издательство

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

В.Ю. ЕРМАКОВ
А. ТУФАН

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТАХ

Москва • 2023

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

В.Ю. Ермаков, А. Туфан

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТАХ

Учебное пособие

Утверждено
на заседании редсовета
3 ноября 2022 г.

Москва
Издательство МАИ
2023

Ермаков В.Ю., Туфан А.

Исследование динамических процессов в космических аппаратах: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МАИ, 2023. — 104 с.: ил.

Рассмотрены требования к частотным характеристикам автомата стабилизации космического аппарата из условия устойчивости его движения, структурная схема системы управления, область устойчивости и возмущенное движение космического аппарата на активных участках полета с учетом подвижности жидкого топлива в баках. Приведены уравнения движения жидкого топлива в баках и возмущенного движения космического аппарата, учитывающие подвижность топлива. Представлены экспериментальные исследования динамических характеристик элементов конструкции бака, заполненного жидкостью. Данные исследования основываются на работах, проведенных в разные годы в МАИ, на кафедре «Космические системы и ракетостроение» и предприятиях «Роскосмоса».

Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов, обучающихся по направлению «Ракетные комплексы и космонавтика», изучающих дисциплину «Динамика космических аппаратов».

Рецензенты:

кафедра «Транспортные установки» Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (зав. кафедрой канд. техн. наук, доцент *Г.С. Мазлумян*);

доктор техн. наук, доцент *С.В. Аринчев*

ISBN 978-5-4316-1104-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

Освоение космического пространства выдвинуло ряд сложных теоретических задач, в решении которых принимают участие специалисты различных областей науки. Поэтому при разработке космической техники необходимо синтезировать и обобщать результаты теоретических и экспериментальных исследований динамики упругих тел. Предлагается рассмотреть частотные характеристики космического аппарата (КА) как объекта управления, его структурную схему, а также требования, предъявляемые к частотным характеристикам автомата стабилизации из условия устойчивости его движения. Одной из важнейших задач при исследовании динамики тел, имеющих полости, заполненные жидкостью, является выбор и обоснование систем уравнений, описывающих движение таких тел, и определение коэффициентов этих уравнений, а также допущений, принимаемых в уравнениях возмущенного движения космического аппарата с учетом упругости элементов конструкции.

В настоящее время идет поиск новых принципов, схем и материалов, пригодных для обеспечения стабилизации КА. Для сохранения КА до выхода на орбиту и обеспечения его динамической точности при выполнении целевых задач проектируются и изготовляются средства виброзащиты.

Авторы хотели бы отметить важный вклад в становление и развитие данного направления исследований и разработок коллег по работе в МАИ и других организациях, особенно О.М. Алифанова, С.В. Аринчева, М.В. Бирюковой, В.А. Бужинского, В.В. Герасимчука, Э.Л. Калязина, О.П. Клишева, А.В. Ненарокомова, Г.С. Мазлумяна, А.Н. Сову, Д.А. Стрекалова, С.О. Фирсюка, Г.А. Чурилова.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АС	—	автомат стабилизации
АФЧХ	—	амплитудно-фазовая частотная характеристика
АЧХ	—	амплитудно-частотная характеристика
ДУ	—	датчик угла
ЖРД	—	жидкостный ракетный двигатель
ИСК	—	инерциальная система координат
КА	—	космический аппарат
ОНА	—	остронаправленная антенна
РКТ	—	ракетно-космическая техника
СБ	—	солнечная батарея
СК	—	система координат
СОИС	—	система ориентации и стабилизации
ССК	—	связанная система координат
СУ	—	система управления
ФЧХ	—	фазовая частотная характеристика
ЦСК	—	цилиндрическая система координат

1. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА КАК ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

1.1. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Структурная схема системы управления (СУ) представлена на рис. 1. Знак интеграла обозначает звено, модель которого является оператором интегрирования. С помощью кружка с секторами обозначается сложение сигналов. Если какой-то сектор закрашен черным цветом, входящий в него сигнал вычитается (учитывается в сумме со знаком минус). Кроме сигналов, на этом рисунке показан шум измерения $m(t)$, искажающий показания датчика.

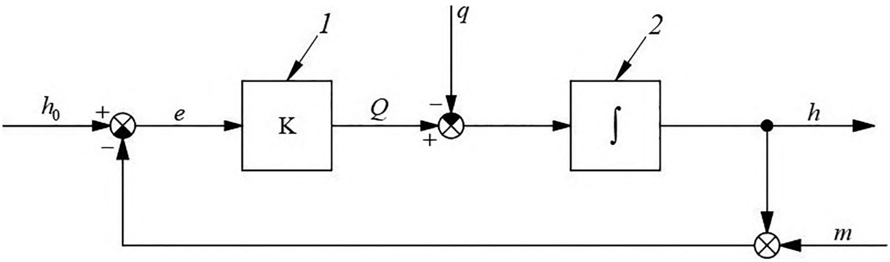

Рис. 1. Структурная схема системы управления космического аппарата: *1* — регулятор; *2* — объект

Проверим работу регулятора при различных значениях коэффициента *K*. Сначала будем считать, что шума измерений нет, т.е. уровень измеряется точно. Предположим, что расход воды на выходе *q* увеличивается скачком (все начали поливать огороды).

Из графика, представленного на рис. 2, можно сделать некоторые выводы:

– при изменении нагрузки (потребления воды, потока *q*) регулятор-усилитель не может поддерживать заданный уровень (график не приходит к значению $\Delta h = 0$);

– чем больше K, тем меньше ошибка регулирования Δh в установившемся режиме; можно ожидать, что при $K \to \infty$ ошибка должна уменьшиться до нуля;
– чем больше K, тем быстрее заканчивается переход на новый режим.

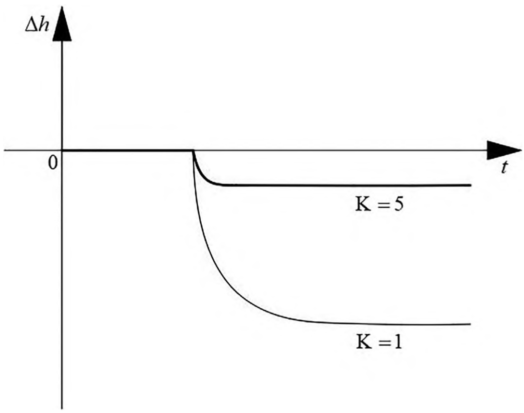

Рис. 2. График изменения уровня шума измерений

При увеличении K повышение точности (уменьшение установившейся ошибки) достигается за счет повышенной активности насоса, который все время дергается. При этом механические части изнашиваются, и существенно уменьшается его срок службы. Поэтому коэффициент K нельзя сильно увеличивать.

Один из главных выводов такого примера: управление обычно связано с компромиссом. Здесь, с одной стороны, нужно увеличивать K, чтобы повысить точность, а с другой — его нужно уменьшать, чтобы уменьшить влияние шума измерения.

При выборе управления мы использовали самый простой путь, остановившись на регуляторе-усилителе (ПИД-регуляторе). У вдумчивого читателя неизбежно должны были возникнуть вопросы следующего характера:

– любым ли объектом можно управлять с помощью регулятора-усилителя?
– как правильно выбрать коэффициент K (на каком значении остановиться)?

– можно ли добиться улучшение управления с помощью более сложного регулятора?
– какой регулятор нужно применить, чтобы улучшить управление?
– как обеспечить нулевую установившуюся ошибку (постоянный уровень при любом расходе q) и можно ли это сделать вообще?
– как подавить шумы измерений, чтобы избежать дергания насоса?

Далее представлены основы теории автоматического управления, которая отвечает на такие вопросы и предлагает надежные методы проектирования регуляторов, решающих задачу управления в соответствии с заданными требованиями.

СУ можно разбить на блоки, имеющие вход и выход (объект, регулятор, привод, измерительная система). Для того чтобы показать взаимосвязи этих блоков, используют структурные схемы [8, 36]. На них каждый элемент изображается в виде прямоугольника, внутри которого записывается его передаточная функция. Вход и выход блока показывают соответственно входящей и выходящей стрелкой.

Существуют две формы записи:

– операторная запись, когда передаточная функция записывается как функция оператора дифференцирования p, входы и выходы блоков — функции времени;
– запись в изображениях, когда передаточная функция записывается как функция комплексной переменной s, а для обозначения входов и выходов используют их изображения по Лапласу.

Однако суть дела от этого не меняется. Поэтому дальше при обозначении сигналов для простоты записи мы будем обозначать сигналы строчными буквами, не указывая независимую переменную (t или s), а в записи передаточных функций будем использовать переменную s, как принято в литературе.

Для суммирующих элементов используют специальное обозначение — круг, разбитый на сектора. Если сектор залит черным цветом, поступающий в него сигнал вычитается, а не складывается с другими. Различные схемы системы управления КА представлены на рис. 3.

На рис. 4 представлена структурная схема системы управления КА по курсу. Здесь вход x — заданный курс, выход y — фактический курс. Сигналы e, u и δ обозначают соответственно ошибку регулирования, сигнал управления и управляющее воздействие привода на объект (угол поворота руля). Сигнал g — это возмущение (влияние ветра и морского волнения), а m — шум измерений.

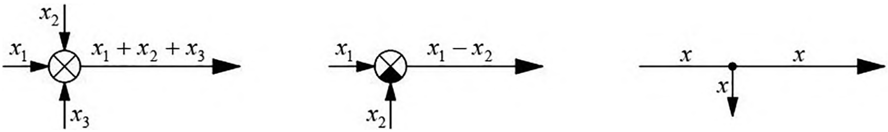

Рис. 3. Различные схемы систем управления космического аппарата

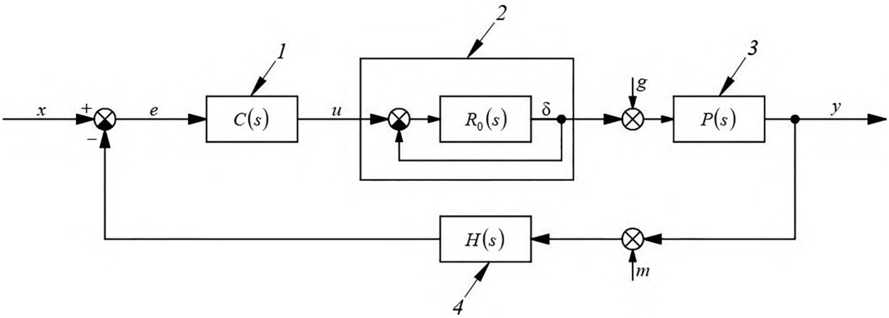

Рис. 4. Структурная схема системы управления космического аппарата по курсу:
1 — регулятор; *2* — привод; *3* — объект; *4* — измерительная система

В такой системе кроме большого контура управления (регулятор — привод — объект) есть еще внутренний контур привода (звено с передаточной функцией $R_0(s)$ охвачено отрицательной обратной связью).

При исследовании устойчивости КА используются математические модели в виде дифференциальных уравнений движения объекта, причем сама модель может иметь сложную структуру, что в сильной степени затрудняет создание эффективных методов исследования устойчивости. Поэтому на практике часто используются частотные методы исследования, которые основаны на анализе частотных характеристик разомкнутых систем, несущих в себе информацию о динамических свойствах КА.

Частотные методы особенно удобны в случаях, когда частотные характеристики КА и бортовых систем можно получить не только расчетным путем, но и экспериментально.

Для применения частотных методов исследования устойчивости необходимо знать амплитудно-фазовые частотные характеристики (АФЧХ) КА и автомата стабилизации (АС) [1, 38]. Частотные характеристики КА могут быть получены из соответствующих передаточных функций путем замены параметра системы p на $i\omega$ или непосредственно из уравнений возмущенного движения КА.

Для построения частотных характеристик КА по тангажу примем в уравнениях движения $\Delta F_y = 0$, $\Delta M_z = 0$, $\Delta\delta_\vartheta = 0$ и, считая, что коэффициенты уравнений движения заморожены, представим неизвестные функции ΔV_{cy}, $\Delta\vartheta$ в виде

$$\Delta V_{cy} = V_y e^{i\omega t};\ \Delta\vartheta = \theta e^{i\omega t}. \tag{1.1}$$

Здесь V_y, θ — частотные передаточные функции; ΔF_y — возмущающая сила на связанной оси OY, Н; ΔM_z — возмущающий момент на связанной оси OZ, Н·м; $\Delta\delta_\vartheta$ — отклонение органа управления КА по тангажу, рад.

Подставляя их в уравнения движения КА по тангажу, получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &(c_{yy} + i\omega m)V_y + (c_{y\vartheta} + i\omega v_y)\theta = c_{y\delta}, \\ &c_{\vartheta y}V_y + (c_{\vartheta\vartheta} + i\mu_z\omega - \omega^2 J_z)\theta = c_{\vartheta\delta}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где c_{yy}, $c_{y\vartheta}$, $c_{\vartheta\vartheta}$, $c_{\vartheta y}$ — коэффициенты, определяемые способом создания управляющих сил и моментов; m — масса КА, кг; J_z — момент инерции КА относительно связанной оси OY, кг·м^2; μ_z — коэффициент демпфирования; $v_y = -R_{\text{а}y}^{\omega_z} - F_{\text{к}y}^{\omega_z}$; $R_{\text{а}y}^{\omega_z}$ — коэффициент, зависящий от геометрической конфигурации КА, скорости полета и скоростного напора; $F_{\text{к}y}^{\omega_z} = -2\int_v V_{\text{к}x}dm$; $V_{\text{к}x}$ — проекция вектора скорости частиц жидкостей и газов КА относительно его корпуса $\vec{\mathbf{V}}_{\text{г}}$ на оси связанной системы координат (СК), м/с; $x_{\text{к}}$ — проекция радиус-вектора движущейся частицы жидкости и газа $\vec{\mathbf{r}}_{\text{к}}$ на оси ССК, м.

Из системы уравнений (1.2) определим, например, частотную передаточную функцию, которую представим в виде суммы:

$$\theta = \theta_1(\omega) + i\theta_2(\omega), \tag{1.3}$$

где θ_1, θ_2 — соответственно действительная и мнимая составляющая частотной передаточной функции: $\theta_1 = \dfrac{c_1\left(c_{yy}c_{\vartheta\delta} - c_{\vartheta y}c_{y\delta}\right) + c_2\omega m c_{\vartheta\delta}}{c_1^2 + c_2^2}$; $\theta_2 = \dfrac{c_1\omega m c_{\vartheta\delta} - c_1\left(c_{yy}c_{\vartheta\delta} - c_{\vartheta y}c_{y\delta}\right)}{c_1^2 + c_2^2}$; $c_1 = c_{yy}\left(c_{\vartheta\delta} - \omega^2 J_z\right) - \omega^2\mu_z m - c_{y\delta}c_{\vartheta y}$; $c_2 = \omega m c_{yy}\left(c_{\vartheta\vartheta} - \omega^2 J_z\right) + \omega\mu_z c_{yy} - v_y\omega c_{\vartheta y}$; $c_{\vartheta\delta}$, $c_{y\delta}$ — коэффициенты, определяемые способом создания управляющих сил и моментов.

Частотная передаточная функция представляется в следующем виде:

$$\theta = k_{\text{КА}}(\omega)e^{i\varphi_{\text{КА}}(\omega)}, \tag{1.4}$$

где $k_{\text{КА}}(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) космического аппарата (коэффициент усиления): $k_{\text{КА}}(\omega) = \sqrt{\theta_1{}^2(\omega) + i\theta_2{}^2(\omega)}$; $\varphi_{\text{КА}}(\omega)$ — фазовая частотная характеристика (ФЧХ) космического аппарата (фазовый сдвиг): $\varphi_{\text{КА}}(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\theta_2(\omega)}{\theta_1(\omega)}\right)$.

Функция $\Delta\vartheta$, являющаяся выходной величиной для космического аппарата как линейного звена системы автоматического управления, представляется формулой

$$\Delta\vartheta = k_{\text{КА}}(\omega)e^{i[\omega t + \varphi_{\text{КА}}(\omega)]}, \tag{1.5}$$

согласно которой синусоидальные колебания органов управления вызывают синусоидальные колебания выходной величины КА с той же частотой, но с измененными амплитудой и фазой. Эти изменения характеризуются коэффициентом усиления и фазовым сдвигом.

Если КА управляется поворотом основных двигателей или поворотом управляющих двигателей, то его АЧХ определяется формулой

$$k_{\text{КА}}(\omega) = \frac{|c_{\vartheta\delta}|}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\sqrt{\left(1 + \frac{x_f}{L_{\text{у}}}\right)c_{yy}^2 + \omega^2 m}, \tag{1.6}$$

где x_f — фокус КА, м; L_y — плечо управляющей силы относительно центра масс КА, м.

Частотные передаточные функции КА при движении по рысканию и крену определяются так же, как и по тангажу, и здесь не приводятся.

1.2. ТРЕБОВАНИЯ К ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ АВТОМАТА СТАБИЛИЗАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ИЗ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЕГО ДВИЖЕНИЯ

Требования к частотным характеристикам автомата стабилизации КА будем определять с помощью критерия устойчивости Найквиста. Для применения последнего необходимо иметь АФЧХ разомкнутой системы «КА–АС» и полный набор корней знаменателя передаточной функции.

Если $\theta_{\text{КАД}}(\omega)$, $\theta_{\text{КАМ}}(\omega)$ — соответственно действительная и мнимая составляющая АФЧХ КА, а $\theta_{\text{АСД}}(\omega)$, $\theta_{\text{АСМ}}(\omega)$ — соответственно действительная и мнимая составляющая АФЧХ АС, то действительная и мнимая части АФЧХ разомкнутой системы определяются равенствами:

$$\theta_{\text{Д}}(\omega) = \theta_{\text{КАД}}(\omega)\theta_{\text{АСД}}(\omega) - \theta_{\text{КАМ}}(\omega)\theta_{\text{АСМ}}(\omega), \qquad (1.7)$$

$$\theta_{\text{М}}(\omega) = \theta_{\text{КАД}}(\omega)\theta_{\text{АСМ}}(\omega) + \theta_{\text{КАМ}}(\omega)\theta_{\text{АСД}}(\omega). \qquad (1.8)$$

С помощью равенств (1.7) и (1.8) строится годограф АФЧХ разомкнутой системы, по виду которого в соответствии с критерием Найквиста можно судить об устойчивости замкнутой системы «КА–АС».

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_0(p) = W_{\text{КА}}(p)W_{\text{АС}}(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, \qquad (1.9)$$

где $P(p)$, $Q(p)$ — характеристические полиномы разомкнутой системы.

Пусть знаменатель передаточной функции разомкнутой системы содержит l корней в правой полуплоскости комплексной плоскости корней p. Согласно критерию Найквиста, если при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ конец вектора годографа частотной передаточной функции разомкнутой системы в своем вращении против часовой стрелки охватывает точку с координатами (1,0) столько раз, сколько имеет корней знаменатель передаточной функции разомкнутой системы в правой полуплоскости комплексной плоскости корней p, то замкнутая система «КА–АС» устойчива.

Для формулирования требований к частотным характеристикам АС будем учитывать для простоты только угловое движение КА по тангажу. Соответствующая передаточная функция имеет вид

$$W_{\text{КА}}(p) = \frac{c_{\vartheta\delta}}{J_z p^2 + \mu_z p + c_{\vartheta\vartheta}}. \tag{1.10}$$

Действительную и мнимую части АФЧХ КА представим в виде соотношений:

$$\theta_{\text{КАД}}(\omega) = \frac{-c_{\vartheta\delta}\left(J_z\omega^2 - c_{\vartheta\vartheta}\right)}{\left(J_z\omega^2 - c_{\vartheta\vartheta}\right)^2 + \mu_z^2\omega^2}, \tag{1.11}$$

$$\theta_{\text{КАМ}}(\omega) = \frac{-c_{\vartheta\delta}\mu_z\omega}{\left(J_z\omega^2 - c_{\vartheta\vartheta}\right)^2 + \mu_z^2\omega^2}. \tag{1.12}$$

Формулируя требования к частотным характеристикам АС, будем считать, что АС в собственном движении устойчив и, следовательно, знаменатель его передаточной функции не содержит корней в правой полуплоскости комплексной плоскости *p*.

Рассмотрим три возможных случая движения КА:

1. КА статически устойчив, т.е. $x_f < 0$. При этом $c_{\vartheta\vartheta} > 0$ и знаменатель передаточной функции не имеет корней в правой полуплоскости. АФЧХ КА представлена на рис. 5. Согласно критерию Найквиста, для обеспечения устойчивости АФХ разомкнутой системы не должна охватывать точку (1,0). Для этого необходимо, чтобы на частоте ω^*, на которой коэффициент усиления разомкнутой системы равен 1,0, автомат перекоса создавал опережение по фазе. Условие устойчивости замкнутой системы, называемое условием фазового равновесия (фазовой устойчивости) КА, будет иметь вид

$$2k\pi \le \varphi_{\text{КА}} + \varphi_{\text{АС}} \le (2k+1)\pi, \tag{1.13}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$

2. КА статически нейтрален, т.е. $x_f = 0$. АФЧХ КА представлена на рис. 6. Знаменатель передаточной функции также не имеет корней в правой полуплоскости. Как и в случае $x_f < 0$, должно выполняться условие устойчивости замкнутой системы.

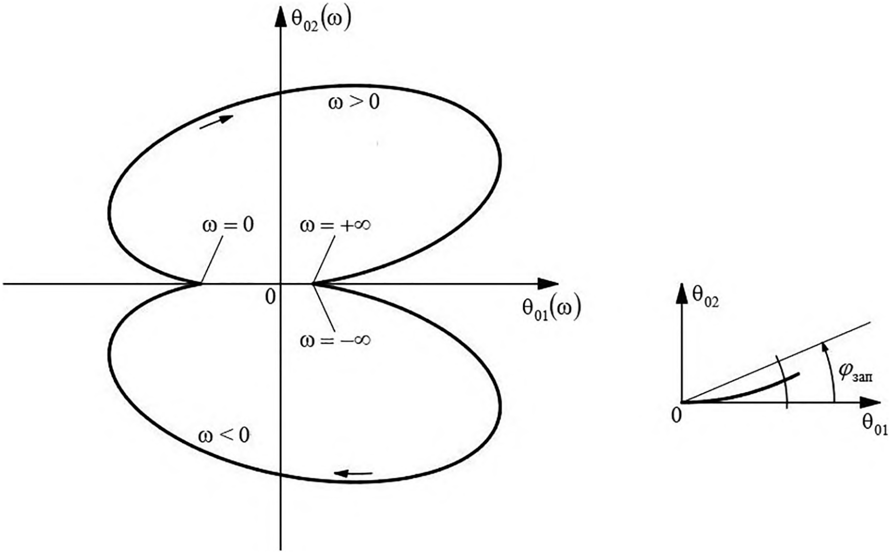

Рис. 5. Амплитудно-фазовая частотная характеристика
космического аппарата при $x_f < 0$

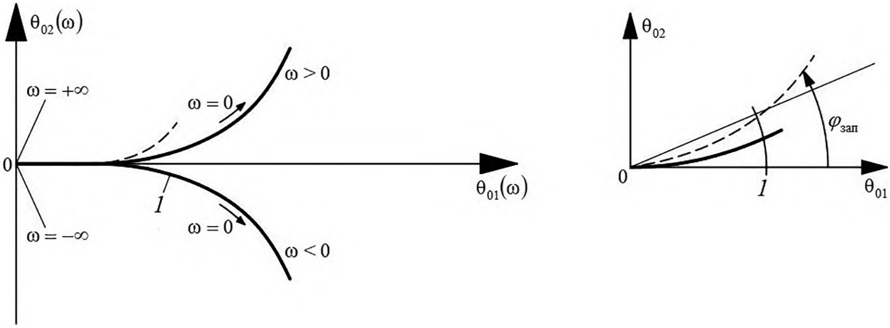

Рис. 6. Амплитудно-фазовая частотная характеристика
космического аппарата при $x_f = 0$

3. КА статически неустойчив, т.е. $x_f > 0$. Знаменатель передаточной функции имеет один корень в правой полуплоскости. АФЧХ КА представлена кривой на рис. 7. Согласно критерию Найквиста, для того чтобы замкнутая система была устойчивой, конец вектора годографа частотной передаточной функции разомкнутой системы при

изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ должен однократно охватить точку (1,0), т.е. нужно, чтобы годограф разомкнутой системы пересекал ось абсцисс при $\omega = 0$ правее точки (1,0). Для этого должно быть выполнено условие:

$$k_{\text{КА}}(0)\, k_{\text{АС}}(0) > 1\,. \tag{1.14}$$

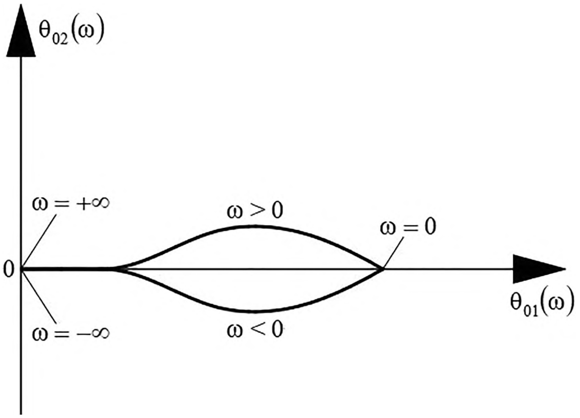

Рис. 7. Амплитудно-фазовая частотная характеристика космического аппарата при $x_f > 0$

Так как коэффициент усиления КА $k_{\text{КА}}(\omega) = \dfrac{|c_{\vartheta\delta}|}{\sqrt{\left(J_z\omega^2 - c_{\vartheta\vartheta}\right)^2 + \mu_z^2\omega^2}}$, то при $\omega = 0$ находим, что $k_{\text{КА}}(0) = \dfrac{c_{\vartheta\delta}}{c_{\vartheta\vartheta}}$. Учитывая это, определим нижнюю границу допустимых значений коэффициента усиления АС в виде неравенства, называемого условием амплитудной стабилизации:

$$k_{\text{АС}}(0) \geq \frac{c_{\vartheta\vartheta}}{c_{\vartheta\delta}}\,. \tag{1.15}$$

Из рис. 7 видно, что для обеспечения устойчивости с некоторым запасом по фазе необходимо, чтобы фаза АС удовлетворяла данному условию.

Таким образом, во всех рассмотренных случаях требуется фазовое опережение АС на частотах, близких к частоте ω^*, а если КА статически неустойчив, то дополнительно к этому коэффициент усиления

АС при $\omega = 0$ должен удовлетворять условию, в соответствии с которым частота ω^*, вблизи которой должно выполняться условие фазового равновесия, определяется равенством:

$$k_{\text{КА}}\left(\omega^*\right) k_{\text{АС}}\left(\omega^*\right) = 1. \tag{1.16}$$

Подставим в (1.16) величину $k_{\text{КА}}\left(\omega^*\right)$, учтем, что коэффициент μ_z мал, и получим приближенное равенство для нахождения частоты ω^*:

$$\omega^* = c_{\vartheta\vartheta} + \left|c_{\vartheta\delta}\right| k_{\text{АС}}\left(\omega^*\right). \tag{1.17}$$

Решение уравнения (1.17) возможно, если известна зависимость коэффициента усиления АС от частоты ω.

1.3. ОБЛАСТЬ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

При проектировании КА исследуется влияние его конструктивных параметров и регулятора на устойчивость замкнутой системы [2, 4]. Для этого строятся области устойчивости в плоскости одного или двух параметров при фиксированных значениях всех других параметров.

Рассмотрим ряд примеров построения областей устойчивости углового движения КА в плоскости тангажа. Пусть уравнения возмущенного движения КА имеют вид:

$$\begin{aligned} &J_z \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + \mu_z \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{y\vartheta}\Delta\vartheta = c_{\vartheta\delta}\Delta\delta_\vartheta, \\ &T_2 \frac{d^2\Delta\delta_\vartheta}{dt^2} + T_1 \frac{d\Delta\delta_\vartheta}{dt} + \Delta\delta_\vartheta = k_1\Delta\vartheta + k_2 \frac{d\Delta\vartheta}{dt}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

где T_2 — коэффициент, учитывающий инерционность регуляторов по каналам тангажа, рыскания и крена; T_1 — коэффициент демпфирования регуляторов по каналу тангажа, рыскания и крена; k_1, k_2 — передаточные коэффициенты по соответствующим каналам стабилизации.

Характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений записывается следующим образом:

$$J_z T_2 \lambda^4 + \left(\mu_z T_2 + J_z T_1\right)\lambda^3 + \left(\mu_z T_1 + J_z\right)\lambda^2 + \left(\mu_z - c_{\vartheta\delta}k_2\right)\lambda - c_{\vartheta\delta}k_1 = 0, \tag{1.19}$$

где λ — корни характеристического уравнения.

При условии малости коэффициента демпфирования μ_z в соответствии с критерием Гурвица условия устойчивости выражаются системой неравенств:

$$k_1 > 0;\ k_2 > \frac{\mu_z}{|c_{\vartheta\delta}|},$$
$$\mu_z J_z T_1 + \left(2\mu_z T_1 T_2 + J_z T_1^2\right) c_{\vartheta\delta} k_1 + \left(\mu_z T_2 - J_z T_1\right) c_{\vartheta\delta} k_2 - c_{\vartheta\delta}^2 k_2^2 T_2 > 0. \tag{1.20}$$

Область устойчивости относительно параметров k_1, k_2 имеет границы, определяемые равенствами:

$$k_1 = 0;\ k_2 = \frac{\mu_z}{|c_{\vartheta\delta}|},$$
$$\mu_z J_z T_1 + \left(2\mu_z T_1 T_2 + J_z T_1^2\right) c_{\vartheta\delta} k_1 + \left(\mu_z T_2 - J_z T_1\right) c_{\vartheta\delta} k_2 - c_{\vartheta\delta}^2 k_2^2 T_2 = 0. \tag{1.21}$$

Первые два равенства (1.21) определяют собой границы области устойчивости в виде прямых, а третье равенство определяет границу в виде параболы. Области устойчивости КА при $\mu_z = 0$ и при различных значениях частоты собственных колебаний контура сервопривода $\omega_a = \sqrt{\dfrac{1}{T_2}}$ представлены на рис. 8.

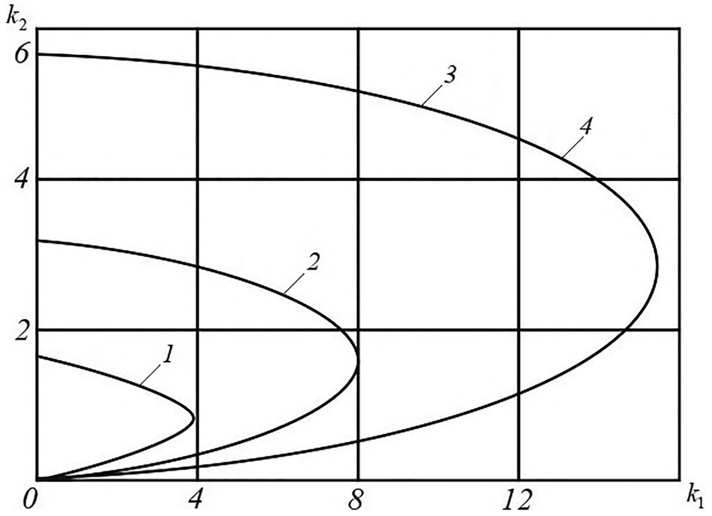

Рис. 8. Область устойчивости космического аппарата в плоскости параметров: *1* — $\omega_a = 10{,}0\ \text{с}^{-1}$; *2* — $\omega_a = 15{,}0\ \text{с}^{-1}$; *3* — $\omega_a = 20{,}0\ \text{с}^{-1}$; *4* — $T_1 = 0{,}1\ \text{с}$

Области устойчивости в плоскости двух параметров можно построить также следующим образом. Из теории устойчивости следует, что все корни характеристического уравнения устойчивой системы находятся слева от мнимой оси комплексной плоскости, на которой корни расположены. Если хотя бы один корень находится на мнимой оси (нулевой корень или пара чисто мнимых корней), то система находится на границе устойчивости. Следовательно, граница устойчивости является отображением мнимой оси комплексной плоскости корней характеристического уравнения λ на плоскость параметров k_1, k_2, относительно которых строится область устойчивости. При переходе через границу устойчивости в плоскости параметров k_1, k_2 имеет место переход корней через мнимую ось плоскости корней характеристического уравнения. Подставим в характеристическое уравнение $\lambda = j\omega$ и потребуем, чтобы значения параметров k_1, k_2 соответствовали границе устойчивости. В результате мы получим тождество, которое должно быть справедливо для любого значения ω. Чтобы это тождество выполнялось, между параметрами k_1, k_2 должна существовать определенная зависимость. Определив ее, мы и получим уравнение границы устойчивости в плоскости параметров k_1, k_2. Этот метод построения областей устойчивости называют методом D-разбиения.

Построим области устойчивости КА, возмущенное движение которого описывается системой уравнений:

$$\begin{gathered} m\frac{d\Delta V_{cy}}{dt} + c_{y\vartheta}\Delta\vartheta = c_{y\delta}\Delta\delta_{\vartheta}, \\ J_z\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} = c_{\vartheta\delta}\Delta\delta_{\vartheta}, \\ T_2\frac{d^2\Delta\delta_{\vartheta}}{dt^2} + T_1\frac{d\Delta\delta_{\vartheta}}{dt} + \Delta\delta_{\vartheta} = k_1\Delta\vartheta + k_2\frac{d\Delta\vartheta}{dt} + k_3\Delta V_{cy}, \end{gathered} \tag{1.22}$$

где k_3 — передаточный коэффициент.

Область устойчивости строится в плоскости передаточных коэффициентов k_1, k_2, остальные параметры КА считаются заданными. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\begin{gathered} mJ_zT_2\lambda^5 + mJ_zT_1\lambda^4 + mJ_z\lambda^3 + \left(-mc_{\vartheta\delta}k_2 - c_{y\delta}k_3\right)\lambda^2 - \\ - mc_{\vartheta\delta}k_1\lambda - c_{\vartheta\delta}c_{y\delta}k_3. \end{gathered} \tag{1.23}$$

Характеристическое уравнение (1.23) представим в ином виде:

$$k_1P(\lambda)+k_2Q(\lambda)+S(\lambda)=0\ , \qquad (1.24)$$

где

$$P(\lambda)=-mc_{\vartheta\delta}\lambda\ ;\ Q(\lambda)=-mc_{\vartheta\delta}\lambda^2\ ;$$

$$S(\lambda)=mJ_zT_2\lambda^5+mJ_zT_1\lambda^4+mJ_z\lambda^3-c_{y\delta}J_zk_3\lambda^2+c_{\vartheta\delta}c_{y\vartheta}k_3\,.$$

После подстановки $\lambda = j\omega$ в характеристическое уравнение получим:

$$\begin{aligned}P(j\omega)&=P_1(\omega)+jP_2(\omega),\\ Q(j\omega)&=Q_1(\omega)+jQ_2(\omega),\\ S(j\omega)&=S_1(\omega)+jS_2(\omega),\end{aligned} \qquad (1.25)$$

где

$$P_1(\omega)=0\ ;\ P_2\omega=-mc_{\vartheta\delta}\omega\ ;\ Q_1(\omega)=mc_{\vartheta\delta}\omega^2\ ;\ Q_2(\omega)=0\ ;$$

$$S_1(\omega)=T_1mJ_z\omega^4+k_3c_{y\delta}J_z\omega^2+k_3c_{\vartheta\delta}c_{y\vartheta}\ ;\ S_2(\omega)=T_2mJ_z\omega^5-mJ_z\omega^3\,.$$

Уравнение равносильно системе двух уравнений относительно параметров k_1, k_2, которые нетрудно получить, если приравнять нулю его действительную и мнимую части:

$$k_1P_1(\omega)+k_2Q_1(\omega)+S_1(\omega)=0;\ k_1P_2\omega+k_2Q_2(\omega)+S_2(\omega)=0\,. \qquad (1.26)$$

Используем формулы Крамера для нахождения k_1, k_2:

$$k_1=\frac{\Delta_1}{\Delta};k_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}\,, \qquad (1.27)$$

где

$$\Delta=m^2c_{\vartheta\delta}^2\omega^3\ ;\ \Delta_1=-\omega^5m^2J_zc_{\vartheta\delta}\left(1-T_2\omega^2\right)^2;$$

$$\Delta_2=\omega\left(-m^2J_zc_{\vartheta\delta}T_1\omega^4-k_3c_{y\delta}J_z\omega^2-k_3mc_{\vartheta\delta}^2c_{y\vartheta}\right).$$

Каждому значению ω будет соответствовать точка на плоскости k_1, k_2. Задавая различные значения ω, получаем на плоскости параметров k_1, k_2 линию, представляющую собой границу, разделяющую корни характеристического уравнения, в котором имеются различные сочетания корней, расположенных в правой и левой полуплоскостях плоскости корней.

Типичная кривая, которая определяет область устойчивости в плоскости параметров k_1, k_2, представлена на рис. 9.

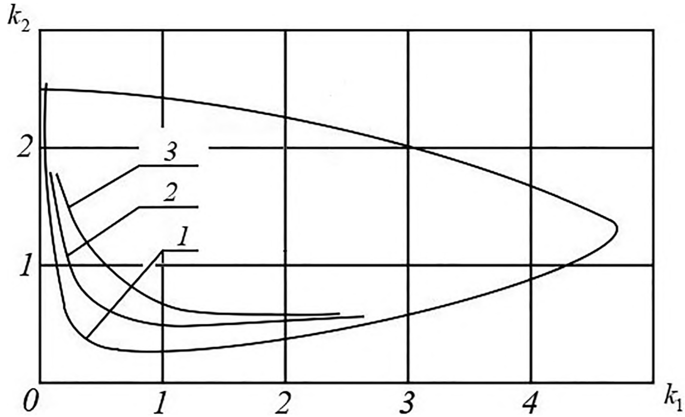

Рис. 9. Область устойчивости космического аппарата в плоскости параметров k_1, k_2, построенная методом D-разбиения:
1 — $k_3 = 1{,}75 \cdot 10^{-3}$; *2* — $k_3 = 17{,}5 \cdot 10^{-3}$; *3* — $k_3 = 175{,}0 \cdot 10^{-3}$

Полученная кривая заштриховывается со стороны области устойчивости по следующему правилу: если при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ главный определитель $\Delta < 0$, то кривая заштриховывается справа; если главный определитель $\Delta > 0$, то кривая заштриховывается слева. Параметры k_1, k_2 четны относительно ω, поэтому на полученную кривую штриховка наносится дважды: первый раз при изменении ω от $-\infty$ до 0 и второй раз при изменении ω от 0 до $+\infty$, так как при переходе через $\omega = 0$ определитель Δ меняет знак [1, 38]. На рис. 9 представлены области устойчивости при различных значениях передаточного коэффициента k_3 по каналу стабилизации центра масс КА в плоскости тангажа. Значение передаточного коэффициента $k_3 = 17{,}5 \cdot 10^{-3}$ примерно соответствует случаю, когда отклонение скорости КА от расчетной величины на 1,0 м/с вызывает поворот камеры сгорания основного двигателя на один градус. Из рисунка видно, что стабилизация центра масс КА путем измерения отклонений его скорости от расчетных значений и формирования управляющих воздействий пропорционально этим отклонениям приводит к некоторому сужению области устойчивости в плоскости параметров k_1, k_2.

В качестве примера ниже представлена система дифференциальных уравнений модели возмущенного движения КА с длинномерной конструкцией:

$$
\begin{gathered}
m\dot{V}_x + a_{xq_1}\ddot{q}_1 \sin\gamma_1 + a_{xq_2}\ddot{q}_2 \sin\gamma_2 + \\
+\sum_{j=1}^{3}\left(a_{xr_1}^{j}\ddot{r}_{1j}\cos\gamma_1 + a_{xr_2}^{j}\ddot{r}_{2j}\cos\gamma_2\right) + \sum_{j=1}^{2} a_{xr_4}^{j}\ddot{r}_{4j} + \sum_{j=1}^{6} a_{xr_5}^{j}\ddot{q}_{5j} = R_x, \\
m\dot{V}_y + a_{yq_3}\ddot{q}_3 + a_{yq_4}\ddot{q}_4 + \sum_{j=1}^{6} a_{yq_5}^{j}\ddot{q}_{5j} = R_y, \qquad (1.28) \\
m\dot{V}_z + \sum_{j=1}^{3}\left(a_{zr_1}^{j}\ddot{r}_{1j}\sin\gamma_1 + a_{zr_2}^{j}\ddot{r}_{2j}\sin\gamma_2\right) + a_{zq_1}\ddot{q}_1\cos\gamma_1 + \\
+a_{zq_2}\ddot{q}_2\cos\gamma_2 + \sum_{j=1}^{6} a_{zq_5}^{j}\ddot{q}_{5j} + \sum_{j=1}^{2} a_{zr_4}^{j}\ddot{r}_{4j} + a_{zr_3}\ddot{r}_3 = R_z,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
I_x\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y - I_{xz}\dot{\omega}_z + \left(I_z - I_y\right)\omega_z\omega_y + I_{yz}\left(\omega_z^2 - \omega_y^2\right) + \\
+I_{xy}\omega_x\omega_z - I_{zx}\omega_x\omega_y + \dot{H}_x + H_z\omega_y - H_y\omega_z + b_{xq_1}\ddot{q}_1\cos\gamma_1 + \\
+b_{xq_2}\ddot{q}_2\cos\gamma_2 + \sum_{j=1}^{3}\left(b_{xr_1}^{j}\ddot{r}_{1j}\sin\gamma_1 + b_{xr_2}^{j}\ddot{r}_{2j}\sin\gamma_2\right) + \\
+b_{xq_4}\ddot{q}_4 + b_{xq_3}\ddot{p}_3 + \sum_{j=1}^{6} b_{xq_5}^{j}\ddot{q}_{5j} = M_x + M_x^{\text{ОНА}},
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
I_y\dot{\omega}_y - I_{xy}\dot{\omega}_x - I_{yz}\dot{\omega}_z + \left(I_x - I_z\right)\omega_x\omega_z + I_{xz}\left(\omega_x^2 - \omega_z^2\right) - \\
-I_{xy}\omega_y\omega_z - I_{zy}\omega_x\omega_y + \dot{H}_y + H_x\omega_z - H_z\omega_x + b_{yq_1}\ddot{q}_1\cos\gamma_1 + \\
+b_{yq_2}\ddot{q}_2\cos\gamma_2 + \sum_{j=1}^{3}\left(b_{yr_1}^{j}\ddot{r}_{1j}\sin\gamma_1 + b_{yr_2}^{j}\ddot{r}_{2j}\sin\gamma_2\right) + \\
+\sum_{j=1}^{2} b_{yr_4}\ddot{r}_{4j} + b_{yr_3}\ddot{r}_3 + \sum_{j=1}^{2}\left(b_{yp_1}^{j}\ddot{p}_{1j} + b_{yp_2}^{j}\ddot{p}_{2j}\right) + \\
+\sum_{j=1}^{6} b_{yq_5}^{j}\ddot{q}_{5j} = M_y + M_y^{\text{ОНА}} + M_{\text{П}_1} + M_{\text{П}_2},
\end{gathered}
$$

$$I_z\dot{\omega}_z - I_{xz}\dot{\omega}_x - I_{zy}\dot{\omega}_y + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y + I_{xy}\left(\omega_y^2 - \omega_x^2\right) +$$
$$+ I_{xz}\omega_y\omega_z - I_{yz}\omega_x\omega_z + \dot{H}_z + H_y\omega_x - H_x\omega_y + b_{zq1}\ddot{q}_1\cos\gamma_1 +$$
$$+ b_{zq2}\ddot{q}_2\cos\gamma_2 + \sum_{j=1}^{3}\left(b_{zr_1}^j\ddot{r}_{1j}\sin\gamma_1 + b_{zr_2}^j\ddot{r}_{2j}\sin\gamma_2\right) + \tag{1.29}$$
$$+ b_{zq4}\ddot{q}_4 + b_{zq3}\ddot{q}_3 + \sum_{j=1}^{6} b_{zq5}^j\ddot{q}_{5j} = M_z + M_z^{\text{ОНА}},$$

$$A\left(\ddot{q}_1 + \varepsilon_{q_1}\dot{q}_1 + \omega_{q_1}^2 q_1\right) + b_{xq_1}\dot{\omega}_x\cos\gamma_1 + b_{zq_1}\dot{\omega}_z\sin\gamma_1 + b_{yq_1}\dot{\omega}_y\cos\gamma_1 +$$
$$+ a_{xq_1}\dot{V}_x\sin\gamma_1 + a_{zq_1}\dot{V}_z\cos\gamma_1 = 0,$$
$$A\left(\ddot{q}_2 + \varepsilon_{q_2}\dot{q}_2 + \omega_{q_2}^2 q_2\right) + b_{xq_2}\dot{\omega}_x\cos\gamma_2 + b_{zq_2}\dot{\omega}_z\sin\gamma_2 + b_{yq_2}\dot{\omega}_y\cos\gamma_2 +$$
$$+ a_{xq_2}\dot{V}_x\sin\gamma_2 + a_{zq_2}\dot{V}_z\cos\gamma_2 = 0,$$

$$A\left(\ddot{r}_{1j} + \varepsilon_{r_{1j}}\dot{r}_{1j} + \omega_{r_{1j}}^2 r_{1j}\right) + b_{xr_1}^j\dot{\omega}_x\sin\gamma_1 + b_{zr_1}^j\dot{\omega}_z\cos\gamma_1 +$$
$$+ b_{yr_1}^j\dot{\omega}_y\sin\gamma_1 + a_{xr_1}^j\dot{V}_x\cos\gamma_1 + a_{zr_1}^j\dot{V}_z\sin\gamma_1 = 0,$$
$$A\left(\ddot{r}_{2j} + \varepsilon_{r_{2j}}\dot{r}_{2j} + \omega_{r_{2j}}^2 r_{2j}\right) + b_{xr_2}^j\dot{\omega}_x\sin\gamma_2 + b_{zr_2}^j\dot{\omega}_z\cos\gamma_2 + \tag{1.30}$$
$$+ b_{yr_2}^j\dot{\omega}_y\sin\gamma_2 + a_{xr_2}^j\dot{V}_x\cos\gamma_2 + a_{zr_2}^j\dot{V}_z\sin\gamma_2 = 0,$$

где $j = 1, 2, 3$.

$$A\left(\ddot{p}_{1j} + \varepsilon_{p_{1j}}\dot{p}_{1j} + \omega_{p_{1j}}^2 p_{1j}\right) + b_{yp_1}^j\dot{\omega}_y = a_{p_{1j}M_{\text{СБ}}}M_{\text{П}_1},$$
$$A\left(\ddot{p}_{1j} + \varepsilon_{p_{1j}}\dot{p}_{1j} + \omega_{p_{1j}}^2 p_{1j}\right) + b_{yp_1}^j\dot{\omega}_y = a_{p_{2j}M_{\text{СБ}}}M_{\text{П}_2}, \tag{1.31}$$

где $j = 1, 2$.

$$A\left(\ddot{q}_3 + \varepsilon_{q_3}\dot{q}_3 + \omega_{q_3}^2 q_3\right) + b_{zq_3}\dot{\omega}_z + a_{zq_3}\dot{V}_y = 0,$$
$$A\left(\ddot{q}_4 + \varepsilon_{q_4}\dot{q}_4 + \omega_{q_4}^2 q_4\right) + b_{xq_4}\dot{\omega}_x + a_{zq_4}\dot{\omega}_z + a_{yq_4}\dot{V}_y = a_{q_4M}M_{\vartheta}, \tag{1.32}$$

$$A\left(\ddot{r}_3 + \varepsilon_{r_3}\dot{r}_3 + \omega_{r_3}^2 r_3\right) + b_{yr_3}\dot{\omega}_y + a_{zr_3}\dot{V}_z = 0, \tag{1.33}$$

$$A\left(\ddot{r}_{4j} + \varepsilon_{r_{4j}}\dot{r}_{4j} + \omega_{r_{4j}}^2 r_{4j}\right) + b_{yr_{4j}}\dot{\omega}_y + a_{zr_{4j}}\dot{V}_z + a_{xr_{4j}}\dot{V}_x = a_{r_{4j}M}M_{\psi}, \tag{1.34}$$

где $j = 1, 2$.

$$A\left(\ddot{p}_3+\varepsilon_{p3}\dot{p}_3+\omega_{p3}^2 p_3\right)+b_{xp3}\dot{\omega}_x=0\,, \tag{1.35}$$

$$A\left(\ddot{q}_{5j}+\varepsilon_{q5j}\dot{q}_{5j}+\omega_{q5j}^2 q_{5j}\right)+b_{xq5}^j\dot{\omega}_x+b_{yq5}^j\dot{\omega}_y+b_{zq5}^j\dot{\omega}_z+a_{xq5}^j\dot{V}_x+ \\ +a_{yq5}^j\dot{V}_y+a_{zq5}^j\dot{V}_z=0, \tag{1.36}$$

где A — обобщенная масса осциллятора, кг. Для всех тонов рассматриваемых осцилляторов $A=1$. Это обусловливается способом нормировки собственных форм колебаний; I_x, I_y, I_z — центральные осевые моменты инерции КА, кг·м^2; I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} — центробежные осевые моменты инерции КА, кг·м^2; V_x, V_y, V_x — проекции линейной скорости центра масс на связанные оси КА, м/с; ω_x, ω_y, ω_z — проекции вектора абсолютной угловой скорости КА на оси связанной СК (ССК), с$^{-1}$; H_x, H_y, H_z — кинетические моменты двигателей-маховиков, кг·м^2/с; R_x, R_y, R_z — проекции внешних и внутренних возмущающих и управляющих сил на связанные оси КА, Н; M_x, M_y, M_z — проекции внешних и внутренних возмущающих и управляющих моментов на связанные оси КА, Н·м; $M_x^{\text{ОНА}}$, $M_y^{\text{ОНА}}$, $M_z^{\text{ОНА}}$ — проекции моментов от приводов остронаправленных антенн (ОНА), Н·м; M_{Π_1}, M_{Π_2} — моменты от приводов поворота панелей СБ, Н·м; $a_{\nu\sigma_i}^j$ — коэффициент присоединенной массы, задающий влияние осциллятора σ_i ($\sigma=p,q,r$; $i=1,2,\ldots$) j-го упругого тона колебаний на вращательное движение объекта относительно оси ν ($\nu=x,y,z$) и наоборот; $b_{\nu\sigma_i}^j$ — коэффициент присоединенного момента, задающий влияние осциллятора σ_i ($\sigma=p,q,r$; $i=1,2,\ldots$) j-го упругого тона колебаний на вращательное движение объекта относительно оси ν ($\nu=x,y,z$) и наоборот; $\varepsilon_{\sigma_{ij}}$ — коэффициент демпфирования осциллятора σ_i ($\sigma=p,q,r$; $i=1,2,\ldots$) j-го упругого тона колебаний; $\varepsilon_{\sigma_{ij}}^2$ — коэффициент жесткости осциллятора σ_i ($\sigma=p,q,r$; $i=1,2,\ldots$), равный значению квадрата круговой частоты колебаний j-го упругого тона; $a_{p_{ij}M_{\text{СБ}}}$ — коэффициент, задающий распределение возмущения от привода по тонам упругих колебаний панелей СБ ($i=1,2$; $j=1,2$); γ_1, γ_2 — углы наклона, рад.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА АКТИВНЫХ УЧАСТКАХ ПОЛЕТА С УЧЕТОМ ПОДВИЖНОСТИ ЖИДКОГО ТОПЛИВА В БАКАХ

2.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОГО ТОПЛИВА В БАКАХ

При построении уравнений движения топлива в баках используются следующие допущения [44]:

- Жидкости в баках несжимаемы. Условие несжимаемости жидкости определяется равенством

$$\frac{\partial v_{jx}}{\partial x}+\frac{\partial v_{jy}}{\partial y}+\frac{\partial v_{jz}}{\partial z}=0 \tag{2.1}$$

или

$$\mathrm{div}\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{j}}=0\ , \tag{2.2}$$

где v_{jx}, v_{jy}, v_{jz} — проекции вектора скорости жидкости $\vec{\mathbf{v}}_j$ в СК $O\alpha\beta\gamma$, начало которой совмещено с началом ССК, а оси параллельны соответствующим осям инерциальной СК (ИСК), м/с.

- Жидкости в баках идеальны. Считается, что вязкость топлива мала и не оказывает существенного влияния на его движение.
- Движение жидкостей в баках безвихревое (потенциальное). Принимается допущение о том, что жидкости, заполняющие баки, баротропны, т.е. их плотность зависит только от давления в жидкости. Принимается также, что массовые силы, действующие на жидкость, имеют потенциал. Если выполняются эти условия и в начальный момент времени движение жидкости в баках, измеренное в ИСК, является безвихревым, то оно будет безвихревым и в последующее время. Жидкости в баке при работе двигателя всегда имеют локальные зоны вихреобразования, но принимается, что эти зоны невелики и влияние вихрей на движение жидкости пренебрежимо мало.

• Колебания свободных поверхностей жидкостей в баках малы по сравнению с характерным размером топливной полости, в качестве которого, в частности, может быть принят радиус свободной поверхности жидкости (если жидкая полость представляет собой тело в виде цилиндра). Принимаются также малыми производные по времени и по пространственным координатам от колебаний свободной поверхности жидкости в баке.

• Невозмущенная свободная поверхность жидкости в баке представляет собой в общем случае некоторую осесимметричную поверхность, имеющую кривизну K. Ось симметрии этой поверхности совпадает с продольной осью симметрии бака. Такое совпадение является следствием того, что поперечная перегрузка КА на активном участке полета пренебрежимо мала по сравнению с продольной перегрузкой. Удвоенная средняя кривизна свободной поверхности определяется формулой

$$K = \pm\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\left(1+\frac{\partial\zeta^2}{\partial z}\right)-2\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\left(1+\frac{\partial\zeta^2}{\partial y}\right)\right]\left(1+\frac{\partial\zeta^2}{\partial y}+\frac{\partial\zeta^2}{\partial z}\right)^{-\frac{3}{2}}, \tag{2.3}$$

где $\zeta(y,z,t)$ — функция, определяющая конфигурацию свободной поверхности жидкости.

При составлении уравнений движения будем вначале учитывать силы поверхностного натяжения жидкости. В зависимости от свойств смачиваемости жидкости угол между нормалями к свободной поверхности жидкости и к стенке бака в точках, принадлежащих контуру смачивания Г (рис. 10), определяется соотношением

$$\cos\theta = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha}, \tag{2.4}$$

где α_1 — коэффициент поверхностного натяжения (потенциальная энергия, приходящаяся на единицу площади поверхности) на границе раздела «твердое тело–газ»; α_2 — коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела «твердое тело–жидкость»; α — коэффициент поверхностного натяжения на свободной поверхности жидкости (граница раздела «жидкость—газ»).

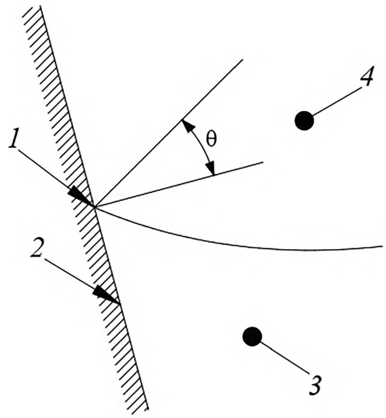

Рис. 10. Стенка бака с обозначение угла смачивания θ:
1 — контур смачивания Γ; *2* — стенка бака; *3* — жидкость; *4* — газ

Считается, что жидкость смачивает стенки бака, если $0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$, и является несмачивающей, если $\dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi$.

При построении уравнений движения жидкости в баке предполагается, что конструкция бака абсолютно жесткая.

Из условия потенциальности движения жидкости $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{j}} = \operatorname{grad} \Phi_j$ и условия несжимаемости жидкости $\operatorname{div} \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{j}} = 0$ следует, что потенциал скорости жидкости Φ_j удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \Phi_j = 0$ в объеме, занятом жидкостью; здесь $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

В дальнейшем движение жидкости будем определять с помощью потенциала перемещений φ_j, который связан с потенциалом скорости жидкости Φ_j соотношением

$$\Phi_j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}. \tag{2.5}$$

Продифференцировав по времени условие потенциальности движения жидкости и отбросив малые второго порядка, получим формулу для определения ускорения частиц жидкости в СК $O\alpha\beta\gamma$

$$w_j = \operatorname{grad} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2} \tag{2.6}$$

и формулы для расчета скоростей v_{aj} и ускорений w_{aj} частиц жидкости в ИСК:

$$v_{aj} = v_0 + \operatorname{grad}\frac{\partial \varphi_j}{\partial t};\ w_{aj} = w_0 + \operatorname{grad}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2}, \tag{2.7}$$

где v_0 — скорость начала ССК, м/с; w_0 — ускорение начала ССК, м/с^2. Они измеряются в ИСК.

Потенциал перемещений частиц жидкости также должен удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\varphi_j = 0$ в объеме V_j.

Граничные условия к уравнению Лапласа определяются на поверхностях S_j, σ_j, ограничивающих объем жидкости V_j.

Граничное условие на поверхности контакта жидкости со стенками и днищем бака определяется исходя из того, что частицы жидкости, находящиеся на стенках и днище бака, не имеют составляющей относительной скорости по нормали к поверхности бака, так как в противном случае в объеме жидкости либо возникнут вихри, что противоречит допущению о потенциальности движения жидкости, либо не выполняется условие непротекания жидкости через стенки бака [17, 32]. Согласно этому, граничное условие на поверхности S_j при $\vec{\omega} = 0$ запишется в следующем виде: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial n} = 0$ на S_j; $p = p_{\Gamma} + \alpha k$, где k — средняя кривизна свободной поверхности. Граничное условие на свободной поверхности жидкости определяется исходя из того, что частица жидкости на ее поверхности всегда остается на ней и движется вместе с поверхностью α_j^*. Для этого должно выполняться равенство $\frac{d\Phi}{dt} = 0$, если $\Phi(x, y, z, t) = 0$ представляет собой уравнение свободной поверхности жидкости. Кроме этого, на свободной поверхности жидкости должно выполняться динамическое соотношение, которое связывает давление жидкости p с давлением наддува p_{Γ} в баке. Следовательно, давление внутри жидкости зависит не только от давления наддува и движения самой жидкости, но и от силы поверхностного натяжения, определяемой коэффициентом поверхностного натяжения и радиусом кривизны свободной поверхности.

Таким образом, краевая задача при $\vec{\omega} = 0$ будет иметь следующий вид:

– $\Delta\varphi = 0$ в объеме V_j;

– $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t \partial n} = 0$ на стенках и днище бака S_j;

– $\dfrac{d\Phi}{dt} = 0$ на свободной поверхности жидкости σ_j;

– $p = p_\Gamma + \alpha k$ на свободной поверхности жидкости σ_j;

– $\cos\alpha = \dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha}$ на контуре Г.

Определим равновесные формы свободной поверхности жидкости. Статическая задача сводится к определению формы свободной поверхности жидкости в состоянии покоя, когда $\vec{\mathbf{v}}_\mathrm{j} \equiv 0$. Уравнение свободной поверхности жидкости в состоянии покоя имеет вид

$$\Phi_0(x, y, z) = 0 , \tag{2.8}$$

а уравнение гидростатики запишется следующим образом:

$$\operatorname{grad} p_0 = \rho\vec{\mathbf{F}} , \tag{2.9}$$

где p_0 — гидростатическое давление в произвольной точке жидкости в баке, Н/м^2; ρ — плотность жидкости в баке, кг/м^3; $\vec{\mathbf{F}}$ — поле массовых сил.

Пусть поле массовых сил имеет потенциал

$$\vec{\mathbf{F}} = \operatorname{grad}(g_x x + g_y y + g_z z) , \tag{2.10}$$

тогда уравнение гидростатики имеет интеграл

$$\rho(g_x x + g_y y + g_z z) - p_0 = c . \tag{2.11}$$

Поле массовых сил рассматриваем как однородное и принимаем, что

$$g_x = -ng ;\ g_y = g_z = 0 , \tag{2.12}$$

где g — ускорение свободного падения, м/с^2; n — перегрузка.

Таким образом, интеграл уравнения гидростатики примет вид

$$-\rho n g x - p_0 = c \ \text{ в объеме } V_j. \tag{2.13}$$

Запишем уравнение (2.14) на свободной поверхности σ_0, заданной уравнением

$$x = \zeta(y, z)\ , \tag{2.14}$$

где x — однозначная функция точки y, z.

На поверхности σ_0

$$\rho n g \zeta + \alpha k_0 = c \tag{2.15}$$

или в безразмерной форме

$$\mathrm{Bo}\,\bar{\zeta} + \bar{k}_0 = c\ , \tag{2.16}$$

где k_0 — удвоенная средняя кривизна свободной поверхности; $\bar{k}_0$ — безразмерная удвоенная средняя кривизна свободной поверхности; Bo — число Бонда: $\mathrm{Bo} = \dfrac{\rho n g l^2}{\alpha}$; $\bar{\zeta}$ — безразмерная координата свободной поверхности: $\bar{\zeta} = \dfrac{\zeta}{l}$; ζ — координата свободной поверхности, м; l — характерный линейный размер жидкой полости, м.

Рассмотрим случаи, когда уравнение (2.16) интегрируется:

1. Жидкость в баке находится в условиях невесомости. В этом случае $\mathrm{Bo} = 0$ и уравнение сводится к виду

$$k_0 = \mathrm{const}\ . \tag{2.17}$$

Таким образом, свободная поверхность невесомой жидкости является поверхностью постоянной средней кривизны. Форма и положение свободной поверхности, линия пересечения поверхностей σ_0 и S_j определяются из условия $V_j = \mathrm{const}$ и условия равенства краевого угла на контуре Г заданному значению. Если бак имеет осевую симметрию, то контур Г является плоской кривой, а свободная поверхность жидкости представляет собой часть сферы.

2. Большие числа Бонда. Уравнение гидростатики записывается в виде

$$\bar{\zeta} + \frac{1}{\mathrm{Bo}}\bar{k}_0 = c\ . \tag{2.18}$$

В пределе, когда $\mathrm{Bo} \to \infty$, получим $\zeta = \mathrm{const}$, т.е. свободная поверхность является плоскостью, перпендикулярной направлению перегрузки. При больших, но конечных числах Бонда свободная поверхность жидкости будет близка к плоскости, кроме зоны, прилегающей к стенкам бака. Порядок безразмерной ширины этой зоны $\frac{1}{\sqrt{\text{Bo}}}$. Расчеты показывают, что решения подобного типа имеют место для чисел $\text{Bo} \geq 100$. Поскольку числа Бонда, реализуемые на КА на активных участках полета, удовлетворяют этому неравенству, нет необходимости учитывать в уравнениях движения жидкостей в баках эффекты, связанные с силами поверхностного натяжения, а также кривизну свободной поверхности жидкости.

В дальнейшем в соответствии с вышерассмотренным будем считать, что невозмущенные свободные поверхности жидкости в баках представляют собой плоскости, нормальные продольной оси КА, на который действуют в общем случае линейное и угловое ускорения.

Основные обозначения параметров бака с жидкостью, имеющего номер j, представлены на рис. 11, где S_j — поверхность днища и стенок бака, контактирующая с жидкостью; σ_j — невозмущенная свободная поверхность жидкости; σ_j^* — возмущенная свободная поверхность жидкости; f_j — функция, определяющая отклонения точек свободной поверхности жидкости σ_j^* от поверхности σ_j и зависящая от времени t и от координат OY, OZ; $\vec{\mathbf{n}}$ — вектор нормали к внутренней поверхности стенок и днища бака. Индекс j изменяется в пределах от 1 до N, где N — количество баков на КА.

Граничное условие на стенках и днище бака примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial n} = \vec{\omega}(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{n}}), \tag{2.19}$$

где $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости КА; $\vec{\mathbf{r}}$ — радиус-вектор частицы жидкости на поверхности S_j.

Граничное условие на свободной поверхности σ_j определится соотношением:

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t \partial n} = \vec{\omega}(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{n}}) + \frac{\partial f_j}{\partial t}. \tag{2.20}$$

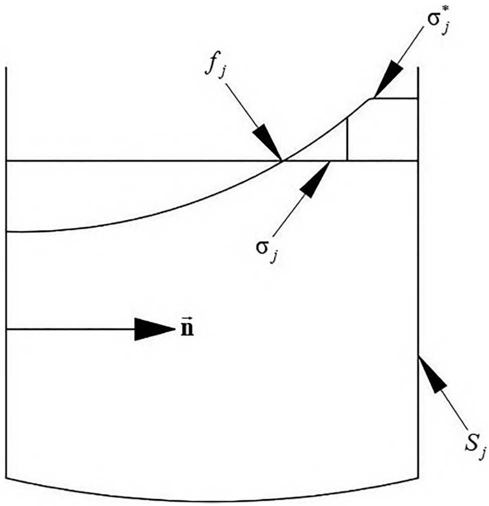

Рис. 11. Основные обозначения параметров бака с жидкостью

Таким образом, потенциал перемещений жидкости φ_j в баке находится путем решения краевой задачи:

– $\Delta\varphi_j = 0$ в объеме V_j;

– $\dfrac{\partial^2\varphi_j}{\partial t \partial n} = \vec{\omega}(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{n}})$ на поверхности S_j;

– $\dfrac{\partial^2\varphi_j}{\partial t \partial n} = \vec{\omega}(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{n}}) + \dfrac{\partial f_j}{\partial t}$ на поверхности σ_j.

В дальнейшем потенциал скоростей частиц жидкости представляется в виде соотношения

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial t} = \vec{\omega}\vec{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{j}} + \frac{\partial\psi_j}{\partial t}, \tag{2.21}$$

где ψ_j — векторный потенциал скоростей жидкости, порождаемых угловыми движениями бака при условии, что свободная поверхность жидкости закрыта жесткой невесомой крышкой.

Векторный потенциал $\vec{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{j}}$ удовлетворяет краевой задаче:

– $\Delta\vec{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{j}} = 0$ в объеме V_j;

– $\dfrac{\partial\vec{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{j}}}{\partial n} = (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{n}})$ на поверхности $S_j + \sigma_j$.

Давление жидкости, находящейся в баке с номером j, найдем по формуле

$$p_j = p_{0j} - \rho_j \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2}, \tag{2.22}$$

где $p_{0j} = -\rho_j \left[(\vec{\mathbf{w}}_0 - \vec{\mathbf{g}})(\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{p} - \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{j}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{\mathbf{\Phi}} \right] + p_\Gamma$; $\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{j}$ — вектор, определяющий расстояние от центра масс КА до геометрического центра свободной поверхности жидкости в баке; ρ_j — плотность жидкости в баке с номером j, кг/м^3; $\vec{\mathbf{w}}_0$ — вектор ускорения начала ССК; $\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{p}$ — радиус-вектор точки, в которой определяется давление.

Составим краевую задачу, решая которую можно найти потенциал перемещений частиц жидкости ψ_j в баке. В краевой задаче для потенциала ψ_j присутствует излишняя функция f_j, для исключения которой воспользуемся условием $p_j = p_\Gamma$ на возмущенной свободной поверхности жидкости σ_j^*. Перенесем это условие на невозмущенную свободную поверхность σ_j и, отбросив малые второго порядка и выше, получим соотношение:

$$p_\Gamma = p_j + \frac{\partial p_j}{\partial x} f_j \text{ на поверхности } \sigma_j. \tag{2.23}$$

В соотношении (2.23) производная $\frac{\partial p_j}{\partial x}$ заменяется производной $\frac{\partial p_{0j}}{\partial x}$, в которой отброшены малые первого порядка:

$$\frac{\partial p_{0j}}{\partial x} = -\rho_j (w_{0x} - g_x), \tag{2.24}$$

где $(w_{0x} - g_x)$ — проекция вектора кажущегося ускорения частиц жидкости $(\vec{\mathbf{w}}_0 - \vec{\mathbf{g}})$ на связанную ось OX, м/с^2.

Подставив в (2.23) давление p_j и производную $\frac{\partial p_{0j}}{\partial x}$, получим соотношение

$$p_\Gamma = p_{0j} - \rho_j \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} - \rho_j (w_{0j} - g_j) f_j, \tag{2.25}$$

где $(w_{0j} - g_j)$ — проекция вектора $(\vec{\mathbf{w}}_0 - \vec{\mathbf{g}})$ частиц жидкости в СК $O\alpha\beta\gamma$, м/с^2.

Используя соотношение (2.25) и зная условие $\frac{\partial\psi_j}{\partial n} = f_j$ на свободной поверхности жидкости σ_j, получаем краевую задачу:

– $\Delta\psi_j = 0$ в объеме V_j;

– $\frac{\partial\psi_j}{\partial n} = 0$ на поверхности S_j;

– $\frac{\partial^2\psi_j}{\partial t^2} + (w_{0j} - g_j)\frac{\partial\psi_j}{\partial n} = \frac{p_{0j} - p_{\Gamma}}{\rho_j}$ на поверхности σ_j.

2.2. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В БАКЕ

Собственные колебания могут определяться путем решения краевой задачи при отсутствии внешних возмущений, действующих на жидкость:

– $\Delta\psi_j = 0$ в объеме V_j;

– $\frac{\partial\psi_j}{\partial n} = 0$ на поверхности S_j;

– $\frac{\partial^2\psi_j}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x)\frac{\partial\psi_j}{\partial n} = 0$ на поверхности σ_j.

Для решения полученной краевой задачи используем метод разделения переменных, согласно которому потенциал ψ_j представляется в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от времени, а другая — только от координат x, y, z:

$$\psi_j(x, y, z, t) = \beta_j(t)\theta_j(x, y, z)\,. \qquad (2.26)$$

Подставив равенство (2.26) в уравнение Лапласа и граничное условие на поверхности S_j, получим, что функция $\theta_j(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в объеме V_j и условию $\frac{\partial\theta_j}{\partial n} = 0$ на поверхности S_j. Подставив это равенство в граничное условие на свободной поверхности σ_j краевой задачи, получим соотношение

$$\frac{\partial\theta_j}{\partial n} = \lambda_j\theta_j \text{ на поверхности } \sigma_j \qquad (2.27)$$

и дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\beta_j}{dt^2} + \lambda_j(w_{0x} - g_x)\beta_j = 0\,, \tag{2.28}$$

с помощью которого определяется функция β_j.

Таким образом, собственные колебания жидкости в баке находятся путем решения краевой задачи:

– $\Delta\theta_j = 0$ в объеме V_j;

– $\dfrac{\partial\theta_j}{\partial n} = 0$ на поверхности S_j;

– $\dfrac{\partial\theta_j}{\partial n} = \lambda_j\theta_j$ на поверхности σ_j.

Краевая задача имеет тривиальные (нулевые) решения при любых λ_j. В этом случае свободная поверхность жидкости в баке не колеблется, оставаясь в процессе движения плоской и нормальной к продольной оси КА. Вместе с тем краевая задача имеет нетривиальные (ненулевые) решения при значениях λ_j, образующих бесконечную последовательность чисел λ_{j1}, λ_{j2}, λ_{j3},..., которые называются собственными значениями или собственными числами. Сами ненулевые решения образуют бесконечную последовательность функций θ_{j1}, θ_{j2}, θ_{j3},..., называемых собственными. Таким образом, решение краевой задачи о собственных колебаниях жидкости в баке сводится к отысканию собственных значений параметра λ_j и соответствующих собственных функций θ_j.

Отметим, что собственные значения краевой задачи λ_j представляют собой действительные положительные числа. Учитывая также положительность осевого кажущегося ускорения $w_{0x} - g_x$, дифференциальному уравнению можно придать вид

$$\frac{d^2\beta_j}{dt^2} + \omega_j^2\beta_j = 0\,, \tag{2.29}$$

где $\omega_j = \sqrt{\lambda_j(w_{0x} - g_x)}$.

Согласно последнему соотношению числа ω_j также образуют бесконечную последовательность чисел ω_{j1}, ω_{j2}, ω_{j3},..., которым соответствуют ненулевые решения краевой задачи. Числа ω_{j1}, ω_{j2}, ω_{j3},...

представляют собой последовательность собственных частот колебаний свободной поверхности жидкости в баке.

На свободной поверхности жидкости σ_j выполняется равенство

$$f_j = \frac{\partial \psi_j}{\partial n} = \frac{\partial \theta_j}{\partial n} \beta_j(t) = F_j(y, z)\beta_j(t) , \qquad (2.30)$$

где F_j — функция, определяющая геометрическую конфигурацию свободной поверхности жидкости в баке при ее колебаниях с собственной частотой ω_j: $F_j = \frac{\partial \theta_j}{\partial n}$.

Собственные функции краевой задачи обладают свойством ортогональности, которое выражается интегральным соотношением

$$\iint_{\sigma_j} \theta_j \theta_j^* dS = 0 , \qquad (2.31)$$

где θ_j, θ_j^* — две собственные функции, соответствующие двум различным собственным значениям λ_j, λ_j^* краевой задачи.

В связи с тем что на свободной поверхности жидкости σ_j выполняется равенство $\theta_j = \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial \theta_j}{\partial n}$, интегральное соотношение (2.31) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{\lambda_j \lambda_j^*} \iint_{\sigma_j} \frac{\partial \theta_j}{\partial n} \frac{\partial \theta_j^*}{\partial n} dS = 0 . \qquad (2.32)$$

Функции F_j, называемые собственными формами колебаний свободной поверхности жидкости, также удовлетворяют условию ортогональности $\iint_{\sigma_j} F_j F_j^* dS = 0$, где F_j, F_j^* — две различные формы колебаний свободной поверхности жидкости.

В общем случае, для баков произвольной геометрической конфигурации решение краевой задачи может быть получено только приближенными методами, к которым относятся вариационные методы Ритца, Трефтца, метод конечных элементов и ряд других. Но для некоторых жидких полостей: в виде прямого кругового цилиндра, прямого параллелепипеда, половины сферы и др. — возможны решения в интегралах [50].

Например, для прямого кругового цилиндрического бака с плоским днищем частоты ω_{jk} и формы F_{jk} собственных колебаний свободной поверхности жидкости определяются соотношениями:

$$\omega_{jk}=\sqrt{\frac{\nu_k}{R_j}\operatorname{th}\left(\frac{\nu_k H_j}{R_j}\right)(w_{0x}-g_x)};\; F_{jk}=J_1\left(\frac{\nu_k r}{R_j}\right), \qquad (2.33)$$

где H_j, R_j — соответственно высота и радиус цилиндрической жидкой полости, м; r — цилиндрическая координата, отсчитываемая от продольной оси жидкой полости, м; J_1 — функция Бесселя первого порядка первого рода; ν_k — последовательность решений трансцендентного уравнения $\dfrac{dJ_1(\nu)}{d\nu}=0$; $k=1,2,...$

Для сферического бака, наполовину заполненного жидкостью, первая собственная частота колебаний свободной поверхности ω_{j1} определяется формулой

$$\omega_{j1}=1,253\sqrt{\frac{w_{0x}-g_x}{R_j}}\;. \qquad (2.34)$$

Для определения форм и частот собственных колебаний свободной поверхности жидкости широко используются экспериментальные методы, с помощью которых решаются две задачи: во-первых, определяются собственные колебания для жидких полостей сложной геометрической конфигурации, которые не поддаются теоретическому анализу, и, во-вторых, оценивается достоверность результатов, которые получены приближенными расчетными методами [50, 56].

Используются два основных экспериментальных способа определения частот и форм собственных колебаний жидкости. Первый способ основан на возбуждении резонансных колебаний свободной поверхности жидкости; фиксируемые резонансные формы и частоты отождествляются с собственными формами и частотами колебаний жидкости. С помощью этого способа можно определить достаточно большое количество собственных тонов колебаний жидкости. Второй способ основан на возбуждении свободных колебаний жидкости путем задания начальных условий или с помощью кратковременных динамических нагрузок, и при этом определяются параметры первого тона колебаний.

2.3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В БАКЕ

Вынужденные колебания жидкости в баке вызываются линейным $\vec{\mathbf{w}}_0 - \vec{\mathbf{g}}$ и угловым $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ ускорениями КА. Краевая задача для определения вынужденных колебаний имеет вид:

– $\Delta\psi_j = 0$ в объеме V_j;

– $\frac{\partial\psi_j}{\partial n} = 0$ на поверхности S_j;

– $\frac{\partial^2\psi_j}{\partial t^2} + (w_{0x} - g_x)\frac{\partial\psi_j}{\partial n} = G_j(x, y, z, t)$ на поверхности σ_j,

где $G_j = -(\vec{\mathbf{w}}_0 - \vec{\mathbf{g}})(\vec{\mathbf{r}}_\mathbf{p} - \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{j}) - \frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{\Phi}_j$.

Для решения краевой задачи используется свойство полноты собственных функций θ_j, согласно которому любая функция, заданная в объеме, может быть представлена в виде сходящегося ряда, причем ряд сходится к точному значению функции θ_j в любой точке объема V_j.

Таким образом, сходящийся ряд имеет вид

$$\psi_j = \sum_{k=1}^{\infty}\beta_{jk}(t)\theta_{jk}(x, y, z), \tag{2.35}$$

где $\beta_{jk}(t)$, $\theta_{jk}(x, y, z)$ — собственные функции краевой задачи о собственных колебаниях жидкости в баке.

Используя свойство полноты форм собственных колебаний свободной поверхности жидкости, представим функцию G_j в виде сходящегося ряда по формам собственных колебаний F_j:

$$G_j = \sum_{l=1}^{\infty}c_j^l(t)F_j^l(x, y, z). \tag{2.36}$$

Обе части равенства (2.36) умножаются на форму собственных колебаний свободной поверхности жидкости F_j^l и интегрируются по поверхности σ_j. Из полученного соотношения с учетом условия ортогональности форм колебаний свободной поверхности жидкости F_j находятся неизвестные коэффициенты $c_j^l(t)$.

Таким образом, функция G_j запишется в следующем виде:

$$G_j = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\iint\limits_{\sigma_j} G_j F_j^k dS}{\iint\limits_{\sigma_j} \left(F_j^k\right)^2 dS} F_j^k . \qquad (2.37)$$

Разложения для функций ψ_j и G_j последовательно подставляются в основное уравнение краевой задачи и граничные условия на стенках и днище бака и на свободной поверхности жидкости. В результате этих подстановок получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, считая для определенности, что она описывает движение жидкости в плоскости тангажа:

$$\mu_{jk}\left(\frac{d^2\beta_{jk}}{dt^2} + \varepsilon_k \frac{d\beta_{jk}}{dt} + \omega_{jk}^2\beta_{jk}\right) + a_{jy}(w_{0y} - g_y) + b_{j\vartheta}\frac{d\omega_z}{dt} = 0 , \quad (2.38)$$

где ε_k — коэффициент демпфирования колеблющейся жидкости; a_{jy}, μ_{jk} — коэффициенты уравнений колебаний жидкости: $a_{jy} = \dfrac{\pi\rho_j R_j^4}{4}$; $\mu_{jk} = \dfrac{\pi\rho_j R_j^4}{4\omega_{jk}^2}(w_{0x} - g_x)$; $(w_{0y} - g_y)$ — проекция вектора $(\vec{\mathbf{w}}_0 - \vec{\mathbf{g}})$ на связанной оси OY, м/с^2; $j = 1,\dots N$; $k = 1,\dots,M$; M — число, определяющее количество тонов собственных колебаний жидкости.

Уравнение колебаний жидкости в плоскости рыскания принципиально имеют тот же вид, что и уравнения в плоскости тангажа, и здесь не приводятся.

Колебания жидкости в баке в плоскости крена возникают в том случае, когда продольная ось бака не совпадает с центром масс КА. Соответствующие уравнения колебаний жидкости будут иметь вид

$$\mu_{jk}\left(\frac{d^2\alpha_{jk}}{dt^2} + \varepsilon_k \frac{d\alpha_{jk}}{dt} + \omega_{jk}\alpha_{jk}\right) + a_{j\gamma}\frac{d\omega_x}{dt} = 0 , \qquad (2.39)$$

где α_{jk} — функции времени, определяющие колебания жидкости в баке при движении КА по крену; $j = 1,\dots,N'$; $k = 1,\dots,M$; N' — количество баков, в которых при движении КА по крену возбуждаются колебания жидкости; $a_{j\gamma} = r_j a_{jy}$; r_j — расстояние в плоскости крена между центром масс КА и центром тяжести свободной поверхности жидкости, м.

2.4. МАЯТНИКОВАЯ АНАЛОГИЯ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В БАКЕ

Определим гидродинамические силы и моменты, которые действуют на бак при колебаниях жидкости. Воздействие жидкости на бак приводится к гидродинамической силе

$$\vec{\mathbf{P}} = \iint\limits_S p\vec{\mathbf{n}}dS \tag{2.40}$$

и гидродинамическому моменту относительно начала ССК

$$\vec{\mathbf{M}} = \iint\limits_S (\vec{\mathbf{r}} \times p\vec{\mathbf{n}})dS\ . \tag{2.41}$$

Поперечная гидродинамическая сила P_y и гидродинамический момент M_z определяются формулами:

$$P_y = \iint\limits_S p\cos(n, y)dS;\ M_z = \iint\limits_S p[x\cos(n, y) - y\cos(n, x)]dS\ . \tag{2.42}$$

Из формул (2.42) следует, что при свободных колебаниях жидкости

$$p = -\rho_j \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} \tag{2.43}$$

или с учетом разложения

$$p = -\rho_j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2\beta_{jk}}{dt^2} \theta_{jk}\ . \tag{2.44}$$

С учетом соотношения (2.44) гидродинамическая сила и момент представляются в следующем виде:

$$P_y = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{d^2\beta_{jk}}{dt^2};\ M_z = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{0k} \frac{d^2\beta_{jk}}{dt^2}, \tag{2.45}$$

где $\lambda_k = \rho_j \iint\limits_S \theta_{jk} \cos(n, y)dS$; $\lambda_{0k} = \rho_j \iint\limits_S \theta_{jk} [x\cos(n, y) - y\cos(n, x)]dS$.

Величина λ_{0k} зависит от выбора характерной точки на оси бака, относительно которой вычисляется момент гидродинамической силы.

Свободные колебания жидкости в баке определяются дифференциальным уравнением, которое по форме аналогично уравнению малых колебаний математического маятника:

$$\frac{d^2\eta_{jk}}{dt^2}+\sigma_{jk}^2\eta_{jk}=0\,, \tag{2.46}$$

где η_{jk} — угловое отклонение маятника от положения равновесия, рад; $\sigma_{jk}^2=\dfrac{w_{0x}-g_x}{l_{jk}}$, l_{jk} — длина подвеса маятника, м.

Параметры математического маятника будем выбирать, исходя из условия, что частоты собственных колебаний жидкости и математического маятника одинаковы, при этом можно определить длину подвеса маятника:

$$l_{jk}=\frac{w_{0x}-g_x}{\omega_{jk}^2}\,. \tag{2.47}$$

Таким образом, дифференциальные уравнения тождественны бесконечной совокупности математических маятников.

Массу маятника m_{jk} выберем так, чтобы кинетическая энергия маятника была равна k-й составляющей кинетической энергии жидкости

$$\frac{1}{2}m_{jk}l_{jk}^2\left(\frac{d\eta_{jk}}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}\mu_k\left(\frac{d\beta_{jk}}{dt}\right)^2 \tag{2.48}$$

и чтобы инерционная сила маятника была равна k-й составляющей гидродинамической силы:

$$m_{jk}l_{jk}\,\frac{d^2\eta_{jk}}{dt^2}=\lambda_k\,\frac{d^2\beta_{jk}}{dt^2}\,. \tag{2.49}$$

Из формул (2.48) и (2.49) следует, что

$$m_{jk}=\frac{\lambda_k^2}{\mu_k}\,, \tag{2.50}$$

где μ_k — обобщенные массы жидкости, кг.

Выберем точку подвески маятника L_{jk} из условия равенства момента инерционной силы маятника k-й составляющей гидродинамического момента:

$$m_{jk} l_{jk} \frac{d^2 \eta_{jk}}{dt^2} L_{jk} = -\lambda_{jk} \frac{d\beta_{jk}}{dt^2}, \tag{2.51}$$

где $L_{jk} = -\frac{\lambda_{0k}}{\lambda_k}$.

Таким образом, жидкость в баке можно заменить бесконечно большим количеством математических маятников, длины, массы и точки подвеса которых выбраны из условий, представленных выше. Если задать маятникам начальные отклонения и скорости, определенные из начальных условий для жидкости, то на бак будут передаваться от маятников силы и моменты, равные поперечным гидродинамическим силам и моментам.

2.5. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, УЧИТЫВАЮЩИЕ ПОДВИЖНОСТЬ ТОПЛИВА В БАКАХ

Уравнения движения выводятся на основе принципа затвердевания, в соответствии с которым уравнения движения космического аппарата как объекта переменного состава в произвольный фиксированный момент времени записываются в форме уравнений движения объекта постоянного состава, к которому в этот момент времени приложены внешние и внутренние возмущающие силы [44].

Добавочная сила, обусловленная колебаниями жидкости в баках, определяется вектором

$$\vec{\mathbf{A}} = \sum_{j=1}^{N} \rho_j \iint_{\sigma_j} \vec{\mathbf{r}} \frac{\partial \psi_j}{\partial n} dS, \tag{2.52}$$

а само уравнение сил имеет вид

$$m(\vec{\mathbf{w}}_0 - \vec{\mathbf{g}}) = \vec{\mathbf{F}} - \frac{d^2 \vec{\mathbf{A}}}{dt^2}, \tag{2.53}$$

где $\vec{\mathbf{F}}$ — главный вектор сил, включающих внешние и внутренние возмущающие силы; m — масса КА, кг: $m = \iiint_V \rho dV + \sum_{j=1}^{N} \rho_j \iiint_{V_j} dV_j$.

Уравнение моментов можно записать в следующем виде:

$$\iiint\limits_V \vec{\mathbf{r}}\times\left(\frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt}\times\vec{\mathbf{r}}\right)\rho dV+\sum_{j=1}^{N}\rho_j\iint\limits_{S_j+\sigma_j}\frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt}\vec{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathbf{j}}\frac{\partial\vec{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathbf{j}}}{\partial n}dS=\vec{\mathbf{M}}-\frac{d^2\vec{\mathbf{B}}}{dt^2}-\vec{\mathbf{A}}\times(\vec{\mathbf{w}}_0-\vec{\mathbf{g}}),\tag{2.54}$$

где $\vec{\mathbf{B}}=\sum\limits_{j=1}^{N}\rho_j\iiint\limits_{V_j}\left(\vec{\mathbf{r}}\times\operatorname{grad}\psi_j\right)dV_j$.

Левая часть уравнения (2.54) представляет собой некоторый вектор $\vec{\mathbf{I}}$, проекции которого на оси ССК определяются формулами:

$$\begin{aligned}
I_x&=J_{xx}\frac{d\omega_x}{dt}+J_{xy}\frac{d\omega_y}{dt}+J_{xz}\frac{d\omega_z}{dt};\\
I_y&=J_{yx}\frac{d\omega_x}{dt}+J_{yy}\frac{d\omega_y}{dt}+J_{yz}\frac{d\omega_z}{dt};\\
I_z&=J_{zx}\frac{d\omega_x}{dt}+J_{zy}\frac{d\omega_y}{dt}+J_{zz}\frac{d\omega_z}{dt},
\end{aligned}\tag{2.55}$$

где $J_{\zeta\varepsilon}(\zeta,\varepsilon=x,y,z)$ — моменты инерции КА в ССК, кг·м^2:

$$J_{xx}=\iiint\limits_V(y^2+z^2)\rho dV+\sum_{j=1}^{N}\rho_j\iint\limits_{S_j+\sigma_j}\Phi_{jx}\frac{\partial\Phi_{jx}}{\partial n}dS;$$

$$J_{yy}=\iiint\limits_V(x^2+z^2)\rho dV+\sum_{j=1}^{N}\rho_j\iint\limits_{S_j+\sigma_j}\Phi_{jy}\frac{\partial\Phi_{jy}}{\partial n}dS;$$

$$J_{zz}=\iiint\limits_V(x^2+y^2)\rho dV+\sum_{j=1}^{N}\rho_j\iint\limits_{S_j+\sigma_j}\Phi_{jz}\frac{\partial\Phi_{jz}}{\partial n}dS;$$

$$J_{xy}=J_{yx}=-\iiint\limits_V xy\rho dV+\sum_{j=1}^{N}\rho_j\iint\limits_{S_j+\sigma_j}\Phi_{jy}\frac{\partial\Phi_{jx}}{\partial n}dS;$$

$$J_{yz}=J_{zy}=-\iiint\limits_V yz\rho dV+\sum_{j=1}^{N}\rho_j\iint\limits_{S_j+\sigma_j}\Phi_{jz}\frac{\partial\Phi_{jy}}{\partial n}dS;$$

$$J_{zx}=J_{xz}=-\iiint\limits_V zx\rho dV+\sum_{j=1}^{N}\rho_j\iint\limits_{S_j+\sigma_j}\Phi_{jx}\frac{\partial\Phi_{jz}}{\partial n}dS.$$

Каждая из вышеприведенных описанных формул для расчета моментов инерции КА состоит из двух частей: первая часть определяет момент инерции твердой конструкции, а вторая — момент инерции жидкостей, заполняющих баки, причем свободные поверхности жидкостей закрыты жесткими невесомыми крышками. Для расчета второй части моментов инерции КА необходимо сначала определить потенциалы Φ_{jx} , Φ_{jy} , Φ_{jz} , что требует предварительного решения краевых задач:

– $\Delta\vec{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{j}} = 0$ в объеме V_j;
– $\dfrac{\partial\vec{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{j}}}{\partial n} = (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{n}})$ на поверхности $S_j + \sigma_j$,

где $j = 1, 2, \ldots, N$.

Если оси ССК являются главными осями инерции КА, то уравнение моментов представляется в следующем виде:

$$J_{xx}\frac{d\omega_x}{dt}\vec{\mathbf{i}} + J_{yy}\frac{d\omega_y}{dt}\vec{\mathbf{j}} + J_{zz}\frac{d\omega_z}{dt}\vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{M}} - \frac{d^2\vec{\mathbf{B}}}{dt^2} - \vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{g}}), \quad (2.56)$$

где $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ — единичные векторы, направленные соответственно по осям *OX*, *OY*, *OZ* ССК.

Решение краевых задач выполняется приближенно с помощью известных расчетных и экспериментальных методов, но для некоторых геометрических конфигураций полостей, заполненных жидкостью, например прямого кругового цилиндра, прямого параллелепипеда, половины сферы, возможно получение решений в виде конечных формул. Сошлемся на результаты вычислений моментов инерции полости, заполненной жидкостью, в виде прямого кругового цилиндра. Согласно этим результатам главные моменты инерции КА, в котором полости, заполненные жидкостью, имеют форму прямых круговых цилиндров, рассчитываются по формулам:

$$J_{xx} = \iiint\limits_V \left(y^2 + z^2\right)\rho dV + \sum_{j=1}^{N} m_j \left(y_j^2 + z_j^2\right);$$

$$J_{yy} = \iiint\limits_V \left(z^2 + x^2\right)\rho dV + \sum_{j=1}^{N} m_j \left(z_j^2 + x_j^2 + h_j^2\right); \quad (2.57)$$

$$J_{zz} = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)\rho dV + \sum_{j=1}^{N} m_j \left(x_j^2 + y_j^2 + h_j^2\right),$$

где m_j — масса жидкости в полости, кг; x_j, y_j, z_j — расстояния от центра масс жидкости в полости до центра масс КА по направлениям связанных осей OX, OY, OZ, м; h_j — радиус полости в j-м баке, заполненной жидкостью, м: $h_j^2 = \frac{H^2}{12} - \frac{3R^2}{4} + \frac{16R^3}{H} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th}\left(\frac{\nu_k H}{2R}\right)}{\nu_k^3(\nu_k^2 - 1)}$; H, R — соответственно высота и радиус жидкой полости, м; $k = 1, 2, \ldots$

Уравнения сил и моментов КА с учетом подвижности жидкостей в баках представляют собой интегродифференциальные уравнения, которые сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью разложения потенциала перемещений ψ_j в виде ряда. Подставляя последний в выражения для векторов $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$, получаем

$$\vec{\mathbf{A}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{j}} \beta_{jk}; \quad \vec{\mathbf{B}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} \vec{\mathbf{b}}_{\mathbf{j}} \beta_{jk}, \tag{2.58}$$

где $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{j}} = \rho_j \iint\limits_{\sigma_j} \vec{\mathbf{r}} \frac{\partial \theta_{jk}}{\partial n} dS$; $\vec{\mathbf{b}}_{\mathbf{j}} = \rho_j \iint\limits_{\sigma_j} \vec{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{j}} \frac{\partial \theta_{jk}}{\partial n} dS$.

Учет колебаний топлива в уравнениях движения КА сводится к добавлению в левую часть уравнения сил абсолютно жесткого КА дополнительной силы

$$\vec{\mathbf{P}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{j}} \frac{d^2 \beta_{jk}}{dt^2}, \tag{2.59}$$

а в левую часть уравнения моментов абсолютно жесткого КА — дополнительного момента

$$\vec{\mathbf{M}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} \vec{\mathbf{b}}_{\mathbf{j}} \frac{d^2 \beta_{jk}}{dt^2} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{j}} \beta_{jk} \times (\vec{\mathbf{w}} - \vec{\mathbf{g}}). \tag{2.60}$$

Спроектируем $\vec{\mathbf{P}}$, $\vec{\mathbf{M}}$ на плоскость тангажа, ограничивая количество членов рядов по номерам k числом M:

$$P_y = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} a_{jy} \frac{d^2 \beta_{jk}}{dt^2}; \quad M_z = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} b_{j\vartheta} \frac{d^2 \beta_{jk}}{dt^2} - (w_{0x} - g_x) \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} a_{jy} \beta_{jk}, \tag{2.61}$$

где $a_{jy} = \rho_j \iint\limits_{\sigma_j} y \frac{\partial \theta_{jk}}{\partial n} dS$; $b_{j\vartheta} = \iint\limits_{\sigma_j} \Phi_{jz} \frac{\partial \theta_{jk}}{\partial n} dS$.

Линеаризуем уравнения колебаний жидкости в баках. Считаем, что обобщенное перемещение жидкости β_{jk}, добавочная сила P_{jy} и добавочный момент M_{jz}, действующие на КА при колебаниях топлива в баках, могут быть представлены в следующем виде:

$$\beta'_{jk} = \beta_{jk} + \Delta\beta_{jk};\ P'_y = P_y + \Delta P_y;\ M'_z = M_z + \Delta M_z\ , \tag{2.62}$$

где β'_{jk} , P'_y , M'_z соответствуют действительному (реальному) движению КА; β_{jk}, P_y, M_z соответствуют невозмущенному движению КА; $\Delta\beta_{jk}$, ΔP_y , ΔM_z — соответственно обобщенное перемещение жидкости, добавочная сила и добавочный момент, соответствующие возмущенному движению КА.

Будем считать также, что при переходе от невозмущенного движения к возмущенному коэффициенты a_{jy}, $b_{j\vartheta}$, μ_{jk}, ε_k, ω_{jk} изменяются пренебрежимо мало.

Таким образом, в возмущенном движении обобщенная добавочная сила ΔP_y и обобщенный добавочный момент ΔM_z примут вид:

$$\begin{gathered} \Delta P_y = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} a_{jy} \frac{d^2\Delta\beta_{jk}}{dt^2}; \\ \Delta M_z = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} b_{j\vartheta} \frac{d^2\Delta\beta_{jk}}{dt^2} - (w_{0x} - g_x)\sum_{j-1}^{N}\sum_{k=1}^{M} a_{jy}\Delta\beta_{jk}. \end{gathered} \tag{2.63}$$

Используя матрицу перехода от возмущенной ССК к невозмущенной ССК, которая совпадает с опорной СК, получим уравнения возмущенного движения жидкостей в баках:

$$\begin{gathered} \mu_{jk}\left(\frac{d^2\Delta\beta_{jk}}{dt^2} + \varepsilon_k \frac{d\Delta\beta_{jk}}{dt} + \omega_{jk}^2\Delta\beta_{jk}\right) + a_{jy}\frac{d^2\beta_{jk}}{dt^2} + \\ + b_{j\vartheta}\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} - a_{jy}(w_{0y} - g_y)\Delta\vartheta = 0, \end{gathered} \tag{2.64}$$

где $j = 1, 2, \ldots, N;\ \ k = 1, 2, \ldots, M.$

На движение КА основное влияние оказывают колебания топлива в баке с первой собственной частотой, и в дальнейшем колебания топлива с более высокими частотами учитывать не будем.

В уравнения возмущенного движения абсолютно жесткого КА по тангажу на активном участке полета введем добавки, учитывающие влияние колебаний топлива на движение КА:

$$m\frac{d\Delta V_{\text{с}y}}{dt}+\nu_y\frac{d\Delta\vartheta}{dt}+c_{yy}\Delta V_{\text{с}y}+c_{y\vartheta}\Delta\vartheta+\sum_{j=1}^{N}a_{jy}\frac{d^2\Delta\beta_j}{dt^2}=c_{y\delta}\Delta\delta_\vartheta+\Delta P_y;$$

$$J_z\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2}+\mu_z\frac{d\Delta\vartheta}{dt}+c_{\vartheta y}\Delta V_{\text{с}y}+$$

$$+c_{\vartheta\vartheta}\Delta\vartheta+\sum_{j=1}^{N}b_{j\vartheta}\frac{d^2\Delta\beta_j}{dt^2}-(w_{0x}-g_x)\sum_{j=1}^{N}a_{jy}\Delta\beta_j=c_{\vartheta\delta}\Delta\delta_\vartheta+\Delta M; \quad (2.65)$$

$$\mu_j\left(\frac{d^2\Delta\beta_j}{dt^2}+\varepsilon_j\frac{d\Delta\beta_j}{dt}+\omega_j^2\Delta\beta_j\right)+a_{jy}\frac{d\Delta V_{\text{с}y}}{dt}+$$

$$+b_{j\vartheta}\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2}-a_{jy}(w_{0x}-g_x)\Delta\vartheta=0,$$

где $j=1,2,\ldots,N$.

Уравнение движения КА по крену с учетом подвижности топлива можно получить, используя уравнение движения по крену для абсолютно жесткого КА и добавляя в него дополнительное слагаемое, учитывающее колебания топлива в баках. Это соотношение проектируется на связанную ось *OX*. Полученное уравнение будет содержать кажущиеся ускорения $(w_{0y}-g_y)$, $(w_{0z}-g_z)$, характеризующие движение КА в плоскостях тангажа и рыскания. Так как эти кажущиеся ускорения малы, эффект их влияния будет малым и им можно пренебречь. Уравнение движения КА по крену с учетом подвижности топлива имеет вид

$$J_x\frac{d\omega_x}{dt}+\sum_{j=1}^{N'}a_{j\gamma}\frac{d^2\Delta\alpha_j}{dt^2}=M_x, \quad (2.66)$$

где J_x — момент инерции КА относительно связанной оси *OX*, кг·м^2; $\Delta\alpha_j$ — функция времени, которая определяет колебания свободной поверхности жидкости в баке в возмущенном движении КА по крену.

Линеаризуем уравнение движения КА по крену, а также уравнения колебаний жидкости в движении по крену. Возмущенное движение КА по крену с учетом подвижности жидкости описывается уравнениями:

$$
\begin{aligned}
&J_x \frac{d^2\Delta\gamma}{dt^2} + \mu_x \frac{d\Delta\gamma}{dt} + \sum_{j=1}^{N'} a_{j\gamma} \frac{d^2\Delta\alpha_j}{dt^2} = c_{\gamma\delta}\Delta\delta_\gamma + \Delta M_x;\\
&\mu_j\left(\frac{d^2\Delta\alpha_j}{dt^2} + \varepsilon_j \frac{d\Delta\alpha_j}{dt} + \omega_j^2\Delta\alpha_j\right) + a_{j\gamma}\frac{d^2\Delta\gamma}{dt^2} = 0,
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

где $\Delta\gamma$ — угол крена в возмущенном движении КА, рад; μ_x — коэффициент демпфирования КА по крену; $\Delta\delta_\gamma$ — отклонение органа управления КА по крену, рад; ε_j — коэффициент демпфирования колебаний жидкости в баке; ω_j — первая частота собственных колебаний жидкости в баке с номером j, с$^{-1}$; $c_{\gamma\delta} = -nP_\gamma l_x$; P_γ — управляющая сила, используемая для управления по крену, Н; n — количество двигателей, используемых для управления по крену; l_x — расстояние между связанной осью OX КА и точкой приложения управляющей силы, м; ΔM_x — возмущающий момент по крену, Н·м; $j = 1,\ldots,N'$.

2.6. СТАБИЛИЗАЦИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С УЧЕТОМ ПОДВИЖНОСТИ ТОПЛИВА В БАКАХ

Устойчивость КА с подвижным топливом в баках будем исследовать, используя частотные методы. Для этого вначале определим передаточные функции КА, затем частотные передаточные функции КА и разомкнутой системы «КА–АС». Условия устойчивости можно получить, используя частотный критерий Найквиста. Передаточные функции и частотные характеристики рассчитываются с помощью тех же методов, которые использовались при построении этих характеристик для абсолютно жесткого КА.

При исследовании устойчивости принимаются следующие допущения:

- Учитываются колебания топлива в баке только с первой собственной частотой.
- Первые собственные частоты колебаний топлива в каждом из баков достаточно сильно отличаются друг от друга, так что колебания топлива в одном баке не влияют на колебания в другом. Одночастотная внешняя возмущающая нагрузка может возбудить резонансные колебания топлива только в одном баке. В этих условиях стабилизацию

КА проводят на частотах, близких к резонансным, а нерезонансные колебания топлива не учитывают.

- АС, как это принималось и ранее, в собственном движении устойчив, вследствие чего корни в знаменателе передаточной функции АС располагаются в левой полуплоскости комплексной плоскости корней знаменателя передаточной функции разомкнутой системы «КА–АС».
- На частоте ω, близкой к частоте собственных колебаний жидкости ω_k в баке, имеющем номер k, в уравнениях движения можно пренебречь слагаемыми, которые содержат в качестве множителей коэффициенты c_{yy}, $c_{y\vartheta}$, $c_{\vartheta y}$, $c_{\vartheta\vartheta}$, ν_y, μ_z. В этом случае корни в знаменателе передаточной функции КА также располагаются в левой полуплоскости комплексной плоскости корней знаменателя передаточной функции разомкнутой системы «КА–АС».

Опуская процедуру вывода, получим уравнение годографа частотной передаточной функции разомкнутой системы «КА–АС» в виде уравнения

$$[x+c_k \sin\varphi_{\text{АС}}(\omega_k)]^2+[y-c_k \cos\varphi_{\text{АС}}(\omega_k)]=c_k^2 \text{, при } \omega\approx\omega_k \text{,} \quad (2.68)$$

где $c_k=-\dfrac{k_{\text{АС}}(\omega_k)x_k^*\left(J_z c_{y\delta}+mx_k^* c_{\vartheta\delta}\right)a_{ky}^2}{2\varepsilon_k\omega_k\mu_k mJ_z^2}$; x_k^* — расстояние от центра масс КА до центра свободной поверхности жидкости в баке, имеющем номер k, м; a_{ky} — коэффициенты определенных тонов колебаний в уравнениях движения КА.

Уравнение (2.68) представляет собой уравнение окружности, проходящей через начало координат и имеющей радиус $|c_k|$. Координаты центра окружности x_0 и y_0 определяются равенствами:

$$x_0=-c_k \sin\varphi_{\text{АС}}(\omega_k);\; y_0=c_k \cos\varphi_{\text{АС}}(\omega_k)\,. \quad (2.69)$$

При полученных допущениях знаменатель передаточной функции разомкнутой системы «КА–АС» не имеет корней в правой полуплоскости, поэтому в соответствии с критерием Найквиста для обеспечения устойчивости замкнутой системы «КА–АС» годограф разомкнутой системы не должен охватывать точку с координатами $x=1$ и $y=0$ во всем диапазоне частот ω_k. Центр окружности может располагаться как в левой, так и в правой полуплоскости годографа, представленного на рис. 12.

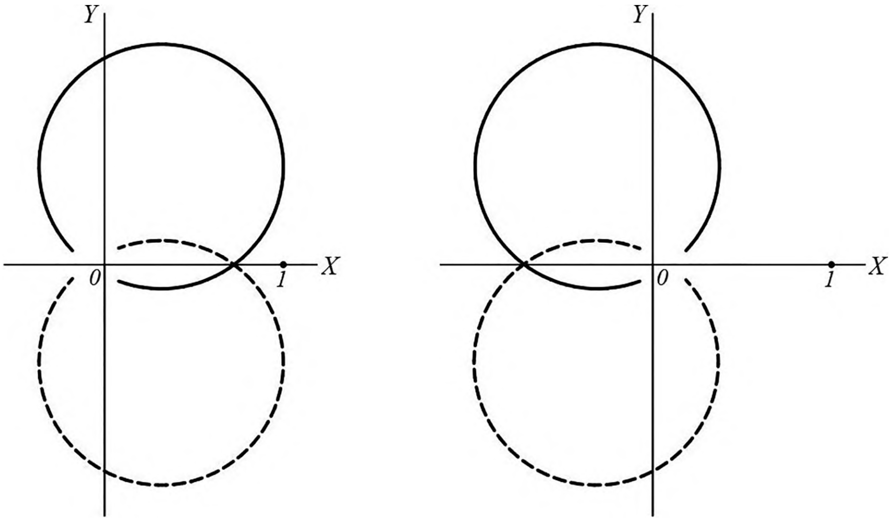

Рис. 12. Годограф разомкнутой системы «космический аппарат–автомат стабилизации» с баками, частично заполненными жидким топливом при частоте, близкой к первому резонансу

Если $x_0 < 0$ или $c_k \sin\varphi_{\text{AC}} > 0$, то независимо от радиуса окружности на частотах, близких к частоте ω_k, годограф разомкнутой системы не может охватить точку (1,0).

Неравенство $x_0 < 0$ является достаточным условием устойчивости замкнутой системы «КА–АС». Из условия $c_k > 0$ следует, что $\sin\varphi_{\text{AC}} > 0$, т.е. в АС создается опережение по фазе на частоте, близкой к частоте ω_k. Если $c_k < 0$, то $\sin\varphi_{\text{AC}} < 0$, т.е. в АС создается запаздывание по фазе вблизи от частоты ω_k. Условие, накладываемое на ФЧХ АС, называют условием фазовой стабилизации; в развернутом виде оно определяется неравенством

$$x_k^* \left(J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\vartheta\delta}\right) \sin\varphi_{\text{AC}}(\omega_k) < 0 . \tag{2.70}$$

Если управляющие сила и момент КА создаются с помощью поворота основных двигателей, то условие фазовой стабилизации примет вид

$$x_k^* \left(1 - \frac{m x_k^* L_n}{J_z}\right) \sin\varphi_{\text{AC}}(\omega_k) < 0 . \tag{2.71}$$

Из неравенства (2.71) следует, что устойчивость замкнутой системы «КА–АС» на частоте собственных колебаний жидкости ω_k в баке с номером k обеспечивается фазовым опережением при $x_k^* < 0$, $x_k^* > \dfrac{J_z}{mL_n}$ или фазовым запаздыванием при $0 < x_k^* < \dfrac{J_z}{mL_n}$.

Параметр x_k^* весьма мало отличается от величины x_k. Таким образом, если частоты баков ω_k, расположенных по разным сторонам от центра масс КА, существенно отличаются друг от друга, как это было принято в допущениях, то устойчивость колебаний жидкости в баке, расположенном ниже центра масс, обеспечивается фазовым опережением на частоте ω_k, а устойчивость колебаний жидкости в баке, расположенном выше центра масс КА, обеспечивается фазовым запаздыванием в АС на частоте ω_k.

Вместе с тем следует отметить, что при движении на активном участке полета возможно сближение частот ω_k вплоть до их совпадения [38]. В этом случае становится невозможной одновременная фазовая стабилизация колебаний топлива в баках, расположенных по разным сторонам относительно центра масс КА. Решить эту задачу можно следующим образом. ФЧХ АС подбирается так, чтобы обеспечивалось фазовое опережение на частотах ω_k, соответствующих бакам, у которых свободная поверхность расположена ниже центра масс КА. Но такая настройка АС будет способствовать возбуждению колебаний жидкостей в баках, расположенных выше центра масс КА. Для того чтобы стабилизировать колебания топлива в этих баках, в них устанавливают демпфирующие устройства, которые обеспечивают необходимое рассеивание энергии колебаний топлива. Компоновочные схемы КА таковы, что во многих случаях двигательный отсек и баки с топливом располагаются ниже центра масс КА, и фазовое опережение в АС решает проблему обеспечения устойчивости колебаний топлива в баках окислителя и горючего в течение всего времени на активном участке полета.

Если $x_0 > 0$ для бака с номером k, то это означает, что центр окружности годографа располагается справа от оси ординат плоскости годографа и возможен охват точки с координатами (1,0), следствием чего будет возникновение неустойчивых колебаний жидкости в этом баке. Для предотвращения неустойчивости должно быть выполнено условие неохвата точки (1,0), которое записывается в виде неравенства

$$2x_0 < 1 \text{, при } \omega \approx \omega_k, \tag{2.72}$$

и представляется в виде

$$\varepsilon_k > \varepsilon_{k\min}, \tag{2.73}$$

где

$$\varepsilon_{k\min} = \frac{k_{\mathrm{AC}}(\omega_k)\sin\phi_{\mathrm{AC}}(\omega_k)x_k^*\left(J_z c_{y\delta} + m x_k^* c_{\vartheta\delta}\right)a_{ky}^2}{\omega_k \mu_k m J_z^2}.$$

Условие (2.73) называется условием амплитудной стабилизации.

Величина $\varepsilon_{k\min}$ представляет собой минимальное значение коэффициента демпфирования ε_k, при котором колебания топлива еще остаются устойчивыми, годограф разомкнутой системы проходит через точку (1,0), а колебания жидкости имеют гармонический характер. Демпфирование в жидкости зависит от амплитуды ее колебаний, причем при увеличении амплитуды колебаний демпфирование также увеличивается. Если $\varepsilon_k < \varepsilon_{k\min}$, то колебания жидкости неустойчивы и амплитуда колебаний будет увеличиваться, коэффициент демпфирования также будет увеличиваться и достигнет значения, при котором неравенство (2.73) выполняется. Дальнейший рост колебаний жидкости прекращается, но и не уменьшается, так как при этом нарушается неравенство. Таким образом, устанавливаются автоколебания жидкости с частотой, близкой к частоте ω_k, и амплитудой, определяемой значением $\varepsilon_{k\min}$. При амплитудной стабилизации свободная поверхность жидкости в баке с номером k совершает гармонические колебания с постоянной амплитудой. Ограничение амплитуды автоколебаний до допустимых пределов возможно путем увеличения ε_k и уменьшения $k_{\mathrm{AC}}(\omega_k)$. Для увеличения коэффициента демпфирования применяют внутрибаковые демпфирующие устройства в виде продольных и поперечных перегородок различной геометрической конфигурации, которые могут быть выполнены перфорированными.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА АКТИВНЫХ УЧАСТКАХ ПОЛЕТА С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ КОРПУСА

В зависимости от конструктивного выполнения КА при выводе уравнений движения принимаются различные допущения, связанные с деформацией корпуса и выносных агрегатов, установленных снаружи корпуса. Такими агрегатами являются, например, панели СБ, радиоантенны, гравитационные системы стабилизации, которые имеют частотные спектры колебаний в пределах от 0,2 до 10,0 $с^{-1}$ [14, 21]. Во многих случаях корпус КА считается абсолютно жестким телом, а выносные агрегаты считаются упругими. Последние представляются в виде систем стержней с грузами, при этом в одних случаях не учитывается распределенная масса стержней, в других не учитываются масса и момент инерции грузов на концах стержней. Один из наиболее общих подходов заключается в том, что КА представляется в виде совокупности некоторого основного упругого тела и присоединенной к нему системы упругих стержней с грузами на концах. Принимается только предположение о малости упругих колебаний стержней и об отсутствии их продольных колебаний.

Согласно такому подходу вначале определяются основные характеристики физической модели: радиус-вектор центра масс системы, тензор инерции системы относительно осей ССК; главный кинетический момент системы относительно центра масс системы; момент сил Кориолиса, кинетическая энергия относительного движения системы; потенциальная энергия упругих сил стержня, сила инерции поступательного движения системы; сила инерции вращательного движения системы и гироскопическая сила. Затем составляются общие уравнения относительного движения системы с учетом деформации стержней с грузами на концах.

3.1. ДОПУЩЕНИЯ В УРАВНЕНИЯХ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА АКТИВНЫХ УЧАСТКАХ ПОЛЕТА С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ

Уравнения возмущенного движения КА с учетом упругости его конструкции в плоскостях тангажа и крена рассматриваются при следующих допущениях [24]:

- корпус КА представляет собой упругую пустотелую балку;
- топливо в баках заморожено;
- упругие колебания корпуса в плоскости тангажа считаются чисто изгибными и рассматриваются независимо от крутильных колебаний корпуса в плоскости крена;
- при деформациях корпуса выполняется гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли);
- концевые сечения корпуса свободны от нагрузок.

3.2. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ПЛОСКОСТИ ТАНГАЖА С УЧЕТОМ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОРПУСА

С учетом того, что изгибные колебания корпуса зависят по большей части от управляющих сил и моментов, действующих на КА, систему уравнений возмущенного движения в плоскости тангажа можно представить в упрощенном виде:

$$\begin{gathered}
m\frac{d\Delta V_{cy}}{dt}+c_{yy}\Delta V_{cy}+c_{y\vartheta}\Delta\vartheta+\sum_{k=1}^{\infty}c_{yk}\Delta g_k=c_{y\delta}\Delta\delta_{\vartheta}+\Delta F_y;\\
J_z\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2}+c_{\vartheta y}\Delta V_{cy}+c_{\vartheta\vartheta}\Delta\vartheta+\sum_{k=1}^{\infty}c_{\vartheta k}\Delta g_k=c_{\vartheta\delta}\Delta\delta_{\vartheta}+\Delta M_z;\\
m_j\left(\frac{d^2\Delta g_j}{dt^2}+\eta\omega_j\frac{d\Delta g_j}{dt}+\omega_j^2\Delta g_j\right)=c_{j\delta}\Delta\delta_{\vartheta},
\end{gathered}\tag{3.1}$$

где $\Delta g_{j,k}$ — функции времени, определяющие изгибные колебания корпуса КА на частоте его собственных изгибных колебаний; ω_j — частота собственных изгибных колебаний корпуса КА, $с^{-1}$; η — логарифмический декремент затухания изгибных колебаний; m_j — приведенная масса корпуса КА, кг: $m_j = \int_a^b \mu V_j^2 dx$; a, b — координаты соответственно начального и концевого сечений корпуса в ССК, м; μ — погонная масса корпуса КА, кг; V_j — форма изгибных колебаний корпуса КА; $c_{yk} = -\int_a^b \frac{dV_k}{dx} c dx - P\left(\frac{dV_k}{dx}\right)_{x_т}$; $c_{\vartheta k} = -\int_a^b \frac{dV_k}{dx} cx dx - P\left(V_k - x\frac{dV_k}{dx}\right)_{x_т}$; $c_{j\delta} = c_{y\delta}(V_j)_{x_у}$; $x_т$, $x_у$ — координаты точек приложения соответственно тяги и управляющей силы в ССК, м; $j = 1, 2, \ldots$

Математическая модель движения КА с учетом упругости конструкции требует предварительного определения собственных частот ω_j, соответствующих форм собственных изгибных колебаний корпуса V_j и декрементов затухания колебаний η.

Частоты и формы собственных изгибных колебаний корпуса можно рассчитать методом конечного элемента, в соответствии с которым сложная конструкция разбивается на конечное число простых элементов. Для каждого из элементов составляются математические модели движения с учетом граничных условий между элементами. Число уравнений достигает большого значения (более 1000). Для решения полученной системы используются метод поиска определителя, метод итерации подпространства и др. Декременты колебаний конструкции определяются главным образом экспериментальными методами [40, 63].

При малых амплитудах колебаний, когда инерционные силы и моменты не превосходят сил трения в шарнирных соединениях, конструкции хорошо описываются в рамках линейной теории упругости. Диссипативные свойства определяются демпфированием в материале, и логарифмические декременты близки к справочным значениям. При увеличении амплитуды колебаний движение нежесткой конструкции может в значительной степени трансформироваться, приобретая нелинейный характер, что обусловлено конструктивными особенностями узлов раскрытия (люфты, зазоры и др.).

3.3. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ КОНСТРУКЦИИ В ПЛОСКОСТИ КРЕНА

В качестве исходных уравнений возьмем уравнения возмущенного движения КА по крену с учетом упругости конструкции. С целью упрощения математической модели не будем учитывать собственную динамику рулевого привода, ограничившись рассмотрением движения КА по крену с учетом крутильных колебаний корпуса относительно продольной связанной оси *OX*. Соответствующие уравнения представляются в следующем виде:

$$\begin{gathered} J_x \frac{d^2\Delta\gamma}{dt^2} + a'_{\gamma\gamma}\frac{d\Delta\gamma}{dt} + a_{\alpha\delta}\Delta\delta_\gamma = \Delta M_x(t); \\ a_j\left(\frac{d^2\Delta\alpha_j}{dt^2} + \beta_\alpha\frac{d\Delta\alpha_j}{dt} + \omega^2_{\alpha j}\Delta\alpha_j\right) + a_{\alpha\delta}\Delta\delta_\gamma = Q_j(t), \end{gathered} \tag{3.2}$$

где $\Delta\alpha_j$ — обобщенная координата, характеризующая крутильные колебания корпуса в возмущенном движении, м; β_α — коэффициент демпфирования крутильных колебаний корпуса КА; $\omega_{\alpha j}$ — частота собственных крутильных колебаний корпуса с номером j, $с^{-1}$; $a'_{\gamma\gamma} = \dfrac{m_x^{\omega_x} qsl^2}{V_с} + 4r_Q^2\sum\limits_{n=1}^{2}\mu_n^*$; $m_x^{\omega_x}$ — коэффициент аэродинамического демпфирующего момента относительно продольной оси корпуса КА; r_Q — расстояние от продольной оси корпуса до оси управляющего двигателя, м; μ_n^* — секундный расход компонента топлива в одном управляющем двигателе, кг/с; $a_{\gamma\delta} = nP_\gamma r_Q$; $a_j = \int\limits_0^l J_x(x)\eta_j^2(x)dx$; $J_x(x)$ — погонный момент инерции корпуса КА, кг·м^2; $\eta_j(x)$ — форма собственных крутильных колебаний корпуса с номером j; $a_{\alpha\delta}$ — коэффициенты крутильных тонов колебания корпуса КА.

3.4. СТАБИЛИЗАЦИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С УПРУГИМ КОРПУСОМ В ПЛОСКОСТИ ТАНГАЖА

Устойчивость возмущенного движения КА с упругим корпусом будем исследовать, используя частотные методы, для чего определим частотные характеристики из имеющихся уравнений возмущенного движения КА в плоскости тангажа. Предварительно отметим, что входной сигнал АС $\Delta\vartheta^*$ представляет собой сумму двух сигналов, первый из которых $\Delta\vartheta$ является углом рассогласования между истинным значением угла тангажа и его программным значением, а второй — углом поворота сечения корпуса вместе с расположенным в нем датчиком угла (ДУ) АС при изгибе корпуса:

$$\Delta\vartheta^* = \Delta\vartheta + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x^0}, \tag{3.3}$$

где x^0 — координата x сечения корпуса, где установлен ДУ АС, м; $v(x,t)$ — прогиб упругой линии корпуса КА, в качестве которой принимается геометрическое место центров тяжести поперечных сечений корпуса, м.

Прогиб упругой линии представляется в виде сходящегося ряда по формам собственных изгибных колебаний корпуса:

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(t) V_k(x), \tag{3.4}$$

где функции g_k' соответствуют реальному движению КА; $k = 1, 2, \ldots$

Учитывая малость этих функций и пренебрегая малыми изменениями собственных форм V_k, которые могут возникать при переходе от невозмущенного движения к возмущенному, получим:

$$\Delta\vartheta^* = \Delta\vartheta + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{dV_k}{dx}\right)_{x^0} \Delta g_k . \tag{3.5}$$

Частотные характеристики КА получим, приняв в уравнениях (3.1): $\Delta F_y = \Delta M_z = 0$; $\Delta\delta_\vartheta = \ell^{i\omega t}$; $\Delta V_{cy} = V_{cy}\ell^{i\omega t}$; $\Delta\vartheta = \vartheta\ell^{i\omega t}$; $\Delta g_k = G_k\ell^{i\omega t}$. Относительно частотных передаточных функций $V_{cy}(i\omega)$, $\vartheta(i\omega)$, $G_k(i\omega)$ получим систему уравнений:

$$\begin{gathered}
(c_{yy} + im\omega)V_{cy} + c_{y\vartheta}\vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk}G_k = c_{y\delta};\\
c_{\vartheta y}V_{cy} + (c_{\vartheta\vartheta} - \omega^2 J_z)\vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{\vartheta k}G_k = c_{\vartheta\delta};\\
m_j(\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\omega_j)G_j = c_{j\delta},
\end{gathered} \tag{3.6}$$

где $j = 1, 2, \ldots$

Частотная передаточная функция входного сигнала АС $\varphi^*(i\omega)$ будет иметь вид

$$\vartheta^* = \vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} G_k \left(\frac{dV_k}{dx} \right)_{x^0} . \tag{3.7}$$

В дальнейшем примем допущение о том, что резонансные изгибные колебания корпуса не влияют друг на друга, а также что $\omega = \omega_j + \delta$, где δ — малая величина. На частотах колебаний ω, близких к частотам ω_j, основную роль в выражении (3.7) будет играть член ряда $G_j \left(\frac{dV_j}{dx} \right)_{x^0}$, а остальными слагаемыми этого ряда можно пренебречь.

Таким образом, при $\omega \approx \omega_j$ частотная передаточная функция примет вид

$$\vartheta^* = G_j \left(\frac{dV_j}{dx} \right)_{x^0} \tag{3.8}$$

или с учетом системы уравнений (3.6)

$$\vartheta^* = \frac{c_{j\delta} \left(\frac{dV_j}{dx} \right)_{x^0}}{m_j(\omega_j^2 - \omega^2 + i\eta\omega\omega_j)} = \vartheta_1^*(\omega) + i\vartheta_2^*(\omega), \tag{3.9}$$

где $\vartheta_1^*(\omega) = \dfrac{c_{j\delta} \left(\frac{dV_j}{dx} \right)_{x^0} (\omega_j^2 - \omega^2)}{m_j \left[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \eta^2\omega^2\omega_j^2 \right]}$; $\vartheta_2^*(\omega) = \dfrac{c_{j\delta} \left(\frac{dV_j}{dx} \right)_{x^0} \eta\omega\omega_j}{m_j \left[(\omega_j^2 - \omega^2) + \eta^2\omega^2\omega_j^2 \right]}$.

Для разомкнутой системы «КА–АС» координаты годографа частотной передаточной функции определяются равенствами:

$$\begin{aligned} x &= k_{\text{КА}}(\omega) k_{\text{АС}}(\omega) \cos(\varphi_{\text{КА}}(\omega) + \varphi_{\text{АС}}(\omega)); \\ y &= k_{\text{КА}}(\omega) k_{\text{АС}}(\omega) \sin(\varphi_{\text{КА}}(\omega) + \varphi_{\text{АС}}(\omega)), \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $k_{\text{КА}}(\omega)$, $k_{\text{АС}}(\omega)$ — АЧХ соответственно КА и АС; $\varphi_{\text{КА}}(\omega)$, $\varphi_{\text{АС}}(\omega)$ — ФЧХ соответственно КА и АС.

В развернутом виде формулы, определяющие годограф передаточной функции разомкнутой системы «КА–АС», имеют вид:

$$x = \frac{c_{j\delta}\left(\frac{dV_j}{dx}\right)_{x^0} k_{AC}\left[(\omega_j^2-\omega^2)\cos\varphi_{AC}+\eta\omega\omega_j\sin\varphi_{AC}\right]}{m_j\left[(\omega_j^2-\omega^2)^2+\eta^2\omega^2\omega_j^2\right]};$$
$$y = -\frac{c_{j\delta}\left(\frac{dV_j}{dx}\right)_{x^0} k_{AC}\left[(\omega_j^2-\omega^2)\sin\varphi_{AC}-\eta\omega\omega_j\cos\varphi_{AC}\right]}{m_j\left[(\omega_j^2-\omega^2)^2+\eta^2\omega^2\omega_j^2\right]}. \quad (3.11)$$

Учтем, что $\omega = \omega - \omega_j$ и логарифмический декремент затухания упругих колебаний η являются малыми величинами первого порядка, и пренебрежем в числителях равенств (3.11) малыми второго порядка, а в знаменателях — малыми третьего порядка по сравнению с величинами δ и η. Исключим также величину δ. Все эти преобразования дают возможность представить формулу годографа частотной передаточной функции разомкнутой системы «КА–АС» в следующем виде:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2, \text{ при } \omega \approx \omega_j, \quad (3.12)$$

где

$$x_0 = \frac{c_{j\delta}\left(\frac{dV_j}{dx}\right)_{x^0} k_{AC}\sin\varphi_{AC}}{2\eta m_j\omega_j^2}; \; y_0 = -\frac{c_{j\delta}\left(\frac{dV_j}{dx}\right)_{x^0} k_{AC}\cos\varphi_{AC}}{2\eta m_j\omega_j^2};$$

$$R = \sqrt{x_0^2+y_0^2}.$$

Годограф разомкнутой системы в области частот, близких к резонансным (при $\omega \approx \omega_j$), представляет собой окружность радиуса R, проходящую через начало координат. Центр окружности имеет координаты x_0, y_0.

При условии

$$x_0 < 0 \quad (3.13)$$

центр окружности годографа располагается в левой полуплоскости, как представлено на рис. 13, и не может охватывать точку с координатами (1,0).

Так как при сделанных ранее допущениях знаменатель передаточной функции разомкнутой системы не может иметь корней в правой полуплоскости, то неравенство (3.13) представляет собой достаточное условие устойчивости КА на частотах, близких к частотам изгибных колебаний корпуса [1, 38].

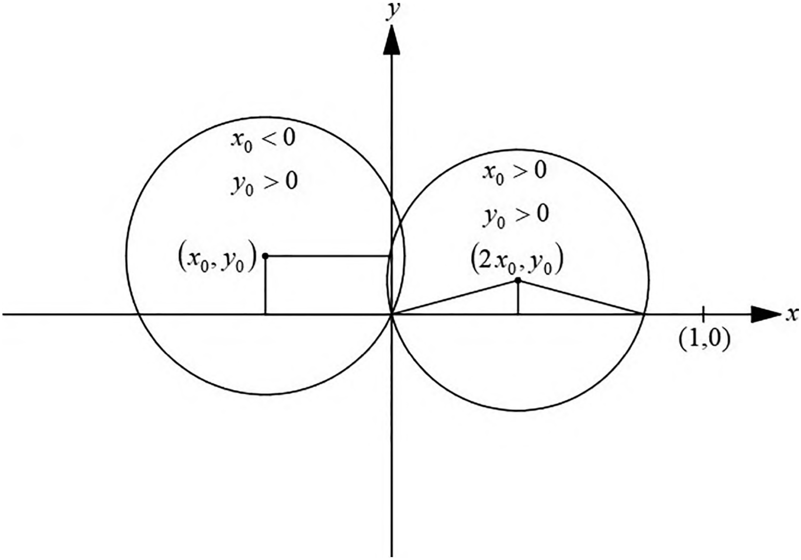

Рис. 13. Годограф частотной передаточной функции разомкнутой системы «космический аппарат с упругим корпусом–автомат стабилизации»

В развернутой форме неравенство (3.13) получает следующий вид:

$$(V_j)_{x_{\text{y}}} \left(\frac{dV_j}{dx} \right)_{x^0} \sin \varphi_{\text{AC}}(\omega_j) < 0\,. \qquad (3.14)$$

Неравенство (3.14) не зависит от коэффициента усиления АС, но зависит от фазы АС, и его называют условием фазовой стабилизации j-го тона изгибных колебаний корпуса КА. Таким образом, если $(V_j)_{x_{\text{y}}} \left(\frac{dV_j}{dx} \right)_{x^0} > 0$, то $\sin \varphi_{\text{AC}} < 0$, а если $(V_j)_{x_{\text{y}}} \left(\frac{dV_j}{dx} \right)_{x^0} < 0$, то $\sin \varphi_{\text{AC}} > 0$.

Вид ФЧХ АС на частоте ω_j зависит от конфигурации формы упругой линии V_j и от места расположения ДУ АС x^0 и места расположения управляющего органа x_{y}.

К примеру, если датчик угла АС расположен в носовой части, а орган управления — в хвостовой части КА, то при стабилизации КА на первой собственной частоте $(V_j)_{x_y}\left(\frac{dV_j}{dx}\right)_{x^0}>0$ и достаточным условием устойчивости упругих изгибных колебаний корпуса КА будет условие $\sin\varphi_{\text{AC}}<0$.

При условии

$$x_0>0 \tag{3.15}$$

центр окружности годографа разомкнутой системы располагается в правой полуплоскости и возникает возможность охвата точки с координатами (1,0), что будет означать потерю устойчивости колебаний КА, как представлено на рис. 13, на частоте $\omega\approx\omega_j$. Условием неохвата точки (1,0) является выполнение неравенства $2x_0<1$, которое в развернутом виде запишется следующим образом:

$$\frac{c_{j\delta}\left(\frac{dV_j}{dx}\right)_{x^0}k_{\text{AC}}\sin\varphi_{\text{AC}}}{\eta m_j\omega_j^2}<1,\ \text{при}\ \omega\approx\omega_j. \tag{3.16}$$

Неравенство (3.16) называется условием амплитудной стабилизации, так как выполнение неравенства обеспечивается подбором значения коэффициента усиления АС на частоте ω_j либо увеличением коэффициента логарифмического декремента затухания упругих колебаний конструкции η. Увеличить логарифмический декремент в принципе возможно путем использования механических демпферов различной конструкции.

3.5. СТАБИЛИЗАЦИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С УПРУГИМ КОРПУСОМ В ПЛОСКОСТИ КРЕНА

Для исследования устойчивости возмущенного движения КА с упругим корпусом по крену будем также использовать частотные методы, для чего, как и в предыдущем случае, определим частотные характеристики КА, исходя из уравнений возмущенного движения в плоскости крена.

Входной сигнал АС $\Delta\gamma^*$ состоит из двух сигналов, первый из которых $\Delta\gamma$ является углом рассогласования между истинным значением угла крена и его программным значением, а второй — углом поворота сечения корпуса вместе с расположенным в сечении датчиком угла крена АС вследствие кручения корпуса:

$$\Delta\gamma^* = \Delta\gamma + \sum_{j=1}^{m_3} \eta_j(x^0)\Delta\alpha_j \,, \tag{3.17}$$

где m_3 — число, определяющее количество форм колебаний, которые учитываются при стабилизации КА в плоскости крена.

Частотные характеристики КА получим, если в уравнениях (3.2) примем, что $\Delta M_x = \Delta Q_j = 0$; $\Delta\delta_\gamma = \ell^{i\omega t}$; $\Delta\gamma = \Gamma\ell^{i\omega t}$; $\Delta\alpha_j = \mathrm{A}_j\ell^{i\omega t}$. Для определения частотных передаточных функций $\Gamma(i\omega)$ и $\mathrm{A}(i\omega)$ получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}(-J_x\omega^2 + i\omega a'_{\gamma\gamma})\Gamma + a_{\gamma\delta} = 0;\\ a_j(-\omega^2 + i\omega\beta_\alpha + \omega_j^2)\mathrm{A}_j + a_{\alpha\delta} = 0,\end{gathered} \tag{3.18}$$

где $j = 1, 2, \ldots$

$$\Gamma^* = \Gamma + \sum_{j=1}^{m_3} \eta_j(x^0)A_j \,. \tag{3.19}$$

Примем допущение о том, что резонансные крутильные колебания корпуса не влияют друг на друга; кроме того, будем считать, что $\omega = \omega_j + \delta$, где δ — малая величина. При крутильных колебаниях ω, близких к частотам ω_j, основную роль в соотношении (3.19) будет играть член ряда $\eta_j(x^0)$, остальными слагаемыми ряда можно пренебречь, и, таким образом, при $\omega \approx \omega_j$ частотная передаточная функция Γ^* примет вид

$$\Gamma^* = \eta_j(x^0)A_j \,, \tag{3.20}$$

где $j = 1, 2, \ldots$, а с учетом систем уравнений (3.18) — вид

$$\Gamma^* = -\frac{a_{\alpha\delta}\eta_j(x^0)}{a_j(-\omega^2 + i\omega\beta_\alpha + \omega_j^2)} = \Gamma_1^*(\omega) + \Gamma_2^*(\omega) \,, \tag{3.21}$$

где

$$\Gamma_1^*(\omega) = -\frac{a_{\alpha\delta}\eta_j(x^0)(\omega_j^2 - \omega^2)}{a_j\left[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \beta_\alpha^2\omega^2\right]};\ \Gamma_2^*(\omega) = \frac{a_{\alpha\delta}\eta_j(x^0)\beta_\alpha\omega}{a_j\left[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \beta_\alpha^2\omega^2\right]};\ j = 1, 2, \ldots$$

В развернутом виде формулы, определяющие годограф частотной передаточной функции разомкнутой системы «КА–АС» в плоскости крена, имеют вид

$$\begin{aligned} x &= -\frac{a_{\alpha\delta}\eta_j(x^0)k_{AC}\left[(\omega_j^2 - \omega^2)\cos\varphi_{AC} + \beta_\alpha\omega\sin\varphi_{AC}\right]}{a_j\left[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \beta_\alpha^2\omega^2\right]}; \\ y &= \frac{a_{\alpha\delta}\eta_j(x^0)k_{AC}\left[-(\omega_j^2 - \omega^2)\sin\varphi_{AC} + \beta_\alpha\omega\cos\varphi_{AC}\right]}{a_j\left[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \beta_\alpha^2\omega^2\right]}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Будем считать, как это было принято ранее, что $\delta = \omega - \omega_j$ и коэффициент демпфирования β_α являются малыми величинами. В числителях последних равенств пренебрегаем малыми величинами второго порядка малости, а в знаменателях пренебрегаем малыми величинами третьего порядка по сравнению с малыми величинами δ и β_α:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-a_{\alpha\delta}\eta_j(x^0)k_{AC}(-2\delta\cos\varphi_{AC} + \beta_\alpha\sin\varphi_{AC})}{a_j\omega_j(4\delta^2 + \beta_\alpha^2)}; \\ y &= \frac{a_{\alpha\delta}\eta_j(x^0)k_{AC}(2\delta\sin\varphi_{AC} + \beta_\alpha\cos\varphi_{AC})}{a_j\omega_j(4\delta^2 + \beta_\alpha^2)}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Исключив параметр δ, получим из соотношений (3.23) уравнение годографа частотной передаточной функции разомкнутой системы «КА–АС»:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \tag{3.24}$$

где

$$x_0 = \frac{-a_{\alpha\delta}\eta_j(x^0)k_{AC}\sin\varphi_{AC}}{2a_j\omega_j\beta_\alpha};\ y_0 = \frac{a_{\alpha\delta}\eta_j(x^0)k_{AC}\cos\varphi_{AC}}{2a_j\omega_j\beta_\alpha};\ R^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

Уравнение годографа (3.24) частотной передаточной функции разомкнутой системы «КА–АС» представляет окружность, проходящую через начало координат. Рассмотрим случай, когда центр окружности располагается в левой полуплоскости годографа:

$$x_0 < 0\ . \tag{3.25}$$

При тех допущениях, которые были сделаны ранее относительно устойчивости движения КА по крену, знаменатель передаточной функции разомкнутой системы «КА–АС» не будет иметь корней в правой полуплоскости, следовательно, условием устойчивости замкнутой системы «КА–АС» будет неохват годографом разомкнутой системы точки с координатами (1,0) во всем диапазоне рабочих частот крутильных колебаний корпуса КА.

Таким образом, условие (3.25) является достаточным условием стабилизации крутильных колебаний корпуса КА. Запишем это условие в развернутом виде:

$$\eta_j(x_p)\eta_j(x^0)\sin\varphi_{AC} < 0\ ,\ \text{при}\ \omega \approx \omega_j\ . \tag{3.26}$$

Если $\eta_j(x_P)\alpha_j(x^0) > 0$, то на ФЧХ АС накладывается условие $\sin\varphi_{AC} < 0$, которое называют фазовым запаздыванием.

Если $\alpha_j(x_p)\alpha_j(x^0) < 0$, то ФЧХ АС удовлетворяет условию $\sin\varphi_{AC} > 0$, которое называют фазовым опережением. Условия фазовой стабилизации зависят от формы упругой линии крутильных колебаний, от места размещения датчика АС по крену и от места установки на корпусе АС исполнительных органов управления по крену. Как видно, при выполнении допущения о том, что резонансные крутильные колебания корпуса не влияют друг на друга, принципиально возможна фазовая стабилизация крутильных колебаний корпуса во всем диапазоне собственных частот ω_j.

Пусть центр годографа разомкнутой системы располагается в правой полуплоскости:

$$x_0 > 0\ . \tag{3.27}$$

В этом случае возникает возможность охвата годографом точки с координатами (1,0), следствием чего будет потеря устойчивости крутильных колебаний корпуса АС. Условием неохвата точки с координатами (1,0) будет выполнение неравенства

$$2x_0 < 1\ , \tag{3.28}$$

которое в развернутом виде запишется следующим образом:

$$\frac{nP^{*}r_{Q}\eta_{j}(x_{p})\eta_{j}(x^{0})k_{\text{АС}}\sin\varphi_{\text{АС}}}{a_{j}\omega_{j}\beta_{\alpha}}<1\text{, при }\omega\approx\omega_{j}. \qquad (3.29)$$

Полученное условие, называемое условием амплитудной стабилизации крутильных колебаний корпуса, может быть реализовано двумя способами: уменьшением коэффициента усиления АС на частоте ω_j; увеличением коэффициента демпфирования крутильных колебаний корпуса, что связано с установкой на КА демпфирующих устройств.

3.6. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Продольные колебания КА возникают вследствие разнообразных случайных воздействий внутреннего и внешнего происхождения: при случайном внешнем воздействии нагрузки на корпус КА, пульсации давления в камере сгорания жидкостного ракетного двигателя (ЖРД), действии донного давления и др. Например, случайные внешние возмущения аэродинамического происхождения могут вызвать продольные колебания упругого корпуса, баков и жидкостей в них. Возникшие колебания давления и расхода жидкостей в баках порождают колебания давления и расхода в топливоподающих магистралях, насосах трубонасосных агрегатов, пульсации давления в камере сгорания ЖРД, колебания тяги двигателя и снова колебания корпуса КА. Начальные колебания замкнутой системы, включающей корпус, топливоподающие магистрали и ЖРД, будут иметь неустойчивый характер и усиливаться во времени, если энергия вибрации, сообщаемая замкнутой системе двигателем, превышает рассеивание энергии вибраций, обусловленное работой сил трения.

Потеря устойчивости может и не привести к разрушению конструкции, но создает недопустимо высокий уровень вибрационных нагрузок на конструкцию, оборудование и на экипаж в пилотируемых полетах.

Динамика процессов в замкнутой системе будет определяться нелинейными факторами, влияние которых с увеличением амплитуды колебаний будет нарастать, поэтому колебания в системе перейдут в почти стационарный одночастотный колебательный процесс, имеющий характер автоколебаний. Источником энергии автоколебаний является двигательная установка. Автоколебания приводят к возникновению больших продольных динамических нагрузок на корпус КА вследствие интенсивной пульсации тяги двигателя, недопустимых по уровню пульсаций давления на входе в насосы горючего или окислителя, а также к интенсивным вибрациям топливоподающих магистралей [46].

В системе, состоящей из корпуса КА с баками, топливных магистралей и ЖРД, можно выделить отдельные замкнутые системы, в которых могут возникнуть автоколебания. Одной из таких замкнутых систем является система, включающая топливоподающую магистраль и центробежный насос. Во всасывающей части насоса возникает кавитация, вызывающая изменения скорости жидкости и давления в магистрали, в результате чего образуются кавитационные каверны.

Автоколебания возможны также в другой замкнутой системе, состоящей из топливной магистрали и ЖРД. Колебания давления в топливной магистрали вызывают пульсации давления в камере сгорания и тяги ЖРД, а следовательно, скорости жидкости и давления в магистрали.

Топливный бак с системой наддува также образует замкнутую колебательную систему, вследствие того что пульсации давления в газовой подушке над жидкостью через регулятор давления передаются на источник рабочего тела для наддува.

В математической модели продольного движения КА должна быть учтена существующая неразрывная связь между упругими продольными колебаниями корпуса КА с баками и продольными колебаниями жидкостей в баках и топливоподающих магистралях, а также связь последних колебаний с колебательными процессами в ЖРД.

Основные допущения, на которых основывается математическая модель продольных колебаний, те же, что и при рассмотрении поперечных колебаний жидкостей в баках и упругого корпуса. Вместе с тем приходится использовать некоторые дополнительные допущения, наиболее существенными из которых являются пренебрежение деформациями свободных поверхностей жидкостей в баках в процессе их продольных колебаний, и учитывать сжимаемость жидкостей при рассмотрении продольных колебаний жидкостей в топливоподающих магистралях. Будем пренебрегать продольными силами, действующими на корпус, гидростатическим давлением жидкости, давлением газа, заполняющего свободный объем над жидкостью, и изменениями гидростатического давления в возмущенном движении. В дальнейшем будем считать, что бак имеет форму кругового цилиндра с днищами в форме пологих сферических оболочек. Пологость нижнего днища принимается такой, чтобы можно было в ряде случаев пренебречь отличием в направлении внутренней нормали к срединной поверхности днища от направления продольной оси бака.

В задачах определения продольных колебаний жидкости в баке начало ССК помещается в центре плоскости нижнего торцевого шпангоута либо в центре свободной поверхности жидкости соответствующего бака.

Комплекс работ с целью обеспечения стабилизации продольного движения КА включает: теоретический анализ проблемы продольной устойчивости, составление и обоснование соответствующих математических моделей колебаний корпуса КА, жидкостей в баках, топливоподающих магистралей и двигателя, расчеты областей устойчивости продольных колебаний КА, экспериментальные исследования и, если это необходимо, доработку конструкции КА с целью решения проблемы продольной устойчивости.

3.7. ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАКОВ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В возмущенном движении корпуса КА и баков будем учитывать только осесимметричные колебания упругой оболочки и жидкости. Будем считать, что колебания топлива вызываются изменением радиуса бака R_k вследствие изменения давления, а не растяжения или сжатия оболочки.

Вначале рассматриваются свободные продольные колебания жидкости в упругом баке. Эти колебания будут вызываться не только продольными колебаниями корпуса КА как абсолютно жесткого объекта, но и колебаниями упругого днища бака в направлении его продольной оси и стенок бака в радиальном направлении [1, 46]. Влияние упругого днища бака и влияние стенок бака на продольные колебания жидкости рассматриваются независимо друг от друга.

Рассмотрим задачу о продольных колебаниях жидкости в баке с упругой цилиндрической оболочкой и жестким днищем. Цилиндрическую оболочку представим в виде набора упругих колец, каждое из которых деформируется только в радиальном направлении. Колебания жидкости определим потенциалом скоростей:

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} D_k I_0\left(\nu_k \frac{r}{R_k}\right)\cos\left(\nu_k \frac{\zeta + H_k}{R_k}\right) i\omega_k e^{i\omega_k t}\ , \qquad (3.30)$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка; H_k — высота жидкости в баке, м; ζ, r — цилиндрические координаты, причем при выводе формулы начало цилиндрической СК (ЦСК) помещено в центре свободной поверхности жидкости, м; D_k — произвольная постоянная; ω_k — частоты собственных продольных колебаний жидкости, с$^{-1}$; $\nu_k = \dfrac{(2k-1)\pi R_k}{2H_k}$, $k = 1, 2,...$

Частоты собственных продольных колебаний жидкости в цилиндрическом баке с жестким днищем и упругими стенками определятся формулой

$$\omega_k^2 = \frac{\Omega^2 \rho_0 h_k \nu_k I_1(\nu_k)}{\rho_0 h_k \nu_k I_1(\nu_k) + \rho_o R_k I_0(\nu_k)}\ , \qquad (3.31)$$

где ρ_0 — плотность материала бака, кг/м^3; h_k — толщина стенки бака, м; I_1 — модифицированная функция Бесселя первого порядка первого рода; Ω — частота собственных радиальных колебаний кольца радиуса R_k и единичной ширины, с$^{-1}$: $\Omega = \dfrac{1}{R_k}\sqrt{\dfrac{E}{\rho_0}}$; E — модуль упругости материала бака, Н/м^2.

Далее приведем результаты решения задачи о продольных колебаниях жидкости в цилиндрическом баке, имеющем жесткие стенки и упругое днище, выполненное в виде пологой сферической оболочки. При решении этой задачи используется ЦСК ζ, r, начало которой помещено в центре свободной поверхности жидкости. Потенциал продольных колебаний жидкости определяется соотношением

$$\Phi_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d\beta_j}{dt} \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} J_0 \left(\frac{\lambda_k r}{R_k} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\lambda_k \zeta}{R_k} \right) + a_j \zeta \right], \tag{3.32}$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка; β_j — функция, определяющая изменение по времени потенциала Φ_2; $b_{jk} = \dfrac{4R\nu_j J_1(\nu_j)}{\lambda_k J_0(\lambda_k)(\nu_j^2 - \lambda_k^2)\operatorname{ch}\left(\dfrac{\lambda_k H_k}{R_k}\right)}$; $a_j = \dfrac{4J_1(\nu_j)}{\nu_j}$; λ_k — безразмерные собственные частоты колебаний жидкости: $\lambda_k = \omega_k \sqrt{\dfrac{\rho_0 R^3}{E_c h_c}}$; E_c — модуль упругости материала сферического днища, Н/м^2; h_c — толщина стенки сферического днища, м.

Частоты собственных продольных колебаний жидкости в цилиндрическом баке с жесткими боковыми стенками и упругим днищем, выполненным в виде пологой сферической оболочки, определяются формулой

$$\omega_k^2 = \frac{Eh}{\rho_0 R^3} \left[\frac{h^2 \gamma_k^4}{12R^2(1-\nu^2)} + \frac{R^2}{r_a^2} \right] \gamma_k \operatorname{cth}\left(\frac{\gamma_k H}{R} \right), \tag{3.33}$$

где ν — коэффициент Пуассона; γ_k — корни уравнения $J_1(\gamma) = 0$; r_a — радиус днища бака, м.

В общем случае, когда стенки цилиндрического бака и днище в виде пологой сферической оболочки — упругие, частоты собственных продольных колебаний жидкости и приведенные массы можно определить по графикам, на которых представлены зависимости безразмерных собственных частот колебаний жидкости $\lambda_k = \omega_k \sqrt{\dfrac{\rho_0 R^3}{E_c h_c}}$ и коэффициентов приведенных масс η_k от относительной глубины заполнения $\chi = \dfrac{H}{R}$ при различных значениях параметра $\eta_k = \dfrac{Eh}{E_c h_c}$.

Приведенные массы жидкости определяются по формуле

$$m_k = m_{k0} \eta_k, \tag{3.34}$$

где m_{k0} — масса жидкости в баке, кг.

Абсолютное движение жидкости в направлении связанной оси x состоит из двух частей: переносного движения вместе с силовым шпангоутом бака и движения жидкости относительно СК, связанной с силовым шпангоутом. Потенциал абсолютной скорости жидкости определится формулой

$$\Phi = \dot{u}_k (x - H) + \Phi_1 + \Phi_2 , \tag{3.35}$$

где $\dot{u}_k$ — скорость переносного движения силового шпангоута бака, м/с.

Колебания давления жидкости на дно бака рассчитывается согласно соотношению

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} , \tag{3.36}$$

в котором производная по времени от потенциала скорости жидкости вычисляется при $x = -h_a$, где h_a — расстояние от силового шпангоута до места забора топлива из бака, м.

3.8. ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО КОРПУСА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С БАКАМИ

При расчете продольных колебаний корпуса КА представляется в виде прямого неоднородного стержня с упругоподвешенными механическими осцилляторами. Жидкость, колеблющуюся в баке в продольном направлении, заменяют системой осцилляторов таким образом, чтобы осевая динамическая сила от колебаний жидкости была равна динамической силе от колебаний системы осцилляторов при любой частоте и амплитуде колебаний корпуса. Значения сосредоточенных масс и жесткостей пружин каждого осциллятора должны быть выбраны так, чтобы частота собственных колебаний осциллятора была равна частоте собственных колебаний жидкости соответствующего тона. Теоретически сумма масс всех осцилляторов должна быть равна массе жидкости в топливном баке. Так как практически колеблющуюся массу жидкости в баке заменяют ограниченным числом осцилляторов, соответствующих колебаниям топлива на низших собственных частотах, то суммарная масса всех осцилляторов будет меньше массы топлива в баке [46, 63]. За точки расположения сосредоточенных масс жидкости, т.е. масс осцилляторов, принимают центры упругих днищ баков, точками подвеса осцилляторов являются силовые шпангоуты баков. Масса топлива, которая не учитывается в системе механических осцилляторов, включается в массу силового шпангоута, к которому крепятся осцилляторы.

Схема динамической модели продольных колебаний корпуса КА представлена на рис. 14.

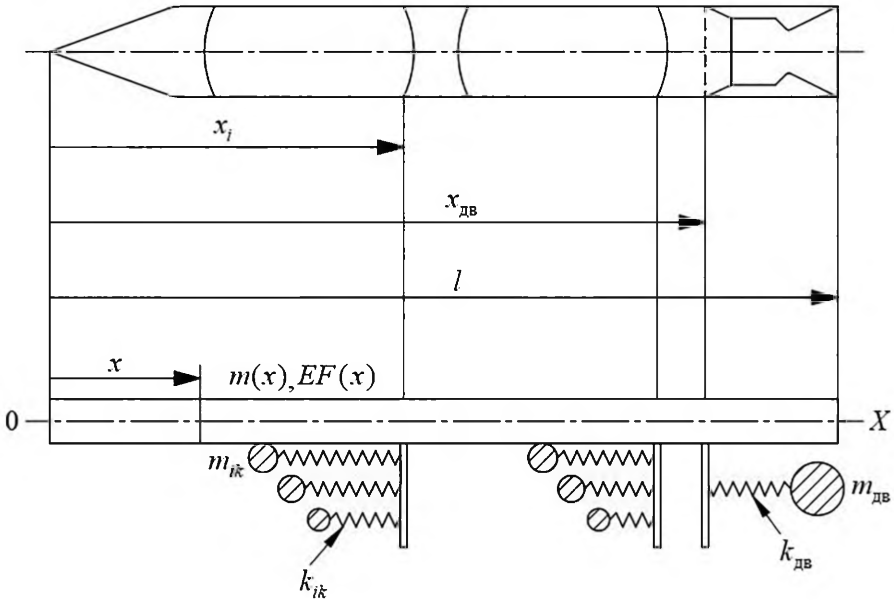

Рис. 14. Динамическая модель продольных колебаний корпуса космического аппарата с баками, заполненными жидким топливом: $m_{дв}$ — масса основного двигателя; $k_{дв}$ — жесткость основного двигателя; k_{ik} — жесткость осциллятора

В соответствии с моделью, представленной на рис. 14, вынужденные продольные колебания корпуса КА описываются уравнением

$$m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[EF(x)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right]=q(x,t)+\sum_{ik} N_{ik}\delta(x,x_i), \quad (3.37)$$

с граничными условиями $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ при $x=a$ и $x=b$, где $q(x,t)$ — нагрузка, действующая на корпус, которую представим в виде произведения, Н: $q(x,t)=g(t)P(x)$; $\delta(x,x_i)$ — дельта-функция Дирака; N_{ik} — сосредоточенная сила, передаваемая на силовой шпангоут с номером i от осциллятора с номером k. Значение этой силы определяется массой осциллятора m_{ik} и ее ускорением:

$$N_{ik}=-m_{ik}\frac{d^2u_{ik}}{dt^2}. \qquad (3.38)$$

Уравнение вынужденных продольных колебаний корпуса КА дополняется уравнениями колебаний осцилляторов:

$$\frac{d^2u_{ik}}{dt^2}+\omega_k^2u_{ik}=\frac{d^2u_i}{dt^2}, \qquad (3.39)$$

где $i=1,2,\ldots,N$; $k=1,2,\ldots$

Собственные продольные колебания корпуса описываются дифференциальным уравнением

$$m(x)\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}[EF(x)]\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{ik}N_{ik}\delta(x,x_i) \qquad (3.40)$$

и граничными условиями $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ при $x=a$ и $x=b$.

Такая краевая задача дополняется соотношением для определения N_{ik} и системой уравнений, описывающих колебания осцилляторов u_{ik}.

Если принять $m^*(x)=m(x)+\sum_{ik}m_{ik}\delta(x,x_i)$, то уравнение собственных продольных колебаний корпуса можно свести к уравнению относительно функции $U(x)$

$$\frac{d}{dx}\left[EF(x)\frac{dU}{dx}\right]=-\omega^2m(x)U, \qquad (3.41)$$

и граничным условиям $\dfrac{dU}{dx}=0$ при $x=a$ и $x=b$, образующим краевую задачу, которая определяет собственные функции $U(x)$ и частоты собственных продольных колебаний корпуса ω.

Решение краевой задачи можно провести следующим образом. Корпус КА разбивается на участки, на каждом из которых характеристики сечений постоянны. Для каждого такого участка

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\alpha^2 U=0\ , \qquad (3.42)$$

где $\alpha^2=\dfrac{m\omega}{EF}$.

Введем в (3.41) обозначения $\dfrac{dU}{dx}=f_1$ и $U=f_2$, тогда краевая задача запишется в нормальном виде:

$$\frac{df_1}{dx}=\alpha^2 f_2;\ \ \frac{df_2}{dx}=f_1 \to f_1=0\text{ , при } x=a\ ,\ x=b\ . \qquad (3.43)$$

Выбирается $\alpha=\alpha_1$, а на левом конце корпуса $x=a$ принимается $f_2(a)=1$ и $f_1(a)=0$. После интегрирования уравнений по длине корпуса на его правом конце $x=b$ получим $f_2(b)$ и $f_1(b)$. Если между участками с номерами i и $i+1$ имеется сечение с упругоподвешенными сосредоточенными массами, то в процессе интегрирования уравнений при переходе от i-го участка к (i+1)-му необходимо учитывать скачок осевой силы:

$$N_{ik}=-\omega_k^2 m_{ik}\frac{U_j(x_i)}{1-\left(\dfrac{\omega_j}{\omega_{ik}}\right)^2}\ , \qquad (3.44)$$

где $U_j(x_i)$ — формы колебаний корпуса в сечении x_i; ω_{ik} — частота собственных колебаний k-го осциллятора в i-м сечении, с$^{-1}$.

Краевое условие на правом конце корпуса используется для проверки правильности задания α_1. Варьируя α, можно добиться выполнения равенства $f_1(b)=0$. Значение $\alpha=\alpha^*$, при котором выполняется последнее равенство, будет решением краевой задачи о продольных упругих колебаниях корпуса. По величине α^* вычисляется собственная частота $\omega^*=\alpha^*\sqrt{\dfrac{EF}{m}}$. Форма упругой линии корпуса при $\alpha=\alpha^*$ — искомая форма собственных продольных колебаний U^*.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ БАКА, ЗАПОЛНЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ

Объектом исследований являлся бак с вытеснительным пакетом перелетного модуля КА типа «Фобос–Грунт», представленный на рис. 15.

Испытания бака проводились при следующих объемах заправки (м^3): $2{,}5 \cdot 10^{-1}$; $2{,}34 \cdot 10^{-1}$; $1{,}79 \cdot 10^{-1}$; $1{,}25 \cdot 10^{-1}$; $7{,}0 \cdot 10^{-2}$; $1{,}5 \cdot 10^{-2}$.

Рис. 15. Бак с вытеснительным пакетом перелетного модуля космического аппарата типа «Фобос–Грунт»

В качестве модельной жидкости при испытаниях использовалась вода. При испытаниях определялись параметрические характеристики жидкого наполнителя для бака на трех экспериментальных установках, реализующих поступательное движение модельной емкости с жидкостью, вращательное движение относительно ее поперечной и продольной осей, что соответствует плоскостям тангажа, рыскания и крена. На каждом уровне заправки снимались частотные характеристики [31].

Внутри бака устанавливался вытеснительный пакет, который заполнялся топливом. Схема бака представлена на рис. 16.

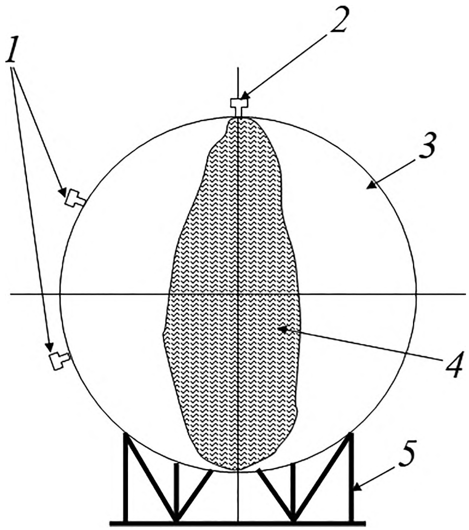

Рис. 16. Схема бака с вытеснительным пакетом:
1 — штуцера дренажа из бака; *2* — штуцер заправки и дренажа из пакета; *3* — бак; *4* — вытеснительный пакет; *5* — подставка

Рассмотрим особенности конструкции объекта испытаний, которые сказываются на его динамических характеристиках и которые необходимо учитывать при разработке методик испытаний. Основной особенностью данного объекта испытаний является то, что могут наблюдаться не колебания жидкости, а колебания элементов конструкции, заполненных жидкостью.

В зависимости от объема заправки бака, т.е. количества жидкости в вытеснительном пакете, можно рассматривать три случая, характеризующие динамические свойства данного бака.

Первый случай — это случай, когда бак полностью заполнен жидкостью, вытеснительный пакет полностью расправлен и лежит на стенках бака и объем жидкости представляет собой шар. Колебательные звенья отсутствуют.

Второй случай — это начало выработки топлива, когда вытеснительный пакет начинает деформироваться (терять устойчивость) и на нем образуются складки, которые еще достаточно жесткие и могут касаться стенок бака. Возникает повышенное демпфирование при вращательном движении бака относительно его осей, а также изменяются присоединенные моменты инерции жидкости. Колебательные звенья и в этом случае могут отсутствовать.

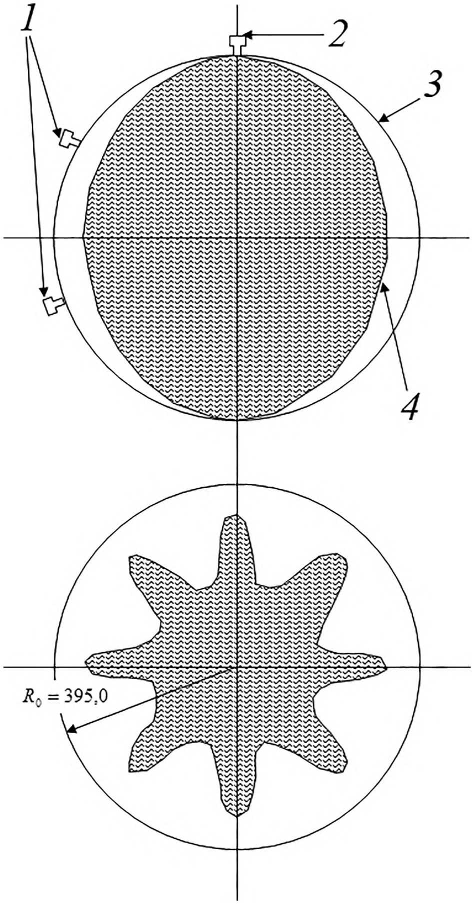

Рис. 17. Схема бака с основными размерами:
1 — штуцера дренажа из бака; *2* — штуцера заправки и дренажа из пакета; *3* — бак; *4* — вытеснительный пакет

Третий случай реализуется при дальнейшей выработке компонента топлива, при этом появляются развитые складки, форма которых схематично представлена на рис. 17. Эти складки могут появляться на частотных характеристиках как колебательные звенья. Кроме того, должны возникать колебания и всего пакета, вмещающего объем жидкости и закрепленного в баке по полюсам. Параметры колебаний будут обусловлены формой складок, жесткостью материала пакета и характеристиками жидкости.

Следует обратить внимание еще на один фактор, влияющий на динамические характеристики бака. Это ускорение поля массовых сил $\vec{\mathbf{j}}$. Под его воздействием при испытаниях в земных условиях форма пакета и складок может изменяться, что может сказаться на динамических характеристиках, при этом примем, что вытеснительный пакет достаточно жесткий и влияние на его форму ускорения поля массовых сил вдоль продольной оси бака незначительно. Это предположение может быть проверено при проведении испытаний и при анализе результатов.

С учетом высказанных предположений в качестве механической модели выберем пружинно-массовую модель, состоящую из бесконечной совокупности масс на пружинах. Схема такой модели представлена на рис. 18. Приняты следующие обозначения: ψ — угол поворота бака, рад; $\dfrac{k_i}{2}$ — жесткость пружин; m_i — масса груза, кг; L_i — координата расположения грузов относительно начала подвижной СК, м; $x_с$ — координата центра масс системы, м; r_i — радиус груза, м; L_i — координата поступательного движения бака, м.

Воспользовавшись уравнениями Лагранжа, получим систему уравнений, описывающих движение рассматриваемой системы:

$$
\begin{gathered}
\left(m^0+m\right)\ddot{u}+\left(m^0+m\right)x_с\ddot{\psi}+\sum_{i=1}^{\infty}m_i r_i=F_в;\\
\left(J^0+J\right)\ddot{\psi}-j\left(m^0+m\right)x_с\psi-\left(m^0+m\right)x_с\ddot{u}-\sum_{i=1}^{\infty}m_i L_i r_i+j\sum_{i=1}^{\infty}m_i r_i=M_в; \qquad (4.1)\\
m_i\ddot{r}_i+m_i\omega_i^2 r_i+m_i\ddot{u}-m_i L_i\ddot{\psi}+jm_i\psi=0,
\end{gathered}
$$

где m^0 — масса тела без жидкости, кг; J^0 — момент инерции тела относительно оси вращения, кг·м^2; J — присоединенный момент инерции жидкости, кг · м^2; $F_\text{в}$ — сила, действующая на бак с жидкостью, Н; $M_\text{в}$ — момент сил, действующих на бак с жидкостью, Н · м; ω_i^2 — квадрат собственной частоты колебаний k_i массы на пружинах m_i: $\omega_i^2 = \dfrac{k_i}{m_i}$.

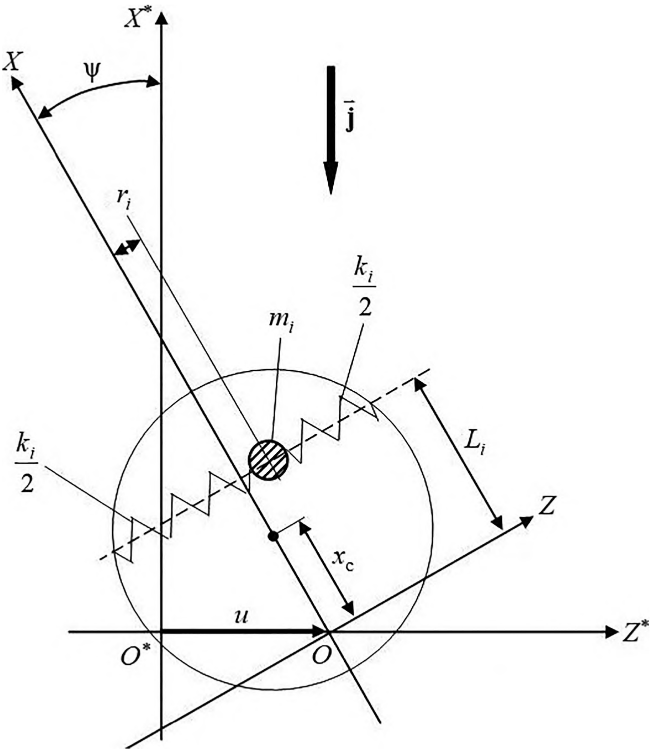

Рис. 18. Пружинно-массовая модель бака: $O^*X^*Z^*$ — неподвижная система координат; OXZ — подвижная система координат, связанная с баком

Система уравнений (4.1) упрощается, если записать ее относительно центра масс:

$$\left(m^0 + m\right)\ddot{u} + \sum_{i=1}^{\infty} m_i r_i = F_\text{в};$$

$$\left(J^0 + J\right)\ddot{\psi} - \sum_{i=1}^{\infty} m_i L_i r_i + j\sum_{i=1}^{\infty} m_i r_i = M_\text{в}; \qquad (4.2)$$

$$m_i\left(\ddot{r}_i + \omega_i^2 r_i\right) + m_i \ddot{u} - m_i L_i \ddot{\psi} + j m_i \psi = 0.$$

С учетом диссипативных сил система уравнений (4.2) может быть записана в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
\left(m^0+m\right)\ddot{u}+\sum_{i=1}^{\infty} m_i r_i = F_{\text{в}};\\
\left(J^0+J\right)\ddot{\psi}+\beta_\psi\dot{\psi}-\sum_{i=1}^{\infty} m_i L_i r_i + j\sum_{i=1}^{\infty} m_i r_i = M_{\text{в}};\\
m_i\left(\ddot{r}_i+\beta_i\dot{r}_i+\omega_1^2 r_i\right)+m_i\ddot{u}-m_i L_i\ddot{\psi}+jm_i\psi=0,
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

где β_ψ — коэффициент демпфирования при движении по углу ψ; β_i — коэффициент демпфирования при колебаниях массы на пружинах.

Вращательное движение бака относительно оси OX может быть сведено к механической модели, представленной на рис. 19.

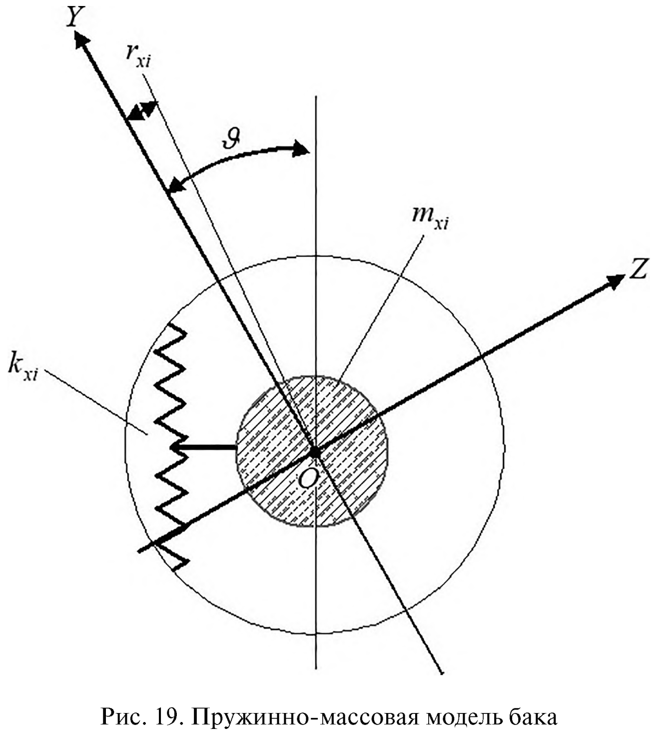

Рис. 19. Пружинно-массовая модель бака

Система уравнений движения такой модели может быть записана в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\left(J^0+J\right)\left(\ddot{\vartheta}+\beta_\vartheta\dot{\vartheta}\right)+\sum_{i=1}^{\infty} m_{xi}\ddot{r}_{xi}=M_x;\\
&m_{xi}\left(\ddot{r}_{xi}+\beta_{xi}\dot{r}_{xi}+\omega_{xi}^2 r_{xi}\right)+m_{xi}\ddot{\vartheta}=0,
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

где β_ϑ — коэффициент демпфирования при движении по углу ϑ; β_{xi} — коэффициент демпфирования при колебаниях массы на пружинах; J^0 — момент инерции тела без жидкости относительно оси вращения, кг·м^2; J — присоединенный момент инерции жидкости, кг·м^2; ω_{xi}^2 — квадрат собственной частоты колебаний k_{xi} массы на пружинах m_{xi}:

$$
\omega_{xi}^2=\frac{k_{xi}}{m_{xi}}.
$$

Таким образом, системы уравнений (4.3) и (4.4) полностью описывают движение бака с жидкостью, размещенной в вытеснительном пакете (см. рис. 18 и 19).

При проведении экспериментальных исследований используются три экспериментальные установки, реализующие три схемы испытаний. Данные экспериментальные установки позволяют определить все необходимые гидродинамические коэффициенты уравнений возмущенного движения бака, частично заполненного жидкостью [31, 56].

Схема первой установки представлена на рис. 20.

Исследуемый бак с помощью подставки закрепляется на платформе, которая опирается на аэростатические направляющие. Аэростатические направляющие смонтированы на плите, выставляемой на силовом полу с помощью регулировочных болтов. Гармоническая сила возбуждения задается катушкой электродинамического вибратора, закрепленной на платформе и находящейся в поле постоянных магнитов. На другом конце платформы закреплен шток датчика перемещений.

Задающий сигнал на катушку подается с генератора низкочастотного анализатора через усилитель мощности.

Сигнал от датчика перемещений через усилитель подается на анализатор и через модуль коммуникации и подключения источников сигналов — на измерительно-вычислительный комплекс, предназначенный для регистрации и обработки сигналов от измерительной аппаратуры.

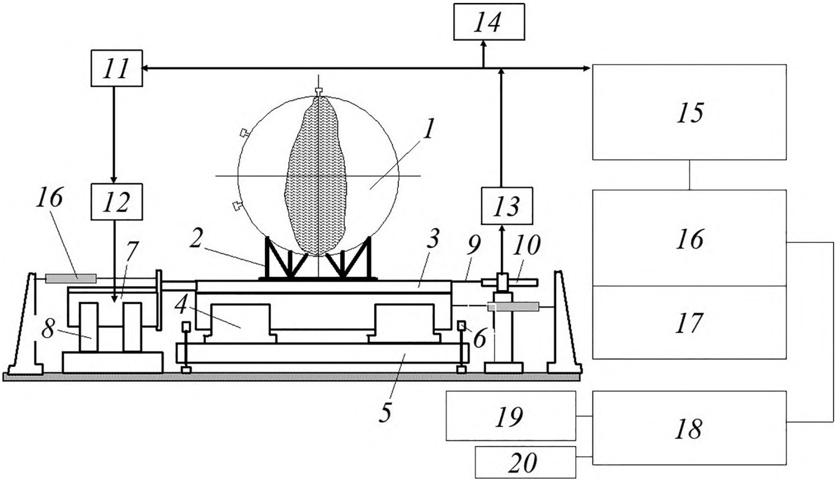

Рис. 20. Схема первой экспериментальной установки:

1 — бак; *2* — подставка; *3* — платформа; *4* — аэростатические направляющие; *5* — плита; *6* — регулировочные болты; *7* — катушка электродинамического вибратора; *8* — постоянные магниты; *9* — шток; *10* — датчик перемещений; *11* — анализатор; *12* — усилитель мощности; *13* — усилитель; *14* — осциллограф; *15* — модуль коммутации; *16* — измерительно-вычислительный комплекс; *17* — пакет обработки сигналов; *18* — станция обработки измерительной информации; *19* — монитор; *20* — принтер

Программное обеспечение, входящее в пакет обработки сигналов, дает возможность предварительно обрабатывать измерительную информацию. Детальная обработка проводится на станции обработки измерительной информации. Осциллограф предназначен для контроля над ходом испытаний и для настройки установки. Платформа удерживается около нулевого положения пружинами.

Данная установка реализует поступательное движение бака с жидким топливом. Система уравнений, описывающая движение бака с топливом на данной установке, имеет вид:

$$\begin{gathered}(m^0+m)(\ddot{u}+\beta_u\dot{u}+\omega_u^2u)+\sum_{i=1}^{k}m_n\ddot{r}_n=F_{\text{в}};\\ m_n(\ddot{r}_n+\beta_n\dot{r}_n+\omega_n^2r_n)+m_n\ddot{u}=0,\end{gathered}\tag{4.5}$$

где u — координата поступательного движения бака, м; ω_n — круговая частота n-го тона собственных колебаний жидкого топлива, $с^{-1}$;

m_n — обобщенная масса n-го тона собственных колебаний топлива, м; r_n — обобщенная координата, описывающая n-й тон колебаний топлива, м; β_n — коэффициент демпфирования n-го тона колебаний топлива; β_u — коэффициент демпфирования, обусловленный рассеянием энергии в установке; ω_u — частота колебаний бака с топливом как твердого тела на подвеске, $с^{-1}$.

Испытания на данной установке проводят как методом свободных, так и методом вынужденных колебаний. При испытаниях методом вынужденных колебаний задают силу возбуждения в виде $F_в = F_0 \cos(\omega t)$ и снимают АЧХ $u_0(\omega)$ и ФЧХ $\varphi_0(\omega)$. Данные частотные характеристики вводятся в осциллограф, а затем обрабатываются с помощью специальных программ, что позволяет определить коэффициенты ω_n, m_n и β_n.

Коэффициенты ω_n, m_n и β_n получены при испытаниях на модели бака, заполняемой модельной жидкостью — водой. Вытеснительный пакет является штатным, поэтому есть основания предполагать, что обобщенная жесткость k_n будет одинакова на модельной емкости и на натурной.

Обозначим коэффициенты, полученные на модели, в виде $\omega_{n\,м}$, $m_{n\,м}$ и $\beta_{n\,м}$, а соответствующие коэффициенты для штатного бака — в виде $\omega_{n\,н}$, $m_{n\,н}$ и $\beta_{n\,н}$. Тогда из условия равенства жесткости можно получить следующие соотношения:

$$m_{nм} = \frac{m_{nм}\rho_н}{\rho_м} \rightarrow m_{nн} = \bar{m}_n \rho_н R_0^3 , \tag{4.6}$$

где $\rho_м$ — плотность материала модельного бака, кг/м^3; $\rho_н$ — плотность материала штатного бака, кг/м^3; R_0 — характерный размер бака, м; $\bar{m}_n = \dfrac{m_{nм}}{\rho_м R_0^3}$.

$$\omega_{nн}^2 = \frac{\omega_{nм}^2 \rho_м}{\rho_н} . \tag{4.7}$$

Коэффициент демпфирования в общем случае может быть представлен в виде

$$\beta_n = \beta_n^0 + K_n \bar{S}_{0n} , \tag{4.8}$$

где β_n^0 — линейный коэффициент демпфирования; K_n — нелинейный коэффициент демпфирования; $\bar{S}_{0n}$ — относительная амплитуда жидкости на стенке бака: $\bar{S}_{0n} = \frac{S_{0n}}{R_0}$; S_{0n} — амплитуда жидкости на стенке бака, м.

Используя связь логарифмического декремента δ_n и коэффициента демпфирования β_n, получаем

$$\delta_n = \delta_n^0 + \bar{K}_n \bar{S}_{0n}, \tag{4.9}$$

где $\bar{K}_n = \frac{K_n \pi}{\omega_n}$; $\delta_n^0 = \frac{\beta_n^0 \pi}{\omega_n}$.

В выражении (4.9) величина δ_n^0, характеризующая линейное демпфирование, является функцией числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{\omega_n R_0^2}{\nu}$ и может быть представлена в виде

$$\delta_n^0 = \frac{\bar{\delta}_n^0}{\sqrt{R_n}}. \tag{4.10}$$

Здесь $\bar{\delta}_n^0$ — безразмерный коэффициент демпфирования, характеризующий рассеяние энергии за счет вязких сил; ν — кинематическая вязкость, м^2/с.

Таким образом, используя результаты определения гидродинамических коэффициентов, полученных при испытаниях модельной емкости, по зависимостям (4.6)...(4.9) можно определить соответствующие коэффициенты и для натурного бака для всех требуемых уровней заправки.

Коэффициенты m^0, β_u и ω_u характеризуют экспериментальную установку и определяются по результатам дополнительных экспериментов, поэтому при обработке частотных характеристик они считаются известными.

Схема второй экспериментальной установки, реализующей движение бака относительно поперечной оси Y–Y, представлена на рис. 21.

Исследуемый бак с помощью приспособлений закрепляется на раме. На боковых сторонах рамы устанавливаются устройства, на которых закреплены направляющие. Эти направляющие предназначены для перемещения осей вращения. Оси вращения представляют собой подшипники, которые опираются на стойки и образуют ось *Y–Y*, относительно которой вращается бак. Перемещение оси вращения осуществляется с помощью ходовых винтов.

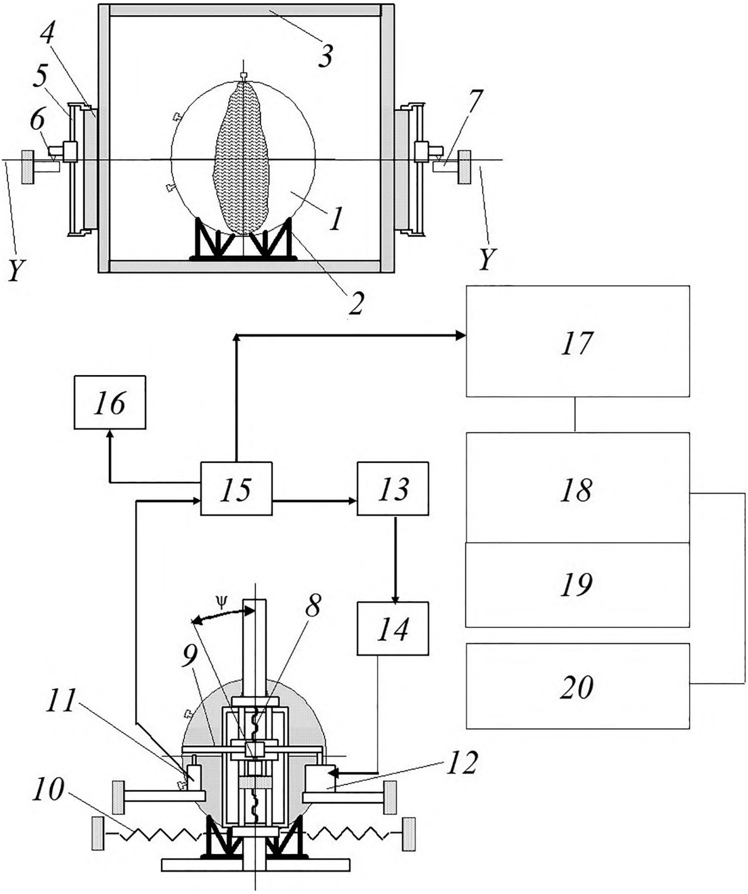

Рис. 21. Схема второй экспериментальной установки:

1 — бак; *2* — подставка; *3* — рама; *4* — устройства, на которых закреплены аэростатические направляющие; *5* — аэростатические направляющие; *6* — подшипники; *7* — стойки; *8* — ходовые винты; *9* — кронштейн; *10* — пружина; *11* — датчик угла; *12* — электродинамический вибратор; *13* — низкочастотный анализатор; *14* — обрабатывающая станция; *15* — коммутатор; *16* — датчик силы; *17* — модуль коммутации (подключение источников сигналов); *18* — измерительно-вычислительный комплекс; *19* — пакет обработки сигналов; *20* — станция обработки измерительной информации

К одному из устройств подсоединены пружины. Другие концы пружин закреплены на неподвижном основании. Пружины предназначены для удержания подвижной части установки около нулевого положения. Угол отклонения бака измеряется с помощью датчика угла, подсоединенного к кронштейну, закрепленному на устройстве. Колебания бака задаются вибратором, шток которого закреплен на другом конце кронштейна. Сигнал от датчика угла поступает на коммутатор, а от него на электронно-лучевой осциллограф и на низкочастотный анализатор. С коммутатора сигнал поступает также на модуль коммутации и подключения источников сигналов, от него на измерительно-вычислительный комплекс. На измерительно-вычислительном комплексе установлен пакет обработки сигналов, который позволяет проводить предварительный анализ измерительной информации. Измерительно-вычислительный комплекс объединен в сеть со станцией обработки измерительной информации. На станции обработки измерительной информации установлен пакет обработки сигналов, который позволяет проводить детальный анализ и обработку экспериментальной информации.

Кронштейн выполнен таким образом, что на нем могут устанавливаться добавочные массы, используемые для определения моментов инерции.

Уравнения движения бака с жидкостью на этой установке относительно оси $Y–Y$, проходящей через центр масс системы бак–жидкость, имеют вид

$$\begin{gathered}\left(J^0+J\right)\ddot{\psi}+\beta_\psi\dot{\psi}+k_\psi\psi-\sum_{i=1}^{\infty}m_nL_nr_n+j\sum_{n=1}^{\infty}m_nr_n=M_{\text{в}};\\ m_n\left(\ddot{r}_n+\beta_n\dot{r}_n+\omega_n^2r_i\right)+m_n\ddot{u}-m_nL_n\ddot{\psi}+j\,m_n\psi=0,\end{gathered}\tag{4.11}$$

где L_n — координата расположения масс на пружинах относительно оси $Y–Y$, м.

Коэффициент демпфирования β_ψ обусловлен рассеянием энергии в установке и в жидкости, поэтому он может быть представлен в виде

$$\beta_\psi=\beta_{\psi\,\text{уст}}+\beta_{\psi\text{ж}},\tag{4.12}$$

где $\beta_{\psi\,\text{уст}}$ — коэффициент демпфирования, обусловленный рассеянием энергии в установке; $\beta_{\psi\text{ж}}$ — коэффициент демпфирования, обусловленный рассеянием энергии в жидкости.

По результатам испытаний на второй установке определению подлежат коэффициенты $\bar{I}$, L_n и $\beta_{\psi ж}$. Полученный относительно центра бака присоединенный момент инерции жидкости пересчитывается на полюс бака по формуле

$$J_{п} = J + m\left(x_{ц} - x_{п}\right)^2, \tag{4.13}$$

где $x_{п}$ — координата полюса бака относительно оси Y–Y, проходящей через центр тяжести системы бак–жидкость, м; $x_{ц}$ — координата центра бака, м.

Координата расположения масс на пружинах L_n, определенная относительно оси Y–Y, пересчитывается на полюс бака O по формуле

$$C_n = L_n + x_{п}. \tag{4.14}$$

Коэффициент демпфирования $\beta_{\psi ж}$ является инвариантным по отношению к СК и может быть представлен следующей зависимостью в безразмерном виде:

$$\bar{\beta}_{\psi} = \bar{\beta}_{\psi}^{0} + \bar{K}_{\psi}\psi_0^{\alpha_\nu}, \tag{4.15}$$

где $\bar{K}_{\psi} = \dfrac{K_{\psi}}{\rho R_0^5 \omega_0}$; $\bar{\beta}_{\psi}^{0} = \dfrac{\beta_{\psi}^{0}}{\sqrt{\mathrm{Re}_{\psi}}}$; $\mathrm{Re}_{\psi} = \dfrac{\omega_0}{\nu} R_0^2$; $\tilde{\beta}_{\psi}^{0} = \dfrac{\beta_{\psi}^{0}\sqrt{\mathrm{Re}_{\psi}}}{\rho R_0^5 \omega_0}$; ω_0 — характерная частота колебаний, с$^{-1}$; K_{ψ} — нелинейный коэффициент демпфирования, обусловленный рассеянием энергии в установке и в жидкости.

Схема третьей экспериментальной установки для определения гидродинамических коэффициентов при движении бака относительно продольной оси представлена на рис. 22.

Установка включает в себя испытуемый бак, подставку, с помощью которой бак устанавливается на столе. Стол соединен с диском датчиками момента. Диск жестко связан с планшайбой и осью. Планшайба опирается на аэростатическую опору, смонтированную на кронштейне. Аэростатическая опора имеет штуцер для подачи сжатого воздуха от компрессора. Основание выставляется на опорных стойках или на силовом полу с помощью регулировочных винтов. Нижний конец оси охватывает струна, один конец которой через пружину *15* подсоединен к датчику силы, установленному на стойке *12.* Второй конец струны соединен со второй пружиной, связанной с регулировочным винтом, установленным на стойке.

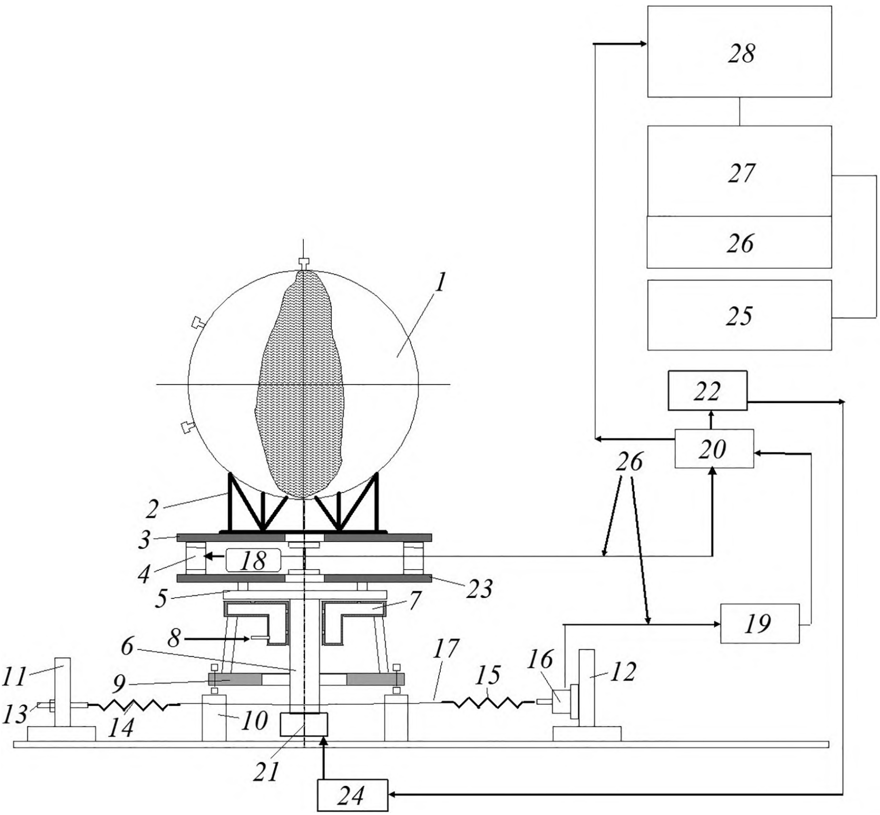

Рис. 22. Схема третьей экспериментальной установки:

1 — бак; *2* — подставка; *3* — стол; *4* — датчик момента; *5* — планшайба; *6* — ось; *7* — аэростатическая опора; *8* — штуцер; *9* — кронштейн; *10* — опорные стойки; *11*, *12* — стойки; *13* — регулировочный винт; *14*, *15* — пружины; *16* — датчик силы; *17* — струна; *18*, *19* — усилители; *20* — коммутатор; *21* — электродинамический вибратор; *22* — низкочастотный анализатор; *23* — диск; *24* — усилитель мощности; *25* — сигнал обработки измерительной информации; *26* — пакет обработки сигналов; *27* — измерительно-вычислительный комплекс; *28* — модуль коммутации (подключение источников сигналов)

Колебания вокруг продольной оси исследуются методом свободных колебаний путем задания начальных условий. Для измерения амплитуды колебаний бака используется сигнал от датчика силы. Сигнал после усилителя *19* поступает на вход коммутатора, с которого он может подаваться на вход низкочастотного анализатора и на систему регистрации и обработки, включающую модуль коммутации и подключения источников сигналов типа МЕ-002. С этого модуля сигналы поступают на измерительно-вычислительный комплекс типа MIC-300. Данный комплекс имеет пакет обработки сигналов, позволяющий осуществлять предварительный анализ экспериментальных данных. Для детальной обработки измерительной информации используется станция.

Сигнал от датчика момента через усилитель *18* также поступает на коммутатор *20*.

При проведении испытаний методом вынужденных колебаний внешнее воздействие осуществляется электродинамическим вибратором, сигнал на который подается от генератора низкочастотного анализатора через усилитель мощности.

Движение бака с жидкостью относительно продольной оси описывается уравнениями:

$$\begin{gathered}\left(J^0+J\right)\left(\ddot{\varphi}+\beta_\varphi\dot{\varphi}+\omega_\varphi^2\varphi\right)+\sum_{n=1}^{k} m_{xn}\ddot{r}_{xn}=M_x;\\ m_{xn}\left(\ddot{r}_{xn}+\beta_{xn}\dot{r}_{xn}+\omega_{xn}^2 r_{xn}\right)+m_{xn}\ddot{\varphi}=0,\end{gathered}\tag{4.16}$$

где β_φ — коэффициент демпфирования, обусловленный рассеянием энергии в установке и в жидкости; ω_φ — частота колебаний, обусловленная жесткостью пружин в установке, $с^{-1}$; ω_{xn} — собственная частота n-го тона колебаний жидкости, $с^{-1}$; m_{xn} — обобщенная масса n-го тона колебаний жидкости, кг; r_{xn} — обобщенная координата, характеризующая колебания жидкости (смещение массы на пружинах), м; β_{xn} — коэффициент демпфирования n-го тона колебаний жидкости.

В случае, когда колебания жидкости при движении относительно продольной оси не проявляются, уравнения (4.16) сводятся к одному уравнению:

$$\left(J^0+J\right)\ddot{\varphi}+\beta_\varphi\dot{\varphi}+c_\varphi\varphi=M_x,\tag{4.17}$$

где β_φ — коэффициент сопротивления в установке и в жидкости: $\beta_\varphi=\beta_{\varphi\,\text{уст}}+\beta^0_{\varphi\text{ж}}+K_\varphi\vartheta_0^{\alpha_\varphi}$; K_φ — нелинейный коэффициент демпфирования, обусловленный рассеянием энергии в установке и в жидкости.

Коэффициент $\beta_{\varphi\,\text{уст}}$ определяется из отдельного эксперимента и затем вычитается из вышеприведенного соотношения. В результате получают коэффициент сопротивления, обусловленный рассеянием энергии в жидкости:

$$\beta_{\varphi ж} = \beta^0_{\varphi ж} + K_\varphi \varphi_0^{\alpha_\varphi} . \qquad (4.18)$$

В безразмерном виде последнее выражение может быть записано так:

$$\bar{\beta}_{\varphi ж} = \bar{\beta}^0_{\varphi ж} + \bar{K}_\varphi \varphi_0^{\alpha_\varphi} ,$$

где

$$\bar{K}_\varphi = \frac{K_\varphi}{\rho R_0^5 \omega_0} ; \; \bar{\beta}^0_{\varphi ж} = \frac{\tilde{\beta}^0_\varphi}{\sqrt{\mathrm{Re}_\varphi}} ; \; \mathrm{Re}_\varphi = \frac{\omega_0}{\nu} R_0^2 ; \; \tilde{\beta}^0_\varphi = \frac{\bar{\beta}^0_{\varphi ж} \sqrt{\mathrm{Re}_\varphi}}{\rho R_0^5 \omega_0} ;$$

$\varphi_0^{\alpha_\varphi}$ — амплитуда угла поворота бака, рад.

Обработка экспериментальных данных позволяет определить коэффициенты уравнений (4.1)...(4.3) и использовать их для обоснования имитационной модели.

Для определения гидродинамических коэффициентов применялся как метод вынужденных колебаний, так и метод свободных колебаний. Их сочетание позволяет повысить точность определения коэффициентов и сократить время, затрачиваемое на проведение экспериментов и на обработку результатов. При использовании метода вынужденных колебаний снимались частотные характеристики [1, 31]. На рис. 23 в качестве примера представлена АЧХ, полученная при испытаниях на первой экспериментальной установке:

На рис. 24 представлена ФЧХ, полученная при заправке $1{,}25 \cdot 10^{-1}$ м^3 жидкости.

Частотные характеристики имеют особенности, прявляющиеся в виде нелинейностей. Обработка и анализ результатов показали, что данные частотные характеристики хорошо описываются уравнениями (4.5). При этом коэффициенты демпфирования не зависят от амплитуды колебаний жидкости. По результатам обработки этих характеристик определялись значения гидродинамических коэффициентов.

Колебания при испытаниях по вращению относительно продольной и поперечной осей не наблюдались. Это объясняется, по-видимому, тем, что колебания определяются жесткостными харак-

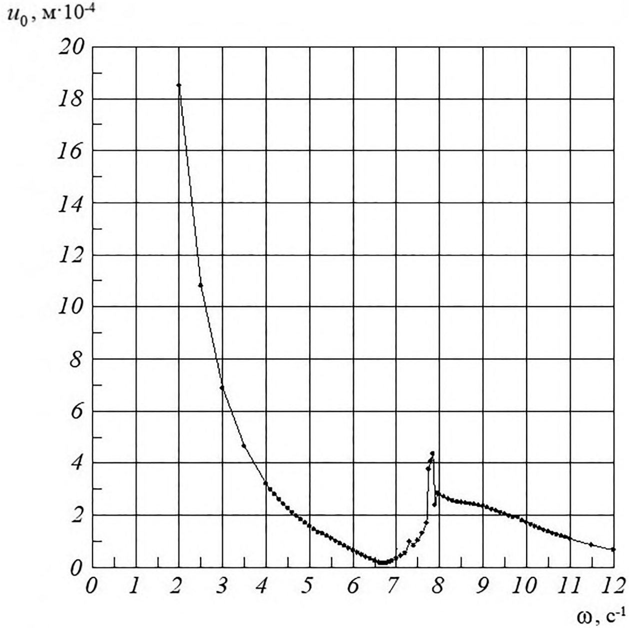

Рис. 23. Амплитудно-частотная характеристика, полученная при испытаниях на первой экспериментальной установке

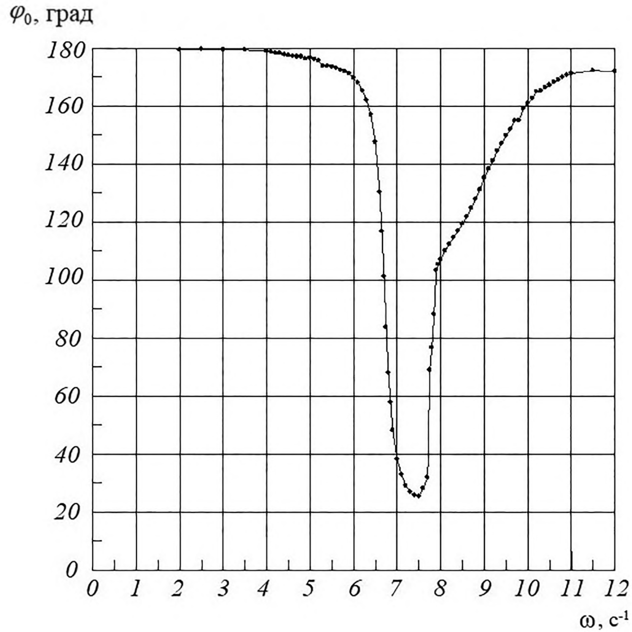

Рис. 24. Фазовая частотная характеристика, полученная при испытаниях на первой экспериментальной установке

теристиками пакета, закрепленного полюсами на стенках бака. По мере выработки топлива из бака жесткость образовавшихся складок увеличивается.

Гидродинамические коэффициенты исследуемого бака для первого тона колебаний вытеснительного пакета с жидкостью в нем, полученные в результате обработки экспериментальных данных, представлены в таблице.

Наглядно возможное складывание вытеснительного пакета представлена на рис. 25.

Рис. 25. Складывание вытеснительного пакета внутри бака

Анализ результатов испытаний показывает, что проявляется один тон, обусловленный колебаниями массы жидкости в пакете, опирающемся на бак в районе полюсов, и колебаниями складок, которые проявляются на частотных характеристиках.

Гидродинамические коэффициенты исследуемого бака для первого тона колебаний вытеснительного пакета с жидкостью

V, м^3	ω_1^2	$\overline{m}_1$	$\overline{\delta}_1^0$	$\overline{c}_1$	$\overline{J}$	$\overline{\beta}_\psi^0$	$\overline{I}$	$\overline{\beta}_\varphi^0$
$1{,}50\cdot10^{-2}$	$2{,}20\cdot10^{3}$	$9{,}00\cdot10^{-2}$	$1{,}38\cdot10^{3}$	$4{,}10\cdot10^{-1}$	$1{,}00\cdot10^{-1}$	2,45	$3{,}00\cdot10^{-2}$	$3{,}38\cdot10^{-1}$
$7{,}00\cdot10^{-2}$	$1{,}27\cdot10^{3}$	$3{,}90\cdot10^{-1}$	$5{,}94\cdot10^{2}$	$4{,}95\cdot10^{-1}$	$3{,}58\cdot10^{-1}$	3,15	$6{,}58\cdot10^{-2}$	2,22
$1{,}25\cdot10^{-3}$	$1{,}78\cdot10^{3}$	$9{,}00\cdot10^{-1}$	$2{,}73\cdot10^{2}$	$6{,}53\cdot10^{-1}$	$3{,}97\cdot10^{-1}$	6,94	$9{,}58\cdot10^{-2}$	3,67
$1{,}79\cdot10^{-3}$	$1{,}38\cdot10^{3}$	1,41	$2{,}53\cdot10^{2}$	$8{,}21\cdot10^{-1}$	$2{,}56\cdot10^{-1}$	17,05	$7{,}86\cdot10^{-2}$	5,28
$2{,}34\cdot10^{-3}$	$1{,}93\cdot10^{3}$	1,93	$1{,}97\cdot10^{2}$	$9{,}77\cdot10^{-1}$	$7{,}16\cdot10^{-2}$	30,40	$6{,}22\cdot10^{-2}$	6,54
$2{,}50\cdot10^{-3}$					$1{,}50\cdot10^{-2}$	23,60	$5{,}16\cdot10^{-2}$	6,51

На рис. 26...29 значения полученных гидродинамических коэффициентов для первого тона колебаний приведены в виде графиков, в зависимости от объема заправки бака жидкостью.

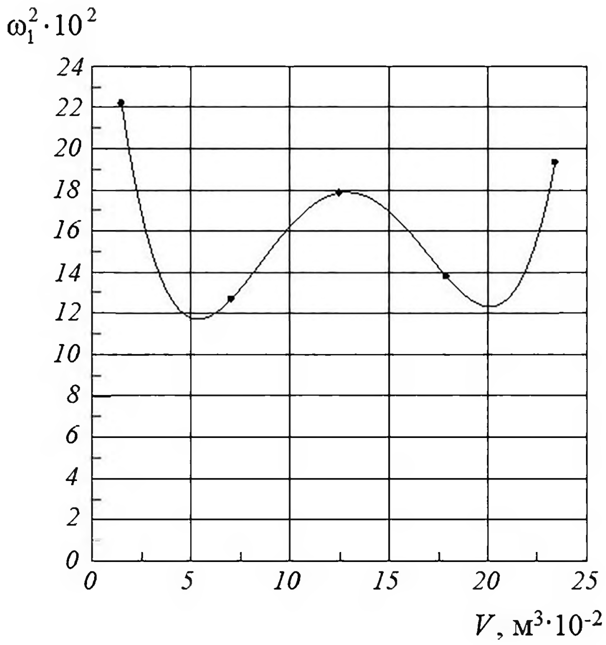

Рис. 26. Зависимость коэффициента ω_1^2 от объема заправки бака V

На рис. 30...33 приведены значения присоединенных моментов инерции и коэффициенты демпфирования при движении относи-

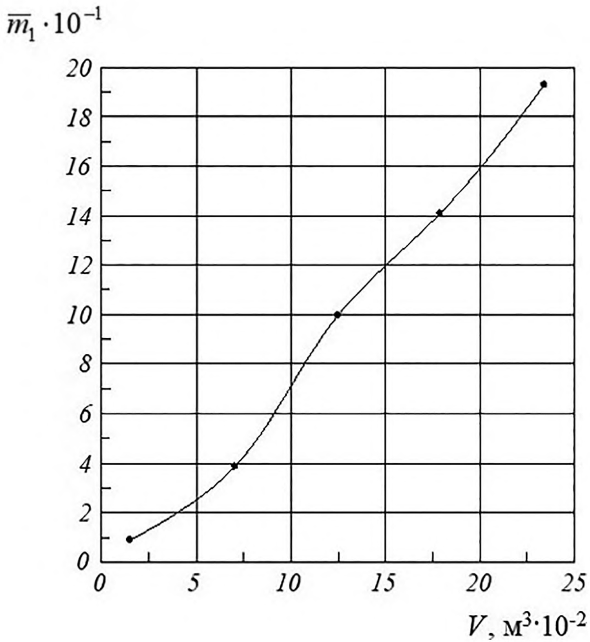

Рис. 27. Зависимость коэффициента $\overline{m}_1$ от объема заправки бака V

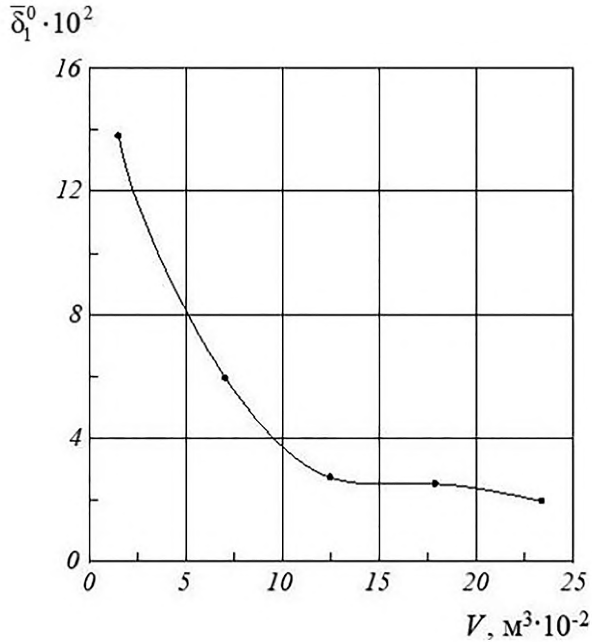

Рис. 28. Зависимость коэффициента $\overline{\delta}_1^0$ от объема заправки бака V

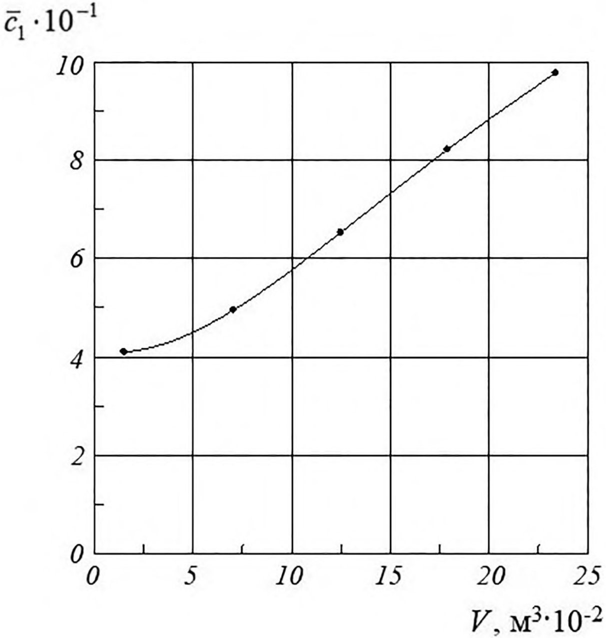

Рис. 29. Зависимость коэффициента $\bar{c}_1$ от объема заправки бака V

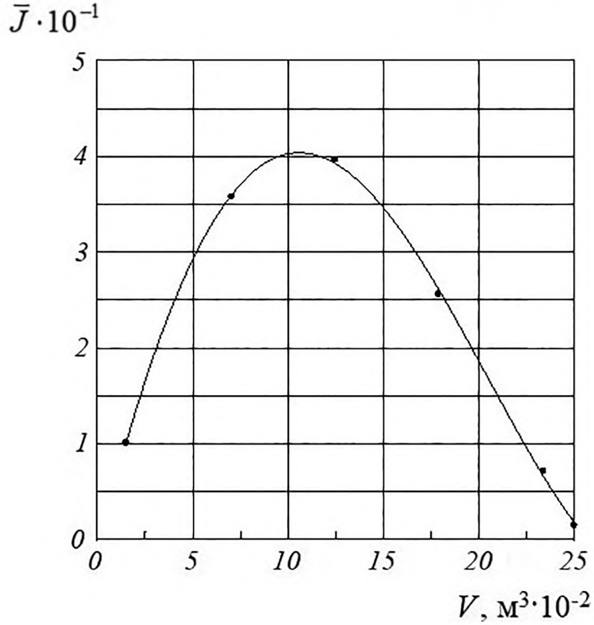

Рис. 30. Зависимость коэффициента $\bar{J}$ от объема заправки бака V

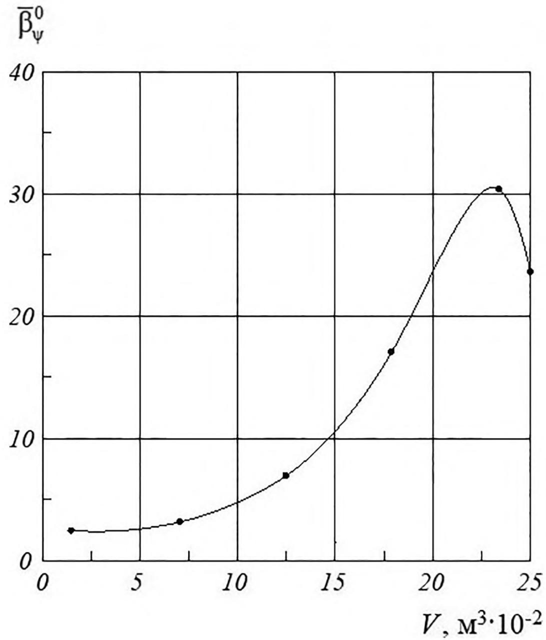

Рис. 31. Зависимость коэффициента $\overline{\beta}_{\psi}^{0}$ от объема заправки бака V

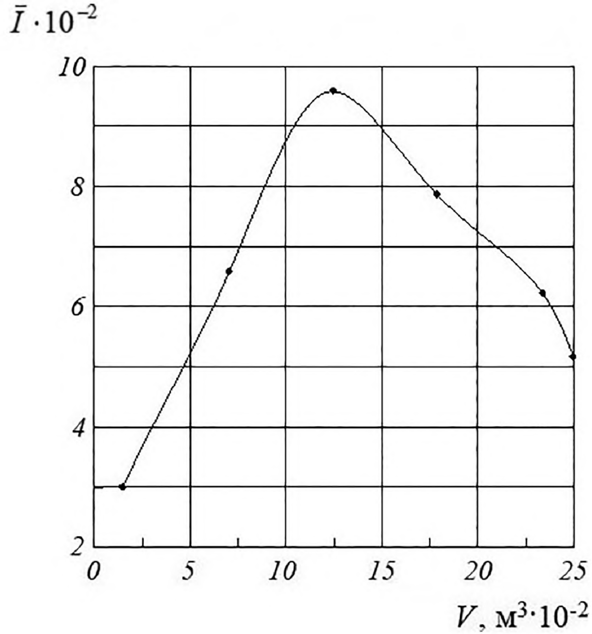

Рис. 32. Зависимость коэффициента $\bar{I}$ от объема заправки бака V

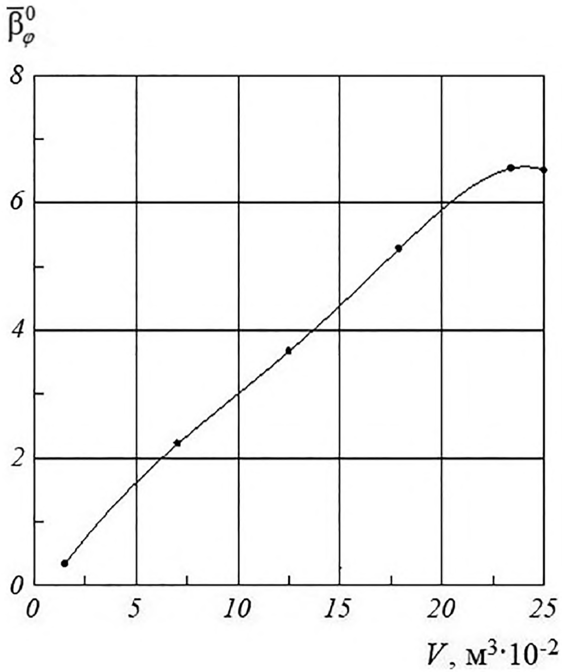

Рис. 33. Зависимость коэффициента $\overline{\beta}_{\varphi}^{0}$ от объема заправки бака V

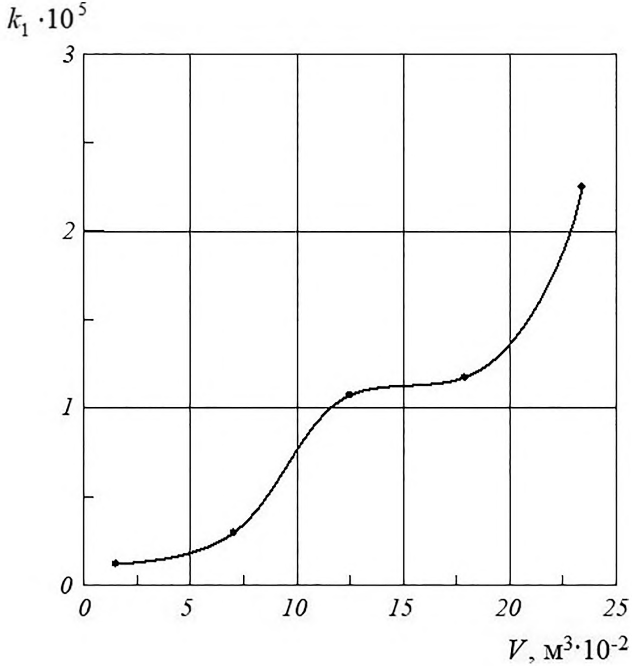

Рис. 34. Зависимость обобщенной жесткости вытеснительного пакета k_1 от объема заправки бака V

тельно поперечной оси, проходящей через центр бака, и относительно продольной оси бака.

На рис. 34 представлена зависимость приведенной жесткости вытеснительного пакета k_1 от объема заправки бака для первого тона колебаний.

Зависимость $\overline{c}_1$ от V (см. рис. 29) показывает изменение положения центра масс жидкости, заключенной в вытеснительный пакет. Такое изменение положения центра масс может быть обусловлено воздействием силы земного притяжения и формой деформации вытеснительного пакета, на которую оказывают влияние местные жесткостные характеристики материала пакета. Выявить влияние каждого из факторов без проведения специальных дополнительных экспериментов с вытеснительным пакетом, в том числе и при имитировании условий невесомости, не представляется возможным. Поэтому предполагаем, что обобщенная масса для первого тона располагается на координате $\overline{c}_1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Абгарян К.А., Калязин Э.Л., Мишин В.П., Рапопорт И.М.* Динамика ракет. — М.: Машиностроение, 1990. — 463 с.
2. *Абрамов И.П., Алдашкин И.В., Алексеев Э.В.* и др. Машиностроение. Ракетно-космическая техника. Т. IV-22. Кн. 2. Ч. 1. — М.: Машиностроение, 2014. — 563 с.
3. *Авдуевский В.С., Бармин И.В., Гришин С.Д.* Проблемы космического производства. — М.: Машиностроение, 1980. — 223 с
4. *Аджян А.П., Аким Э.Л., Алифанов О.М., Андреев А.Н.* и др. Машиностроение. Ракетно-космическая техника. Т. IV-22. Кн. 1. — М.: Машиностроение, 2012. — 925 с.
5. *Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г.* Управление космическими летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 1974. — 383 с.
6. АО «НПО Лавочкина» [Электронный ресурс] URL: http://www.laspace.ru/
7. АО «ЦНИИмаш» [Электронный ресурс] URL: http://www.tsniimash.ru/
8. *Артюхин Ю.П., Каргу Л.И., Симаев В.Л.* Системы управления космических аппаратов, стабилизирующих вращением. — М.: Наука, 1979. — 295 с.
9. *Бармин И.В., Безденежный Н.А., Брискман В.А.* и др. Программа экспериментов на установке для исследования гидродинамических явлений в условиях невесомости // Известия РАН. Серия физическая. 1985. Т. 49. № 4. С. 698–707.
10. *Барков А.В., Баркова Н.А., Азовцев А.Ю.* Мониторинг и диагностика роторных машин по вибрации: Учеб. пособие. — СПб.: СПбМТУ, 2000. — 158 с.
11. *Беленький А.Д., Васильев В.Н., Гриневич Д.В., Канунникова Е.А.* Новые возможности создания динамической модели управляемого космического аппарата с учетом упругих свойств и изменяемости конструкции // Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. 2012. Т. 127. С .21–26.
12. *Беляев Е.Н., Чванов В.К., Черваков В.В.* Математическое моделирование рабочего процесса жидкостных ракетных двигателей: Учебник / Под ред. В.К. Чванова. — М.: Изд-во МАИ, 1999. — 228 с.
13. *Беляев Н.М., Велик Н.П., Уваров Е.И.* Реактивные системы управления космических летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1979. — 234 с.
14. *Борисов М.В., Авраменко А.А.* Моделирование движения космического аппарата с упругими элементами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. № 2. С. 17–28.

15. *Бритова Ю.А., Андросов В.Я., Дмитриев. В.С.* Вибрационный анализ динамических характеристик двигателей-маховиков // Известия Томского политехнического университета. 2009. № 2. С. 167–172.
16. *Бровкин А.Г., Бурдыгов Б.Г., Гордийко С.В.* и др. Бортовые системы управления космическими аппаратами / Под ред. А.С. Сырова. — М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. — 304 с.
17. *Бужинский В.А.* Вихревое демпфирование колебаний жидкости в резервуарах с перегородками // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 234–242.
18. *Васильев В.Н.* Системы ориентации космических аппаратов. — М.: НПП ВНИИЭМ, 2009. — 310 с.
19. *Веретенников В.Г., Карпов И.И., Марков Ю.Г.* Колебательные процессы в механических системах с упругими и диссипативными элементами: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МАИ, 1998. — 144 с.
20. Вибрации в технике: Справочник: В 6 т. / Ред. В.Н. Челомей (пред). — М.: Машиностроение, 1980. — Т. 3. Колебания машин, конструкций и их элементов / Под ред. Ф.М. Диментберга и К.С. Колесникова. — М.: Машиностроение, 1980. — 544 с.
21. *Геча В.Я., Гриневич Д.В., Чирков В.П., Канунникова Е.А.* Влияние упругих трансформируемых элементов конструкции на точность стабилизации космического аппарата // Инженерный журнал. 2013. № 5. С. 3–6.
22. *Головин Ю.М.* Перспективы развития систем диагностики и аварийной защиты ЖРД // Фундаментальные и прикладные проблемы космонавтики. 2002. № 9. С. 34–38.
23. *Гордеев В.А., Жуков В.А., Завадский В.К., Иванов В.П., Портнов-Соколов Ю.П.* Новые технологии построения пневмогидравлических систем подачи топлива в ЖРД // Датчики и системы. 2002. № 9. С. 66–73.
24. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. — М.: Машиностроение, 1986. — 214 с.
25. *Денисова А.А., Тверяков О.В.* Измерительный модуль для определения силомоментных характеристик управляемых двигателей-маховиков // Известия Самарского научного центра РАН. 2014. № 1–2. С. 390–393.
26. *Докучаев Л.*В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. — М.: Машиностроение, 1987. — 232 с.
27. *Ермаков В.Ю., Кузнецов Д.А., Телепнев П.П.* Подход к решению вопроса по прогнозу уровней возмущений для электромаховичных исполнительных органов // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2016. № 3. С. 116–119.
28. *Ермаков В.Ю., Герасимчук В.В., Ефанов В.В., Кузнецов Д.А., Лоханов И.В., Телепнев П.П., Цыплаков А.Е.* Решение задачи обеспечения допустимых уровней вибронагруженности исполнительных органов системы ориен-

тации космического аппарата // Общероссийский научно-технический журнал «Полёт». 2018. № 8. С. 33–38.

29. *Ермаков В.Ю., Сова А.Н., Мазлумян Г.С., Шаповалов Р.В., Изотова Т.В.* Метод математического моделирования пневмогидравлических систем автоматических космических аппаратов с учетом явления гидроудара в топливных магистралях двигательных установок малой тяги // Космонавтика и ракетостроение. 2019. Вып. 3(108). С. 100–106.
30. *Ермаков В.Ю.* Исследование влияния алгоритмов управления приводом остронаправленной антенны на его виброактивность на борту космического аппарата // Вестник Московского авиационного института. 2019. Т. 26. № 2. С. 175–181.
31. *Ермаков В.Ю., Клишев О.П., Чурилов Г.А.* Экспериментальные методы определения гидродинамических коэффициентов вращающихся баков с жидкостью // Актуальные вопросы проектирования космических систем и комплексов: Сб. научных трудов НПО им. С.А. Лавочкина. 2004. Вып. 5. С. 410–414.
32. *Ермаков В.Ю., Клишев О.П.* Динамика вращающегося КА с полостями, содержащими жидкое топливо, на активном участке траектории полета // Актуальные вопросы проектирования космических систем и комплексов: Сб. научных трудов НПО им. С.А. Лавочкина. 2005. Вып. 6. С. 332–336.
33. *Ермаков В.Ю., Бутылкин А.Ф., Телепнев П.П., Штенберг Ш.Е.* Методы гашения вибраций корпуса и панелей СБ КА с помощью исполнительных устройств его системы ориентации // Актуальные вопросы проектирования космических систем и комплексов: Сб. научных трудов НПО им. С.А. Лавочкина. 2005. Вып. 6. С. 432–437.
34. *Ершов В.И., Моисеев Г.А.* О методике расчета колебаний жидкости в цилиндрическом баке с продольными ребрами // Труды НИИ-88. 1965. № 3(71).
35. *Ефимочкин А.Ф.* Проектирование принципиальных пневмогидравлических схем жидкостных ракетных двигателей: Учеб. пособие. — Воронеж: Воронежский государственный технический университет, 2010. — 264 с.
36. *Каргу Д.И.* Системы угловой стабилизации космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1980. — 172 с.
37. *Кейн Т.Р., Левинсон Д.А.* Вывод уравнений движения для сложных КЛА // Ракетная техника и космонавтика. 1980. № 9. С. 158–173.
38. *Колесников К.С.* Динамика ракет: Учебник для вузов. — 2-е изд. — М.: Машиностроение, 2003. — 520 с.
39. *Колесников К.С., Самойлов Е.А., Рыбак С.А.* Динамика топливных систем ЖРД. — М.: Машиностроение, 1975. — 172 с.

40. *Кулешов В.Б., Микишев Г.Н., Пронин Я.Д., Швейко Ю.Ю.* Об эффективности некоторых экспериментальных методов определения основных динамических характеристик упругих конструкций в случае близких собственных частот // Исследования по теории сооружений. 1974. Т.XX. С. 112–120.
41. *Кухлинг Х.* Справочник по физике: Пер.с нем. — 2-е изд. — М.: Мир, 1985. — 520 с.
42. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособие: В 10 т. — Т. VI. Гидродинамика. — 3-е изд. — М.: Наука, 1986. — 736 с.
43. *Мануйлов Ю.С.* Синтез оптимального управления жесткостью упругих динамических объектов // Приборостроение. 1986. Т. XXIX. № 11. С. 27–31.
44. *Микишев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — М.: Машиностроение, 1968. — 532 с.
45. *Микишев Г.Н.* Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1978. — 248 с.
46. *Натанзон М.С.* Продольные автоколебания жидкостной ракеты. — М.: Машиностроение, 1977. — 208 с.
47. *Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж.* Демпфирование колебаний: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 448 с.
48. *Николаев Ю.Л., Ершов А.Г.* Автоматизированный отсчетный механизм микроперемещений // Измерительная техника. 1990. № 2. С. 16–17.
49. *Омельченко И.С., Бойцов Д.А.* Автономная система управления и аварийной защиты жидкостного ракетного двигателя // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2014. № 4. С 75–79.
50. *Петров А.А., Попов Ю.П., Пухначев Ю.В.* Вычисление собственных колебаний жидкости в неподвижных сосудах вариационным методом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4. № 5. С. 123–144.
51. *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории упругих колебаний и удара. — Л.: Машиностроение, 1976. — 320 с.
52. *Пилипенко В.В., Задонцев В.А., Натанзон М.С.* Кавитационные автоколебания и динамика гидросистем. — М.: Машиностроение, 1977. — 352 с.
53. *Пиппард А.* Физика колебаний. — М.: Высшая школа, 1985. — 456 с.
54. *Попов В.И.* Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов. — 2-е изд. — М.: Машиностроение, 1986. — 184 с.
55. *Рабинович Б.И.* Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1975. — 416 с.
56. *Рапопорт И.М.* Динамика упругого тела, частично заполненного жидкостью. — М.: Машиностроение, 1966. — 393 с.

57. *Савостьянов А.М., Шаповалов Р.В., Ермаков В.Ю., Винокуров В.П., Пронин М.А.* Вибр差защитные системы. — М.: ЦНТИ «Поиск». Государственный регистрационный номер 11453, 1989. — 261 с.
58. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. — 10-е изд. — М.: Наука, 1987. — 430 с.
59. *Чебаевский В.Ф., Петров В.И.* Кавитация в высокооборотных лопастных насосах. — М.: Машиностроение, 1982. — 192 с.
60. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Рощин Б.Н.* Управление колебаниями. — М.: Наука, 1980. — 334 с.
61. *Яблочко М.А.* Адаптивные алгоритмы аварийной защиты жидкостных ракетных двигателей // Космическая техника и технологии. 2014. № 4 (7). С. 42–46.
62. *Ashley H.* On Passive Demping Mehanisms in Large Space Structures // Journal of Space and Rockets. 1984. Vol. 21, N5. P. 448–455.
63. *Betsch P., Steinmann P.* A DAE Approach to Flexible Multibody Dynamics // Multibody System Dynamics. 2002. Vol. 8. P. 365–389.
64. *De Bernardinis B., Graham J.M.R., Parker K.H.* Oscillatory flow around disks and orifices // J. Fluid Mech. 1981. Vol. 102. P. 279–299.
65. *Graham J.M.R.* The forces on sharp-edged cylinders in oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers // J. Fluid Mech. 1980. Vol. 97. No 2. P. 331–346.
66. *Wilfried Ley, Klaus Wittmann, and Willi Hallmann.* Handbook of space technology. — JohnWiley&Sons, 2009. — 908 p.
67. *Luo Jian, Qiu Ruiqiang, Di Wenbin.* Structural dynamics analysis for solar array of a spacecraft // Shanghai Academy of Spaceflight Technology, Shanghai, China, 2001–92. P. 1–8.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тем. план 2023, ч. 3, поз. 3

Ермаков Владимир Юрьевич
Туфан Ант

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
В КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТАХ

Редактор *Е.Л. Мочина*
Компьютерная верстка *О.А. Пелипенко*

Сдано в набор 17.01.2024. Подписано в печать 5.03.2024.
Бумага офсетная. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 6,04. Уч.-изд. л. 6,5. Тираж 200 экз.
Заказ 413/1164.

Издательство МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4
Москва, А-80, ГСП-3 125993

Типография Издательства МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4
Москва, А-80, ГСП-3 125993