . Аналогичным образом для цилиндрического стержня набивки можно преобразовать уравнение теплового баланса элемента объема стержня (2.9) в безразмерное уравнение теплопроводности:

$$a_1 \theta \cdot \langle T'' \rangle + \left( a_2 \alpha_1 + \langle \theta \rangle \alpha_2 - \langle \theta \rangle^4 \alpha_3 \right) = 0, \quad (2.17)$$

где  $\langle T'' \rangle = T(r, z) / T(r, L_k)$  — безразмерная температура, соотнесенная с неизвестной температурой свободного конца катода. Параметры  $\theta$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ , а также  $a_1$  и  $a_2$  в безразмерной форме описывают теплообмен катода с плазмой, нейтральным газом и разогрев катода током (2.10)–(2.14). Масштабом плотности тока в стержне считаем величину  $j_{M0} = I / (S_M \cdot N)$ .

Масштаб температуры  $\theta_0$  определяется из условия теплового баланса длинного стержня, нагреваемого электрическим током и охлаждающегося за счет излучения:

$$\varepsilon_0 \cdot \sigma_{\text{С-Б}} \cdot \theta_0^4 = h \cdot \rho_M \cdot \frac{\theta_0}{T_M} \cdot j_{M0}^2,$$

$$\theta_0^3 = \frac{h \cdot \rho_M}{\varepsilon_0 \cdot \sigma_{\text{С-Б}} \cdot T_M} \cdot j_{M0}^2.$$

Тогда можно ввести безразмерную температуру стержня  $\langle \theta \rangle = T(L_k) / \theta_0$ .

Приведенное к безразмерному виду уравнение теплопроводности имеет три граничных условия:

первого рода на закрепленном конце катода:  $z = 0: \langle T(0) \rangle = \frac{T(0)}{\theta_0 \langle \theta \rangle};$

первого и второго рода на свободном конце катода:

$$z = L_k: T(L_k) = 1 \text{ и } \langle T \rangle' (L_k) = -a_0 \varepsilon \langle \theta \rangle^3 \frac{\langle q \rangle}{\langle \theta \rangle}. \quad (2.18)$$

Таким образом, получено дифференциальное уравнение теплопроводности в продольном направлении с тремя граничными условиями. Метод решения уравнения (2.17) изложен в [19].

## 2.2. Уравнение теплопроводности в радиальном направлении набивного катода

Рассмотрим радиальный перенос тепла в конструкции набивного катода. Поскольку, касание цилиндрических стержней происходит практически в одной точке (рис. 1.1, б, в), то основным будет процесс переноса тепла через плазму, заполняющую каналы в активной зоне катода. Стержни набивки полого катода или другие элементы наполнения оболочки катода имеют отношение длины стержня к его радиусу  $\frac{L_k}{r_{кр}} \gg 1,$

и распределение источников тепловыделения по поверхности стержня в установившемся режиме катода постоянно. Поэтому, в соответствии с принципом расщепления переменных [46, 47], вдали от концов стержня его температуру можно считать независимой от осевой координаты  $z$ . Тогда радиальное уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \chi_p \frac{dT}{dr} \right) + \sigma_p E_p^2 = 0, \quad (2.19)$$

где  $E_p$  — напряженность электрического поля в плазме канала,  $\chi_p$  и  $\sigma_p$  — теплопроводность и электропроводность плазмы соответственно.

В предположении о постоянстве коэффициента теплопроводности решение уравнения (2.19) имеет вид

$$T(r) = -\frac{\sigma_p E_p^2}{4\chi_p} r^2 + C, \quad (2.20)$$

где константа  $C$  принимается равной значению температуры центрального стержня  $T(z, r) = 0$ .

Плазма в каналах полого катода является частично ионизованной, поэтому в процессах переноса необходимо учитывать наличие трех сортов частиц: атомов, ионов и электронов.

Теплопроводность плазмы рассчитаем как сумму теплопроводностей электронов и тяжелых частиц с учетом неизотермичности плазмы  $\chi_p = \chi_e + \chi_\alpha$ . Коэффициент теплопроводности электронов, согласно [44], равен

$$\chi_e = \frac{2,4}{1 + \frac{v_{ei}}{\sqrt{2}(v_{ei} + v_{ea})}} \cdot \frac{k^2 n_e T_e}{m_e (v_{ei} + v_{ea})},$$

где  $v_{ei}$  и  $v_{ea}$  — частоты столкновений «электрон–ион» и «электрон–атом»,  $T_e$  — температура электронов,  $n_e$  — концентрация электронов,  $m_e$  — масса электрона.

Теплопроводность тяжелых частиц получим по правилу смеси:

$$\chi_\alpha = k \sum_{\alpha=i,a} n_\alpha v_\alpha \lambda_\alpha,$$

где средняя длина свободного пробега частиц сорта  $\alpha$ :

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{\sum_j n_j 2\sqrt{\frac{m_{\alpha j}}{m_r}} Q_{\alpha j}},$$

средняя арифметическая скорость частиц сорта  $\alpha$  —  $v_\alpha = \sqrt{\frac{8kT_i}{m_\alpha}}$ ,  $Q_{ij}$  — сечения столкновений [55–57].

Предполагается, что температуры атомов и ионов в плазме примерно равны:  $T_i \approx T_a$ . Поскольку в неизотермической плазме

$\frac{\chi_e}{\chi_i} = \frac{v_e}{v_i} = \sqrt{\frac{T_e m_i}{T_i m_e}} \gg 1$ , теплопроводность будет преимущественно определяться электронами.

Удельная электропроводность плазмы за счет электронов:

$$\sigma_e = \frac{X_i}{2,62 \cdot 10^{11} \cdot Q_{ea} \cdot \sqrt{T_e}}.$$

Удельная электропроводность плазмы с учетом вклада ионов:

$$\sigma_i = \frac{X_i \cdot T^{3/2}}{65,8 \ln(\Lambda)},$$

кулоновский логарифм:

$$\ln(\Lambda) = \ln\left(\frac{1,24 \cdot 10^7 \cdot T^{3/2}}{\sqrt{n_e}}\right).$$

Согласно правилу смеси [44] удельная электропроводность плазмы в целом равна

$$\frac{1}{\sigma_p} = \frac{1}{\sigma_{ea}} + \frac{1}{\sigma_{ei}}.$$

В формулах электропроводности введена степень ионизации плазмы:

$$X_i = \frac{n_e}{n_i + n_a}.$$

Метод расщепления переменных позволил разделить решения уравнения теплопроводности по осевому и радиальному направлениям (2.8) и (2.19). Однако расчет теплового состояния катода в целом невозможен без информации о состоянии плазмы как мощном источнике тепловых потоков, о плотности тока, температуре электронов и концентрациях частиц. Эти данные получены в главе 1 в результате строгого решения системы Эйлера – Пуассона с учетом эмиссии электронов. В рассмотренных уравнениях в неявной форме присутствует еще несколько существенных параметров, для которых нет ни исходных данных, ни явных хотя бы полуэмпирических соотношений. Такие величины, как длина активной зоны в каналах катода и др., должны быть получены в процессе решения полной замкнутой системы уравнений состояния катода и плазмы. Коэффициенты сформулированных уравнений зависят от искомой температуры катода, кроме того, коэффициенты уравнения задаются разрывными функциями, так как взаимодействие с плазмой проис-

ходит только в активной зоне катода, а теплообмен рассматривается по всей длине каналов.

### 2.3. Электрообмен и тепловое состояние полого катода

Тепловое состояние катода в области привязки газового разряда к катоду существенно зависит от процессов электрообмена, прежде всего на поверхности катода, в прикатодном слое и внутри стержней и оболочки катода.

Рассмотрим прежде всего уравнение неразрывности тока в металлической части катода. Для стационарного случая исходное уравнение неразрывности тока в цилиндрической системе координат с учетом азимутальной симметрии имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot j_r) + \frac{\partial}{\partial z} (j_z) = 0. \quad (2.21)$$

Для отдельного стержня будем использовать среднюю продольную плотность тока, пренебрегая изменением по радиусу отдельного стержня. Применим теорему Остроградского – Гаусса к элементарному объему стержня:

$$\frac{d}{dz} (S_M(z) \cdot j_z) = 2\pi r_k \cdot j_r.$$

В первом приближении будем пренебрегать изменением площади поперечного сечения стержня вследствие эрозии. Тогда интегрируем по длине стержня и получаем выражение для плотности тока в стержне при условии, что на закрепленном конце  $j_{ez}(0) = 0$ :

$$j_M(z) - j_M(0) = \frac{1}{S_M} \int_0^z j_r dz.$$

С учетом количества стержней набивки получаем

$$j_M S_M = \int_0^z j_r Z_{кр} dz + I_{MT}, \quad (2.22)$$

где  $j_r$  — фактическая плотность тока на поверхности элемента стержня,  $I_{\text{MT}}$  — возможный ток привязки разряда на торцевой части катода,  $Z_{\text{кр}}$  — суммарный периметр элементов, смачиваемых плазмой, введенный ранее. При интегрировании по длине стержня от  $z = 0$  до  $z = L_k$  получаем силу тока разряда  $I$ :

$$\int_0^{L_k} j_r Z_{\text{кр}} dz + I_{\text{MT}} = I. \quad (2.23)$$

Электрообмен определяется плотностями тока термоэмиссии электронов из металла  $j_{e\text{э}}(T, W_{\text{к}}, \dots)$ , вторичной электронной эмиссии, вызванной бомбардировкой ионами ( $j_{i\text{э}}$ ) и метастабильными атомами ( $j_{\text{эм}}$ ), так называемым обратным током  $j_{e\text{обр}}$  и потоками ионов из прикатодного слоя —  $j_{i\text{к}}$ . Кроме того, возможен вклад в электронный ток на поверхности катода за счет фотоэффекта —  $j_{\text{в}}$ . Возможна также вторичная эмиссия электронов при бомбардировке нейтральными атомами, однако ввиду низких энергий атомов в прикатодной области этим фактором можно пренебречь.

Для полых катодов в дуговом режиме определяющей является термоэмиссия, обусловленная высокими температурами в активной зоне катода. Для термоэмиссии электронов практически все авторы используют формулу Ричардсона – Дешмана с поправкой Шоттки (например, [48–50]):

$$j_{e\text{к}} \approx j_{\text{э}} = AT^2 \exp\left\{-\frac{e \cdot \varphi_{\text{в эфф}}}{kT}\right\}, \quad (2.24)$$

где  $A$  — постоянная Ричардсона,  $\varphi_{\text{в эфф}} = \varphi_{\text{в}} - \text{Sh} \cdot \sqrt{e \cdot E_{\text{к}}}$  — потенциал выхода электрона из металла стержня с учетом эффекта Шоттки,  $\text{Sh}$  — число Шоттки,  $E_{\text{к}}$  — напряженность электрического поля на поверхности стержня.

Величина напряженности поля находится путем решения системы Эйлера – Пуассона (см. главу 1).

Согласно методике определения тока вторичных электронов [51], возникающих по различным причинам, суммарный электронный ток

вторичной эмиссии принято выражать через суммарный коэффициент вторичной эмиссии  $\gamma$  и плотность ионного тока  $j_{ik}$ :

$$j_{эi} + j_{eэ} + j_v = \gamma \cdot j_{ik},$$

где  $\gamma = \gamma_i + \gamma_m + \gamma_v$ , если  $\gamma_i = \gamma_i(W_i)$  — коэффициент вторичной эмиссии при бомбардировке ионами с энергией  $W_i$ ,  $\gamma_m = f_m m \cdot N_m$  — коэффициент вторичной эмиссии при бомбардировке метастабильными атомами ( $f_m$  — геометрический фактор,  $m$  — число вторичных электронов на один метастабильный атом,  $N_m$  — число метастабильных атомов на ион),  $\gamma_v = f_p P \cdot N_v$  — коэффициент фотоэмиссии ( $f_p$  — геометрический фактор,  $P$  — выход фотоэлектронов в электронах на квант,  $N_v$  — число образующихся квантов на один ион).

Таким образом, плотность электрического тока на катоде может быть представлена в виде

$$j_r = j_{eэ}(T, E_k, \dots) - j_{e \text{ обр}} + j_{ik} + \gamma \cdot j_{ik}.$$

Если использовать отношение плотности электронного тока на поверхности катода к ионной плотности тока  $\beta_k = j_{ek} / j_{ik}$ , то плотность тока на поверхность стержня запишется как

$$j_r = (j_{eэ} - j_{e \text{ обр}}) \frac{1 - \beta_k}{1 - \gamma \beta_k}. \quad (2.25)$$

Таким образом, соотношение (2.22), с учетом выражения для радиальной плотности тока (2.25) и с граничными условиями (2.23), представляет собой уравнение радиального электрообмена плазмы с катодом.

Следует учитывать, что скорость заряженных частиц в столкновительных частично ионизованных газах определяется не только электрическим полем, но также и градиентами параметров плазмы. Так, скорость диффузии и подвижности электронов в плазме с учетом градиента электронного давления можно записать в виде [153]

$$\mathbf{v}_e = -\mu_e \left( \mathbf{E} + \frac{\nabla P_e}{e \cdot n_e} \right),$$

где  $P_e = n_e \cdot k \cdot T_e$  — давление электронного газа,  $\mu_e \approx \frac{e}{m_e \cdot \bar{v}_{e\alpha}}$  — коэффициент подвижности электронов,  $\bar{v}_{e\alpha}$  — средняя частота столкновений электронов со всеми тяжелыми частицами с передачей импульса ( $\alpha = i, a$ ).

Следует учитывать, что скорость заряженных частиц в столкновительных частично ионизованных газах определяется не только электрическим полем, но также и градиентами параметров плазмы. Выразим скорость электронов через градиент электронного давления с учетом взаимосвязи подвижности  $\mu_e$  и коэффициента диффузии  $D_e$  (соотношение Эйнштейна):

$$\frac{D_e}{\mu_e} = \frac{k \cdot T_e}{e},$$

$$\mathbf{v}_{edif} = \frac{\mathbf{j}_e}{en_e} = \frac{1}{en_e} (-eD_e \nabla n_e) = -D_e \frac{\nabla n_e}{n_e} = -D_e \frac{\nabla P_e}{P_e} = -\frac{\mu_e k T}{e} \frac{\nabla P_e}{P_e} = -\mu_e \frac{\nabla P_e}{en_e}.$$

Тогда суммарная скорость с учетом подвижности электронов во внешнем поле следующая:

$$\mathbf{v}_e = -\mu_e \left( \mathbf{E} + \frac{\nabla P_e}{e \cdot n_e} \right),$$

Выражение для скорости электронов часто записывается в более общем виде с учетом конвекции:

$$\mathbf{v}_e = -\mu_e \mathbf{E} - D_e \frac{\nabla P_e}{P_e} + \mathbf{v}_{e\text{конв}},$$

где  $D_e$  — коэффициент диффузии электронов,  $\mathbf{v}_{e\text{конв}}$  — скорость конвекции электронов.

Аналогично: скорость диффузии и подвижности ионов в слабо ионизованном газе при приблизительно однородном полном давлении может быть записана следующим образом:

$$\mathbf{v}_i = \mu_i \mathbf{E} - D_i \cdot \frac{\nabla P_i}{P_i},$$

и с учетом конвекции

$$\mathbf{v}_i = \mu_i \left( \mathbf{E} - \frac{\nabla P_i}{e \cdot n_i} \right) + \mathbf{v}_{i \text{ конв}},$$

где  $P_i = n_i \cdot k \cdot T$  — давление ионной компоненты,  $T$  — температура тяжелых частиц,  $\mu_i \approx \frac{e}{m_i \cdot \bar{v}_{in}}$  — коэффициент подвижности ионов,  $\bar{v}_{in}$  — средняя частота столкновений ионов с нейтральными атомами,  $\mathbf{v}_{i \text{ конв}}$  — скорость направленного движения ионов (скорость конвекции).

Коэффициенты диффузии и подвижности ионов также удовлетворяют формуле Эйнштейна:

$$\frac{D_i}{\mu_i} = \frac{k \cdot T}{e}.$$

Соотношения для скорости диффузии частиц следуют из законов сохранения для сплошной среды, но также могут быть строго выведены в рамках кинетической теории.

Рассмотрим газ в стационарном состоянии на границе с твердой поверхностью, когда ток к поверхности равен нулю, а внешнее электрическое поле отсутствует. Если поверхность является неэмиттирующей и каталитической, то она будет играть роль стока для заряженных частиц. При этом в слое газа, граничащем с поверхностью, устанавливается градиент концентраций электронов и ионов. Наличие градиента вызовет появление диффузионных потоков ионов и электронов к поверхности. И если полный ток из газа на поверхность равен нулю, то нормальные компоненты диффузионных скоростей электронов и ионов должны быть одинаковы в случае однозарядных ионов. Однако, поскольку коэффициент подвижности электронов существенно выше коэффициента подвижности ионов ( $\mu_e \gg \mu_i$ ), возникает электрическое поле объемного заряда, которое препятствует диффузии электронов. Точное значение напряженности электрического поля в пристеночной области получено в главе 1 в результате решения системы Эйлера – Пуассона с учетом термоэмиссии. В данном приближенном расчете будем предполагать, что:

$$\mathbf{E} = \frac{\nabla P_e}{en_e}.$$

Можно получить более точное выражение, если умножить диффузионную скорость каждой компоненты на подвижность другой компоненты и сложить полученные выражения:

$$\left. \begin{aligned} \mu_i \cdot \mathbf{v}_e &= -\mu_i \mu_e \mathbf{E} - \mu_i \mu_e \frac{\nabla P_e}{en_e} \\ \mu_e \cdot \mathbf{v}_i &= \mu_e \mu_i \mathbf{E} - \mu_e \mu_i \frac{\nabla P_i}{en_i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu_i \cdot \mathbf{v}_e + \mu_e \cdot \mathbf{v}_i = -\mu_e \mu_i \left( \frac{\nabla P_e}{e \cdot n_e} + \frac{\nabla P_i}{e \cdot n_i} \right).$$

Тогда в случае амбиполярной диффузии, при  $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_i$ , получаем соотношение

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_i \approx -\frac{\mu_e \mu_i}{\mu_e + \mu_i} \left( \frac{\nabla P_e}{e \cdot n_e} + \frac{\nabla P_i}{e \cdot n_i} \right).$$

С другой стороны, через диффузионные скорости компонент теперь можно выразить напряженность электрического поля:

$$\left. \begin{aligned} \mu_i \cdot \mathbf{v}_e &= -\mu_i \mu_e \mathbf{E} - \mu_i \mu_e \frac{\nabla P_e}{en_e} \\ \mu_e \cdot \mathbf{v}_i &= \mu_e \mu_i \mathbf{E} - \mu_e \mu_i \frac{\nabla P_i}{en_i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu_i \mathbf{E} - \mu_i \frac{\nabla P_i}{en_i} = -\mu_e \mathbf{E} - \mu_e \frac{\nabla P_e}{en_e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mu_i + \mu_e) \mathbf{E} = -\mu_e \frac{\nabla P_e}{en_e} + \mu_i \frac{\nabla P_i}{en_i} \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\mu_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla P_e}{en_e} + \frac{\mu_i}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla P_i}{en_i}.$$

В области квазинейтральной плазмы, лежащей за слоем объемного заряда,  $n_e = n_i$ . Результирующие скорости компонент можно записывать в виде [153]

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_i = -D_{ad} \frac{\nabla(P_e + P_i)}{2P_i},$$

где  $D_{ad} = \frac{2kT}{e} \frac{\mu_e \mu_i}{\mu_e + \mu_i} \approx 2D_i$  — коэффициент амбиполярной диффузии при условии изотермичности плазмы.

В канале полого катода на границе перехода течения нейтрального газа в плазму имеет место интенсивная амбиполярная диффузия, т. е. продольные плотности токов одинаковы по модулю  $\mathbf{j}_{ez} = -\mathbf{j}_{iz}$ , поскольку

одинаковы по модулю проекции на ось  $Z$  скоростей, связанных с диффузией и подвижностью,  $v_{ez} = v_{iz}$ . Однако в условиях неизотермичной плазмы в полем катоде коэффициент амбиполярной диффузии с учетом отрыва температуры электронов от температуры тяжелых частиц имеет более сложное выражение [44, 52]:

$$D_{ad} = D_0 \frac{\sqrt{\pi} \cdot kT_i \cdot \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)}{M_i \cdot \langle u_i \rangle \cdot Q_{ia} \cdot (n_i + n_a)}, \quad (2.26)$$

где  $D_0$  — числовой множитель,  $Q_{ia}$  — эффективное сечение столкновения «ион-атом»,  $n_i$  и  $n_a$  — концентрации ионов и атомов,  $\langle u_i \rangle = \sqrt{\frac{8k T_i}{\pi \cdot m_i}}$  — средняя арифметическая скорость.

Одной из определяющих величин электрообмена плазмы с катодом является плотность ионного тока на стержень  $j_{ik}$  или параметр  $\beta_k$ , которые связаны с физикой процессов в прикатодной области. Рассмотрим модель ионного тока на стержень катода при условии, что газ достаточно разреженный, и тогда длина свободного пробега частиц превышает размер слоя объемного заряда у стенки полого катода.

Плотность ионного тока в ионизационном слое прикатодной области получена в главе 1 монографии.

Если из плазмы по радиусу на границу пристеночного слоя падает связанный с диффузией и подвижностью поток ионов  $j_{id}$ , который для ламинарного течения плазмы можно записать как [19]

$$j_{id} = e \cdot \frac{D_{ad}}{2r_{эфф}} \cdot \text{Nu}_D \cdot (\langle n_i \rangle - n_{ip}),$$

то, поскольку в слое объемного заряда основным процессом при переносе ионов на стенку являются диффузионные процессы и процессы подвижности, можно приближенно принять  $j_{id} \approx j_{i\lambda} = j_{ik}$ . В формуле использованы следующие обозначения:  $D_{ad}$  — коэффициент амбиполярной диффузии ионов,  $\text{Nu}_D$  — диффузионное число Нуссельта,  $\langle n_i \rangle$  — средняя концентрация ионов в плазме,  $n_{ip}$  — концентрация ионов на границе плазмы и пристеночного слоя. Таким образом [19],

$$J_{ik} = J_{i\lambda} = \xi_{\lambda} \cdot e \cdot \frac{\frac{D_{ad}}{2r_k} \cdot \text{Nu}_D \cdot \langle n_i \rangle}{\xi_{\lambda} \cdot \langle u_i \rangle + \frac{D_{ad}}{2r_k} \cdot \text{Nu}_D} \cdot \langle u_i \rangle, \quad (2.27)$$

где коэффициент амбиполярной диффузии имеет вид (2.26),

$$\xi_r = 0,38 \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{\frac{1}{2}} [52].$$

В качестве исходных уравнений для пристеночного слоя, прилегающего к поверхности катода, были применены следующие законы:

- уравнение неразрывности для ионов:

$$\text{div}(\mathbf{j}_{ik}) = \omega_e; \quad (2.28)$$

- закон сохранения энергии электронов:

$$\text{div}(\mathbf{q}_e) = K_e + j_{ek} \cdot E; \quad (2.29)$$

- уравнение неразрывности тока на границе плазмы:

$$J_r = J_{ik} + J_{ek} = J_{ip} + J_{ep}, \quad (2.30)$$

где  $K_e$  — энергетический эквивалент потерь энергии электронами при неупругих столкновениях электронов с атомами,  $\omega_e$  — источник электронов.

Запишем приближенное условие подобия теплового потока, переносимого электронами, и плотности электронного тока:

$$\mathbf{q}_e \cong -C \cdot \frac{k}{e} T_e \mathbf{j}_e, \quad (2.31)$$

где  $C$  — коэффициент пропорциональности в случае, если не рассматривался обратный электронный ток.

## ГЛАВА 3

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЭРОЗИИ В МНОГОКАНАЛЬНОМ ПОЛОМ КАТОДЕ

### Введение

Катодная эрозия является основной причиной, сокращающей срок службы катода и всего устройства в целом. Именно эрозия электродов, как ограничивающий фактор, стала основным толчком к возобновлению интереса к моделированию полых катодов в середине 2000-х годов. Механизмы катодной эрозии широко изучались как на разрядах со стержневыми катодами, так и на разрядах с полыми катодами. Серии экспериментов показали, что скорость эрозии катода связана с компонентами рабочего и примесного газа, свойствами и стабильностью дуги, локальной температурой и механизмом эмиссии электронов. Все эти исследования в конечном итоге привели к пониманию особенностей эрозии полых катодов.

Первые результаты по эрозии полых катодов появились в 70-х годах прошлого века. В работе [49] приводятся результаты экспериментального исследования зависимости скорости эрозии от температуры катода и расхода плазмообразующего газа, но не сформулировано никаких теоретических обоснований явления. В работе [58] приведены оценки полученной в эксперименте скорости уноса массы и удельной эрозии многополостного катода, на основании которых авторы пришли к выводу, что преобладает процесс распыления катода ионами плазмообразующего газа. Однако рассчитанные по результатам эксперимента коэффициенты распыления не согласовывались с известными на тот момент экспериментальными данными.

В работах [59, 60] по результатам экспериментов был сделан вывод, что скорость эрозии определяется термическим испарением, при

этом испарившиеся с поверхности канала атомы металла в условиях работы полого катода могут распределиться по всему объему полости, а течение плазмы будет выносить их за пределы ПК.

Однако в режимах с малым расходом плазмообразующего газа [49, 58] или с малой величиной разрядного тока [61], а также в форсированных режимах при больших токах [62] измеряемая эрозия превышала величину эрозии, вызываемой испарением. В работе [61] обнаружена повышенная, по сравнению с испарением, эрозия полого катода, выполненного из пористого вольфрама и неметаллических материалов (в том числе гексаборида лантана). Повышенная эрозия наблюдалась при токах разряда в диапазоне 1–5 А, когда двигатель работал в области вблизи перехода от тлеющего разряда к дуговому. Авторы объяснили повышенную эрозию распылением в результате ионной бомбардировки. Причем, по мнению авторов, распыление должно быть усилено влиянием повышенной температуры катода и может наблюдаться при энергиях ионов ниже пороговой. К сожалению, конкретных данных о величине необходимых коэффициентов распыления авторы не привели. В работе [62] изучались характеристики полых катодов в форсированных режимах с большими токами (до 1 000 А). Авторы установили, что скорость эрозии вольфрамового катода с прокачкой аргона может почти в 100 раз превышать скорость испарения. При этом напряжение разряда изменялось всего лишь от 40 до 70 В. Приведенные авторами оценки коэффициентов распыления согласуются с известными данными для пары веществ «аргон–вольфрам», т. е. в эксперименте наблюдался режим работы полого катода с преимущественным распылением.

В работах [63, 64] получены данные о влиянии тока дуги и диаметра полости на эрозию одноканального катода из гексаборида лантана ( $\text{LaB}_6$ ) при наличии магнитного поля с индукцией 20–50 мкТл. Показано, что при заданном давлении газа и силе тока дуги существует оптимальная величина диаметра полости катода, при котором эрозия минимальна. В этом случае температура электронов и катодное напряжение также будут минимальны. В условиях работы с оптимальным диаметром установлено, что по мере увеличения диаметра полости за счет эрозии наблюдается перемещение активной зоны катода вглубь полости. Металлографические исследования выявили характерные монокристаллические зерна  $\text{LaB}_6$  в активной зоне.

В работе [65] исследовалась локальная эрозия полого катода, работающего в среде неона и ксенона. Авторами было показано, что эрозия с внешней поверхности может превышать эрозию из активной зоны полого катода. При этом распределение локальной эрозии по наружной поверхности катода идентично распределению температуры катода, тогда как распределение локальной эрозии по активной внутренней поверхности катода существенно отличается от распределения температуры. Распределение температуры имеет немонотонный характер с выраженным максимумом на расстоянии от 1 до 4 диаметров полости от свободного торца катода, а распределение локальной эрозии внутренней поверхности канала монотонно спадает по мере удаления от торцевого среза. Данные по эрозии активной внутренней поверхности примерно одинаковы для неона и ксенона, а вот для наружной поверхности катода эрозия при прокачке ксенона существенно выше, чем при прокачке неона. Распределение локальной эрозии по внутренней поверхности активной зоны катода, полученное в этой работе, свидетельствует о значительном влиянии процесса рециклинга. Малая эрозия канала обусловлена тем, что поток выбитых атомов с некоторого элемента поверхности почти полностью компенсируется переносом и прилипанием атомов из соседних зон. Вблизи выходного сечения баланс потоков нарушается из-за наличия краевого эффекта и выноса атомов в межэлектродный промежуток. В работе [66] показано, что сильноточный катод должен быть многополостным, термоэмиссионным, с равномерным распределением рабочего вещества по полостям для обеспечения достаточного ресурса его работы. При этом полости в идеале должны иметь округлую или щелевую конфигурацию. Также для обеспечения хорошего ресурса сам катод должен быть достаточно массивным.

В последние годы широкое применение в технике получили катоды с диафрагмой и внешним защитным экраном [67–72], соответственно, и процессы эрозии в таких катодах рассмотрены достаточно подробно. В работе [67] приведены результаты экспериментальных исследований загрязнения поверхности катода и его эрозии во вращающейся в магнитном поле дуге, но без теоретических обоснований. В работе [68] показаны результаты спектроскопических измерений температуры электронов и концентрации электронов в катодной области. Рассматривался режим возникновения катодных пятен для торированного вольфрама. Основ-

ным эрозионным механизмом признан выброс капель жидкого металла из катодного пятна. При более низких температурах катода обнаружен неоднородный характер эрозии вследствие ионной бомбардировки.

В работах [70–72] рассматривается эрозия различных поверхностей полого катода со вставкой из гексаборида лантана, диафрагмой и внешней защитной оболочкой на основании разработанной двумерной модели процессов в полых катодах такого типа. Обосновано, что процесс распыления, вызванный ионами ксенона, был основным эрозионным механизмом внутри катодного канала. Авторы представили полуэмпирические формулы коэффициента распыления и формулу для расчета глубины радиальной эрозии внутри полого катода. Но результат моделирования для ионов низких энергий значительно отличался от эксперимента. Исследовалось влияние плазменных колебаний на эрозию внешней оболочки катода («keerer»). Показано, что высокая скорость эрозии должна объясняться генерацией аномально высокоэнергетических ионов, вызванной ионно-акустической неустойчивостью плазмы. Представлен обширный материал сравнения результатов моделирования с экспериментальными данными.

Чаще всего теоретические исследования, посвященные модели эрозии полых катодов, рассматривают протекание тока в полости катода при известном распределении электростатического поля и известных характеристиках плазмы в полости. Такая постановка задачи правомерна, поскольку малая концентрация паров материала катода позволяет не учитывать их влияние на процессы протекания тока, формирование электрического поля и плазмы в полости. Такая постановка требует предварительного определения параметров электрического поля и плазмы для конкретной конструкции.

В работе [73] численно определялась скорость эрозии материала с плоской поверхности в незаряженную, неподвижную среду. Под скоростью эрозии авторы понимали скорость изменения массы, приходящейся на единицу площади рабочей поверхности. Считалось, что концентрация истекающих атомов  $n_a \ll n$ , где  $n$  — концентрация основного газа. В таком случае средняя длина свободного пробега атомов  $\lambda$  определяется концентрацией атомов основного газа, при этом примесь истекающих атомов не влияет на свойства основной среды. На расстоянии  $\ell$  от эмитирующей атомы плоскости задавалось условие  $n_a = 0$ , что эквивалентно

наличию в этом месте поглощающего коллектора или физически может быть связано с газодинамическим выносом атомов из этой области. Слой  $\ell$  разбивался на большое число  $N$  подслоев, таких, что  $\Delta x = \ell/N \ll \lambda$ . Считалось, что атомы взаимодействуют с газом лишь в узлах  $x_j = j \cdot \Delta x$ . Скорость эрозии определяется разницей прямого потока атомов от рабочей поверхности  $\Gamma_j$  ( $j$  — номер слоя, в котором рассматриваются потоки) и обратного потока к плоскости  $\Gamma_j^-$  атомов, рассеявшихся в газе. Тогда задача сводится к системе  $2N$  алгебраических уравнений для потоков  $\Gamma$  и  $\Gamma^-$  и определению скорости эрозии как  $\Gamma_\Sigma = \Gamma - \Gamma^-$ . Можно рассмотреть данную задачу в диффузионном приближении с учетом того, что

$$\Gamma_\Sigma = -D \frac{dn_a}{dx} = -\frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \frac{dn_a}{dx},$$

где  $D$  — коэффициент диффузии,  $\langle v \rangle$  — средняя скорость покидающих поверхность атомов.

Будем предполагать, что в стационарном состоянии

$$\frac{dn_{ap}}{dx} \cong \frac{n_{ap}}{\ell},$$

где  $n_{ap}$  — концентрация атомов вблизи эмитирующей их поверхности. Тогда общий поток атомов от поверхности, в предположении, что они имеют максвелловское распределение по скоростям, имеет вид

$$\Gamma_p = \frac{n_{ap} \langle v \rangle}{4} \ell$$

и отношение

$$\frac{\Gamma_p}{\Gamma_\Sigma} = \frac{\frac{n_{ap} \langle v \rangle}{4}}{\frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \frac{n_{ap}}{\ell}} = \frac{3}{4} \frac{\ell}{\lambda}.$$

К сожалению, метод позволяет получить лишь приблизительные оценки эрозии и очень далек от реальных условий поставленной задачи.

В работе [74] найдена скорость эрозии материала, атомы которого истекают с плоской поверхности в полупространство, заполненное плаз-

мой. Задача также решается в одномерном приближении, и концентрация эмитируемых атомов расценивается как малая добавка, не влияющая ни на длину пробега атомов, ни на подвижность, ни на коэффициент диффузии. Не возмущаются эмитированными атомами и параметры самого разряда и параметры плазмы. Авторы считали, что покидающие рабочую поверхность атомы полностью ионизируются в тонком слое толщиной  $l_0$ , после чего вне этого слоя движение образовавшихся ионов происходит под действием диффузии и подвижности. Также учитывались влияние рассеивающихся на ионах электронов и гидродинамическое движение плазмы. Распределение концентрации ионов вне слоя толщиной  $l$  подчиняется уравнению [74]

$$\frac{d}{dx} \left( -D \frac{dn}{dx} - \mu n E + \mu n \frac{F}{e} + n v_{\text{III}} \right) = 0,$$

где  $F$  — сила электрон-ионного трения, ось  $x$  направлена по нормали к рабочей поверхности. На самой рабочей поверхности должно выполняться условие  $\Gamma_{\Sigma} = \Gamma_0 - \Gamma_0^-$ , однако, учитывая то обстоятельство, что обычно  $\Gamma_{\Sigma} < \Gamma_0$ , в работе [74] для рабочей поверхности принималось соотношение

$$n_{0p} = \frac{4\Gamma_0}{\langle v \rangle}.$$

Второе граничное условие выбиралось в виде  $n_a(\ell) = 0$ , такое же, как в работе [73], где предполагалось наличие поглощающего коллектора. Результатом решения задачи является функция

$$\Gamma_{\Sigma} = \frac{D \cdot n_{0p}}{\int_0^{\ell} \exp \left[ \frac{V_{\ominus}(\xi)}{T_i} \right] d\xi},$$

где введено обозначение эффективного потенциала:

$$V_{\ominus} = \int_0^x E_{\ominus}(\xi) d\xi = V(x) - \int_0^x \left( \frac{F}{e} - \frac{v_{\text{III}}}{\mu} \right) dx,$$

а также учтено соотношение Эйнштейна:  $\mu = \frac{e}{T_i} D$ . В случае когда электрические силы компенсируются вне слоя толщиной  $l$  электрон-ионным трением, отношение прямого и обратного потоков примет вид [74]

$$\frac{\Gamma_{\Sigma}}{\Gamma_0} = \frac{4D}{\langle v \rangle} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{\Delta\varphi}{T_i}\right)}{\ell_i + \sqrt{\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\mu \cdot T_i}{\left(\frac{\partial v_{III}}{\partial x}\right)}},$$

где  $\Delta\varphi$  — падение потенциала в слое толщиной  $\ell_i$ . Экспоненциальный множитель выражает влияние прикатодного падения потенциала, воздействующего на ионы.

Расчет потоков  $\frac{\Gamma_{\Sigma}}{\Gamma_0}$  в работе [74] был выполнен для аргонной плазмы. Результаты моделирования показали существенное снижение скорости эрозии по сравнению с результатами [73] за счет влияния ионизации эмитированных атомов и возврата ионов на поверхность под действием электрического поля. Решение задачи в одномерном случае для полого катода имеет ряд существенных недостатков, связанных прежде всего с неопределенностью выбора размера  $\ell$ , а также с влиянием размеров полости катода на параметры разрядной плазмы.

В работе [75] был предложен метод расчета скорости эрозии с учетом двумерности задачи. Для этого испускающая атомы поверхность представлялась цилиндром радиусом  $R$ . С единичной площадки рабочей поверхности с центром в точке  $(z_0, R)$  вылетает  $dn_s(z_0, R)$  атомов в единицу времени. Атомы вылетают по нормали к поверхности и летят в этом направлении с тепловой скоростью  $v$  до тех пор, пока не ионизируются. Образовавшиеся ионы за счет диффузии в плазмообразующем газе, а также за счет подвижности возвращаются на рабочую поверхность. Кроме того, предполагается, что ионы сносятся плазмообразующей средой вдоль оси цилиндра (ось  $OZ$ ) со скоростью  $v_z$ , постоянной по всему объему полости катода. Как и в рассмотренных ранее моделях, концентрация эмитированных атомов считается малой добавкой к плазмообра-

зующему газу, не возмущающей параметров разряда и плазмы. Принятая модель означает, что в каждой точке поверхности полого катода действует источник ионов, интенсивность которого задается выражением

$$dn(z, r) = dn_s(z, R) \cdot \frac{v_i}{v_a} \cdot \exp\left(-\frac{v_i(R-r)}{v_a}\right),$$

где  $v_i$  — частота ионизации вылетающих с поверхности атомов,  $r$  — радиальная координата.

Подобный источник ионов в среде, движущейся со скоростью  $v_z$  относительно этого источника, при учете радиальной скорости ионов  $v_r$  в электрическом поле катода описывается функцией распределения, полученной в работе [76]. После интегрирования по времени и радиальной координате получено выражение для количества ионов, вернувшихся на стенку в точке  $(z, R)$ :

$$n(z, R) = \int_0^R \frac{v_{\text{др}} \cdot R \cdot v_i}{2v_a} \cdot \frac{dn_s(z, R) \cdot \exp\left[-\frac{(R-r) \cdot v_i}{v_a}\right]}{D\sqrt{(z-z_0)^2 + (R-r)^2}} \cdot \exp\left\{\frac{(R-r)v_{\text{др}} - (z-z_0)v_a}{2D}\right\} dr.$$

С учетом того, что длина ионизации  $\ell_i \gg \lambda$ , авторы вводят характерную длину рециклинга  $\ell_p = \frac{v}{v_r} \ell_i$ , причем  $\ell_p = z_m - z_0$ , где  $z_m$  соответствует максимуму функции. Полученные выражения позволяют определить участки поверхности катода с наибольшей эрозией:

$$\Gamma_{\Sigma} = n_s(z_0, R) - n_s(z_0 - \ell_p, R).$$

Однако модель имеет ряд существенных недостатков. Считается, что атомы, покинувшие рабочую поверхность, не взаимодействуют с плазмообразующей средой и двигаются строго по нормали к поверхности, что будет обосновано только при  $\ell_i \ll \lambda$ , но в этом случае нельзя говорить ни о диффузии, ни о подвижности ионов. Кроме того, при получении функции распределения ионов авторами работы применялась функция Грина, полученная в работе [131] для бесконечного пространства. Следовательно, граничные условия модели не соответствуют функции распределения и приведенное решение не может качественно и ко-

личественно учитывать влияние геометрии канала катода на эрозию поверхности.

В работе [15] на основании модели плазменных процессов рассматривается модель эрозии полого катода, однако автор предполагает, что испарение является основным механизмом разрушения поверхности, но не приводит экспериментальных подтверждений своего мнения. Также автор рассматривает процедуру зажигания разряда как процесс, вызывающий наиболее сильную эрозию. Этой же проблеме эрозии в процессе поджига разряда посвящена работа [132].

В работе [133] представлена физическая и численная модели процесса катодной эрозии в дуговом разряде аргона с полым катодом при различных рабочих условиях: варьировались расход газа, разрядный ток, внутренний радиус катода и приложенное магнитное поле. Но модель рассматривает только эрозию в форме ионного распыления, другие типы эрозионных процессов не учитываются. Исследована зависимость положения точки максимальной эрозии от диаметра канала и от приложенного магнитного поля. Авторы считают, что модель может быть применена для качественной оценки эрозии.

Из проведенного анализа теоретических и экспериментальных работ по эрозии полых катодов вытекает, что общепринятого мнения о механизмах эрозии так и не сложилось. Не сформулирована полная физико-математическая модель процесса эрозии, поскольку катодная эрозия является достаточно сложным явлением. Процесс эрозии в полом катоде обусловлен как тепловым состоянием стенок катода, так и состоянием прикатодного слоя (величиной прикатодного скачка потенциала, плотностью ионного тока на поверхности катода эмиссионными процессами и т. д.), а также взаимодействием плазмы со стенкой. Поэтому, как это отмечено у многих цитируемых выше авторов, проблема прогнозирования ресурса полых катодов может быть решена лишь путем создания достаточно полной модели физических процессов в полом катоде совместно с моделью процессов эрозии катодной стенки. Построение такой модели является актуальной задачей, так как ресурс полого катода значительно превышает ресурс стержневых и других типов катодов, рассчитанных на такие же плотности тока, что делает этот тип катодов перспективным для длительного использования в современных космических миссиях.

### 3.1. Физическая модель эрозии в полых катодах

Рассматривается модель процессов эрозии для набивного полого катода (цилиндрическая оболочка, заполненная металлическими стержнями (рис. 1.1)). Словосочетание «поверхность катода» применяется и для поверхности стержней набивки, и для внешней оболочки катода. Очевидно, что параметры индивидуального катода зависят от радиального положения стержня внутри набивки. Моделирование процессов взаимодействия плазмы с поверхностью катодных каналов может быть выполнено только при условии предварительного получения информации о состоянии плазмы и катодных стенок. Так как параметры состояния полого катода и плазмы существенно изменяются вдоль канала, то и процессы взаимодействия плазмы с поверхностью также изменяются вдоль оси каналов катода, что приводит к изменению параметров плазмы в активной зоне и прикатодной области.

Обычно в качестве величины, характеризующей скорость эрозии, используют удельную эрозию  $g$ , представляющую собой отношение эродированной массы катода  $\Delta m$  к прошедшему электрическому заряду  $q$ :

$$g = \frac{\Delta m}{q}.$$

В зависимости от того, какие именно значения уноса массы измеряются, можно использовать три вида удельной эрозии. Если рассматривается суммарный расход катодного материала из активной зоны и внешней поверхности катода, то вводится значение суммарной удельной эрозии  $g_{\Sigma}$ . Если учитывается только унос массы из активной зоны полого катода, то вводится интегральная удельная эрозия  $g_{\text{инт}}$ . Если же измеряется локальное изменение поверхности, то говорят о локальной удельной эрозии. Наибольший интерес (с точки зрения физики процессов и практического использования катодов) имеют величины интегральной и локальной эрозии. Следует отметить, что практически во всех экспериментах измеряется суммарная удельная эрозия и очень мало данных по локальной эрозии. Экспериментальные исследования выявили ряд особенностей эрозии сильноточных полых катодов [49, 60, 61, 65].

1) Эффект резкого возрастания скорости эрозии канала при уменьшении температуры катода, или при уменьшении расхода плазمو-

образующего газа, или при вынужденном охлаждении катода. Такая особенность имеет место и для многоканальных катодов.

2) Сопоставление результатов экспериментов с теоретической скоростью процесса чистого испарения показало, что наблюдаемая эрозия не может быть объяснена только процессом испарения. Кроме того, оценка коэффициентов распыления по экспериментальным данным полого катода показала, что они существенно больше, чем для обычных катодных мишеней.

3) Обнаружено, что функциональная зависимость удельной эрозии одноканального катода от расхода плазмообразующего газа при заданной силе тока имеет минимум. Причем эрозия сильно возрастает как с уменьшением расхода от оптимального значения, так и с его увеличением.

4) Для большинства полых катодов, работающих в режиме термоэмиссии, спектроскопические измерения показали, что концентрации ионов и атомов материала катода, т. е. примеси, в составе плазмы рабочего газа невелики.

Для получения подробной картины разрушения поверхности рассматриваются процессы распыления при бомбардировке ионами, испарения материала поверхности металла, а также возможный рециклинг (возврат) атомов и ионов металла на поверхность в другом месте канала. Какой из процессов становится преобладающим, зависит от геометрии, материала катода и параметров разряда. Сопоставление результатов экспериментов с теоретической скоростью процесса чистого испарения показало, что наблюдаемая эрозия не может быть объяснена только процессом испарения [58, 59].

Прежде всего следует отметить, что ионы инертных газов, которые чаще всего используются в качестве плазмообразующего газа, обладают максимальным распыляющим действием вследствие полностью заполненных  $p$ -оболочек атомов. Падающие на поверхность ионы газа отражаются в плазму в виде ионов, нейтральных и возбужденных атомов (см. рис. 3.1). Поверхностный слой металла может насыщаться нейтральными ионами (на 1 атом металла поверхности может приходиться 1–2 нейтральных иона), которые потом могут выбиваться падающими ионами. С другой стороны, часть ионов газа при нейтрализации превращается в быстрые атомы, которые при перемещении внутри металла смещают атомы кристаллической решетки, приводя к образованию ва-

кансий в узлах решетки и наличие атомов металла в промежутках между узлами. Часть таких смещенных атомов металла выходит на поверхность и эмитируется в виде атомов, ионов и возбужденных атомов, образуя примесь металла в плазме.

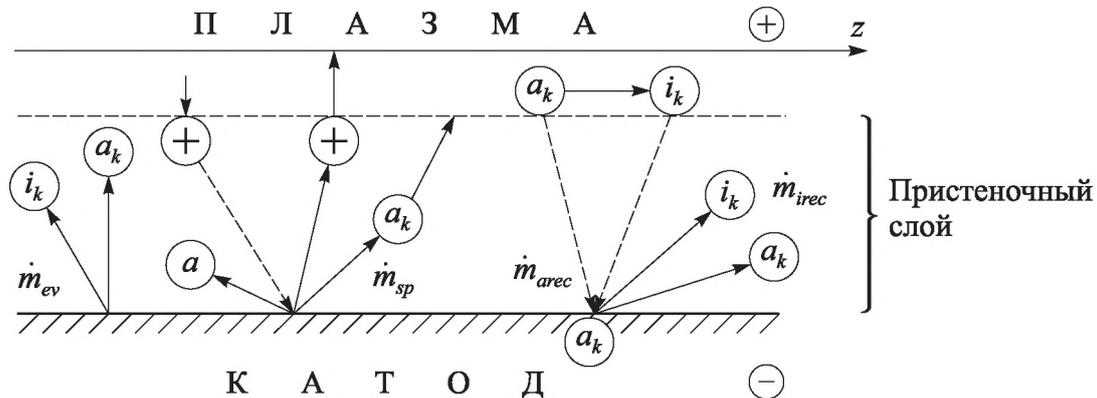


Рис. 3.1. Схема процессов взаимодействия плазмы с поверхностью катода

## 3.2. Математические и численные модели эрозии многоканального полого катода

### 3.2.1. Газодинамическая модель эрозии многоканального полого катода

Рассмотренные выше модели эрозии поверхности полого катода не могут обеспечить хорошей точности расчета скорости эрозии, поскольку учитывают очень небольшое количество факторов, обуславливающих эрозию, и содержат существенные упрощения процессов. В условиях, когда длина свободного пробега  $\lambda$  много меньше поперечных размеров канала катода, расчет скорости разрушения поверхности требует привлечения газодинамических моделей для описания процессов испарения материала катода, диффузии частиц в канале, ионизации их в объеме с возможностью последующей конденсации в другой области поверхности, а также их выноса из канала вместе с потоком основного плазмообразующего газа.

Сформулируем математическую модель эрозии в газодинамическом режиме с учетом следующих предположений:

- плазма в активной зоне полого катода имеет постоянные свойства;
- концентрации молекул  $n_{aэ}$  и ионов  $n_{iэ}$ , эмитированных с катода, малы по сравнению с концентрациями  $n_a$ ,  $n_i$ ,  $n_e$  в плазмообразующем газе. Поэтому эта малая добавка не влияет на те решения, которые были получены в гл. 1, п. 1.5.1, т. е. нам известны распределения самосогласованного потенциала  $\varphi(r)$  в пристеночной области с учетом термоэмиссии электронов; поля концентраций заряженных частиц плазмообразующего газа; плотности токов ионов и электронов на стенку; направленная скорость плазмы вдоль оси  $Z$  (т. е. скорость конвекции  $u_z$  и другие параметры).

Система уравнений для расчета  $n_{aэ}$  и  $n_{iэ}$  (модель Эйлера – Пуассона) имеет вид

$$\operatorname{div} \Gamma_a = -\omega_i n_{aэ}, \quad \Gamma_a = u_z n_{aэ} - D_a \nabla n_{aэ}, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \Gamma_i = -\omega_i n_{aэ}, \quad \Gamma_i = u_z n_{iэ} - \frac{D_i}{T_i} \nabla (n_{iэ} T_i) + \frac{D_i e n_{iэ}}{k T_i} \mathbf{E}, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} \Gamma_a + \operatorname{div} \Gamma_i = 0, \quad (3.3)$$

где  $\Gamma_a$  и  $\Gamma_i$  — плотности потоков атомов и ионов материала катода;  $D_a$  и  $D_i$  — коэффициенты диффузии атомов и ионов материала катода;  $u_z$  — скорость основного потока в полом катоде;  $\omega_i$  — частота ионизации атомов материала катода. При записи выражения (3.2) использована формула Эйнштейна для связи коэффициента подвижности  $\mu$  с коэффициентом диффузии  $D$

$$\mu = \frac{e}{kT} D.$$

Граничные условия уравнений (3.1), (3.2) на поверхности полого катода можно записать в виде:

$$\Gamma_{na} = \frac{D_a}{\lambda_a} (n_{aэ} - n_s), \quad n_s = \frac{\lambda_{aэ}}{D_a} \Gamma, \quad \Gamma_{ni} = \frac{D_i}{\lambda_{iэ}} n_{iэ}, \quad (3.4)$$

где  $\lambda_{aэ}$  и  $\lambda_{iэ}$  — длина свободного пробега атомов и ионов материала катода,  $n_{iэ}$ ,  $n_{aэ}$  — концентрация ионов и атомов материала катода,  $n_s$  —

концентрация насыщенных паров материала катода,  $\Gamma_{na}$  и  $\Gamma_{ni}$  — нормальные к поверхности компоненты потоков атомов и ионов. При этом величина  $\Gamma_a$  соответствует суммарному уносу частиц за счет испарения и ионного распыления.

В таком случае скорость эрозии поверхности равна

$$Y = m_a \Gamma_{\Sigma} = m_a \Gamma_0 - m_a \left( \frac{D_a \cdot n_a}{\lambda_{a\varepsilon}} + \frac{D_i n_i}{\lambda_{i\varepsilon}} \right), \quad (3.5)$$

где  $m_a$  — масса атома материала катода.

Первое слагаемое правой части (3.5) представляет собой скорость эрозии в вакуум, второе слагаемое описывает возврат частиц на поверхность в результате конденсации и рециклинга. Входящие в уравнения (3.1)–(3.5) величины  $\omega_i$ ,  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{E}$  являются заданными функциями координат.

Алгоритм численного решения уравнений (3.1), (3.2) подробно рассмотрен в главе 1. В первом приближении уравнение Пуассона (3.3) можно не решать, так как  $n_{i\varepsilon} \ll n_i$ , и поэтому можно воспользоваться значениями  $\mathbf{E}$  из главы 1. В этом случае скорость эрозии полого катода подсчитывается по формуле (3.5).

Ниже будет представлен еще один способ нахождения решения системы (3.1), (3.2) с граничным условием (3.4), который предложен М. В. Черкасовой.

Будем приближенно искать решение системы уравнений (3.1), (3.2) в виде ряда (см. приложение 5, п. П5.1)

$$n_a = n_{a0}(z) + \left( \frac{r}{r_k} \right)^2 n_{a2}(z),$$

$$n_i = n_{i0}(z) + \left( \frac{r}{r_k} \right)^2 n_{i2}(z),$$

где  $z$  — координата по оси канала,  $r_k$  — радиус канала.

Для скорости осевого потока  $u_z(r, z)$  предполагается, что имеет место установившееся распределение скоростей с эффектом проскальзывания:

$$u_z(r, z) = u_0(z) \left[ 1 + \frac{2\lambda}{r_k} - \left( \frac{r}{r_k} \right)^2 \right],$$

где  $\lambda$  — средняя длина пробега компонентов основного потока. Граничные условия (3.4) устанавливают взаимосвязь между величинами с индексами 0 и 2:

$$\begin{aligned} \Gamma_{na} &= -D_a \frac{\partial n_{a2}}{\partial r} \Big|_{r=r_k} = -\frac{2D_a}{r_k} n_{a2} = \frac{D_a}{\lambda_{a2}} (n_{a0} + n_{a2} - n_s), \\ \Gamma_{in} &= -D_i \frac{\partial n_{i2}}{\partial r} \Big|_{r=r_k} + \mu \cdot E_r(r_k) (n_{i0} + n_{i2}) = \\ &= -\frac{2D_a}{r_k} n_{a2} + \mu \cdot E_r(r_k) (n_{i0} + n_{i2}) = \frac{D_i}{\lambda_{i2}} (n_{i0} + n_{i2}), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} n_{a2} &= \frac{n_s - n_{a0}}{1 + \frac{2\lambda_{a2}}{r_k}}, \\ n_{i2} &= -n_{i0} \frac{1 - \frac{\lambda_{i2} \cdot \mu \cdot E_r(r_k)}{D_i}}{1 + \frac{2\lambda_{i2}}{r_k} - \frac{\lambda_{i2} \cdot \mu \cdot E_r(r_k)}{D_i}}. \end{aligned}$$

При усреднении уравнений (3.1), (3.2) по сечению канала получают обыкновенные дифференциальные уравнения для неизвестных  $n_{a0}(z)$  и  $n_{i0}(z)$  (приложение 5, п. П5.3):

$$\frac{2}{r_k} \Gamma_{a2}(r_k) - \frac{d}{dz} \left( D_a \frac{d}{dz} \langle n_a \rangle \right) + \frac{d}{dz} \langle u_z \cdot n_a \rangle = -\langle v_i \cdot n_a \rangle, \quad (3.6)$$

$$\frac{2}{r_k} \Gamma_{i2}(r_k) - \frac{d}{dz} \left( D_i \frac{d}{dz} \langle n_i \rangle \right) + \frac{d}{dz} \langle (u_z + \mu \cdot E_x) \cdot n_i \rangle = \langle v_i \cdot n_a \rangle, \quad (3.7)$$

где

$$\Gamma_{a2} = -\frac{2D_a}{r_k} n_{a2} + u_0 \varepsilon_a (n_{a0} + n_{a2}),$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i2} &= -\frac{2D_i}{r_k} n_{i2} + u_0 \varepsilon (n_{i0} + n_{i2}) + \mu E_r(r_k) (n_{i0} + n_{i2}), \\
\langle n_a \rangle &= n_{a0} + \frac{1}{2} n_{a2}; \langle n_i \rangle = n_{i0} + \frac{1}{2} n_{i2}, \\
\langle u \cdot n_a \rangle &= u \left[ n_{a0} \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon_a} \right) + \frac{1}{2} n_{a2} \left( 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon_a} \right) \right], \\
\langle u \cdot n_i \rangle &= u \left[ n_{i0} \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon_i} \right) + \frac{1}{2} n_{i2} \left( 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon_i} \right) \right], \\
\varepsilon_a &= \frac{2\lambda_a}{r_k}; \varepsilon_i = \frac{2\lambda_i}{r_k}, \\
\langle \omega_i n_a \rangle &= n_{a0} \langle \omega_i \rangle + n_{a2} \left\langle \left( \frac{r}{r_k} \right)^2 \omega_i \right\rangle, \\
\langle \mu E_z n_i \rangle &= n_{i0} \langle \mu E_z \rangle + n_{i2} \left\langle \left( \frac{r}{r_k} \right)^2 \mu E_z \right\rangle,
\end{aligned}$$

где  $\langle \dots \rangle = \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \cdot f(r, \dots) dr$  означает усреднение по сечению канала при

$z = \text{const}$ . Граничные условия во входном и выходном сечениях ( $z = 0$  и  $z = L$ ) канала определяются характером течения вне катодных полос-тей и представляют собой условия сопряжения решений внутренней и внешней задач. Важным моментом является тот факт, что граничные условия являются однородными, следовательно, не содержат источников.

Уравнения (3.6), (3.7) с граничными условиями (3.4) представляют собой линейные дифференциальные уравнения второго порядка с краевыми условиями I рода [143, 144], поэтому суммарный поток частиц материала катода можно искать с помощью функции Грина:

$$\Gamma_{\Sigma}(z) = \int_0^L n_s(z') \cdot G(z, z') dz', \quad (3.8)$$

что позволит вычислять скорость эрозии по заданному распределению насыщенных паров материала  $n_s(z)$ . В подынтегральном выражении ис-

пользуется функция Грина  $G(z, z')$  для бесконечной трубки с установившимся течением, параметры которого не зависят от  $z$  [145, 146]. В силу линейности уравнений (3.6), (3.7) решение системы может быть получено в виде линейной комбинации решений двух полуоднородных задач Дирихле [143].

Примем в первом приближении, что  $E_r = \frac{r}{r_k} E_0$ ,  $E_z = \text{const}$  и  $D_a = D_i = D$ ,  $\lambda_a = \lambda_i = \lambda$ . Тогда суммарный поток частиц с поверхности [147] имеет вид

$$\Gamma_{\Sigma}(z) = \frac{4D}{r_k^2(1+2\varepsilon)} \int_{-\infty}^{+\infty} n_s(z') \cdot G_0\left(\frac{z-z'}{r_k}\right) dz', \quad (3.9)$$

где обобщенная функция Грина  $G_0$  построена на суперпозиции решений двух уравнений — (3.6) и (3.7) [145, 146]:

$$G_0(\xi) = \delta(\xi) - g_a(\xi) - \int_{-\infty}^{+\infty} g_a(\xi') \cdot g_i(\xi - \xi') d\xi';$$

$\delta(\xi)$  — дельта-функция,

$$g_a(\xi) = \frac{1}{1 + \beta \frac{(1+2\varepsilon)}{8}} g_a^1 + \frac{\alpha}{6(1+2\varepsilon)} g_a^2$$

— функция Грина для уравнения (3.6), где  $g_a^1(\xi)$  и  $g_a^2(\xi)$  — фундаментальные решения уравнения (3.6), а коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  получены через определитель Вронского [143, 145]:

$$g_a^1(\xi) = -\frac{k_1 k_2}{k_1 - k_2} \begin{cases} e^{k_2 \xi}, & \xi > 0, \\ e^{k_1 \xi}, & \xi < 0, \end{cases} \quad g_a^2(\xi) = \frac{1}{k_1 - k_2} \begin{cases} k_2 e^{k_2 \xi}, & \xi > 0, \\ k_1 e^{k_1 \xi}, & \xi < 0, \end{cases}$$

$k_1, k_2 (k_1 > k_2)$  — корни уравнения  $k^2 - 2\alpha \frac{1+3\varepsilon+3\varepsilon^2}{3(1+2\varepsilon)} k - \left( \beta + \frac{8}{1+2\varepsilon} \right) = 0$ ,

$g_i(\xi) = \frac{\beta(1+2\varepsilon)}{8} g_i^1(\xi)$  — функция Грина для уравнения (3.7), где  $g_i^1(\xi)$  —

фундаментальное решение уравнения (3.7) [143], а коэффициенты  $\psi_1$  и  $\psi_2$  также получены через определитель Вронского [143, 145]:

$$g_i^1(\xi) = -\frac{\psi_1\psi_2}{\psi_1 - \psi_2} \begin{cases} e^{\psi_2\xi}, & \xi > 0, \\ e^{\psi_1\xi}, & \xi < 0, \end{cases}$$

$\psi_1, \psi_2$  ( $\psi_1 > \psi_2$ ) — корни уравнения  $\psi^2 - \frac{2\alpha}{3}A \cdot \psi - \frac{8}{1+2\varepsilon-\gamma} = 0$ . Здесь

для сокращения формы записи введены следующие обозначения:

$$A = \frac{1 + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 - \gamma + \frac{3}{2}\chi - \frac{3}{2}\gamma\varepsilon - \frac{3}{2}\gamma\chi + 6\chi\varepsilon}{1 + 2\varepsilon - \gamma},$$

$$\alpha = \frac{V \cdot r_k}{D}, \quad \beta = \frac{r_k^2 \cdot v_i}{D}, \quad \gamma = \frac{\lambda \cdot \mu \cdot E_0}{D}, \quad \chi = \frac{\mu \cdot E_x}{V}, \quad \varepsilon = \frac{2\lambda}{r_k},$$

причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^1(\xi) d\xi = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(\xi) d\xi = 0.$$

В типичных условиях, когда характерный линейный масштаб изменения  $n_s(z)$  много больше калибра  $r_k$ , для правильного описания скорости эрозии необходимо грамотно воспроизвести асимптотическое поведение ядра интегрального уравнения  $G_0(\xi)$  при  $\xi \gg 1$ . Решения уравнений (3.6), (3.7) обеспечивают удовлетворительную точность при небольших значениях ( $\leq 1$ ) параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . Так, при  $\alpha = \beta$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$  поведение ядра  $G_0$  определяется экспонентой ( $G_0 \sim e^{k|\xi|}$ ), а коэффициент  $k$  в показателе экспоненты в этом случае является собственным значением для уравнения Лапласа [147, 148]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial n}{\partial r} \right) = -\frac{k^2}{r_k^2} n, \quad n(r_k) = 0,$$

которое равно первому корню нулевой функции Бесселя  $k \approx 2,405$ . Рассматриваемое приближение при расчете дает для показателя экспоненты близкое значение  $k = \sqrt{8} \approx 2,83$ . Отметим, что степенное приближение

$$n = n_0 + \left(\frac{r}{r_k}\right)^2 n_2 + \left(\frac{r}{r_k}\right)^4 n_4$$

ценой двукратного увеличения объема вычислений обеспечивает высокую точность для ядра  $G_0(\xi)$  при  $|\xi| \gg 1$ , а именно  $k = 2\sqrt{9 - \sqrt{57}} \approx 2,408$ .

Таким образом, при небольших значениях  $\alpha$  и  $\beta$ , в предположении, что концентрации атомов и ионов материала катода равномерно распределены по сечению канала, уравнения (3.6), (3.7) и полученное на основании их решения выражение для потока возникающих в результате эрозии атомов  $\Gamma_\Sigma(z)$  (3.9) дают удовлетворительное количественное описание эрозии поверхности канала. Это решение при необходимости может быть далее уточнено в рамках следующего приближения.

При больших значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  пары материала катода и ионы материала катода локализованы вблизи поверхности, и тогда предлагаемое приближение некорректно. Однако в таких условиях задача упрощается тем, что становится несущественной реальная геометрия каналов, поскольку процессы протекают так же, как в полубесконечном объеме над плоской поверхностью.

Ядро  $G_0(\xi)$  в (3.9) имеет характерный размер области локализации, сравнимый с условным радиусом канала катода  $r_k$ . Для внутренних областей канала, удаленных от краев на расстояние больше калибра  $r_k$ , величину  $n_s$  в подынтегральном выражении (3.9) можно разложить в ряд, ограничившись первыми тремя членами:

$$n_s(z') = n_s(z) + (z - z') \frac{dn_s}{dz} + \frac{1}{2}(z - z')^2 \frac{d^2n_s}{dz^2}.$$

Подставляя это разложение в (3.9), с учетом условия  $\int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\xi) d\xi = 0$ , имеем

$$\Gamma_\Sigma(z) = D'_s \frac{d}{dz} \left( n_s + d \cdot r_k \frac{dn_s}{dz} \right). \quad (3.10)$$

Причем второе слагаемое мало в сравнении с первым слагаемым по причине малости отношения калибра  $r_k$  к длине канала  $L$  ( $r_k/L \ll 1$ ). Та-

ким образом, второе слагаемое будет существенно лишь вблизи максимума  $n_s(z)$  и в области, где величина  $D'_s$  мала по причине специфического соотношения факторов (скорости течения, связанной с подвижностью, продольной и поперечной скорости ионов, скорости ионизации и т. д.). Для этой величины можно получить следующее выражение:

$$D'_s = d \cdot D_s = D \frac{2}{1+2\varepsilon} \left[ \frac{\beta(1+2\varepsilon)}{8+\beta(1+2\varepsilon)} \left( \frac{\frac{\alpha}{6(1+2\varepsilon)} - (k_1+k_2)}{k_1k_2} \frac{\psi_1+\psi_2}{\psi_1\psi_2} - \frac{\psi_1^2 + \psi_1\psi_2 + \psi_2^2}{\psi_1^2\psi_2^2} \right) - \frac{k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2 - \frac{\alpha(k_1+k_2)}{6(1+2\varepsilon)}}{k_1^2k_2^2} \right]. \quad (3.11)$$

При  $\beta = 0$  и  $\varepsilon = 0$  получим  $D'_s = \frac{\alpha}{4} D = \frac{V_0 \cdot r_k}{4}$ ,  $d = -\frac{\alpha^2 + 24}{24\alpha}$ . При малых  $\alpha$  ( $r_k \cdot u_0 \ll D$ ) определяющим в (3.10) является второй член выражения.

Если пары материала катода и продукты их ионизации сосредоточены вблизи поверхности катода, то  $\ell \ll r_k$ , где  $\ell$  — характерный размер, определяющий убывание концентрации атомов и ионов материала катода в направлении по нормали к поверхности катода. При этом предполагается, как и ранее,  $\lambda \ll r_k$ , т. е. справедливо газодинамическое приближение. Кроме того, как и ранее, считается, что концентрации  $n_a$  и  $n_i$  атомов и ионов малы в сравнении с концентрацией частиц плазмообразующего газа, и это позволяет считать характеристики плазмы и разряда заданными функциями координат. В этих условиях выполнение неравенства  $\ell \ll r_k$  приводит к тому, что можно пренебречь реальной геометрией канала катода и рассматривать эрозию плоской поверхности в полубесконечном объеме.

Рассмотрим рабочую плоскость и ориентируем систему прямоугольных координат таким образом, что ось  $Z$  направлена по нормали к поверхности, а ось  $X$  параллельна поверхности. Скорость плазмообра-

зующей среды  $u_x$  считается постоянной во всем объеме. Скорость, связанная с подвижностью ионов, также считается постоянной во всем объеме. Она равна  $u_z$  и направлена по оси  $Z$  к рабочей поверхности. В таком случае уравнения (3.1)–(3.2) принимают вид (см. приложение 5, п. П5.4):

$$D \left( \frac{\partial^2 n_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_a}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial n_a}{\partial x} \cdot u_x - n_a \omega_i = 0, \quad (3.12)$$

$$D \left( \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_i}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial n_i}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial n_i}{\partial z} \cdot u_z + n_a \omega_i = 0. \quad (3.13)$$

Граничные условия второго рода на поверхности приняты в виде

$$-D \frac{\partial n_a}{\partial z} = \langle v \rangle (n_a - n_s) |_{z=0}, \quad (3.14)$$

$$-D \frac{\partial n_i}{\partial z} - u_z \cdot n_i = n_i \langle v \rangle |_{z=0}, \quad (3.15)$$

где  $\langle v \rangle$  — тепловая скорость, которая в первом приближении полагается одинаковой для атомов и ионов.

Уравнение (3.12) для потока атомов с граничным условием (3.14) может быть решено независимо от уравнения ионов (3.13) с помощью преобразования Фурье (методика решения изложена в [150, 151]) (см. приложение П5.4, п. 1), и полученное решение позволяет записать плотность потока атомов:

$$\Gamma_a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} n_s(x') \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x'-x)} \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \psi D} \cdot e^{-\psi z} dk \cdot dx', \quad (3.16)$$

где введено обозначение

$$\psi^2 = k^2 + \frac{i \cdot k \cdot u_x}{D} + \frac{\omega_i}{D}.$$

Уравнение для концентрации ионов (3.13) с учетом граничного условия (3.15) и найденного выражения для концентрации атомов (3.16) также может быть решено с применением преобразования Фурье (приложение П5.4, п. 2), и тогда плотность потока ионов определяется выражением

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} n_s(x') \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x'-x)} \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \psi D} \cdot \frac{1}{\psi^2 - \alpha\psi - \gamma^2} \times \\ &\times \left( -\frac{\omega_i}{D} \right) \cdot \left( e^{\psi z} - \frac{u_z + \langle v \rangle - \psi D}{u_z + \langle v \rangle + \gamma D} \cdot e^{\gamma z} \right) dk \cdot dx', \end{aligned} \quad (3.17)$$

где

$$\alpha = \frac{u_z}{D}, \quad \gamma = -\frac{u_z}{2D} - \sqrt{\frac{u_z^2}{4D^2} + k^2 + \frac{i \cdot k \cdot u_x}{D}}.$$

Для суммарной скорости эрозии из соотношений (3.16) и (3.17) в случае полубесконечного объема на основании условия (3.9) для функции Грина получено выражение

$$\begin{aligned} \Gamma_\Sigma &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} n_s(x') \cdot G(x' - x) dx' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} n_s(x') \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x'-x)} \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \psi D} \times \\ &\times \left[ \psi D - \frac{\omega_i \cdot \langle v \rangle}{\left( \psi^2 - \alpha\psi - \left( k^2 + \frac{i \cdot k \cdot u_x}{D} \right) \right)} \cdot \frac{\gamma + \psi}{u_z + \langle v \rangle + \gamma D} \right] dk \cdot dx'. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Можно показать, что полный поток частиц с рабочей поверхности равен нулю, если пренебречь краевыми эффектами. Рассмотрим интеграл по всей оси  $X$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_\Sigma(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n_s(x') \cdot G(x' - x) dx' dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n_s(x') \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x'-x)} \tilde{G}(k) dk \cdot dx \cdot dx' = 0, \end{aligned}$$

или  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x'-x)} \tilde{G}(k) dk = 0$ . Откуда следует, что  $\tilde{G}(k=0) = 0$ . Здесь принято обозначение  $\tilde{G}(k)$  — фурье-образ функции  $G(x)$ . Правильность по-

следнего условия проверяется непосредственной подстановкой  $k = 0$  в выражение (3.18) (приложение П5.4 п. 3).

Введем новую безразмерную переменную интегрирования  $\xi = x \frac{u_x}{D}$ , а также два безразмерных критерия:  $\alpha = \frac{u_z}{D}$  (характеризующий подвижность) и  $\eta^2 = \frac{\omega_i D}{u_x^2}$  (характеризующий диффузию). Поскольку для функции  $G(\xi - \xi')$  невозможно получить аналитическое выражение в элементарных функциях, можно применить асимптотическое разложение интеграла (3.18) по методике, описанной в работе [79, с. 70].

Для упрощения полученных выражений выполним ряд нормировок, переходя к безразмерным величинам:

$$p = k \frac{D}{u_x}, \quad \mu = \alpha \frac{D}{u_x}, \quad \mu_0 = \frac{\langle v \rangle}{u_x},$$

$$\gamma = \frac{u_x}{D} \left( -\frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + p^2 + i \cdot p} \right), \quad \psi^2 = \left( \frac{u_x}{D} \right)^2 \cdot (p^2 + i \cdot p + \eta^2).$$

Согласно методике [79] можно получить асимптотические выражения функции  $G(\xi - \xi')$  для предельных случаев величины  $|\xi - \xi'|$  (приложение 5.5). Так, в случае, когда  $|\xi - \xi'|$  велико, функция  $G(\xi - \xi')$  определяет, каким образом влияет на скорость эрозии в точке  $\xi$  испарение в удаленной от нее точке  $\xi'$ . Можно показать, что в случае  $|\xi - \xi'| \gg 1$  реализуются два случая.

1. При  $\eta^2 < \frac{\mu^2}{4}$  ( $\frac{\omega_i D}{u_x} < \frac{u_z}{4}$ ) подвижность ионов преобладает над диффузией, и тогда

$$G_{\infty}^{(1)}(\xi - \xi') = u_x \cdot \left[ \delta(\xi - \xi') - \frac{\sqrt{2\pi} \cdot \mu \sqrt{\eta^2 + \frac{1}{4}} \left[ \eta^2 + \mu_0 \left( \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \eta^2} + \frac{\mu}{2} \right) \right]}{\eta^2 \left( \mu_0 + \frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \eta^2} \right) |\xi - \xi'|^{3/2}} \right] \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{1}{2} (\xi - \xi') - \sqrt{\eta^2 + \frac{1}{4}} \cdot |\xi - \xi'| \right\} \Bigg], \quad (3.19)$$

где в записи разложения использована  $\delta$ -функция с известными свойствами:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - \xi') d\xi' = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - \xi') \cdot f(\xi') d\xi' = f(\xi),$$

поскольку ранее было показано, что подынтегральная функция обращается в ноль при  $k = 0$ .

2. При  $\eta^2 > \frac{\mu^2}{4} \left( \frac{\omega_i D}{u_x} > \frac{u_z}{4} \right)$ , основной вклад в возвратный поток

ионов вносит диффузия

$$G_{\infty}^{(2)}(\xi - \xi') = u_x \cdot \left[ \delta(\xi - \xi') - \frac{\sqrt{2\pi} \cdot \mu_0^2}{\mu_0 - \sqrt{\eta^2 - \frac{\mu^2}{4}}} \cdot \frac{\eta^2}{\eta^2 - \mu \cdot \sqrt{\eta^2 - \frac{\mu^2}{4}}} \cdot \frac{\mu_0 + \mu - \sqrt{\eta^2 - \frac{\mu^2}{4}}}{\left(\mu_0 + \frac{\mu}{2}\right)^2} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \frac{1}{4}} \cdot \frac{\exp \left\{ \frac{1}{2} (\xi - \xi') - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \frac{1}{4}} \cdot |\xi - \xi'| \right\}}{|\xi - \xi'|^{3/2}} \right]. \quad (3.20)$$

Также можно получить асимптотическое приближение для функции  $G(\xi - \xi')$ , в случае когда  $|\xi - \xi'|$  мало:

$$G_0(\xi - \xi') = u_x \left[ \delta(\xi - \xi') - 2\mu_0^2 \ln \left| \frac{\mu_0}{\mu_0 - \frac{1}{\xi - \xi'}} \right| \right]. \quad (3.21)$$

В выражениях (3.19)–(3.21) первый член после свертки с плотностью насыщенного пара дает величину  $\langle v \rangle \cdot n_s(\xi)$ , т. е. точно равен потоку испаренных в данной точке атомов, а второй член определяет полный

возвратный поток ионов и атомов. Сшивая выражения (3.19)–(3.21), можно построить интерполяционную формулу для скорости эрозии, позволяющую по заданным значениям параметров разряда и температуры стенок канала, влияющих на  $n_s(\xi)$ , определить эрозию катода в данной точке.

$$\Gamma_{\Sigma}(\xi) = u_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} n_s(\xi') \left[ G_{\infty}(\xi - \xi') \cdot (1 - e^{-|\xi - \xi'|}) + G_0(\xi - \xi') e^{-|\xi - \xi'|} \right] d\xi'. \quad (3.22)$$

Явное выражение для скорости эрозии может быть получено в случае, когда ядро  $G(x - x')$  в выражении (3.18) имеет характерный размер области локализации гораздо меньший, чем характерный размер изменения температуры. В этом случае величину под интегралом в (3.18) можно представить в виде разложения [79]

$$n_s(x') = n_s(x) + \frac{\partial n_s}{\partial x}(x - x').$$

Тогда подстановка этого разложения в интеграл (3.18) приводит к выражению

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Sigma}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ n_s(x) + \frac{\partial n_s}{\partial x}(x - x') \right] \cdot G(x' - x) dx' = \\ &= \frac{n_s}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x' - x) dx' + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial n_s}{\partial x} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x') \cdot G(x' - x) dx'. \end{aligned}$$

Первый интеграл в этом выражении, как уже отмечалось ранее, обращается в нуль вследствие отсутствия потока частиц с рабочей поверхности. Таким образом, остается выражение

$$\Gamma_{\Sigma}(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial n_s}{\partial x} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x') \cdot G(x' - x) dx'.$$

Если применить преобразование Фурье к ядру  $G(x)$ , то образ имеет вид

$$\tilde{G} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} G(x) dx.$$

Можно данный образ Фурье разложить по степеням ( $ik$ ):

$$\tilde{G} = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) dx + ik \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot G(x) dx \right].$$

Первый интеграл в этом разложении снова равен нулю, а второй является первым членом разложения в ряд Фурье образа ядра  $G(x - x')$  по малому параметру ( $ik$ ). На основании такого разложения выражение (3.18) можно переписать (приложение П5.6):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Sigma}(x) = \frac{\langle v \rangle \cdot u_x}{\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D}} \cdot \left( \frac{D}{\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{\omega_i}} \left( \frac{\sqrt{\frac{\omega_i}{D}} + \frac{\omega_i}{W} - 2 \frac{u_z}{D}}{\sqrt{\frac{\omega_i}{D}} - \frac{u_z}{D}} \right) - \frac{1}{2} \frac{D^2}{u_z \langle v \rangle} \cdot \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right) \cdot \frac{\partial n_s}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Полученную формулу можно использовать для расчета эрозии катода не только в случае, когда поток атомов, выходящих с рабочей поверхности катода, определяется термическим испарением, но и в случае, когда существенную роль играет распыление материала катода ионами плазмообразующей среды. В этом случае к величине  $\frac{\partial n_s}{\partial x}$  необходимо добавить

величину  $\frac{\partial(\Gamma_{i0} Y)}{\partial x}$ , где  $Y$  — коэффициент распыления,  $\Gamma_{i0}$  — плотность

потока ионов плазмообразующего газа.

Основным недостатком предложенной в данной части работы модели эрозии является предположение о постоянстве скорости плазмообразующей среды во всем полубесконечном пространстве. Однако в случае, когда ядро  $G(x - x')$  локализовано в области значительно меньшей по размерам области изменения температуры, методом теории возмущений возможно получить решение, например, для случая линейного воз-

растания скорости плазмообразующей среды по мере удаления от рабочей поверхности катода:

$$u = u_0 \cdot \frac{z}{L},$$

где  $L$  — характерный размер области изменения газодинамической скорости плазмообразующей среды. В этом случае исходную систему уравнений (3.1)–(3.2) можно записать для фурье-образов функций  $N_a$  и  $N_i$  при разложении в ряд по малому параметру ( $ik$ ) с отбрасыванием членов второго порядка малости  $\sim k^2$  (получение уравнений для фурье-образов, см. приложение П5.4, п. 1 и п. 2):

$$\frac{d^2 N_a}{dz^2} - \left( k^2 + ik \frac{u_x}{D} + \frac{\omega_i}{D} \right) \cdot N_a = 0 \Rightarrow \frac{d^2 N_a}{dz^2} - \frac{\omega_i}{D} \cdot N_a = ik \frac{u_0}{D} \cdot \frac{z}{L} \cdot N_a, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N_i}{dz^2} + \frac{u_z}{D} \frac{dN_i}{dz} - \left( ik \frac{u_x}{D} + k^2 \right) N_i &= -\frac{\omega_i}{D} \cdot N_a \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} - ik \frac{\omega_i u_0}{D} \cdot \frac{z}{L} + \frac{u_z}{D} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} &= -\frac{\omega_i}{D} \cdot N_a, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где фурье-образы

$$N_a = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} n_a dx, \quad N_i = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} n_i dx.$$

Методика решения уравнений рассмотрена в приложении П5.4.

Решение уравнений (3.24) и (3.25), при учете малости параметра  $k$ , позволяет получить явное выражение для суммарного потока частиц:

$$\Gamma_{\Sigma} = \frac{\partial n_s}{\partial x} \cdot \left[ \sqrt{\omega_i D} \cdot C_{1a} - D \cdot C_{2a} + \langle v \rangle \cdot (C_{1i} + C_{2i} + C_{0i}) \right], \quad (3.26)$$

где использованы обозначения

$$C_{1a} = \frac{\langle v \rangle \cdot u_0}{4 \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \cdot L \cdot \left( \langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D} \right)^2}, \quad C_{2a} = -\frac{\langle v \rangle \cdot u_0}{4L \cdot \omega_i \left( \langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D} \right)},$$

$$\begin{aligned}
C_{1i} &= \frac{\langle v \rangle \cdot u_0}{4L \cdot \sqrt{\omega_i D}} \cdot \frac{1}{\left( \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} - \frac{u_z}{D} \right) (\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D})} \times \\
&\times \left[ \frac{1}{\frac{\langle v \rangle}{D} - \sqrt{\frac{\omega_i}{D}}} + \frac{\left( 5\sqrt{\frac{\omega_i}{D}} - 3\frac{u_z}{D} \right) \left( \frac{u_z}{D} - 2\sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right)}{\sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \left( \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} - \frac{u_z}{D} \right)^2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega_i}{D}} - \frac{u_z}{D}} \right], \\
C_{2i} &= -\frac{\langle v \rangle \cdot u_0}{L \cdot \sqrt{\omega_i D}} \cdot \frac{\left( 2\sqrt{\frac{\omega_i}{D}} - \frac{u_z}{D} \right)}{(\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D})} \cdot \frac{1}{\left( \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} - \frac{u_z}{D} \right)}, \\
C_{0i} &= (C_{3i} + C_{4i}) \cdot \frac{D}{u_z} + C_{1i} \cdot \frac{u_z + \langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D}}{u_z} + C_{1i}^5 \cdot \frac{\langle v \rangle}{u_z}, \\
C_{3i} &= \frac{\langle v \rangle \cdot u_0}{L \cdot \sqrt{\omega_i D}} \cdot \frac{\left( 5\sqrt{\frac{\omega_i}{D}} - 3\frac{u_z}{D} \right)}{\left( \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} - \frac{u_z}{D} \right)^2 (\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D})}, \\
C_{4i} &= \frac{\langle v \rangle \cdot u_0}{L \cdot D \cdot \left( \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} - \frac{u_z}{D} \right)} \cdot \frac{1}{(\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D})}.
\end{aligned}$$

За счет некоторого усложнения вычислений можно значительно повысить точность расчетной модели.

Рассмотренная модель эрозии поверхности канала полого катода позволила получить относительно простые выражения для расчета скорости эрозии за счет процессов: уноса атомов в результате испарения и ионного распыления, ионизации паров, конденсации атомов, переноса ионов за счет подвижности в сторону катода с последующей нейтрализацией их на поверхности катода (рециклинг). Для применения модели необходимо знать распределение электрического поля внутри канала (получено в главе 1, п. 1.5) и параметры течения плазмы в канале катода (получено в главе 1, п. 1.6). Основному разрушению подвержена область канала вблизи

свободного торца катода, эрозия этой области описывается уравнениями (3.6) и (3.7). Во внутренней области канала имеет место перенос массы с одного участка на другой, что описывается уравнением (3.10).

Основным недостатком модели является слишком общее рассмотрение процессов без привязки к реальной конструкции катода. Размер области локализации ядра интегрального уравнения  $G(z-z')$  имеет порядок радиуса канала. Однако в области активной зоны полого катода характерные области резкого изменения параметров электрического поля и плазмообразующего газа могут быть существенно меньше, прежде всего в области фронта ионизации. Все параметры состояния плазмообразующего газа в активной зоне изменяются очень сильно по длине активной зоны канала, поэтому линейной аппроксимации скорости плазмообразующего газа и линейной аппроксимации напряженности электрического поля по радиусу канала явно недостаточно. Реальное распределение потенциала электрического поля вблизи стенки канала получено в главе 1 монографии (приложение 1).

### 3.2.2. Свободномолекулярный режим эрозии полого катода

Предположим, что по всей длине канала катода задана плотность потока атомов, покидающих поверхность  $\Gamma^+(z)$  без учета конкретного механизма этого уноса. Разумеется, испаренные и распыленные атомы по-разному взаимодействуют с плазмой в канале, поскольку имеют разные функции распределения. Но более точную постановку задачи рассмотрим позднее, пока различие не учитывается.

Расчет эрозии полого катода в свободномолекулярном режиме скорее представляет методический интерес. В реальных условиях функционирования полого катода нужно кроме испарения и распыления учитывать также рециклинг, что означает возврат части вылетевших ионизированных атомов под действием электрического поля обратно на катод, а также конвективный вынос части атомов в межэлектродное пространство.

В данном случае математическая постановка задачи об эрозии полого катода заключается в следующем: по длине части поверхности канала задана плотность потока частиц, покидающих поверхность  $\Gamma^+(z)$ ,

требуется найти распределение плотности потока конденсирующихся частиц  $\Gamma^-(z)$  по длине канала. Если предположить, что все возвращающиеся частицы конденсируются, то суммарная эрозия электрода в единицу времени  $G_\Sigma$  находится из выражения

$$G_\Sigma = 2\pi \cdot r_k \cdot m_a \int (\Gamma^+(z) - \Gamma^-(z)) dz. \quad (3.27)$$

Это соотношение записано для эрозии с внутренней поверхности каналов катода.

Соотношение (3.27) теоретически позволяет определить суммарную эрозию катода в единицу времени, однако не менее важно определить подробный профиль плотности потока массы  $\Gamma_\Sigma = \Gamma^+(x) - \Gamma^-(x)$ , поскольку в процессе эксплуатации катода, даже при сравнительно низком суммарном уносе массы, могут происходить сильные локальные изменения геометрии стержней набивки, которые приведут к отказу устройства.

Расчет величины  $G_\Sigma$  в свободномолекулярном режиме полностью эквивалентен задаче об излучательной способности полости. Если степень черноты полости близка к единице, то поток атомов, покидающих полость, находится так же, как и поток фотонов в задаче о переносе излучения. В случае изотермической полости  $G_\Sigma = 2\pi \cdot r_k^2 \cdot m_a \cdot \Gamma^+$ , коэффициент 2 учитывает наличие двух открытых сечений у канала.

Рассмотрим задачу о распределении величины  $\Gamma_\Sigma = \Gamma^+(z) - \Gamma^-(z)$  по длине катода. Катод будем считать бесконечно длинным, поскольку в реальных условиях соотношение между длиной канала  $L$  и характерным поперечным размером канала  $d$  следующее:  $L/d > 10$ . Пусть начало отсчета  $z = 0$  соответствует выходному сечению катода и ось направлена против потока плазмообразующего газа. Простейшая модель — движение испарившихся частиц в плоской щели, причем испарившиеся частицы не имеют скорости в направлении оси  $Z$  (рис. 3.2). Поток атомов, покидающих единицу площади канала в окрестности точки  $Z$ , определяется выражением

$$\Gamma^+ = \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(z, v) \cdot v dv \cdot \cos(\vartheta) d\vartheta = 2 \int_0^\infty f(z, v) \cdot v dv, \quad (3.28)$$

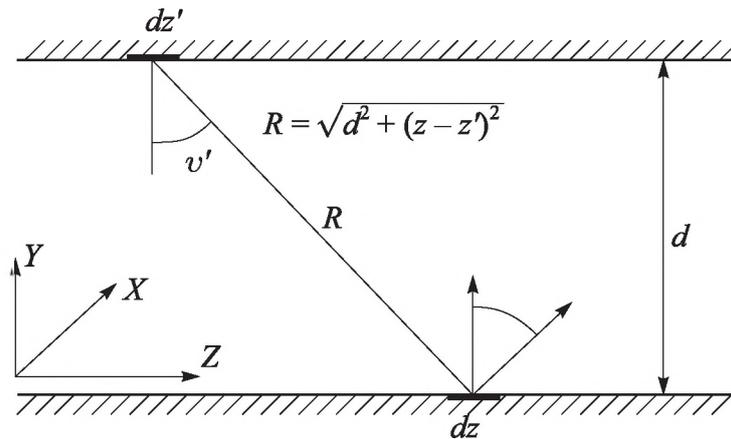


Рис. 3.2. Схема испарения (либо распыления) и конденсации атомов в случае плоской щели

где  $f(z, v)$  — функция распределения для испарившихся либо распыленных атомов, которая предполагается сферически симметричной.

Плотность потока частиц, попадающих на площадку  $dS$  вблизи точки  $z$  из окрестности точки  $z'$ :

$$d\Gamma^-(z, z') = \frac{\cos^2(\vartheta')}{R} \cdot dz' \cdot \int_0^\infty f(z', v) dv. \quad (3.29)$$

С учетом того, что  $\cos^2(\vartheta') = d^2/R^2$ , введем переменную  $z = Z/d$

и перепишем выражение  $\Gamma^+ - \Gamma^-$  с использованием (3.28)–(3.29) в новых обозначениях:

$$\Gamma_\Sigma(z) = 2 \int_0^\infty f(z, v) dv - \int_0^\infty \frac{dz'}{(1 + (z - z')^2)^{3/2}} \cdot \int_0^\infty f(z', v) dv. \quad (3.30)$$

Если плотность потока  $\Gamma^+(z)$  по длине постоянна, то из (3.15) вытекает следующее простое соотношение (см. приложение П5.2):

$$\begin{aligned} \Gamma_\Sigma(z) &= \frac{\Gamma^+}{2} \left( 2 - \int_0^\infty \frac{dz'}{(1 + (z - z')^2)^{3/2}} \right) = \\ &= \frac{\Gamma^+}{2} \left( 2 - \left( 1 + \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \right) \right) = \frac{\Gamma^+}{2} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Из анализа выражения (3.31) следует, что при  $z \rightarrow \infty$  функция

$$\Gamma_{\Sigma}(z) \approx \frac{\Gamma^+}{4z^2}.$$

Рассмотрим далее задачу определения профиля  $\Gamma_{\Sigma} = \Gamma^+(x) - \Gamma^-(x)$  для цилиндрической полости радиусом  $r_k$ , ось  $Z$  направлена по оси цилиндра, и началом отсчета снова будем считать выходное сечение катода. Для безразмерной координаты  $z = Z/r_k$  плотность потока атомов, покидающих единичную площадку поверхности в окрестности точки  $z$ , записывается подобно (3.28):

$$\Gamma^+(z) = \pi \int_0^{\infty} f(z, v) v^3 dv \int_0^{\pi/2} \cos(\vartheta) d\vartheta = \pi \int_0^{\infty} f(z, v) v^3 dv. \quad (3.32)$$

Можно показать (рис. 3.3), что плотность потока атомов, попадающих с площадки вблизи  $(z, \theta)$  на площадку вблизи  $(z', \theta')$ , описывается выражением [43]

$$\Gamma^-(z, z') = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{4 \cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) dz' \cdot d\varphi}{\left((z - z')^2 + 4 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2} \int_0^{+\infty} f(z', v) v^3 dv. \quad (3.33)$$

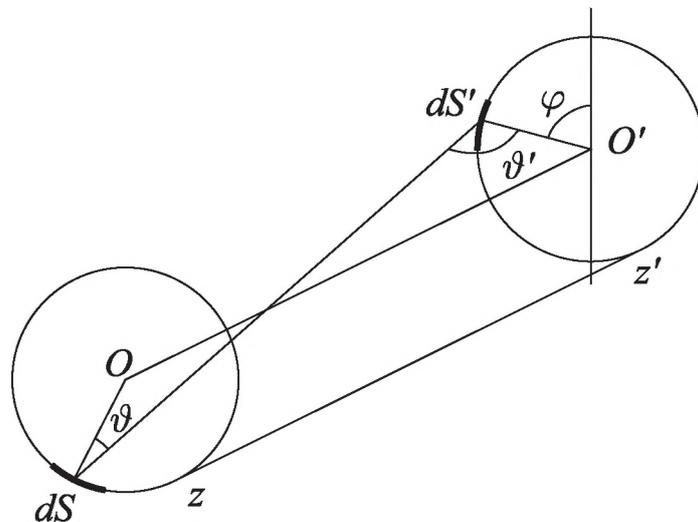


Рис. 3.3. К выводу формулы (3.33)

Поэтому полный поток вылетающих и конденсирующихся атомов будет равен (см. приложение П5.3, вывод 3)

$$\Gamma_{\Sigma} = \pi \int_0^{+\infty} f(z, v) v^3 dv - 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos^4 \frac{\varphi}{2} dz' \cdot d\varphi}{\left( (z - z')^2 + 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)^2} \int_0^{+\infty} f(z', v) v^3 dv. \quad (3.34)$$

В предположении, что  $\Gamma^+(z) = \text{const}$  по длине канала, на основании (3.34) можно получить отношение, аналогичное выражению (3.31):

$$\frac{\Gamma_{\Sigma}}{\frac{1}{2} \Gamma^+} = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{z \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{z^2 + 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} + \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left[ \frac{\pi}{2} + \text{arctg} \left( \frac{z}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \right) \right] \right) d\varphi. \quad (3.35)$$

Численное исследование поведения функции (3.35) показало, что при  $z \rightarrow \infty$  выражение ведет себя подобно  $\frac{1}{z}$ .

На рис. 3.4 представлено рассчитанное с помощью полученных формул (3.31) и (3.35) отношение  $\frac{2\Gamma_{\Sigma}(z)}{\Gamma^+}$  текущего уноса массы к максимально возможному уносу ( $\Gamma_{\text{max}} = \frac{\Gamma}{2}$  при  $z = 0$ ) для случая плоской щели и цилиндрического канала. Под безразмерной координатой  $z$  в случае плоской щели понимается  $\frac{z}{d}$ , а в случае цилиндрической полости —  $z = \frac{Z}{r_k}$ . Также на график нанесены экспериментальные значения эрозии внутренней поверхности канала катода, полученные в [65].

Сравнение с экспериментальными данными показывает неудовлетворительное соответствие и для модели эрозии плоской щели, и для модели эрозии цилиндрического канала. Количественное несоответствие, с одной стороны, может быть связано с явлением рециклинга, которое пока в моделях не учитывалось.

Теоретически с помощью соотношений (3.31) и (3.35) можно проследивать эволюцию геометрии канала, поскольку скорость изменения поперечного размера канала пропорциональна  $\Gamma_{\Sigma}(z)$ . Однако полученные соотношения справедливы до тех пор, пока изменение геометрии

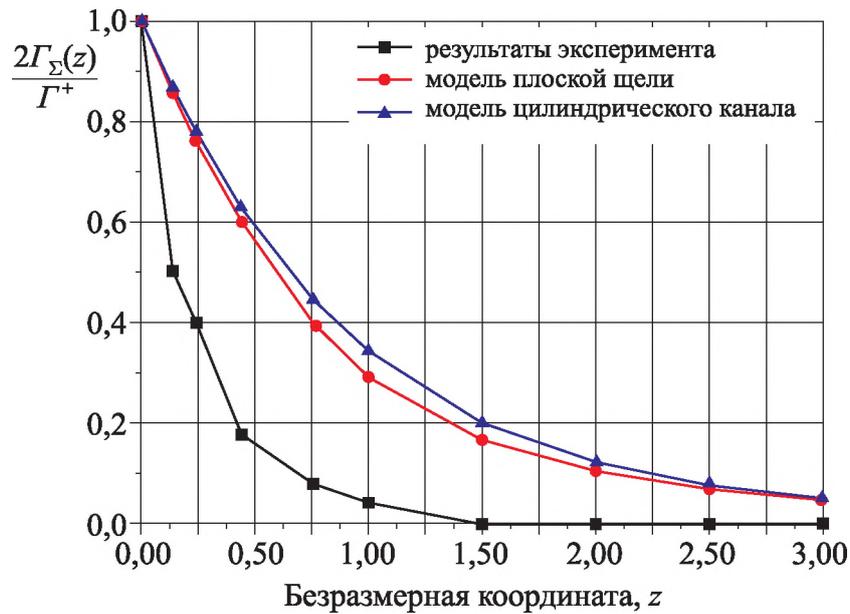


Рис. 3.4. Изменение относительной эрозии по длине канала. Сравнение с экспериментом [65]

поверхности является малым. К тому же ошибка числовых значений примерно в 2 раза дает слишком грубое представление о локальном характере эрозии.

По этой причине необходимо дальнейшее уточнение модели эрозии поверхности катода с учетом не только испарения и конденсации, но также и процессов распыления и рециклинга. Для этого необходимо более глубокое изучение взаимодействия частиц плазмы с поверхностью канала.

### 3.3. Результаты вычислительных и физических экспериментов по эрозии полого катода

#### 3.3.1. Распыление поверхности полого катода при бомбардировке ее ионами низких энергий

Первые результаты по экспериментальному определению удельной эрозии одноканального полого катода из тантала были представлены в 1969 году в работе [80], позднее, в 1977 году, в работе [49] были приведены результаты эксперимента с многоканальным катодом из тантала. На рисунке 3.5 показаны зависимости удельной эрозии катодов из танта-

ла от расхода плазмообразующего газа. Более поздние исследования подтвердили результаты работы [49]. В частности, было подтверждено наличие минимума в зависимости удельной эрозии от расхода. На результаты работ [49, 80] следует обратить внимание потому, что уже тогда авторы пришли к выводу, что эрозия не может быть объяснена только процессом испарения. В работе [58] авторы также рассматривали распыление поверхности ионами плазмообразующего газа, ускоренными прикатодным скачком потенциала, как основной фактор эрозии. Поэтому в рассматриваемой далее модели предполагается, что распыление играет определяющую роль при относительно низких температурах поверхности, а испарение становится существенным только с повышением температуры в области ближе к свободному торцу катода.

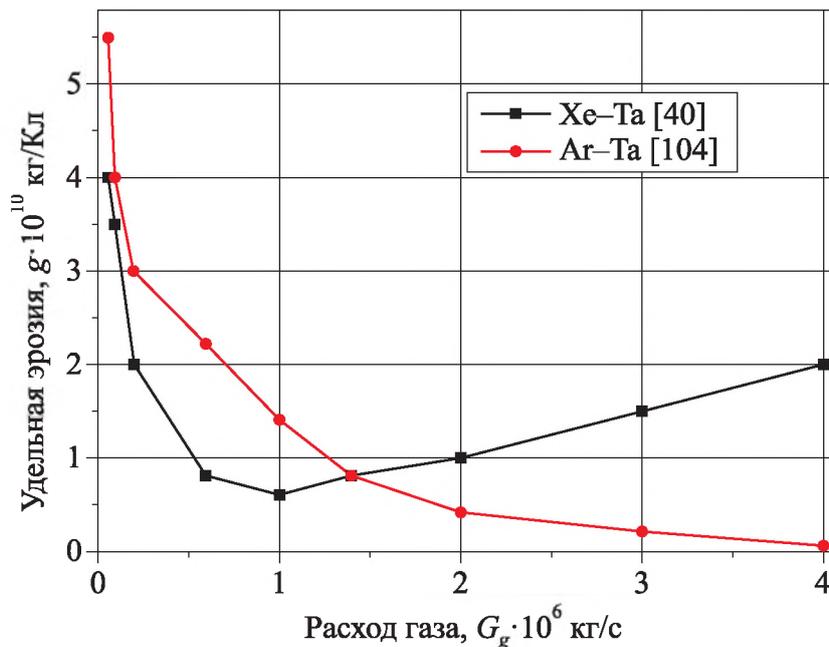


Рис. 3.5. Экспериментальные результаты измерения эрозии полого катода [80, 49]

Для полых катодов, работающих в дуговом режиме, характерны невысокие значения прикатодного падения напряжения. Поэтому рассмотрим физическую модель явления распыления поверхности твердого тела ионами низких энергий ( $W < 500$  эВ), что соответствует условиям плазмы полого катода в дуговом режиме.

Будем полагать, что определяющими факторами распыления в таком случае являются: аккомодация энергии иона, глубина имплантации

иона, состояние приповерхностной группы атомов, возбужденных ударом ионов, «испарительный» механизм отрыва иона.

В отличие от модели теплового «клина», предложенной в работе [81], в области низких, практически «припороговых» энергиях ионов в качестве линейного размера области существенного «разогрева» группы приповерхностных атомов в направлении, перпендикулярном поверхности тела, принимается длина проективного пробега ионов  $\lambda_p$ . В работе [82] приведены значения длин проективного пробега  $\lambda_p$ , рассчитанные для нескольких комбинаций «ион–мишень» в зависимости от начальной энергии иона при нормальном падении иона на поверхность. Численный анализ экспериментальных [83] и теоретических закономерностей [82, 84] показывает, что в области энергий 0,5 кэВ длина проективного пробега наилучшим образом аппроксимируется выражением вида

$$\lambda_p = \lambda_{0p} \cdot (1 + B \cdot W^{2/3}), \quad (3.36)$$

где  $\lambda_{0p}$  и  $B$  — константы аппроксимации. Энергия иона выражается в эВ.

Как показано в [83, 84], отношение длины полного пробега иона  $\lambda$  к длине проективного пробега  $\lambda_p$  в случае упругих столкновений не зависит от энергии частиц и является практически универсальной функцией отношения масс атомов поверхности (мишени) и бомбардирующих ионов:

$$\frac{\lambda_p}{\lambda} = \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2}{m_1} \right)^{-1}, \quad (3.37)$$

где  $m_1$  — масса падающего иона,  $m_2$  — масса атома мишени.

На основании данных, приведенных в [83, 84], были получены константы аппроксимации в соотношении (3.36), например, для комбинации вольфрам–аргон:  $\lambda_{0p} = 3,738 \text{ \AA}$ ,  $B = 2,477 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}^{2/3}$ ; для комбинации

углерод–аргон:  $\lambda_{0p} = 3,812 \text{ \AA}$ ,  $B = 2,672 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}^{2/3}$ ; отношение  $\frac{\lambda_p}{\lambda} = 0,4$ .

На рисунке 3.6 представлены результаты расчета проективного пробега иона, а также полного пробега при  $\frac{\lambda_p}{\lambda} = 0,4$ . Также на графике нанесены экспериментальные значения длины полного пробега из работы [82].

Выполненные расчеты  $\lambda_p$  для энергий  $W < 500$  эВ показали, что область возбуждения простирается не далее четвертого поверхностного слоя атомов, а для некоторых комбинаций «ион–мишень» даже не дальше третьего слоя.

В качестве формы возбужденной области примем цилиндр, длина образующей которого равна  $\lambda_p$ , а площадь поперечного сечения —  $S_p$ , причем площадь сечения не зависит от энергии падающего иона. Число возбужденных атомов в выбранном объеме

$$\Delta N_a = n_a \cdot S_p \cdot \lambda_p(W),$$

где  $n_a$  — концентрация атомов мишени.

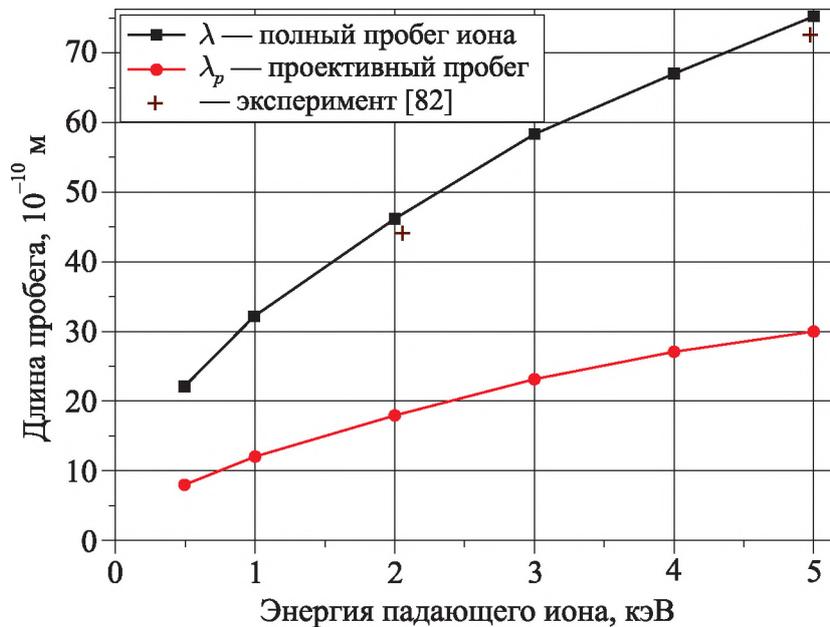


Рис. 3.6. Зависимость длины пробега иона от его энергии, экспериментальные данные [82]

Как показал численный анализ закономерностей распыления, для наилучшего описания поведения коэффициента распыления во всем указанном диапазоне энергий величину  $S_p$  следует считать неизменной.

Тепловое состояние приповерхностной группы атомов  $\Delta N_a$  определяется законом сохранения энергии для этой группы:

$$U^* \cdot \Delta N_a = U \cdot \Delta N_a + a_W \cdot W + \delta Q_{ie}(a_R, V_i, e\Phi_B, \dots),$$

где  $U$  и  $U^*$  — средняя энергия атомов мишени до и после возбуждения,  $a_W$  — коэффициент аккомодации кинетической энергии иона,  $a_R$  — коэффициент поглощения энергии иона,  $W_i$  — энергия ионизации,  $e\Phi_B$  — работа выхода, функция  $\delta Q_{ie}$  учитывает передачу внутренней энергии иона и потери энергии из области возбуждения за счет теплопроводности, излучения и других факторов [85].

Для достаточно широкого интервала температур среднюю энергию атомов мишени до столкновения можно аппроксимировать выражением вида [86]

$$U = C_{V0} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \gamma \cdot T\right) \cdot T, \quad (3.38)$$

где константы аппроксимации  $C_{V0}$  и  $\gamma$  для исходного состояния твердого тела определяются на основании таблиц термодинамических функций [86]. В формулах все энергетические параметры и температура выражены в электронвольтах.

Как показали оценки, состояние возмущенной группы атомов в течение времени существования возбуждения следует рассматривать как некоторое квазиодномерное состояние с температурой порядка нескольких электронвольт и с плотностью, близкой к плотности твердого тела. Такое состояние соответствует состоянию идеального одноатомного газа, молекулы которого имеют три поступательные степени свободы [87, 88]. Тогда внутреннюю энергию возбужденных атомов, как энергию идеального газа, можно записать как

$$U^* = C_V^* \cdot T^*,$$

где  $C_V^* \approx \frac{3}{2}R$  — молярная теплоемкость указанного состояния,  $T^*$  — температура возбужденных атомов, находится из соотношения

$$T^* = \frac{C_{V0}}{C_V^*} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \gamma \cdot T\right) \cdot T + \frac{a_E \cdot W + \delta Q_{ie}}{A_0 \cdot \lambda_p}, \quad A_0 = C_V^* \cdot n_a \cdot S_p. \quad (3.39)$$

В рамках рассматриваемой модели, например, для вольфрама при температуре 700 К отношение  $\frac{C_{V0}}{C_V^*}$  равно приблизительно 2. Пара-

метр  $A_0$  является константой аппроксимации. На рисунке 3.7 представлен вид зависимости температуры возбужденных ударом иона приповерхностных атомов от энергии налетающего иона. Расчет был выполнен для комбинации веществ аргон–вольфрам (Ar–W) при различных исходных температурах поверхности.

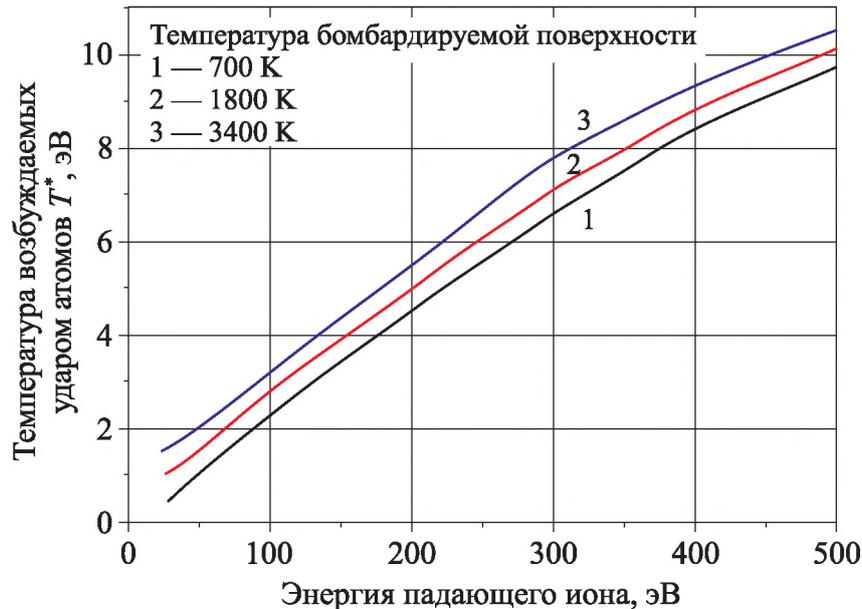


Рис. 3.7. Зависимость температуры возбуждаемых ударом иона приповерхностных атомов от энергии иона и температуры поверхности (Ar–W)

К сожалению, в уравнение энергии входит целый ряд эмпирических констант, которые требуют специального подбора. Наиболее существенную роль в энергообмене иона с поверхностью твердого тела играет коэффициент аккомодации кинетической энергии иона. Из экспериментальных исследований коэффициента аккомодации энергии ионов в области энергий от 100 до 500 эВ [89, 90] следует, что в области низких энергий иона коэффициент отличается от единицы и с уменьшением энергии иона также уменьшается. Поэтому необходимо дополнительное исследование зависимости коэффициента аккомодации энергии падающего иона от его энергии. В работе [90] была предложена полуэмпирическая формула для расчета коэффициента аккомодации энергии ионов в диапазоне энергий 100 ÷ 500 эВ. Однако предложенная формула не описывала область энергий меньше 100 эВ. Поэтому были исследованы полуэмпирические закономерности, предложенные в [89, 90]. Законо-

мерности были скорректированы на основании теории отражения частиц от поверхности, рассмотренной в [91].

В области низких энергий падающих ионов коэффициент аккомодации кинетической энергии можно ввести через коэффициент отражения энергии  $R_W$ , который определяется выражением [91]

$$R_W = \frac{1 - (X_W / (1 + X_W))^{1/2}}{1 + (3X_W / (1 + X_W))^{1/2}} \cdot \exp(-X_W), \quad (3.40)$$

где параметр  $X_W$  связан с концентрацией атомов твердого тела  $n_a$ , транспортным сечением упругого рассеяния  $\sigma_{tr}$  и длиной пробега иона  $\lambda$ :

$$X_W = \frac{2}{n_a \cdot \sigma_{tr} \cdot \lambda}. \quad (3.41)$$

Коэффициент аккомодации кинетической энергии  $a_W$  и коэффициент отражения энергии  $R_W$  связаны простым соотношением:

$$a_W = 1 - R_W. \quad (3.42)$$

На основании известных микроскопических параметров столкновений ионов с поверхностью твердого тела ( $\sigma_{tr}$ ,  $\lambda$  и  $\lambda_p$ ) можно рассчитать макроскопические параметры столкновений: коэффициент аккомодации кинетической энергии  $a_W$ , коэффициент отражения частиц  $R_N$ , среднюю энергию отраженных частиц  $\langle W \rangle$ . Коэффициент отражения частиц  $R_N$  определяется аналогично коэффициенту отражения энергии  $R_W$ , но параметр  $X_W$  в формуле следует заменить на  $X_N = \frac{1}{2} X_W$  [91]. Средняя энергия отраженных частиц, при заданной энергии бомбардирующих ионов  $W$ , находится из соотношения

$$\langle W \rangle = W \cdot \frac{R_W}{R_N}. \quad (3.43)$$

Значения перечисленных макроскопических параметров столкновений ионов с поверхностью необходимы также и для расчета тепло- и массообмена плазмы с поверхностью катода.

Как видно из формул (3.40)–(3.43), для расчета коэффициента аккомодации кинетической энергии при энергиях падающих ионов  $W \leq 500$  эВ требуется знание длины пробега иона и транспортного сечения упругих столкновений в этом диапазоне энергий. Поэтому была построена аппроксимирующая формула на основании известных из эксперимента коэффициентов аккомодации [89, 90]. При обработке экспериментальных результатов для построения аппроксимации использовался метод наименьших квадратов. Получено, что в рассматриваемом интервале энергий (100 ÷ 500) эВ с экстраполяцией в область припороговых энергий транспортное сечение упругого рассеяния медленных ионов при столкновении с поверхностью твердого тела удовлетворительно аппроксимируется выражением вида

$$\sigma_{tr} = \frac{\sigma_0}{W} \cdot \left( b + \left( \frac{W_0}{W} \right)^m \right), \quad (3.44)$$

где  $\sigma_0$ ,  $E_0$ ,  $b$ ,  $m$  — константы аппроксимации. Ниже приведены примеры полученных констант аппроксимации для двух комбинаций пар веществ «ион–мишень»:

|                    |         |         |                   |  |
|--------------------|---------|---------|-------------------|--|
| Ar <sup>+</sup> –W | $b = 1$ | $m = 1$ | $W_0 = 111,1$ эВ  | $\sigma_0 = 1,08 \cdot 10^3 \text{ \AA}^2$ |
| Cu <sup>+</sup> –W | $b = 1$ | $m = 2$ | $W_0 = 182,19$ эВ | $\sigma_0 = 2,15 \cdot 10^3 \text{ \AA}^2$ |

На рисунке 3.8 представлены рассчитанные величины коэффициентов аккомодации кинетической энергии ионов аргона и ксенона при бомбардировке поверхности меди или вольфрама. Также на графики нанесены экспериментальные точки [89, 90]. Среднее относительное отклонение расчетных значений  $a_W$  от экспериментальных данных во всем исследуемом диапазоне не превышает нескольких процентов для рассмотренных пар веществ.

Рассмотренный выше механизм разогрева группы приповерхностных атомов мишени (поверхности твердого тела), с учетом возможных столкновений достаточно быстрых атомов между собой, обуславливает возможность установления распределения по энергиям близкого к максвелловскому с температурой  $T^*$ . За время существования возбужденной

приповерхностной группы атомов может произойти испарение атома с поверхности. Для скорости испарения используем соотношение [88]:

$$\dot{m}_{ev}(T^*) = C_{ev} \cdot (T^*)^{-1/2} \cdot \exp\left(-\frac{W_{ev}}{T^*}\right), \quad (3.45)$$

где  $C_{ev}$  и  $W_{ev}$  — константы аппроксимации, причем величина  $W_{ev}$  обычно принимается равной энергии сублимации или энергии испарения.

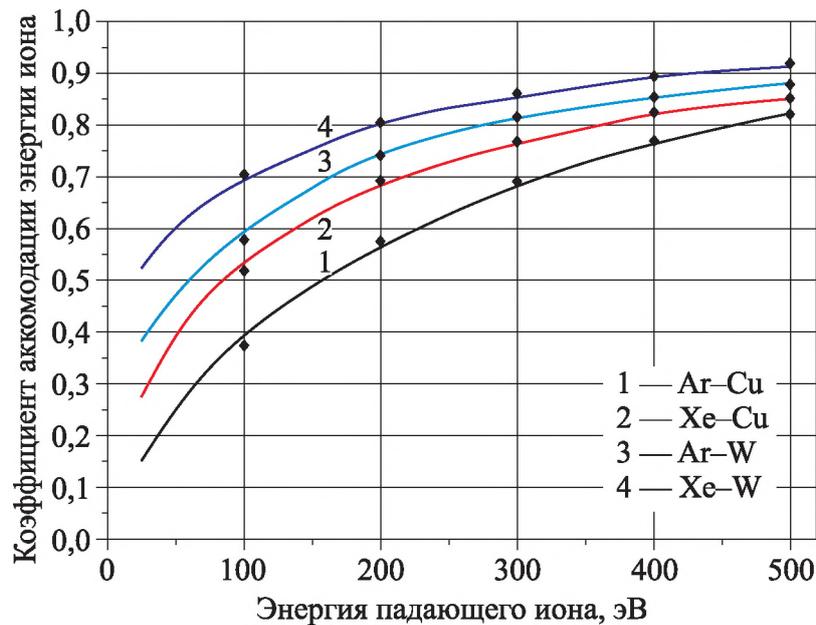


Рис. 3.8. Зависимость коэффициента аккомодации от энергии падающего иона: — моделирование,  $\blacklozenge$  — результаты эксперимента [89, 90]

Тогда средняя скорость эрозии поверхности тела за счет указанного процесса «испарения» в результате бомбардировки ионами низких энергий при известной плотности ионного тока  $j_{ik}$  на поверхность определяется выражением

$$\dot{m}_{sp} = \frac{1}{e} \cdot j_{ik} \cdot S_p \cdot \tau_p \cdot \dot{m}_{ev} = \frac{1}{e} \cdot j_{ik} \cdot S_p \cdot \tau_p \cdot C_{ev} \cdot (T^*)^{-1/2} \cdot \exp\left(-\frac{W_{ev}}{T^*}\right). \quad (3.46)$$

Коэффициент распыления поверхности по определению есть величина, равная

$$Y = \frac{N_{am}}{N_i} = \frac{\dot{m}_{sp}}{m_a} \cdot \frac{e}{j_{ik} S_p} \quad [\text{атом/ион}],$$

где  $m_a$  — масса атома мишени (твёрдого тела),  $\tau_p$  — время ионизации.

При подстановке скорости процесса испарения получим выражение

$$Y = \frac{1}{m_a} \cdot \tau_p \cdot C_{ev} \cdot (T^*)^{-1/2} \cdot \exp\left(-\frac{W_{ev}}{T^*}\right) = Y_0 \cdot (T^*)^{-1/2} \cdot \exp\left(-\frac{W_{ev}}{T^*}\right). \quad (3.47)$$

В (3.47) введена масштабная величина  $Y_0 = \frac{\tau_p \cdot C_{ev}}{m_a}$ , выраженная в эВ, которая является эмпирической постоянной.

Таким образом, методика расчета коэффициента распыления поверхности металла при низких энергиях ионов ( $W < 500$  эВ) включает соотношения для:

коэффициента распыления (3.32):

$$Y = Y_0 \cdot (T^*)^{-1/2} \cdot \exp\left(-\frac{W_{ev}}{T^*}\right);$$

температуры возбужденных атомов (3.24):

$$T^* = \frac{C_{V0}}{C_V^*} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \gamma \cdot T\right) \cdot T + \frac{a_E \cdot W + \delta Q_{ie}}{A_0 \cdot \lambda_p};$$

коэффициента аккомодации кинетической энергии (3.25)–(3.27):

$$a_W = 1 - \frac{1 - (X_W / (1 + X_W))^{1/2}}{1 + (3X_W / (1 + X_W))^{1/2}} \cdot \exp(-X_W);$$

длины проективного пробега иона (3.21):

$$\lambda_p = \lambda_{p0} \cdot (1 + B \cdot W^{2/3});$$

транспортного сечения рассеяния (3.29):

$$\sigma_{tr} = \frac{\sigma_0}{W} \cdot \left( b + \left( \frac{W_0}{W} \right)^m \right).$$

Параметры аппроксимации  $\sigma_0$ ,  $W_0$ ,  $m$ ,  $b$ ,  $R_{0p}$ ,  $B$  определяются независимым путем на основании экспериментальных данных для коэффициента аккомодации. Параметры  $Y_0$ ,  $A_0$ ,  $\delta Q_{ie}$  определяются в процессе

решения системы перечисленных уравнений с привлечением экспериментальных данных по коэффициентам распыления, исходя из необходимости согласования расчетных и экспериментальных данных. Параметры  $C^*$ ,  $\gamma$  получены путем аппроксимации табличных значений энтальпии твердого тела. При определении параметра  $C^*$  было также учтено требование наилучшего согласия вычисленных и измеренных коэффициентов распыления при высоких температурах в соответствии с гипотезой Зигмунда [88] о квазиконденсированном состоянии группы возбужденных атомов. Для комбинации «ион–мишень» Ar–W получены  $Y_0 = 3,60015 \text{ эВ}^{1/2}$  и  $A_0 = 4,84266 \text{ \AA}^{-1}$ ,  $\delta Q_{ie} = 0$ .

На рисунке 3.9 представлены результаты расчета коэффициента распыления для комбинации веществ аргон–вольфрам (Ar–W) в области низких энергий ионов в зависимости от температуры бомбардируемой поверхности. Прежде всего следует отметить хорошее согласие экспериментальных данных работы [92] и результатов расчета. Также в расчете получен эффект существенного возрастания коэффициента распыления при увеличении температуры мишени из тугоплавкого материала, что соответствует экспериментальным данным работ [93, 94]. Таким образом, рассмотренная модель удовлетворительно описывает закономерности распыления при низких энергиях ионов ( $W < 400 \text{ эВ}$ ) и высоких

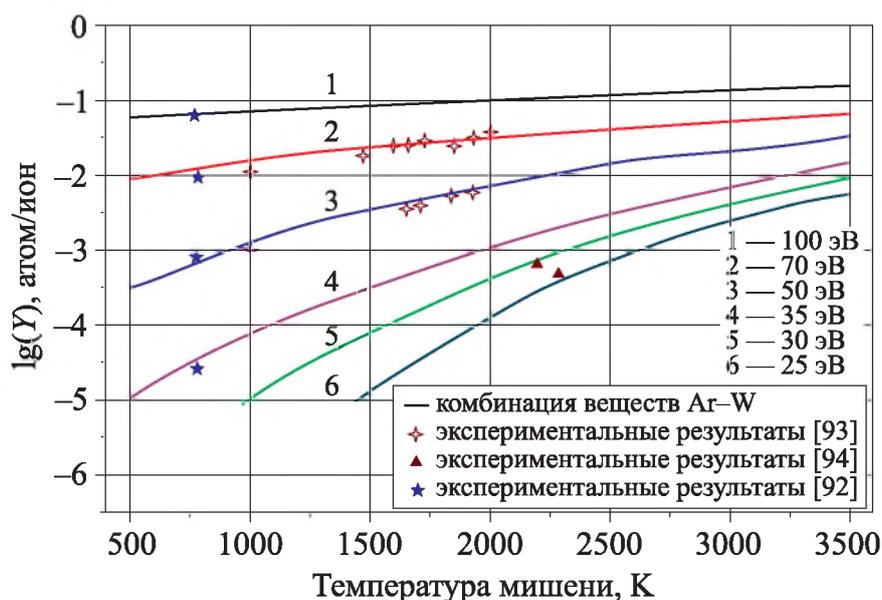


Рис. 3.9. Зависимость коэффициента распыления от температуры мишени при различных энергиях ионов

температурах и может быть использована при расчете эрозии полых катодов, для которых характерны как раз низкие прикатодные напряжения и высокие температуры поверхности катода.

Также расчеты показали, что средняя энергия возбужденных ударом приповерхностных атомов, описываемая температурой возбуждения  $T^*$ , существенно меньше энергии падающих ионов, но при этом составляет значительную величину. Например, при бомбардировке вольфрама ионами аргона с энергиями 100–300 эВ температура  $T^*$  составляет от 2,5 до 7 эВ. Это означает, что распыленные атомы вылетают с энергией порядка нескольких электронвольт, что необходимо учитывать при дальнейшем рассмотрении процесса рециклинга.

В результате бомбардировки поверхности материала медленными ионами появляется поток распыленных атомов материала мишени, направленный от поверхности к плазме, и плотность этого потока:

$$\dot{m}_{sp} = j_{ik} \cdot \frac{M_a}{F} \cdot Y(E, T^*), \quad (3.48)$$

где  $Y$  — коэффициент распыления,  $M_a$  — молярная масса атомов мишени,  $F$  — число Фарадея.

Экспериментально можно определить величину средней удельной эрозии

$$g = \frac{\Delta m}{I \cdot \Delta t} \left[ \frac{\text{кг}}{\text{Кл}} \right], \quad (3.49)$$

где  $\Delta m$  — суммарный унос массы,  $I$  — сила тока разряда,  $\Delta t$  — длительность работы катода при заданном режиме.

Можно также ввести величину локальной удельной эрозии:

$$g_{л} = \frac{\dot{m}}{j_n},$$

где  $\dot{m}$  — локальная скорость уноса массы с единицы поверхности катода,  $j_n$  — локальная плотность тока на поверхность катода.

Локальные параметры связаны с интегральными параметрами:

$$\Delta m = \iint_{\Delta t S_m} \dot{m} \cdot ds \cdot dt \quad \text{и} \quad I = \frac{1}{\Delta t} \iint_{\Delta t S_m} j_n ds \cdot dt.$$

В эксперименте определяется величина средней удельной эрозии. И эта величина естественно включает в себя результат суммарного воздействия различных механизмов уноса и возврата массы катода.

В частном случае, если эрозия поверхности происходит за счет преобладающего распыления, можно связать коэффициент распыления  $Y$  и удельную эрозию следующим соотношением [92]:

$$g_{sp} = Y(W, T^*) \cdot A_a \cdot \beta_k \cdot \frac{m_p}{e}.$$

В этом выражении  $A_a$  — относительная атомная масса вещества мишени (катода),  $\beta_k = j_{ik}/j_n$  — доля ионного тока на катод,  $m_p/e = 1,044 \cdot 10^{-8}$  кг/Кл. Это соотношение для средней удельной эрозии справедливо в случаях, когда испарением атомов можно пренебречь. Правда, необходимо знание доли ионного тока на поверхность катода. Однако при небольших плотностях ионного тока области локального возмущения от ударов отдельных ионов не перекрываются. В такой ситуации процессы эрозии за счет испарения и распыления являются независимыми и суммарный унос массы складывается из потерь массы в каждом процессе:  $\dot{m} = \dot{m}_{ev} + \dot{m}_{sp}$ . Тогда и суммарная удельная эрозия находится как сумма  $g = g_{ev} + g_{sp}$ .

### 3.3.2. Уравнения баланса примеси продуктов эрозии полого катода

В модели, используемой в настоящей работе, предполагается, что эрозия каналов полого многоканального катода происходит при совокупном влиянии трех процессов: испарения, распыления и осаждения распыленного материала. Рассматриваются режимы, при которых концентрации атомов и ионов примеси существенно меньше концентрации атомов и ионов плазмообразующего газа. Как показали расчеты и эксперименты [90, 91, 93, 103, 120, 121], это предположение оправдывается для большинства полых катодов, работающих в режиме термоэмиссии.

Моделирование проводится в цилиндрической системе координат с учетом азимутальной симметрии. Эрозия поверхности стержней набивки рассматривается по слоям набивки, начиная от центрального стержня.

Если относительное изменение радиуса стержня набивки катода вследствие эрозии сравнительно невелико, то возможно рассмотреть локальное изменение концентрации примеси в плазме канала за счет перечисленных выше процессов:

– уравнение баланса массы ионов примеси:

$$\frac{S_p}{2\pi \cdot r_{\text{эфф}}} \frac{d}{dz} (v_z n_{ik} m_{ik}) = \dot{m}_{i,sp} + \dot{m}_{i,ev} + \sum_n^{i,a} R_{ni} \dot{m}_{n,rec} + \frac{S_p}{2\pi \cdot r_{\text{эфф}}} m_{ik} \omega_{ek}; \quad (3.50)$$

– уравнение баланса массы атомов примеси:

$$\frac{S_p}{2\pi \cdot r_{\text{эфф}}} \frac{d}{dz} (v_z n_{ak} m_{ak}) = \dot{m}_{a,sp} + \dot{m}_{a,ev} + \sum_n^{i,a} R_{na} \dot{m}_{n,rec} - \frac{S_p}{2\pi \cdot r_{\text{эфф}}} m_{ak} \omega_{ek}; \quad (3.51)$$

– законы сохранения массы атомов и ионов примеси на поверхности:

$$a_a + R_{ai} + R_{aa} = 1; \quad a_i + R_{ii} + R_{ia} = 1, \quad (3.52)$$

где  $n_{ak}$ ,  $n_{ik}$  — концентрация атомов и ионов примеси;  $m_{ak} \cong m_{ik}$  — масса ионов и атомов примеси;  $\dot{m}_{a,sp}$ ,  $\dot{m}_{i,sp}$  — локальная скорость потока массы с единицы поверхности катода;  $\dot{m}_{a,ev}$ ,  $\dot{m}_{i,ev}$  — скорость испарения массы в виде атомов и ионов;  $\dot{m}_{a,rec}$ ,  $\dot{m}_{i,rec}$  — плотность потоков массы атомов и ионов примеси из плазмы на поверхность катода;  $a_a$ ,  $a_i$  — коэффициенты прилипания атомов и ионов примеси;  $R_{ia}$ ,  $R_{ai}$ ,  $R_{ii}$ ,  $R_{aa}$  — коэффициенты отражения атомов и ионов;  $\omega_{ek}$  — скорость ионизации примеси;  $r_{\text{эфф}}$  — эффективный радиус канала;  $S_p$  — смачиваемый плазмой периметр канала;  $\omega_{ek}$  — скорость ионизации примеси.

Степень ионизации плазмы  $X_i$  определяется отношением  $X_i \approx n_i / (n_i + n_a)$ , тогда относительные концентрации компонентов соответственно будут определяться как:

$$\begin{aligned} X_a &= n_a / (n_i + n_a) && \text{— для атомов плазмообразующего газа;} \\ X_{ak} &= n_{ak} / (n_i + n_a) && \text{— для атомов примеси;} \\ X_{ik} &= n_{ik} / (n_i + n_a) && \text{— для ионов примеси.} \end{aligned}$$

В рассматриваемом приближении скорость плазмы в целом (смеси пяти компонент) определяется соотношением

$$v_z \cong \frac{G_g}{m_i(n_a + n_i)S_p}. \quad (3.53)$$

В качестве исходной системы уравнений баланса компонентов примеси принимаем уравнение (3.51) и сумму уравнений (3.50) и (3.51). С учетом относительных концентраций компонентов примеси и скорости потока уравнения баланса частиц примеси примут вид

$$\dot{m}_g \cdot \frac{dX_{ak}}{dz} = \dot{m}_{a,sp} + \dot{m}_{a,ev} + (1 - a_i)\dot{m}_{i,rec} - a_a \cdot \dot{m}_{a,rec} - \frac{S_p \cdot m_{ik}}{2\pi r_{\text{эфф}}} \cdot \omega_{ek}, \quad (3.54)$$

$$\dot{m}_g \cdot \frac{d(X_{ik} + X_{ak})}{dz} = \dot{m}_{sp} + \dot{m}_{ev} - a_a \cdot \dot{m}_{a,rec} - a_i \cdot \dot{m}_{i,rec}, \quad (3.55)$$

где  $\dot{m}_g = \frac{G_g \cdot m_{ik}}{L_k \cdot 2\pi r_{\text{эфф}} \cdot m_i}$ , величины  $\dot{m}_{sp}$  и  $\dot{m}_{ev}$  были получены в предыдущем разделе, см. (3.30) и (3.33).

Скорости распыления и испарения  $\dot{m}_{sp}$  и  $\dot{m}_{ev}$  не зависят от концентраций атомов и ионов примеси  $X_{ak}$  и  $X_{ik}$ , они определяются температурой катода  $T$ , прикатодным падением напряжения  $\Delta\varphi_k$  и плотностью ионного тока на катод  $j_{ik}$ .

Вынос массы продуктов эрозии потоком плазмы в случае полого катода с прокачкой рабочего вещества осуществляется вследствие конвективного переноса примеси вдоль канала со скоростью

$$\dot{m} = \frac{m_{ik}G_g(X_{ik} + X_{ak})}{m_i}. \quad (3.56)$$

Удельная эрозия катода (коэффициент уноса массы) на основании (3.49) примет вид

$$g = \frac{m_{ik}G_g(X_{ik} + X_{ak})}{m_i \cdot I}. \quad (3.57)$$

Причем в (3.41) и (3.42) значения концентраций компонентов примеси  $X_{ik}$  и  $X_{ak}$  берутся при  $z = L_k$  на свободном торце катода на выходе из канала.

### 3.3.3. Расчет скорости процесса рециклинга

Определение плотностей потоков массы атомов и ионов примеси обратно на поверхность катода (процесс рециклинга) представляет собой отдельную задачу. Рассмотрим пятикомпонентную плазму:  $e$  — электроны,  $a$  — атомы плазмообразующего газа,  $i$  — ионы плазмообразующего газа,  $a_k$  — атомы материала катода,  $i_k$  — ионы материала катода. Система уравнений движения пятикомпонентной неизотермической частично ионизованной плазмы в проекции на радиальное направление:

$$-\nabla P_s + \ell_s \cdot n_s \cdot E_r = M_{rs}, \quad (3.58)$$

где  $M_{rs} = \sum_t n_s \cdot v_{st} \cdot m_{st} (v_{rs} - v_{rt})$ ,  $v_{rs}$  и  $v_{rt}$  — искомые скорости (диффузия и подвижность) компонентов примеси, частоты столкновений  $v_{st} = n_t \cdot g_{st} \cdot Q_{st}$ , средняя арифметическая скорость  $g_{st} = \sqrt{\frac{8k \cdot T_{st}}{\pi \cdot m_{st}}}$ , приведенная масса  $m_{st} = \frac{m_s \cdot m_t}{m_s + m_t}$ , температура  $T_{st} = T_s \cdot \frac{m_{st}}{m_s} + T_t \cdot \frac{m_{st}}{m_t}$ ,  $E_r$  — радиальная напряженность электрического поля в канале,  $Q_{st}$  — среднее сечение столкновений соответствующих частиц с передачей импульса [55–57, 96, 97].

Индексы  $s$  и  $t$  принимают значения, соответствующие всем пяти перечисленным типам частиц. Кроме того, в систему добавляется уравнение неразрывности:

$$\sum_s \rho_s \cdot v_s = 0. \quad (3.59)$$

Разрешив систему уравнений (3.58), (3.59) относительно скоростей  $v_s$ , можно применить полученные скорости для определения плотности тока ионов примеси на катод с учетом того, что  $X_{ak} \ll X_{ik} \ll X_i$ :

$$j_{ik,k} = \frac{1}{1 + \frac{1 - X_i}{X_i} \cdot \frac{Q_{ik,a}}{Q_{ik,i}}} \cdot \frac{j_{ik}}{X_i} \cdot X_{ik}. \quad (3.60)$$

Тогда плотность потока возврата массы ионов на катод пропорциональна относительной концентрации примеси:

$$\dot{m}_{i,rec} = \alpha_{i,rec} \cdot X_{ik} = \frac{m_{ik}}{e} j_{ik,k}, \quad (3.61)$$

где коэффициент пропорциональности

$$\alpha_{i,rec} = \frac{m_{ik}}{e} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1 - X_i}{X_i} \cdot \frac{Q_{ik,a}}{Q_{ik,i}}} \cdot \frac{j_{ik}}{X_i} \quad (3.62)$$

зависит от плотности ионного тока плазмы на катод и степени ионизации плазмы. Так как отношение сечений столкновений порядка  $\frac{Q_{ik,a}}{Q_{ik,i}} \approx 10^{-4}$ , то при степени ионизации плазмы  $X_i > 0,001$  можно приближенно считать:

$$\alpha_{i,rec} \approx \frac{m_{ik}}{e} \cdot \frac{j_{ik}}{X_i}.$$

При этом величина плотности ионного тока на катод  $j_{ik}$  получена в главе 1 при предварительном моделировании параметров состояния плазмы. Оценки, выполненные для рабочих режимов дугового полого катода, показали, что при прокачке аргона отношение  $\frac{j_{ik}}{X_i} \approx 10^6$  А/м<sup>2</sup>, а для комбинации аргон–вольфрам параметр  $\alpha_{i,rec} \approx 2$  кг/м<sup>2</sup> при степени ионизации  $X_i > 0,001$ .

Аналогичным способом может быть получено выражение для плотности потока атомов примеси, где параметр

$$\dot{m}_{a,rec} = \alpha_{a,rec} \cdot X_{ak}, \quad (3.63)$$

$$\alpha_{a,rec} = \frac{m_{ik}}{e} \cdot \frac{1 - \frac{Q_{ak,a}}{Q_{ak,i}}}{1 + \frac{1 - X_i}{X_i} \cdot \frac{Q_{ak,a}}{Q_{ak,i}}} \cdot \frac{j_{ik}}{X_i}, \quad (3.64)$$

Для плазмы инертных газов сечения столкновений с атомами и ионами распыленного металла  $Q_{ak,i} = 2Q_{ik,i}$  [84], поэтому

$$\alpha_{a,rec} = \frac{m_{ik}}{e} \cdot \frac{1 - \frac{Q_{ak,a}}{Q_{ak,i}}}{1 + \frac{1 - X_i}{X_i} \cdot \frac{Q_{ak,a}}{Q_{ak,i}}} \cdot \frac{j_{ik}}{X_i} \approx \frac{m_{ik}}{e} \cdot \frac{2X_i}{1 + X_i} \cdot \frac{j_{ik}}{X_i}.$$

Для скорости ионизации атомов примеси использовано выражение, полученное ранее [19].

$$\omega_{ek} = \alpha_{ik} \cdot n_{ak} \cdot n_e; \quad \alpha_{ik} = C_k \cdot \bar{v}_e (V_{ik} + 2kT_e) \cdot \exp\left(-\frac{V_{ik}}{kT_e}\right),$$

где константа  $C_k = 2,6 \cdot 10^{-21} \left(\frac{V_H}{V_{ik}}\right)^3$  м<sup>2</sup>/эВ;  $V_{ik}$  — потенциал ионизации атома примеси, выраженный в эВ;  $V_H = 13,6$  эВ — потенциал ионизации атома водорода.

### 3.4. Система уравнений для пятикомпонентной плазмы

Запишем дифференциальные уравнения баланса массы примеси продуктов эрозии катода (для атомов и ионов материала катода) через относительные концентрации компонентов примеси, полученные на основании уравнений (3.50) и (3.51):

$$\frac{dX_{ak}}{dz} = \frac{1}{\dot{m}_g} \left( \left( (R_{aa} - 1) \alpha_{a,rec} - \frac{S_p}{2\pi r_{эфф}} m_{ak} \alpha_{ik} n_e (n_a + n_i) \right) X_{ak} + \right. \\ \left. + R_{ia} \alpha_{i,rec} X_{ik} + \dot{m}_{a,sp} + \dot{m}_{a,ev} \right), \quad (3.65)$$

$$\frac{dX_{ik}}{dz} = \frac{1}{\dot{m}_g} \left( \left( R_{ai} \alpha_{a,rec} + \frac{S_p}{2\pi r_{эфф}} m_{ik} \alpha_{ik} n_e (n_a + n_i) \right) X_{ak} + \right. \\ \left. + (R_{ii} - 1) \alpha_{i,rec} X_{ik} + \dot{m}_{i,sp} + \dot{m}_{i,ev} \right). \quad (3.66)$$

Для паров металла (вольфрама или тантала) примем коэффициенты отражения атомов и ионов  $R_{ai} = 0$  и  $R_{ii} = 0$ . В таком случае коэффициенты прилипания атомов и ионов примеси следующие:

$$a_a = 1 - R_{aa}, \quad a_i = 1 - R_{ia}. \quad (3.67)$$

Величину коэффициентов прилипания и отражения можно варьировать при моделировании для лучшего согласования с экспериментальными данными. С учетом (3.67) уравнения (3.65) и (3.66) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{dX_{ak}}{dz} = & -\frac{1}{\dot{m}_g} \left( a_a \alpha_{a,rec} + \frac{S_p}{2\pi r_{\text{эфф}}} m_{ak} \alpha_{ik} n_e (n_a + n_i) \right) X_{ak} + \\ & + \frac{1}{\dot{m}_g} (1 - a_i) \alpha_{i,rec} X_{ik} + \frac{1}{\dot{m}_g} (\dot{m}_{a,sp} + \dot{m}_{a,ev}), \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_{ik}}{dz} = & \frac{1}{\dot{m}_g} \left( \frac{S_p}{2\pi r_{\text{эфф}}} m_{ik} \alpha_{ik} n_e (n_a + n_i) \right) X_{ak} - \\ & - \frac{1}{\dot{m}_g} \alpha_{i,rec} X_{ik} + \frac{1}{\dot{m}_g} (\dot{m}_{i,sp} + \dot{m}_{i,ev}). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Введем обозначение скорости ионизации примеси в виде

$$\omega_{ek} = \frac{S_p}{2\pi r_{\text{эфф}}} m_{ik} \alpha_{ik} n_e (n_a + n_i). \quad (3.70)$$

Тогда система уравнений, описывающая концентрацию ионов и атомов примеси, преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{m}_g \frac{dX_{ak}}{dz} = & - \left( a_a \alpha_{i,rec} \frac{X_i}{1 + X_i} + \omega_{ek} \right) X_{ak} + \\ & + (1 - a_i) \alpha_{i,rec} X_{ik} + (\dot{m}_{a,sp} + \dot{m}_{a,ev}), \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\dot{m}_g \frac{dX_{ik}}{dz} = \omega_{ek} X_{ak} - \alpha_{i,rec} X_{ik} + (\dot{m}_{i,sp} + \dot{m}_{i,ev}). \quad (3.72)$$

Эта система уравнений должна решаться при естественном краевом условии

$$z = 0 \Rightarrow X_{ak} = X_{ik} = 0,$$

так как концентрация ионов и атомов примеси в начале канала равна нулю, а потом примесь выносится из канала потоком газа. Относительно искомым величин (концентраций ионов и атомов примеси) уравнения (3.71) и (3.72) представляют собой линейные дифференциальные уравне-

ния первого порядка с переменными коэффициентами. Особенности этих уравнений является наличие малого параметра ( $\dot{m}_g$  порядка  $10^{-3}$ ) при производной, а также функциональная зависимость правых частей уравнений (3.71) и (3.72) от искомым величин  $X_{ik}$  и  $X_{ak}$ .

В общем виде подобная система уравнений может быть записана в виде

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f, \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases} \quad (3.73)$$

С начальными условиями  $y_1(0) = y_2(0) = 0$ . Здесь введены обозначения коэффициентов уравнения  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ , которые при организации итерационного процесса на каждом шаге можно считать константами. Введем новую переменную:

$$y_3 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f.$$

Тогда система уравнений (3.58) преобразуется к виду

$$\begin{cases} y'_1 = y_3, \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \\ y'_3 = a_{11}y'_1 + a_{12}y'_2 \end{cases} \quad (3.74)$$

с граничным условием

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = f. \quad (3.75)$$

Систему (3.74) можно переписать в матричной форме:

$$B \cdot Y' = A \cdot Y, \quad (3.76)$$

где введены обозначения векторов и матриц:

$$Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножая уравнение (3.76) слева на обратную матрицу  $B$ , получаем

$$Y' = B^{-1} \cdot A \cdot Y, \quad (3.77)$$

где

$$B^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{12} \cdot a_{21} & a_{12} \cdot a_{22} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (3.78)$$

Выпишем для матричного уравнения (3.62) характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & 0 \\ a_{12} \cdot a_{21} & a_{12} \cdot a_{22} & a_{11} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда имеем

$$\lambda(a_{11} \cdot a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda - a_{12} \cdot a_{21}) = 0.$$

Корни характеристического уравнения —  $\lambda_1 = 0$  и

$$\lambda_{2,3} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12} \cdot a_{21}}}{2}.$$

Общее решение уравнения (3.62) имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{a_{22}}{a_{21}} \cdot C_1 + e^{\lambda_2 x} \cdot C_2 + e^{\lambda_3 x} \cdot C_3, \\ y_2 &= C_1 + \frac{a_{21}}{\lambda_2 - a_{22}} e^{\lambda_2 x} \cdot C_2 + \frac{a_{21}}{\lambda_3 - a_{22}} e^{\lambda_3 x} \cdot C_3, \\ y_3 &= \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \cdot C_2 + \lambda_3 e^{\lambda_3 x} \cdot C_3. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Подставляя граничные условия (3.75) в найденные выражения  $y_1, y_2, y_3$  (3.79), находим коэффициенты:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{a_{21}}{a_{22}} \left( \left( 1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right) C_3 + \frac{1}{\lambda_2} \right), \\ C_2 &= \frac{1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} C_3, \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$C_3 = \left[ \frac{1}{\lambda_2} \left( \frac{1}{a_{22} - \lambda_2} - \frac{1}{a_{22}} \right) \right] \left[ \left( 1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right) \frac{1}{a_{22}} - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \frac{1}{\lambda_2 - a_{22}} + \frac{1}{\lambda_3 - a_{22}} \right]^{-1}.$$

Естественно, что параметры состояния плазмообразующего газа изменяются по длине канала, поэтому коэффициенты  $a_{ij}$  в уравнении (3.73) — переменные. Поэтому для решения системы активная зона канала разбивается на некоторое число интервалов, таких, что в пределах каждого интервала коэффициенты можно считать постоянными и соответствующими локальным значениям параметров плазмы. В качестве начальных значений для функций  $y_1, y_2, y_3$  принимаются их значения, определенные на границе предыдущего интервала. Таким образом, коэффициенты интегрирования  $C_1, C_2, C_3$  определяются на каждом шаге итерационного процесса в интервале  $[x, x + \Delta x]$  из системы

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -\frac{a_{22}}{a_{21}} \cdot C_1 + e^{\lambda_2 \Delta x} \cdot C_2 + e^{\lambda_3 \Delta x} \cdot C_3, \\ y_2(x) &= C_1 + \frac{a_{21}}{\lambda_2 - a_{22}} e^{\lambda_2 \Delta x} \cdot C_2 + \frac{a_{21}}{\lambda_3 - a_{22}} e^{\lambda_3 \Delta x} \cdot C_3, \\ y_3 &= \lambda_2 e^{\lambda_2 \Delta x} \cdot C_2 + \lambda_3 e^{\lambda_3 \Delta x} \cdot C_3, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $a_{ij}$  и  $\lambda_{2,3}$  вычисляются в точке  $x + \Delta x$ .

Возможен и другой подход к решению. Поскольку процессы испарения и распыления атомов и ионов материала катода независимы, общие скорости процессов получаются суммированием  $\dot{m}_{a,sp} + \dot{m}_{i,sp} = \dot{m}_{sp}$  и  $\dot{m}_{a,ev} + \dot{m}_{i,ev} = \dot{m}_{ev}$ . Далее сложим уравнения (3.71) и (3.72) и с учетом (3.76), (3.77) получаем

$$\begin{aligned} \dot{m}_g \frac{d(X_{ik} + X_{ak})}{dz} &= \dot{m}_{sp} + \dot{m}_{ev} - a_a \alpha_{a,rec} X_{ak} - a_i \alpha_{i,rec} X_{ik} = \\ &= \dot{m}_{sp} + \dot{m}_{ev} - a_a \dot{m}_{a,rec} - a_i \dot{m}_{i,rec}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Правая часть уравнения (3.81) имеет физический смысл локальной скорости уноса массы с поверхности канала, то есть выражает локальную убыль массы:

$$\begin{aligned} \dot{m}_g \frac{d(X_{ik} + X_{ak})}{dz} &= -\dot{m}_W, \\ \dot{m}_W &= a_a \dot{m}_{a,rec} + a_i \dot{m}_{i,rec} - (\dot{m}_{sp} + \dot{m}_{ev}) = \dot{m}_{rec} - (\dot{m}_{sp} + \dot{m}_{ev}). \end{aligned} \quad (3.82)$$

В выражении (3.82) также введена локальная общая скорость рециклинга атомов и ионов примеси  $\dot{m}_{rec}$ .

Выполним числовые оценки масштабов величин, связанных с эрозией. Пусть расход плазмообразующего газа аргон (Ar) —  $G_g = 10^{-6}$  кг/с, длина катода —  $L_k = 10^{-1}$  м, длина активной зоны —  $L_p = 10^{-2}$  м. Тогда для тугоплавких металлов (вольфрам или тантал)  $\frac{m_{ik}}{m_i} \approx 4,5$  и  $\dot{m}_g \approx 4 \cdot 10^{-3}$  кг/м<sup>2</sup>·с. Пусть  $T_e \approx 2,5$  эВ,  $n_a \approx 10^{21}$  м<sup>-3</sup>,  $n_e \approx 10^{20}$  м<sup>-3</sup>. Если принять  $\dot{m}_{sp} \approx 10^{-4}$  кг/с и  $\dot{m}_{sp} \gg \dot{m}_{ev}$ , а также пренебречь изменением концентрации примеси во времени, то можно приблизительно оценить

$$X_{ak} = \frac{\dot{m}_{sp} + \dot{m}_{ev}}{\frac{S_p}{2\pi r_{эфф}} \alpha_{ik} n_e (n_e + n_a) + \alpha_{a,rec}} \approx \frac{\dot{m}_{sp}}{\frac{S_p}{2\pi r_{эфф}} \alpha_{ik} n_e (n_e + n_a)} \approx 10^{-6}.$$

Так как  $\alpha_{i,rec} \gg \dot{m}_g$ , то для оценки можно принять

$$X_{ik} \approx \frac{\dot{m}_{sp}}{\alpha_{i,rec}} \left( 1 + \frac{\dot{m}_{ev}}{\dot{m}_{sp}} \right) \approx 10^{-4}. \text{ Таким образом, действительно концентрации}$$

$X_{ak} \ll X_{ik} \ll X_i$ , и введенное ранее предположение справедливо.

Выполним также оценки для сопоставления с экспериментальными данными [58]. Если расход газа —  $G_g = 3,6 \cdot 10^{-5}$  кг/с и ток разряда —  $I = 300$  А, то коэффициент эрозии  $Y \approx 2 \cdot 10^{-3}$  атом/ион, скорости процессов испарения и распыления примерно одинаковы и удельная эрозия —  $g \approx 2,2 \cdot 10^{-10}$  кг/Кл. Удельный унос массы многоканального полого катода с учетом реальной поперечной площади каналов при плотности тока  $j_z \approx 10^7$  А/м<sup>2</sup> составляет по оценке  $\dot{m} \approx 2,1 \cdot 10^{-3}$  кг/м<sup>2</sup>·с, что близко к экспериментальному результату. Однако величина удельной эрозии за счет распыления получается завышенной.

Таким образом, внутренние поверхности катода находятся в состоянии непрерывного и интенсивного преобразования. Локальная скорость уноса массы (3.82) может изменять знак в зависимости от того, какой из процессов — разрушения или осаждения — преобладает в данной

точке поверхности. Также локальный унос массы позволяет отслеживать динамику изменения поверхности стержней и оболочки катода по всей длине.

### 3.5. Методика численного интегрирования уравнений массопереноса в каналах полого катода

Умножая левую и правую части уравнения (3.66) на величину площади поверхности канала  $2\pi r_k L_k$  и интегрируя по длине активной зоны, получим интегральный закон сохранения массы для единичного канала в виде

$$2\pi r_{\text{эфф}} L_k \dot{m}_g (X_{ik} + X_{ak})_{z=L_k} = -2\pi r_{\text{эфф}} L_k \int_{z_p}^{L_k} \dot{m}_W dz. \quad (3.83)$$

Левая часть уравнения (3.83) с учетом  $\dot{m}_g = \frac{G_g \cdot m_{ik}}{L_k \cdot 2\pi r_{\text{эфф}} \cdot m_i}$  определяет интегральный унос массы, найденный по значениям концентрации продуктов эрозии  $X_{ik}$  и  $X_{ak}$  в выходном сечении катода (3.56):

$$\begin{aligned} \dot{M} &= 2\pi r_{\text{эфф}} L_k \dot{m}_g (X_{ik} + X_{ak})_{z=L_k} = \\ &= \frac{G_g m_{ik}}{m_i} (X_{ik} + X_{ak})_{z=L_k} \approx \frac{G_g m_{ak}}{m_a} (X_{ik} + X_{ak})_{z=L_k}. \end{aligned}$$

Правая часть уравнения (3.83) определяет тот же интегральный унос массы, причем вычисленный через распределение концентраций атомов и ионов примеси по всей активной зоне канала:

$$\begin{aligned} \dot{M}_W &= -2\pi r_{\text{эфф}} L_k \int_{z_p}^{L_k} \dot{m}_W dz = \\ &= -2\pi r_{\text{эфф}} L_k \int_{L_p}^{L_k} \left( a_a \alpha_{a,rec} X_{ak} + a_i \alpha_{i,rec} X_{ik} - (\dot{m}_{sp} + \dot{m}_{ev}) \right) dz. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Как следует из соотношений (3.56) и (3.84), а также (3.71)–(3.72), интегральный и локальный унос массы определяется локальными кон-

центрациями продуктов эрозии  $X_{ik}$  и  $X_{ak}$ . Для разрешения системы уравнений (3.71) и (3.72) перейдем к интегральной форме уравнений, тогда краевые условия для относительных концентраций  $X_{ik}$  и  $X_{ak}$  будут удовлетворяться автоматически:

$$X_{ik} = \frac{\omega_{ek}}{\omega_{ek} + \alpha_{i,rec}} \frac{1}{\dot{m}_g} \left( \int_{L_p}^{L_k} (\dot{m}_{i,sp} + \dot{m}_{i,ev}) dz - \left( a_i \int_{L_p}^{L_k} \alpha_{i,rec} X_{ik} dz + a_a \int_{L_p}^{L_k} \frac{X_i}{1 + X_i} \alpha_{i,rec} X_{ak} dz \right) \right), \quad (3.85)$$

$$X_{ak} = \frac{\alpha_{i,rec}}{\omega_{ek} + \alpha_{i,rec}} \frac{1}{\dot{m}_g} \left( \int_{L_p}^{L_k} (\dot{m}_{a,sp} + \dot{m}_{a,ev}) dz - \left( a_i \int_{L_p}^{L_k} \alpha_{i,rec} X_{ik} dz + a_a \int_{L_p}^{L_k} \frac{X_i}{1 + X_i} \alpha_{i,rec} X_{ak} dz \right) \right). \quad (3.86)$$

Такая форма наиболее удобна для организации итерационного процесса решения этих уравнений:

$$X_{ik} = X_{ik}^{(0)} - \frac{\omega_{ek}}{\omega_{ek} + \alpha_{i,rec}} \frac{1}{\dot{m}_g} \left( a_i \int_{L_p}^z \alpha_{i,rec} X_{ik} dz + a_a \int_{L_p}^z \frac{X_i}{1 + X_i} \alpha_{i,rec} X_{ak} dz \right), \quad (3.87)$$

$$X_{ak} = X_{ak}^{(0)} - \frac{\alpha_{i,rec}}{\omega_{ek} + \alpha_{i,rec}} \frac{1}{\dot{m}_g} \left( a_i \int_{L_p}^{L_k} \alpha_{i,rec} X_{ik} dz + a_a \int_{L_p}^{L_k} \frac{X_i}{1 + X_i} \alpha_{i,rec} X_{ak} dz \right), \quad (3.88)$$

где начальное приближение рассчитывается только по испарению и распылению:

$$X_{ik}^{(0)} = \frac{\omega_{ek}}{\omega_{ek} + \alpha_{i,rec}} \frac{1}{\dot{m}_g} \int_{L_p}^z (\dot{m}_{i,sp} + \dot{m}_{i,ev}) dz, \quad (3.89)$$

$$X_{ak}^{(0)} = \frac{\alpha_{i,rec}}{\omega_{ek} + \alpha_{i,rec}} \frac{1}{\dot{m}_g} \int_{L_p}^z (\dot{m}_{a,sp} + \dot{m}_{a,ev}) dz. \quad (3.90)$$

А далее учитывается процесс рециклинга.

Система уравнений (3.87)–(3.90) может быть решена численно методом простых итераций по схеме:

$$X_{ik}^{(n+1)} = X_{ik}^{(0)} - f_{ik} \left( X_{ik}^{(*n)}, X_{ak}^{(*n)} \right), \quad (3.91)$$

$$X_{ak}^{(n+1)} = X_{ak}^{(0)} - f_{ak} \left( X_{ik}^{(*n)}, X_{ak}^{(*n)} \right), \quad (3.92)$$

где введены функции

$$f_{ik} = \frac{\omega_{ek}}{\omega_{ek} + \alpha_{i,rec}} \frac{1}{\dot{m}_g} \left( a_i \int_{L_p}^z \alpha_{i,rec} X_{ik} dz + a_a \int_{L_p}^z \frac{X_i}{1 + X_i} \alpha_{i,rec} X_{ak} dz \right), \quad (3.93)$$

$$f_{ak} = \frac{\alpha_{i,rec}}{\omega_{ek} + \alpha_{i,rec}} \frac{1}{\dot{m}_g} \left( a_i \int_{L_p}^z \alpha_{i,rec} X_{ik} dz + a_a \int_{L_p}^z \frac{X_i}{1 + X_i} \alpha_{i,rec} X_{ak} dz \right). \quad (3.94)$$

Для стабилизации процесса расчета применяется весовой множитель, значение которого подбирается при сравнении результатов расчета и эксперимента:

$$X_{ik}^{(*n)} = \frac{X_{ik}^{(n)} + pX_{ik}^{(n-1)}}{1 + p}, \quad X_{ak}^{(*n)} = \frac{X_{ak}^{(n)} + pX_{ak}^{(n-1)}}{1 + p}, \quad (3.95)$$

причем на начальной итерации  $X_{ik}^{(*1)} = \frac{pX_{ik}^{(0)}}{1 + p}$  и  $X_{ak}^{(*1)} = \frac{pX_{ak}^{(0)}}{1 + p}$ .

После каждой итерации рассчитывается интегральный унос массы двумя способами: используя полученную суммарную концентрацию примесей в выходном сечении каналов и путем прямого интегрирования.

$$\dot{M}^{(n+1)} = \frac{m_{ak}}{m_a} G_g \left( X_{ik}^{(n+1)} + X_{ak}^{(n+1)} \right)_{z=L_k}, \quad \dot{M}_W^{(n+1)} = 2\pi r_{\text{эфф}} L_k \int_{L_p}^{L_k} \dot{m}_W dz. \quad (3.96)$$

Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия сближения двух полученных величин уноса массы  $\frac{|\dot{M} - \dot{M}_W|}{\dot{M}} \leq \varepsilon$ , как по одиночному каналу, так и по всем каналам катода. Точность расчета  $\varepsilon$  принимается равной 5 %.

### Заключение к главе 3

В главе 3 рассмотрены процессы, обуславливающие эрозию поверхности катода и динамику малой примеси в составе плазмы в каналах. Приведены модели описания эрозионных процессов.

Подробно изложена газодинамическая модель процессов испарения и ионного распыления с учетом возможной конденсации паров материала катода для случая установившегося течения в бесконечной трубке. Получено интегральное соотношение для скорости эрозии (3.9).

Проанализирована модель конденсации испарившихся частиц при условии свободномолекулярного режима течения в канале. Получено выражение для скорости эрозии поверхности для канала цилиндрической формы (3.95).

Однако недостатками этих моделей являются отрыв от реальных конструкций катода, аппроксимация концентрации примесных атомов и ионов линейной функцией, пренебрежение изменением скорости потока основного газа в объеме канала катода. Также эти модели не учитывают взаимодействие частиц примеси с частицами плазмообразующего газа и предполагают, что все конденсирующиеся частицы автоматически прилипают к поверхности.

Для устранения погрешностей рассмотренных моделей был использован подход детального моделирования процессов взаимодействия плазменных частиц и частиц катодного материала. Сформулированы теоретические основы математического моделирования микроскопических и макроскопических параметров столкновений медленных ионов ( $E \leq 400$  эВ) с поверхностью катода, на основании которых получены расчетные соотношения для потоков ионов и атомов материала катода, образующихся в результате испарения и распыления поверхности (3.45) и (3.46), а также выражение для коэффициента распыления (3.47).

Разработана модель процесса осаждения атомов и ионов примеси на стенки каналов при течении плазмы в канале и получены расчетные соотношения (3.51)–(3.64).

Построена физическая модель состояния неравновесной пятикомпонентной плазмы (электроны, ионы и атомы плазмообразующего газа, ионы и атомы материала катода, как примесь к рабочему газу) (3.58).

Получена математическая модель и расчетные соотношения, позволяющие отслеживать динамику концентрации примеси в плазмообразующем газе (см. (3.65), (3.66)).

Неопределенными факторами в разработанной модели эрозии являются коэффициенты прилипания атомов и ионов материала катода. Уточнить их значения можно будет только после серии расчетов и сравнения полученных результатов с экспериментом.

Предлагаемая модель позволяет теоретически рассчитать интегральный унос массы катода, а также локальные скорости разрушения поверхности, что позволяет выявить области наибольших повреждений катода. Полученные данные позволяют прогнозировать рабочий ресурс катодной системы.

## ГЛАВА 4

# НАТУРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С МНОГОКАНАЛЬНЫМИ ПОЛЫМИ КАТОДАМИ И СРАВНЕНИЕ ИХ С РЕЗУЛЬТАТАМИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

### 4.1. Многоканальный катод с прокачкой лития НИИ ПМЭ

Был исследован многоканальный вольфрамовый катод в составе магнитоплазменного двигателя с газообразным литием в качестве рабочего вещества (эксперимент НИИ ПМЭ МАИ). Схема конструкции катода приведена на рисунке 4.1. Наружный корпус катода 1 выполнен из вольфрама: внешний радиус трубки  $R_1 = 26$  мм, толщина  $h_1 = 3$  мм. Заканчивается корпус молибденовой вставкой 2 такой же толщины. Узлы 4, 6, 8, 9 для катода являются соединительными, поэтому при моделировании работы катода не рассматриваются. Внутренняя молибденовая трубка 3 с внутренним диаметром  $d_2 = 24$  мм и толщиной  $h_2 = 9$  мм имеет

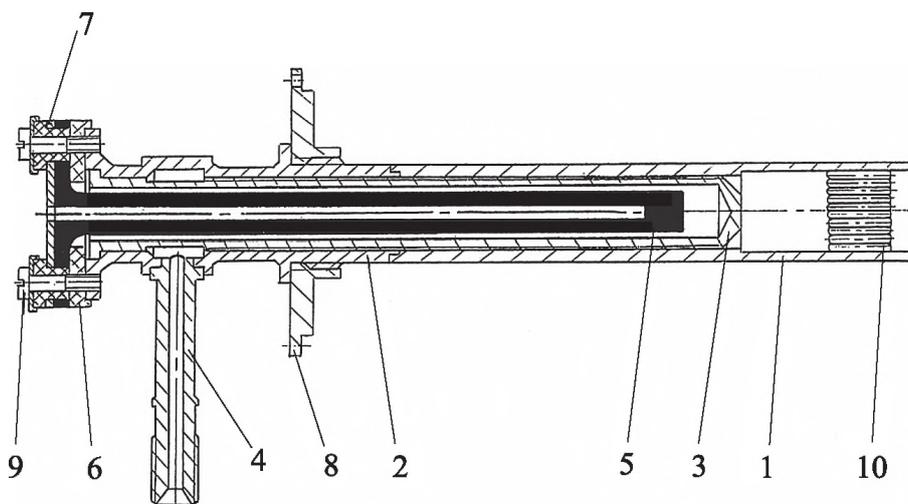


Рис. 4.1. Схема устройства многоканального полого катода (эксперимент НИИ ПМЭ МАИ)

по внешней поверхности винтовую нарезку. Через эти каналы пропускается газообразный литий, массовый расход которого  $G_g = 100$  мг/с. Внутри молибденовой трубки находится графитовый нагреватель 5: внешний радиус  $R_3 = 5$  мм, длина  $\ell_3 = 180$  мм, мощность нагревателя  $W = 5$  кВт. Применение нагревателя вызвано тем, что для работы дугового разряда со щелочным металлом в качестве рабочего вещества необходим его дополнительный подогрев. Тело самого катода 10 набрано из вольфрамовой проволоки диаметром  $d = 3$  мм, длиной  $L = 40$  мм в количестве  $N = 190$  штук, т. е. имеется набивной многоканальный катод. В эксперименте ток разряда составлял  $I_p = 3$  кА.

В соответствии с предлагаемой вычислительной моделью было рассмотрено состояние одного канала, расположенного внутри массива плотно упакованных нитей. Число каналов, образовавшихся при набивке оболочки катода, —

$$N_{\text{кан}} = N \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^2 = 163.$$

Тогда на один канал приходится массовый расход лития  $G_{g1} = \frac{G_g}{N_{\text{кан}}} = 6,1 \cdot 10^{-7}$  кг/с. Число периферийных каналов —

$N_s = 4N^{1/2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{N}} \right) = 51$ . Не смачиваемая плазмой часть периметра периферийных нитей  $\omega_n = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{N_s} \right) = 0,48$ , а смачиваемая часть всех нитей  $\omega_p = 1 - \frac{N_s}{N} \omega_n = 0,87$ .

Полный периметр всех нитей, составляющих катод,  $Z_k = 2 \cdot \pi \cdot r_k \cdot N = 1,79$  м, где  $r_k = d/2 = 1,5$  мм. Несмачиваемый периметр периферийных нитей  $Z_{kp} = 2 \cdot \pi \cdot r_k \cdot N_s \cdot \omega_n = 0,23$  м. Следовательно, характерный поперечный масштаб  $h^* = \frac{S_M}{Z_{kp}} = \frac{\pi \cdot r_k^2 \cdot N}{Z_{kp}} = 5,8 \cdot 10^{-3}$  м.

Сила тока, приходящаяся на одну нить,  $I_1 = I/N \approx 15,8$  А. По известной мощности графитового нагревателя  $W_n = 5$  кВт определена температура Li на входе в рабочую камеру —  $T_g \approx 1700 \div 1800$  К. При таких условиях

Li слабо ионизован. Концентрация атомов лития  $n_a \approx 2,4 \cdot 10^{23}$  частиц в  $\text{м}^3$ , а коэффициент вязкости  $\eta \approx 2,26 \cdot 10^{-5}$  кг·м/с.

Все полученные масштабные значения и параметры рабочего режима катода были введены в модельную программу. Выполнен расчет теплового состояния внутренней нити набивного катода, которая не имеет условий для отвода тепла, кроме теплообмена с плазмой. На рисунке 4.2 приведен график распределения температуры по длине центральной нити набивки.

В ходе эксперимента было измерено распределение температуры стержней по радиусу  $R_c$  многоканального полого катода на открытом торце катода (рис. 4.3). Для центральной части графика (внутренние нити набивки) соответствие температуры по масштабу величины удовлетворительное (см. рис. 4.2). На основании такого сравнения можно сделать предварительный вывод о корректности примененной математической модели.

Был выполнен расчет температур нитей набивки для представленной конструкции катода. На рисунке 4.4 представлена схема плотной упаковки нитей, при этом каждый новый слой увеличивается на шесть нитей, причем два соседних канала образуют характерный «бантик». По общему числу нитей катода получается восемь слоев плотной упаковки.

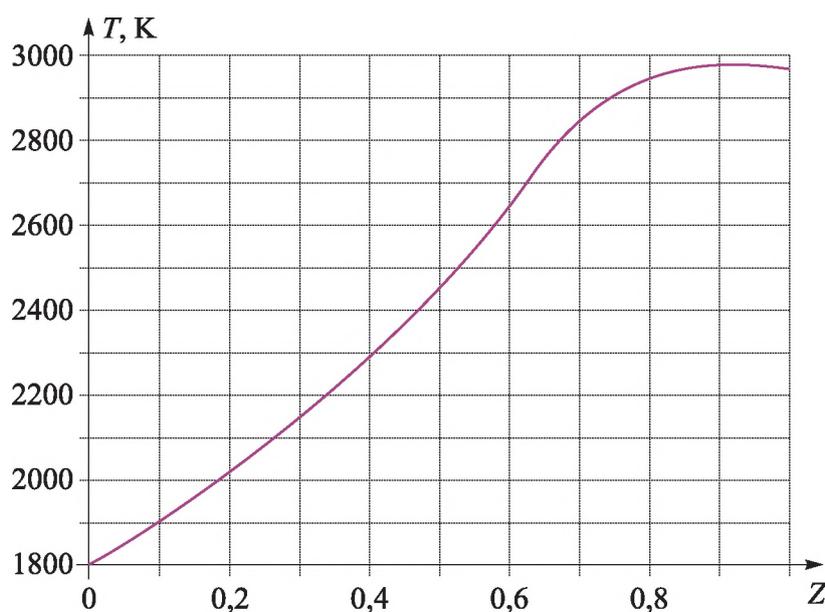


Рис. 4.2. Распределение температуры центральной катодной нити по безразмерной координате

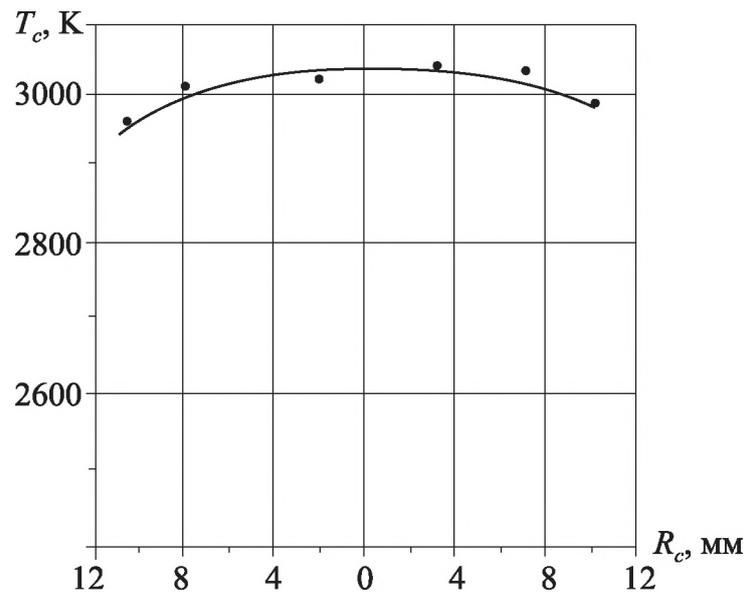


Рис. 4.3. Распределение температуры катода по радиусу

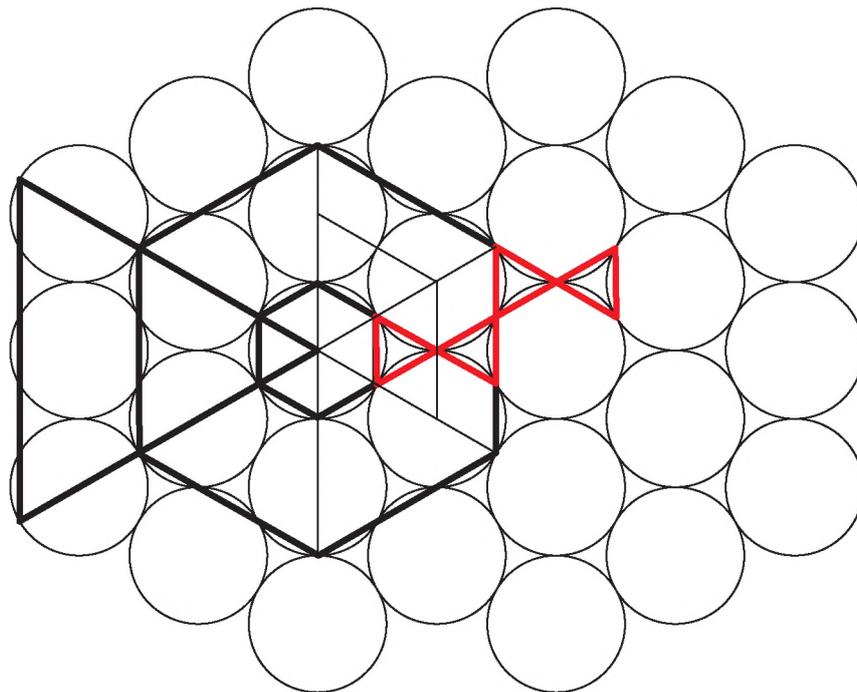


Рис. 4.4. Схема плотной упаковки нитей набивки катода

Соответственно, рисунок 4.5 иллюстрирует изменение температуры слоев от центра и к внешней трубке катода. Поскольку основной механизм охлаждения нитей — излучение с поверхности, то температура увеличивается от внешней оболочки катода к внутренним нитям. По характеру изменения и по масштабам величин полученное теоретическое

распределение хорошо согласуется с экспериментальными данными. Погрешность моделирования лежит в пределах 20 %.

Также были рассчитаны распределения других параметров плазмы и состояния катода: плотности эмиссионного тока, плотности ионного тока на катод, концентрации и температуры электронов, прикатодный скачок потенциала. Однако для этих параметров нет измеренных в эксперименте значений. Ниже для примера показана зависимость изменения степени ионизации газа в канале в зависимости от слоя набивки (рис. 4.6). Изначально в модель заложен одинаковый расход газа через все каналы, однако результаты моделирования и эксперимент показывают, что скорость потока падает по мере удаления от оси катода. Очевидно, что большинство каналов в реальном устройстве имеют неправильную форму, хотя набивка катода и была плотной. Поэтому необходим учет зависимости расхода газа через канал от положения канала.

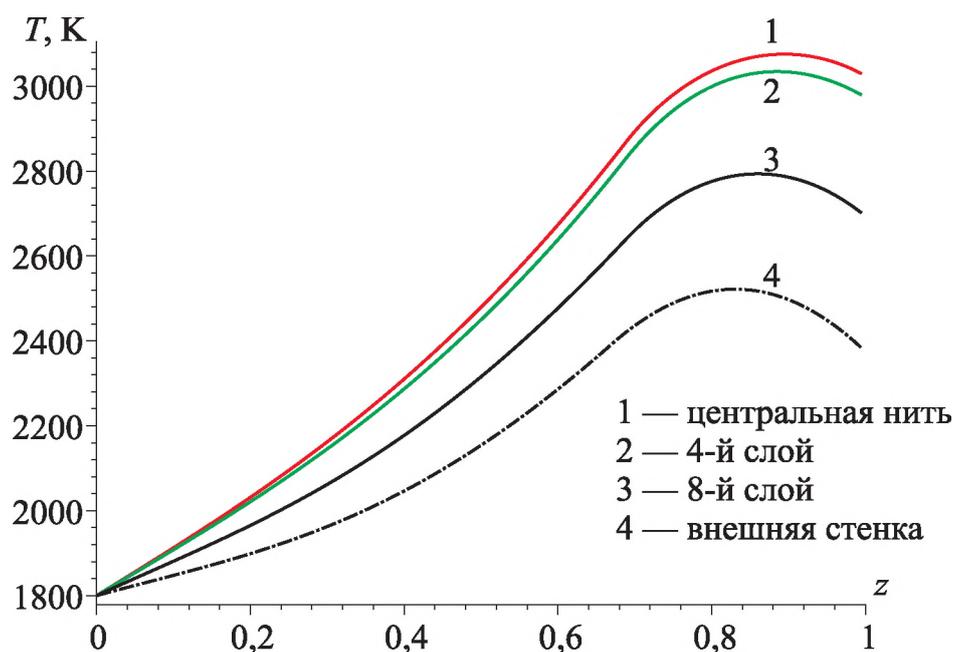


Рис. 4.5. Изменение температуры нитей по длине катода в зависимости от слоя набивки

Кроме того, в процессе работы катода происходит изменение формы каналов за счет эрозии. Следует учитывать и тот факт, что глубина активной зоны каналов катода может быть различной в зависимости от радиального положения канала.

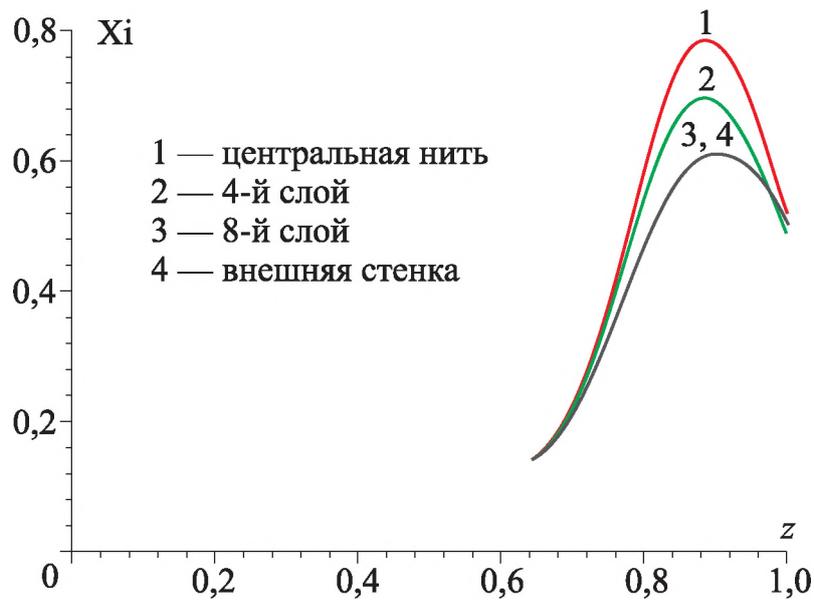


Рис. 4.6. Изменение степени ионизации газообразного лития вдоль оси канала от положения канала

## 4.2. Многоканальные полые катоды конструкции Alta S.p.A и НИИ ПМЭ МАИ

В 2009–2010-х годах в НИИ ПМЭ МАИ совместно с Университетом г. Пизы и компаниями CENTROSPAZIO-CPR и Alta S.p.A (Италия) разрабатывался многоканальный сильноточный полый катод для проектируемого 100 кВт магнитоплазменного ускорителя. Было изготовлено два типа катодов: полномасштабный катод (рис. 4.7, а, б) для ускорителя и пропорционально уменьшенный катод для экспериментальной отработки (рис. 4.7, в). Конструкционные характеристики катодов приведены в таблице 4.1. Эксперименты проводились в компании Alta S.p.A (Италия).

Основной целью экспериментального исследования на масштабированном катоде было прогнозирование скорости эрозии полномасштабного катода. Также важной задачей экспериментальной отработки масштабированного катода была проверка модели эрозии, представленной в главе 3. Поэтому размеры и параметры режима эксперимента для масштабированного катода подбирались так, чтобы безразмерные критерии для обоих катодов совпали.

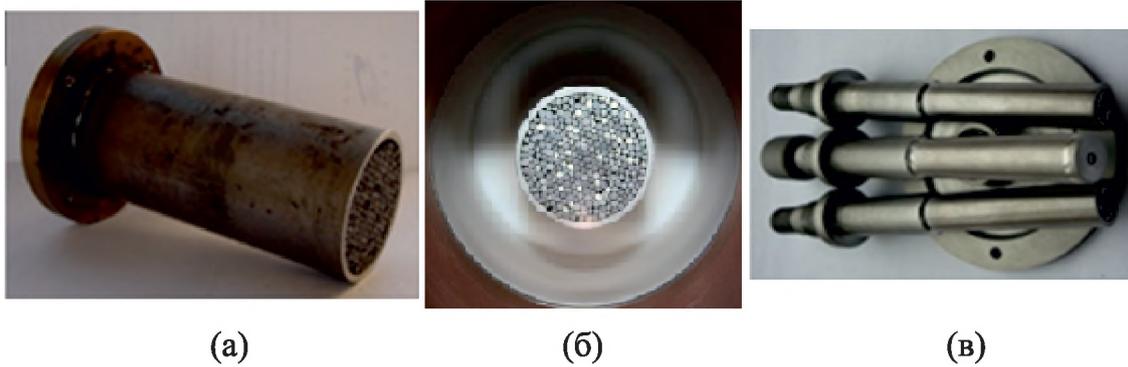


Рис. 4.7. Полномасштабный полый катод;  
а) вид с боку; б) вид с торца; в) уменьшенные полые катоды разных типов

Например, отношение между открытым поперечным сечением катода без стержней и после заполнения стержнями одинаково для двух катодов. Это обеспечивает одинаковые условия отвода тепла в торцевом сечении катода.

Таблица 4.1

Конструкционные характеристики катодов

| Тип катода                     | Полномасштабный   | Уменьшенный |
|--------------------------------|-------------------|-------------|
| Материал оболочки катода       | Нержавеющая сталь | Вольфрам    |
| Внешний радиус трубки          | 44 мм             | 13 мм       |
| Внутренний радиус трубки       | 40 мм             | 10 мм       |
| Количество стержней (вольфрам) | 216               | 36          |
| Диаметр стержня                | 3 мм              | 1,5 мм      |
| Длина стержня                  | 60 мм             | 10 мм       |
| Рабочий газ                    | Аргон (Ar)        | Аргон (Ar)  |

#### 4.2.1. Моделирование характеристик полномасштабного полого катода (Full-scale Cathode)

При количестве стержней набивки 216 рассчитываем характеристики катода для моделирования. Количество периферийных стержней

$N_s = 4N^{1/2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N}}\right) \approx 41$ , доля периметра этих стержней

$\omega_H = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{N_s}\right) = 0,48$ . Доля периметра стержней, омываемых плазмой,

$\omega_p = 1 - \frac{N_s}{N} \omega_H = 0,745$ . Общий периметр всех стержней набивки

$Z_k = 2 \cdot \pi \cdot r_k \cdot N = 2,035$  м, где радиус стержня  $r_k = \frac{d}{2} = 1,5$  мм. Тогда периметр периферийных стержней, не контактирующих с плазмой,  $Z_{kp} = 2 \cdot \pi \cdot r_k \cdot N_s \cdot \omega_H = 0,249$  м. Общее число катодных каналов —

$N_{ch} = N \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^2 \approx 190$ , общее число слоев плотной упаковки — 12. Ха-

рактерный поперечный масштаб  $h^* = \frac{S_M}{Z_{kp}} = \frac{\pi \cdot r_k^2 \cdot N}{Z_{kp}} = 6,13 \cdot 10^{-3}$  м.

Для заданной мощности конструируемого ускорителя токи разряда должны достигать диапазона  $I = 1 \dots 1,5$  кА. Это означает, что средний ток на один стержень должен быть равен  $I_1 = \frac{I}{N} \approx 7,94 \dots 11,9$  А. Еще одним рабочим параметром, который должен быть выбран, является расход плазмообразующего газа. В данном эксперименте предполагалось использовать аргон. Во время моделирования расход варьировался в диапазоне 6...40 мг/с. Катод, плотно набитый стержнями диаметром 3 мм, имеет 131 канал одинаковой формы и с поперечным сечением 0,36 мм<sup>2</sup>. Другие периферийные или пристеночные каналы в количестве примерно 59 имеют сложную неправильную форму, поэтому считалось, что их площадь примерно в 2 раза больше, что учитывалось при распределении расхода газа по каналам.

На рисунке 4.8 представлены результаты моделирования температуры центрального стержня набивки: распределение температуры по длине стержня для различных значений расхода аргона при начальной температуре закрепленного конца стержня  $T_0 = 500$  К. При увеличении расхода аргона максимум температуры стержня смещается в сторону открытого торца катода, высота максимума растет. Характер поведения температуры соответствует экспериментальным результатам [98]. На рисунке 4.9 более подробно показано изменение температуры стержня в области активной плазменной зоны. По смещению графиков можно заметить, что с увеличением расхода аргона длина активной плазменной области для каналов, окружающих центральный стержень, уменьшается. Расчеты температурных распределений для разных слоев набивки

стержней, окружающих центральный стержень, показали, что их максимальные температуры по внутренним слоям снижаются медленно (разница между слоями 1 и 5 ничтожно мала), оставаясь при этом достаточно высокими (на уровне 2 900 К). Но ближе к стенке изменение температуры становится довольно ощутимым по причине теплообмена на внешней поверхности цилиндра (рис. 4.10).

Предложенная в главе 1 модель позволяет определять распределения параметров плазмы по радиусу в любом катодном канале. Давление плазмы довольно значительно изменяется вдоль катодного канала, особенно в его активной области, как показано на рис. 4.11. Найденные значения давления и температуры позволяют рассчитать скорость газа в каждом катодном канале, что дает возможность учесть реальное распределение расхода газа во всех катодных каналах.

Кроме того, возможно оценить вклад электронного давления в давление плазмы в целом (рис. 4.12). Ближе к открытому торцу катода электронное давление в канале составляет почти половину давления частично ионизованного газа.

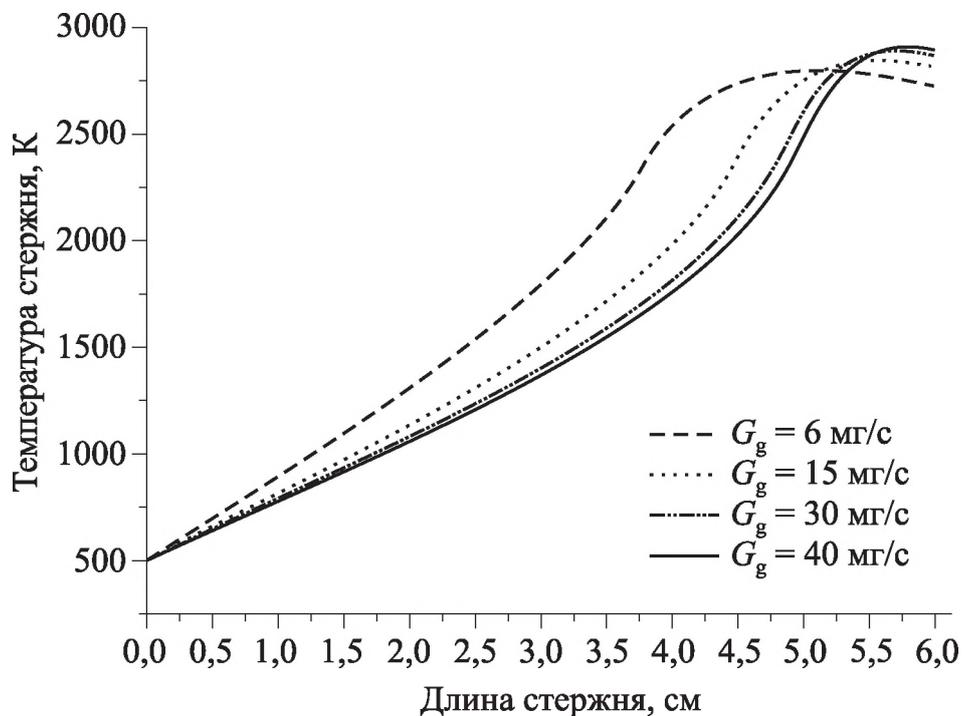


Рис. 4.8. Продольное распределение температуры центрального катодного стержня для различных расходов аргона при токе разряда  $I = 1,5$  кА ( $z = 0$  находится на закрепленном конце катода, длина стержня 6 см)

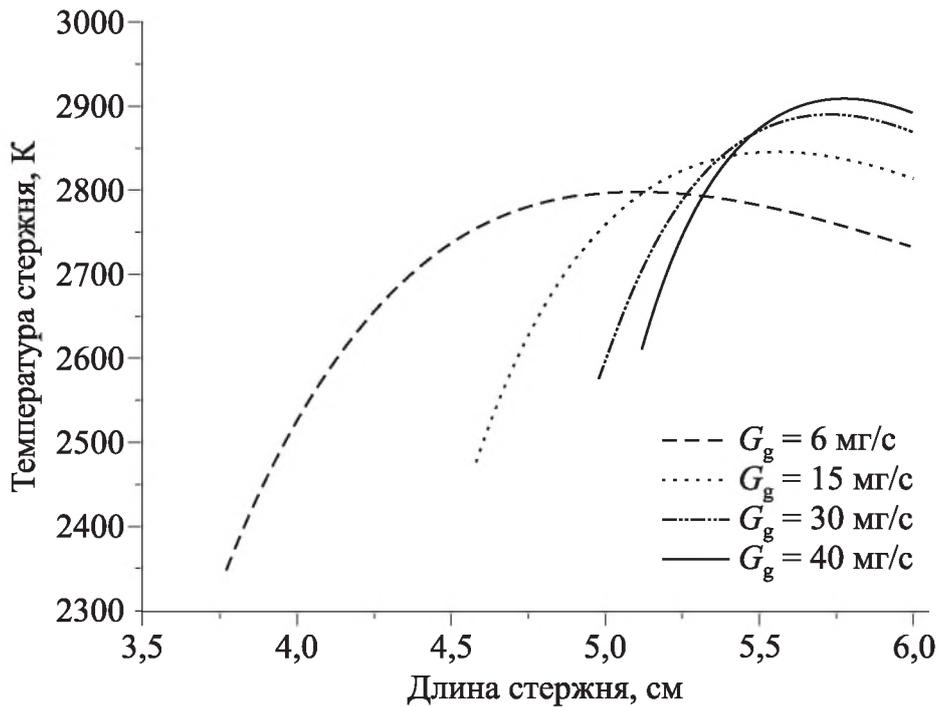


Рис. 4.9. Распределение температуры центрального стержня набивки по длине активной плазменной зоны

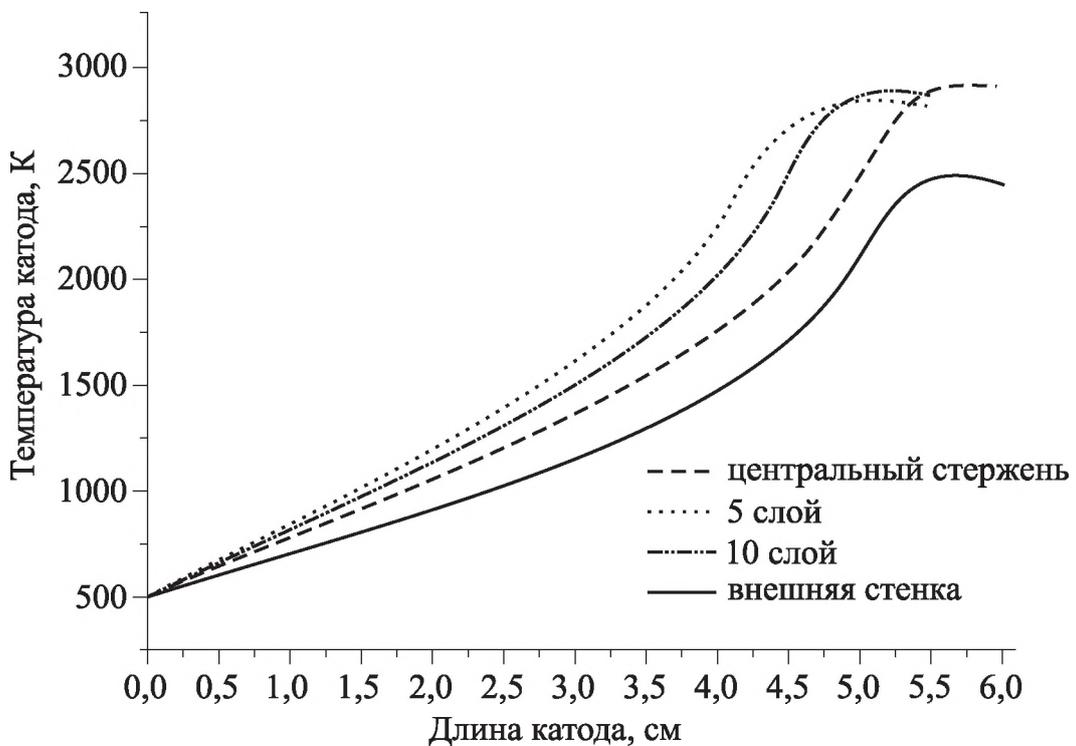


Рис. 4.10. Продольные распределения температуры для различных слоев катодной набивки (ток разряда  $I = 1,5$  кА, расход газа  $G_g = 40$  мг/с)

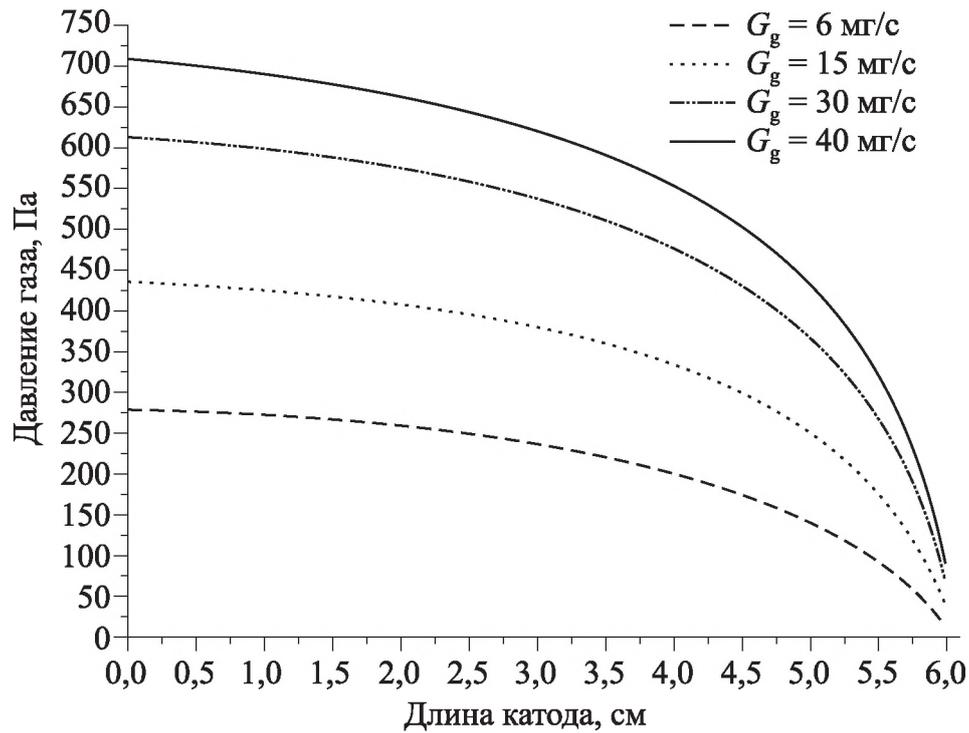


Рис. 4.11. Изменение давления аргона по длине центрального канала в зависимости от расхода газа (ток разряда  $I = 1,5$  кА)

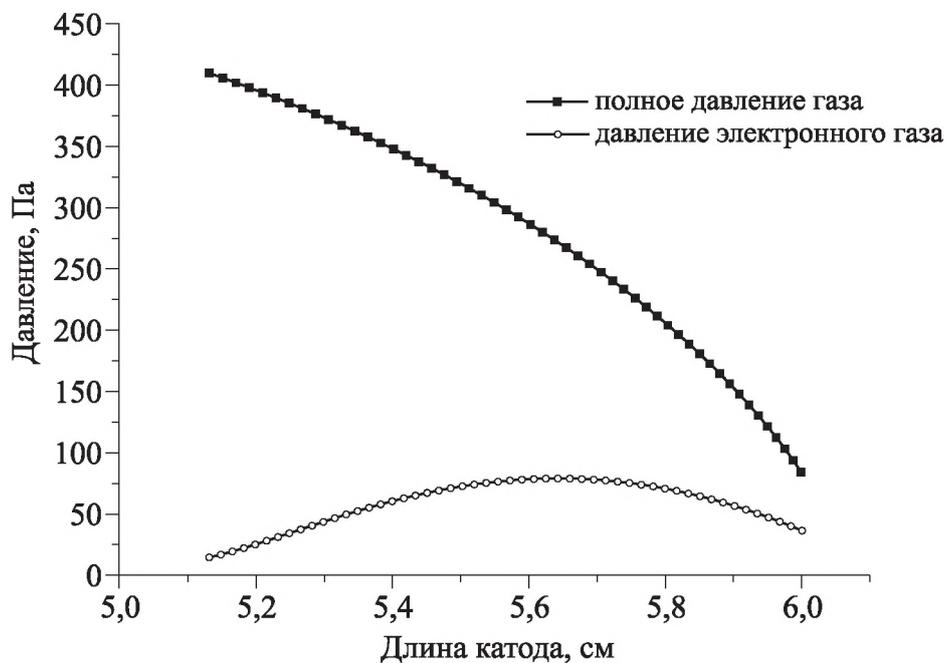


Рис. 4.12. Распределение давления частично ионизованного газа и электронное давление в активной зоне центрального канала (ток разряда  $I = 1,5$  кА, расход  $G_g = 30$  мг/с)

На рисунке 4.13 приведено распределение степени ионизации плазмы для катодных каналов, окружающих центральный стержень при токе разряда  $I = 1,5$  кА. По результатам моделирования, коэффициент ионизации плазмы  $X_i = n_e / (n_i + n_a)$  не превышает 10 % при всех исследованных расходах плазмообразующего газа. На рисунке 4.14 показано распределение температуры электронов центральных каналов по длине активной зоны канала. Следует отметить, что на открытом конце канала при расходе газа  $G_g = 6$  мг/с температура электронов резко увеличивается. При этом порядок величины концентрации электронов в активной зоне канала составляет примерно  $10^{20}$  м<sup>-3</sup> и изменяется незначительно при разных расходах газа (рис. 4.15). Но с увеличением расхода явно сокращается размер активной зоны в канале. Зависимость доли ионного тока от расхода газа показана на рисунке 4.16.

Далее представлены результаты моделирования двумерного распределения параметров состояния катода и плазмы по длине и радиусу катода.

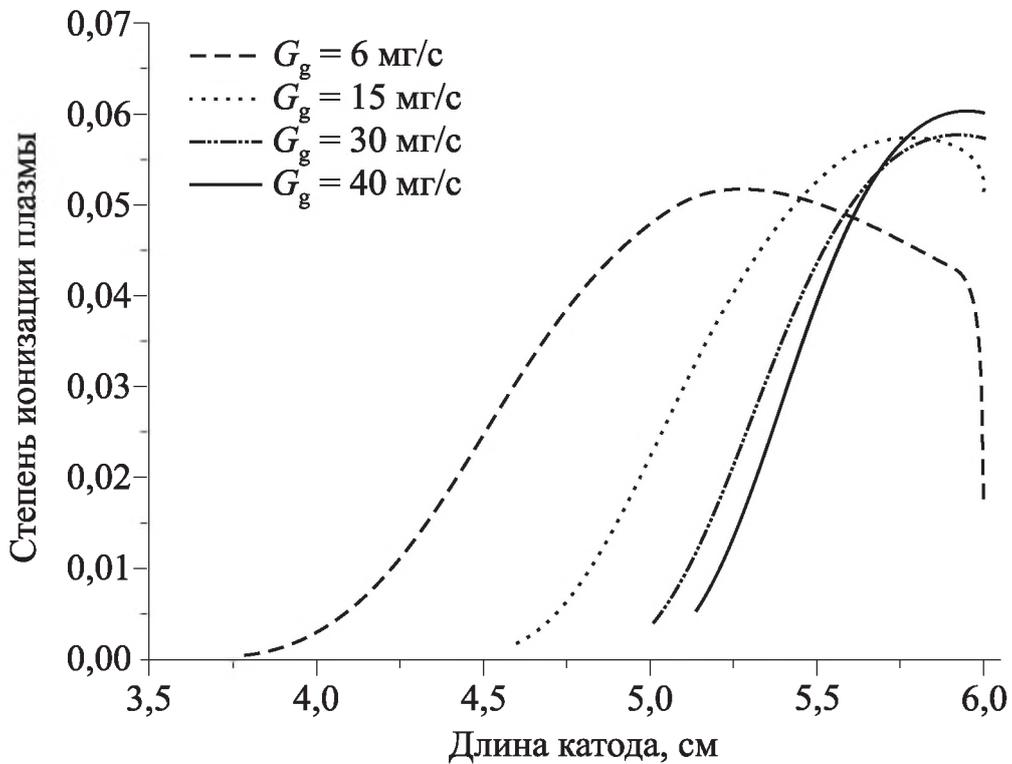


Рис. 4.13. Распределение степени ионизации плазмы по длине канала для центральных каналов (ток разряда  $I = 1,5$  кА)

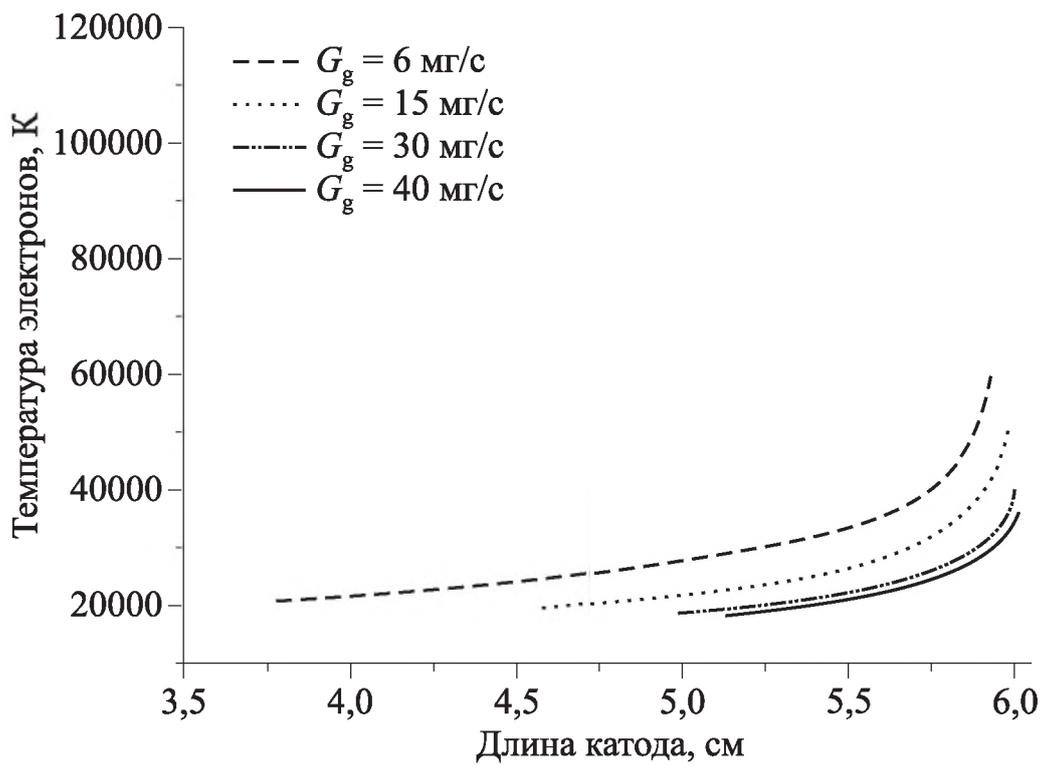


Рис. 4.14. Температура электронов для центральных каналов (ток разряда  $I = 1,5$  кА)

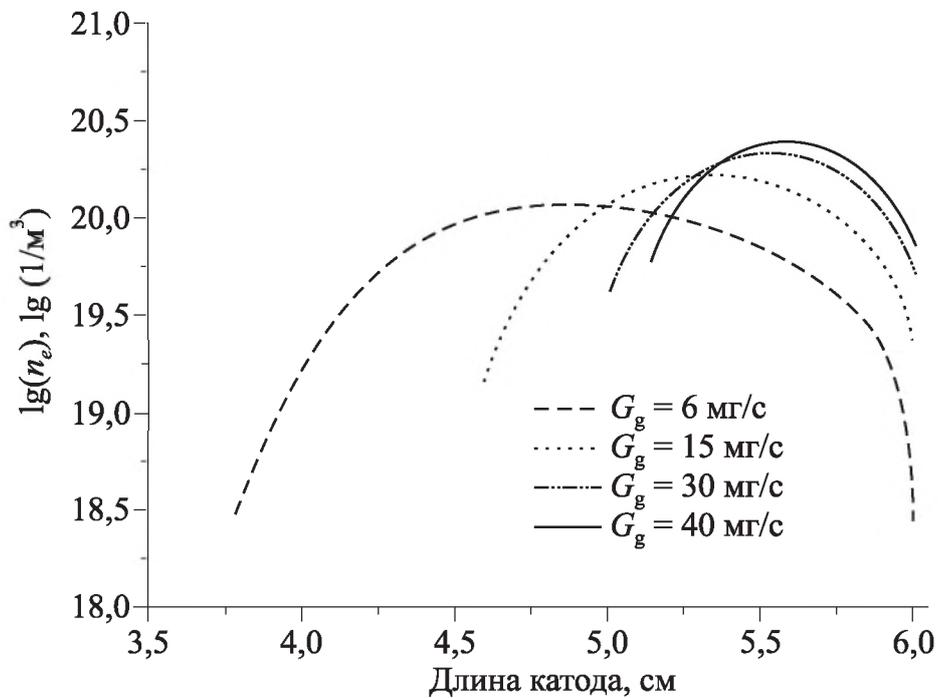


Рис. 4.15. Изменение концентрации электронов по длине активной зоны канала (ток разряда  $I = 1,5$  кА)

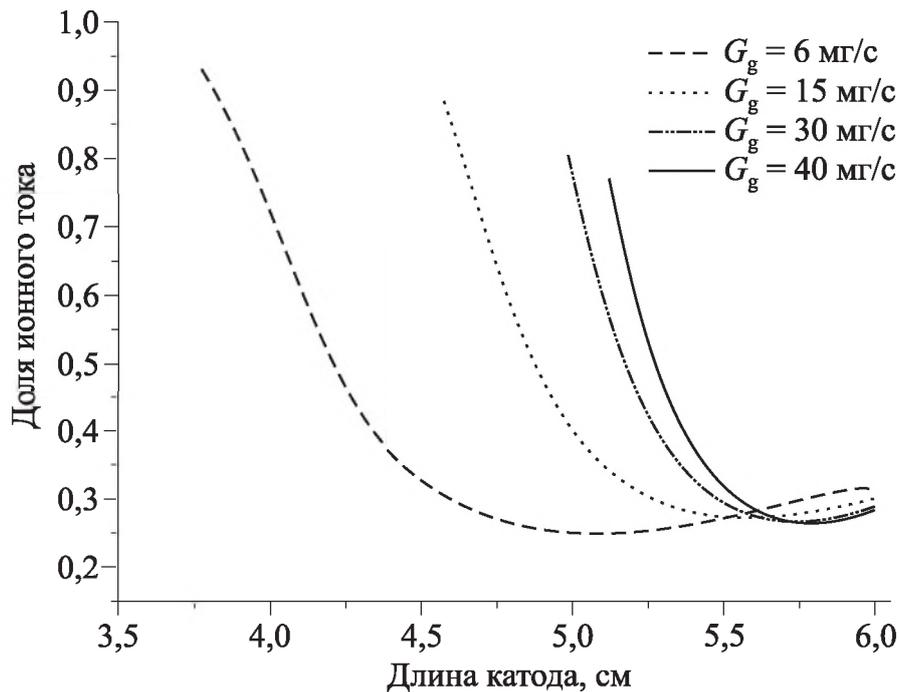


Рис. 4.16. Изменение доли ионного тока по длине активной зоны канала (ток разряда  $I = 1,5$  кА)

Изменение температуры стержней по слоям набивки было приведено ранее на рисунке 4.10. Разность температур между центральным и периферийным стержнями, примыкающими к оболочке катода, может достигать 400 К. Такое изменение температуры в радиальном направлении может вызвать существенное изменение и параметров плазмы в каналах. Также может изменяться длина активной зоны в каналах. Поэтому учитывается разница в скоростях потока газа в каналах. Результаты расчета распределений различных параметров плазмы по длине каналов (в зависимости от слоя) представлены на рисунках 4.17, 4.18 и 4.19. Моделирование проводилось при токе разряда  $I = 2,5$  кА и расходе газа  $G_g = 30$  мг/с. Давление газа по результатам моделирования слабо изменяется от слоя к слою (рис. 4.17). Степень ионизации плазмы от слоя к слою изменяется значительно: смещается положение максимальной степени ионизации, но сама максимальная величина примерно сохраняется (рис. 4.18).

Размер активной зоны в каналах по слоям все-таки сохраняется. Температура электронов в плазме каналов также изменяется слабо (рис. 4.19).

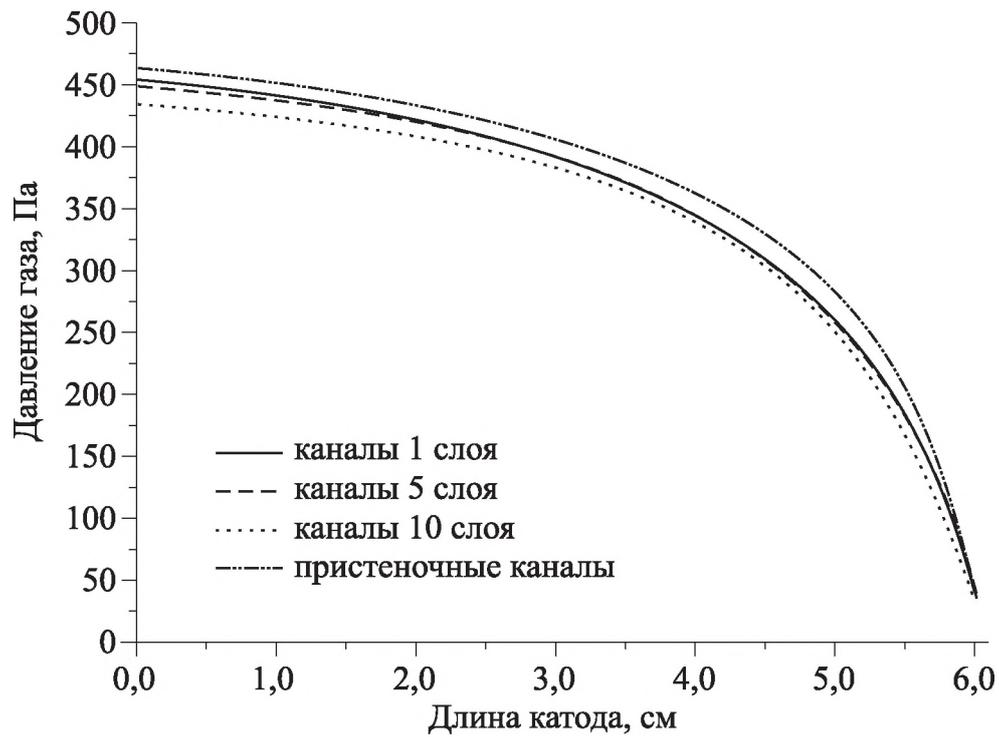


Рис. 4.17. Изменение давления газа в канале по его длине для различных слоев

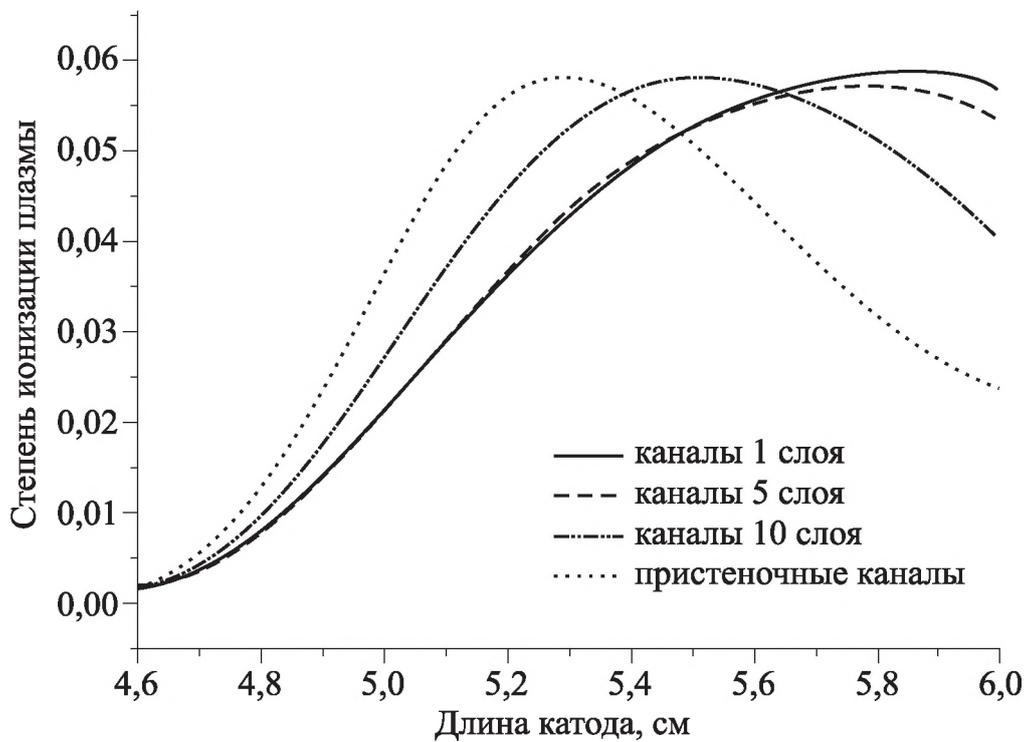


Рис. 4.18. Изменение степени ионизации плазмы по длине канала для различных слоев

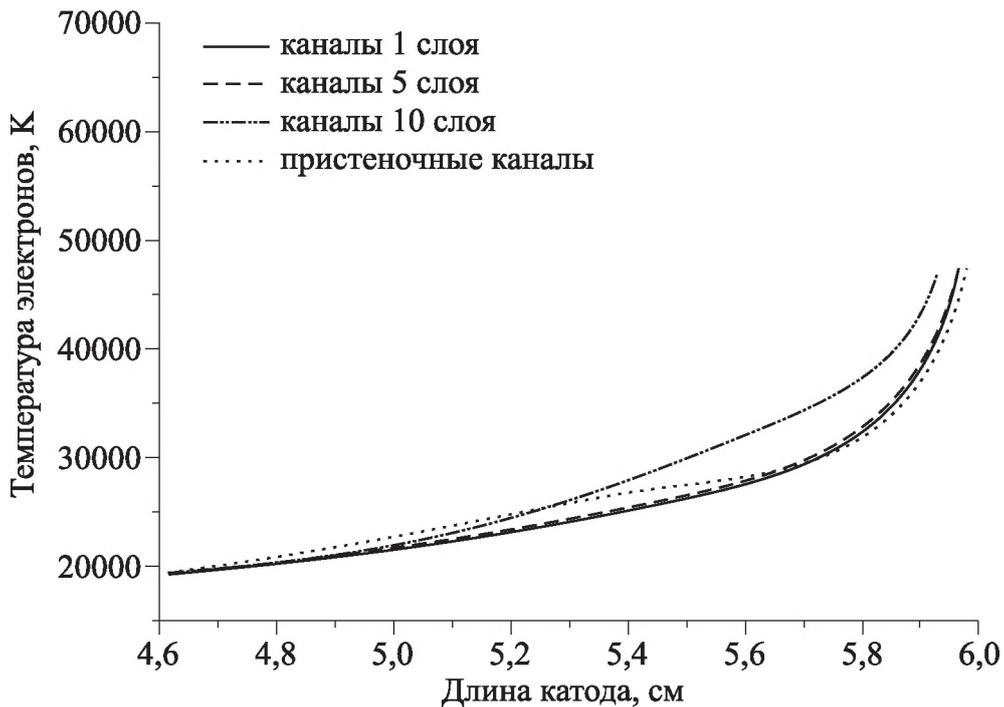


Рис. 4.19. Изменение температуры электронов по длине канала для различных слоев

Выполненное моделирование может содержать неконтролируемые погрешности, связанные с тем, что не были учтены возможные привязки разряда к различным слоям каналов полого катода в торцевой области, а также к наружной оболочке катода.

Методами математического моделирования было выполнено исследование процесса эрозии катодных стержней. По результатам моделирования, интегральный унос массы составляет порядка  $1,9 \cdot 10^{-8}$  кг/с. Суммарная удельная эрозия ожидается на уровне  $1,64 \cdot 10^{-9}$  кг/Кл.

Получены распределения скоростей процессов испарения, распыления и рециклинга по слоям стержней катода. На рисунке 4.20, а, б приведены распределения скоростей эрозионных процессов по длине стержня для центрального стержня и периферийного слоя. Моделирование показало, что роль процесса испарения практически ничтожна. Основными процессами примерно равной скорости являются процессы распыления и рециклинга. Причем для стержней, близких к центральной части набивки, по всей длине стержня преобладает распыление, а для стержней, близких к оболочке катода, в области торца катода возможно

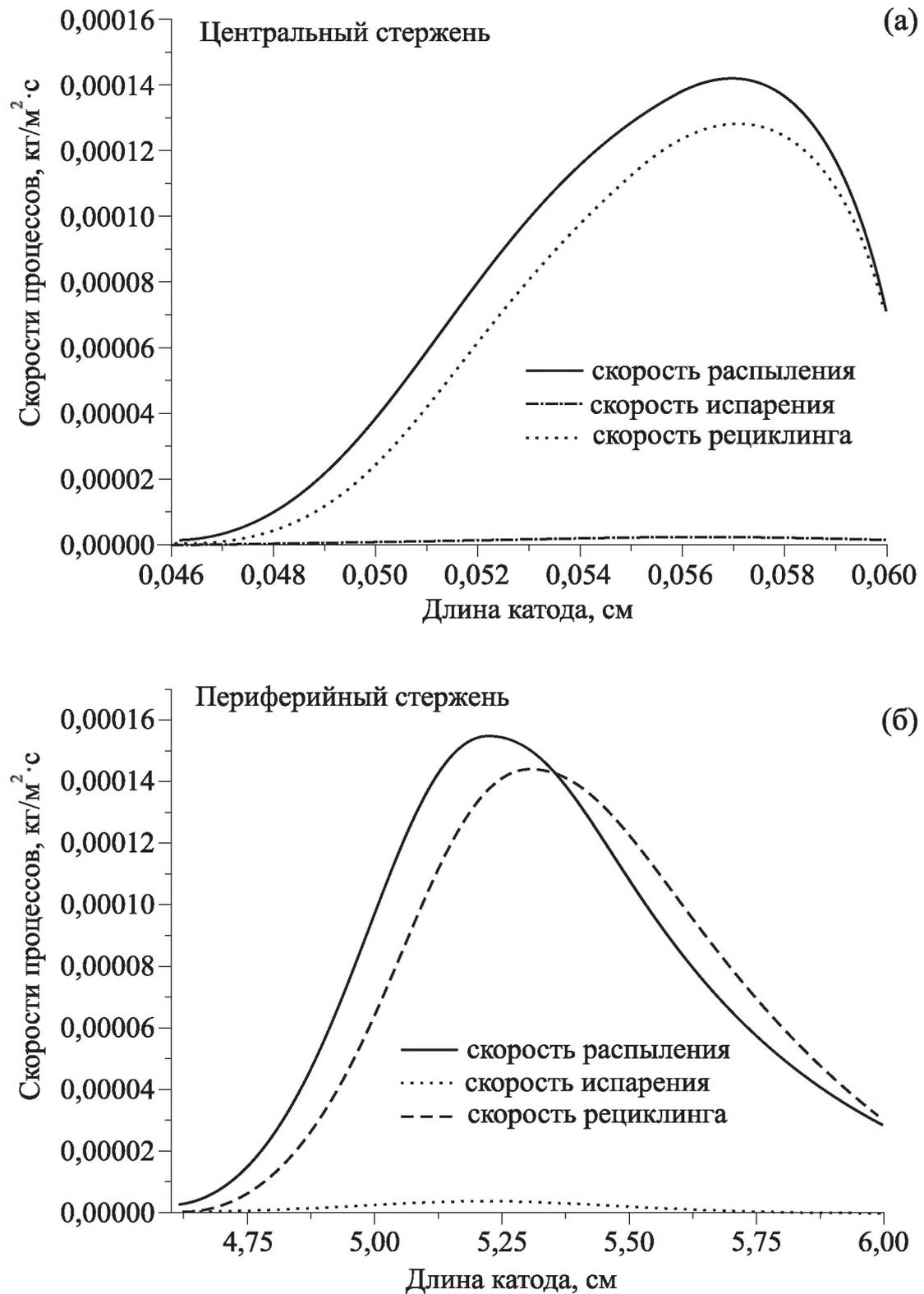


Рис. 4.20. Скорость процессов эрозии:  
 а) центральный стержень; б) периферийный стержень

преобладание рециклинга. На рисунке 4.21 показано, каким образом с течением времени будет изменяться поверхность стержней под действием всех трех процессов. На поверхности стержней, близких к центру катода, происходит образование каверн, а вблизи внешней оболочки катода возможно зарастание каналов с торца.

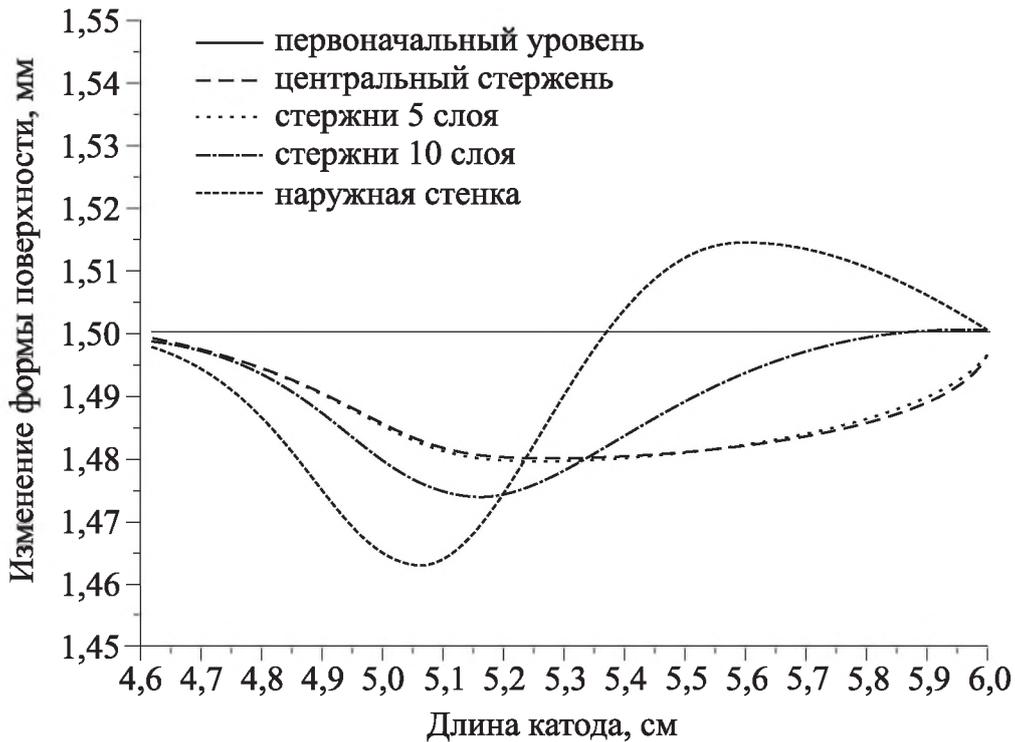


Рис. 4.21. Изменение поверхности стержней набивки за 1000 часов

Концентрации атомов и ионов примеси в плазме (распыленный материал катода) составляют доли процентов от концентрации остальных частиц, т. е. примесь действительно малая. Для примера на рис. 4.22 приведены относительные концентрации атомов и ионов материала катода в плазме пристеночного канала и канала, близкого к центру катода.

К сожалению, в экспериментальных исследованиях полномасштабного катода [99–103] основное внимание уделялось характеристикам магнитоплазменного двигателя, а не полого катода. Исследовались тяга двигателя и удельный импульс в зависимости от расхода газа и приложенного магнитного поля.

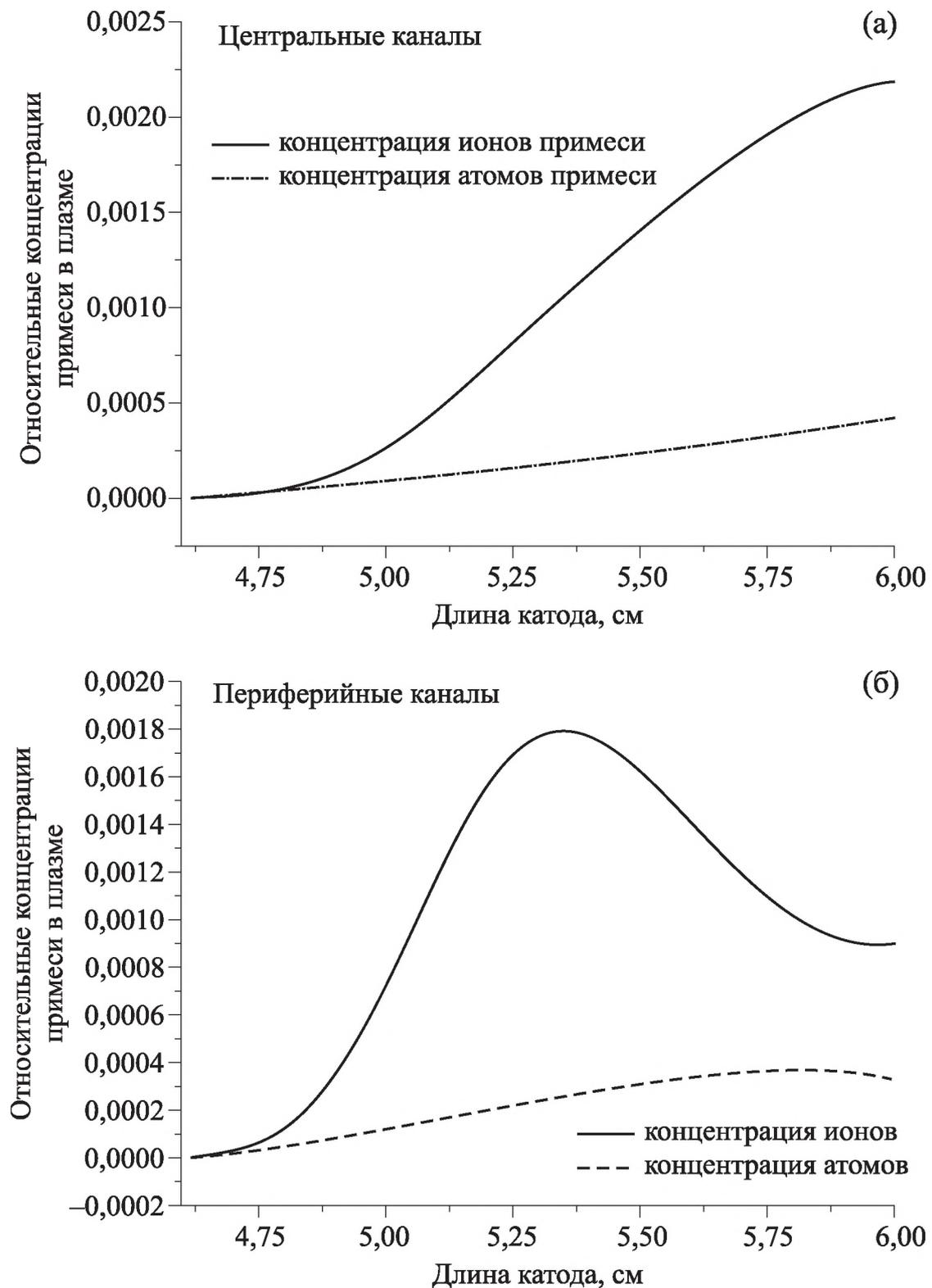


Рис. 4.22. Относительные концентрации примеси в плазме каналов в зависимости от положения канала

#### 4.2.2. Моделирование характеристик уменьшенного катода (Scale-down Cathode). Сравнение результатов вычислительного и натурального экспериментов

Для конструкции уменьшенного катода было проведено подробное экспериментальное исследование его характеристик [21, 22]. Также было выполнено моделирование рабочих параметров катода. Конструкция катода и его фотография в сборке приведены на рис. 4.23 и 4.24.

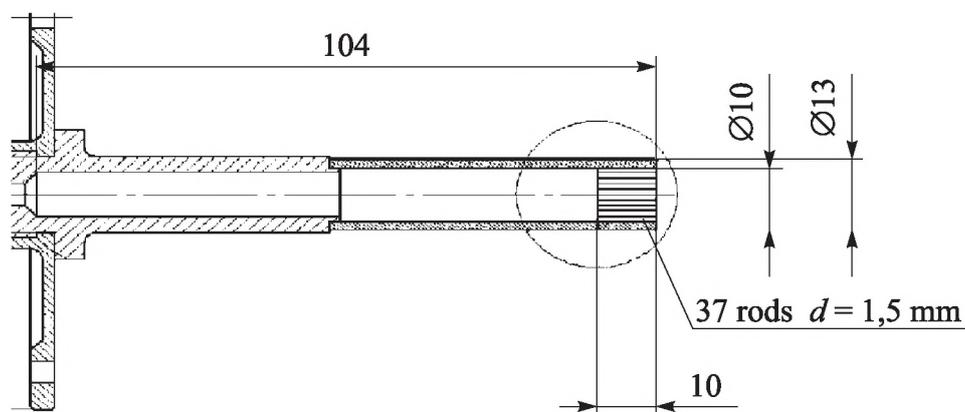


Рис. 4.23. Конструкция уменьшенного катода

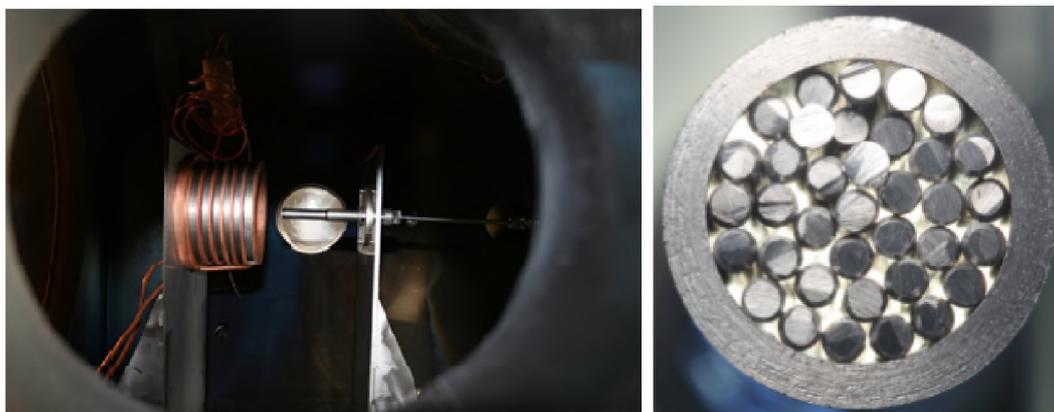


Рис. 4.24. Уменьшенный катод в сборке на экспериментальном стенде и вид катода с торца до эксперимента [21]

Набивка катода выполнена вольфрамовыми стержнями диаметром  $d=1,5$  мм, которые вместе с оболочкой катода формируют пять слоев для моделирования. Между стержнями образуется 26 каналов «правильной» одинаковой формы и 22 канала в пристеночной области разного

размера и формы. Считалось, что площадь такого «неправильного» канала примерно в 2 раза больше.

Была выполнена серия модельных расчетов для сопоставления результатов моделирования с экспериментом с целью сделать выводы об адекватности разработанной модели и пригодности модели к прогнозированию характеристик многоканального полого катода. А для сравнения характеристик рабочих режимов большого и малого катодов при моделировании выбраны сила тока разряда  $I = 130$  А и  $I = 150$  А, расход плазмообразующего газа (Ar) —  $G_g = 4$  мг/с.

В эксперименте измерялось напряжение разряда при различных силах тока (рис. 4.25, *a*) и такое же исследование было проведено численно. Поведение напряжения дугового разряда типично для этого класса устройств [5], так как напряжение уменьшается при возрастании тока и сильно зависит от массового расхода. Для сравнения на рис. 4.25, *б* представлен результат моделирования для расхода газа 4 мг/с. Рассчитанные профили хорошо соответствуют результатам эксперимента в основном рабочем диапазоне низких токов. Значения напряжения, рассчитанные при токе выше 100 А, имеют небольшое несоответствие с экспериментальными данными.

В эксперименте температурный профиль внешней оболочки катода измеряли с помощью двухцветного пирометра, установленного на одноосном ползунке, перемещаемого вручную прецизионным винтом, выровненным относительно оси катода. Рис. 4.26, *a* представляет измеренный профиль температуры внешней оболочки катода при токе разряда 130 А и напряжении 22 В. Данные, полученные в результате измерения температуры, явно указывают на влияние массового расхода газа и тока разряда на температурные профили. Далее, рис. 4.26, *б* показывает результат моделирования распределения температуры катода для тех же параметров разряда [21].

На рис. 4.27 представлена зависимость максимальной температуры от тока разряда в эксперименте и по результатам моделирования. Моделирование определенно завышает значение максимальной температуры при всех значениях тока. В частности, для значений тока выше 100 А разница между расчетной и зарегистрированной температурой составляет около 350 °С, в то время как при более низких значениях тока разница

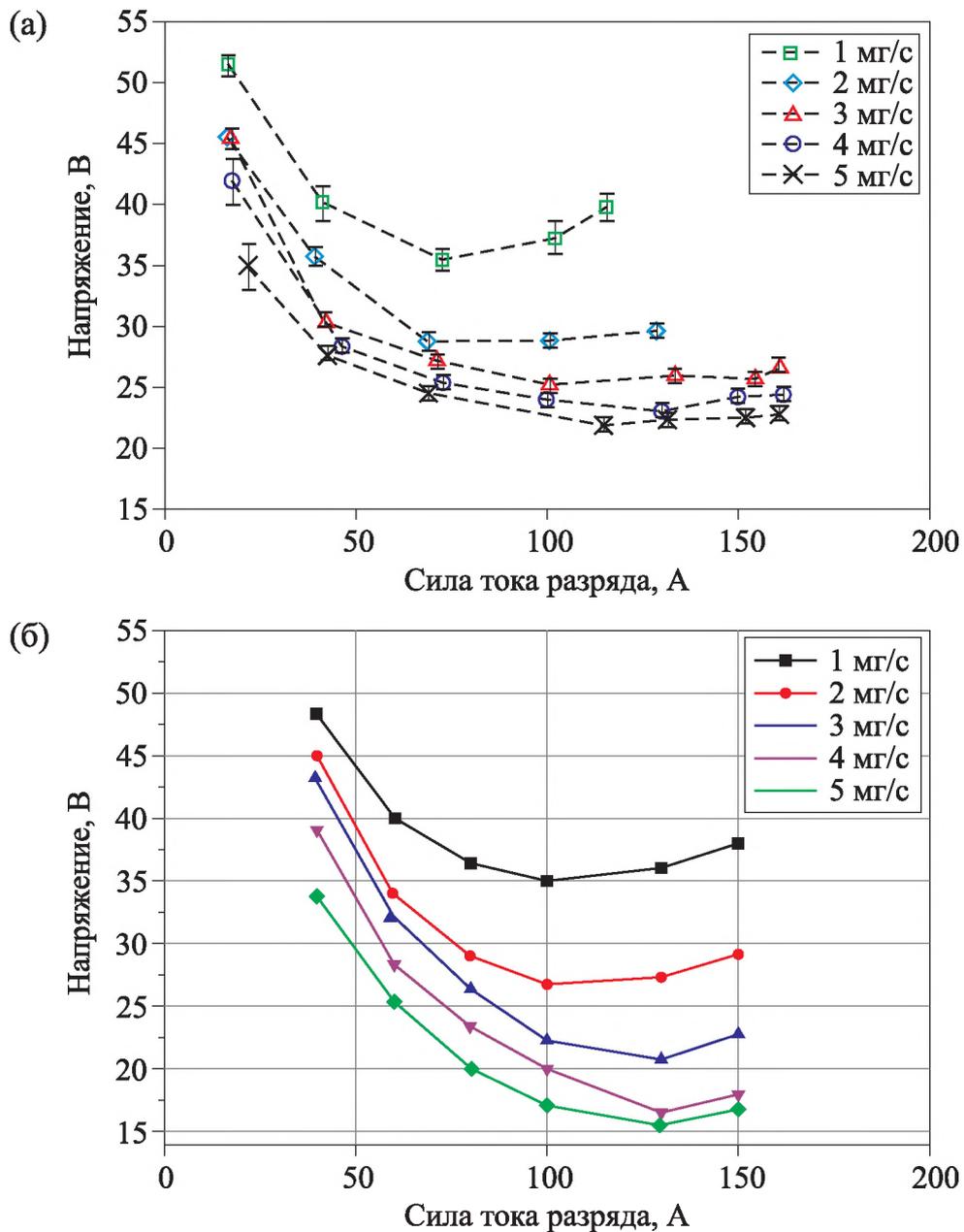


Рис. 4.25. Зависимость напряжения разряда от силы тока:  
 а) результаты эксперимента [21]; б) результат моделирования [21, 22]

выше почти на 500 °С. Измерение пирометром показало, что максимальная температура катода наблюдается на его торцевом срезе. По условиям эксперимента измерение температурного профиля проводилось с шагом 1 мм. Однако если учесть, что, по результатам моделирования, размер всей активной зоны в каналах не более 3 мм, а максимум температуры лежит на расстоянии менее 1 мм от торца, то измерения могли не зафиксировать максимум, тем более что он слабо выражен.

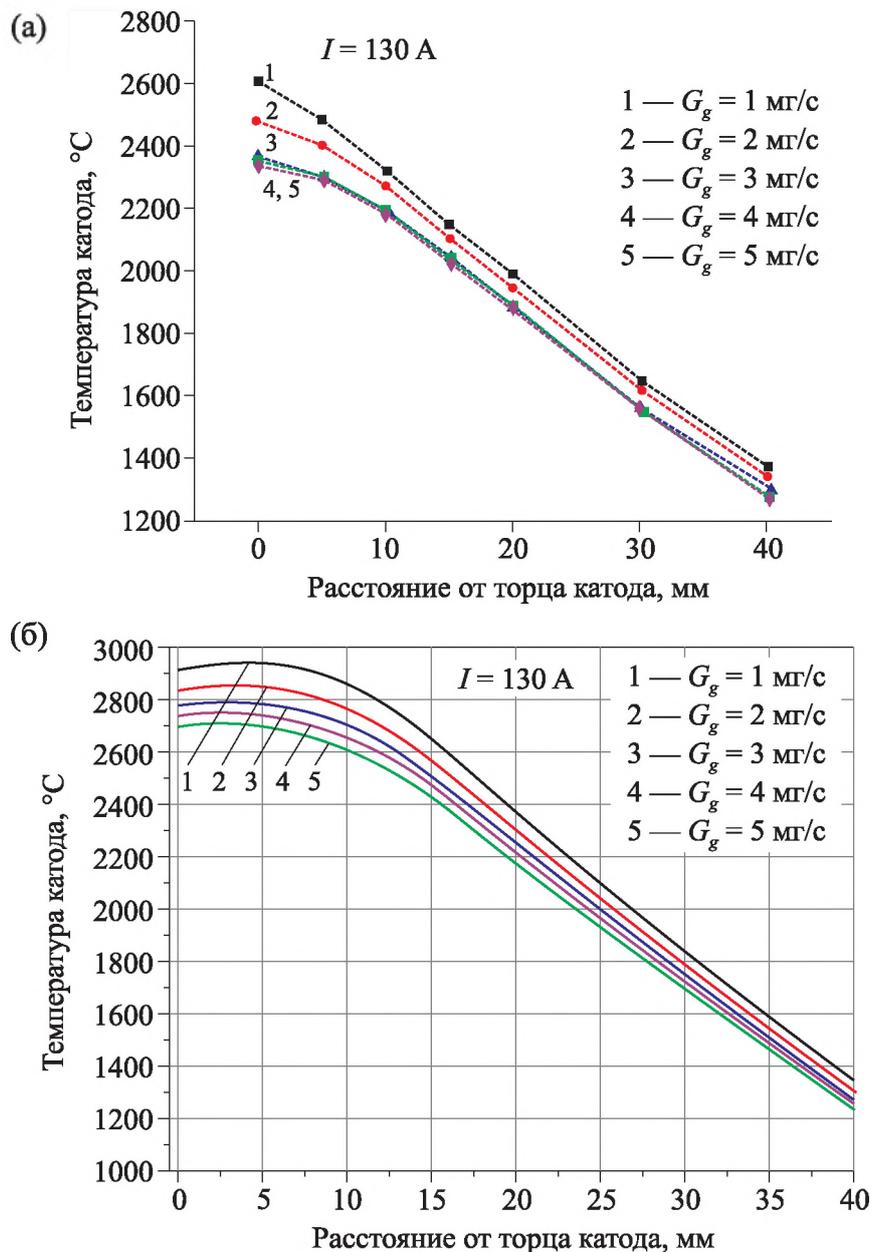


Рис. 4.26. Изменение температуры катода по его длине:  
 а) экспериментальные измерения [21, 22]; б) результат моделирования

Согласно классической работе [5], изменение расхода газа в 5 раз должно приводить к смещению температурного максимума. Правда, позднее при проведении длительного испытания все-таки максимальное значение температуры было получено на расстоянии в несколько миллиметров от торца катода (рис. 4.28) в отличие от рисунков 4.26, а и 4.27, а. Проблема состоит в необходимости проводить измерения на очень малых расстояниях.

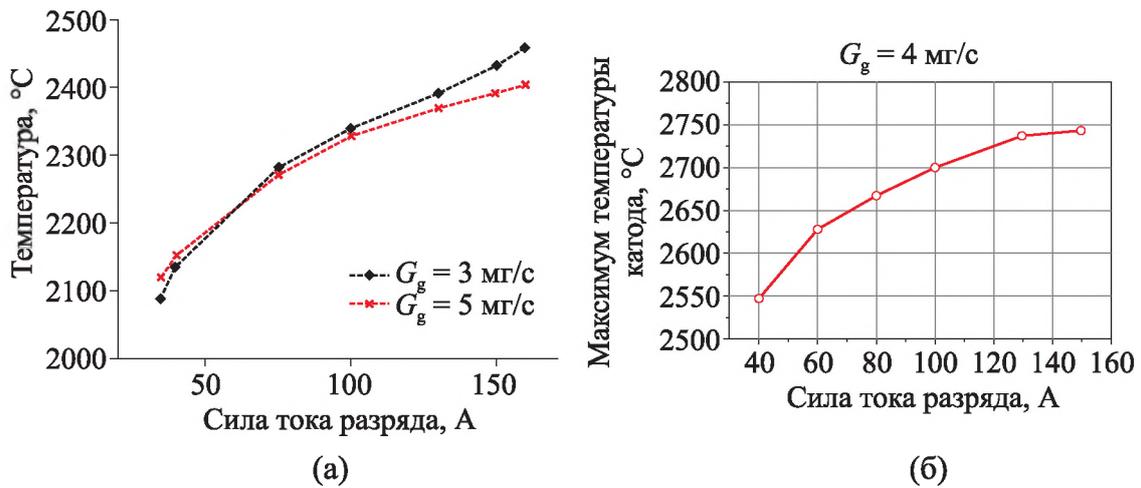


Рис. 4.27. Зависимость максимальной температуры торца катода от тока разряда: а) результаты эксперимента [21, 22]; б) результат моделирования

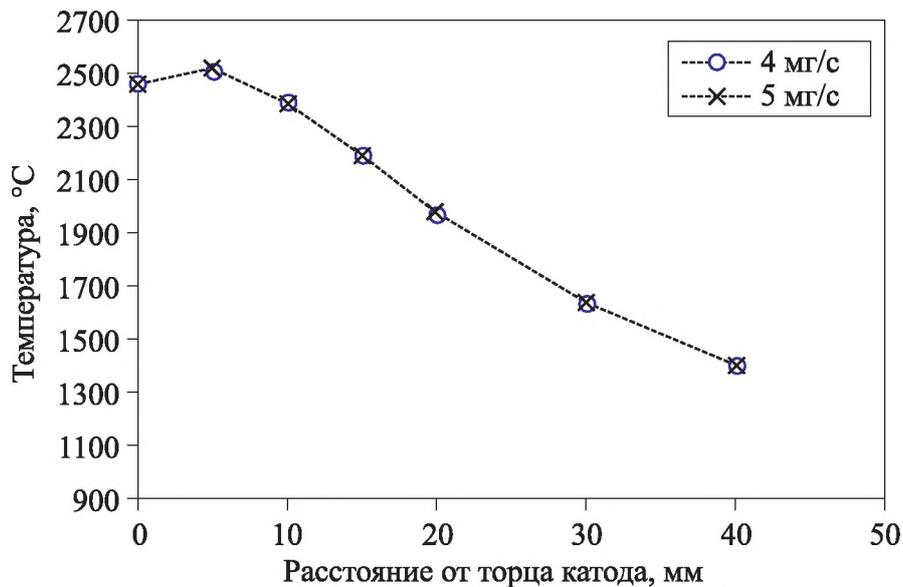


Рис. 4.28. Измеренный температурный профиль при длительном испытании [21]

В вычислительном эксперименте удалось рассчитать параметры, не поддающиеся прямому измерению в натурном эксперименте. На графиках рис. 4.29, 4.30 приведены распределения по длине канала степени ионизации плазмы и температуры плазменных электронов. Приведены результаты для тока разряда  $I = 130$  А и расхода  $G_g = 4$  мг/с. При этом температура электронов в плазме каналов по масштабу величины и по характеру изменения по длине каналов практически одинакова для полноразмерного и уменьшенного катодов (рис. 4.30 и 4.19). Степень ионизации плазмы для уменьшенной модели катода почти в 2 раза выше, чем

для полноразмерного катода (рис. 4.29 и 4.18), и максимум степени ионизации смещен ближе к торцу катода.

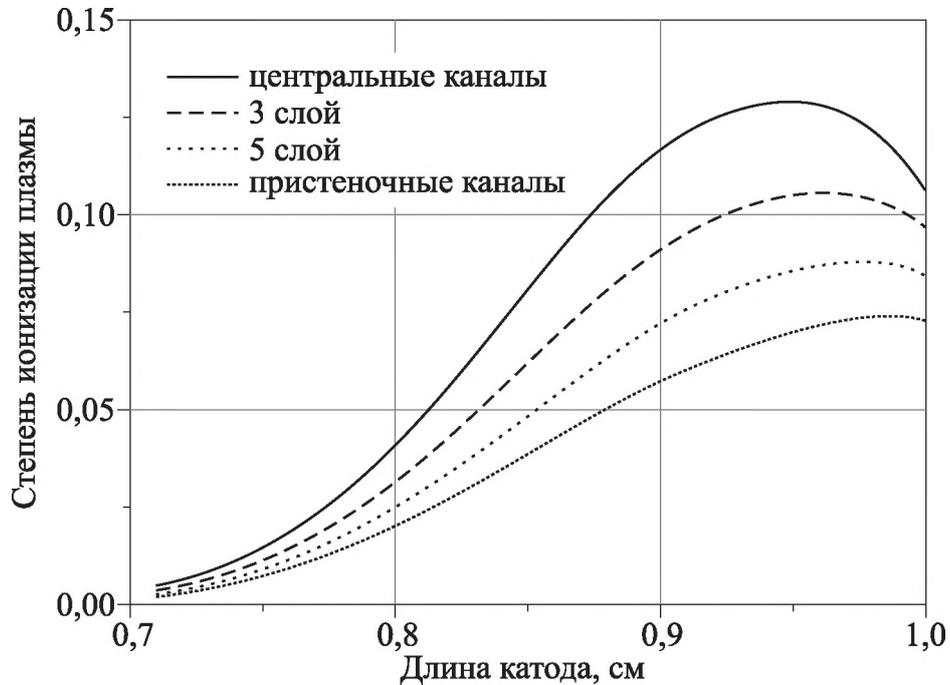


Рис. 4.29. Распределение степени ионизации плазмы по длине канала для различных слоев

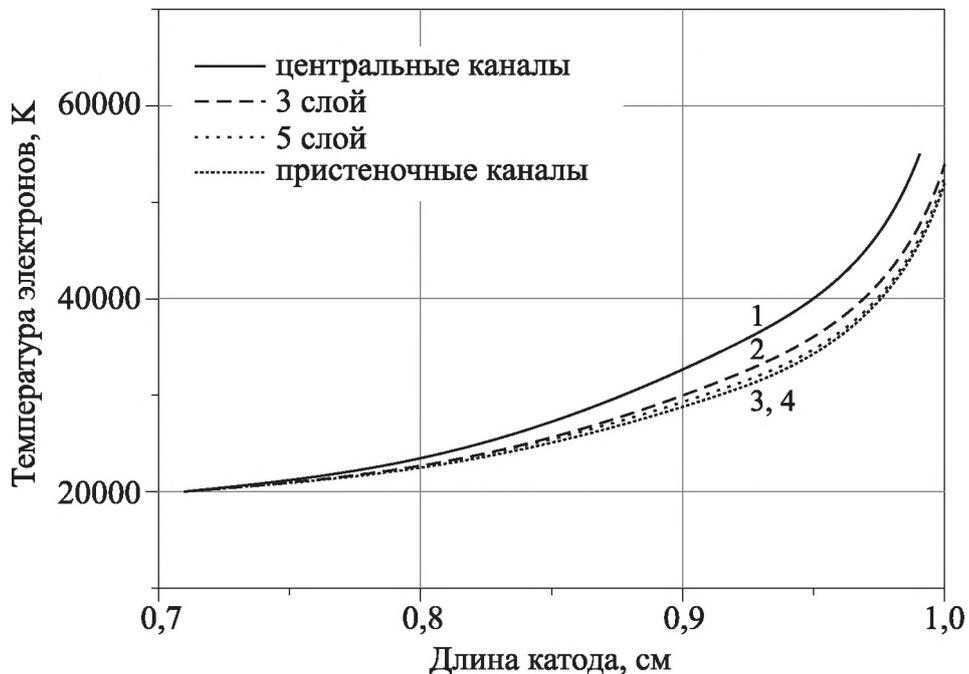


Рис. 4.30. Распределение температуры электронов по длине плазменных каналов: 1–4 — различные слои каналов, находящихся на разных расстояниях от оси

Также для уменьшенного катода проводили испытание на эрозионные характеристики в течение рабочего времени в 130 часов. Эксперимент проводился при значении силы тока 150 А и массовом расходе 4,5 мг/с, хотя эти значения не выдерживались на последних фазах испытания из-за снижения работоспособности катода. Для постоянного контроля за вакуумной установкой и экспериментом время эксперимента разделили на девять интервалов. Каждому интервалу предшествовал 1 час стабилизации при токе разряда в 40 А, и далее следовал рабочий отрезок теста. В таблице 4.2 приведены продолжительность экспериментальных интервалов и основные параметры разряда для каждого интервала.

Таблица 4.2

Параметры разряда при исследовании эрозии катода [21]

| Продолжительность,<br>ч | Сила тока,<br>А | Напряжение,<br>В | Температура,<br>°С |
|-------------------------|-----------------|------------------|--------------------|
| 40                      | 130             | —                | —                  |
| 11                      | 150             | 22,5             | —                  |
| 10                      | 150             | 23,7             | 2625               |
| 15                      | 150             | 23,3             | 2607               |
| 17                      | 150             | 23,4             | 2600               |
| 12                      | 150             | 24               | 2604               |
| 11                      | 124,7           | 23,9             | 2536               |
| 12                      | 128             | 24,2             | 2530               |

Процесс эрозии вызвал медленное, непрерывное снижение характеристик катода, что вело к сбоям в его работе. Торцевая поверхность катода полностью утратила первоначальную форму (рис. 4.31) из-за оплавления стержней, также появилось несколько крупных отверстий вследствие эрозии. Более высокая эрозия была обнаружена в местах, где между стержнями при набивке образовались широкие каналы.

В конце этого эксперимента катод снимали с установки и взвешивали для определения уноса массы вследствие эрозии. Разность масс между началом и окончанием испытания составила  $2,32 \text{ г} \pm 0,5 \%$ . Согласно этим данным и с учетом погрешности измерения 10 % скорость эрозии в эксперименте составляла около 33 нг/Кл [21].

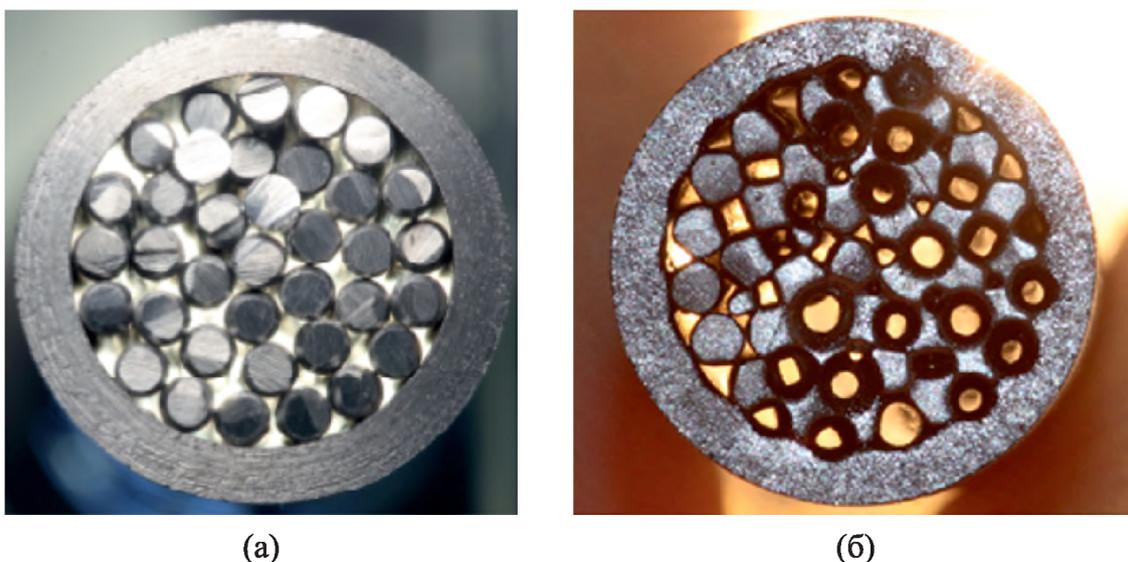


Рис. 4.31. Вид торцевой поверхности катода до (а) и после (б) 100-часового теста

Также было выполнено моделирование процесса эрозии на временном отрезке, соответствующем экспериментальному испытанию. На рисунках 4.32 и 4.33 приведены для сравнения скорости процессов распыления, испарения и рециклинга для центрального стержня набивки и стержня пристеночного периферийного слоя. Испарение практически ничтожно (на 3 порядка меньше) по сравнению с распылением и рециклингом. Но и рециклинг везде меньше распыления. Отсутствие эффекта зарастания отверстий при моделировании уменьшенного катода, видимо, связано с тем, что при малой длине каналов примесь выносится из катода течением плазмы. За счет эрозии увеличивается ширина каналов в торцевом сечении катода, а для близких к центру стержней образуется выемка на расстоянии примерно 1,2 мм от торца катода (рис. 4.34).

К сожалению, в эксперименте катод не разбирали на отдельные стержни, соответственно, не было возможности проверить состояние поверхности отдельных стержней.

Расчет удельной эрозии и интегрального уноса массы сильно зависит от значения коэффициента прилипания ионов. В качестве примера для 2-х значений тока в соответствии с таблицей 4.2 на рис. 4.35 приведены зависимости удельной эрозии от коэффициента прилипания ионов примеси. Следовательно, модель позволяет уточнить значение этого коэффициента, опираясь на результаты эксперимента по уносу массы и удельной эрозии. При моделировании использовалось значение коэффициента

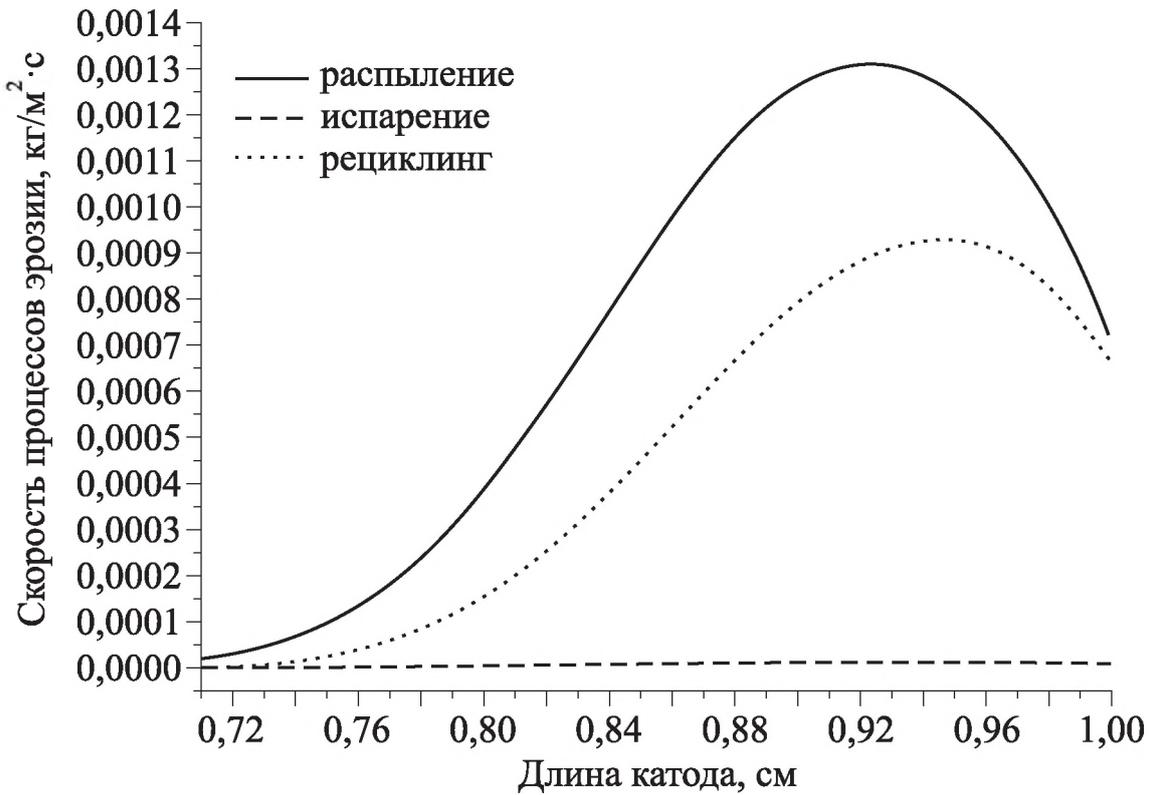


Рис. 4.32. Скорости эрозионных процессов для центрального стержня

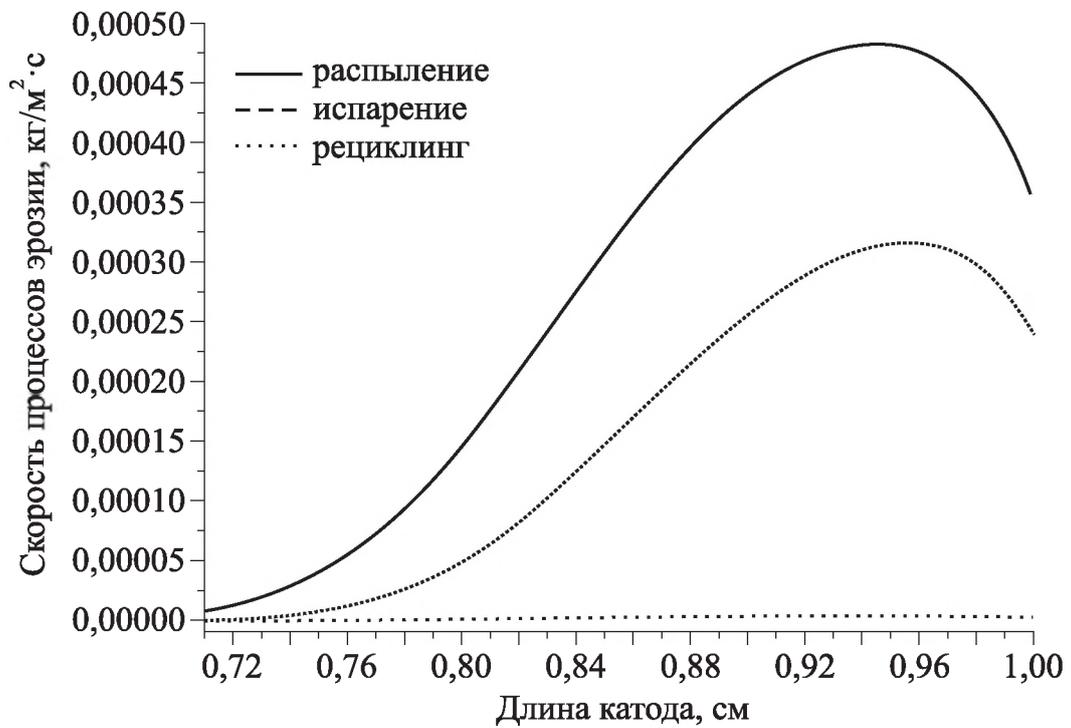


Рис. 4.33. Скорости эрозионных процессов для периферийных стержней

прилипания ионов примеси 0,8. В таком случае удельная эрозия при токе 130 А составит 27,8 нг/Кл, а при токе 150 А — соответственно 30,3 нг/Кл. Этот результат вполне соответствует экспериментальным данным. Погрешность оказалась в пределах 10 %.

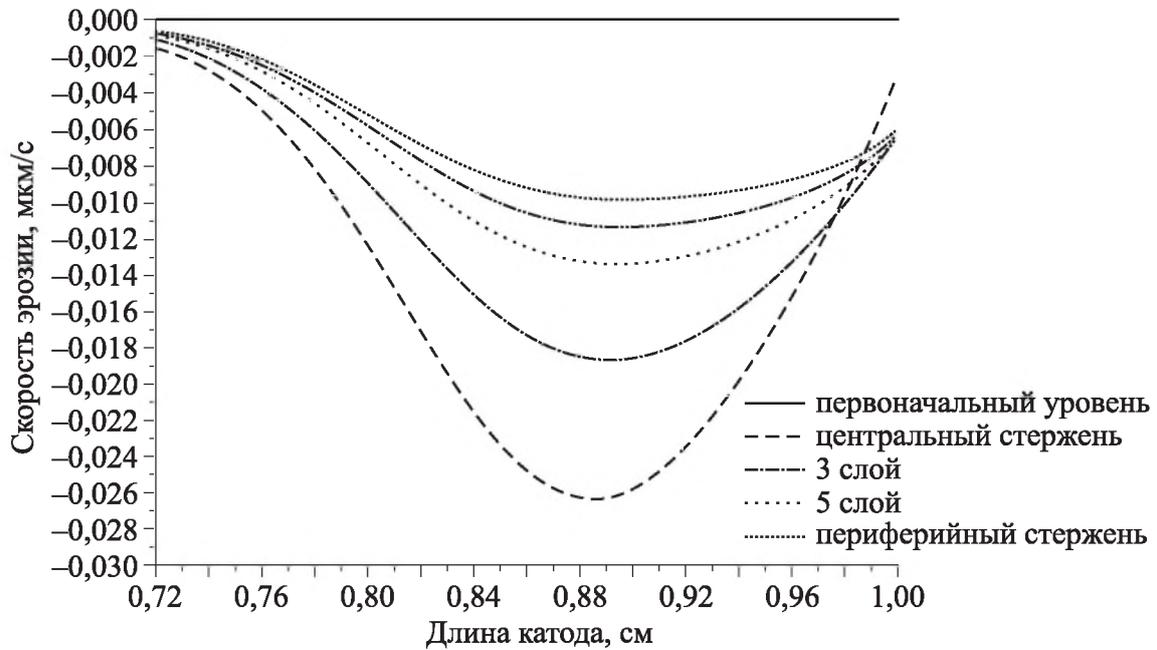


Рис. 4.34. Распределение скорости эрозии стержней по длине каналов для различных слоев

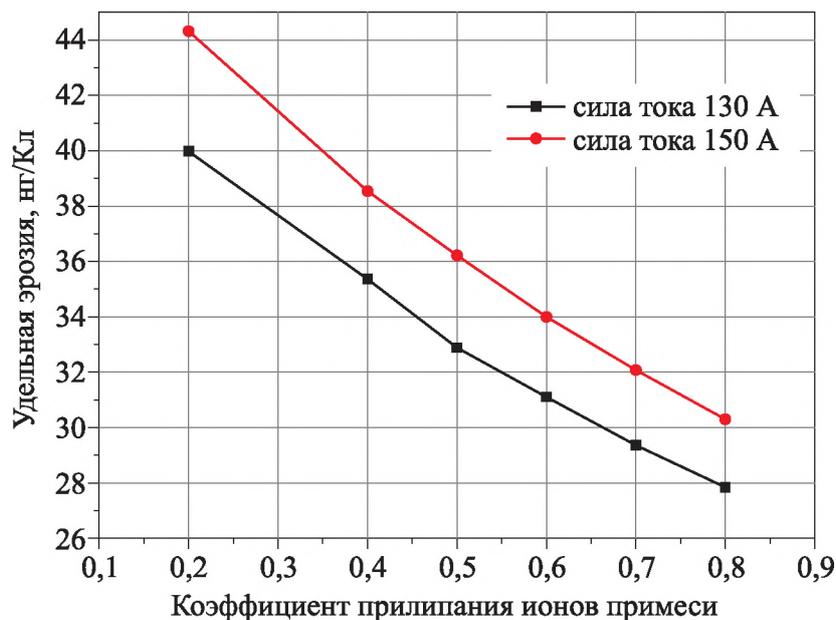


Рис. 4.35. Зависимость удельной эрозии от коэффициента прилипания ионов примеси

На рисунке 4.36 приведена зависимость средней скорости уноса массы от коэффициента прилипания примесных ионов. Расчет интегрального уноса массы (65 часов при токе 150 А и 35 часов при токе 130 А) при коэффициенте прилипания 0,8 дает значение 1,11 г. Если уменьшить коэффициент прилипания до 0,2, интегральный унос массы увеличится до 1,6 г. Этот результат не согласуется с экспериментальными данными, но модель учитывает только унос массы во время установившегося режима разряда. Моделирование не учитывает сильную эрозию в процессе зажигания разряда. В процессе испытаний было 10 этапов стабилизации разряда.

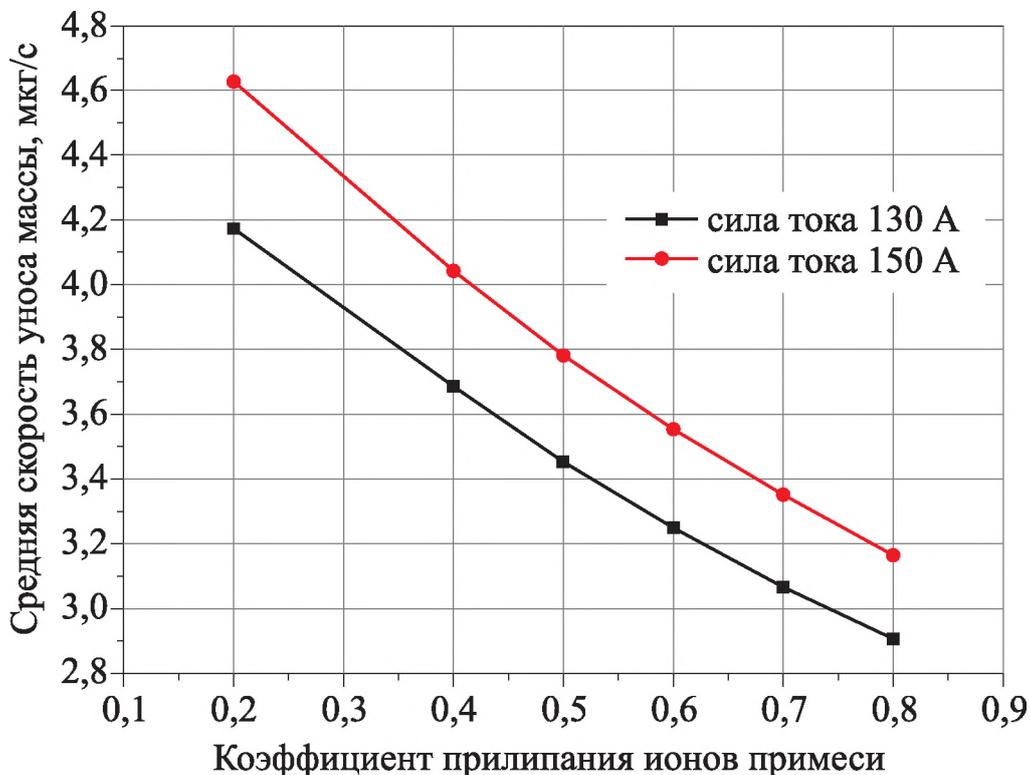


Рис. 4.36. Зависимость средней скорости уноса массы от коэффициента прилипания ионов примеси

На рисунке 4.37 показана зависимость удельной эрозии от силы тока разряда. Величина эрозии имеет минимум при силе тока 80 А и увеличивается при изменении тока в любую сторону от этого значения. Аналогичный график с минимумом имеет место и в зависимости удельной эрозии от расхода газа.

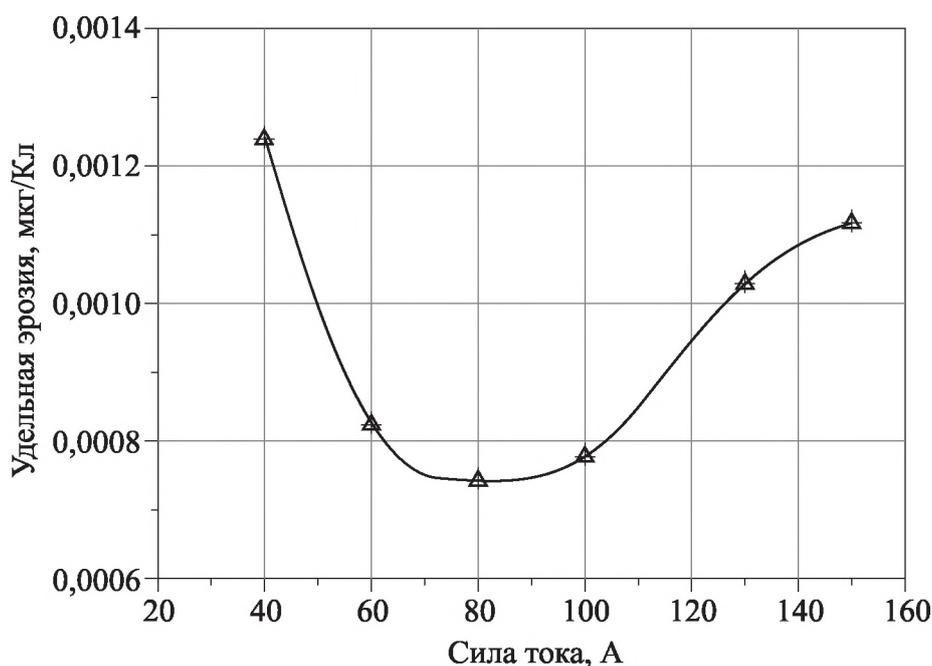


Рис. 4.37. Зависимость удельной эрозии от силы тока разряда

#### Заключение к главе 4

Сравнение результатов моделирования с экспериментально измеренными параметрами полого катода и разряда в целом является единственным способом проверить правильность модели и ее допущений. Однако получить локальные параметры состояния внутренних стержней катода и плазмы внутри катодных каналов для многоканальных полых катодов не представляется возможным по причине технических трудностей таких измерений. Поэтому объективно сильно ограничено число проверяемых параметров. Тем не менее выполнено сравнение результатов эксперимента и моделирования по температуре катода и прикатодному падению напряжения в зависимости от расхода плазмообразующего газа и силы тока разряда. Важным моментом является сопоставление результатов по удельной и интегральной эрозии катода.

Сравнение с экспериментом выявило некоторые трудности при определении параметров для периферийной зоны катода и торцевой зоны, где наблюдалось некоторое немонотонное поведение параметров. Тем не менее результаты сравнений показывают, что модель предсказывает параметры плазмы и катода разумно в соответствии с данными, имеющимися в литературе. Зависимости напряжения разряда от силы тока и ско-

рость эрозии определяются при моделировании с погрешностью 10 %, хотя расчет температуры имеет погрешность около 25 %.

Была показана возможность использования различных плазмообразующих веществ принципиально разного типа: аргон (как инертный газ), и литий (как щелочной металл).

Разработанная модель включает набор некоторых констант, которые определяются свойствами катодного материала и плазмообразующего газа и особенностями взаимодействия плазмы с данным катодным материалом. Некоторые могут быть уточнены в дальнейшем.

В целом результаты моделирования удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными в пределах 25 %. Таким образом, модель может быть полезной и применена для прогнозирования ресурса катодного узла двигателя.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lidsky L. M., Rothleder S. D., Rose D. J., Yoshikawa S., Michelson C., Mackin R. J. Highly ionized hollow cathode discharge // *J. Appl. Phys.* — 1962. — Vol. 33. — P. 2490–2497. — DOI: 10.1063/1.1729002
- [2] Rawlin V. K., Pawlik E. V. A mercury plasma-bridge neutralizer // *Journal of Spacecraft and Rockets.* — 1968. — Vol. 5. — P. 814–820. — DOI: 10.2514/3.29363
- [3] Byers D. C., Snyder A. Parametric investigation of mercury hollow cathode neutralizers // *Journal of Spacecraft and Rockets.* — 1970. — Vol. 8. — P. 133–139. — DOI: 10.2514/3.30233
- [4] Rehn L., Kaufman H. Correlation of inert gas hollow cathode performance // *Proc. of the 13th International Electric Propulsion Conference, San Diego, CA, USA, 25–27 April.* — 1978. — DOI: 10.2514/6.1978-707
- [5] Delcorix J. L., Minoos H., and Trindade A. R. Gas fed multichannel hollow cathode arcs // *Review of Scientific Instruments.* — 1969. — Vol. 40. — P. 1555–1562. — DOI: 10.1063/1.1683861
- [6] Cassady L. D., Choueiri E. Y. Experimental and theoretical studies of the lithiumfed multi-channel and single-channel hollow cathode // *Proc. 29th International Electric Propulsion Conference, Princeton University, 31 Oct. – 4 Nov.* — 2005. — IEPC–2005–094. — URL: <https://alfven.princeton.edu/publications/pdf/cassadyiepc-2005-094.pdf>
- [7] Бабкин Г. В., Михалев В. Г., Морозов Е. П., Потапов А. В. Экспериментальное исследование плазмы в многоканальном полом катоде // *Прикладная механика и техническая физика.* — 1976. — № 6. — С. 26–29. — URL: <https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=155341>
- [8] Огарков В. М., Огородников С. Н., Степанов В. Н. К расчету многостержневого катода сильноточного источника плазмы // *Радиотехника и электроника.* — 1976. — Т. 21. — № 12. — С. 98–103.

- [9] Дюжев Г. А., Старцев Е. А., Школьник С. М., Юрьев В. Г. Низкотемпературный безэрозионный катод на большие плотности тока // ЖТФ. — 1978. — Т. 48, № 10. — С. 2113–2117.
- [10] Semenikhin S. A. and Tikhonov V. B. The influence of cathode design on the performance and characteristics of MPD thrusters with applied magnetic field // Proc. 3rd Russian-German Conference on Electric Propulsion Engines and their technical applications. — Stuttgart, Germany. — 1994. — 19–23 June. — P. M27.
- [11] Vaulin E. P., Kirushkina M. V., Voropaev N. B. Theory and method of calculation of the integral and local parameters of hollow cathodes // Proc. 2nd German — Russia Conf. on Electric Propulsion Engines and Their Technical Applications. — Russia, Moscow. — 1993, 16–21 July. — P. A7–8.
- [12] Vaulin E. P., Kirushkina M. V., Tikhonov V. B., Filatova E. A. Calculation of hollow cathodes erosion // Proc. 2nd German–Russia Conf. on Electric Propulsion Engines and Their Technical Applications. — Russia, Moscow. — 1993. — 16–21 Jul. — P. A6 –7.
- [13] Vaulin E. P., Kirushkina M. V., Latyshev L. A., Tikhonov V. B., Filatova E. A. Engineering methods of hollow cathode calculation // Proc. 23 Intern. Electric. Propulsion Conf. — USA, Seattle. — 1993, 13–16 Sept. — IEPC–93–019.
- [14] Cassady L. Lithium-fed arc multichannel and single-channel hollow cathode: experiment and theory // Ph. D. dissertation. — Princeton University. — September 2006. — 249 p. — URL: <https://alfven.princeton.edu/publications/browse/cassady-thesis-2006/>
- [15] Albertoni R. Cathode processes in MPD thrusters // Thesis for: PhD Aerospace Engineering. — 2012. — 150 p. — URL: [https://www.researchgate.net/publication/259480519\\_Cathode\\_Processes\\_in\\_MP\\_D\\_Thrusters](https://www.researchgate.net/publication/259480519_Cathode_Processes_in_MP_D_Thrusters)
- [16] Downey R. T. Theoretical and experimental investigation into high current hollow cathode arc attachment // Thesis Ph.D. — University of Southern California. — 2008. — Publication Number: AAI3341676. — ISBN: 9780549972785. — Source: Dissertation Abstracts Internation-

- al. — Vol. 69-12. — Section: B. — 228 p. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2008PhDT.....134D/abstract>
- [17] Rossetti P., Paganucci F., Andrenucci M. A Hollow cathode model for applications to the electric propulsion // AIAA-2002-4239. — 38th JPC. — Indianapolis, Indiana, USA. — 2002. — DOI: 10.2514/6.2002-4239
- [18] Andrenucci M., Paganucci F., Rossetti P., Signori M. Hollow cathodes study at Alta-Centrosazio // Proc. 29th International Electric Propulsion Conference. Princeton University, USA. — 2005. — IEPC-2005-277. — URL: <http://electricrocket.org/IEPC/277.pdf>
- [19] Черкасова М. В. Математическое моделирование физических процессов в полном катоде: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. — М.: Московский государственный авиационный институт, 2007. — 152 с.
- [20] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012619789 от 30.10.2012 // Программа для физико-математического моделирования многоканального набивного полого катода, работающего в дуговом режиме с прокачкой инертного газа / Черкасова М. В. Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».
- [21] De Tata M., Albertoni R., Rossetti P., Paganucci F., Andrenucci M., Cherkasova M., Obukhov V., Riaby V. 100-hrs Endurance Test on a Tungsten Multi-Rod Hollow Cathode for MPD Thrusters // Proc. 32nd International Electric 249 Propulsion Conference. — Wiesbaden, Germany. — 2011. — IEPC-11-108. — 15 p. — URL: <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-84880667614&partnerID=MN8TOARS>
- [22] Albertoni R., Andrenucci M., Cherkasova M., De Tata M., Obukhov V., Paganucci F., Rossetti P. Experimental study of a multichannel hollow cathode for high power MPD thrusters // JPC-2011-1027660. — 10 p. — DOI: 10.2514/6.2011-6075

- [23] Albertoni R., Andrenucci M., Cherkasova M., De Tata M., Obukhov V., Paganucci F., Rossetti P., Riaby V., Semenikhin S. Numerical model for 100-kW class hollow cathodes // *Space Propulsion*. — 2010. — San Sebastian, Spain. — SP2010\_1841635. — 8 p.
- [24] Райзер Д. П. Физика газового разряда. — М.: Наука, 1987. — 592 с.
- [25] Котельников В. А., Ульданов С. В., Котельников М. В. Процессы переноса в пристеночных слоях плазмы. — М.: Наука, 2004. — 422 с.
- [26] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1989. — 608 с.
- [27] Поттер Д. Вычислительные методы в физике. — М.: Мир, 1975. — 329 с.
- [28] Котельников М. В., Гаранин С. Б. О применимости условия Куранта–Фридрихса–Леви к задачам электродинамики пристеночной плазмы // *Вестник МАИ*. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 37–40.
- [29] Чан П., Телбот Л., Турян К. Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме (теория и приложение). — М.: Мир, 1978.
- [30] Котельников В. А., Демков В. П. Электрический зонд с эмиссией электронов в режиме сплошной среды // *Инженерно-физический журнал*. — 1987. — Т. 52, № 2. — С. 224–227.
- [31] Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. — М.: Наука, 1982. — 392 с.
- [32] Котельников В. А. Исследование задач электродинамики плазмы // *Исследование актуальных проблем механики и машиностроения / Под ред. Ю. М. Давыдова*. — М.: НАПМ, 1995. — Т. 5. — С. 1529–1578.
- [33] *Вычислительные методы в физике плазмы / Под ред. Б. Ольдера*. — М.: Мир, 1974.
- [34] Котельников В. А., Котельников М. В. Усовершенствованный метод характеристик // *Математическое моделирование*. — 2017. — Т. 29, № 5. — С. 85–95.
- [35] Langmuir I. *Collected works of Irwing Langmuir / Ed. G. Smits*. — N.Y., 1961. Vol. 4. Первоначально опубликовано: *Gen. Electr. Rev.*

1924. Vol. 27. — P. 449; Phys. Rev. — 1926. — Vol. 26. — P. 727; Vol. 33. — P. 914; Vol. 34. — P. 867.
- [36] Алексеев Б. В., Котельников В. А. Зондовый метод диагностики плазмы. — М.: Энергоатомиздат, 1988. — 240 с.
- [37] Котельников М. В., Котельников В. А., Платонов М. А. Организация параллельного счета при компьютерном моделировании обтекания сферического спутника // XIX Международная конференция «Авиация и космонавтика». — Москва, 2020. — 104 с.
- [38] Bienkowski B., Chang K.W. Effect of electron emission of electrostatic probes at aeltrery pressument // Phys. Fields. — 1970. — Vol. 13, № 4. — P. 902–920.
- [39] Hoppman R. F. Gold electrode characteristics in chock ionized plasmas // Phis. Fluids. — 1968. — Vol. 12. — P. 1092–1110.
- [40] Wang E. Y., Hershkowits N. Technignes for using emitting probes of potential measurements in plasmas // Rew. Sci. Instrum. — 1986. — Vol. 57, № 10. — P. 2425–2431.
- [41] Ватажин А. Б. Магнитогидродинамические течения в каналах / А. Б. Ватажин, Г. А. Любимов, С. А. Регирер. — М.: Наука, 1970. — 672 с.
- [42] Методы исследования плазмы / Под ред. В. Лохте-Хольтгревена. — М.: Мир, 1971. — 552 с.
- [43] Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1991 . — 600 с.
- [44] Митчнер М., Кругер И. Частично ионизованные газы. — М.: Мир, 1976. — 496 с.
- [45] Чепмен С. Математическая теория неоднородных газов / С. Чепмен, Т. Каулинг; пер. с англ. под ред. Н. Н. Боголюбова. — М.: Издательство иностранной литературы, 1960. — 509 с.
- [46] Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н. Н. Яненко. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1967. — 195 с.
- [47] Крайнов А. Ю. Численные методы решения задач тепло- и массопереноса: учеб. пособие / А. Ю. Крайнов, Л. Л. Миньков. — Томск: STT, 2016. — 92 с.

- [48] Albertoni R. Cathode Processes in MPD Thrusters // Thesis for: PhD Aerospace Engineering. — 2012. — 150 p. — URL: [https://www.researchgate.net/publication/259480519\\_Cathode\\_Processes\\_in\\_MP\\_D\\_Thrusters](https://www.researchgate.net/publication/259480519_Cathode_Processes_in_MP_D_Thrusters)
- [49] Гришин С. Д., Лисицин В. М., Маратханов К. К., Маратханов М. К. Плотность тока эмиссии в полем катоде дугового разряда // ТВТ. — 1977. — Т. 15, № 4. — С. 906–909. — URL: <http://mi.mathnet.ru/rus/tvt/v15/i4/p906>
- [50] Дюжев Г. А. Полые и многополостные катоды / Приэлектродные процессы в дуговых разрядах: сборник. — Новосибирск: Наука. — 1982. — 109 с.
- [51] Паневин И. Г., Хвесюк В. И., Назаренко И. П. и др. Теория и расчет приэлектродных процессов. — Новосибирск: Наука, 1992. — 197 с.
- [52] Методы исследования плазмы / Под ред. В. Лохте-Хольтгревена. — М.: Мир, 1971. — 552 с.
- [53] Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. — М.: Мир, 1975. — 935 с.
- [54] Guerrero P., Mikellides I. G., Polk J. E., Monreal R. C., Meiron D. I. Critical implications of ion-surface energy accommodation and neutralization mechanism in hollow cathode physics // Journal of Applied Physics. — 2021. — Vol. 130, issue 4. — DOI: 10.1063/5.0055824
- [55] Гаврилова А. Ю., Скороход Е. П. Сечения и константы скоростей плазмохимических реакций инертных газов. — М.: Изд. МАИ, 2011. — 192 с.
- [56] Физико-химические процессы в газовой динамике. Спр. Т. I: Динамика физико-химических процессов в газе и плазме / Под ред. Г. Г. Черного и С. А. Лосева. — М.: Изд. Моск. ун-та, 1995. — 343 с.
- [57] Физико-химические процессы в газовой динамике. Спр. Т. II: Физико-химическая кинетика и термодинамика // Под ред. Г. Г. Черного и С. А. Лосева. — М.: Научно-издательский центр механики, 2002. — 368 с.

- [58] Ковалев В. М., Ляпин А. А., Урусин М. М. О распылении сильноточечного вольфрамового катода / ТВТ. — 1978. — № 2. — С. 418–419. — URL: <http://mi.mathnet.ru/rus/tvt/v16/i2/p418>
- [59] Приэлектродные процессы в дуговых разрядах / М. Ф. Жуков, Н. П. Козлов, А. В. Пустогаров и др.; отв. ред. Г. И. Морцева; АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т теплофизики. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1982. — 157 с.
- [60] Динамика паров металла в пристеночных слоях плазмы / М. Ф. Жуков, Н. П. Козлов, В. В. Гужков, В. И. Хвесюк, Б. Д. Цыдыпов // Доклады Академии наук СССР. — 1981. — Т. 260. — № 6. — С.1354–1356.
- [61] Долгов А. С., Оранский А. И., Рашкован В. М. К вопросу о механизме разрушения горячих ионных катодов в слаботочном дуговом разряде // Источники низкотемпературной плазмы. — 1977. — Вып. 2. — С. 48–55.
- [62] Чередниченко В. С., Галкин С. Г., Косинов А. А. Сильноточные дуги с ионным катодом // Генерация потоков электродуговой плазмы: сборник. — Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1987. — С. 306–322.
- [63] Автюшков А. П. Исследование разряда в полом катоде // Актуальные вопросы теплофизики и физической гидродинамики: сборник. — Новосибирск, 1987. — С. 228–230.
- [64] Автюшков А. П., Вальков Б. И., Родионов Ю. А., Стекольников А. Ф. Исследование параметров аргоновой дуги с полым катодом // ТВТ.— 1990. — № 28, вып. 1. — С. 10–17.
- [65] Кашенков В. И., Ковалев В. Н., Ляпин А. А., Пехтерев С. В. Обеспечение ресурса сильноточечных полых катодов // Тезисы XI Всесоюзной конф. «Генераторы низкотемпературной плазмы». — Новосибирск, 1989. — Ч. II. — С. 28–29.
- [66] Ковалев В. Н., Ляпин А. А., Чурсин М. М. Теоретическая модель и метод расчета многоканального полого термокатада // Источники и ускорители плазмы: сборник. — Харьков, 1978. — Вып. 3
- [67] Szente R. N., Munz R. J., Drouet M. G. Cathode erosion in inert gases: The importance of electrode contamination // Plasma Chem. Plasma Process. — 1989. — № 9. — P. 121–132. — DOI: 10.1007/BF01015830

- [68] Zhou X. and Heberlein J. An experimental investigation of factors affecting arc cathode erosion // *J. Phys. D: Appl. Phys.* — 1998. — № 31. — P. 2577–2590. — DOI: 10.1088/0022-3727/31/19/031
- [69] Ho A. K., Jorns B., Mikellides I. G., Goebel D. M. and Ortega A. L. Wear test demonstration of a technique to mitigate keeper erosion in a high-current LaB6 hollow cathode // *Proc. 52nd AIAA/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, AIAA Propulsion and Energy Forum.* — 2016. — Salt Lake City, USA. — DOI: 10.2514/6.2016-4836
- [70] Mikellides I. and Katz I. The partially-ionized gas and associated wear in electron sources for ion propulsion, I: Neutralizer hollow cathode // *Proc. 43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit.* — 2007. — Cincinnati, USA. — DOI: 10.2514/6.2007-5168
- [71] Mikellides G., Snyder J. S., Goebel D. M. and Katz I. Neutralizer hollow cathode simulations and validation with experiment // *Proc. 45th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit.* — 2009. — Denver, Colorado, USA. — DOI: 10.2514/6.2009-5196 255
- [72] Meng T., Qiao C., Wang Y., Ning Z. and Yu D. Accelerated erosion of keeper electrode during coupling discharge between Hall thruster and hollow cathode // *Vacuum.* — 2020. — Vol. 172:109040. — DOI: 10.1016/j.vacuum.2019.109040
- [73] Докукин М. Ю., Зимин А. Н., Хвесюк В. И. О кинетике испарения стенки в газовую среду // Тезисы IX Всесоюзной конференции по генераторам низкотемпературной плазмы. — Фрунзе, Илим. — 1983. — С. 194–195.
- [74] Мойжес Б. Я., Немчинский В. А. Скорость испарения присадки и режим работы активированного катода плазмотрона. — *ЖТФ.* — Т. 54, вып. 6.— С. 1076–1083.
- [75] Ковалев В. Н, Ляпин А. А, Пехтерев С. В., Чурсин М. М. Математическая модель рециклинга в полном катоде // Тезисы XI Всесоюзной конференции по генераторам низкотемпературной плазмы, Новосибирск, 1989. — Т. II. — С. 143–144.
- [76] Смирнов Б. М. Физика слабоионизованного газа. — М.: Наука, 1985.— 423 с.

- [77] Ning Z., Zhang H., Ouyang L. and Yu D. The ignition erosion mechanism of heatless hollow cathode // Proc. 35th International Electric Propulsion Conference. — 2017. — Paper No. IEPC-2017-70. — P. 1–9.
- [78] Shiyuan Cong , Jizhong Sun, Wei Jin, Dezhen Wang Numerical simulation of the cathode erosion by ion sputtering in hollow cathode arc discharges // Phys. Plasmas. — 2021. — Vol. 28, issue 5:053506. — DOI: 10.1063/5.0039652
- [79] Найфэ А. Х. Введение в методы возмущений / Пер. с англ. И. Е. Зино, Э. А. Троппа; под ред. Р. Г. Баранцева. — М.: Мир, 1984. — 535 с.
- [80] Minoо H. Etude de décharges á cathode creuse á flux de gas en régime d'arc // Theses docteur des siences physiques présentées á la faculté des siences d'Orsay de l'Universite de Paris. — 1969. — P. 256.
- [81] Плешивцев Н. В. Катодное распыление. — М.: Атомиздат, 1968. — 344 с.
- [82] Таблицы параметров пространственного распределения ионно-имплантированных примесей. Теория, метод расчета, таблицы / А. Ф. Буренков, Ф. Ф. Комаров, М. А. Кумахов, М. М. Темкин. — Минск: Изд-во БГУ, 1980. — 350 с.
- [83] Готт Ю. В. Взаимодействие частиц с веществом в плазменных исследованиях. — М.: Атомиздат, 1978. — 271 с.
- [84] Schiff H.E. Approximation and interpolation rules for ranges and range stragglings // Rad. Effects. — 1970. — Vol. 6. — P. 107–113. — DOI: 10.1080/00337577008235052
- [85] Ваулин Е. П. Физическая модель эрозии твердого тела за счет ударов индивидуальных ионов и скорость распыления при низких энергиях и высоких температурах // Исследование термодинамических и переносных свойств нейтральных и ионизованных газов / Под ред. проф. д. ф.-м. н. Б. В. Алексеева. — М.: МАИ, 1979. — С. 45–51. (Тематический сборник научных трудов института / М-во высш. и сред. спец. образования СССР. Вып. 498. — 90 с.)
- [86] Термодинамические свойства индивидуальных веществ. — Т. 4. Книга 2 / Под ред. В. П. Глушко. — М.: Наука, 1982. — 560 с.

- [87] Inelastic Ion-Surface Collisions / Eds. N. H. Tolk, J. C. Tally, W. Heiland, C. W. White. — Academic Press: New York–London, 1977. — P. 121–152.
- [88] Sigmund P. Mechanisms and theory of physical sputtering by particle impact // Nuclear Instruments & Methods in Physics Research Section B-beam Interactions With Materials and Atoms. — 1987. — Vol. 27. — P. 1–20. — DOI: 10.1016/0168-583X(87)90004-8.
- [89] Тепло- и массообмен между потоками газов и твердой поверхностью / Под ред. д-ра техн. наук, проф. В. К. Кошкина. — М., 1975. — 104 с. (Тематический сборник научных трудов института / М-во высш. и сред. спец. образования СССР. Вып. 334.)
- [90] Тепло- и массообмен между потоками газов и твердой поверхностью / Под ред. д-ра техн. наук, проф. В. К. Кошкина и д-ра техн. наук с. н. с. Г. А. Дрейцера. — М., 1979. — 104 с. (Тематический сборник научных трудов института / М-во высш. и сред. спец. образования СССР. Вып. 488).
- [91] Рязанов М. И., Тилинин И. С. Исследование поверхности по обратному рассеянию частиц. — М.: Энергоиздат, 1985. — 152 с.
- [92] Распыление твердых тел ионной бомбардировкой. Т. I / Под ред. Р. М. Бериша. — М.: Мир, 1984. — 336 с.
- [93] Мартыненко Т. П., Георгиева Н. Е., Гусякова Н. Ф. Исследование эрозии прямонакального катода в режиме низковольтного дугового разряда / Экспериментальные и теоретические вопросы прикатодных физических исследований: сборник. — М.: МАИ, 1985. — С. 64–68.
- [94] Ваулин Е. П., Георгиева Н. Е., Мартыненко Т. П., Феоктистов Л. В. Исследование эрозии тугоплавких металлов при взаимодействии с ионами малых энергий при высоких температурах // Физика плазмы. — 1981. — Т. 7, № 2. — С. 437–448.
- [95] Eckstein W. Sputtering Yields. // In: Sputtering by Particle Bombardment. Topics in Applied Physics, Springer, Berlin, Heidelberg. — 2007. — Vol. 110. — P. 33–187. — DOI: 10.1007/978-3-540-44502-9\_3.
- [96] Mikellides G., Snyder J. S., Goebel D. M. and Katz I. Neutralizer hollow cathode simulations and validation with experiment // Proc. 45th

- AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit. — Denver, Colorado, USA, 2009. — DOI: 10.2514/6.2009-5196.
- [97] Nuclear Data Section / Atomic International Energy Agency and Molecular Data Unit. ALLADIN database [Электронный ресурс]. — URL: <https://www-amdis.iaea.org/ALADDIN>
- [98] Delcroix J. L., Minoo H., Trindade A. R. Établissement d'une règle générale pour une décharge d'arc cathode creuse // *Journal de Physique*, Paris. — 1968. — Vol. 29. — P. 605–610. — DOI: 10.1051/JPHYS:01968002907060500258
- [99] Paganucci F., Rossetti P., Andrenucci M., Tikhonov V., Obukhov V. Performance of an Applied Field MPD Thruster with a pre-ionization chamber // *Proc. 27th Int. Electric Propulsion Conf.* — 2001. — Pasadena, USA. — Papers 01-132 and 01-123. — DOI: 10.2514/6.2002-2103.
- [100] Andrenucci M. et al. New developments in applied field MPD thrusters // *Proc. 8th IWCP — Rocket Propulsion: Present and Future.* — 2003.— Paper 43-1.
- [111] Obukhov V. et al. State of the art and perspectives for magnetoplasdynamic thrusters // *Proc. Int. Symp. on Energy Conversion Fundamentals.* — Report presentation. — 2004. — Istanbul, Turkey.
- [102] Albertoni R., Rossetti P., Paganucci F., Andrenucci M., Zuin M., Martinez E., & Cavazzana R. Experimental study of a 100-kW class applied-field MPD thruster // *Proc. 32nd International Electric Propulsion Conference.* — 2011. — Wiesbaden, Germany. — IEPC-2011-110.
- [103] Albertoni R., Paganucci F., Rossetti P., Andrenucci M. Performance characterization of a 100-kW-class applied-field MPD thruster // *Proc. Space Propulsion Conference.* — Bordeaux, France. — 2012. — SP2012 2350633.
- [104] Ferreira C. M., Delcorix J. L. Theory of the hollow cathode arc // *Journal of Applied Physics.* — 1978. — Vol. 49, issue 4. — P. 2380–2395.
- [105] Sary G., Garrigues L., Boeuf J. P. Hollow cathode modeling: I. A coupled plasma thermal two-dimensional model // *Plasma Sources Sci. Technol.* — 2017. — Vol. 26(5). — 055007.
- [106] Scholze F., Eichhorn C., Bundesmann C., Spemann D., Neumann H., Bulit A., Feilib D., Gonzalez del Amo J. Modeling of a radio frequency

- plasma bridge neutralizer (RFPBN) // *Procedia Eng.* — 2017. — Vol. 185. — P. 9–16.
- [107] Mikellides I., Katz I., Goebel D., Polk J. Theoretical model of a hollow cathode insert plasma // *AIAA 2004-3817*. <https://doi.org/10.2514/6.2004-3817>.
- [108] Mikellides I., Katz I., Goebel D., Polk J. Theoretical model of a hollow cathode plasma for the assessment of insert and keeper lifetimes. // *AIAA 2005-4234*. — DOI: 10.2514/6.2005-4234.
- [109] Goebel D. M., Becatti J., Lopez Ortega A., Mikellides I. G. Plasma hollow cathodes // *Journal of Applied Physics*. — 2021. — Vol. 130, issue. 5. — DOI: 10.1063/5.0051228251.
- [110] Delcroix J. L., Trindade A. R. Hollow cathode arcs // *Adv. in Electron. and Electron Phys.* — 1974. — Vol. 35. — P. 87–190. — DOI: 10.1016/S0065-2539(08)60281-4.
- [111] Ferreira C. M., Delcroix J. L. Theory of the hollow cathode arc // *J. Appl.* — 1978. — Vol. 49. — P. 2380–2395. — DOI: 10.1063/1.325126.
- [112] Cong S., Sun J., Wang D. A 2D model for low-pressure hollow cathode arc discharges in argon // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — Vol. 52, No. 4 (52 045205). — DOI: 10.1088/1361-6463/aaed05.
- [113] Паневин И. Г., Хвесюк В. И., Назаренко И. П. и др. Теория и расчет приэлектродных процессов / Отв. ред. И. Г. Паневин и В. И. Хвесюк // *Низкотемпературная плазма*. — Новосибирск: ВО-Наука, 1992. — Т. 10. — 195 с.
- [114] Биберман Л. М. Нарушение термодинамического равновесия в плазме, вызванное выходом излучения // *ЖТФ*. — 1949. — Т. 19, № 7. — с. 584.
- [115] Романов Г. С., Степанов К. Л., Станциц Л. К. Влияние реабсорбции излучения в линиях на кинетические характеристики неравновесной плазмы. — Минск: Изд. Ин-та тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова АН БССР, 1994. — № 3. — 37 с.
- [116] Гаврилова А. Ю., Кули-Заде М. Е., Черкасова М. В. Плазмомеханическая трактовка состояний возбужденных атомов инертных газов // *Труды МАИ*. — 2022. — № 123. — 26 с. — DOI: 10.34759/trd-2022-123-09

- [117] Теоретические и экспериментальные исследования процессов тепло-, массо- и электрообмена в плазменных устройствах новой техники: Исследование неравновесных свойств и параметров ионизованных газов в прикатодных областях сильноточных газовых разрядов // Отчет о НИР. МАИ / Научн. рук. Е. П. Ваулин. — М.: МАИ, 1980. — Гос. рег. № 77063102. — Инв. № 02818017702. — 153 с.
- [118] Holstein T. Imprisonment of resonance radiation in gases // *Phys. Rev.* — 1947. — Vol. 72, № 12. — P. 1212–1233.
- [119] Полак Л. С., Словецкий В. И. О влиянии ионно-молекулярных реакций на ионизационное равновесие в двухтемпературной плазме // *Химия высоких энергий.* — 1974. — Т. 8, № 2. — С. 135–140.
- [120] Биберман Л. М. Нарушение термодинамического равновесия в плазме, вызванное выходом излучения // *ЖТФ.* — 1949. — Т. 19, № 7. — С. 584.
- [121] Воробьев В. С. Влияние реабсорбции излучения на отклонение от термодинамического равновесия // *ТВТ.* — 1966. — Т. 4, № 4. — С. 494.
- [122] Wiese W. D., Smith M. W., Glennon B. H. Atomic Transition Probabilities // *NIRDS-NBS-4.* — 1966. — Vol. I. — 154 p.
- [123] Nuclear Data Section / Atomic international energy agency and molecular data unit. ALLADIN database [Электронный ресурс]. — URL: <https://wwwamdis.iaea.org/ALADDIN/>
- [124] Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966. — 688 с.
- [125] Семиохин И. А. Элементарные процессы в низкотемпературной плазме: учеб. пособие. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. — 142 с.
- [126] Seaton M. J. Radiative recombination of hydrogenic ions // *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* — 1959. — Vol. 119, № 2. — P. 81–89
- [127] Mitchell A. C., Zemansky M. W. Resonance radiation and excited atomic. — London and New York, 1961. — 361 p.
- [128] Диагностика плазмы / Под ред. Р. Хаддлстоуна и С. Ленарда. — М.: Мир, 1967. — 516 с.

- [129] Bates D. R., Kingston A. E., Mc Whirter R. W. P. Recombination between electrons and atomic ions I Optically thick plasmas // Proc. Roy. Soc. A. — 1962. — Vol. 267, 297 (part I).
- [130] Inglis D., Teller E. // Astrophys. J. — 1939. — Vol. 90. — P. 434.
- [131] Margenan H. // Rev. Mod. Phys. — 1959. — Vol. 88, № 3.
- [132] Ecker G., Weizel W. // Ann. Physik. — 1956. — Vol. 17. — P. 126–138.
- [133] Haepeller H. J., Bauman G. Irreversible into stochastic thermodynamics and transport phenomena in a reacting plasma. Final report. — Stuttgart, 1956.
- [134] Unsöld A. // Astrophysik. — 1948. — Vol. 24. — P. 355–366.
- [135] Ecker G., Kröll W. Degree of ionization of a plasma in Equilibrium // Z. Naturforschg. — 1966. — Vol. 21a — P. 2023–2027.
- [136] Brunet A. Hollow cathode arcs. Experimental study of the plasma inside the hollow cathode // Rev. Phys. Appl. — 1977. — Vol. 12. — P. 1105–1114.
- [137] Атомные и молекулярные процессы / Пер. с англ. под ред. Д. Бейтса; под ред. Л. М. Бибермана и В. А. Фабриканта. — М.: Мир, 1964. — 777 с.
- [138] Ульянов К. Н. Вывод уравнений баланса для неравновесной плазмы // ТВТ. — 1985. — Т. 3, № 4. — С. 536–546.
- [139] Ковалев В. М., Ляпин А. А., Урусин М. М. О распылении сильноточного вольфрамового катода / ТВТ. — 1978. — № 2. — С. 418–419.
- [140] Хастед Дж. Физика атомных столкновений. — М.: Мир, 1965. — 710 с.
- [141] Котельников В. А., Крылов С. С., Котельников М. В. Плавающий потенциал спутника, движущегося в ионосферной плазме // Космонавтика и ракетостроение. — 2022. — Т. 59, № 1. — С. 15–19.
- [142] Котельников М. В., Крылов С. С., Филиппов Г. С. Математическое моделирование электродинамики спутника в ионосфере. — М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2022. — 184 с.
- [143] Шапиро Д. А. Конспект лекций по математическим методам физики. Часть 2 (Представления групп и их применение в физике. Функции Грина). — Новосибирск: НГУ, 2004. — 140 с.

- [144] Интегральные уравнения и задача Штурма–Лиувилля: учебно-методическое пособие / Сост. В. В. Шаньков. — М.: МФТИ, 2018.— 47 с.
- [145] Боголюбов А. Н., Левашова Н. Т., Могилевский И. Е., Мухартова Ю. В., Шапкина Н. Е. Функции Грина оператора Лапласа: учебное пособие. — М.: Физический факультет МГУ, 2018. — 187 с.
- [146] Салехова И. Г. Уравнения математической физики. II: Курс лекций // Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2019. — 159 с.
- [147] Багров В. Г., Белов В. В., Задорожный В. Н., Трифонов А. Ю. Методы математической физики. III. Специальные функции. — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 352 с.
- [148] Холодова С. Е., Перегудин С. И. Специальные функции в задачах математической физики: учебное пособие. — Санкт-Петербургский национальный исследовательский институт информационных технологий, механики и оптики, 2012. — 72 с.
- [149] Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и других математических формул / Пер. с англ. — М.: Наука, 1966. — 228 с.
- [150] Мирошниченко Г. П., Мешковский И. К. Математическая физика для инженеров. — СПб.: Университет ИТМО, 2022. — 121 с.
- [151] Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической лит., 1978. — 295 с.
- [152] Гредасова Н. В., Андреева И. Ю. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2022. — 88 с.
- [153] Янин С. Н. Лекции по основам физики плазмы. Ч. I. — Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. — 78 с.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение 1

### Методика расчета плавающего потенциала [141, 142]

Будем рассматривать случай, когда полый катод работает в режиме сплошной среды. Наличие эмиссии электронов с поверхности катода оказывает существенное влияние на плотность электрического тока, поступающего на стенку пологого катода. Как показано в [30], при больших токах эмиссии в пристеночной области образуется избыток отрицательных зарядов, что ведет к появлению потенциальных ям и изменению знака у вектора напряженности электрического поля. В случае отрицательного потенциала стенки плотность поступающего на нее тока складывается из плотности тока эмиссии  $j_{eэ}$  и плотности тока ионов  $j_i$ , поступающих из плазменного образования, движущегося вдоль оси полого катода

$$(j_{\Sigma})_0 = (j_{eэ})_0 + (j_{i\text{плазмы}})_0. \quad (\text{П1.1})$$

Следовательно, с ростом  $(j_{eэ})_0$  растет и  $(j_{\Sigma})_0$ .

В случае положительного потенциала стенки часть эмитированных электронов не может преодолеть потенциальный барьер, и тормозящее электрическое поле поэтому возвращается обратно на стенку. Поскольку в этом случае плотность тока отрицательных частиц на стенку равна

$$(j_{\Sigma})_0 = (j_{e\text{плазмы}})_0 - (j_{eэ})_0, \quad (\text{П1.2})$$

то с увеличением  $j_{eэ}$  результирующая плотность тока  $(j_{\Sigma})_0$  будет уменьшаться. Составляющая  $(j_{e\text{плазмы}})_0$  определяется градиентом потенциала  $\nabla\varphi_0$ , градиентом концентрации заряженных частиц  $\nabla n_0$  и градиентом температуры  $\nabla T_0$ . Как показано в [30], под влиянием  $\nabla\varphi_0$   $(j_{\Sigma})_0$  изменяется более существенно, чем под влиянием  $\nabla n_0$  и  $\nabla T_0$ , поэтому основное влияние на  $(j_{\Sigma})_0$  оказывает профиль потенциала  $\varphi_0(r_0)$ .

Индекс «0» есть признак безразмерной величины, например,  

$$(j_{\Sigma})_0 = \frac{j_{\Sigma}}{M_j}.$$

На рис. П1.1, а, б приведена зависимость  $(j_{\Sigma})_0$  от  $\varphi_0$  для цилиндрического стержня размером  $r_0 = 5$  при различных значениях  $(j_{e\varepsilon})_0$ . На рис. П1.1,а  $\varphi_0$  меняется от 0 до  $-20$ , а на рис. П1.1, б — от 0 до 15.

При увеличении положительного значения  $\varphi_0$  (рис. П1.1, б) кривые зависимости  $(j_{\Sigma})_0$  от  $\varphi_0$  сближаются и совмещаются с кривой для случая отсутствия эмиссии. Это объясняется тем, что стержень с большим положительным потенциалом притягивает обратно эмитируемые с его поверхности электроны. Следовательно, точка перехода возрастающего участка кривой в ток насыщения, соответствующая потенциалу плазмы, обычно принимаемому за ноль, не зависит от  $(j_{e\varepsilon})_0$ . Плавающему потенциалу соответствует точка с нулевым значением  $(j_{\Sigma})_0$ .<sup>2</sup> Как следует из рис. П1.1, положение этой точки зависит от  $(j_{e\varepsilon})_0$ . С ростом  $(j_{e\varepsilon})_0$  ( $\varphi_0$ ) по модулю возрастает.

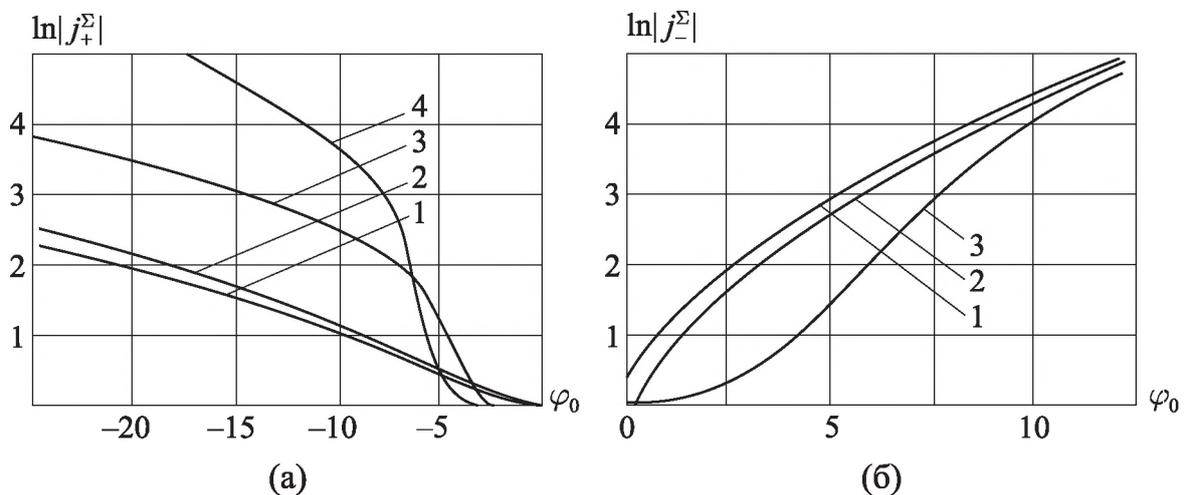


Рис. П1.1. Зависимость  $(j_{\Sigma})_0$  от  $\varphi_0$ : ( $r_0 = \frac{r_p}{r_D} = 5$ ,  $\varepsilon = \frac{T_i}{T_e} = 1$ );

1 —  $(j_{e\varepsilon})_0 = 0$ ; 2 — 1; 3 — 5; 4 — 10

<sup>2</sup> Напомним, что  $(\varphi_{пл})_0$  отсчитывается от потенциала плазмы, принятого за ноль.

Это означает, что расстояние по оси  $\varphi_0$  между точкой, принимаемой за ноль, и точкой, где  $(j_\Sigma)_0 = 0$ , с ростом  $(j_{e3})_0$  увеличивается. Поскольку это расстояние  $\Delta\varphi_0 = \Delta\varphi_{\text{плав}}$ , то можно сделать вывод: плавающий потенциал стенки полого катода с эмиссией электронов по модулю всегда больше плавающего потенциала без эмиссии.

Напомним кратко схему расчета плавающего потенциала ПК в режиме сплошной среды. С учетом предположений, сформулированных в главе 1, модель Эйлера – Пуассона в безразмерном виде определяется формулами (1.17)–(1.22) с системой начальных и граничных условий (1.23). Вычислительная модель решения этой системы изложена в разделе 1.3 главы 1. Варьируя значение  $\varphi_0$ , можно найти то решение, которое соответствует условию  $(j_\Sigma)_0 = 0$ . Это значение потенциала принимается за  $(\varphi_{\text{плав}})_0$  относительно потенциала плазмы, принятого за ноль.

## Приложение 2

### Вывод граничного значения ФРЭ при наличии термоэмиссии

Формула Ричардсона – Дэшмана для плотности потока эмитированных электронов записывается через функцию распределения эмитированных электронов  $f_{e3}$  [24]:

$$j_{e3} = \left| e \int f_{e3}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \right| = \frac{4\pi m_e e k^2 T_p^2}{h^3} \exp\left(-\frac{e\Phi}{kT_p}\right), \quad (\text{П2.1})$$

где  $h$  — постоянная Планка,  $T_p$  — температура эмитируемой поверхности,  $e\Phi$  — работа выхода электронов из поверхности ПК.

Согласно принципам квантовой механики фазовое пространство  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  делится на элементарные ячейки  $h^3$ . Количество электронов в одной ячейке при заданной температуре и энергии  $W = W_{\text{пот}} + W_{\text{кин}}$  равно

$$N_1 = \left\{ \exp\left[\frac{(W - \mu)}{kT}\right] + 1 \right\}^{-1}, \quad (\text{П2.2})$$

где химический потенциал  $\mu$  зависит от температуры и концентрации частиц. ФРЭ, а точнее количество электронов в единице объема со скоростями от  $\mathbf{v}$  до  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ , равно [24]

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = \frac{2m_e^3}{h^3} \frac{d\mathbf{v}}{\exp\left[\frac{W - \mu}{kT}\right] + 1}. \quad (\text{П2.3})$$

При реально используемых температурах поверхности эмитирующих тел вырождение велико,  $\mu \approx -e\Phi$  и  $e\Phi \gg kT$ . Поэтому экспоненциальный множитель в (П2.3) велик по сравнению с единицей. С учетом того, что потенциальная энергия электрона отрицательна, выйти из металла могут только те электроны, которые внутри металла обладают скоростью

$$v \geq v_{\text{ВЫХ}} = \left( \frac{2|W_{\text{ПОТ}}|}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{П2.4})$$

Полагая, что все электроны, движущиеся по нормали к поверхности со скоростью  $v \geq v_{\text{ВЫХ}}$ , будут эмитированы, ФРЭ (П2.3) трансформируем в соотношение

$$f_{e3}(r, v) = \frac{2m_e^3}{h^3} \exp\left(-\frac{e\Phi}{kT_p}\right) \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2kT_p}\right). \quad (\text{П2.5})$$

Если у поверхности имеется электрическое поле напряженностью  $E_p$ , эффективная работа выхода равна  $(e\Phi - e\Phi_E)$ , где  $e\Phi_E$  — поправка Шоттки [24].

### Приложение 3

#### Уравнения Власова и система уравнений характеристик для тел цилиндрической геометрии

Рассматривается бесконечный цилиндр радиусом  $r_p$ , имеющий потенциал  $\varphi_p$ . Введём цилиндрическую систему координат  $(r, \theta, z)$  так, чтобы ось  $z$  совпадала с осью цилиндра (рис. П3.1).

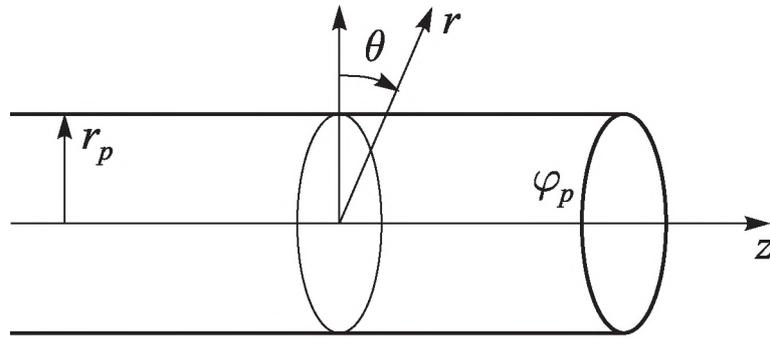


Рис. ПЗ.1. Система координат

Фазовыми переменными являются  $(r, \theta, z, v_r, v_\theta, v_z)$ . Функции распределения частиц и потенциал электрического поля инвариантны относительно оси  $z$ , поскольку выполняется условие  $r_p \ll l_z$ , где  $l_z$  — длина цилиндра:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \alpha = i, e.$$

Компоненты напряженности электрического поля:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad E_z = 0. \quad (\text{ПЗ.1})$$

Рассмотрим силы, действующие на заряженную частицу вдоль оси  $r$ :

- сила электрического поля  $E_r$ ,

$$F_{\text{эл}} = q_\alpha \cdot E_r,$$

где  $q_\alpha$  — заряд частицы;

- центробежная сила, связанная с вращением частицы по окружности радиуса  $r$  со скоростью  $v_\theta$ :

$$F_{\text{ц}} = \frac{v_\theta^2}{r} \cdot m_\alpha.$$

Следовательно, результирующая сила в проекции на радиус равна

$$F_r = q_\alpha \cdot E_r + \frac{v_\theta^2}{r} \cdot m_\alpha. \quad (\text{ПЗ.2})$$

Рассмотрим далее силу  $F_\theta$  :

- сила электрического поля, связанная с составляющей напряжённости  $E_\theta$  :

$$F_{\text{эл}} = q_\alpha \cdot E_\theta ;$$

- сила Кориолиса, связанная с вращением частицы с угловой скоростью  $\omega = \frac{v_\theta}{r}$  и одновременным движением по радиусу со скоростью  $v_r$  :

$$(F_{\text{кор}})_\theta = -\frac{v_\theta \cdot v_r}{r} \cdot m_\alpha .$$

Следовательно, результирующая сила  $F_\theta$  равна

$$F_\theta = q_\alpha \cdot E_\theta - \frac{v_\theta \cdot v_r}{r} \cdot m_\alpha . \quad (\text{П3.3})$$

Сила  $F_z = 0$  , поскольку  $E_z = 0$  ( $E_z = -\nabla \phi_z$ ,  $\phi_z = \text{const}$ ) , а других сил нет.

Учитывая (П2.2) и (П2.3), запишем уравнения движения частицы вдоль характеристик:

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} = v_r; \quad \dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r}; \quad \dot{z} = v_z = \text{const}; \\ \ddot{r} = \dot{v}_r = \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \cdot E_r; \\ \dot{v}_\theta = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \cdot E_\theta - \frac{v_\theta \cdot v_r}{r}; \\ \dot{v}_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П3.4})$$

С учетом (П3.4) уравнение Власова для цилиндрического тела принимает вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} + \left( \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_r \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_r} + \left( \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_\theta - \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\theta} = 0, \quad (\text{П3.5})$$

$$\alpha = i, e.$$

Компоненты напряженности электрического поля  $E_r, E_\theta$  находятся путем решения уравнений Пуассона с учетом формулы  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ .

В дополнение к системе (П3.4) рассмотрим граничные и начальные условия. Начальная функция распределения есть функция Максвелла:

$$\begin{aligned} f_\alpha(r, \theta, z, v_r, v_\theta, v_z, t=0) &= \\ &= n_\infty \cdot \left( \frac{m_\alpha}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot T_\alpha} \right)^{3/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{m_\alpha}{2 \cdot k \cdot T_\alpha} \cdot [v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2] \right\} = \\ &= \left[ \frac{n_\infty}{\pi} \cdot \left( \frac{m_\alpha}{2 \cdot k \cdot T_\alpha} \right)^{3/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{m_\alpha}{2 \cdot k \cdot T_\alpha} \cdot [v_r^2 + v_\theta^2] \right\} \right] \times \\ &\times \left[ \pi^{-1/2} \cdot \exp \left( -\frac{m_\alpha}{2 \cdot k \cdot T_\alpha} \cdot v_z^2 \right) \right] = f_\alpha(r, \theta, v_r, v_\theta, t=0) \cdot \left[ \pi^{-1/2} \cdot \exp \left( -\frac{m_\alpha \cdot v_z^2}{2 \cdot k \cdot T_\alpha} \right) \right]. \end{aligned}$$

В процессе эволюции при  $t > 0$  множитель в квадратных скобках остается постоянным, так как  $v_z = \text{const}$ . Поэтому задача сводится к определению функции  $f_\alpha(r, \theta, v_r, v_\theta, t)$  в четырехмерном фазовом пространстве.

Начальное условие для  $f_\alpha$  записывается в виде

$$\begin{aligned} f_\alpha(r, \theta, v_r, v_\theta, t=0) &= \\ &= \left[ \frac{n_\infty}{\pi} \cdot \left( \frac{m_\alpha}{2 \cdot k \cdot T_\alpha} \right)^{3/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{m_\alpha}{2 \cdot k \cdot T_\alpha} \cdot [v_r^2 + v_\theta^2] \right\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П3.6})$$

В таком же виде записывается и граничное условие для  $f_\alpha(r, \theta, v_r, v_\theta, t)$  на границе вытекания.

После интегрирования по переменной  $v_z$  формулы для расчета концентраций и плотности тока принимают вид

$$\left. \begin{aligned} n_\alpha(r, \theta, t) &= \left( \frac{2 \cdot k \cdot T_\alpha}{m_\alpha} \right)^{1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(r, \theta, v_r, v_\theta, t) \cdot dv_r \cdot dv_\theta, \\ j_\alpha(r_p, \theta, t) &= \left( \frac{2 \cdot k \cdot T_\alpha}{m_\alpha} \right)^{1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(r_p, \theta, v_r, v_\theta) \cdot v_z \cdot dv_r \cdot dv_\theta, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П3.7})$$

$\alpha = i, e$ .

## Приложение 4

### Обзор физических процессов в плазменном участке полого катода, если плазма имеет переменные свойства и химические реакции не заморожены

#### Введение

Особенности формирования плазмы и свойства плазмы в активной зоне полого катода в дуговом режиме первыми рассмотрели французские авторы. В работах [5, 104] предложена методика расчета концентрации ионов, возбужденных и метастабильных атомов при известной скорости ионизации и температуре катода. В модель включены упругие столкновения «электрон–атом», «электрон–электрон» и неупругие столкновения ионизации и возбуждения. Одним из основных результатов этой модели является функция, описывающая среднее число ионов, создаваемых каждым инжектированным электроном с начальной энергией  $W_0$ . Основными недостатками этой модели являются: необходимость задания экспериментального температурного профиля, потенциала катода в выходном сечении, а также неизвестный размер активной зоны.

Исследованиям в области моделей плазмы посвящены работы [105–109], в которых диафрагма с отверстием препятствует потоку плазмы и нейтрального газа из активной зоны, поэтому общий градиент давления внутри катода достаточно мал, кроме зоны отверстия. В связи с этим скорость нейтральных атомов много ниже скоростей ионов и электронов. Такие особенности позволили сильно упростить конечную форму гидродинамических уравнений, например, считать плотность нейтрального газа приблизительно постоянной во всей активной зоне. В полых катодах с открытым торцом нет физических барьеров для потока (за исключением стенок), и возникает значительный градиент давления. Ситуация в таких катодах более похожа на обычный поток в трубе, где нейтральный газ выходит из катода со звуковыми скоростями. В ряде работ рассматривались функции распределения электронов в плазме полого катода [15, 110, 111], на основании которых далее определялись скорость ионизации и заселенности возбужденных состояний. Однако, как прави-

ло, предполагалось, что среди всех типов неупругих взаимодействий доминирует какой-то один вид взаимодействия и при этом эффективное сечение для этого процесса не зависит от энергии электронов при значениях, превышающих пороговое. Часто пренебрегали электрон-электронным взаимодействием, множественными квантовыми переходами и ускользанием излучения из объема.

За последнее десятилетие опубликован ряд комплексных работ по моделированию процессов в одноканальных дуговых полых катодах [14–16, 112], в которых большое внимание уделено плазменным процессам. В работе [14], как отмечалось ранее, в плазменных процессах не учитывались трехчастичная рекомбинация и столкновительное девозбуждение. В работе [16] не учитывались электрон-электронные столкновения, было введено дополнительное условие на размер активной зоны и задавался профиль температуры стенки, т. е. не было согласования с тепловым состоянием катода. В работе [15] утверждалось, что ионизация преимущественно происходит из возбужденного состояния атома при столкновениях с вторичными электронами, а первичные электроны при этом не рассматривались. В работе [112] учет возбужденных уровней атома аргона ограничен уровнями 4s и 4p, однако рассматриваются процессы перехода в основное состояние с испусканием фотонов. Следует отметить, что размер активной зоны в полном катоде до сих пор остается камнем преткновения практически во всех моделях. Плазменные процессы, связанные с многократными квантовыми переходами, рассмотрены только в работах [15, 112], с применением ограничений, описанных выше. При этом большинство авторов считают распределение электронов по энергиям практически равновесным, слабо отклоняющимся от распределения Максвелла. М. В. Черкасовой в 2007 г. в работе [19] была представлена модель состояния плазмы в канале дугового разряда с полым катодом с учетом каскадных ударно-радиационных процессов. Формирование плазмы в активной зоне полого катода происходит под влиянием процессов, которые приводят к отклонению распределения от равновесного: ускользание излучения из плазменного объема, градиенты температур и концентраций на стенке канала и во фронте ионизации, отрыв температуры электронов от температуры тяжелых частиц [113–116]. Высокоэнергетические электроны, обладающие энергией, необходимой для

ионизации и возбуждения атомов рабочего газа, возникают вследствие ускорения эмитированных первичных электронов прикатодным скачком потенциала. Также ионизацию могут вызывать вторичные термализованные электроны из высокоэнергетического хвоста распределения Максвелла при столкновениях с возбужденными атомами рабочего газа. Таким образом, непрерывное образование возбужденных состояний в каскадных процессах делает возможной еще и ступенчатую ионизацию за счет вторичных электронов, термализованных электронно-электронными упругими столкновениями.

Продолжительное время на кафедре физики МАИ проводились исследования распределения атомов по состояниям в потоке чистого аргона на торцевом срезе катода [117], в ходе которых выявилась перезаселенность верхних уровней состояния атомов аргона, что свидетельствовало о неравновесности распределения. Эксперимент проводился при массовом расходе газа  $C_g = 0,17$  г/с, напряжении разряда  $U = 14,5$  В, давлении в вакуумной камере  $P_0 = 1$  мм рт. ст. и скорости истечения газа  $\approx 2$  км/с. В эксперименте заселенность нижних уровней аргона 4s определялась методом поглощения, а верхних 4p, 4d, 5p и 6s — методом абсолютных интенсивностей. Результаты спектроскопических измерений представлены на рисунке П4.1, а. Из результатов спектроскопических измерений следует, что верхние уровни существенно перезаселены, то есть имеет место неравновесная неизотермическая плазма. На рис. П4.1, б показана оценка температур электронов по различным группам атомов. Очевидно, что эти состояния не образуют единого вектора. Поэтому для модели дугового разряда с полым катодом разработан метод моделирования неравновесных состояний ионизованных газов, включая газы с достаточно сложной электронной структурой. Метод позволяет определять скорости ударно-радиационных процессов с учетом всех квантовых состояний, вплоть до границы потенциала ионизации многоэлектронных атомов. И далее метод позволяет определять потоки частиц, энергии и заряда в условиях неравновесной частично ионизованной неизотермической плазмы при наличии интенсивных неупругих столкновений. Для электронов в модели предполагается локальное максвелловское распределение.

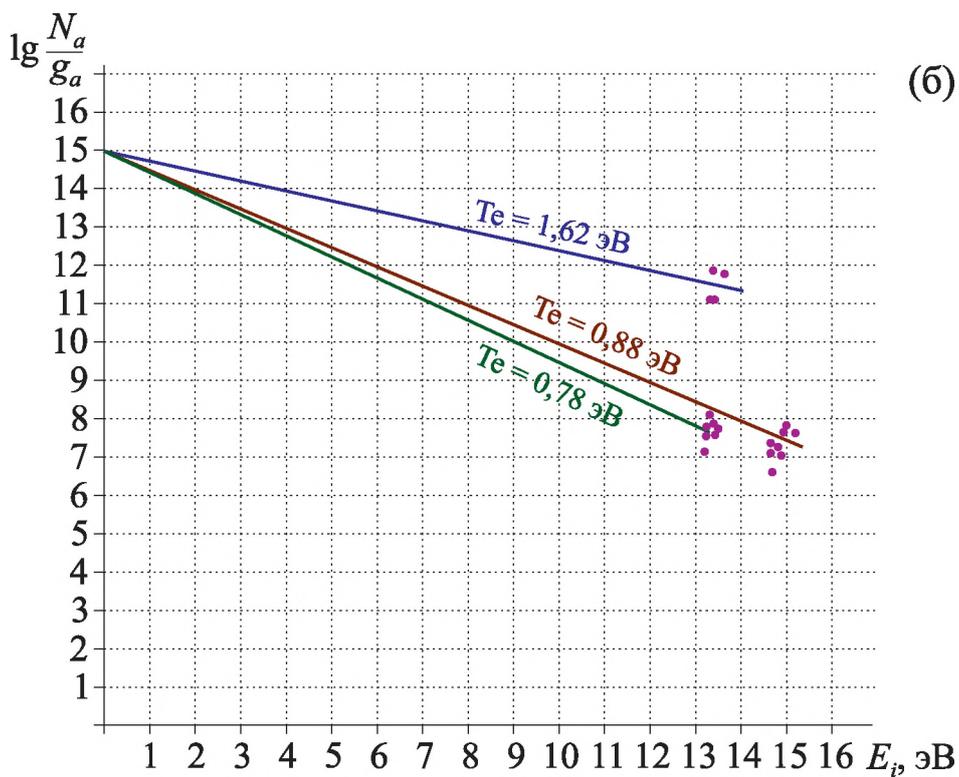
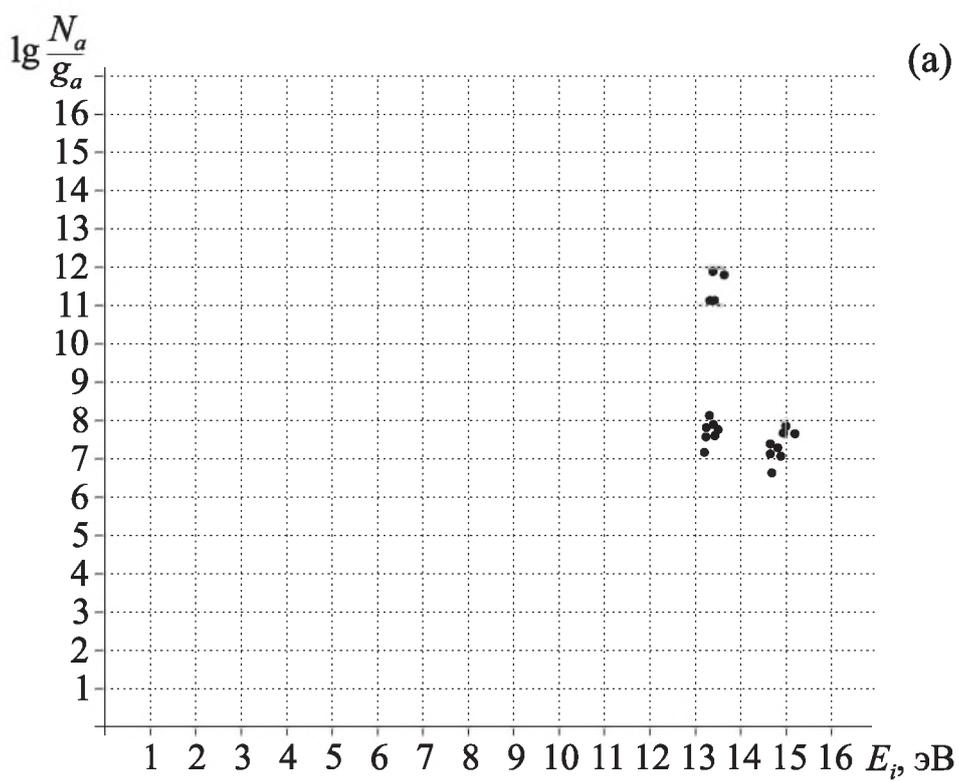


Рис. П4.1. Распределение атомов аргона по состояниям (результаты спектроскопических исследований [117])

#### П4.1. Модели основных ударно-радиационных процессов

Уравнение ионизационного равновесия для стационарных плазменных задач, как правило, записывают в форме

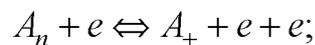
$$\omega_e = \beta \cdot N_e \cdot N_a - \alpha \cdot N_e^3, \quad (\text{П4.1})$$

где  $\omega_e$  — скорость рождения и гибели заряженных частиц, обусловленная процессами ионизации и рекомбинации,  $\beta$  — коэффициент ионизации,  $\alpha$  — коэффициент рекомбинации.

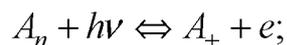
Определение коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  представляет отдельную задачу, поскольку необходимо решать систему уравнений многоуровневой кинетики.

Для модели дугового разряда с полым катодом основными процессами, определяющими состав квазинейтральной частично ионизованной плазмы, были выбраны следующие процессы [19]:

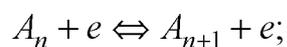
- **ионизация электронным ударом** (как прямой процесс) и **тройная рекомбинация** с образованием атома в состоянии  $[n]$  (как обратный процесс):



- **фотоионизация** состояния  $[n]$  и **фоторекомбинация** в это же состояние:



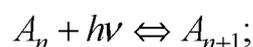
- **одионый квантовый процесс возбуждения** атома из состояния  $[n]$  в состояние  $[n + 1]$  и обратный **процесс тушения** состояния  $[n + 1]$  с переходом в состояние  $[n]$  при электронном ударе:



- **многократный квантовый процесс возбуждения** атома электронным ударом из состояния  $[n]$  в состояние  $[k] \geq [n + 2]$  и обратный **процесс тушения** состояния  $[k]$  с переходом в состояние  $[n]$ :



- **одионый квантовый процесс резонансного поглощения** и **спонтанного излучения**:



– *многократные квантовые излучательные переходы* ( $k \geq n + 2$ ):

$$A_n + h\nu \Leftrightarrow A_k.$$

Другие возможные ударно-радиационные процессы могут быть включены в рассматриваемую систему по мере необходимости для согласования с результатами экспериментов. Отметим, что в модели не учитываются диссоциативная рекомбинация и ассоциативная ионизация.

Запишем скорости протекания перечисленных выше процессов через соответствующие сечения столкновений.

**Скорость ионизации атома** в состоянии  $[n]$  электронным ударом:

$$-\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{[n]-[c]}^e = \bar{v}_e \cdot N_e \cdot N_n \cdot Q_{[n]-[c]}^e, \quad (\text{П4.2})$$

где  $\bar{v}_e$  — средняя скорость электрона,

$Q_{[n]-[c]}^e$  — эффективное сечение перехода связанного электрона в область континуума  $[c]$  при электронном ударе. Все усреднения проводятся по соответствующей функции распределения электронов по скоростям.

**Скорость** образования атомов в состоянии  $[n]$  в процессе рекомбинации с участием третьей частицы (*трехчастичная рекомбинация*):

$$\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{[c]-[n]}^e = v \cdot N_e \cdot N_+ \cdot Q_{[c]-[n]}^e.$$

Также можно выразить эффективное сечение этого процесса через константу трехчастичной рекомбинации  $\beta_{[c]-[n]}^e$  и упростить форму записи:

$$\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{[c]-[n]}^e = \beta_{[c]-[n]}^e \cdot N_e^3. \quad (\text{П4.3})$$

Скорости процессов, обусловленных переходами связанных электронов при электронных ударах, будем представлять в виде суммы скоростей одиночных и множественных квантовых переходов.

**Скорость процесса возбуждения атома в состоянии  $[n]$  электронным ударом:**

$$-\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{[n]-\left[\sum_{n+1}^{n_\infty}\right]} = v \cdot N_e \cdot N_n \cdot Q_{[n]-[n+1]}^{e-\text{возб}} \cdot Q_{[n]-\left[\sum_{n+1}^{n_\infty}\right]}^{e-\text{возб}}, \quad (\text{П4.4})$$

где  $Q_{[n]-[n+1]}^{e-\text{возб}}$  — эффективное сечение перехода  $[n] \rightarrow [n+1]$ ,  $Q_{[n]-\left[\sum_{n+1}^{n_\infty}\right]}^{e-\text{возб}}$  —

поправочный фактор к эффективному сечению в однократном квантовом приближении, учитывающий множественные квантовые переходы. Такие дополнительные коэффициенты именуется  $Q$ -факторами. К сожалению, они могут зависеть от заселенности соответствующих состояний.

**Скорость прямых процессов возбуждения состояния  $[n]$  из всех нижележащих состояний атома, вплоть до основного:**

$$\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{\left[\sum_1^{n-1}\right]-[n]}^e = v \cdot N_e \cdot N_{n-1} \cdot Q_{[n-1]-[n]}^{e-\text{возб}} \cdot Q_{\left[\sum_1^{n-1}\right]-[n]}^{e-\text{возб}}, \quad (\text{П4.5})$$

где  $Q_{[n-1]-[n]}^e$  — эффективное сечение перехода  $[n-1] \rightarrow [n]$  и применен соответствующий  $Q$ -фактор.

**Скорость процессов тушения состояния  $[n]$  электронным ударом:**

$$-\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{[n]-\left[\sum_1^{n-1}\right]}^e = v \cdot N_e \cdot N_n \cdot Q_{[n]-[n-1]}^{e-\text{туш}} \cdot Q_{[n]-\left[\sum_1^{n-1}\right]}^{e-\text{туш}}, \quad (\text{П4.6})$$

где  $Q_{[n]-[n-1]}^{e-\text{туш}}$  — эффективное сечение столкновения с учетом  $Q$ -фактора.

**Скорость изменения заселенности состояния  $[n]$  за счет обмена излучением со всеми нижележащими состояниями:**

$$-\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{[n] \Leftrightarrow \left[\sum_1^{n-1}\right]}^v = N_n \cdot A_{n,n-1} \cdot Q_{[n]-\left[\sum_1^{n-1}\right]}^v, \quad (\text{П4.7})$$

где  $A_{n,n-1}$  — вероятность оптического перехода из состояния  $[n]$  в состояние  $[n-1]$ .

При этом применяемый  $Q$ -фактор должен учитывать коэффициент ускользания излучения  $G_{n,k}^v$  [118].

**Скорость изменения заселенности состояния  $[n]$  за счет обмена излучением со всеми вышележащими состояниями:**

$$\left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{\left[ \sum_{n+1}^{n_\infty} \right] - [n]}^V = N_{n+1} \cdot A_{n+1,n} \cdot Q_{\left[ \sum_{n+1}^{n_\infty} \right] - [n]}^V, \quad (\text{П4.8})$$

где  $A_{n+1,n}$  — вероятность оптического перехода из состояния  $[n + 1]$  в состояние  $[n]$ .

Здесь  $Q$ -фактор должен быть записан с учетом коэффициента ускользания излучения  $G_{nk}^V$ .

**Скорость изменения заселенности состояния  $[n]$  за счет свободно-связанных излучательных переходов:**

$$\left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{[c] - [n]}^{ev} = \nu \cdot N_e \cdot N_n + Q_{[c] - [n]}^{ev} \cdot G_{c,n}^{ev},$$

где  $Q_{[c] - [n]}^{ev}$  — эффективное сечение фоторекомбинации,  $G_{c,n}^{ev}$  — параметр ускользания излучения при свободно-связанных переходах. Можно использовать выражение для сечения фоторекомбинации через константу фоторекомбинации  $\beta_{[c] - [n]}^V$  и переписать скорость процесса в виде

$$\left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{[c] - [n]}^{ev} = N_e^3 \cdot \beta_{[c] - [n]}^V \cdot G_{c,n}^{ev}. \quad (\text{П4.9})$$

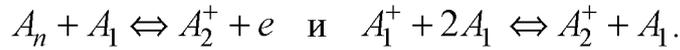
При использовании всех рассмотренных выше скоростей процессов (П4.2)–(П4.9) изменение числа атомов в состоянии  $[n]$  будет определяться следующим уравнением:

$$\begin{aligned} \omega_n = & -\bar{\nu}_e N_e N_n Q_{[n] - [c]}^e + \beta_{[c] - [n]}^e N_e^3 + \beta_{[c] - [n]}^V N_e^3 G_{c,n}^{ev} + \\ & + \nu N_e \left( N_{n+1} Q_{[n+1] - [n]}^{e-\text{туш}} Q_{\left[ \sum_{n+1}^{n_\infty} \right]}^{e-\text{туш}} - N_n Q_{[n] - [n+1]}^{e-\text{возб}} Q_{\left[ n \right] - \left[ \sum_{n+1}^{n_\infty} \right]}^{e-\text{возб}} \right) + \\ & + \nu N_e \left( N_{n-1} Q_{[n-1] - [n]}^{e-\text{возб}} Q_{\left[ \sum_1^{n-1} \right] - [n]}^{e-\text{возб}} - N_n Q_{[n] - [n-1]}^{e-\text{туш}} Q_{\left[ n \right] - \left[ \sum_1^{n-1} \right]}^{e-\text{туш}} \right) + \\ & + N_{n+1} A_{n+1,n} Q_{\left[ \sum_{n+1}^{n_\infty} \right] - [n]}^V - N_n A_{n,n-1} Q_{\left[ n \right] - \left[ \sum_1^{n-1} \right]}^V. \end{aligned} \quad (\text{П4.10})$$

Просуммировав по всем дискретным состояниям скорости ионизации электронным ударом, рекомбинации и фоторекомбинации можно определить скорость изменения числа электронов в объеме плазмы:

$$\omega_e = \nu N_e \sum_{k=1}^{n_\infty} N_k Q_{[k]-[c]}^e - N_e^3 \sum_{k=1}^{n_\infty} \left( \beta_{[c]-[k]}^e + \beta_{[c]-[k]}^v G_{c,k}^{ev} \right). \quad (\text{П4.11})$$

В рассмотренную систему ударно-радиационных процессов возможно добавление других кинетических процессов. Наиболее интересны с точки зрения влияния на отклонение заселенностей уровней от равновесных процессы диссоциативной рекомбинации и ассоциативной ионизации [119]:



В ряде случаев важны также процессы столкновения тяжелых частиц, например процессы типа эффекта Пеннинга. Эти процессы также могут быть учтены при записи соотношений для скоростей изменения заселенностей.

#### П4.2. Модели эффективных сечений основных процессов

Для упрощения системы кинетических уравнений использован подход, разработанный в [120, 121]. На основании точной диаграммы уровней энергии атома выделяются группы квазиводородоподобных мультиплетов с близкими средними энергиями. У подобных атомов со сложной мультиплетной структурой средневзвешенная энергия мультиплета может быть определена по формуле

$$W_{n',\ell} = \frac{\sum_p g_{n',\ell,p} \cdot W_{n',\ell,p}}{\sum_p g_{n',\ell,p}},$$

где  $n'$  и  $\ell$  — главное и орбитальное квантовые числа мультиплета,  $p$  — обозначение компонент мультиплета по Пашену.

Далее производится группировка этих мультиплетов таким образом, чтобы при больших значениях главного квантового числа  $n$  система становилась водородоподобной с приближительной энергией квазиуровня

$$W_n = \frac{\sum_{n'} \sum_{\ell} W_{n',\ell} \cdot g_{n',\ell}}{\sum_{n'} \sum_{\ell} g_{n',\ell}}$$

и статистическим весом  $g_n = \sum_{n'} \sum_{\ell} g_{n',\ell}$ .

Энергия такого квазиуровня аппроксимируется формулой, аналогичной по структуре энергии атома водорода, правда, с учетом квантовых поправок

$$W_n = \frac{Z^2 W_i^H}{n_{\text{эфф}}^2},$$

$$n_{\text{эфф}}^2 = n + \Delta n + b,$$

$g_n = a(n+b)^2 + \Delta g_n$  — статистический вес уровня,  $W_i^H = 13,595$  эВ — энергия ионизации атома водорода.

В выражении для энергии  $Z$  — кратность заряда иона, а поправки  $a, b, \Delta n, \Delta g_n$  определяются на основании анализа схемы квазिवодородоподобных уровней.

В работе [117] в квазिवодородном приближении получено выражение для средних вероятностей одиночных квантовых переходов:

$$A_{n+1,n} = A_{n+1}^H \frac{g_n \cdot g_{n+1}^H}{g_{n+1} \cdot g_{n+1}^H} \bar{g}_{n+1,n} \left( \frac{W_n - W_{n+1}}{W_n^H - W_{n+1}^H} \right)^2 \frac{1 - \frac{W_{n+1}^H}{W_{n-1}^H}}{1 - \frac{W_{n+1}}{W_{n-1}}}, \quad (\text{П4.12})$$

где  $A_{n+1,n}^H$  — вероятности перехода между уровнями атома водорода,  $W_n^H$  — энергия уровней атома водорода,  $g_n^H$  — статистический вес энергетического уровня атома водорода,  $A_{n+1}$  — вероятность перехода для квазиуровня рассматриваемого атома,  $W_n$  — энергия квазиуровня рассматриваемого атома,  $g_n$  — статистический вес квазиуровня рассматриваемого атома,  $\bar{g}_{n+1,n}$  — корректирующий множитель. При  $n = 1$  формально следует полагать  $W_0 = \infty$ .

Для определения средних вероятностей многократных квантовых переходов можно применить формулу Крамерса:

$$A_{k,n} = A'_0 \cdot Z^{-2} \cdot \bar{g}_{k,n} \cdot \frac{g_k}{g_n} \cdot \frac{W_n^{5/2} \cdot W_k^{3/2}}{W_n - W_k},$$

где  $A'_0 = 1,58 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$ ,  $\bar{g}_{k,n}$  — корректирующий множитель.

Средние вероятности переходов для атома водорода могут быть взяты из таблиц [122, 123] или получены по формуле Крамерса:

$$A_{k,n}^{\text{H}} = \frac{A'_0}{k^3 \cdot n \cdot (k^2 - n^2)}.$$

Результаты применения формулы (П4.11) для расчета вероятностей квантовых переходов атомов со сложной структурой энергетических уровней удовлетворительно согласуются с табличными данными [122, 123]. А применение формулы Крамерса показывает существенное расхождение с табличными данными.

Эффективное сечение перехода из состояния  $n$  в состояние  $k$  под действием электронного удара [124] в квазиводородоподобной модели может быть записано в виде

$$\sigma_{nk}(\varepsilon) = Q_0 \frac{(W_i^{\text{H}})^2 (\varepsilon - W_{nk})}{W_{nk} \varepsilon^2} \cdot 3 f_{nk}^{\text{ПОГЛ}},$$

где  $Q_0 = 4\pi\alpha_0$ ,  $\alpha_0 = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ ,  $W_i^{\text{H}} = 13,595 \text{ эВ}$ ,  $W_{nk}$  — энергия перехода  $n \rightarrow k$  ( $k > n$ ),  $\varepsilon$  — энергия электрона,  $f_{nk}^{\text{ПОГЛ}}$  — соответствующая сила осциллятора при поглощении.

В результате усреднения по функции распределения Максвелла сечение процесса примет вид

$$Q_{[n] \rightarrow [k]}^e = Q_0 \left( \frac{W_i^{\text{H}}}{W_{nk}} \right)^2 \psi^*(x_{nk}) \exp(-x_{nk}) \cdot 3 f_{nk}^{\text{ПОГЛ}}, \quad (\text{П4.13})$$

где  $\psi^*(x_{nk}) = x_{nk} \cdot [1 + x_{nk} \cdot W_i(-x_{nk}) \exp(x_{nk})]$ ,  $x_{nk} = \frac{W_{nk}}{k_B T}$ ,  $W_i(x)$  — интегральный логарифм,  $k$  — постоянная Больцмана.

Функцию  $\psi^*(x_{nk})$  можно также приближенно аппроксимировать формулой

$$\psi^*(x_{nk}) = \frac{x_{nk}}{1 + 1,22 \cdot x_{nk}}, \quad (\text{П4.14})$$

которая показывает отклонение от точной зависимости не более 10 %. При  $x_{nk} \ll 1$  можно применять еще один вариант приближенной формулы:

$$\psi^*(x_{nk}) \approx x_{nk} + x_{nk} \cdot (0,5772 + \ln(x_{nk})).$$

Поскольку сила осциллятора  $f_{nk}^{\text{погл}}$  связана с вероятностью перехода  $n \rightarrow k$  ( $k > n$ )  $A_{kn}$ ,

$$A_{kn} = 3\gamma^0 \left( \frac{W_{nk}}{W_i^{\text{H}}} \right)^2 \cdot \frac{g_n}{g_k} \cdot f_{nk}^{\text{погл}},$$

где  $\gamma^0 = \frac{8\pi^2 \ell^2 (W_i^{\text{H}})^2}{3m_e c^2 n^2}$ , то эффективное сечение возбуждения также может быть записано с помощью вероятности перехода:

$$Q_{[n] \rightarrow [k]}^{\text{е-возб}} = Q^0 \left( \frac{W_i^{\text{H}}}{W_{nk}} \right)^4 \cdot \frac{g_k}{g_n} \cdot \psi^*(x_{nk}) \cdot \exp(-x_{nk}) \cdot A_{kn}, \quad (\text{П4.15})$$

где  $Q^0 = Q_0/\gamma^0$ .

Эффективное сечение ионизации электронным ударом определим на основании модели Гризинского [125]:

$$\sigma_{nc}(\varepsilon) = \frac{\pi e^4}{W_i^2} \cdot f(x),$$

где  $x = \frac{\varepsilon}{W_i}$  и

$$f(x) = \frac{1}{x} \left( \frac{x-1}{x+2} \right)^{3/2} \left[ 1 + \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{2x} \right) \ln(e + \sqrt{x-1}) \right].$$

В результате усреднения сечения по распределению Максвелла получаем [126]

$$Q_{[n] \rightarrow [c]}^e = Q_0 \left( \frac{W_i^{\text{H}}}{W_n} \right)^2 \cdot \psi^*(x_{nk}) \cdot \exp(-x_{nk}), \quad (\text{П4.16})$$

где величина  $\psi^*$  была определена ранее.

Опираясь на условие детального равновесия, запишем эффективные сечения процессов, обратных к процессам ионизации и возбуждения, в предположении максвелловского распределения по скоростям. В этом случае константа скорости трехчастичной рекомбинации записывается в виде

$$\beta_{[c]-[n]}^e = \beta_0 \cdot \frac{g_n}{g_1^+} \cdot x_R \cdot \left( \frac{W_i^H}{W_n} \right)^2 \cdot \psi^*(x_n), \quad (\text{П4.17})$$

где

$$\beta_0 = A_0 \cdot Q_0 \sqrt{\frac{8R}{\pi \cdot m_e}},$$

$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{h^2}{2\pi \cdot m_e \cdot R} \right)^{3/2},$$

$$x_R = \frac{W_i^H}{kT_e},$$

$R = 8,31$  Дж/моль·К — универсальная газовая постоянная,  $g_1^+$  — статистический вес основного состояния иона,  $h$  — постоянная Планка,  $m_e$  — масса электрона.

Эффективное сечение процесса девозбуждения (тушения)  $k \rightarrow n$  ( $k > n$ ) электронным ударом может быть записано в виде

$$Q_{[k]-[n]}^{e\text{-туш}} = Q^0 \cdot \left( \frac{W_i^H}{W_{nk}} \right)^4 \cdot \psi^*(x_{nk}) \cdot A_{nk}. \quad (\text{П4.18})$$

Константа скорости фоторекомбинации [124] имеет вид

$$\beta_{[c]-[n]}^v = \bar{D}_0 \cdot \frac{Z \cdot x_n^{3/2}}{N_e} \cdot S(x_n), \quad (\text{П4.19})$$

где

$$\bar{D}_0 = 5,197 \cdot 10^{-14} \frac{\text{см}^3}{\text{с}},$$

а функция  $S(x_n)$  в квазиводородоподобном приближении [137] записывается как

$$S(x_n) = \exp(x_n) \cdot W_i(-x_n).$$

Могут быть использованы различные варианты записи функции  $\Psi^*$ , также могут быть рассмотрены другие варианты аппроксимации величины  $S(x_n)$ :

$$S^0(x_n) = \frac{x_n - \Psi^*(x_n)}{x_n^2}.$$

Для диапазона значений  $x_n \ll 1$  допустимо применить приближенное выражение  $S^0 \approx -[0,5772 + \ln(x_n)]$ , а для достаточно больших  $x_n$  можно использовать соотношение

$$S^0 \approx \frac{1,22}{1 + 1,22 \cdot x_n}.$$

### П4.3. Модель ускользания излучения из плазменного объема

Коэффициент ускользания излучения при фоторекомбинации определяется на основании ранее полученных скоростей процессов фотоионизации и фоторекомбинации и имеет вид [124–126]

$$G_{cn}^{ev} = 1 - \frac{1}{A_0} \cdot \frac{g_1^+}{g_1} \cdot \frac{1}{x_R^{3/2}} \cdot \exp(-x_n) \cdot \frac{N_1}{N_e^2} \cdot X_n, \quad (\text{П4.20})$$

где  $X_n = \frac{N_n/g_n}{N_1/g_1}$  — безразмерная заселенность уровня  $[n]$ .

Коэффициент ускользания излучения при связанно-связанных переходах для ионизованного газа с высокой температурой и низкой плотностью, при условии, что форма спектральных линий определяется эффектом Доплера, можно определить следующим образом [114, 118, 127, 128]:

$$G_{kn} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot [1 - \exp(-\bar{\tau}_{0nk} \cdot e^{-x^2})] dx,$$

где  $\tau_{0nk}$  — средняя оптическая толщина для частоты  $\nu_{0nk}$ , соответствующей центру спектральной линии. Средняя оптическая толщина для рассматриваемого случая имеет вид

$$\bar{\tau}_{0nk} = \frac{N_n \cdot h \cdot c}{\sqrt{\pi} \cdot v_a} \cdot \bar{D} \cdot B_{nk},$$

где  $B_{nk}$  — коэффициент Эйнштейна для поглощения,  $v_a$  — наивероятнейшая скорость атома,  $N_n$  — заселенность соответствующего уровня  $n$ ,  $\bar{D}$  — характерный масштаб области ионизованного газа, имеющей величину порядка половины наименьшего расстояния между границами плазмы [128]. Учитывая связь между коэффициентами Эйнштейна:

$$B_{nk} = \frac{c^2 \cdot h^2}{8\pi \cdot W_{nk}^2} \cdot \frac{g_k}{g_n} \cdot A_{kn},$$

выразим среднюю оптическую толщину через вероятности переходов:

$$\bar{\tau}_{0nk} = \frac{c^3 \cdot h^3}{8\sqrt{\pi^3} \cdot v_a} \cdot \frac{g_k}{g_n} \cdot \frac{A_{kn}}{W_{nk}^3} \cdot N_n \cdot \bar{D}.$$

После подстановки выражений для вероятностей переходов средняя оптическая толщина для одиночных квантовых переходов будет иметь вид

$$\bar{\tau}_{0n,n+1} = \ell_0^2 N_1 \bar{D} X_n \left( \frac{\bar{\mu}_a}{T_{\text{а-тыс}}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot g_{n+1,n} \cdot \frac{g_n}{g_1} \cdot \frac{n^3 (n+1) W_{n,n+1}^{\text{H}}}{(2n+1)^4 W_{n,n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{W_{n+1}^{\text{H}}}{W_{n-1}^{\text{H}}}}{1 - \frac{W_{n+1}}{W_{n-1}}}, \quad (\text{П4.21})$$

а для многократных квантовых переходов —

$$\bar{\tau}_{0nk} = \ell_0^2 N_1 \bar{D} X_n \left( \frac{\bar{\mu}_a}{T_{\text{а-тыс}}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot g_{kn} \cdot \frac{W_n^{5/2} \cdot W_k^{3/2}}{Z^2 \cdot W_{nk}^4}, \quad (\text{П4.22})$$

где  $T_{\text{а-тыс}}$  — температура атомов, выраженная в тысячах градусов,

$$\ell_0^2 = 6,58 \cdot 10^{-13} \text{ см}^2,$$

$$\bar{\mu}_a = \mu_a / \mu_H,$$

$$W_{nk} = W_n - W_k.$$

В работах [114, 118, 127, 128] показано, что при средней оптической толщине  $\bar{\tau}_0 < 3$  коэффициент ускользания излучения можно получить через разложение в ряд коэффициента ускользания излучения:

$$G_{kn} \approx 1 - \left( \frac{\bar{\tau}_{0nk}}{\sqrt{2}} - \frac{\bar{\tau}_{0nk}^2}{\sqrt{3} \cdot 2!} + \dots + (-1)^p \frac{\bar{\tau}_{0nk}^p}{\sqrt{p+1} \cdot p!} \right), \quad (\text{П4.23})$$

а при больших значениях оптической толщины  $\bar{\tau}_0 \geq 3$  — с помощью формулы

$$G_{kn} \approx \frac{1}{\bar{\tau}_{0nk} \cdot \sqrt{(\pi \cdot \ln(\bar{\tau}_{0nk}))}}. \quad (\text{П4.24})$$

Полученные формулы для учета поглощения излучения приводят к появлению нелинейной зависимости от заселенностей состояний в выражениях для расчета скоростей излучательных процессов.

#### П4.4. Система кинетических уравнений плазменной модели

Для частично ионизованной плазмы (нейтральные атомы, электроны и ионы) введем безразмерные заселенности квантовых состояний атома:

$$X_n = \frac{N_n/g_n}{N_1/g_1}. \quad (\text{П4.25})$$

Если плазма является термодинамически равновесной, то заселенности уровней подчиняются уравнению Саха:

$$N_{n0} = A_0 \cdot \frac{g_n}{g_+} \cdot x_R^{3/2} \cdot \exp(x_n) \cdot N_{e0}^2,$$

где

$$x_n = \frac{W_n}{kT}, \quad x_R = \frac{W_i^H}{T_e}, \quad A_0 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{h^2}{2\pi \cdot m_e \cdot R} \right)^{3/2}.$$

Для описания состояния плазмы введем безразмерные коэффициенты  $C_n$ , определяющие степень нарушения термодинамического равно-

весия, и с учетом этих коэффициентов запишем безразмерные заселенности в виде

$$X_n = C_n \cdot A_0 \cdot \frac{g_n}{g_+} \cdot \frac{x_R^{3/2}}{N_1} \cdot \exp(x_n) N_e^2. \quad (\text{П4.26})$$

Очевидно, при коэффициентах  $C_n = 1$  для всех  $n$  будет выполняться уравнение Саха, соответствующее равновесному состоянию. Можно записать безразмерные заселенности в еще более коротком виде:

$$X_n = \frac{C_n}{C_1} \exp(-x_{1n}).$$

Поскольку между собой квантовые состояния связаны распределением Больцмана:

$$\frac{N_k/g_k}{N_n/g_n} = \exp(-x_{nk}),$$

то при  $n = 1$  с помощью соотношения (П4.26) выводится формула для коэффициента  $C_1$ , определяющего степень неравновесности основного состояния атома:

$$C_1 = \frac{N_1 \cdot \exp(-x_1)}{A_0 \cdot \frac{g_1}{g_+} \cdot x_R^{3/2} \cdot N_e^2}. \quad (\text{П4.27})$$

Если вводить коэффициенты  $C_n$  отклонения от равновесия другим способом, сравнивая заселенности и концентрации с аналогичными равновесными величинами [121, 129], то, вводя величины  $g_n = \frac{N_n}{N_{n0}}$

и  $g_e = \frac{N_e}{N_{e0}}$ , можно записать коэффициенты как  $C_n = \frac{g_n}{g_e^2}$ .

Прежде всего рассмотрим кинетику ударно-радиационных процессов в однократном квантовом приближении. Введем характерный масштаб скорости процессов:

$$\omega_0 = \beta_0 \cdot \frac{g_1}{g_+} \cdot x_R \cdot N_e^3. \quad (\text{П4.28})$$

Пронормируем скорости всех процессов на эту величину.

Если объединить в одно выражение скорости изменения заселенности квантового состояния  $[n]$  за счет процессов ударной ионизации, фотоионизации, тройной рекомбинации и фоторекомбинации:

$$\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{\text{ион}\leftrightarrow\text{рекомб}} = \left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{[n]\rightarrow[c]}^e + \left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{[c]\rightarrow[n]}^e + \left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{[c]\rightarrow[n]}^{ev},$$

то в безразмерной форме, с учетом ранее записанных скоростей отдельных процессов (П4.2), (П4.3) и (П4.9) и с использованием коэффициентов (П4.17) и (П4.19), обобщенная скорость процессов примет вид

$$\frac{1}{\omega_0} \cdot \left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{\text{ион}\leftrightarrow\text{рекомб}} = (1 - C_n) \cdot \frac{g_n}{g_1} \cdot \left(\frac{R}{W_n}\right)^2 \cdot \psi^*(x_n) \cdot \bar{\beta}_{[c]\rightarrow[n]}, \quad (\text{П4.29})$$

где вводится новый коэффициент ионизации-рекомбинации:

$$\bar{\beta}_{[c]\rightarrow[n]} = 1 + \frac{\beta_{[c]\rightarrow[n]}^v}{\beta_{[c]\rightarrow[n]}^e} = 1 + \frac{D_0}{N_e} \cdot \frac{g_+}{g_n} \cdot \sqrt{x_R} \cdot \left(\frac{W_n}{R}\right)^{5/2} \cdot \frac{S(x_n)}{\psi^*(x_n)},$$

где  $D_0 = 1,81 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ .

Такое описание удобно тем, что, очевидно, при значениях  $C_n > 1$  преобладающим будет процесс ионизации, а при  $C_n < 1$  — процесс рекомбинации. Поэтому удобно именовать неравновесное состояние ионизованного газа, в котором  $C_n > 1$ , ионизационной областью, а при  $C_n < 1$  — рекомбинационной. Кроме того, если коэффициент ионизации-рекомбинации  $\bar{\beta}_{[c]\rightarrow[n]} \approx 1$ , то преимущественно происходят ударные ионизационно-рекомбинационные процессы, а при  $\bar{\beta}_{[c]\rightarrow[n]} > 1$  преобладают процессы фотоионизации и фоторекомбинации.

Далее рассмотрим суммарную скорость изменения состояния  $[n]$  за счет возбуждения электронным ударом в верхнее состояние  $[n + 1]$  и тушения электронным ударом состояния  $[n + 1]$ :

$$\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{[n]\leftrightarrow[n+1]}^e = \left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{[n]\rightarrow[n+1]}^e + \left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{[n+1]\rightarrow[n]}^e.$$

В безразмерном виде с учетом выражения для соответствующих сечений процессов (П4.15) и (П4.18) и скоростей процессов (П4.4) и (П4.6) запишется следующим образом:

$$\frac{1}{\omega_0} \left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{[n] \leftrightarrow [n+1]}^e = \bar{A}_{n+1,n} \cdot \frac{g_{n+1}}{g_1} \cdot \left( \frac{W_i^H}{W_{n,n+1}} \right)^4 \cdot \psi^*(x_{n,n+1}) \exp(x_{n+1}) (C_{n+1} - C_n), \quad (\text{П4.30})$$

где

$$\bar{A}_{n+1,n} = \frac{A_{n+1,n}}{A_0''},$$

$$A_0'' = \frac{Q_0}{Q^0} = 2,56 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Суммарная скорость изменения заселенности состояния  $[n]$  за счет возбуждения электронным ударом нижнего состояния  $[n-1]$  и тушения электронным ударом состояния  $[n]$

$$\left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{[n-1] \leftrightarrow [n]}^e = \left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{[n-1] \rightarrow [n]}^e + \left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{[n] \rightarrow [n-1]}^e$$

преобразуется к безразмерному виду:

$$\frac{1}{\omega_0} \left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{[n-1] \leftrightarrow [n]}^e = \bar{A}_{n,n-1} \cdot \frac{g_n}{g_1} \cdot \left( \frac{W_i^H}{W_{n-1,n}} \right)^4 \cdot \psi^*(x_{n-1,n}) \cdot \exp(x_n) (C_{n-1} - C_n). \quad (\text{П4.31})$$

Далее запишем скорость изменения состояния  $[n]$  за счет излучательных переходов  $[n] \leftrightarrow [n-1]$ :

$$\left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{[n-1] \leftrightarrow [n]}^v = \left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{[n-1] \rightarrow [n]}^v + \left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{[n] \rightarrow [n-1]}^v$$

в безразмерном виде с учетом скоростей (П4.7) и (П4.8) и констант (П4.20) и (П4.13):

$$\frac{1}{\omega_0} \cdot \left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{[n] \leftrightarrow [n-1]}^v = -\gamma_0 \cdot \bar{A}_{n,n-1} \cdot \frac{g_n}{g_1} \cdot \exp(x_n) \cdot C_n \cdot G_{n,n-1}^v, \quad (\text{П4.32})$$

где

$$\gamma_0 = \frac{\sqrt{x_R}}{A_0^m \cdot N_e},$$

$$A_0^m = Q^0 \cdot v_{eR} = 3,03 \cdot 10^{-17} \text{ см}^3.$$

Скорость изменения состояния  $[n]$  за счет излучательных переходов  $[n + 1] \leftrightarrow [n]$

$$\left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{[n+1] \leftrightarrow [n]}^v = \left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{[n+1] \rightarrow [n]}^v + \left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{[n] \rightarrow [n+1]}^v$$

в безразмерном виде аналогично (П4.32):

$$\frac{1}{\omega_0} \cdot \left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{[n+1] \leftrightarrow [n]}^v = \gamma_0 \cdot \bar{A}_{n+1,n} \cdot \frac{g_{n+1}}{g_1} \cdot \exp(x_{n+1}) \cdot C_{n+1} \cdot G_{n+1,n}^v \quad (\text{П4.33})$$

Из соотношений (П4.32) и (П4.33) следует, что коэффициенты ускользания излучения  $G_{n,n-1}^v$  и  $G_{n+1,n}^v$  зависят от безразмерных заселенностей  $X_{n-1}$  и  $X_n$ , а следовательно, и от коэффициентов отклонения  $C_{n-1}$  и  $C_n$ . Исходя из этого, приходится констатировать, что кинетические уравнения даже в однократном квантовом приближении нелинейные.

Суммарная скорость изменения заселенности состояния  $[n]$  за счет всех рассмотренных процессов имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{g_1}{g_n} \frac{1}{\omega_0} \cdot \left( \frac{dN_n}{dt} \right) &= (1 - C_n) \cdot \left( \frac{W_i^H}{W_n} \right)^2 \cdot \psi^*(x_n) \cdot \bar{\beta}_{[c] \rightarrow [n]} + \\ &+ \bar{A}_{n+1,n} \cdot \frac{g_{n+1}}{g_n} \cdot \left( \frac{W_i^H}{W_{n,n+1}} \right)^4 \cdot \psi^*(x_{n,n+1}) \exp(x_{n+1}) (C_{n+1} - C_n) + \\ &+ \bar{A}_{n,n-1} \cdot \left( \frac{W_i^H}{W_{n-1,n}} \right)^4 \cdot \psi^*(x_{n-1,n}) \cdot \exp(x_n) (C_{n-1} - C_n) + \quad (\text{П4.34}) \\ &+ \gamma_0 \cdot \bar{A}_{n+1,n} \cdot \frac{g_{n+1}}{g_n} \cdot \exp(x_{n+1}) \cdot C_{n+1} \cdot G_{n+1,n}^v - \gamma_0 \cdot \bar{A}_{n,n-1} \cdot \frac{g_n}{g_1} \cdot \exp(x_n) \cdot C_n \cdot G_{n,n-1}^v. \end{aligned}$$

### П4.5. Метод решения системы кинетических уравнений

Введем формальную переменную

$$v_n = \frac{1}{N_n} \cdot \frac{dN_n}{dt} \quad (\text{П4.35})$$

и будем рассматривать величину  $(dN_n/dt)$  как один из совокупности факторов, влияющих на неравновесность ионизованного газа [116].

Левую часть уравнения можно записать как

$$\frac{g_1}{g_n} \cdot \frac{1}{\omega_0} \cdot \left( \frac{dN_n}{dt} \right) = A_0''' \cdot \gamma_0 \cdot \exp(x_n) \cdot C_n \cdot v_n,$$

где  $A_0''' = 4,06 \cdot 10^{-10}$ . В таком случае основное уравнение для суммарной скорости изменения заселенности уровня  $[n]$  превращается в алгебраическое уравнение относительно коэффициентов отклонения от равновесного состояния  $C_n$

$$C_n = \alpha_n + \beta_n \cdot C_{n-1} + \gamma_n \cdot C_{n+1}, \quad (\text{П4.36})$$

где введены следующие коэффициенты:

$$\alpha_n^{-1} = 1 + \frac{\exp(x_{n+1})}{y_n} \left\{ \frac{g_{n+1}}{g_n} \cdot \left( \frac{W_i^H}{W_{n,n+1}} \right)^4 \cdot \bar{A}_{n+1,n} \cdot \psi^*(x_{n,n+1}) + \right. \\ \left. + \bar{A}_{n,n-1} \cdot \exp(x_{n,n+1}) \left[ \left( \frac{W_i^H}{W_{n-1,n}} \right)^4 \psi^*(x_{n-1,n}) + \gamma_0 \cdot G_{n,n-1}^V \right] + A_0''' \cdot \gamma_0 \cdot \exp(x_{n,n+1}) \cdot v_n \right\}, \\ \beta_n = \frac{1}{y_n} \cdot \left( \frac{W_i^H}{W_{n,n-1}} \right)^4 \cdot \bar{A}_{n,n-1} \cdot \psi^*(x_{n-1,n}) \cdot \exp(x_n) \cdot \alpha_n, \quad (\text{П4.37})$$

$$\gamma_n = \frac{1}{y_n} \cdot \frac{g_{n+1}}{g_n} \cdot \bar{A}_{n+1,n} \cdot \exp(x_{n+1}) \cdot \left[ \left( \frac{W_i^H}{W_{n,n+1}} \right)^4 \cdot \psi^*(x_{n,n+1}) + \gamma_0 \cdot G_{n+1,n}^V \right] \cdot \alpha_n,$$

$$y_n = \left( \frac{W_i^H}{W_n} \right)^2 \cdot \psi^*(x_n) \cdot \bar{\beta}_{[c]-[n]}.$$

Полученная система алгебраических нелинейных уравнений вида (П4.36) имеет  $n_\infty - 2$  уравнения для  $n_\infty$  неизвестных коэффициентов  $C_n$ . Степень отклонения основного состояния атома от равновесного состояния  $C_1$  может быть определена по заданным концентрации атомов в основном состоянии  $N_1$ , концентрации электронов  $N_e$ , а также температуре электронов  $T_e$ , с применением соотношения (П4.27). Далее для решения системы следует каким-либо образом задать величину  $C_{n_\infty}$  и сам номер уровня  $n_\infty$ , т. е. для замыкания системы необходимо задать значение квантового числа, соответствующего последнему дискретному состоянию  $n_\infty$ .

В данной работе теоретически рассматривались свойства неравновесных состояний ионизованных газов с учетом всех квантовых состояний, вплоть до границы снижения потенциала ионизации за счет взаимодействия электронов с атомами. Влияние этого взаимодействия учитывается с помощью максимального значения  $n_\infty$  главного квантового числа. Величину  $n_\infty$  в случае однократной ионизации можно аппроксимировать формулой  $n_\infty = \tilde{A} \cdot T^{\mu^*} \cdot N_e^{\nu^*}$  [119], где константы  $\tilde{A}$ ,  $\mu^*$ ,  $\nu^*$  приводятся в различных источниках [130–135]. В рассматриваемой модели при проведении расчетов использовалось приближенное соотношение

$$n_\infty \approx 7,69 \cdot 10^3 \cdot N_e^{-1/6}. \quad (\text{П4.38})$$

Однако для определения параметра  $C_{n_\infty}$  нужен другой подход. Обычно  $C_{n_\infty}$  полагают равным единице, что соответствует равновесности верхних состояний. Это означает, что предполагается преобладание ионизационных процессов. Но в случае преобладания рекомбинационных процессов такое допущение будет неверным. Поэтому запишем отдельно кинетическое уравнение для последнего дискретного квантового состояния  $n_\infty$ . Так как этот последний дискретный квазиводородоподобный уровень связан лишь с континуумом и с соседним нижележащим уровнем  $n_\infty - 1$ , то для него кинетическое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{g_1}{g_{n_\infty}} \cdot \frac{1}{\omega_0} \left( \frac{dN_{n_\infty}}{dt} \right) &= \left( \frac{W_i^H}{W_{n_\infty}} \right)^2 \cdot \psi^*(x_{n_\infty}) \cdot \bar{\beta}_{[c]-[n_\infty]} \cdot (1 - C_{n_\infty}) + \\
&+ \left( \frac{W_i^H}{W_{n_\infty-1, n_\infty}} \right)^4 \cdot \bar{A}_{n_\infty, n_\infty-1} \cdot \psi^*(x_{n_\infty-1, n_\infty}) \cdot \exp(x_{n_\infty}) \cdot (C_{n_\infty-1} - C_{n_\infty}) - \quad (\text{П4.39}) \\
&- \gamma_0 \cdot \bar{A}_{n_\infty, n_\infty-1} \cdot \exp(x_{n_\infty}) \cdot C_{n_\infty} \cdot G_{n_\infty, n_\infty-1}^V.
\end{aligned}$$

При переходе к безразмерным заселенностям с учетом введенных ранее коэффициентов (П4.37) это уравнение может быть преобразовано в алгебраическое выражение

$$C_{n_\infty} = \alpha_{n_\infty} + \beta_{n_\infty} \cdot C_{n_\infty-1} \quad (\text{П4.40})$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned}
\alpha_{n_\infty}^{-1} &= 1 + \frac{\bar{A}_{n_\infty, n_\infty-1}}{y_{n_\infty}} \cdot \exp(x_{n_\infty}) \cdot \left[ \left( \frac{W_i^H}{W_{n_\infty-1, n_\infty}} \right)^4 \cdot \psi^*(x_{n_\infty-1, n_\infty}) + \gamma_0 \cdot G_{n_\infty, n_\infty-1}^V \right] + \\
&+ A_0''' \cdot \frac{\gamma_0}{y_{n_\infty}} \cdot \exp(x_{n_\infty}) \cdot \nu_{n_\infty}, \\
\beta_{n_\infty} &= \frac{\bar{A}_{n_\infty, n_\infty-1}}{y_{n_\infty}} \cdot \exp(x_{n_\infty}) \cdot \left( \frac{W_i^H}{W_{n_\infty-1, n_\infty}} \right)^4 \cdot \psi^*(x_{n_\infty-1, n_\infty}) \cdot \alpha_{n_\infty}. \quad (\text{П4.41})
\end{aligned}$$

Таким образом сформулирована замкнутая система алгебраических уравнений (П4.36) для определения коэффициентов  $C_n$ , характеризующих отклонение состояний от равновесного состояния.

В широком диапазоне концентраций электронов для идеальной плазмы номер последнего дискретного уровня —  $n_\infty \gg 1$ . Если принять  $N_e < 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , то оценка с помощью (П4.38) дает величину  $n_\infty > 11$ . При этом условии возможно выполнить приближенные оценки коэффициентов  $\alpha_{n_\infty}$  и  $\beta_{n_\infty}$  и найти соответствующее асимптотическое решение. При  $n_\infty \gg 1$  получено, что  $\alpha_{n_\infty} \approx \frac{1}{n_\infty^2}$  и  $\beta_{n_\infty} \approx 1$ . Тогда коэффициент  $C_{n_\infty} \rightarrow C_{n_\infty-1}$ .

Поэтому значение  $C_{n_\infty}$  может быть определено из условия монотонности коэффициента  $C_n$  как функции квантового числа  $n$  на границе с континуумом:

$$C_{n_\infty-1} \approx \frac{C_{n_\infty} + C_{n_\infty-2}}{2}.$$

Следовательно,

$$C_{n_\infty} \approx 2C_{n_\infty-1} - C_{n_\infty-2}. \quad (\text{П4.42})$$

Таким образом, при использовании переменных  $v_n$ , как фактора влияния, и заданных значениях  $N_e, T_e, N_1$  система (П4.36) является замкнутой и может быть решена.

#### П4.6. Метод расчета Q-факторов и решения системы кинетических уравнений с учетом многократных квантовых переходов

Поскольку изначально скорости процессов ионизации и рекомбинации были записаны в многократном квантовом приближении, то выражения для суммарной скорости ионизационно-рекомбинационных процессов сохраняют свой вид (П4.29):

$$\frac{1}{\omega_0} \cdot \left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{\text{ион} \leftrightarrow \text{рекомб}} = (1 - C_n) \cdot \frac{g_n}{g_1} \cdot \left( \frac{W_i}{W_n} \right)^2 \cdot \psi^*(x_n) \cdot \bar{\beta}_{[e]-[n]}.$$

Запишем скорости остальных процессов в безразмерной форме с учетом многократных квантовых переходов.

**Скорость процессов возбуждения** из состояния  $[n]$  **электронным ударом во все вышележащие состояния  $[k]$  и девозбуждение вышележащих состояний до состояния  $[n]$ :**

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0} \left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{[n] \leftrightarrow [\sum]_{n+1}^{n_\infty}}^e &= \frac{g_{n+1}}{g_1} \cdot \left( \frac{W_i}{W_{n,n+1}} \right)^4 \cdot \bar{A}_{n+1,n} \cdot \psi^*(x_{n,n+1}) \cdot \exp(x_{n+1}) \times \\ &\times \left[ C_{n+1} \cdot Q_{[\sum]_{n+1}^{n_\infty}]-[n]}^{e-\text{туш}} - C_n \cdot Q_{[n]-[\sum]_{n+1}^{n_\infty}}^{e-\text{возб}} \right]. \end{aligned}$$

**Скорость процессов девозбуждения состояния  $[n]$  электронным ударом во все нижележащие состояния  $[k]$  и возбуждения состояния  $[n]$  из всех нижележащих состояний  $[k]$ :**

$$\frac{1}{\omega_0} \left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{\left[ \sum_1^{n-1} \right] \leftrightarrow [n]}^e = \frac{g_n}{g_1} \cdot \left( \frac{W_i}{W_{n-1,n}} \right)^4 \cdot \bar{A}_{n,n-1} \cdot \psi^*(x_{n-1,n}) \cdot \exp(x_n) \times$$

$$\times \left[ C_{n-1} \cdot Q_{\left[ \sum_1^{n-1} \right] \rightarrow [n]}^{e-\text{возб}} - C_n \cdot Q_{[n] \rightarrow \left[ \sum_1^{n-1} \right]}^{e-\text{туш}} \right].$$

**Скорость изменения заселенности состояния  $[n]$  при излучательных переходах во все нижележащие состояния  $[k]$  и переходов с поглощением из нижележащих состояний  $[k]$  в состояние  $[n]$ :**

$$\frac{1}{\omega_0} \left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{[n] \leftrightarrow \left[ \sum_1^{n-1} \right]}^v = -\gamma_0 \cdot \frac{g_n}{g_1} \cdot \bar{A}_{n,n-1} \cdot \exp(x_n) \cdot C_n \cdot Q_{[n] \rightarrow \left[ \sum_1^{n-1} \right]}^v.$$

**Скорость изменения заселенности состояния  $[n]$  при излучательных переходах из всех вышележащих состояний  $[k]$  и переходов с поглощением из состояния  $[n]$  во все вышележащие  $[k]$ :**

$$\frac{1}{\omega_0} \left( \frac{dN_n}{dt} \right)_{\left[ \sum_{n+1}^{n_\infty} \right] \leftrightarrow [n]}^v = \gamma_0 \cdot \frac{g_{n+1}}{g_1} \cdot \bar{A}_{n+1,n} \cdot \exp(x_{n+1}) \cdot C_{n+1} \cdot Q_{\left[ \sum_{n+1}^{n_\infty} \right] \rightarrow [n]}^v.$$

Многократные квантовые переходы учитываются в эффективных сечениях процессов посредством применения  $Q$ -факторов. Опираясь на определения  $Q$ -факторов, их можно выразить через коэффициенты  $C_n$ , характеризующие степень отклонения состояния от равновесного:

$$Q_{\left[ \sum_{n+1}^{n_\infty} \right] \rightarrow [n]}^{e-\text{туш}} = 1 + \varepsilon_Q \cdot \sum_{k \geq n+2}^{n_\infty} \frac{C_k}{C_{n+1}} \cdot g_{kn}^{(1)} \quad \text{при } 1 \leq n \leq n_\infty - 2,$$

$$Q_{[n] \rightarrow \left[ \sum_{n+1}^{n_\infty} \right]}^{e-\text{возб}} = 1 + \varepsilon_Q \cdot \sum_{k \geq n+2}^{n_\infty} g_{kn}^{(1)} \quad \text{при } 1 \leq n \leq n_\infty - 2,$$

$$Q_{\left[ \sum_1^{n-1} \right] \rightarrow [n]}^{e-\text{возб}} = 1 + \varepsilon_Q \cdot \sum_{k=1}^{n-2} \frac{C_k}{C_{n-1}} \cdot g_{kn}^{(2)} \quad \text{при } 3 \leq n \leq n_\infty,$$

$$Q_{[n]-[\sum]_1}^{e-гупш} = 1 + \varepsilon_Q \cdot \sum_{k=1}^{n-2} g_{kn}^{(2)} \quad \text{при } 3 \leq n \leq n_\infty, \quad (\text{П4.43})$$

$$Q_{[n]-[\sum]_1}^v = G_{n,n-1}^v + \varepsilon_Q \cdot \sum_{k=1}^{n-2} \frac{A_{nk}}{A_{n,n-1}} \cdot G_{n,k}^v \quad \text{при } 3 \leq n \leq n_\infty,$$

$$Q_{[\sum]_1-[n]}^v = G_{n+1,n}^v + \varepsilon_Q \cdot \sum_{k=n+2}^{n_\infty} \frac{C_k \cdot g_k}{C_{n+1} \cdot g_{n+1}} \cdot \frac{A_{kn}}{A_{n+1,n}} \cdot \exp(-x_{n+1,k}) \cdot G_{kn}^v$$

при

$$1 \leq n \leq n_\infty - 2,$$

где

$$g_{kn}^{(1)} = \frac{g_k}{g_{n+1}} \cdot \left( \frac{W_{n,n+1}}{W_{n,k}} \right)^4 \cdot \frac{A_{kn}}{A_{n+1,n}} \cdot \frac{\psi^*(x_{nk})}{\psi^*(x_{n,n+1})} \cdot \exp(-x_{n-1,k}),$$

$$g_{kn}^{(2)} = \left( \frac{W_{n-1,n}}{W_{k,n}} \right)^4 \cdot \frac{A_{nk}}{A_{k,n-1}} \cdot \frac{\psi^*(x_{nk})}{\psi^*(x_{n-1,n})}.$$

Параметр  $\varepsilon_Q$  добавлен для удобства численного анализа задачи. В итоге с учетом множественных квантовых переходов кинетические уравнения записываются в виде, подобном (П4.34):

$$\begin{aligned} & \frac{g_1}{g_n} \cdot \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{dN_n}{dt} = \left( \frac{W_i}{W_n} \right)^2 \cdot \psi^*(x_n) \cdot \bar{\beta}_{[c]-[n]} \cdot (1 - C_n) + \\ & + \frac{g_{n+1}}{g_n} \cdot \left( \frac{W_i}{W_{n,n+1}} \right)^4 \cdot \bar{A}_{n+1,n} \cdot \psi^*(x_{n,n+1}) \cdot \exp(x_{n+1}) \left[ C_{n+1} \cdot Q_{[\sum]_1-[n]}^{e-гупш} - C_n \cdot Q_{[n]-[\sum]_1}^{e-возб} \right] + \\ & + \left( \frac{R}{W_{n-1,n}} \right)^4 \cdot \bar{A}_{n,n-1} \cdot \psi^*(x_{n-1,n}) \cdot \exp(x_n) \cdot \left[ C_{n-1} \cdot Q_{[\sum]_1-[n]}^{e-возб} - C_n \cdot Q_{[n]-[\sum]_1}^{e-гупш} \right] + \quad (\text{П4.44}) \\ & + \gamma_0 \cdot \frac{g_{n+1}}{g_n} \cdot \bar{A}_{n+1,n} \cdot \exp(x_{n+1}) \cdot C_{n+1} \cdot Q_{[\sum]_1-[n]}^v - \gamma_0 \cdot \frac{g_{n+1}}{g_n} \cdot \bar{A}_{n,n-1} \cdot \exp(x_n) \cdot C_n \cdot Q_{[n]-[\sum]_1}^v \end{aligned}$$

для всех

$$2 \leq n \leq n_\infty - 1.$$

Кинетическое уравнение для последнего дискретного уровня  $n = n_\infty$  с учетом выражений для  $Q$ -факторов примет вид

$$\begin{aligned} \frac{g_1}{g_{n_\infty}} \cdot \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{dN_{n_\infty}}{dt} = & \left( \frac{W_i}{W_{n_\infty}} \right)^2 \cdot \psi^*(x_{n_\infty}) \cdot \bar{\beta}_{[c]-[n_\infty]} \cdot (1 - C_{n_\infty}) + \\ & + \left( \frac{W_i}{W_{n_\infty-1,n}} \right)^4 \cdot \bar{A}_{n_\infty, n_\infty-1} \cdot \psi^*(x_{n_\infty-1, n_\infty}) \cdot \exp(x_{n_\infty}) \left[ C_{n_\infty-1} \cdot Q_{[\sum_1^1]-[n_\infty]}^e - C_{n_\infty} \cdot Q_{[n_\infty]-[\sum_1^{n_\infty-1}]}^e \right] - \\ & - \gamma_0 \cdot \frac{g_{n_\infty}}{g_1} \cdot \bar{A}_{n_\infty, n_\infty-1} \cdot \exp(x_{n_\infty}) \cdot C_{n_\infty} \cdot Q_{[n_\infty]-[\sum_1^{n_\infty-1}]}^v. \end{aligned} \quad (\text{П4.45})$$

В результате применения квазиводородоподобной модели кинетические уравнения с учетом многократных квантовых переходов, при использовании формальной переменной  $v_n$  (П4.35), примут алгебраическую форму, аналогичную алгебраической системе (П4.36):

$$\begin{aligned} C_n = \alpha_n^* + \beta_n^* \cdot C_{n-1} + \gamma_n^* \cdot C_{n+1} \quad \text{для} \quad 2 \leq n \leq n_\infty - 1 \\ \text{и} \quad C_{n_\infty} = \alpha_{n_\infty}^* + \beta_{n_\infty}^* \cdot C_{n_\infty-1}. \end{aligned} \quad (\text{П4.46})$$

При этом использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (\alpha_n^*)^{-1} = & 1 + \frac{\exp(x_{n+1})}{y_n} \cdot \left\{ \frac{g_{n+1}}{g_n} \cdot \left( \frac{W_i}{W_{n,n+1}} \right)^4 \cdot \psi^*(x_{n,n+1}) \bar{A}_{n+1,n} \cdot Q_{[n]-[\sum_{n+1}^{n_\infty}]}^e + \right. \\ & + \bar{A}_{n,n-1} \cdot \exp(x_{n,n-1}) \left[ \left( \frac{W_i}{W_{n-1,n}} \right)^4 \cdot \psi^*(x_{n-1,n}) \cdot Q_{[n]-[\sum_1^{n-1}]}^e + \gamma_0 \cdot Q_{[n]-[\sum_1^{n-1}]}^v \right] + \\ & \left. + A_0''' \cdot \gamma_0 \cdot \exp(x_{n,n+1}) \cdot v_n \right\}, \\ \beta_n^* = & \frac{1}{y_n} \left( \frac{W_i}{W_{n-1,n}} \right)^4 \cdot \psi^*(x_{n-1,n}) \cdot \exp(x_n) \cdot \bar{A}_{n,n-1} \cdot Q_{[\sum_1^1]-[n]}^e \cdot \alpha_n^*, \quad (\text{П4.47}) \\ \gamma_n^* = & \frac{1}{y_n} \frac{g_{n+1}}{g_n} \cdot \bar{A}_{n+1,n} \cdot \exp(x_{n+1}) \left[ \left( \frac{W_i}{W_{n,n+1}} \right)^4 \cdot \psi^*(x_{n,n+1}) \cdot Q_{[\sum_{n+1}^{n_\infty}]-[n]}^e + \gamma_0 \cdot Q_{[n]-[\sum_1^{n-1}]}^v \right] \alpha_n^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha_{n_\infty}^*)^{-1} &= 1 + \frac{\bar{A}_{n_\infty, n_\infty-1}}{y_{n_\infty}} \cdot \exp(x_{n_\infty}) \left[ \left( \frac{W_i}{W_{n_\infty-1, n_\infty}} \right)^4 \cdot \psi^*(x_{n_\infty-1, n_\infty}) \cdot Q_{[n_\infty]-[\sum_1^{n_\infty-1}]}^e + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_0 \cdot Q_{[n_\infty]-[\sum_1^{n_\infty-1}]}^v \right] + \frac{1}{y_{n_\infty}} A_0''' \cdot \gamma_0 \cdot \exp(x_{n_\infty}) \cdot \nu_{n_\infty}, \\ \beta_{n_\infty}^* &= \frac{1}{y_{n_\infty}} \left( \frac{W_i}{W_{n_\infty-1, n_\infty}} \right)^4 \cdot \psi^*(x_{n_\infty-1, n_\infty}) \cdot \exp(x_{n_\infty}) \cdot \bar{A}_{n_\infty, n_\infty-1} \cdot Q_{[\sum_1^{n_\infty-1}]-[n_\infty]}^e \cdot \alpha_{n_\infty}^*. \end{aligned}$$

При исследовании процессов в плазме внутреннего положительно-го столба полого катода квазиводородоподобного приближения вполне достаточно для расчета суммарных скоростей изменения концентраций частиц. Полученная в многократном квантовом приближении система алгебраических уравнений (П4.46) с коэффициентами (П4.47) была применена для исследования состояния плазмы в активной зоне полого катода. Информация о структуре квазиуровней рабочего газа, статистических весах и средних энергиях уровней, а также о вероятностях переходов была взята из работ [55, 122–124].

Из условия равновесности верхних состояний атомов рабочего газа было принято  $C_{n_\infty} = 1$ . Поскольку в выражении для  $\alpha_{n_\infty}^*$  последнее слагаемое содержит малый коэффициент  $A_0''' = 4,06 \cdot 10^{-10}$ , то для не слишком малых концентраций электронов этим эффектом можно пренебречь, и тогда для коэффициента  $\alpha_{n_\infty}^*$  выражение примет упрощенный вид:

$$\begin{aligned} (\alpha_n^*)^{-1} &= 1 + \frac{\exp(x_{n+1})}{y_n} \cdot \left\{ \frac{g_{n+1}}{g_n} \cdot \left( \frac{W_i}{W_{n, n+1}} \right)^4 \cdot \psi^*(x_{n, n+1}) \bar{A}_{n+1, n} \cdot Q_{[n]-[\sum_{n+1}^{n_\infty}]}^e + \right. \\ &\quad \left. + \bar{A}_{n, n-1} \cdot \exp(x_{n, n-1}) \left[ \left( \frac{W_i}{W_{n-1, n}} \right)^4 \cdot \psi^*(x_{n-1, n}) \cdot Q_{[n]-[\sum_1^{n-1}]}^e + \gamma_0 \cdot Q_{[n]-[\sum_1^{n-1}]}^v \right] \right\}. \end{aligned}$$

Такое же упрощение сделано для коэффициента  $\alpha_{n_\infty}$ :

$$(\alpha_{n_\infty}^*)^{-1} = 1 + \frac{\bar{A}_{n_\infty, n_\infty-1}}{y_{n_\infty}} \cdot \exp(x_{n_\infty}) \left[ \left( \frac{W_i}{W_{n_\infty-1, n_\infty}} \right)^4 \cdot \psi^*(x_{n_\infty-1, n_\infty}) \cdot Q_{[n_\infty]-[\sum_1^{n_\infty-1}]}^e + \gamma_0 \cdot Q_{[n_\infty]-[\sum_1^{n_\infty-1}]}^v \right].$$

Для определения квантового числа, соответствующего последнему дискретному состоянию, использовалось выражение  $n_\infty \approx 7,69 \cdot 10^3 \cdot N_e^{-1/6}$ .

Система решается численно при заданных параметрах  $N_e$ ,  $T_e$  и  $N_1$ . При решении системы метод прогонки сочетается с итерационным методом, поскольку параметр ускользания излучения  $G_{nk}^V$  обуславливает нелинейность системы. В расчете предполагались полное поглощение резонансного излучения  $G_{21} = 0$  и прозрачность плазмы для остального излучения.

Коэффициент  $C_1$  определяется с помощью соотношения

$$C_1 = \frac{N_1 \cdot \exp(-x_1)}{A_0 \cdot \frac{g_1}{g_+} \cdot x_R^{3/2} \cdot N_e^2},$$

где  $x_1 = \frac{W_1}{kT}$ .

Остальные коэффициенты  $C_n$ , характеризующие степень отклонения распределения от равновесного, определяются при решении системы. С помощью этих коэффициентов далее находятся относительные заселенности уровней

$$X_n = \frac{N_n/g_n}{N_1/g_1} = C_n \cdot A_0 \cdot \frac{g_n}{g_+} \cdot \frac{x_R^{3/2}}{N_1} \cdot \exp(x_n) N_e^2,$$

а затем и сами заселенности уровней  $N_n$ .

По результатам моделирования и сравнения с экспериментом [19, 117] построено выражение для обобщенного коэффициента ионизации-рекомбинации неравновесной плазмы:

$$\alpha_e = \alpha_0 \cdot \alpha_i(T_e) \cdot \left( \Phi^e(n_e, T_e) + \Phi^V(n_e, T) \right), \quad (\text{П4.48})$$

$$\alpha_i(T_e) = \left( \frac{V_H}{V_i} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{k \cdot T_e}{e \cdot V_H}} \cdot \psi(p) \cdot \exp(-p),$$

$$\psi(p) = \frac{p}{1 + 1,22p},$$

$$p = \frac{e \cdot V_i}{k \cdot T_e},$$

где  $\alpha_0 = 0,85 \cdot 10^{-13} \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $V_i$  — потенциал ионизации атома плазмообразующего газа,  $V_H$  — потенциал ионизации атома водорода.

Функция  $\Phi^e(n_e, T_e)$  учитывает неравновесность распределения атомов по состояниям и каскадные процессы, а функция  $\Phi^v(n_e, T_e)$  учитывает вклад фотопроцессов:

$$\Phi^e(n_e, T_e) = 1 + \psi_0 \cdot \exp\left(\frac{e \cdot \Delta W}{k \cdot T_e}\right), \quad (\text{П4.49})$$

$$\Phi^v(n_e, T_e) = \frac{D_0}{n_e} \cdot \frac{g_1^+}{g_1} \cdot \sqrt{\frac{e \cdot x_R}{k}} \cdot \left(\frac{V_i}{V_H}\right)^{5/2} \cdot \frac{S(p)}{\psi(p)} \cdot \left(1 - \frac{1}{C_1}\right), \quad (\text{П4.50})$$

где  $\psi_0$  и  $\Delta W$  — константы аппроксимации для плазмообразующего газа; параметр  $x_R = \frac{W_{iH}}{T_e}$ ,  $W_{iH} = 13,595 \text{ эВ}$  — энергия ионизации атома водорода,  $g_1^+$  — статистический вес основного состояния иона,  $g_1$  — статистический вес основного состояния атома,  $D_0 = 5,197 \cdot 10^{-14} \text{ см}^3/\text{с}$ , функция  $S(p)$  [137] была введена ранее:

$$S(p) = \exp(p) \cdot W_i(-p),$$

$$C_1 = \frac{n_1 \cdot \exp(-p)}{A_0 \cdot \frac{g_1}{g_1^+} \cdot x_R^{3/2} \cdot n_e^2},$$

$$A_0 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{2\pi \cdot m_e \cdot R}\right)^{3/2},$$

$n_1$  — концентрация атомов в основном состоянии.

Соответственно, скорость ионизации может быть записана в стандартной форме:

$$\frac{dn_e}{dt} = \omega_e = \alpha_e \cdot N_e \cdot N_a,$$

где  $N_e$  и  $N_a$  — концентрации электронов и атомов соответственно,  $\alpha_e$  — обобщенный коэффициент ионизации-рекомбинации (П4.48).

Можно получить выражение для скорости ионизации через введенную ранее  $X_i = \frac{n_e}{n_i + n_a}$  степень ионизации плазмы:

$$\omega_e = \alpha_e(T_e) \cdot \left( \frac{P_g}{kT} \right)^2 \cdot \frac{X_i \cdot (1 - X_i)}{\left( 1 + X_i \cdot \frac{T_e}{T} \right)^2}. \quad (\text{П4.51})$$

Построенная модель ударно-радиационных процессов была применена к расчету характеристик дуговой плазмы аргона, ксенона, водорода, цезия и лития, как наиболее часто используемых плазмообразующих веществ в полых катодах. Проведено сравнение формирующейся степени ионизации плазмы в канале при использовании формулы Саха и при использовании модели ударно-радиационных процессов (П4.51). На рис. П4.2 сравнивается степень ионизации плазмы по двум моделям для лития (Li) и цезия (Cs), такое же сравнение показано на рис. П4.3 для аргона (Ar) и ксенона (Xe).

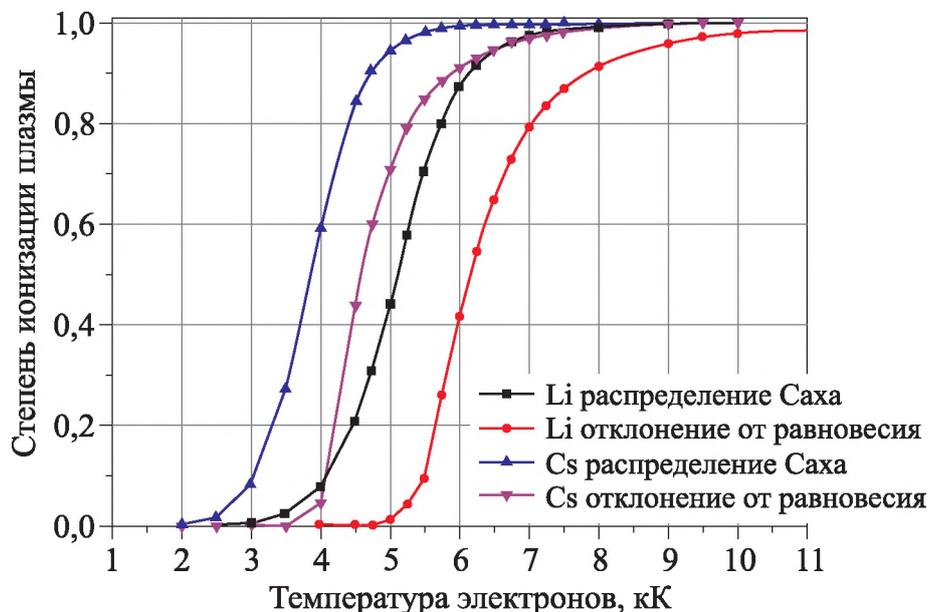


Рис. П4.2. Результаты расчета степени ионизации плазмы лития (Li) и цезия (Cs) по формуле Саха и по модели ударно-радиационных процессов: радиус канала — 1,1 мм, давление в канале — 600 Па, температура стенок — 2500 К

Моделирование показало, что с учетом ступенчатых ударно-радиационных процессов кривая зависимости степени ионизации от температуры электронов сдвигается в сторону больших температур, то есть сильная генерация плазмы в канале катода начинается при более высоких температурах электронов.

И если для щелочных металлов сдвиг в сторону увеличения не большой — порядка 2,5 кК, то для инертных газов смещение существенное — порядка 10 кК. К тому же при учете ступенчатых процессов кривые зависимостей становятся более пологими, уменьшается скорость возрастания степени ионизации плазмы при увеличении температуры. Для инертных газов эффект замедления выражен гораздо сильнее, для щелочных металлов изменение слабое.

Применение модели удовлетворительно согласуется с результатами экспериментов [5, 19]. Моделирование подтвердило, что в зависимости от рода плазмообразующего газа в плазме могут преобладать разные типы процессов: для плазмы щелочных металлов преимущественными процессами являются ионизация и возбуждение, тогда как для инертных газов и водорода преобладают рекомбинационные процессы.

Для сравнения скоростей и характеров процессов на одном рисунке сведены графики для разных типов плазмообразующих газов (рис. П4.4).

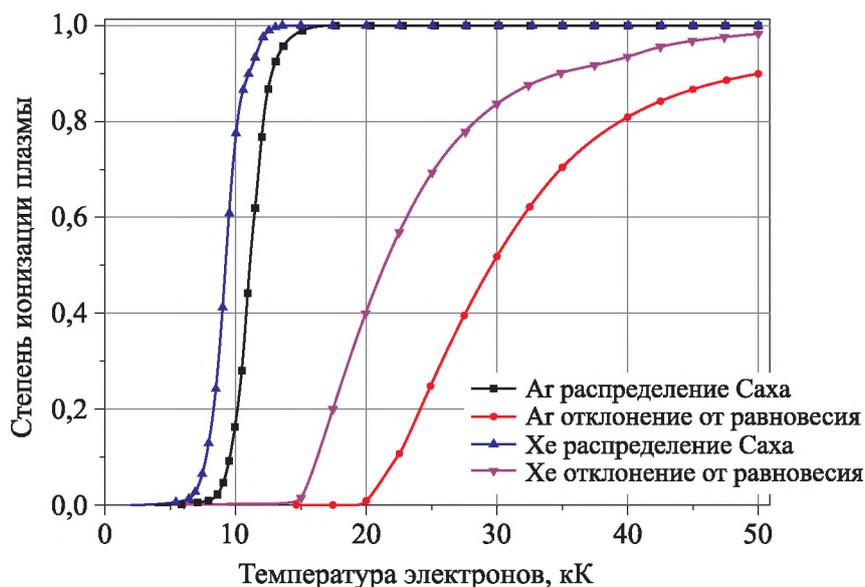


Рис. П4.3. Результаты расчета степени ионизации плазмы аргона (Ar) и ксенона (Xe) по формуле Саха и по модели ударно-радиационных процессов: радиус канала — 1,1 мм, давление в канале — 600 Па, температура стенок — 2500 К

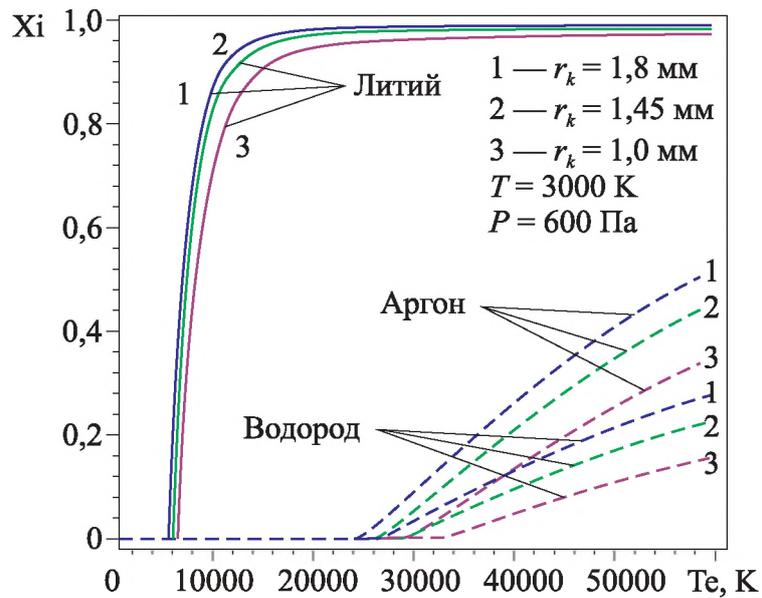


Рис. П4.4. Зависимость степени ионизации различных плазмообразующих веществ от температуры электронов при различных радиусах катода [19]

Для применения модели необходим предварительный расчет температуры катода, прикатодного скачка потенциала и давления газа в канале. Рассмотренная выше модель также применена к моделированию состояния плазмы в случае многоканального катода, результаты моделирования рассмотрены в главе 4.

## Приложение 5

### Вывод некоторых формул по главе 3

#### П5.1. Получение соотношений для коэффициентов степенного разложения концентраций частиц $n_a$ и $n_i$ (п. 3.2.1)

В п. 3.2.1 введены степенные разложения для концентраций и скорости потока:

$$n_a = n_{a0}(z) + \left(\frac{r}{r_k}\right)^2 n_{a2}(z),$$

$$n_i = n_{i0}(z) + \left(\frac{r}{r_k}\right)^2 n_{i2}(z),$$

$$u(r, z) = u_0(z) \left[ 1 + \frac{2\lambda}{r_k} - \left( \frac{r}{r_k} \right)^2 \right].$$

Преобразуем соотношения для плотностей потоков частиц (3.1) и (3.2) и учтем граничные условия (3.4).

1. В проекции на радиальное направление выражение (3.1) для потока атомов принимает вид:

$$\Gamma_{an} = -D_a \frac{\partial n_a}{\partial r} \Big|_{r=r_k} = -D_a \left( \frac{2r}{r_k} n_{a2} \right) \Big|_{r=r_k} = -D_a \frac{2n_{a2}}{r_k}.$$

Объединяя это выражение с граничным условием (3.4) для потока атомов на поверхности канала при  $r = r_k$ , получаем

$$\begin{aligned} -D_a \cdot \frac{2n_{a2}}{r_k} &= \frac{D_a}{\lambda_a} (n_a - n_s) = \frac{D_a}{\lambda_a} (n_{a0} + n_{a2} - n_s), \\ -\frac{2n_{a2}}{r_k} \cdot \lambda_a &= n_{a0} + n_{a2} - n_s \rightarrow n_{a2} \left( 1 + \frac{2\lambda_a}{r_k} \right) = n_s - n_{a0}, \\ n_{a2} &= \frac{n_s - n_{a0}}{1 + \frac{2\lambda_a}{r_k}}. \end{aligned}$$

2. В проекции на радиальное направление выражение (3.2) для потока ионов принимает вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{in} &= -D_i \frac{\partial n_i}{\partial r} \Big|_{r=r_k} + v_i n_i = -D_i \left( \frac{2r}{r_k^2} n_{i2} \right) \Big|_{r=r_k} + \mu E_r \cdot (n_{i0} + n_{i2}), \\ \Gamma_{in} &= -D_i \frac{2}{r_k} n_{i2} + \mu E_r n_{i0} + \mu E_r n_{i2}. \end{aligned}$$

Объединяя полученное выражение с граничным условием (3.4) для потока ионов на поверхности канала при  $r = r_k$ , получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{in} &= -D_i \frac{2}{r_k} n_{i2} + \mu E_r n_{i0} + \mu E_r n_{i2} = \frac{D_i}{\lambda_i} n_{i2} = \frac{D_i}{\lambda_i} n_{i0} + \frac{D_i}{\lambda_i} n_{i2}, \\ n_{i2} \left( \frac{D_i}{\lambda_i} + 2 \frac{D_i}{r_k} - \mu E_r \right) &= n_{i0} \left( \mu E_r - \frac{D_i}{\lambda_i} \right), \end{aligned}$$

$$n_{i2} = n_{i0} \frac{\mu E_r - \frac{D_i}{\lambda_i}}{\frac{D_i}{\lambda_i} + \frac{2D_i}{r_k} - \mu E_r} = \frac{\frac{\mu E_r \lambda_i}{D_i} - 1}{1 + \frac{2\lambda_i}{r_k} - \frac{\mu E_r \lambda_i}{D_i}}.$$

3. Объединяя пункты 1 и 2, получаем

$$\tilde{G}'(0) = \frac{\langle v \rangle \cdot u_x}{\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D}} \left[ \frac{D}{\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{\omega_i}} \left( \frac{\sqrt{\frac{\omega_i}{D}} + \frac{\omega_i}{u_z} - 2 \frac{u_z}{D}}{\sqrt{\frac{\omega_i}{D}} - \frac{u_z}{D}} \right) - \frac{1}{2} \frac{D^2}{u_z \langle v \rangle} \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right].$$

При записи разложения ограничиваемся первыми двумя слагаемыми, причем ранее было показано, что само ядро обращается в ноль при  $k = 0$ , поэтому в разложении остается только слагаемое с первой производной. Получение второй производной повысит точность разложения, но здесь не приводится по причине большого объема преобразований.

## П5.2. Вычисление определенных интегралов и пределов для модели свободномолекулярного течения (п. 3.2.2)

1. Формула (3.15):

$$\int_0^{\infty} \frac{dz'}{(1+(z-z')^2)^{3/2}} = \int_0^{\infty} \frac{dz'}{(1+(z'-z)^2)^{3/2}} = \int_0^{\infty} \frac{d(z'-z)}{(1+(z'-z)^2)^{3/2}}.$$

Введем новую переменную интегрирования:

$$y^2 = 1 + (z' - z)^2 \Rightarrow (z' - z)^2 = y^2 - 1 \Rightarrow (z' - z) = \pm \sqrt{y^2 - 1},$$

$$d(z' - z) = \frac{2y \cdot dy}{2\sqrt{y^2 - 1}} = \frac{y \cdot dy}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

Если  $z' \in [0; +\infty)$ , то новая переменная  $y \in [-\sqrt{1+z^2}; +\infty)$ . Находим интеграл с использованием табличной формулы [149]:

$$\int_0^{\infty} \frac{d(z' - z)}{\left(1 + (z' - z)^2\right)^{3/2}} = \int_{-\sqrt{1+z^2}}^{\infty} \frac{y \cdot dy}{\sqrt{y^2 - 1} \cdot y^3} = \int_{-\sqrt{1+z^2}}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1} \cdot y^2} = \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{y} \Big|_{-\sqrt{1+z^2}}^{\infty} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}} \Big|_{-\sqrt{1+z^2}}^{\infty} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{1+z^2}} = 1 - \sqrt{\frac{1+z^2-1}{1+z^2}} = 1 - \frac{(-z)}{\sqrt{1+z^2}} = 1 + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Таким образом,

$$\int_0^{\infty} \frac{dz'}{\left(1 + (z - z')^2\right)^{3/2}} = 1 + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}.$$

2. Исследуем выражение  $1 - \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$  в формуле выше при  $z \rightarrow \infty$ ,

что эквивалентно исследованию этого выражения при замене  $z = \frac{1}{x}$

и  $x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1 - 1}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} x^2\right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2z^2}.$$

То есть при  $z \rightarrow \infty$  поведение выражения  $1 - \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$  эквивалентно

поведению выражения  $\frac{1}{2z^2}$ .

3. Выполним интегрирование функции в формуле (3.19):

$$\int_0^{\infty} \frac{dz'}{\left((z - z')^2 + 4 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2} = \int_0^{\infty} \frac{d(z' - z)}{\left((z' - z)^2 + 4 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2}.$$

Для удобства записи введем обозначение

$$a = 2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

и новую переменную  $y = z' - z$  с пределами изменения  $y \in [-z; +\infty)$ , тогда интеграл принимает вид

$$\int_0^{\infty} \frac{d(z' - z)}{\left((z' - z)^2 + 4 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2} = \int_{-z}^{\infty} \frac{dy}{(y^2 + a^2)^2}.$$

Используем табличные интегралы [149]:

$$\begin{aligned} \int_{-z}^{\infty} \frac{dy}{(y^2 + a^2)^2} &= \left. \frac{y}{2a^2(y^2 + a^2)} \right|_{-z}^{\infty} + \frac{1}{2a^2} \int_{-z}^{\infty} \frac{dy}{y^2 + a^2} = \\ &= \left( 0 - \frac{-z}{2a^2(z^2 + a^2)} \right) + \frac{1}{2a^2} \left( \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{a}\right) \right) \Big|_{-z}^{\infty} = \\ &= \frac{z}{2a^2(z^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^2} \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{a}\right) \right). \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dz'}{\left((z - z')^2 + 4 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2} &= \frac{z}{4 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left(z^2 + 4 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)} + \\ &+ \frac{1}{8 \cos^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right) \right). \end{aligned}$$

Осталось умножить полученный интеграл на  $4 \cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ , и получаем окончательное выражение:

$$\frac{z \cdot \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{z^2 + 4\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \left( \frac{z}{2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right) \right),$$

которое подставляется в формулу (3.20).

### П5.3. Усреднение по радиусу канала уравнений переноса

А. Уравнение для потока атомов (3.1) в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \Gamma &= -\omega_i \cdot n_a, \\ -D_a \operatorname{div}(\nabla n_a) + \operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot n_a) &= -\omega_i n_a, \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r D_a \frac{\partial n_a}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( D_a \frac{\partial n_a}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u n_a) + \frac{\partial}{\partial z} (u n_a) &= -\omega_i n_a. \end{aligned}$$

Под усреднением понимается интегрирование

$$\langle \dots \rangle = \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \cdot F(r, \dots) dr$$

и далее рассматривается усреднение по отдельным слагаемым.

1. Первое слагаемое интегрируем:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} (D_a n_a) \right) dr &= -\frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( D_a \left( n_{a0} + \frac{r^2}{r_k^2} n_{a2} \right) \right) \right) dr = \\ &= -\frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot D_a \frac{2r}{r_k^2} n_{a2} \right) dr = -\frac{4D_a}{r_k^4} n_{a2} \int_0^{r_k} 2r dr = -\frac{4D_a}{r_k^4} n_{a2} r_k^2 = -\frac{4D_a}{r_k^2} n_{a2}. \end{aligned}$$

2. Второе слагаемое интегрируем:

$$\begin{aligned} \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \frac{\partial}{\partial z} \left( D_a \frac{\partial n_a}{\partial z} \right) dr &= \frac{2}{r_k^2} \frac{d}{dz} \int_0^{r_k} r D_a \frac{\partial n_a}{\partial z} dr = \\ &= \frac{d}{dz} \left( D_a \frac{d}{dz} \left( \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \cdot n_a dr \right) \right) = \frac{d}{dz} \left( D_a \frac{d}{dz} \langle n_a \rangle \right); \end{aligned}$$

рассмотрим отдельно усреднение  $n_a(x)$ :

$$\langle n_a \rangle = \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \cdot n_a dr = \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} \left( n_{a0} + \left( \frac{r}{r_k} \right)^2 n_{a2} \right) dr = \frac{2}{r_k^2} \left( \frac{1}{2} n_{a0} r_k^2 + \frac{1}{4} \frac{r_k^4}{r_k^2} n_{a2} \right) = n_{a0} + \frac{1}{2} n_{a2}.$$

3. Третье слагаемое сначала преобразуем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u n_a) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r u_0 \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} - \frac{r^2}{r_k^2} \right) \cdot \left( n_{a0} + \frac{r^2}{r_k^2} n_{a2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( u_0 \left[ \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) n_{a0} r - \frac{r^3}{r_k^2} n_{a0} + \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) \frac{r^3}{r_k^2} n_{a2} - \frac{r^5}{r_k^4} n_{a2} \right] \right) = \\ &= u_0 \frac{1}{r} \left[ \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) n_{a0} - \frac{3r^2}{r_k^2} n_{a0} + \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) \frac{3r^2}{r_k^2} n_{a2} - \frac{5r^4}{r_k^4} n_{a2} \right], \end{aligned}$$

затем проинтегрируем:

$$\begin{aligned} u_0 \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \frac{1}{r} \left[ \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) n_{a0} - \frac{3r^2}{r_k^2} n_{a0} + \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) \frac{3r^2}{r_k^2} n_{a2} - \frac{5r^4}{r_k^4} n_{a2} \right] dr &= \\ &= u_0 \frac{2}{r_k^2} \left[ \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) r_k n_{a0} - \frac{r_k^3}{r_k^2} n_{a0} + \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) \frac{r_k^3}{r_k^2} n_{a2} - \frac{r_k^5}{r_k^4} n_{a2} \right] = \\ &= u_0 \frac{2}{r_k} \left[ \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) n_{a0} - n_{a0} + \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) n_{a2} - n_{a2} \right] = u_0 \frac{2}{r_k} \cdot \frac{2\lambda}{r_k} (n_{a0} + n_{a2}). \end{aligned}$$

4. Четвертое слагаемое проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \frac{\partial}{\partial x} (u n_a) dr &= \frac{2}{r_k^2} \frac{d}{dx} \int_0^{r_k} r u n_a dr = \frac{2}{r_k^2} \frac{d}{dx} \int_0^{r_k} u_0 \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} - \frac{r^2}{r_k^2} \right) \left( n_{a0} + \frac{r^2}{r_k^2} n_{a2} \right) dr = \\ &= \frac{d}{dx} \left( u_0 \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} \left[ \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) n_{a0} r + \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) n_{a2} \frac{r^3}{r_k^2} - n_{a0} \frac{r^3}{r_k^2} - n_{a2} \frac{r^5}{r_k^4} \right] dr \right) = \\ &= \frac{d}{dx} \left( u_0 \left[ \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) n_{a0} \frac{r_k^2}{2} + \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) n_{a2} \frac{1}{4} \frac{r_k^4}{r_k^2} - n_{a0} \frac{1}{4} \frac{r_k^4}{r_k^2} - n_{a2} \frac{1}{6} \frac{r_k^6}{r_k^4} \right] \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d}{dx} \left( u_0 \left[ \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) n_{a0} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) n_{a2} - \frac{1}{2} n_{a0} - \frac{1}{3} n_{a2} \right] \right) = \\
 &= \frac{d}{dx} \left( u_0 \left[ n_{a0} \left( -\frac{1}{2} + \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) \right) + n_{a2} \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) \right) \right] \right) = \\
 &= \frac{d}{dz} \left( u_0 \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) \left[ n_{a0} \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right)} \right) + n_{a2} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right)} \right) \right] \right) = \\
 &= \frac{d}{dz} \left( u_0 (1 + \varepsilon) \left[ n_{a0} \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon} \right) + n_{a2} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon} \right) \right] \right) = \frac{d}{dx} \langle u n_a \rangle.
 \end{aligned}$$

5. Проинтегрируем правую часть уравнения:

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \cdot \omega_i n_a dr &= \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \cdot \omega_i \left( n_{a0} + \frac{r^2}{r_k^2} n_{a2} \right) dr = \frac{2}{r_k^2} \left( n_{a0} \frac{r_k^2}{2} + \frac{1}{4} \frac{r_k^4}{r_k^2} n_{a2} \right) \langle \omega_i \rangle = \\
 &= \left( n_{a0} + \frac{1}{2} n_{a2} \right) \langle \omega_i \rangle = \langle \omega_i n_a \rangle.
 \end{aligned}$$

В результате усреднения уравнение принимает вид:

$$\frac{2}{r_k} \left( -\frac{2D_a}{r_k} n_{a2} + u_0 \varepsilon (n_{a0} + n_{a2}) \right) - \frac{d}{dz} \left( D_a \frac{d}{dx} \langle n_a \rangle \right) + \frac{d}{dz} \langle u_x \cdot n_a \rangle = -\langle \omega_i \cdot n_a \rangle.$$

**В.** Уравнение для потока ионов, полученное из объединения формул (3.1) и (3.3) в цилиндрических координатах с учетом (3.2):

$$\begin{aligned}
 &\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \Gamma_\alpha + \operatorname{div} \Gamma_i &= 0 \\ \operatorname{div} \Gamma_\alpha &= -\omega_i \cdot n_a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{div} \Gamma_i = \omega_i \cdot n_a, \\
 &\Gamma_i = -D_i \cdot \nabla n_i + \mathbf{u} \cdot n_i, \\
 &\operatorname{div}(-D_i \nabla n_i) + \operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot n_i + \mu \mathbf{E} \cdot n_i) = \omega_i \cdot n_a, \\
 &-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r D_i \frac{\partial n_i}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( D_i \frac{\partial n_i}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r (u_x + \mu E_r) n_i) + \frac{\partial}{\partial z} ((u_x + \mu E_x) n_i) = \omega_i n_a.
 \end{aligned}$$

1. Первое слагаемое интегрируем:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} (D_i n_i) \right) dr &= -\frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( D_i \left( n_{i0} + \frac{r^2}{r_k^2} n_{i2} \right) \right) \right) dr = \\ &= -\frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot D_i \frac{2r}{r_k^2} n_{i2} \right) dr = -\frac{4D_i}{r_k^4} n_{i2} \int_0^{r_k} 2r dr = -\frac{4D_i}{r_k^4} n_{i2} r_k^2 = -\frac{4D_i}{r_k^2} n_{i2}. \end{aligned}$$

2. Второе слагаемое интегрируем:

$$\frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \frac{\partial}{\partial z} \left( D_i \frac{\partial n_i}{\partial z} \right) dr = \frac{2}{r_k^2} \frac{d}{dz} \int_0^{r_k} r D_i \frac{\partial n_i}{\partial z} dr = \frac{d}{dz} \left( D_i \frac{d}{dz} \left( \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \cdot n_i dr \right) \right) = \frac{d}{dz} \left( D_i \frac{d}{dz} \langle n_i \rangle \right);$$

далее рассмотрим отдельно усреднение  $n_i(x)$ :

$$\langle n_i \rangle = \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \cdot n_i dr = \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} \left( n_{i0} + \left( \frac{r}{r_k} \right)^2 n_{i2} \right) dr = \frac{2}{r_k^2} \left( \frac{1}{2} n_{i0} r_k^2 + \frac{1}{4} \frac{r_k^4}{r_k^2} n_{i2} \right) = n_{i0} + \frac{1}{2} n_{i2}.$$

3. Третье слагаемое сначала преобразуем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(u + \mu E_r) n_i) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left[ u_0 \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} - \frac{r^2}{r_k^2} \right) + \mu E_r \right] n_i \right) = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( u_0 \left( r \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) + r \mu E_r \right) \left( n_{i0} + \frac{r^2}{r_k^2} n_{i2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( u_0 \left( \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) n_{i0} r - \frac{r^3}{r_k^2} n_{i0} + \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) \frac{r^3}{r_k^2} n_{i2} - \frac{r^5}{r_k^4} n_{i2} \right) + \mu E_r n_{i0} r + \mu E_r \frac{r^3}{r_k^2} n_{i2} \right) = \\ &= \frac{1}{r} \left( u_0 \left( \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) n_{i0} - \frac{3r^2}{r_k^2} n_{i0} + \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) \frac{3r^2}{r_k^2} n_{i2} - \frac{5r^4}{r_k^4} n_{i2} \right) + \mu E_r n_{i0} + \mu E_r \frac{3r^2}{r_k^2} n_{i2} \right), \end{aligned}$$

затем проинтегрируем

$$\begin{aligned} \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \frac{1}{r} \left( u_0 \left( \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) n_{i0} - \frac{3r^2}{r_k^2} n_{i0} + \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) \frac{3r^2}{r_k^2} n_{i2} - \frac{5r^4}{r_k^4} n_{i2} \right) + \mu E_r n_{i0} + \mu E_r \frac{3r^2}{r_k^2} n_{i2} \right) dr = \\ = \frac{2}{r_k^2} \left( u_0 \left( \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) n_{i0} r_k - \frac{r_k^3}{r_k^2} n_{i0} + \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) \frac{r_k^3}{r_k^2} n_{i2} - \frac{r_k^5}{r_k^4} n_{i2} \right) + \mu E_r n_{i0} r_k + \mu E_r \frac{r_k^3}{r_k^2} n_{i2} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{r_k} \left( u_0 \left( \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) n_{i0} - n_{i0} + \left( 1 + \frac{2\lambda}{r_k} \right) n_{i2} - n_{i2} \right) + \mu E_r (n_{i0} + n_{i2}) \right) = \\
 &= \frac{2}{r_k} \left( u_0 \frac{2\lambda}{r_k} (n_{i0} + n_{i2}) + \mu E_r (n_{i0} + n_{i2}) \right).
 \end{aligned}$$

4. Четвертое слагаемое разобьем на две части и по отдельности проинтегрируем:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} ((u + \mu E_x) n_i) &= \frac{\partial}{\partial x} (u n_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\mu E_x n_i), \\
 \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \frac{\partial}{\partial z} (u n_i) dr &= \frac{2}{r_k^2} \frac{d}{dz} \left( \int_0^{r_k} r u n_i \right) dr = \frac{d}{dz} \left( \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r u n_i \right) = \frac{d}{dz} \langle u n_i \rangle,
 \end{aligned}$$

где величина  $\langle u n_i \rangle$  выводится аналогично  $\langle u n_a \rangle$  (см. пункт А)

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \frac{\partial}{\partial z} (\mu E_x n_i) dr &= \frac{d}{dz} \left( \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \mu E_x n_i dr \right) = \frac{d}{dz} \left( \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \mu E_x \left( n_{i0} + \frac{r^2}{r_k^2} \right) dr \right) = \\
 &= \frac{d}{dz} \left[ \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \mu E_x n_{i0}(z) dr + \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \frac{r^2}{r_k^2} \mu E_x n_{i2}(z) dr \right] = \\
 &= \frac{d}{dz} \left[ n_{i0}(z) \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \mu E_x dr + n_{i2}(z) \frac{2}{r_k^2} \int_0^{r_k} r \frac{r^2}{r_k^2} \mu E_x dr \right] = \\
 &= \frac{d}{dz} \left[ n_{i0}(z) \langle \mu E_x \rangle + n_{i2}(z) \left\langle \frac{r^2}{r_k^2} \mu E_x \right\rangle \right] = \frac{d}{dz} \langle \mu E_x n_i \rangle.
 \end{aligned}$$

Правая часть уравнения уже была усреднена в части А данного приложения. Таким образом, после усреднения уравнение принимает вид

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{r_k} \left( -\frac{2D_a}{r_k} n_{i2} + (\varepsilon u_0 + \mu E_r) (n_{i0} + n_{i2}) \right) - \frac{d}{dz} \left( D_i \frac{d}{dz} \langle n_i \rangle \right) + \\
 + \frac{d}{dz} \langle (u + \mu \cdot E_x) \cdot n_i \rangle = \langle \omega_i \cdot n_a \rangle.
 \end{aligned}$$

#### П5.4. Решение уравнений переноса атомов и ионов для плоской поверхности в полубесконечном объеме с применением преобразования Фурье

1. В случае декартовой системы координат уравнение переноса атомов (3.1) можно переписать:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \Gamma = -\omega_i \cdot n_a \\ \Gamma = -D_a \cdot \nabla n_a + \mathbf{u} \cdot n_a \end{array} \right\} \Rightarrow -D \cdot \operatorname{div}(\nabla n_a) + \operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot n_a) = -\omega_i \cdot n_a,$$

откуда

$$-D \left( \frac{\partial^2 n_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_a}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{u} \cdot n_a) = -\omega_i \cdot n_a.$$

Применим к уравнению преобразование Фурье по оси  $Ox$ , при этом координата  $z$  будет независимым параметром [150, 151]:

$$\begin{aligned} -D \left( (ix)^2 N_a(x, z) + \frac{d^2 N_a(x, z)}{dz^2} \right) + (-ix) N_a(x, z) \cdot u = -\omega_i \cdot N_a(x, z), \\ \frac{d^2 N_a(x, z)}{dz^2} - \left( x^2 + i \frac{xu}{D} + \frac{\omega_i}{D} \right) \cdot N_a(x, z) = 0. \end{aligned}$$

Получено обыкновенное дифференциальное уравнение для фурье-образа функции концентрации атомов, вид решения которого известен из теории дифференциальных уравнений. Если ввести обозначение

$$\frac{d^2 N_a}{dz^2} - \psi^2 \cdot N_a = 0, \quad \text{где} \quad \psi^2 = \left( x^2 + i \frac{xu}{D} + \frac{\omega_i}{D} \right), \quad (\text{П5.1})$$

то решение имеет вид  $N(x, z) = C_1 \cdot e^{\psi z} + C_2 \cdot e^{-\psi z}$ . Из условия ограниченности функции на бесконечности оставляем только второе слагаемое и подбираем коэффициент из граничного условия, к которому также применяется преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} -D \frac{\partial n_a}{\partial z} = \langle v \rangle (n_a - n_s) |_{z=0} \Rightarrow -D \frac{dN_a}{dz} = \langle v \rangle (N_a - N_s) |_{z=0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dN_a}{dz} = -\frac{\langle v \rangle}{D} (N_a - N_s) |_{z=0}. \end{aligned}$$

Если продифференцировать выражение для  $N(x, z)$ , то  $\frac{dN_a}{dz} \Big|_{z=0} = -\psi C_2 \cdot e^{-\psi z} \Big|_{z=0} = -\psi C_2$ . Объединяя это выражение с граничным

условием, получаем  $C_2 = \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \psi D}$ , поэтому фурье-образ имеет вид

$$N(x, z) = \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \psi D} \cdot e^{-\psi z},$$

и его обратное преобразование Фурье подставлено в уравнение (3.16).

2. В случае декартовой системы координат уравнение переноса ионов (3.2) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \Gamma_i &= \omega_i \cdot n_a \\ \Gamma_i &= -D \cdot \nabla n_i + \mathbf{V} \cdot n_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow -D \cdot \operatorname{div}(\nabla n_i) + \operatorname{div}(\mathbf{V} \cdot n_i) = \omega_i \cdot n_a,$$

откуда

$$-D \left( \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_i}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (u_x \cdot n_i) - \frac{\partial}{\partial z} (u_z \cdot n_i) = \omega_i \cdot n_a.$$

Применим к уравнению преобразование Фурье по оси  $Ox$ , при этом координата  $z$  будет независимым параметром [150, 151]:

$$-D \left( (ix)^2 N_i(x, z) + \frac{d^2 N_i(x, z)}{dz^2} \right) + (-ix) N_i(x, z) \cdot u_x - u_z \frac{dN_i(x, z)}{dz} = \omega_i \cdot N_a(x, z),$$

$$\frac{d^2 N_i(x, z)}{dz^2} + \frac{u_z}{D} \frac{dN_i(x, z)}{dz} - \left( i \frac{xu_x}{D} + x^2 \right) N_i(x, z) = -\frac{\omega_i}{D} \cdot N_a(x, z).$$

Характеристическое уравнение для данного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\lambda^2 + \frac{u_z}{D} \lambda - \left( x^2 + i \frac{xu_x}{D} \right) = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = -\frac{u_z}{2D} \pm \sqrt{\frac{u_z^2}{4D^2} + x^2 + i \frac{xu_x}{D}}.$$

Тогда общее решение неоднородного дифференциального уравнения найдем методом вариации произвольных постоянных. Переменные коэффициенты обозначим  $A_1(x, z)$  и  $A_2(x, z)$  и введем для удобства обозначение  $\alpha = \frac{u_z}{D}$ ; решение ищем в виде комбинации частных решений уравнения:

$$\begin{aligned} N_i &= A_1(x, z)e^{\lambda_1 z} + A_2(x, z)e^{\lambda_2 z} = \\ &= A_1(x, z)e^{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i\frac{xu_x}{D}}z} + A_2(x, z)e^{\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i\frac{xu_x}{D}}z}. \end{aligned}$$

Записываем систему уравнений для производных коэффициентов  $A'_1(x, z)$  и  $A'_2(x, z)$  (см. [152]):

$$\begin{cases} A'_1 \cdot N_{i1} + A'_2 \cdot N_{i2} = 0 \\ A'_1 \cdot N'_{i1} + A'_2 \cdot N'_{i2} = -\frac{V_i}{D} N_a \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} A'_1 e^{\left(\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i\frac{xu_x}{D}}\right)z} + A'_2 e^{\left(\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i\frac{xu_x}{D}}\right)z} = 0, \\ A'_1 \left(-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i\frac{xu_x}{D}}\right) e^{\left(\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i\frac{xu_x}{D}}\right)z} + \\ + A'_2 \left(-\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i\frac{xu_x}{D}}\right) e^{\left(\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i\frac{xu_x}{D}}\right)z} = -\frac{\omega_i}{D} \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \psi D} e^{-\psi z}. \end{cases}$$

Откуда получаем производные для коэффициентов:

$$\begin{cases} A'_1 = -\frac{\omega_i}{2D} \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \psi D} \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i\frac{xu_x}{D}}} \cdot e^{\left(-\psi + \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i\frac{xu_x}{D}}\right)z}, \\ A'_2 = \frac{\omega_i}{2D} \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \psi D} \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i\frac{xu_x}{D}}} \cdot e^{\left(-\psi + \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i\frac{xu_x}{D}}\right)z}. \end{cases}$$

И сами коэффициенты после интегрирования:

$$A_1 = -\frac{\omega_i \langle v \rangle}{2D \langle v \rangle - \psi D} \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i \frac{xu_x}{D}}} \times$$

$$\times \frac{1}{-\psi + \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i \frac{xu_x}{D}}} \cdot e^{\left(-\psi + \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i \frac{xu_x}{D}}\right)z},$$

$$A_2 = \frac{\omega_i \langle v \rangle}{2D \langle v \rangle - \psi D} \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i \frac{xu_x}{D}}} \times$$

$$\times \frac{1}{-\psi + \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i \frac{xu_x}{D}}} \cdot e^{\left(-\psi + \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i \frac{xu_x}{D}}\right)z} + C,$$

где  $C$  — константа интегрирования, которая позволит далее учесть граничные условия. После подстановки коэффициентов  $A_1$  и  $A_2$  в решение, после алгебраических преобразований получаем выражение

$$N_i = -\frac{\omega_i}{D} \cdot \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \psi D} \cdot \frac{1}{\psi^2 - \alpha\psi - \left(x^2 + i \frac{xu_x}{D}\right)} \cdot e^{-\psi z} + C \cdot e^{\left(\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i \frac{xu_x}{D}}\right)z}.$$

Применим к граничному условию задачи преобразование Фурье (как ранее, по координате  $x$ , считая  $z$  параметром):

$$-D \frac{\partial n_i}{\partial z} \Big|_{z=0} - u_z \cdot n_i = n_i \langle v \rangle \Big|_{z=0} \Rightarrow \frac{\partial n_i}{\partial z} \Big|_{z=0} =$$

$$= -n_i \left( \frac{\langle v \rangle}{D} + \frac{u_z}{D} \right) \Rightarrow \frac{dN_i}{dz} \Big|_{z=0} = -N_i \left( \frac{\langle v \rangle}{D} + \frac{u_z}{D} \right).$$

Продифференцируем полученное выражение для  $N_i$  и подставим в граничное условие при  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_i}{D} \cdot \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \psi D} \cdot \frac{\psi}{\psi^2 - \alpha\psi - \left(x^2 + i\frac{xu_x}{D}\right)} + C \cdot \left( -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + i\frac{xu_x}{D}} \right) = \\ & = \left( -\frac{\omega_i}{D} \cdot \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \psi D} \cdot \frac{1}{\psi^2 - \alpha\psi - \left(x^2 + i\frac{xu_x}{D}\right)} + C \right) \cdot \left( -\left( \frac{\langle v \rangle}{D} + \frac{u_z}{D} \right) \right). \end{aligned}$$

Откуда получаем выражение для коэффициента  $C$ :

$$C = \frac{\omega_i}{D} \cdot \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \psi D} \cdot \frac{1}{\psi^2 - \alpha\psi - \left(x^2 + i\frac{xu_x}{D}\right)} \cdot \frac{u_z + \langle v \rangle - \psi D}{u_z + \langle v \rangle + \gamma D},$$

где использовано обозначение  $\gamma = -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + x^2 + \frac{i \cdot x \cdot u_x}{D}}$ .

Окончательное выражение для фурье-образа:

$$N_i(x, z) = -\frac{\omega_i}{D} \cdot \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \psi D} \cdot \frac{1}{\psi^2 - \alpha\psi - \left(x^2 + i\frac{xu_x}{D}\right)} \left[ e^{-\psi z} - \frac{u_z + \langle v \rangle - \psi D}{u_z + \langle v \rangle + \gamma D} \cdot e^{\gamma z} \right].$$

Далее это выражение подставлено в соотношение для плотности потока ионов (3.17).

3. Проверим, что для фурье-образа функции Грина выполняется условие  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x'-x)} \tilde{G}(k) dk = 0$ , то есть при  $k = 0$  выполняется  $\tilde{G}(k = 0) = 0$ .

В соответствии с соотношением (3.18) фурье-образ для функции Грина имеет вид

$$\tilde{G}(k) = \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \psi D} \cdot \left[ \psi D - \frac{\omega_i \cdot \langle v \rangle}{D \left( \psi^2 - \alpha\psi - \left( k^2 + i\frac{ku_x}{D} \right) \right)} \cdot \frac{\gamma + \psi}{u_z + \langle v \rangle + \gamma D} \right].$$

Ранее было введено обозначение  $\psi^2 = k^2 + i\frac{ku_x}{D} + \frac{\omega_i}{D}$ , соответственно, при  $k = 0$  получаем, что  $\psi^2 = \frac{\omega_i}{D}$  и  $\psi = \sqrt{\frac{\omega_i}{D}}$ . Также было введено

$\alpha = \frac{u_z}{D}$  и  $\gamma = -\frac{u_z}{2D} - \sqrt{\frac{u_z^2}{4D^2} + k^2 + i\frac{ku_x}{D}}$ , которое при  $k = 0$  принимает вид  $\gamma = -\frac{u_z}{D} = -\alpha$ .

Фурье-образ функции Грина обращается в ноль, если равно нулю выражение в квадратных скобках. Выполним все подстановки:

$$\begin{aligned} & \psi D - \frac{\omega_i \cdot \langle v \rangle}{\left( \psi^2 - \alpha \psi - \left( k^2 + i\frac{ku_x}{D} \right) \right)} \cdot \frac{\gamma + \psi}{u_z + \langle v \rangle + \gamma D} = \\ & = \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \cdot D - \omega_i \cdot \frac{\langle v \rangle}{\frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \cdot \sqrt{\frac{\omega_i}{D}}} \cdot \frac{-\alpha + \sqrt{\frac{\omega_i}{D}}}{u_z + \langle v \rangle - \alpha D} = \sqrt{\omega_i D} - \frac{\omega_i \langle v \rangle}{\omega_i - u_z \sqrt{\frac{\omega_i}{D}}} \cdot \frac{-u_z + \sqrt{\omega_i D}}{u_z + \langle v \rangle - u_z} = \\ & = \sqrt{\omega_i D} - \frac{\omega_i \langle v \rangle (-u_z + \sqrt{\omega_i D})}{\left( \omega_i - u_z \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right) \langle v \rangle} = \frac{\sqrt{\omega_i D} \left( \omega_i - u_z \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right) + \omega_i u_z - \omega_i \sqrt{\omega_i D}}{\left( \omega_i - u_z \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right)} = \\ & = \frac{\omega_i \sqrt{\omega_i D} - \omega_i u_z + \omega_i u_z - \omega_i \sqrt{\omega_i D}}{\left( \omega_i - u_z \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right)} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, условие  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x'-x)} \tilde{G}(k) dk = 0$  подтверждено и будет использовано далее.

### П5.5. Применение асимптотического разложения интеграла Фурье

При решении дифференциального уравнения с помощью преобразования Фурье возник интеграл вида

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t} f(t) dt.$$

В работе [79, с. 68] рассмотрена методика приближенного вычисления подобных интегралов через разложение в ряд при больших положительных  $\alpha$ :

$$I(\alpha) = \sum_{n=0}^N \frac{f^n(0)}{(-i\alpha)^{n+1}} + O\left(\frac{1}{\alpha^{N+2}}\right),$$

где  $f^n$  — обозначение производной порядка  $n$ . В первом приближении используем первые два члена разложения в ряд, то есть саму функцию и ее первую производную:

$$I(\alpha) = \frac{f(0)}{-i\alpha} + \frac{f'(0)}{\alpha^2} + O\left(\frac{1}{\alpha^3}\right).$$

Для упрощения полученных выражений выполним ряд нормировок, переходя к безразмерным величинам:  $\xi = x \frac{u_x}{D}$ ,

$$p = k \frac{D}{u_x}, \quad \mu = \alpha \frac{D}{u_x}, \quad \mu_0 = \frac{\langle v \rangle}{u_x}, \quad \eta^2 = \frac{\omega_i D}{u_x^2},$$

$$\gamma = \frac{u_x}{D} \left( -\frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + p^2 + i \cdot p} \right), \quad \psi^2 = \left( \frac{u_x}{D} \right)^2 \cdot (p^2 + i \cdot p + \eta^2),$$

преобразуя  $I(k)$  в  $I(p)$ .

$$G(x' - x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x'-x)} \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \psi D} \cdot \left[ \psi D - \frac{\omega_i \cdot \langle v \rangle}{D(\psi^2 - \alpha\psi - \beta^2)} \cdot \frac{\gamma + \psi}{u_z + \langle v \rangle + \gamma D} \right] dk \Rightarrow$$

$$G(x' - x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x'-x)} \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \psi D} \cdot \left[ \psi D - \frac{\omega_i \cdot \langle v \rangle}{(\psi^2 - \alpha\psi - \beta^2)} \cdot \frac{\gamma + \psi}{u_z + \langle v \rangle + \gamma D} \right] dk \Rightarrow$$

$$G(\xi - \xi') = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip \frac{V}{D} (x'-x) \frac{D}{u_x}} \frac{\langle v \rangle}{u_x} \cdot \left[ \frac{u_x}{D} \sqrt{p^2 + ip + \eta^2} \cdot D - \frac{\langle v \rangle}{u_x} - \frac{D u_x^2}{u_x D^2} \sqrt{p^2 + ip + \eta^2} \right] dk \Rightarrow$$

$$\frac{\omega_i \cdot \langle v \rangle}{\left( \frac{u_x^2}{D^2} (p^2 + ip + \eta^2) - \frac{\mu u_x}{D} \frac{u_x}{D} \sqrt{p^2 + ip + \eta^2} - \left( p^2 \frac{u_x^2}{D^2} + ip \frac{u_x^2}{D^2} \right) \right)} \times$$

$$\times \frac{\frac{u_x}{D} \left( -\frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + p^2 + ip} \right) + p \frac{u_x}{D}}{u_z + \langle v \rangle + \frac{u_x}{D} \left( -\frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + p^2 + ip} \right) \cdot D} \frac{u_x}{D} dp.$$

После преобразований

$$G(\xi - \xi') = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip(x'-x)} \frac{\mu_0 u_x}{\mu_0 - \frac{u_x}{D} \sqrt{p^2 + ip + \eta^2}} \cdot \left[ \sqrt{p^2 + ip + \eta^2} - \right.$$

$$\left. \eta^2 \cdot \mu_0 \left( -\frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + p^2 + ip} \right) + p \right] dp.$$

$$\frac{\left( \eta^2 - \mu \sqrt{p^2 + ip + \eta^2} \right) \left( \mu + \mu_0 - \frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + p^2 + ip} \right)}{\left( \eta^2 - \mu \sqrt{p^2 + ip + \eta^2} \right) \left( \mu + \mu_0 - \frac{\mu}{2} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + p^2 + ip} \right)}$$

По причине большого объема алгебраических преобразований при взятии производной и формировании асимптотического разложения авторы опустили часть выкладок и привели только результат выкладок в основном тексте (3.19)–(3.21).

### П5.6. Разложение в ряд фурье-образа $\tilde{G}(k)$ по малому параметру в окрестности нуля

Фурье-образ ядра интегрального уравнения имеет вид

$$\tilde{G} = \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \psi D} \cdot \left[ \psi D - \frac{\omega_i \cdot \langle v \rangle}{(\psi^2 - \alpha \psi - \beta^2)} \cdot \frac{\gamma + \psi}{u_z + \langle v \rangle + \gamma D} \right] \Rightarrow$$

$$\tilde{G} = \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - D \sqrt{k^2 + ik \frac{u_x}{D} + \frac{\omega_i}{D}}} \left[ D \sqrt{k^2 + ik \frac{u_x}{D} + \frac{\omega_i}{D}} - \right.$$

$$-\langle v \rangle \omega_i \frac{-\frac{u_z}{2D} - \sqrt{\frac{u_z^2}{4D^2} + k^2} + ik \frac{u_x}{D} + \sqrt{k^2 + ik \frac{u_x}{D} + \frac{\omega_i}{D}}}{\left( \frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \sqrt{k^2 + ik \frac{u_x}{D} + \frac{\omega_i}{D}} \right) \left( u_z + \langle v \rangle + D \left( -\frac{u_z}{2D} - \sqrt{\frac{u_z^2}{4D^2} + k^2} + ik \frac{u_x}{D} \right) \right)}$$

Находим производную от функции по параметру  $ik$  и вычисляем ее при  $k = 0$ . Ввиду сложности выражения производную будем находить по отдельным сомножителям произведения.

1.

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - D \sqrt{k^2 + ik \frac{u_x}{D} + \frac{\omega_i}{D}}} \right)' \cdot [ ]_{k=0} = - \frac{\langle v \rangle (-D) \frac{u_x/D}{2 \sqrt{k^2 + ik \frac{u_x}{D} + \frac{\omega_i}{D}}}}{\left( \langle v \rangle - D \sqrt{k^2 + ik \frac{u_x}{D} + \frac{\omega_i}{D}} \right)^2} \times \\ & \times \left[ \sqrt{\omega_i D} - \langle v \rangle \omega_i \frac{-\frac{u_z}{D} + \sqrt{\frac{\omega_i}{D}}}{\left( \frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right) \left( u_z + \langle v \rangle + D \left( -\frac{u_z}{D} \right) \right)} \right] = \\ & = \frac{\langle v \rangle u_x}{2 \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} (\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D})^2} \left[ \sqrt{\omega_i D} - \langle v \rangle \omega_i \frac{-\frac{u_z}{D} + \sqrt{\frac{\omega_i}{D}}}{\langle v \rangle \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \left( \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} - \frac{u_z}{D} \right)} \right] = \\ & = \frac{\langle v \rangle u_x}{2 \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} (\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D})^2} \left[ \sqrt{\omega_i D} - \omega_i \sqrt{\frac{D}{\omega_i}} (-1) \right] = \\ & = \frac{\langle v \rangle u_x}{2 \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} (\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D})^2} 2 \sqrt{\omega_i D} = \frac{\langle v \rangle u_x}{(\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D})^2} D. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - D \sqrt{k^2 + ik \frac{u_x}{D} + \frac{\omega_i}{D}}} \right)_{k=0} \left[ \right]_{k=0} = \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D}} \left[ D \frac{u_x/D}{2 \sqrt{k^2 + ik \frac{u_x}{D} + \frac{\omega_i}{D}}} - \right. \\
 & \quad - \frac{u_x/D}{2 \sqrt{\frac{u_z^2}{4D^2} + k^2 + ik \frac{u_x}{D}}} \left( \frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right) \langle v \rangle \\
 & \quad \left. - \langle v \rangle \omega_i \frac{\left( \frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right)^2 \langle v \rangle^2}{\left( \frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right)^2 \langle v \rangle^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \langle v \rangle \omega_i \frac{\left( -\frac{u_z}{D} + \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right)}{\left( \frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right)^2 \langle v \rangle^2} \left[ \left( \frac{u_z}{D} \frac{u_x/D}{2 \sqrt{k^2 + ik \frac{u_x}{D} + \frac{\omega_i}{D}}} \right) \langle v \rangle + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left( \frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right) D \left( -\frac{u_x/D}{2 \sqrt{\frac{u_z^2}{4D^2} + k^2 + ik \frac{u_x}{D}}} \right) \right] \right] = \\
 & = \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D}} \left[ \frac{u_x}{2 \sqrt{\frac{\omega_i}{D}}} - \langle v \rangle \omega_i \frac{-\frac{u_x/D}{2 \frac{u_z}{D}} \left( \frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right) \langle v \rangle}{\left( \frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right)^2 \langle v \rangle^2} + \right. \\
 & \quad \left. - \langle v \rangle \omega_i \frac{\left( -\frac{u_z}{D} + \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right) \left( \left( -\frac{u_z/D}{2 \sqrt{\frac{\omega_i}{D}}} \frac{u_x/D}{D} \right) \langle v \rangle - \left( \frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right) \frac{u_x}{2 \frac{u_z}{D}} \right)}{\left( \frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right)^2 \langle v \rangle^2} \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\langle v \rangle}{\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D}} \left[ \frac{1}{2} u_x \sqrt{\frac{D}{\omega_i}} + \langle v \rangle \omega_i \frac{\frac{1}{2} \frac{u_x \langle v \rangle}{u_z}}{\left( \frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right)^2 \langle v \rangle^2} - \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \frac{\langle v \rangle \omega_i \cdot u_z \cdot u_x \sqrt{\frac{D}{\omega_i}} \left( -\frac{u_z}{D} + \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right) \langle v \rangle}{D^2 \left( \frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right)^2 \langle v \rangle^2} - \frac{\langle v \rangle \omega_i \frac{1}{2} \frac{D \cdot u_x \sqrt{\omega_i} \left( \frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \right)^2}{u_z \sqrt{D} \left( \frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \right)^2} \right] = \\
&= \frac{\langle v \rangle u_x}{\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D}} \cdot \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{D}{\omega_i}} + \frac{\omega_i}{u_z} \cdot \frac{1}{\left( \frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{u_z \cdot \omega_i}{D^2} \cdot \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{\omega_i}} \frac{\left( \frac{u_z}{D} - \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right)}{\left( \frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D} \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right)^2} - \frac{D^2 \sqrt{\omega_i}}{u_z \langle v \rangle \sqrt{D}} \right] = \\
&= \frac{\langle v \rangle \cdot u_x}{\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D}} \cdot \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{D}{\omega_i}} + \frac{\omega_i}{u_z} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \left( \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} - \frac{u_z}{D} \right)} - \frac{u_z \sqrt{D}}{D \sqrt{\omega_i}} \frac{1}{\left( \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} - \frac{u_z}{D} \right)} - \frac{D^2 \sqrt{\omega_i}}{u_z \langle v \rangle \sqrt{D}} \right] = \\
&= \frac{\langle v \rangle \cdot u_x}{\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D}} \cdot \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{D}{\omega_i}} \left( 1 + \frac{\omega_i}{u_z} \cdot \frac{1}{\left( \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} - \frac{u_z}{D} \right)} - \frac{u_z}{D} \cdot \frac{1}{\left( \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} - \frac{u_z}{D} \right)} \right) - \frac{D^2 \sqrt{\omega_i}}{u_z \langle v \rangle \sqrt{D}} \right] = \\
&= \frac{\langle v \rangle \cdot u_x}{\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D}} \cdot \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{D}{\omega_i}} \left( \frac{\sqrt{\frac{\omega_i}{D}} + \frac{\omega_i}{u_z} - 2 \frac{u_z}{D}}{\sqrt{\frac{\omega_i}{D}} - \frac{u_z}{D}} \right) - \frac{D^2 \sqrt{\omega_i}}{u_z \langle v \rangle \sqrt{D}} \right].
\end{aligned}$$

3. Объединяя пункты 1 и 2, получаем

$$\tilde{G}'(0) = \frac{\langle v \rangle \cdot u_x}{\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D}} \left[ \frac{D}{\langle v \rangle - \sqrt{\omega_i D}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{\omega_i}} \left( \frac{\sqrt{\frac{\omega_i}{D}} + \frac{\omega_i}{u_z} - 2 \frac{u_z}{D}}{\sqrt{\frac{\omega_i}{D} - \frac{u_z}{D}}} \right) - \frac{1}{2} \frac{D^2}{u_z \langle v \rangle} \sqrt{\frac{\omega_i}{D}} \right].$$

При записи разложения ограничиваемся первыми двумя слагаемыми, причем ранее было показано, что само ядро обращается в ноль при  $k = 0$ , поэтому в разложении остается только слагаемое с первой производной. Получение второй производной повысит точность разложения, но здесь не приводится по причине большого объема преобразований.

*Научное издание*

Черкасова Мария Владимировна  
Котельников Михаил Вадимович  
Крылов Сергей Сергеевич

**Математическое моделирование  
физических процессов в полых катодах**

Дизайн обложки: А. А. Гурьянова  
Технический редактор: А. В. Бакиев  
Корректор: Е. В. Огородникова

Подписано в печать 01.12.2023. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Печать цифровая. Усл. печ. л. 11,16. Уч.-изд. л. 11,34.  
Гарнитура «Таймс». Бумага для цифровой печати.  
Тираж 500 экз. Заказ № 23-53.

АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»,  
426053, г. Ижевск, ул. Ворошилова, д. 123.  
<http://shop.rcd.ru> E-mail: [mail@rcd.ru](mailto:mail@rcd.ru) Тел./факс: +7 (3412) 50-02-95

Отпечатано в цифровой типографии  
АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»

