МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
имени СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ

А.В. РЕПНИКОВ,
А.И. ЧЕРНОМОРСКИЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

по курсу

"ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ"

ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИЧЕСКОГО СИНТЕЗА

МОСКВА–1977

МИНИСТЕРСТВО
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
имени СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ

А.В. РЕПНИКОВ, А.И. ЧЕРНОМОРСКИЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
по курсу
"ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ"

ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИЧЕСКОГО СИНТЕЗА

(Для дневной и вечерней форм обучения)

Утверждено
на заседании редсовета
29 октября 1976 г.

МОСКВА - 1977

УДК: 629.7.054:847(075.8)

Зав. редакцией М.И. Кузнецова

А189(075)
Р414

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены основные вопросы динамического синтеза систем гироскопической стабилизации, используемых на подвижных объектах (самолет, корабль и т.д.) в условиях случайных и детерминированных воздействий.

Системы гироскопической стабилизации - гиростабилизаторы представляют собой системы автоматического регулирования, отличительные особенности которых обусловлены гироскопическими элементами, играющими роль датчиков ориентации платформы и непосредственно участвующими в формировании моментов стабилизации.

Вопросы построения платформенных систем гироскопической стабилизации, особенности чувствительных элементов и математические модели одноосных, двухосных и трехосных пространственных гиростабилизаторов различных типов были рассмотрены в учебном пособии [10]. В данном учебном пособии основное внимание уделено вопросам формирования динамических характеристик гиростабализаторов.

В первых двух главах рассмотрены задачи так называемого ограниченного синтеза - задачи выбора параметров и корректирующих цепей при заданной структуре гиростабилизатора. Целью синтеза является обеспечение требований к точности и запасам устойчивости при детерминированных и ограниченных по модулю внешних воздействиях.

Решение задачи синтеза приведено, как правило, в форме, удобной для инженерной практики, большое внимание уделено вопросам физической интерпретации динамических процессов стабилизации.

Третья глава учебного пособия посвящена вопросам анализа и синтеза гиростабилизатора при случайных внешних возмущениях, порождаемых колебаниями основания. Эти вопросы рассмотрены на основе корреляционной теории случайных процессов.

Учебное пособие написано под общей редакцией А.В. Репникова. Первые две главы написаны А.В. Репниковым, третья глава - А.И. Черноморским.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности "Гироскопические приборы и устройства". Оно может быть использовано при изучении соответствующих разделов профилирующих курсов других специальностей, а также при курсовом и дипломном проектировании.

Глава I. ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ I.I. Ограничения, накладываемые на частотные характеристики систем стабилизации условиями динамической точности и устойчивости

Из разработанных к настоящему времени регулярных методов динамического синтеза гироскопических систем в практике расчета гиростабилизаторов наиболее широкое распространение получили частотные методы [2] , [I7] .

Системы гироскопической стабилизации можно рассматривать как системы слежения за внешними моментами. Существует прямая аналогия между следящими системами воспроизведения угла и гиростабилизаторами. Следовательно, можно применять для синтеза систем гироскопической стабилизации достаточно полно разработанный аппарат динамического синтеза следящих систем воспроизведения угла, использующий логарифмические характеристики.

Однако динамический синтез гиростабилизаторов имеет особенности, обусловленные динамическими характеристиками гироскопических измерительных элементов и той ролью, которую они играют в процессе стабилизации. Это, во-первых, разнотактность движений (медленные прецессионные движения и быстрые нутационные колебания гироскопов) и, во-вторых, использование моментов гироскопической реакции измерительных элементов для компенсации возмущающих моментов по осям стабилизации. В то же время в следящих системах воспроизведения угла инерционные моменты объекта стабилизации и исполнительного (разгрузочного) двигателя с редуктором обусловливают динамическое запаздывание, а в системах гироскопической стабилизации увеличение момента инерции объекта может способствовать повышению динамической точности стабилизации. В различных типах гиростабилизаторов эти факторы проявляются в разной степени, что, в свою очередь, определяет различие динамических свойств систем гироскопической стабилизации и, соответственно, средств коррекции, которые приходится использовать. При рассмотрении задачи синтеза основное внимание уделено особенностям динамических характеристик систем гироскопической стабилизации.

Главные динамические показатели качества работы гиростабилизатора - перерегулирование, быстродействие, колебательность и динамическая точность в условиях действия внешних возмущений. Источником внешних возмущений являются колебания основания гиростабилизатора. При колебаниях основания возникают инерционные нагрузочные моменты, диссипативные и инерционные моменты, связанные с обкаткой шестерен редуктора и ротора разгрузочного двигателя, моменты дебаланса и сил сухого трения в осях подвеса гиростабилизатора и т.д. Возмущающие воздействия гиростабилизатора в реальных условиях являются случайными функциями времени.

Однако если основанием гиростабилизатора является инерционный, хорошо демпфированный объект, как-то: самолет, корабль, обладающие свойством фильтрации высокочастотных помех, то при установившемся движении колебания основания в первом приближении могут быть аппроксимированы периодическими функциями времени. Примером таких колебаний могут быть фугоидные и рапидные движения самолета, регулярная качка корабля при волнении моря и т.д.

Собственные движения и реакция гиростабилизатора на периодические возмущения полностью определяются частотными характеристиками гиростабилизатора.

Далее принимается, что структура гиростабилизатора задана и известны его основные параметры.

Задача синтеза сводится к определению требований к частотным характеристикам системы стабилизации, обеспечивающих заданную точность стабилизации и запас устойчивости. Решение задачи предполагает определение коэффициентов усиления цепей разгрузки, постоянных времени отдельных звеньев, определение необходимых динамических характеристик корректирующих средств.

Примем за основу метод логарифмических амплитудных характеристик (ЛАХ) в модификации, данной в работах В.А. Бесекерского. Точность при этом определяется максимальной допустимой ошибкой стабилизации $\varphi_{1\,доп}$ и ограничениями, накладываемыми по условиям работы гиростабилизатора на отклонение по оси прецессии $\beta_{доп}$, т.е.

$$\varphi_1 \leqslant \varphi_{1\,доп}\,, \qquad \beta \leqslant \beta_{доп} \tag{I.I}$$

при заданнных $\varphi_{1\,доп}$ и $\beta_{доп}$.

В учебном пособии [I0] было показано, что увеличение необходимой точности при сохранении структуры гиростабилизатора ведет к увеличению коэффициента усиления цепи разгрузки и, следовательно, к уменьшению запаса устойчивости. При синтезе систем методом логарифмических характеристик запас устойчивости удобно оценивать по показателю колебательности. При формулировании требований по запасу устойчивости будем исходить из допустимых значений показателя колебательности M, т.е.

$$M \leqslant M_{доп}\,. \tag{I.2}$$

Для гиростабилизаторов эти значения лежат в пределах $M = I{,}I \div I{,}8$.

Отметим, что выполнение условия (I.I) при подавлении возмущающих воздействий нагрузки связано с формированием низкочастотной части логарифмических характеристик; выполнение условия (I.2) связано, соответственно, с формированием характеристик на средних и высоких частотах.

При использовании методов синтеза, основанных на применении логарифмических частотных характеристик, структурную схему одноосного гиростабилизатора целесообразно представить в виде схемы слежения по абсолютному углу стабилизации (углу прецессии). Передаточная функция гиростабилизатора в этом случае приводится к виду [I0]

$$\frac{\varphi_1}{M_{воз}} = \frac{W_{экв}}{1 + W_0} \tag{I.3}$$

Здесь $W_{экв}$ – передаточная функция преобразования возмущающего воздействия $M_{воз}$ в эквивалентные значения входного сигнала $\varphi_{экв}$ следящей системы с единичной отрицательной обратной связью, у которой в прямой цепи находится звено, имеющее передаточную функцию $W_0(s)$ (рис. I.I). При размыкании цепи разгрузки передаточная функция гиростабилизатора

$$W_0(s) = \frac{M_{раз}}{M_{гир} + M_{ин}} \tag{I.4}$$

определяет отношение изображения момента разгрузки к изображению суммы гироскопического и инерционного моентов, приложенных к оси стабилизации.

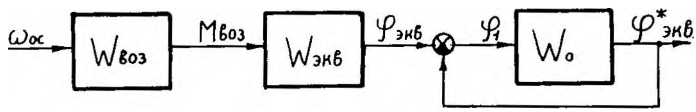

Рис. I.I.

Момент $M_{воз}$ обусловлен колебаниями основания гиростабилизатора. Ошибка следящей системы $\varphi_1 = \varphi_{экв} - \varphi^*_{экв}$ определяет ошибку гиростабилизатора.

При рассмотрении задачи ограничения углов прецессии структурная схема гиростабилизатора может быть приведена к схеме следящей системы, аналогичной рис. I.I.

В случае силового гиростабилизатора функция $W_{экв}$ будет определяться выражением [IO]

$$\left.\begin{aligned} W_{экв} &= \frac{J}{H^2}\,\frac{1}{T_o^2 s^2 + 2\xi_o T_o s + 1} \quad \text{по } \varphi_1; \\ W_{экв} &= \frac{1}{Hs}\,\frac{1}{T_o^2 s^2 + 2\xi_o T_o s + 1} \quad \text{по } \beta. \end{aligned}\right\} \qquad (I.5)$$

Рассмотрим требования к частотным характеристикам, определяемые заданной точностью стабилизации.

Ошибка замкнутой системы

$$\varphi_1 = \varphi_{экв} - \varphi^*_{экв};$$

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_{экв}}{1 + W_o(s)}. \qquad (I.6)$$

Пусть эквивалентный сигнал на входе следящей системы является гармонической функцией времени:

$$\varphi_{экв} = \varphi_{экв\,max} \sin \omega_{воз} t. \qquad (I.7)$$

Тогда амплитуда ошибки воспроизведения этого сигнала будет

$$\varphi_{1\,max} = \frac{\varphi_{экв\,max}}{\left|1 + W_0(j\,\omega_{воз})\right|}, \tag{I.8}$$

но поскольку ошибка системы должна быть меньше сигнала на входе, т.е. $\varphi_{1\,max} \ll \varphi_{экв\,max}$, то на частоте возмущающего воздействия $|W_0(j\omega_{воз})| \gg 1$ и вместо соотношения (I.8) можно использовать выражение

$$\varphi_{1\,max} \approx \frac{\varphi_{экв\,max}}{|W_0(j\,\omega_{воз})|}. \tag{I.9}$$

Отсюда следует, что при заданной частоте возмущающего воздействия $\omega_{воз}$ и заданной точности $\varphi_{1\,доп}$ частотная передаточная функция должна удовлетворять условию

$$|W_0(j\,\omega_{воз})| \geqslant \frac{\varphi_{экв\,max}}{\varphi_{1\,доп}}. \tag{I.10}$$

Это соотношение выполняется, если логарифмическая амплитудная характеристика расположена не ниже контрольной точки $L_к$ с координатами

$$L_к = L(\omega_{воз}) = 20\,lg\,|W_0(j\,\omega_{воз})| = 20\,lg\,\frac{\varphi_{экв\,max}}{\varphi_{1\,доп}}. \tag{I.11}$$

Если возмущающее воздействие имеет более общую периодическую характеристику изменения во времени, чем гармоническая функция, то спектру частот возмущающей функции будет соответствовать уже ряд контрольных точек, которые образуют границу запретной области, куда не может заходить логарифмическая амплитудная характеристика системы (рис. I.2). Это условие и лежит в основе формирования ЛАХ системы в низкочастотной области.

Принято считать, что система обладает требуемым запасом устойчивости, если модуль $A_0(\omega)$ амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы $W_0(j\omega)$ при аргументе $\varphi_0(\omega)$ (фазе) характеристики, равном π, отличается от единицы на величину, не меньшую $\pm H_{доп}$, и при модуле характеристики, равном единице, сдвиг по фазе имеет величину, не меньшую $\varphi_{доп}$ (рис. I.3). Значения $H_{доп}$ и $\varphi_{доп}$ принято соответственно называть допустимым запасом устойчивости по амплитуде и фазе. Таким образом, запас устойчивости системы определяется удалением годографа амплитудно-фазовой характеристики $W_0(j\omega)$ от точки (- I, $j0$).

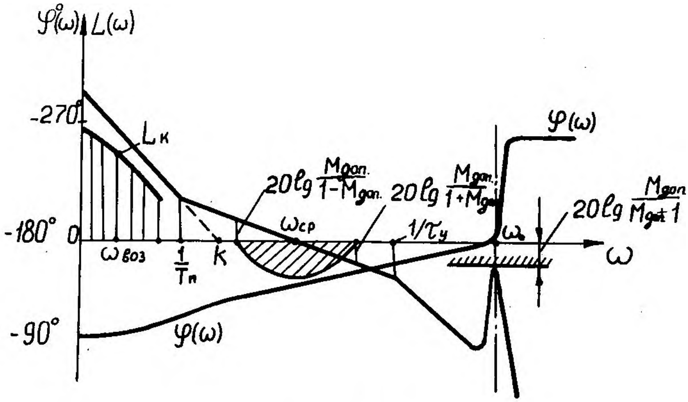

Рис. I.2

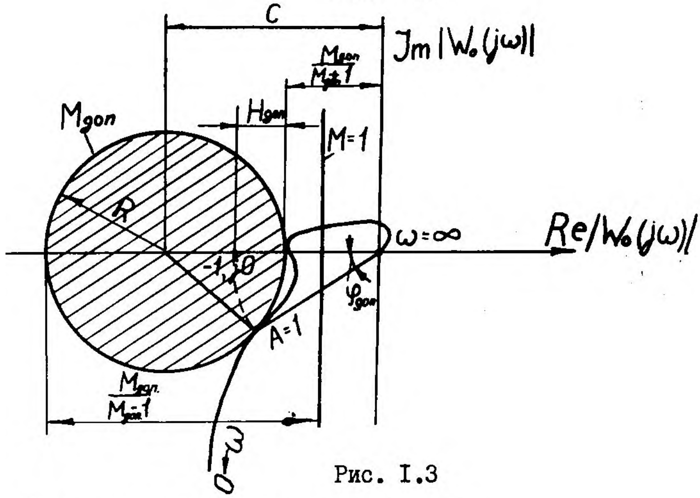

Рис. I.3

Показатель колебательности системы

$$M = \frac{|\Phi(j\omega)|_{max}}{\Phi(0)}, \qquad (I.12)$$

где $\Phi(j\omega) = \frac{W_0(j\omega)}{1 + W_0(j\omega)}$ – амплитудно-фазовая характеристика замкнутой системы, а $|\Phi(j\omega)|$ – максимальное значение модуля этой характеристики. Для астатических систем $\Phi(0)$ =I, т.е. показатель колебательности равен пику амплитудной частотной характеристики замкнутой системы. Чем больше значение M, тем ближе система находится к границе колебательной устойчивости и тем меньше запас устойчивости. Геометрическим местом точек на комплексной плоскости амплитудно-фазовой характеристики $W_0(j\omega)$, для которых показатель колебательности равен M, является окружность радиуса R (см. рис. I.3):

$$R = \frac{M}{M^2 - 1}, \tag{I.13}$$

центр которой помещается на действительной оси плоскости в точке, отстоящей влево от начала координат на величину

$$c = \frac{M^2}{M^2 - 1}. \tag{I.14}$$

При значении $M = 1$ окружность вырождается в прямую, параллельную оси ординат и смещенную влево от начала координат на величину 0,5. При $M \to \infty$ окружность вырождается в точку, совпадающую с точкой $(-1, j0)$. Таким образом, если при синтезе динамической системы гиростабилизатора ставится задача, чтобы показатель колебательности не превышал допустимого значения M, то для выполнения этого условия необходимо, чтобы годограф амплитудно-фазовой характеристики $W_0(j\omega)$ не заходил внутрь окружности, соответствующей значению $M_{доп}$. На рисунке эта запретная область заштрихована. Построения, приведенные на рис. I.3, позволяют определить допустимые значения модуля и аргумента амплитудно-фазовых характеристик, соответствующие границе запретной области:

$$\varphi = \arccos \frac{A_{гр}^2 + c}{2 A_{гр} c}. \tag{I.15}$$

Функция (I.15) определена для значений модуля $A_{гр}$, отвечающих условию

$$\frac{M_{доп}}{M_{доп} + 1} \leq A_{гр} \leq \frac{M_{доп}}{M_{доп} - 1}. \tag{I.16}$$

Если условие (I.16) не выполняется, то запас по фазе может быть любым, так как в этом случае годограф характеристики не может попасть в запретную зону. Поэтому выражение (I.15) может рассматриваться как запретная зона для фазовой характеристики, т.е. область, в которую не должна заходить фазовая характеристика системы, показатель колебательности которой не превышает заданного значения M.

Максимальная величина запаса по фазе на границе запретной зоны, как следует из (I.I5), составит

$$\varphi_{гр\,max} = \arccos \frac{\sqrt{M^2_{доп}-1}}{M_{доп}} = \arcsin \frac{1}{M_{доп}} . \qquad (I.I7)$$

Выражения (I.I5) и (I.I6) позволяют определить соотношения между допустимыми запасами устойчивости по амплитуде и фазе и показателем колебательности $M_{доп}$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{доп} &= \arccos \frac{2M^2_{доп}-1}{2M^2_{доп}} ; \\ H_{доп} &= 1 - \frac{M_{доп}}{1+M_{доп}} . \end{aligned}\right\} \qquad (I.I8)$$

При заданных значениях $\varphi_{доп}$ и $H_{доп}$ из решения системы (I.I8) определяется показатель колебательности $M_{доп}$, который должен отвечать условию (I.2).

Если использовать для синтеза системы ЛАХ, то для выполнения условия (I.2) необходимо и достаточно, чтобы на средних частотах , вблизи частоты среза (частоты, где ордината ЛАХ равна нулю) фазовая частотная характеристика системы не заходила в запретную зону и при резонансных частотах ω_0 , соответствующих $\varphi(\omega_0) = -\pi$, выполнялось условие

$$L(\omega_0) \leqslant 20 \lg \frac{M_{доп}}{M_{доп}+1} . \qquad (I.I9)$$

Последнее условие необходимо проверять в том случае, если передаточная функция $W_0(s)$ гиростабилизатора в знаменателе имеет колебательные звенья. Колебательные звенья обычно появляются как следствие использования гироскопических элементов, а также в связи с наличием упругих связей в редукторе разгрузочного двигателя и нежесткости подвеса платформы. При построении запретной зоны для частотной фазовой характеристики удобно ось абсцисс плоскости ЛАХ совместить со значениями ($-\pi$) фазовой характеристики (см.рис. I.2). Для построения запретной зоны удобно использовать графики зависимости (I.I5), представленные в логарифмическом масштабе (рис. I.4). Тогда для значений построенной ЛАХ по кривым рис. I.4 можно найти граничные значения запаса по фазе.

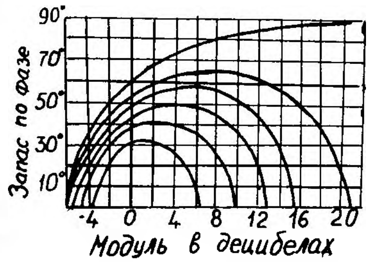

Рис. I.4

§ I.2. Силовой гиростабилизатор

Исходная передаточная функция при размыкании цепи разгрузки зависит от динамических характеристик усилителя и разгрузочного двигателя, от упругости редуктора и жесткости подвеса гиростабилизатора. Основываясь на уравнениях гиростабилизатора, приведенных в работе [IO] , рассмотрим наиболее характерные случаи.

Случай I. Безынерционные усилитель и обмотка управления двигателя. Передаточная функция соответствует интегрирующему и колебательному звеньям, включенным последовательно:

$$W_0(s) = \frac{k}{s}\,\frac{1}{T_0^2 s^2 + 2T_0\xi_0 s + 1}. \qquad (I.20)$$

Соответственно амплитудная логарифмическая характеристика определяется выражением

$$L = 20\lg\frac{k}{\omega}\,\frac{1}{\sqrt{(1-T_0^2\omega^2)^2 + (2\xi_0 T_0\omega)^2}}. \qquad (I.21)$$

Обычно относительный коэффициент демпфирования

$$\xi_0 = \frac{b}{2H}\sqrt{\frac{J}{J_{пл}}} < 0,01 .$$

Поэтому логарифмическая характеристика имеет резко выраженный резонансный пик при частоте собственных колебаний

$$\omega_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{H}{\sqrt{J_{пл}J}}$$

(рис. I.5). Частота собственных колебаний гораздо больше частоты среза: $\omega_0 > \omega_{ср} = k$. Фазовая характеристика в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - arctg\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} . \qquad (I.22)$$

При заданном показателе колебательности $M_{доп}$ на средних частотах фазовая характеристика не может попасть в запретную зону, так как сдвиг по фазе на частотах, меньших, чем резонансная, равен $-\frac{\pi}{2}$ (см. выражение (I.22)). Таким образом, в рассматриваемом случае ограничения, накладываемые на выбор параметров передаточной функции гиростабилизатора, связаны с выполнением условия (I.19). Это условие выполняется, если

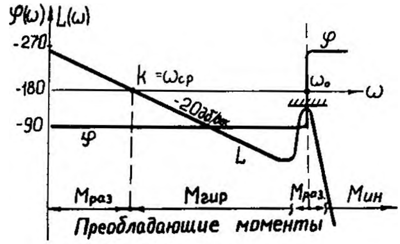

Рис. I.5

$$\left.\frac{k}{\omega}\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2T_0^2)^2+(2\xi_0T_0\omega)^2}}\right|_{при\ \omega=\omega_0} \leqslant \frac{M_{доп}}{M_{доп}+1}$$

или

$$\frac{k}{2\xi_0\omega_0} \leqslant \frac{M_{доп}}{M_{доп}+1} . \qquad (I.23)$$

Свобода выбора нормированного коэффициента усиления цепи разгрузки k и других параметров гиростабилизатора ограничена требованиями точности стабилизации. Если основным возмущающим фактором являются моменты, обусловленные колебаниями основания и возникающие из-за обкатки редуктора и ротора двигателя, то эти параметры могут быть определены, если известна скорость колебания основания ω_{oc} :

$$M_{воз} = W_{воз}\omega_{oc} . \qquad (I.24)$$

Здесь $W_{воз} = (ms+b) = (T_b s+1)b$ – возмущающая функция гиростабилизатора. (см. [10]). Пусть основание колеблется с угловой скоростью ω_{oc} , которая меняется по гармоническому закону:

$$\omega_{oc} = \omega_{oc\,max}\cdot \sin\omega_{воз} t ,$$

$\omega_{воз}$ – частота колебаний основания, $\omega_{воз} < \omega_{ср} = k$.

Эквивалентный угол слежения гиростабилизатора

$$\varphi_{экв} = W_{воз}(s) \cdot W_{экв}(s)\, \omega_{ос} , \qquad (I.25)$$

$W_{экв}$ - эквивалентная передаточная функция, определяется выражением (I.5) и на низких частотах приближенно может быть представлена усилительным звеном, имеющим коэффициент передачи $\frac{J}{H^2}$.

Амплитудное значение эквивалентного угла слежения

$$\varphi_{экв\,max} = \frac{J}{H^2} \sqrt{T_в^2 \omega_{воз}^2 + 1}\; b\; \omega_{ос\,max} . \qquad (I.26)$$

Передаточная функция гиростабилизатора на низких частотах может быть аппроксимирована передаточной функцией интегрирующего звена, и поэтому

$$\left| W_0 (j\omega) \right|_{\substack{при \\ \omega = \omega_{воз}}} \approx \frac{k}{\omega_{воз}} . \qquad (I.27)$$

Соотношения (I.26) и (I.27) позволяют по формуле (I.10) определить ограничения, накладываемые на параметры гиростабилизатора из условия заданной точности стабилизации:

$$\omega_{ос\,max}\, \omega_{воз} \sqrt{T_в^2 \omega_{воз}^2 + 1} \leq \frac{k H^2}{J b} \varphi_{доп} . \qquad (I.28)$$

Аналогичным образом могут быть получены условия ограничения угла прецессии гиростабилизатора:

$$\omega_{ос\,max} \sqrt{T_в^2 \omega_{воз}^2 + 1} \leq \frac{k H}{b} \beta_{доп} . \qquad (I.29)$$

Выполнение условий (I.28), (I.29) и (I.23) гарантирует прохождение ЛАХ выше контрольных точек на низких частотах и ниже запретной зоны вблизи резонансной частоты системы. Если эти условия одновременно не могут быть удовлетворены путем выбора соответствующих значений параметров гиростабилизатора, то приходится прибегать к корректирующим средствам, позволяющим повысить общий коэффициент усиления цепи разгрузки при обеспечении устойчивости системы.

<u>Случай 2. Учет постоянных времени в цепи разгрузки.</u> При использовании магнитного усилителя в цепи разгрузки гиростабилизатора передаточная функция $W_0(s)$ будет содержать апериодическое звено:

$$W_0(s) = \frac{k}{s}\,\frac{1}{1+\tau_y s}\cdot\frac{1}{T_0^2 s^2 + 2\xi_0 T_0 s + 1}\,. \tag{I.30}$$

Здесь τ_y – постоянная времени усилителя.

К этому же виду передаточной функции сводится случай безынерционного усилителя ($\tau_y = 0$) при инерционной обмотке управления двигателя.

Логарифмическая характеристика определяется выражением

$$L(\omega) = 20\lg\frac{k}{\omega}\,\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau_y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 T_0^2)^2 + (2\xi_0 T_0\omega)^2}}\,. \tag{I.31}$$

Фазовая характеристика

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\omega\tau_y - \operatorname{arctg}\frac{2\xi_0\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\,. \tag{I.32}$$

Частотные характеристики гиростабилизатора изображены на рис. I.2.

При учете постоянных времени в цепи разгрузки уже приходится обеспечивать условия устойчивости как на средних частотах, так и на частотах, близких к резонансной.

Как показано в работе [2] , фазовая частотная характеристика системы при наличии в цепи регулирования апериодического звена не будет попадать на средних частотах в запретную зону, если выполняется условие

$$\tau_y \leqslant \frac{1}{k}\,\frac{M_{доп}^2 + M_{доп}\sqrt{M_{доп}^2 - 1}}{2}\,. \tag{I.33}$$

Полагая, как и ранее, что пик ЛАХ имеет место при частоте $\omega = \omega_0$, можно условие (I.19) представить в виде

$$\frac{k}{2\omega_0\,\xi_0\sqrt{\tau_y^2\omega_0^2 + 1}} \leqslant \frac{M_{доп}}{M_{доп} + 1} \tag{I.34}$$

или, пренебрегая под знаком корня единицей по сравнению с $\tau_y^2\,\omega_0^2$, получить

$$\frac{k}{2\xi_0\,\omega_0^2} \leqslant \frac{M_{доп}}{M_{доп} + 1}\,\tau_y\,. \tag{I.35}$$

Соответственно если при рассмотрении условий точности аппроксимировать на низких частотах передаточную функцию гиростабилизатора передаточной функцией последовательно включенных интегрирующего и апериодического звеньев, то на частоте возмущающего воздействия получим

$$\left| W_0(j\omega) \right|_{при\ \omega=\omega_{воз}} \approx \frac{k}{\omega_{воз}} \sqrt{\tau_y^2\ \omega_{воз}^2 + 1}, \tag{I.36}$$

и условиями обеспечения допустимых значений отклонений по углу стабилизации и прецессии будут:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{ос\,max}\,\omega_{воз} \frac{\sqrt{T_в^2\,\omega_{воз}^2 + 1}}{\sqrt{\tau_y^2\,\omega_{воз}^2 + 1}} &\leq \frac{k\,H^2}{J\,b}\,\varphi_{доп}\,; \\ \omega_{ос\,max} \frac{\sqrt{T_в^2\,\omega_{воз}^2 + 1}}{\sqrt{\tau_y^2\,\omega_{воз}^2 + 1}} &\leq \frac{k\,H}{b}\,\beta_{доп}\,. \end{aligned}\right\} \tag{I.37}$$

Таким образом, из неравенств (I.34) и (I.37) можно сделать вывод, что наличие динамического запаздывания в усилителе (в обмотке управления двигателя) цепи разгрузки уменьшает вредное влияние возмущений, обусловленных обкаткой редуктора и ротора двигателя, и повышает запас устойчивости системы по амплитуде. Однако в связи с тем, что одновременно уменьшается запас устойчивости гиростабилизатора по фазе, изменение постоянной времени усилителя ограничено пределами условия (I.33).

Случай 3. Учет нежесткости подвеса ротора гироскопа. Выше были рассмотрены динамические характеристики гиростабилизатора в предположении абсолютной жесткости его элементов. Упругая податливость подшипников ротора гироскопа в радиальном направлении может явиться причиной изменения собственных частот гиростабилизатора и соответственно изменения его динамических характеристик. Влияние угловой жесткости подвеса на динамику силового гиростабилизатора наиболее подробно рассмотрено в работах [4] , [2] . На рис. I.6 податливость подшипников подвеса гиромотора обозначена в виде упругой связи жесткостью $C_п$, обусловливающей дополнительную степень свободы γ ротору в направлении оси стабилизации. Ограничиваясь для простоты изучением собственного движения, составим уравнение платформы с учетом упругой связи:

$$(J_{пл} s + b)\omega_1 + k_\alpha \beta + C_п(\varphi_1 - \gamma) = 0 \tag{I.38}$$

и уравнения гироскопического чувствительного элемента

$$\left.\begin{aligned} &Js^2\gamma + H\omega_1 + C_п(\varphi_1 - \gamma) = 0; \\ &Js\omega_1 - Hs\gamma + ns\beta = 0. \end{aligned}\right| \tag{I.39}$$

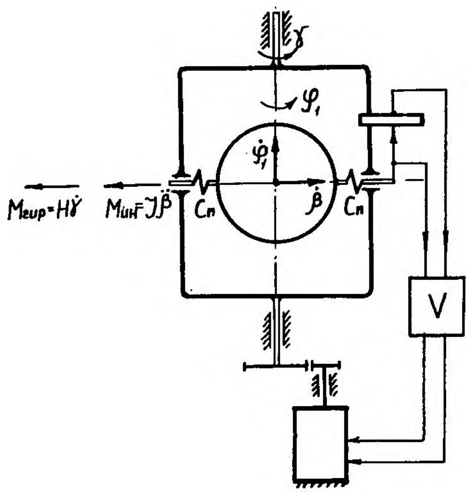

Рис. I.6

Разорвав цепь разгрузки и положив $k_\alpha = n = b = 0$, уравнения частот механической системы (I.38) и (I.39) представим в виде

$$p^4 + (\lambda^2 + r^2 + q^2)p^2 + \lambda^2 q^2 = 0. \tag{I.40}$$

Здесь использованы обозначения:

$$\lambda = \frac{H}{J}; \quad r = \frac{C_п}{J}; \quad q = \frac{C_п}{J_{пл}}.$$

Найдем корни этого биквадратного уравнения:

$$p^2 = -\frac{1}{2}(\lambda^2 + r^2 + q^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\lambda^2 + r^2 + q^2) - 4\lambda^2 q^2}\,. \qquad (I.41)$$

После упрощений, связанных с неучетом величин второго порядка малости, значения корней можно представить в виде (см. [I5])

$$\left.\begin{aligned} p_1^2 &= -\frac{C_п}{J}\left(1 + \frac{H^2}{C_п J}\right); \\ p_2^2 &= -\frac{H^2}{J J_{пл}}\,\frac{1}{1 + \dfrac{H^2}{C_п J}}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (I.42)$$

Соответственно собственные частоты гиростабилизатора

$$\omega_y^* = \sqrt{1 + \frac{H^2}{C_п J}} \cdot \sqrt{\frac{C_п}{J}}\;; \qquad (I.43)$$

$$\omega_0^* = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{H^2}{C_п J}}}\,\frac{H}{\sqrt{J J_{пл}}}\,. \qquad (I.44)$$

Если подвес абсолютно жесткий, т.е. $C_п = \infty$, то

$$\left.\begin{aligned} \omega_y^* &= \infty\;; \\ \omega_0^* &= \omega_0 = \frac{H}{\sqrt{J J_{пл}}}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (I.45)$$

Если остановить вращение ротора гироскопа, т.е. положить $H = 0$, то

$$\left.\begin{aligned} \omega_y^* &= \omega_y = \sqrt{\frac{C_п}{J}}\;; \\ \omega_0^* &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (I.46)$$

Первое выражение в (I.46) определяет частоту собственных упругих колебаний платформы, второе выражение в (I.45) – частоту нутационных колебаний жесткого гиростабилизатора. Обозначим μ^2 через $\mu^2 = I + \frac{H^2}{J C_п}$ и назовем μ коэффициентом влияния упругости подвеса. Тогда собственные частоты гиростабилизатора (I.43) и (I.44) можно представить в виде

$$\omega_y^* = \omega_y \mu ; \qquad (I.47)$$

$$\omega_0^* = \frac{\omega_0}{\mu} . \qquad (I.48)$$

Так как $\mu > I$, то частота упругих колебаний платформы из-за гироскопического эффекта увеличивается в μ раз, а нутационная частота гиростабилизатора из-за упругого эффекта уменьшается соответственно в μ раз. Эффект упругости подвеса равносилен увеличению приведенного момента инерции гиростабилизатора по оси прецессии на величину

$$\Delta J = \frac{H^2}{C_п} . \qquad (I.49)$$

В качестве примера рассмотрим гиростабилизатор с параметрами

$$H = 2{,}94 \text{ кг}\cdot\text{м}^2\cdot \text{с}^{-I};$$
$$J = I{,}56 \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$
$$C_п = 4{,}4I\cdot I0^3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-2}\cdot\text{рад}^{-I}.$$

Для такого гиростабилизатора

$$\mu = 2{,}25; \qquad \Delta J = 3{,}53\cdot I0^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Передаточную функцию гиростабилизатора с упругим подвесом представить в виде простейших сомножителей не удается. Однако в первом приближении можно записать качественное соотношение:

$$W_0 \approx \frac{k}{s} \frac{1}{T_0^{*2} s^2 + 2\xi_0^* T_0^* s + 1} \frac{1}{T_п^2 s^2 + 2\xi_п T_п s + 1} . \qquad (I.50)$$

Здесь

$$T_0^* = \frac{1}{\omega_0^*} = \frac{\sqrt{J_{пл}(J+\Delta J)}}{H}; \quad \xi_0^* = \frac{b}{2H}\sqrt{\frac{J+\Delta J}{J_{пл}}}; \quad T_п = \frac{1}{\omega_y^*}; \quad \xi_п < \xi_0^* .$$

Таким образом, два последних сомножителя соответствуют слабо демпфированным колебаниям. Логарифмическая амплитудная характеристика имеет вид

$$L(\omega) = 2\lg\frac{k}{\omega}\,\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 T_0^{*2})^2+(2\xi_0^* T_0^*\omega)^2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 T_п^2)^2+(2\xi_п T_п\,\omega)^2}}. \tag{I.51}$$

Частотные характеристики для математической модели (I.51) изображены на рис. I.7. Амплитудная характеристика имеет два пика – на частотах ω_0^* и ω_y^*. Ограничения необходимо накладывать только на первый пик ЛАХ, так как он находится в зоне фазовых сдвигов, близких к $\varphi(\omega) = -\pi$, при которых определяется запас устойчивости по амплитуде. Второй пик не может попасть в запретную зону, так как при частоте ω_y^* фазовая характеристика имеет фазовый сдвиг, отличный от $-\pi$. Для оценки параметров можно пользоваться в этом случае условиями, полученными для жесткого гиростабилизатора, если вместо момента инерции J положить момент инерции

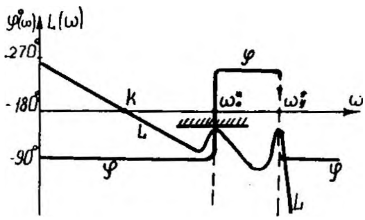

Рис. I.7

$$J^* = J + \Delta J, \tag{I.52}$$

ΔJ определяется по формуле (I.49).

Из условия (I.23) следует, что при использовании безынерционного усилителя упругость подвеса практически не влияет на запас устойчивости гиростабилизатора. При учете постоянных времени усилителя и обмотки управления двигателя упругость подвеса снижает запас устойчивости.

Случай 4. Учет упругости редуктора разгрузочного двигателя. Упругая податливость редуктора обусловлена смятием контактирующих зубьев шестерен. На рис. I.8 упругость редуктора обозначена пружиной жесткостью C_p , связывающей выходную ось редуктора с осью стабилизации платформы. На рисунке показаны обобщенные координаты φ_1 , β , æ – соответственно углы стабилизации, прецессии и угол поворота ротора разгрузочного двигателя, приведенный к оси стабилизации. Как и в случае упругого подвеса, рассмотрим линейные уравнения собственного движения гиростабилизатора, представив их в виде

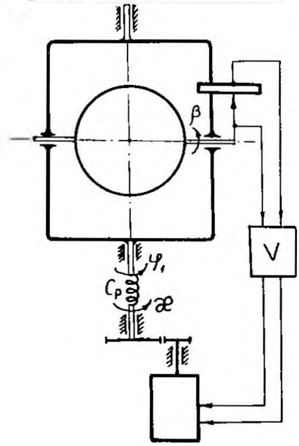

Рис. I.8

$$\left.\begin{aligned} &\beta = W_{изм}(s)\omega_1;\\ &(ms^2+bs)\text{æ} = -W_p(s)\beta + C_p(\varphi_1-\text{æ});\\ &J_\alpha s\,\omega_1 = -W_{гир}(s)\omega_1 - C_p(\varphi_1-\text{æ}). \end{aligned}\right\} \quad (I.53)$$

Здесь J_α – момент инерции платформы без учета моментов инерции редуктора и ротора двигателя.

Исключая æ из системы уравнений (I.53), получаем

$$\left.\begin{aligned} &\beta = W_{изм}(s)\omega_1;\\ &\left(J_\alpha s + \frac{ms+b}{T_p^2 s^2 + 2\xi_p T_p s + 1}\right)\omega_1 = -W_{гир}(s)\omega_1 -\\ &\qquad -\frac{W_p\beta}{T_p^2 s^2 + 2\xi_p T_p s+1}, \end{aligned}\right\} \quad (I.54)$$

где $T_p = \sqrt{\frac{m}{C_p}}$, $\xi_p = \frac{b}{\sqrt{mC_p}}$ – постоянная времени и относительный коэффициент демпфирования цепи разгрузки за счет упругих свойств редуктора.

Из (I.54) следует, что упругость редуктора можно учесть путем включения дополнительного колебательного звена в цепь разгрузки и введения дополнительной обратной связи, охватывающей платформу (рис. I.9).

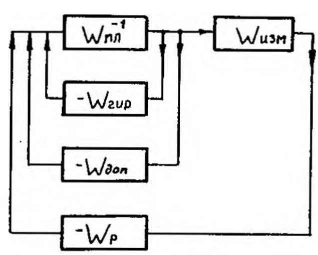

Рис. I.9

Для электрического привода $J_\alpha \gg m$, и в диапазоне собственных частот демпфирующий момент $b\omega_1$ мал по сравнению с инерционным. Так как

$$\frac{1}{T_p^2 s^2 + 2\xi_p T_p s + 1} = \frac{C_p}{ms^2 + bs + C_p}, \qquad (I.55)$$

то можно принять, что передаточная функция дополнительной обратной связи

$$W_{доп} \approx ms + b, \qquad (I.56)$$

т.е. влияние упругости редуктора сводится практически к появлению дополнительного колебательного звена в цепи разгрузки гиростабилизатора. Поэтому данный случай аналогичен рассмотренному выше случаю нежесткого подвеса. При безынерционном усилителе цепи разгрузки упругость редуктора гиростабилизатора с демпфированием на оси двигателя повышает запас устойчивости, а при учете постоянной времени упругость редуктора может привести к уменьшению запаса устойчивости.

§ I.3. Индикаторный гиростабилизатор

В индикаторном гиростабилизаторе возмущающие моменты, действующие вокруг осей стабилизации, компенсируются только моментами разгрузочных двигателей. Моменты гироскопической реакции чувствительных элементов, противодействующие возмущающим моментам, либо настолько малы, что ими можно пренебречь, либо отсутствуют. Если в структурной схеме, соответствующей собственным движениям гиростабилизатора, не учитывать обратную связь по гироскопическому моменту (на рис. I.10 она показана пунктиром), то при размыкании цепи разгрузки в точке a передаточная функция гиростабилизатора может быть представлена в виде

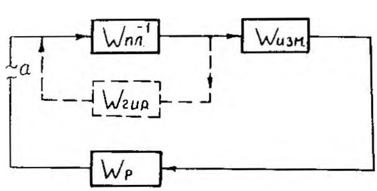

Рис. I.10

$$W_0 = W_{пл}^{-1} W_{изм} W_p \quad . \qquad (I.57)$$

Передаточная функция определяет отношение разгрузочного момента к инерционному моменту платформы. Динамические свойства индикаторного гиростабилизатора в значительной мере зависят от типа чувствительного элемента (гироскопа), который выполняет роль индикатора нагрузки. Чувствительными элементами могут быть дифференцирующие, интегрирующие и астатические, дважды интегрирующие гироскопы. Сигналы с гироскопов поступают на усилители, управляющие разгрузочными двигателями. В соответствии с типом чувствительного элемента управление разгрузочными двигателями производится по угловой скорости изменения угла стабилизации, по углу стабилизации и по интегралу изменения угла стабилизации. Ниже будут рассмотрены различные случаи управления при учете постоянных времени усилителя и обмотки управления двигателя. Отметим, что постоянные времени привода цепи разгрузки в индикаторных гиростабилизаторах играют важную роль в формировании динамических свойств системы.

Случай I. Управление по угловой скорости. Дифференцирующий гироскоп в структурной схеме в ряде случаев может быть замещен колебательным звеном с передаточной функцией

$$W_{изп} = \frac{H}{Js^2 + ns + C} = \frac{k_д}{T_д^2 s^2 + 2\xi_д T_д s + 1}, \tag{I.58}$$

где $k_д$ - коэффициент усиления гироскопа в статике, определяет отношение угла прецессии к угловой скорости изменения угла стабилизации (основания прибора);

$T_д$ и $\xi_д$ - постоянная времени и относительный коэффициент демпфирования дифференцирующего гироскопа.

Обычно выбирают $\xi_д = 0,5 \div 0,7$ и собственную частоту прибора $\omega_д = \frac{1}{T_д}$, в 3 - 10 раз большую частоты среза гиростабилизатора.

Передаточная функция платформы соответствует апериодическому звену:

$$W_{пл}^{-1} = \frac{1}{J_{пл} s + b} = \frac{1}{b(T_п s + 1)}. \tag{I.59}$$

При учете постоянной времени усилителя $\tau_у$ привод цепи разгрузки в структурной схеме может быть замещен апериодическим звеном, имеющим передаточную функцию

$$W_р = \frac{k_р}{(\tau_у s + 1)}. \tag{I.60}$$

Итак, для передаточной функции разомкнутого гиростабилизатора имеем

$$W_0(s) = \frac{k_\alpha}{(T_n s + 1)(\tau_y s + 1)(T_\partial^2 s^2 + 2\xi_\partial T_\partial s + 1)} . \qquad (I.61)$$

Здесь $k_\alpha = k_p k_\partial \frac{1}{b}$ - общий коэффициент усиления гиростабилизатора.

Логарифмические частотные характеристики передаточной функции (I.61) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} L(\omega) &= 20\lg \frac{k_\alpha}{\sqrt{T_n^2\omega^2+1}\cdot\sqrt{\tau_y^2\omega^2+1}\sqrt{(1-\omega^2T_\partial^2)^2+(2\xi_\partial T_\partial\,\omega)^2}} ;\\ \varphi(\omega) &= -\operatorname{arctg} T_n\omega - \operatorname{arctg}\tau_y\omega - \operatorname{arctg}\frac{2\xi_\partial\frac{\omega_\partial}{\omega}}{1-\frac{\omega_\partial}{\omega}} . \end{aligned}\right\} \qquad (I.62)$$

В районе пересечения ЛАХ и нуля оси децибел передаточная функция может быть приближенно представлена передаточной функцией системы с астатизмом первого порядка

$$W(s) = \frac{\omega_\delta}{s(1+\tau_y s)} ,$$

где ω_δ - базовая частота ЛАХ; $\omega_\delta = \frac{k_\alpha}{T_n}$.

Тогда условия обеспечения допустимого показателя колебательности можно представить, как и в случае силового гиростабилизатора с инерционным усилителем (см. выражение (I.33)), соотношением

$$\frac{k_\alpha \tau_y}{T_n} \leqslant \frac{M_{\partial on}^2 + M_{\partial on}\sqrt{M_{\partial on}^2 - 1}}{2} . \qquad (I.63)$$

Отметим, что базовая частота ω_δ силового гиростабилизатора равнялась $\frac{1}{k_\alpha}$. Так как колебательное звено дифференцирующего гироскопа не имеет резко выраженных резонансных свойств, то отпадает необходимость проверки попадания ЛАХ в запретную зону на частоте собственных колебаний дифференцирующего гироскопа. Из формулы (I.63) видно, что увеличение момента инерции (постоянной времени T_n) платформы увеличивает запас устойчивости, а увеличение постоянной времени усилителя его уменьшает.

Вынужденное движение гиростабилизатора определяется передаточной функцией

$$\frac{\varphi_1}{M_{воз}} = \Phi(s)\frac{1}{W_p(s)}\frac{1}{W_{изм}(s)}\cdot\frac{1}{s} = \frac{W_{пл}^{-1}(s)}{s}\;\frac{1}{1+W_0(s)}\;. \tag{I.64}$$

Соответственно эквивалентная передаточная функция слежения по углу стабилизации будет

$$W_{экв} = \frac{W_{пл}^{-1}(s)}{s}\;. \tag{I.65}$$

При гармонических колебаниях основания формулы (I.25), (I.65) позволяют определить амплитудные значения $\varphi_{экв}$ на частоте возмущающего воздействия $\omega_{воз}$:

$$\varphi_{экв\,max} = \frac{1}{\omega_{воз}}\frac{\sqrt{T_в^2\,\omega_{воз}^2+1}}{\sqrt{T_п^2\,\omega_{воз}^2+1}}\,\omega_{oc\,max}\,. \tag{I.66}$$

Модуль передаточной функции (I,6I) на низких частотах $\omega_{воз} < \frac{1}{T_п}$ имеет значение

$$\left|\,W_0(j\,\omega_{воз})\right| = \frac{k_\alpha}{\sqrt{T_п^2\,\omega_{воз}^2+1}}\;. \tag{I.67}$$

Подставляя (I.66) и (I.67) в (I.I0), получаем условие, при котором амплитуда вынужденных колебаний гиростабилизатора не превышает допустимых значений:

$$k_\alpha\,\varphi_{1\,доп} \geqslant \frac{1}{\omega_{воз}}\sqrt{T_в^2\,\omega_{воз}^2+1}\;\omega_{oc\,max}\,. \tag{I.68}$$

Из полученного соотношения следует, что ошибка стабилизации, обусловленная обкаткой шестерен редуктора и ротора двигателя, зависит от коэффициента усиления цепи разгрузки. В рассматриваемом случае, как и в случае силового гиростабилизатора, увеличение постоянной времени $T_в$ по оси стабилизации приводит к увеличению ошибки стабилизации, но в гораздо большей степени, чем у силового гиростабилизатора (см. выражение (I.28)). Так как система имеет малый коэффициент усиления на низких частотах, то и при других возмущениях ошибка стабилизации получается большой.

Случай 2. Управление по углу стабилизации. Интегрирующий гироскоп имеет следующую передаточную функцию:

$$W_{изм} = \frac{H}{Js^2+ns} = \frac{H}{n(T_{ин}s+1)s} . \tag{I.69}$$

Остальные передаточные функции динамических звеньев разомкнутой цепи гиростабилизатора аналогичны рассмотренным ранее (см. случай I). Поэтому

$$W_0(s) = \frac{k_\alpha}{s(T_п s+1)(\tau_у s+1)(T_{ин}s+1)} . \tag{I.70}$$

Здесь $k_\alpha = \frac{Hk_p}{nb}$.

Логарифмические частотные характеристики гиростабилизатора определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned} L(\omega) &= \lg\frac{k_\alpha}{\omega\sqrt{T_п^2\omega^2+1}\cdot\sqrt{\tau_у^2\omega^2+1}\cdot\sqrt{T_{ин}^2\omega^2+1}} ; \\ \varphi(\omega) &= -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} T_п\omega - \operatorname{arctg}\tau_у\omega - \operatorname{arctg} T_{ин}\omega. \end{aligned}\right\} \tag{I.71}$$

Так как система имеет астатизм первого порядка, то условия обеспечения допустимого показателя колебательности можно приближенно представить в виде [2]

$$k_\alpha(T_п+\tau_у+T_{ин}) \leqslant \frac{M_{доп}^2+M_{доп}\sqrt{M_{доп}^2-1}}{2} \tag{I.72}$$

для значений $M_{доп} \leqslant 1{,}3$. Формула (I.72) дает точные значения при $M_{доп} = 1$. Таким образом, запас устойчивости гиростабилизатора в данном случае меньше, чем при управлении по скорости.

При возмущающих воздействиях для амплитудных значений $\varphi_{экв}$ справедлива формула (I.66).

Значение модуля передаточной функции на низких частотах ($\omega_{воз} < \frac{1}{T_п}$) будет

$$|W_0(j\omega_{воз})| \approx \frac{k_\alpha}{\omega_{воз}} , \tag{I.73}$$

и, соответственно, условия точности стабилизации (I.10) примут вид

$$k_\alpha \, \mathcal{G}_{доп} \geqslant \frac{\sqrt{T_б^2 \omega_{воз}^2 + 1}}{\sqrt{T_п^2 \omega_{воз}^2 + 1}} \, \omega_{oc\,max} , \tag{I.74}$$

т.е. точность стабилизации при управлении по углу больше, чем при управлении по угловой скорости.

Случай 3. Управление по интегралу угла стабилизации. Передаточная функция дважды интегрирующего гироскопа может быть представлена в виде

$$W_{изм} = \frac{H}{J s^2} , \tag{I.75}$$

и, соответственно, передаточная функция разомкнутой цепи разгрузки гиростабилизатора

$$W_o(s) = \frac{H}{J s^2} \; \frac{k_\alpha}{b(T_п s + 1)(\tau_y s + 1)} . \tag{I.76}$$

Логарифмические характеристики:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{H k_\alpha}{J b \omega^2 \sqrt{(T_п^2 \omega^2 + 1)(\tau_y^2 \omega^2 + 1)}} ; \tag{I.77}$$

$$\varphi(\omega) = -\pi - arc\,tg\, T_п \omega - arc\,tg\, \tau_y \omega . \tag{I.78}$$

Гиростабилизатор неработоспособен по условиям устойчивости, но низкочастотная часть его амплитудной характеристики такова, что он обладает хорошими свойствами подавления вынужденных колебаний. Поэтому при управлении по интегралу угла стабилизации в цепь регулирования обязательно должны включаться корректирующие устройства.

На рис. I. II приведены типовые асимптотические ЛАХ, построенные без учета динамического запаздывания усилителя и обмотки двигателя при одинаковых частотах среза. Цифровые обозначения характеристик соответствуют порядковым номерам рассмотренных случаев управления.

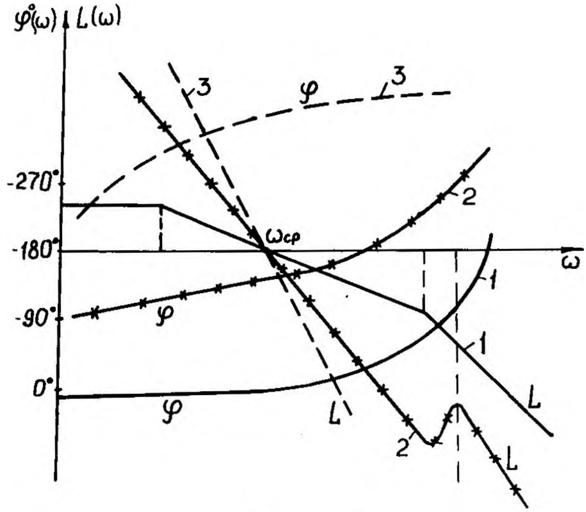

Рис. I.II

ЛАХ иллюстрируют изменения динамических свойств гиростабилизаторов при переходе от управления по скорости к управлению по интегралу угла стабилизации: запас устойчивости уменьшается, но фильтрующие свойства системы на низких частотах усиливаются.

§ I.4. Физическая интерпретация динамического процесса стабилизации

Условия обеспечения динамической точности и необходимого запаса устойчивости силового и индикаторного гиростабилизаторов были получены на основе анализа передаточной функции и соответствующих частотных характеристик разомкнутой системы. В стабилизации платформы участвуют три вида моментов: разгрузочный $M_{раз}$, гироскопический $M_{гир}$ и инерционный $M_{ин}$.

Как отмечалось выше, передаточная функция разомкнутой системы W_0 силового гиростабилизатора представляет собой отношение разгрузочного момента к сумме гироскопического и инерционного моментов. Соответственно в индикаторном гиростабилизаторе гироскопический момент непосредственно не участвует в процессе стабилизации. Анализ изменения указанных моментов в связи с частотными характеристиками гиростабилизаторов позволяет дать физическую интерпретацию динамических процессов стабилизации и определить факторы, влияющие на выбор типа гиростабилизатора.

На рис. I.12 приведена векторная диаграмма моментов при гармонических колебаниях платформы и разомкнутой цепи разгрузки. Принято, что нулевую фазу имеют колебания платформы. Тогда:

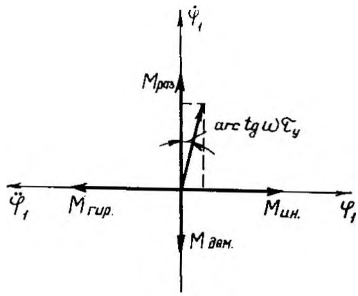

Рис. I.12

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1 = \varphi_{1max}\sin\omega t\;; \quad \beta = \frac{H}{J\omega}\varphi_{1max}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right);\\
&\dot{\varphi}_1 = \varphi_{1max}\,\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right); \quad \dot{\beta} = \frac{H}{J}\varphi_{1max}\sin\omega t\,;\\
&\ddot{\varphi}_1 = \varphi_{1max}\,\omega^2\sin(\omega t + \pi)\,; \quad \ddot{\beta} = \frac{H}{J}\omega\varphi_{1max}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (I.79)$$

Если учесть отрицательную обратную связь при замыкании цепи разгрузки, то можно обнаружить, что при стабилизации гироскопический момент меняется в противофазе с колебаниями платформы (см.§ I.3 в работе [10]):

$$M_{гир} = \frac{H^2}{J}\varphi_{1max}\sin(\omega t + \pi)\;; \qquad (I.80)$$

инерционный момент - синфазно с колебаниями платформы:

$$M_{ин} = J_{пл}\,\omega^2\varphi_{1max}\sin\omega t\,; \qquad (I.81)$$

соответственно, момент разгрузки опережает колебания платформы по фазе на $\frac{\pi}{2}$:

$$M_{раз} = -k_\alpha\beta = \frac{k_\alpha H}{J\omega}\varphi_{1max}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (I.82)$$

а демпфирующий момент отстает от колебаний платформы по фазе на $\frac{\pi}{2}$:

$$M_{дем} = b\,\omega\,\varphi_{1max}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (I.83)$$

Амплитудные и фазовые соотношения указанных моментов определяются соответствующими частотными характеристиками. В силовых гиростабилизаторах на низких частотах $\omega < \omega_{cp}$, инерционный момент мал и стабилизация осуществляется главным образом разгрузочным моментом. На частоте среза разгрузочный момент становится приблизительно равным гироскопическому. При дальнейшем увеличении частоты преобладает уже гироскопический момент, причем одновременно увеличивается роль инерционного момента. В диапазоне частот $\omega_{cp} < \omega < \omega_0$ стабилизация осуществляется в основном гироскопическим моментом. Однако по мере увеличения частоты гироскопический и инерционный моменты компенсируют друг друга, и вблизи частоты ω_0 стабилизация осуществляется опять разгрузочным моментом. При частотах $\omega > \omega_0$ инерционный момент играет преобладающую роль в стабилизации платформы (см. рис. I.5).

Как было отмечено выше, наличие динамического запаздывания в усилителе цепи разгрузки уменьшает вредное влияние возмущений, вызванных обкаткой двигателя и редуктора при колебаниях основания, и повышает запас устойчивости по амплитуде. Полученный на первый взгляд парадоксальный вывод о положительной роли динамического запаздывания может быть легко объяснен.

При наличии динамического запаздывания в приводе момент разгрузки при гармонических колебаниях платформы

$$M_{раз} = \frac{k_\alpha H}{J\omega} \left| \frac{\varphi_{1max}}{\sqrt{\tau_y^2 \omega^2 + 1}} \right| \sin\left[\omega t + \frac{\pi}{2} - arctg\, \tau_y \omega\right] . \qquad (I.84)$$

Таким образом, наличие постоянной времени τ_y уменьшает составляющую разгрузочного момента в направлении вектора скорости колебаний платформы и приводит к появлению составляющей, совпадающей по фазе с инерционным моментом. На низких частотах одновременно с уменьшением разгрузочного момента уменьшается и возмущающий диссипативный момент обкатки ротора двигателя.

Уменьшение момента разгрузки в случае силового гиростабилизатора компенсируется эффективным действием гироскопического момента, определяющего процесс стабилизации на частотах $\omega_{cp} \div \omega_0$.

В то же время вблизи нутационной частоты динамические характеристики гиростабилизатора определяются приводом, так как гироскопический момент нейтрализуется действием инерционного момента. В этом случае уменьшение составляющей разгрузочного момента в направлении вектора скорости колебаний платформы способствует демпфированию собственных колебаний. Вторая составляющая разгрузочного момента уменьшает собственную частоту колебаний гиростабилизатора, однако для реальных значений параметров гиростабилизатора изменение собственной частоты незначительно, и эту составляющую можно не учитывать. В общем случае уменьшение нутационной частоты нежелательно, так как оно приводит к уменьшению крутизны в канале разгрузки, к сужению диапазона рабочих частот и, как следствие этого, к ухудшению качества стабилизации.

При силовой стабилизации увеличение моментов инерции платформы приводит к уменьшению частоты нутационных колебаний и является, следовательно, неблагоприятным для процесса стабилизации фактором. К уменьшению нутационной частоты, как было показано выше, приводит и нежесткость подвеса гироскопа. Дадим физическое объяснение этого явления. Пусть гироскоп, у которого ротор связан с платформой с помощью упругих связей, вращается вокруг оси прецессии с абсолютной угловой скоростью $\dot{\beta}$ (см. рис. I.6). Как следствие, возникает гироскопический момент относительно вертикальной оси, который приведет к закрутке упругой связи на угол, определяемый из соотношения

$$\dot{\beta} H = C_n \gamma . \tag{I.85}$$

При ускоренном движении относительно оси прецессии угол будет меняться со скоростью

$$\dot{\gamma} = \frac{H}{C_n} \ddot{\beta} . \tag{I.86}$$

Угловая скорость $\dot{\gamma}$, в свою очередь, приведет к появлению момента гироскопической реакции, по оси прецессии в направлении, обратном ускоренному движению $\ddot{\beta}$.

Совпадение по фазе момента гироскопической реакции с инерционным моментом по своему эффекту равносильно увеличению момента инерции гиростабилизатора относительно оси прецессии, что, в свою очередь, приводит к уменьшению нутационной частоты колебаний.

Дополнительный позиционный момент от упругой податливости подвеса отстает от колебаний платформы на угол $-\pi$:

$$M_{упр} = -C_n \gamma = -H \dot{\beta} \approx \frac{H^2}{J} \varphi_{1max} \sin(\omega t - \pi) . \tag{I.87}$$

На нутационной частоте при динамическом запаздывании усилителя поворот момента на угол ($-\operatorname{arctg} \tau_y \omega_0$) приведет к появлению составляющей упругого момента в направлении вектора скорости. Таким образом, наличие постоянной времени усилителя уменьшает составляющую разгрузочного момента в направлении вектора скорости, но, с другой стороны, приводит к появлению составляющей позиционного момента, которая нейтрализует эффект демпфирования от разгрузочного момента и приводит к уменьшению запаса устойчивости по амплитуде.

В индикаторном гиростабилизаторе в процессе стабилизации участвуют два момента: разгрузочный и инерционный. В диапазоне частот $\omega < \omega_{ср}$ преобладает разгрузочный момент, на частотах $\omega > \omega_{ср}$ преобладает инерционный момент. Поэтому основным параметром, характеризующим динамические свойства индикаторного гиростабилизатора, является частота среза. При выбранном способе управления разгрузочным моментом - по скорости, углу или интегралу от угла стабилизации платформы - $\omega_{ср}$ однозначно определяет частотную характеристику разомкнутой системы в области низких частот и рабочую полосу частот. Предельное значение $\omega_{ср}$ ограничивается в основном быстродействием привода. В индикаторных гиростабилизаторах увеличение моментов инерции платформы позволяет во столько же раз повысить коэффициент усиления разомкнутой цепи разгрузки при неизменных запасах устойчивости. Поэтому при стабилизации больших инерционнных масс индикаторная стабилизация имеет преимущества перед силовой. Однако здесь следует подчеркнуть, что постоянные времени динамических звеньев привода уже будут оказывать существенное влияние на процесс стабилизации, так как гироскопические гиростабилизирующие моменты отсутствуют. Силовой стабилизатор не предъявляет столь жестких требований к динамике привода, как индикаторный.

§ I.5. Корректирующие цепи гиростабилизаторов

При заданной структуре гиростабилизаторов не всегда удается выбрать значения параметров, при которых динамическая система одновременно удовлетворяет требованиям по точности и необходимым запасам устойчивости. В этом случае корректирующие средства, включенные в цепь разгрузки, позволяют повысить общий коэффициент усиления при обеспечении необходимого запаса устойчивости и ограничении максимального угла прецессии гироскопа. Корректирующие средства, как правило, используют в тех случаях, когда момент нагрузки на оси стабилизации сравнительно велик.

На практике в системах гироскопической стабилизации применяются различные типы корректирующих цепей - последовательные, параллельные, цепи обратной связи; строятся как активные, так и пассивные звенья коррекции.

Формирование корректирующих сигналов связано с возможностью получения и обработки информации об изменении обобщенных координат системы - углов стабилизации и углов прецессии, а также с возможностью получения "чистых" производных обобщенных координат.

Рассмотрим задачу построения последовательных корректирующих цепей систем гироскопической стабилизации. На рис. I.13 представлена обобщенная схема гиростабилизатора, в законе управления которого используются в качестве корректирующих сигналов первые и вторые производные обобщенных координат. Нас будут интересовать вопросы устойчивости, поэтому рассмотрим уравнения свободных движений, выделив уравнения механической части

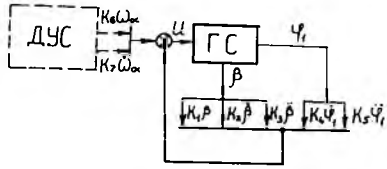

Рис. I.13

$$\left.\begin{aligned} &J_{пл}\ddot{\varphi}_1 + H\dot{\beta} + b\dot{\varphi}_1 - ki = 0; \\ &J\ddot{\beta} + n\dot{\beta} - H\dot{\varphi}_1 = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (I.88)$$

уравнение обмотки управления разгрузочного двигателя

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U \qquad (I.89)$$

и уравнение безынерционного усилителя - закон управления:

$$U = -k_1\beta - k_2\dot{\beta} - k_3\ddot{\beta} - k_4\dot{\varphi}_1 - k_5\ddot{\varphi}_1 . \qquad (I.90)$$

Здесь i - ток в управляющей обмотке двигателя; k - коэффициент по моменту на оси двигателя, приведенному к оси стабилизации; L, R - индуктивное и омическое сопротивление обмотки управления (далее примем, что $n=0$, $L\approx 0$); k_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ - коэффициенты усиления при соответствующих сигналах.

Управление по производным эквивалентно изменению тех или иных параметров гиростабилизаторов, от которых зависят динамические свойства системы.

Определение этих эквивалентов позволяет правильно ориентироваться при выборе средств коррекции. Рассмотрим характеристическое уравнение системы (I.88) + (I.90):

$$p[(J_{пл}JR + Jkk_5)p^3 + k(Hk_3 + Jk_4 + bJ)p^2 +$$

$$+ H(HR + kk_2)p + Hkk_1] = 0. \qquad (I.91)$$

В уравнении выделены члены, которые имеют место при отсутствии сигналов управления по производным; $J_{пл}JR$ определяет инерционные свойства системы; bJ – демпфирование системы, HR – эффективность внутренней обратной связи, Hkk_1 – статическую устойчивость системы, т.е. эффективность внешней обратной связи [10] . При управлении с использованием коррекционных сигналов появление слагаемых при соответствующих степенях p равносильно увеличению эффекта от выделенных коэффициентов (параметров) гиростабилизатора.

Таким образом, из рассмотрения характеристического уравнения можно определить соответствующие эквиваленты управления по производным:

введение сигнала $k_2\dot{\beta}$ эквивалентно приращению кинетического момента;

введение сигналов $k_3\dot{\beta}$ и $k_4\dot{\varphi}_1$ приводит к увеличению демпфирования;

введение сигнала $k_5\ddot{\varphi}_1$ равносильно изменениям инерционных свойств системы.

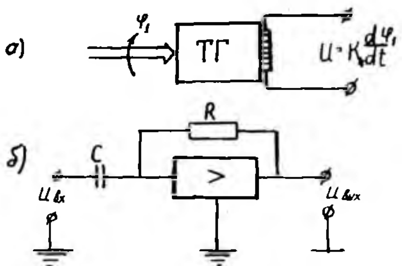

Рис. I.14

В гироскопических системах для получения "чистых" производных обобщенных координат можно использовать тахогенератор постоянного тока (рис. I.14, а).

Ротор через редуктор или непосредственно связывается, например, с осью стабилизации, статор – с основанием.

В этом случае входной величиной тахогенератора будет угол поворота ротора φ_1 , выходной величиной – ЭДС якоря e . При неизменном потоке возбуждения ЭДС в якоре тахогенератора пропорциональна скорости вращения, т.е. $e = k_4\frac{d\varphi_1}{dt}$.

При большой величине сопротивления нагрузки можно считать, что напряжение якоря равно ЭДС. Тогда $U = k_4\frac{d\varphi_1}{dt}$. Для получения второй "чистой" производной можно использовать дифференцирование на операционном усилителе (см. рис. I.14, б). При работе на качающемся основании в результате обкатки ротора сигнал, снимаемый с тахогенератора, будет пропорционален относительной скорости $\dot{\alpha}$, т.е. равен $k_4(\dot{\varphi}_1 - \omega_{oc})$; если сигнал дополнительно дифференцируется, то он равен $k_5(\ddot{\varphi}_1 - \dot{\omega}_{oc})$. Составляющие $k_4\omega_{oc}$ и $k_5\dot{\omega}_{oc}$ являются источниками возмущения гиростабилизатора. Чтобы их устранить, в закон управления вводят дополнительные сигналы (см. рис. I.13). Сигнал $k_6\omega_{oc}$ может быть получен от ДУС, установленного на основании, а сигнал $k_7\dot{\omega}_{oc}$ - с выхода подключенного к нему дифференцирующего устройства.

Тогда

$$U = -k_1\beta - k_2\dot{\beta} - k_3\ddot{\beta} - k_4(\dot{\varphi}_1 - \omega_{oc}) - k_5(\ddot{\varphi}_1 - \dot{\omega}_{oc}) - k_6\omega_{oc} - k_7\dot{\omega}_{oc} . \quad (I.92)$$

При выборе коэффициентов $k_4 = k_6$ и $k_5 = k_7$ составляющие с ω_{oc} и $\dot{\omega}_{oc}$ в (I.92) пропадают.

Задачу выбора параметров последовательно включенных корректирующих звеньев удобно решать с привлечением частотных характеристик. Если амплитудно-фазовая частотная характеристика исходной разомкнутой системы не отвечает требованиям по запасу устойчивости, то корректирующие цепи подбираются таким образом, чтобы амплитудно-фазовая характеристика скорректированной системы не попадала в запретную зону. Деформация амплитудно-фазовой характеристики исходной системы может быть проведена путем подавления усиления на высоких частотах (такое подавление будем называть амплитудной коррекцией) либо путем введения дополнительных отрицательных фазовых сдвигов (фазовой коррекцией).

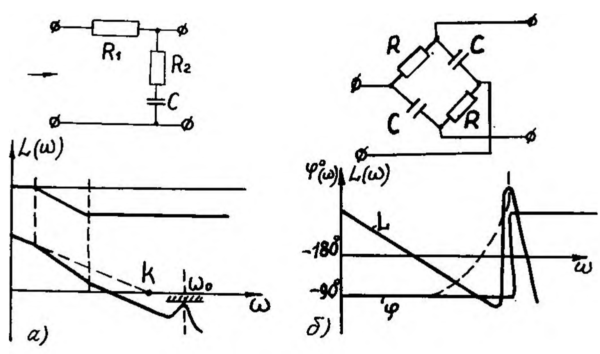

Рис. I.15

Амплитудная коррекция может быть осуществлена с помощью корректирующих цепей типа пассивного интегрирующего контура [2] , который подавляет усиление на высоких частотах без дополнительных фазовых сдвигов. На рис. I.15,а показана схема интегрирующего контура и его ЛАХ.

Передаточная функция интегрирующего контура

$$W_{кор}(s) = \frac{1 + T_2 s}{1 + T_1 s} . \qquad (I.93)$$

Постоянные времени

$$T_1 = (R_1 + R_2) C \quad и \quad T_2 = R_2 C . \qquad (I.94)$$

На высоких частотах подавление усиления равно отношению

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{R_2}{R_1} . \qquad (I.95)$$

Построения, приведенные на рис. I.15,а, иллюстрируют также формирование скорректированной ЛАХ системы.

Фазовая коррекция может быть осуществлена, например, с помощью пассивной цепи коррекции, изображенной на рис. I.15,б , которая имеет передаточную функцию

$$W_{кор}(s) = \frac{1 - \tau_{кор} s}{1 + \tau_{кор} s} , \qquad (I.96)$$

где $\tau_{кор} = RC$.

Мостовая схема, не изменяя ЛАХ, вносит дополнительный фазовый сдвиг

$$\Delta \varphi = -2 \operatorname{arctg} \omega \tau_{кор} . \qquad (I.97)$$

На рис. I.15,б показана логарифмическая амплитудная частотная характеристика разомкнутого гиростабилизатора, для которого не выполняются условия устойчивости. Если в районе пика ЛАХ ввести дополнительный отрицательный сдвиг (пунктирная линия на рисунке), то система становится устойчивой и при соответствующих фазовых сдвигах можно обеспечить заданный запас устойчивости.

При выборе способа подключения корректирующих звеньев необходимо иметь в виду также следующие общие положения.

Параллельное включение (дополнительные обратные связи) позволяет существенно влиять на динамические характеристики переходных процессов в гиростабилизаторах.

Преимущества параллельного включения корректирующих цепей:

1) малая подверженность влиянию помех;

2) нейтрализация влияния звеньев, ухудшающих динамические свойства систем (нелинейных, звеньев с большими постоянными времени и т.п.);

3) возможность применения в системах любой мощности.

Последовательное включение в цепь коррекции дифференцирующих звеньев (опережающих по фазе) позволяет увеличить быстродействие системы, включение интегрирующих элементов (отстающих по фазе) - снизить установившиеся ошибки.

Преимущества последовательного включения корректирующих цепей:

1) расширение полосы пропускания частот при включении дифференцирующих звеньев;

2) относительная простота построения.

К недостаткам его можно отнести ограничение по мощности, увеличение чувствительности системы к помехам, зависимость работы от стабильности характеристик параметров системы.

В общем случае синтез корректирующих цепей гиростабилизатора по логарифмическим характеристикам включает в себя следующие операции:

1. Строится ЛАХ исходной системы.

2. Строится ЛАХ желаемой скорректированной системы.

3. По ЛАХ строятся соответствующие логарифмические фазовые частотные характеристики и определяются запасы устойчивости по амплитуде и фазе. Обычно динамические системы гиростабилизаторов относятся к классу минимально-фазовых систем, имеющих однозначную связь между амплитудой и фазой частотной характеристики, поэтому построение фазовой характеристики не вызывает затруднений.

4. Из ЛАХ желаемой системы L вычитается ЛАХ исходной системы L_1, в результате получается ЛАХ корректирующего устройства:

$$L - L_1 = L_2 \quad .$$

5. По полученной ЛАХ L_2 подбираются корректирующие устройства и проверяется, насколько скорректированная система будет отличаться от желаемой.

Глава II. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ СИЛОВОГО ГИРОСТАБИЛИЗАТОРА ИЗ УСЛОВИЯ ОГРАНИЧЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО НАКОПЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТИ

§ 2.1. Условия ограничения максимального накопления

Рассмотрим задачу выбора параметров одноосного силового гиростабилизатора из условия ограничения накопления ошибки при действии произвольного возмущающего момента. Это могут быть силы сухого трения в осях подвеса платформы, инерционные и диссипативные моменты обкатки редуктора и ротора разгрузочного двигателя, инерционные моменты,обусловленные поступательным движением основания и являющиеся следствием остаточной несбалансированности платформы, и другие моменты нагрузки гиростабилизатора. Наконец, это могут быть моменты перекрестных связей между одноканальными парциальными системами пространственного гиростабилизатора, если расчет последнего ведется при разделении каналов управления и перекрестные связи рассматриваются как возмущающие факторы одноканального стабилизатора.

Так как все эти моменты зависят от движения основания, то в общем случае не представляется возможным предсказать закон изменения возмущающего момента во времени и в лучшем случае удается оценить лишь его максимальную величину. Поэтому при решении задачи будем предполагать,что момент нагрузки по оси стабилизации ограничен по модулю:

$$\left| M_{наг}(t) \right| \leqslant M_{max} . \qquad (2.1)$$

Не делая заранее никаких предположений о законе изменения момента нагрузки, будем искать параметры гиростабилизатора, при которых максимально возможное накопление погрешности φ_1 по оси стабилизации не будет превышать допустимой величины при выполнении условия (2.1).

Решение задачи, представленное в настоящем разделе, основано на работах Б.В. Булгакова, А.И. Лурье и др. [3] , [5] , [17] .

Процесс накопления ошибки в динамических системах под действием внешних сил, ограниченных по модулю, может быть охарактеризован следующими положениями:

1. Наиболее опасным внешним воздействием, обусловливающим наибольшее накопление ошибки в наиболее короткое время, является после-

довательность прямоугольных импульсов, по высоте равных граничному значению модуля возмущающих моментов, а по продолжительности соответствующих интервалам знакопостоянства скорости нарастания регулируемой величины.

2. Процесс накопления ошибки характеризуется в самом неблагоприятном случае ее возрастанием при каждом колебании системы.

3. Максимально возможное накопление ошибки динамической системой определяется на основе известных переходных процессов, обусловленных воздействием в виде дельта-функции

$$f(t) = \delta(t-\tau)$$

и ступенчатого воздействия

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < \tau \\ 1 & \text{при} \quad t > \tau \end{cases}$$

при нулевых начальных условиях и приложении воздействия в момент времени τ .

Соответственно импульсную переходную функцию гиростабилизатора будем обозначать через φ_{n-1} , а переходную функцию - временную характеристику гиростабилизатора - через φ_n .

Рассмотрим одноосный силовой гиростабилизатор с безынерционной характеристикой цепи разгрузки. Передаточную функцию такого гиростабилизатора по моменту нагрузки представим в виде

$$\frac{\varphi_1}{M_{нar}} = \frac{S/J_{пл}}{S^3 + \frac{b}{J_{пл}} S^2 + \frac{H^2}{J J_{пл}} S + \frac{H k_\alpha}{J J_{пл}}} . \qquad (2.2)$$

На основании принципа суперпозиции отклонение φ_1 под действием $M_{нar}$ может быть найдено, если известна его импульсная переходная функция φ_{n-1} . Действительно, представляя произвольное воздействие $M_{нar}$ в виде бесконечной суммы воздействий $M_{нar}(\tau)\delta(t-\tau)$, изменение координаты φ_1 получаем в виде

$$\varphi_1(t) = \int_0^t \varphi_{n-1}(t-\tau) M_{нar}(\delta)\, d\tau . \qquad (2.3)$$

Это решение уравнения (2.2) известно как одна из форм интеграла Дюамеля. Нас будет интересовать модуль накопления ошибки, поэтому можем записать:

$$\left|\varphi_1(t)\right| = \left|\int_0^t \varphi_{n-1}(t-\tau) M_{нar}(\tau)d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \left|\varphi_{n-1}(t-\tau) M_{нar}\right| d\tau . \qquad (2.4)$$

Если на момент нагрузки наложить условие (2.I), то

$$\left|\varphi_1\right| \leqslant M_{max} \int_0^t \left|\varphi_{n-1}(t-\tau)\right| d\tau =$$

$$= M_{max} \int_0^t \left|\varphi_{n-1}(\xi)\right| d\xi . \qquad (2.5)$$

Вычислим значение интеграла выражения (2.5), интерпретируя процесс вычисления графически.

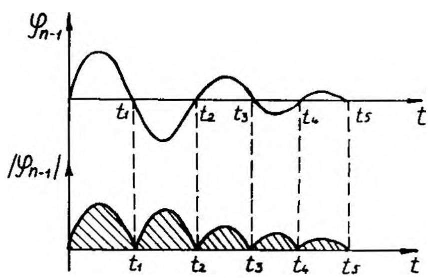

Рис. 2.I

График подынтегральной функции представлен на рис. 2.I. Кривая графика образована положительными значениями импульсной переходной функции и ее отрицательными значениями, взятыми с обратным знаком. Разбивая значения подынтегральной функции на интервалы, соответствующие знакопостоянству импульсной переходной функции, и учитывая, что на первом интервале значений $\varphi_{n-1} > 0$, так как $\dot{\varphi}_{n-1}(0) > 0$, интеграл выражения (2.5) можно вычислить по формуле

$$\int_0^t \left|\varphi_{n-1}(\tau)\right| d\tau = \int_0^{t_1} \varphi_{n-1}(\tau)d\tau -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \varphi_{n-1}(\tau)d\tau + \ldots + (-1)^k \int_{t_k}^{t} \varphi_{n-1}(\tau)d\tau . \qquad (2.6)$$

Здесь $t_1, t_2, \ldots, t_k$ суть корни уравнения

$$\varphi_{n-1}(t) = 0 . \qquad (2.7)$$

Каждый член в формуле (2.6) определяет площадь, ограниченную отрезком графика функции $\left|\varphi_{n-1}\right|$, соответствующего знакопостоянству функции φ_{n-1}.

Дальнейшее преобразование выражения (2.6) свяжем с известным соотношением между импульсной переходной функцией φ_{n-1} и переходной функцией системы, которая определяется при значениях $\varphi_n(0)=0$ равенством

$$\varphi_n(t)=\frac{d}{dt}\left[\varphi_{n-1}(t)\right]. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.6) и проводя вычисления, имеем

$$\int_0^t\left[\varphi_{n-1}(t)\right]d\tau=\varphi_n(t_1)-\left[\varphi_n(t_2)-\varphi_n(t_1)\right]+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^k\left[\varphi_n(t)-\varphi_n(t_k)\right]. \tag{2.9}$$

Рассматривая максимально возможное накопление ошибки во времени, положим $t=\infty$. Тогда в случае устойчивой системы интеграл (2.9) сходится и будет иметь некоторое значение L :

$$\int_0^\infty\left|\varphi_{n-1}(\tau)\right|d\tau=L. \tag{2.10}$$

Очевидно, что число L больше любого значения интеграла (2.9), взятого для текущего времени t, поэтому получаем оценку

$$\left|\varphi_1(t)\right|\leqslant M_{max}L. \tag{2.11}$$

Эта формула дает оценку максимуму модуля возможного значения $\varphi_1(t)$ при воздействии относительно оси стабилизации момента нагрузки, ограниченного по модулю, но изменяющегося по какому угодно закону во времени.

§ 2.2. Выбор параметров силового гиростабилизатора

Процедура оценки максимального накопления ошибки связана с определением корней уравнения (2.7) и вычислением параметра L по формуле (2.10). Для этого надо знать выражения импульсной переходной и временной характеристик системы.

Импульсная переходная и временная характеристики системы являются функциями времени, состоят из экспоненциальных слагаемых, коэффициенты и показатели которых определяются через корни характеристического уравнения замкнутой системы, в рассматриваемом случае через полюса передаточной функции (2.2). Из прикладной теории и из практики известно, что при больших значениях кинетического момента собственные движения гиростабилизатора включают в себя две основные составляющие, одной из которых являются колебания высокой частоты и весьма малой амплитуды, а другой - медленное апериодическое движение. Этим движениям соответствует следующая форма корней характеристического уравнения:

$$p_1 = -æ, \quad p_{23} = -\eta \pm jq. \tag{2.12}$$

Передаточная функция системы (2.2) и корни характеристического уравнения (2.12) позволяют тем или иным методом, обычно используемым в теории автоматического управления, найти выражения переходных характеристик системы.

Воспользуемся выражением переходной функции, приведенной в работе [14], для случая приложения к внешней раме постоянного момента

$$\varphi_n = \frac{J}{Hk_\alpha} æ \frac{\omega_0^2 - 2æ\eta}{\omega_0^2 + æ^2 - 4æ\eta} \left[\frac{\sqrt{q^2 + (æ-\eta)^2}}{q} e^{-\eta t} \times \cos(qt + \varepsilon) - e^{-æt} \right], \tag{2.13}$$

где угол ε определяется по формуле

$$\varepsilon = \arccos \frac{q}{\sqrt{q^2 + (æ-\eta)^2}}; \tag{2.14}$$

$\omega_0 = \frac{H}{\sqrt{J_n J}}$ - частота нутационных колебаний.

Используя (2.11), можно дать оценку максимально возможному накоплению погрешности по углу стабилизации, если момент нагрузки ограничен величиной M_{max}. Однако определить зависимость L в выражении (2.11) от параметров гиростабилизатора и тем самым решить поставленную задачу в общем случае не удается, так как приходится решать трансцендентное уравнение (2.7), корни которого могут быть найдены только численными методами, обычно при использовании ЭВМ.

При решении задачи синтеза упростим приведенные выше выражения переходных функций системы и выразим корни характеристического уравнения через параметры системы, пренебрегая членами второго и выше порядка малости.

Для большинства силовых стабилизаторов справедлива следующая оценка корней характеристического уравнения:

$$|q| \gg |\eta|; \quad |q| \gg æ. \tag{2.15}$$

В качестве примера для силового гиростабилизатора с параметрами

$$J_{пл} = 490\ кг\cdot м^2;\qquad J = 1{,}3\ кг\cdot м^2;$$
$$H = 9{,}8\ кг\cdot м^2\cdot с^{-1};\qquad k = 2{,}45\cdot 10^3\ кг\cdot м^2\cdot с^{-2}$$
$$b = 245\ кг\cdot м^2\cdot с^{-1};$$

приведем точные значения корней характеристического уравнения:

$$\varkappa = 2{,}4979;\qquad \eta = 0{,}99898;\qquad q = 38{,}71.$$

Представляя далее характеристическое уравнение системы в виде множителей

$$(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3) = 0$$

или

$$(p + \varkappa)\left[p^2 + 2\eta p + (q^2 + \eta^2)\right] = 0 \qquad (2.16)$$

и пренебрегая в соответствии с оценкой (2.15) членами уравнения, содержащими произведение η и $\varkappa$ и их квадраты, получаем

$$p^3 + (2\eta + \varkappa)p^2 + q^2 p + \varkappa q^2 = 0. \qquad (2.17)$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях p уравнения (2.17) и полинома знаменателя передаточной функции (2.2) позволяет записать следующие соотношения :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{b}{J_{пл}} = 2\eta + \varkappa\ ; \qquad q^2 = \frac{H^2}{J J_{пл}}\ ; \\ &\varkappa q^2 = \frac{H k_\alpha}{J J_{пл}}\ , \end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

из которых определяются приближенные значения корней характеристического уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa = \frac{k_\alpha}{H}\ ; \\ &q = \omega_0 = \frac{H}{\sqrt{J J_{пл}}}\ ; \\ &\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{J_{пл}} - \frac{k_\alpha}{H}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

В соответствии с (2.19) приближенные значения корней для примера на с. 43

$$\varkappa = 2{,}50; \quad q = 38{,}70; \quad \eta = 0{,}998.$$

Сравните их с точными значениями.

Оценивая теперь величины параметров переходной функции, в первом приближении можем записать:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon \approx 0; \\ &\frac{\sqrt{q^2 + (\varkappa - \eta)^2}}{q} \approx 1; \\ &\frac{\omega_0^2 - 2\varkappa\eta}{\omega_0^2 + \varkappa^2 - 4\varkappa\eta} \approx 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

Итак, приведенные упрощения и оценки позволяют представить уравнение (2.7) приближенно в виде

$$\sin \omega_0 t \approx 0, \tag{2.21}$$

а переходную функцию гиростабилизатора – в виде

$$\varphi_n = \frac{J}{H^2}\left(e^{-\varkappa t} - e^{-\eta t}\cos \omega_0 t\right). \tag{2.22}$$

Корнями уравнения (2.21) являются значения

$$t = \frac{n\pi}{\omega_0}, \tag{2.23}$$

где n – целые числа, $n = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Используя найденные значения корней (2.23) и выражения переходной функции (2.22) и учитывая соотношение (2.9), параметр L представляем в виде

$$L = \frac{2J}{H^2}\Big[\left(e^{-\frac{\varkappa\pi}{\omega_0}} + e^{-\frac{\eta\pi}{\omega_0}}\right) - \left(e^{-\frac{\varkappa 2\pi}{\omega_0}} - e^{-\frac{\eta 2\pi}{\omega_0}}\right) + \ldots + (-1)^k\left(e^{-\frac{\varkappa k\pi}{\omega_0}} + e^{-\frac{\eta k\pi}{\omega_0}}\right) + \ldots\Big].$$

Перегруппировав члены, имеем

$$L=\frac{2J}{H^2}\left[\left(e^{-\frac{\varkappa\pi}{\omega_0}}-e^{-\frac{2\varkappa\pi}{\omega_0}}+e^{-\frac{3\varkappa\pi}{\omega_0}}-\dots\right)+\right.$$

$$\left.+\left(e^{-\frac{\eta\pi}{\omega_0}}+e^{-\frac{2\eta\pi}{\omega_0}}+e^{-\frac{3\eta\pi}{\omega_0}}+\dots\right)\right]. \qquad (2.24)$$

Дальнейшее решение задачи связано с упрощением найденного выражения для L .

Выражения, стоящие в круглых скобках, представляют собой суммы геометрических прогрессий со знаменателями:

$q_1=-e^{-\frac{\varkappa\pi}{\omega_0}}$ – для первой скобки;

$q_2=e^{-\frac{\eta\pi}{\omega_0}}$ – для второй скобки,

с начальными значениями соответственно:

$$a_1=e^{-\frac{\varkappa\pi}{\omega_0}}\;;\qquad a_2=e^{-\frac{\eta\pi}{\omega_0}}.$$

Поскольку

$$|q_1|<1 \qquad \text{и} \qquad |q_2|<1,$$

по формуле суммы бесконечно убывающей прогрессии $S=\frac{q}{1-q}$ вычисляем значения выражений, стоящих в первой и второй скобках:

$$\left.\begin{aligned} S_1&=\frac{-e^{-\frac{\varkappa\pi}{\omega_0}}}{1+e^{-\frac{\varkappa\pi}{\omega_0}}};\\ S_2&=\frac{e^{-\frac{\eta\pi}{\omega_0}}}{1+e^{-\frac{\eta\pi}{\omega_0}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.25)$$

Тогда параметр L определится по формуле

$$L=\frac{2J}{H^2}\left[S_1+S_2\right]. \qquad (2.26)$$

Поскольку

$$\left|\frac{\varkappa\pi}{\omega_0}\right|\ll 1 \qquad \text{и} \qquad \left|\frac{\eta\pi}{\omega_0}\right|\ll 1,$$

выражения (2.25) можно упростить, если экспоненциальные функции разложить в ряд и ограничиться двумя первыми членами разложения. Отбрасывая члены второго порядка малости по сравнению с единицей, получим приближенную формулу для L в виде

$$L = \frac{2J}{H^2}\left[\frac{\omega_0}{\eta\pi} - \frac{1}{2}\right] \approx \frac{2J}{H^2}\,\frac{\omega_0}{\eta\pi}. \tag{2.27}$$

Подставляя (2.27) в (2.II) и определяя ω_0 и η по формулам (2.I9), получаем окончательное выражение для оценки максимального накопления ошибки:

$$\varphi_{1max} \leqslant \frac{4\sqrt{JJ_{пл}}\cdot M_{max}}{\pi\,(bH - k_\alpha J_{пл})}. \tag{2.28}$$

Формула (2.28) содержит все основные параметры гиростабилизатора и может быть использована для приближенного решения задачи ограниченного синтеза, т.е. позволяет при заданной структуре гиростабилизатора выбрать его параметры, при которых максимальная ошибка по углу стабилизации не будет превышать заданной величины, если максимальная величина возмущающего момента ограничена величиной M_{max}.

Глава Ш. ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ И СИНТЕЗУ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 3.I. Общие замечания

Как было отмечено ранее, в типичных условиях эксплуатации гироскопические системы подвергаются воздействию разнообразных сил и моментов, вызванных угловыми и линейными перемещениями летательного аппарата в пространстве, а также его вибрациями. Эти силы и моменты обычно носят случайный характер вследствие случайного характера перемещений летательного аппарата и инструментальных погрешностей гироскопических систем. Поэтому существует необходимость исследования гироскопических систем при воздействии на них случайных возмущений.

Вероятностный подход к исследованию гироскопических систем связан с привлечением математического аппарата теории вероятностей и теории случайных процессов. При вероятностном исследовании, когда силы и моменты, действующие на гироскопическую систему, заданы их вероятностными характеристиками, обобщенные координаты гироскопической системы представляют собой случайные функции времени, и задача исследования состоит в отыскании их вероятностных характеристик.

Вероятностный подход к изучению гироскопических систем в принципе не отличается от вероятностного подхода к исследованию любых других динамических систем в статистической динамике. Специфика в этом случае заключена в особенностях уравнений гироскопических устройств, в особенностях возмущающих воздействий, а также в особенностях требований к точностным характеристикам гироскопических систем.

Применение вероятностных методов для исследования гироскопических систем не исключает необходимости их исследования с помощью детерминистских методов, которые обеспечивают основу для проведения вероятностных исследований. Основные результаты, полученные при анализе гироскопических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений, изложены в работах [8], [11], [14], [16], [18].

В большинстве практически важных случаев для вероятностных исследований гироскопических систем нет необходимости пользоваться совокупностью всех законов распределения ординат случайных функций, представляющих собой входные воздействия или обобщенные координаты систем. Во многих задачах вполне достаточным бывает проведение исследований, связанных с использованием математического ожидания, корреляционных и взаимных корреляционных функций случайных процессов. В настоящем учебном пособии рассмотрим вероятностные методы исследования линейных гироскопических систем в рамках корреляционной теории. Основное внимание будет уделено исследованию одноосного гироскопического стабилизатора при случайных угловых колебаниях основания.

Многочисленные экспериментальные исследования показывают, что, например, для летательного аппарата в установившихся режимах случайные угловые колебания основания, вызванные различными аэродинамическими возмущениями,можно считать нормальными и (для не особенно длительных промежутков времени) стационарными случайными процессами [11], [13], [16].

Натурные испытания показывают также, что математические ожидания углов рыскания, тангажа и крена летательного аппарата могут быть приняты равными нулю. Это обстоятельство не имеет, однако, принципиального значения, так как возмущающие моменты зависят, главным образом, от скоростей и ускорений угловых колебаний летательного аппарата, а для стационарных процессов угловых колебаний математические ожидания скоростей и ускорений будут равны нулю.

Корреляционные функции углов рыскания, тангажа и крена определяются теоретически по вероятностным характеристикам возмущений, действующих на летательный аппарат, либо экспериментально, путем статистической обработки записей натурного эксперимента в интересующих нас условиях. Выражение для типичной корреляционной функции случайных угловых колебаний летательного аппарата имеет вид

$$K_{\varphi}(\tau) = A_{\varphi} e^{-\mu_{\varphi}|\tau|}\left(\cos \lambda_{\varphi}\tau + \frac{\mu_{\varphi}}{\lambda_{\varphi}} \sin \lambda_{\varphi}|\tau|\right), \qquad (3.I)$$

где μ_{φ} – коэффициент затухания корреляционной функции, характеризующий степень нерегулярности угловых колебаний $\varphi(t)$; λ_{φ} – преобладающая частота угловых колебаний летательного аппарата, определяющая положение максимума спектральной плотности угла колебаний; A_{φ} – дисперсия угла колебаний летательного аппарата, характеризующая интенсивность колебаний,

$$A_{\varphi} = K_{\varphi}(0) = D\left[\varphi(t)\right]. \qquad (3.2)$$

Параметры λ_{φ}, μ_{φ}, A_{φ} имеют определенные числовые значения для каждого из углов $\varphi(t)$ – курса, крена, тангажа.

Характерный график корреляционной функции (3.I) представлен на рис. 3.I. Корреляционная функция, как известно, характеризует степень статистической зависимости между значениями случайного процесса $\varphi(t)$ в произвольные моменты времени, разделенные промежутком τ .

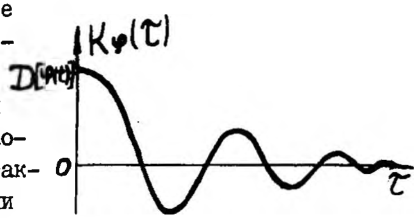

Рис. 3.I

Помимо корреляционных функций вида (3.I), при исследовании гироскопических систем часто используют также следующие корреляционные функции управляющих и возмущающих воздействий:

$$K(\tau) = A e^{-\mu|\tau|} ; \tag{3.3}$$

$$K(\tau) = A e^{-\mu|\tau|} \cos \lambda\tau . \tag{3.4}$$

Выражения для спектральных плотностей, соответствующих корреляционным функциям (3.I), (3.3), (3.4), имеют вид

$$S_\varphi(\omega) = \frac{2A_\varphi \mu_\varphi}{\pi} \frac{\nu_\varphi^2}{\omega^4 + 2a_\varphi^2\omega^2 + \nu_\varphi^4} ; \tag{3.5}$$

$$S(\omega) = \frac{A}{\pi} \frac{\mu}{\omega^2 + \mu^2} ; \tag{3.6}$$

$$S(\omega) = \frac{A\mu}{\pi} \frac{\omega^2 + \nu^2}{\omega^4 + 2a^2\omega^2 + \nu^4} , \tag{3.7}$$

где $a^2 = \mu^2 - \lambda^2 , \quad \nu^2 = \mu^2 + \lambda^2 .$

Характерный график спектральной плотности вида (3.5) представлен на рис 3.2 . Спектральная плотность, имеющая размерность энергии, характеризует распределение средней мощности случайного процесса по отдельным составляющим гармоникам (энергетический частотный спектр случайного процесса).

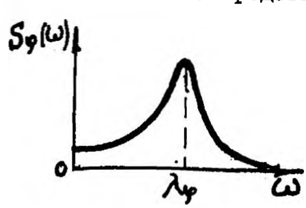

Рис. 3.2

Анализируя выражение спектральной плотности (3.6), нетрудно заметить, что по мере увеличения коэффициента затухания μ зависимость $S(\omega)$ становится все более пологой. Это обстоятельство позволяет сделать заключение о том, что для достаточно больших μ спектральная плотность (3.6) будет близка к спектральной плотности белого шума. Спектральная плотность белого шума, получаемая на основе (3.6), такова:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} C \ , \tag{3.8}$$

где постоянная C, характеризующая интенсивность белого шума, определяется из соотношения

$$C = \frac{2A}{\mu} \ . \tag{3.9}$$

Корреляционная функция белого шума имеет вид

$$K(\tau) = C\,\delta(\tau) \ , \tag{3.10}$$

где $\delta(\tau)$ - дельта-функция.

Следует отметить, что реального процесса в виде белого шума существовать не может, так как дисперсия случайного процесса с постоянной спектральной плотностью равна бесконечности, что физически невозможно. На практике под белым шумом понимают такой случайный процесс, у которого постоянна спектральная плотность в диапазоне частот, соответствующих полосе пропускания гироскопической системы. Случайным процессом типа белого шума являются обычно помехи в измерительных устройствах гироскопических систем.

При наличии случайных угловых колебаний основания платформа гироскопического стабилизатора совершает вынужденные колебания вокруг оси стабилизации и, кроме того, систематически поворачивается вокруг этой оси. Скорость этого дрейфа называется собственной скоростью прецессии или скоростью "ухода" платформы гиростабилизатора.

Собственная скорость прецессии включает в себя две основные составляющие. Первая составляющая по своему характеру является инструментальной погрешностью и в соответствии с прецессионной теорией определяется возмущающими моментами, действующими вокруг оси прецессии гиростабилизатора, и кинетическим моментом гироскопа.

Вторая составляющая является кинематической погрешностью, обусловленной угловыми колебаниями в инерциальном пространстве измерительной оси чувствительного элемента [6] . Кинематическая погрешность по своей природе является методической погрешностью и во многом зависит от угловых колебаний основания.

Вероятностный подход к исследованию гироскопического стабилизатора включает в себя как анализ вынужденных колебаний и собственной скорости прецессии платформы , так и синтез структуры гиростабилизатора или его корректирующих звеньев с целью минимизации погрешностей. Анализ случайных погрешностей гиростабилизатора с заданной структурой позволяет обоснованно подойти к выбору оптимальных значений его параметров.

§ 3.2. Определение оптимальных параметров одноосного гиростабилизатора с заданной структурой

Широко распространен выбор оптимальных параметров гиростабилизатора,основанный на минимизации дисперсии случайной погрешности гиростабилизатора в условиях действия случайных моментов вокруг оси стабилизации. Очевидно, что следует определять оптимальные значения тех параметров, которые можно варьировать в достаточно широких пределах и от которых существенно зависит точность гиростабилизатора.

Рассмотрим последовательность определения оптимальных параметров одноосного одногироскопного силового гиростабилизатора, установленного на основании, колебания которого носят случайный характер [I4] . Воспользуемся линеаризованными уравнениями движения гиростабилизатора, полученными в работе [I0] .

Используя преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, имеем

$$\left.\begin{aligned} &Js^2\beta - H\omega_1 = 0; \\ &\left[(J_\alpha + m)s + b\right]\omega_1 + Hs\beta + W_p(s)\beta = (ms+b)\omega_{x0}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (3.II)$$

где β - угол прецессии; ω_1 , $\omega_{x0} = \omega_{0x}$ - соответственно проекции абсолютной угловой скорости платформы и основания на ось стабилизации; H - кинетический момент гироскопа; J - момент инерции гироузла вокруг оси прецессии; J_α - момент инерции платформы с гироузлом вокруг оси стабилизации; m - приведенный к оси стабилизации момент инерции ротора разгрузочного двигателя с редуктором; b - удельный демпфирующий момент вокруг оси стабилизации; $W_p(s)$ - передаточная функция канала разгрузки.

В уравнениях (3.II) случайный возмущающий момент $(ms+b)\omega_{x0}$, действующий вокруг оси стабилизации, обусловлен явлением обкатки ротора разгрузочного устройства с редуктором оси стабилизации и вязким трением в оси стабилизации при случайных колебаниях основания с угловой скоростью $\omega_{x0}(t) = \dot{\varphi}_{x0}(t)$. Погрешности гиростабилизатора можно оценить в этом случае дисперсией $D[\omega_1(t)]$ абсолютной угловой скорости платформы вокруг оси стабилизации. Колебания основания $\varphi_{x0}(t)$ будем считать стационарным случайным процессом, корреляционная функция которого имеет вид (3.I):

$$K_{\varphi_{x0}}(\tau) = Ae^{-\mu|\tau|}\left(\cos\lambda\tau + \frac{\mu}{\lambda}\sin\lambda|\tau|\right). \qquad (3.12)$$

Спектральная плотность, соответствующая корреляционной функции (3.I2), согласно (3.5) такова:

$$S_{\varphi_{x0}}(\omega) = \frac{2A\mu}{\pi}\,\frac{\nu^2}{(\omega^2-\nu^2)^2+4\mu^2\omega^2}, \qquad (3.13)$$

где $\nu^2 = \mu^2 + \lambda^2$.

Спектральную плотность стационарного случайного процесса $\omega_{x0}(t)$ с учетом (3.I3) можно записать так:

$$S_{\omega_{x0}}(\omega) = \omega^2 S_{\varphi_{x0}}(\omega) = \frac{2A\mu}{\pi}\,\frac{\nu^2\omega^2}{(\omega^2-\nu^2)^2+4\mu^2\omega^2}. \qquad (3.14)$$

Для последующего определения дисперсии $D[\omega_1(t)]$ найдем передаточную функцию $W_{\omega_1\omega_{x0}}(s)$, равную отношению преобразования Лапласа $\omega_1(s)$ к преобразованию Лапласа $\omega_{x0}(s)$. Используя (3.II), получаем:

$$\frac{\omega_1(s)}{\omega_{x0}(s)} = W_{\omega_1\omega_{x0}}(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & Js^2 \\ ms+b & Hs + W_p(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -H & Js^2 \\ (J_\alpha+m)s & Hs + W_p(s) \end{vmatrix}}. \qquad (3.15)$$

Ограничиваясь для простоты случаем, когда канал разгрузки является безынерционным усилительным звеном, и соответственно полагая $W_p(s) = K_p$, имеем

$$W_{\omega_1\omega_{x0}}(s) = \frac{(ms+b)Js^2}{(J_\alpha+m)Js^3+Jbs^2+H^2s+HK_p}. \qquad (3.16)$$

Обозначая

$$q = \frac{H}{\sqrt{(J_\alpha + m)J}} \quad , \tag{3.17}$$

окончательно получаем

$$W_{\omega_1 \omega_{x0}}(s) = \frac{\frac{m}{J_\alpha + m} s^3 + \frac{b}{J_\alpha + m} s^2}{s^3 + \frac{b}{J_\alpha + m} s^2 + q^2 s + \frac{K_p}{H} q^2} \, . \tag{3.18}$$

Величина дисперсии угловой скорости $\omega_1(t)$ определяется следующим выражением:

$$D[\omega_1(t)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| W_{\omega_1 \omega_{x0}}(j\omega) \right|^2 S_{\omega_{x0}}(\omega)\, d\omega , \tag{3.19}$$

где, как нетрудно показать,

$$\left| W_{\omega_1 \omega_{x0}}(j\omega) \right|^2 = \frac{\left(\frac{m}{J_\alpha + m}\right)^2 \omega^6 + \left(\frac{b}{J_\alpha + m}\right)^2 \omega^4}{\omega^6 + \left[\left(\frac{b}{J_\alpha + m}\right)^2 - 2q^2\right]\omega^4 + \left[q^4 - \frac{2bK_p}{H(J_\alpha + m)} q^2\right]\omega^2 + \left(\frac{K_p}{H}\right)^2 q^4} \, . \tag{3.20}$$

Для вычисления интеграла (3.19) можно воспользоваться таблицами, составленными Филипсом и приведенными, например, в работе [17]. Представим интеграл (3.19) с учетом (3.14) и (3.20) в виде

$$D[\omega_1(t)] = 4\mu \nu^2 A I_5 \, , \tag{3.21}$$

где

$$I_5 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{q(j\omega)}{h(j\omega)\, h(-j\omega)} \, d\omega \, , \tag{3.22}$$

$$q(j\omega) = b_0 (j\omega)^8 + b_1 (j\omega)^6 + b_2 (j\omega)^4 + b_3 (j\omega)^2 + b_4 \; ;$$

$$h(j\omega) = a_0 (j\omega)^5 + a_1 (j\omega)^4 + a_2 (j\omega)^3 + a_3 (j\omega)^2 + a_4 (j\omega) + a_5 \, . \tag{3.23}$$

Коэффициенты полиномов (3.23) таковы:

$$b_0 = \left(\frac{m}{J_\alpha + m}\right)^2; \; b_1 = -\frac{b}{J_\alpha + m}, \; b_2 = b_3 = b_4 = 0; \; a_0 = 1; \; a_1 = 2\mu + \frac{b}{J_\alpha + m};$$
$$a_2 = 2\mu \frac{b}{J_\alpha + m} + q^2 + \nu^2; \; a_3 = \left(2\mu + \frac{K_p}{H}\right) q^2 + \frac{b}{J_\alpha + m} \nu^2; \tag{3.24}$$
$$a_4 = \left(2\mu \frac{K_p}{H} + \nu^2\right) q^2 \, , \quad a_5 = \frac{K_p}{H} q^2 \nu^2 \, .$$

Табличный интеграл (3.22) для случая, когда все корни полинома $h(s)$ лежат в левой полуплоскости комплексного переменного S, согласно работе [17] можно записать следующим образом:

$$I_5 = \frac{M_5}{2\Delta_5}, \tag{3.25}$$

где

$$\left.\begin{aligned} M_5 &= b_0(-a_0 a_4 a_5 - a_1 a_4^2 + a_2^2 a_5 - a_2 a_3 a_4) + a_0 b_1(-a_2 a_5 + a_3 a_4); \\ \Delta_5 &= a_0^2 a_5^2 - 2a_0 a_1 a_4 a_5 - a_0 a_2 a_3 a_5 + a_0 a_3^2 a_4 + a_1^2 a_4^2 + a_1 a_2^2 a_5 - a_1 a_2 a_3 a_4. \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

Дисперсия (3.21) с учетом (3.25) принимает вид

$$D[\omega_1(t)] = \frac{2\mu V^2 A M_5}{\Delta_5}. \tag{3.27}$$

Таким образом, в результате проведенных выкладок удается выразить дисперсию случайной погрешности гиростабилизатора в функции его параметров.

Строго говоря, формула (3.19), а следовательно, и (3.27) справедлива только в случае бесконечно долгого возмущающего воздействия на гиростабилизатор стационарных случайных колебаний основания. Практически это означает, что соотношение (3.27) можно использовать только для устойчивого гиростабилизатора, работающего в условиях стационарных возмущений достаточно долго для того, чтобы считать все переходные процессы в нем законченными.

Аналогичным образом можно найти дисперсию абсолютной угловой скорости гиростабилизатора вокруг оси стабилизации в более сложном случае, например, когда передаточная функция канала разгрузки $W_p(S)$ является дробно-рациональной функцией с неизвестными коэффициентами, значения которых следует определить на основе минимизации дисперсии случайной погрешности гиростабилизатора.

Оптимальные в указанном смысле значения искомых параметров системы c_1, c_2, ..., c_n (это, например, коэффициенты b, m, коэффициенты в $W_p(s)$) являются решениями системы алгебраических уравнений вида

$$\frac{\partial D[\omega_1(t)]}{\partial c_i} = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n. \tag{3.28}$$

Обычно система (3.28) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, аналитическое решение которой часто бывает невозможным. В этих случаях для отыскания оптимальных значений параметров c_i целесообразно воспользоваться численными методами - методом последовательных приближений, методом наискорейшего спуска, методом случайного поиска и т.д. [8] , [I6] .

В некоторых случаях дисперсия погрешности может не иметь минимума в пространстве искомых параметров c_i . При этом целесообразно для выбора, например, одного из параметров построить график зависимости дисперсии от этого параметра и подобрать значение параметра из области, в которой его дальнейшее изменение не приводит к существенному уменьшению дисперсии погрешности.

§ 3.3. Кинематическая составляющая собственной скорости прецессии одноосного гиростабилизатора

Перейдем теперь к определению кинематической составляющей собственной скорости прецессии платформы гиростабилизатора. Инструментальную составляющую здесь рассматривать не будем, полагая, что дрейф платформы, обусловленный возмущающими моментами вокруг оси прецессии, может быть найден на основе прецессионной теории аналогично дрейфу свободного гироскопа [I6] .

Причина возникновения кинематической погрешности заключается в том, что гироскоп, установленный на платформе гиростабилизатора, нечувствителен к угловому повороту платформы, возникающему вследствие конического движения измерительной оси на колеблющемся основании [6] . Согласно трактовке А.Ю. Ишлинского, часть этой погрешности можно рассматривать как следствие неголономного характера связей в гироскопической системе [4] .

Рассмотрим методику определения кинематической погрешности гиростабилизатора в случае, когда малые угловые колебания основания являются стационарными случайными функциями времени. Кинематическая составляющая собственной скорости прецессии ω_κ гиростабилизатора согласно [6] определяется следующим образом:

$$\omega_\kappa = \frac{1}{T} \int_0^T [\varphi_{y0}(t) + \beta(t)]\, \omega_{z0}(t)\, dt, \tag{3.29}$$

где $\beta(t)$ - угол прецессии гиростабилизатора; $\varphi_{y0}(t)$ - малый угол колебаний основания вокруг оси, совпадающей в неотклоненном положении платформы с осью прецессии; $\omega_{z0}(t)$ - проекция угловой скорости основания на ось, совпадающую в неотклоненном положении платформы с перпендикуляром к осям прецессии и стабилизации; T - время, за которое измерительная ось гиростабилизатора на колеблющемся основании, описывая коническую поверхность, возвращается в исходное положение, совпадающее с осью стабилизации.

Соотношение (3.29) можно переписать в следующем виде:

$$\omega_{\kappa} = \omega_{\kappa n} + \omega_{\kappa\beta} , \tag{3.30}$$

где $\omega_{\kappa n}$ - составляющая кинематической погрешности за счет углового движения платформы $\varphi_{y0}(t)$; $\omega_{\kappa\beta}$ - составляющая кинематической погрешности за счет прецессионного движения по углу $\beta(t)$:

$$\omega_{\kappa n} = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_{y0}(t)\,\omega_{z0}(t)\,dt ; \tag{3.31}$$

$$\omega_{\kappa\beta} = \frac{1}{T} \int_0^T \beta(t)\,\omega_{z0}(t)\,dt . \tag{3.32}$$

Следует подчеркнуть, что погрешность $\omega_{\kappa n}$ определяется только коническим движением в инерциальном пространстве оси стабилизации и может быть скомпенсирована при наличии информации об угловых движениях основания. Величина погрешности $\omega_{\kappa\beta}$ зависит, очевидно, от возмущающих моментов вокруг оси стабилизации и параметров контура разгрузки. При отсутствии возмущающих моментов или при весьма "сильной" разгрузке $\omega_{\kappa\beta}$ обращаеся в нуль. При отсутствии возмущающих моментов и при разомкнутой цепи разгрузки (свободный гироскоп) справедливо соотношение $\beta(t) = -\varphi_{y0}(t)$, и кинематическая погрешность отсутствует.

Соотношения (3.31), (3.32) определяют по существу средние по времени на отрезке времени T значения составляющих кинематического дрейфа гиростабилизатора.

Очевидно, что $\omega_{\kappa n}$, $\omega_{\kappa\beta}$ - случайные величины, математические ожидания которых в силу эргодичности и стационарности в принятой модели случайных процессов $\varphi_{y0}(t)$, $\omega_{z0}(t)$, $\beta(t)$ представляют собой значения соответствующих взаимных корреляционных функций этих процессов при $\tau=0$. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} M[\omega_{\kappa n}] &= M\Big[\frac{1}{T}\int_0^T \varphi_{y0}(t)\,\omega_{z0}(t+\tau)\,dt\Big]\Big|_{\tau=0} = K_{\varphi_{y0}\omega_{z0}}(0) ; \\ M[\omega_{\kappa\beta}] &= M\Big[\frac{1}{T}\int_0^T \beta(t)\,\omega_{z0}(t+\tau)\,dt\Big]\Big|_{\tau=0} = K_{\beta\omega_{z0}}(0) . \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

Отсюда получим:

$$\left.\begin{aligned} M[\omega_{кп}] &= K_{\varphi_{yo}\omega_{zo}}(0); \\ M[\omega_{k\beta}] &= K_{\beta\omega_{zo}}(0). \end{aligned}\right\} \qquad (3.34)$$

Взаимную корреляционную функцию $K_{\varphi_{yo}\omega_{zo}}(t)$ можно найти следующим образом. В соответствии с определением корреляционной функции имеем

$$K_{\varphi_{yo}\omega_{zo}}(t_1, t_2) = M\left[\varphi_{yo}(t_1)\frac{d}{dt_2}\varphi_{zo}(t_2)\right], \qquad (3.35)$$

где $\frac{d}{dt_2}\varphi_{zo}(t_2) = \omega_{zo}(t_2)$.

Меняя в (3.35) порядок дифференцирования и нахождения математического ожидания и обозначая операцию дифференцирования как частную производную по t_2, поскольку t_1 при этом следует рассматривать как постоянную, получаем

$$K_{\varphi_{yo}\omega_{zo}}(t_1,t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2}K_{\varphi_{yo}\varphi_{zo}}(t_1, t_2), \qquad (3.36)$$

где $K_{\varphi_{yo}\varphi_{zo}}(t_1,t_2)$ - взаимная корреляционная функция угловых колебаний основания.

Учитывая стационарность случайных процессов $\varphi_{yo}(t)$ и $\varphi_{zo}(t)$, можно записать:

$$\left.\begin{aligned} K_{\varphi_{yo}\omega_{zo}}(t_1,t_2) &= K_{\varphi_{yo}\omega_{zo}}(t_2-t_1) = K_{\varphi_{yo}\omega_{zo}}(\tau); \\ K_{\varphi_{yo}\varphi_{zo}}(t_1,t_2) &= K_{\varphi_{yo}\varphi_{zo}}(t_2-t_1) = K_{\varphi_{yo}\varphi_{zo}}(\tau). \end{aligned}\right\} \qquad (3.37)$$

На основании (3.36) и (3.37), учитывая, что $t_2 = t_1 + \tau$, окончательно получаем:

$$K_{\varphi_{yo}\omega_{zo}} = \frac{d}{d\tau}K_{\varphi_{yo}\varphi_{zo}}(\tau). \qquad (3.38)$$

Таким образом, $K_{\varphi_{yo}\omega_{zo}}(\tau)$ можно найти, если известна взаимная корреляционная функция угловых колебаний основания. В общем случае $K_{\varphi_{yo}\varphi_{zo}}(\tau)$ не является четной, и поэтому ее производная при $\tau = 0$, а следовательно, согласно (3.34) и математическое ожидание составляющей кинематической погрешности $\omega_{кп}$ не обращаются в нуль.

Определим теперь взаимную корреляционную функцию $K_{\beta\omega_{zo}}(\tau)$. Аналогично соотношению (3.38) имеем

$$K_{\beta\omega_{zo}}(\tau) = \frac{d}{d\tau}K_{\beta\varphi_{zo}}(\tau). \qquad (3.39)$$

Взаимная корреляционная функция $K_{\beta\varphi_{xo}}(\tau)$ в соответствии с определением записывается так:

$$K_{\beta\varphi_{xo}}(\tau) = M\left[\beta(t)\varphi_{xo}(t+\tau)\right]. \tag{3.40}$$

Полагая, что основные возмущающие моменты, приложенные вокруг осей прецессии и стабилизации гиростабилизатора, обусловлены малыми угловыми колебаниями основания вокруг оси прецессии $\varphi_{yo}(t)$ и вокруг оси стабилизации $\varphi_{xo}(t)$, для угла прецессии $\beta(t)$ гиростабилизатора получаем:

$$\beta(t) = \int_0^\infty \varphi_{yo}(t-\theta)K(\theta)d\theta + \int_0^\infty \varphi_{xo}(t-\eta)l(\eta)d\eta, \tag{3.41}$$

где $K(\theta)$, $l(\eta)$ – импульсные переходные функции гиростабилизатора по отношению к $\varphi_{yo}(t)$ и $\varphi_{xo}(t)$ соответственно.

Подставляя (3.41) в (3.40), имеем

$$\begin{aligned} K_{\beta\varphi_{xo}}(\tau) = M\Big\{&\Big[\int_0^\infty \varphi_{yo}(t-\theta)K(\theta)d\theta\Big]\varphi_{xo}(t+\tau) + \\ &+\Big[\int_0^\infty \varphi_{xo}(t-\eta)l(\eta)d\eta\Big]\varphi_{xo}(t+\tau)\Big\}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Отсюда

$$K_{\beta\varphi_{xo}}(\tau) = \int_0^\infty K_{\varphi_{yo}\varphi_{xo}}(\tau+\theta)K(\theta)d\theta + \int_0^\infty K_{\varphi_{xo}\varphi_{xo}}(\tau+\eta)l(\eta)d\eta. \tag{3.43}$$

Умножим обе части равенства (3.43) на $e^{-j\omega\tau_1}\frac{1}{2\pi}$ и проинтегрируем по τ от $-\infty$ до $+\infty$. В итоге получим выражение для взаимной спектральной плотности:

$$S_{\beta\varphi_{xo}}(\omega) = S_{\varphi_{yo}\varphi_{xo}}(\omega)W_{\beta\varphi_{yo}}(j\omega) + S_{\varphi_{xo}\varphi_{xo}}(\omega)W_{\beta\varphi_{xo}}(j\omega), \tag{3.44}$$

где $S_{\varphi_{yo}\varphi_{xo}}(\omega)$, $S_{\varphi_{xo}\varphi_{xo}}(\omega)$ – взаимные спектральные плотности угловых колебаний основания.

Используя (3.44) при известных взаимных спектральных плотностях, нетрудно перейти к корреляционной функции $K_{\beta\varphi_{xo}}(\tau)$ и далее к искомой $K_{\beta\omega_{xo}}(\tau)$.

Передаточные функции $W_{\beta\varphi_{yo}}(j\omega)$ и $W_{\beta\varphi_{xo}}(j\omega)$ от угловых колебаний основания к углу прецессии β гиростабилизатора могут быть легко найдены на основе уравнений его движения [10].

Таким образом, для определения математического ожидания составляющей кинематической погрешности $\omega_{K\beta}$, так же, как и составляющей ω_{Kn}, при известных параметрах гиростабилизатора достаточно знать взаимные корреляционные функции или спектральные плотности угловых колебаний основания.

§ 3.4. Определение оптимальной передаточной функции канала разгрузки гиростабилизатора

Задача определения оптимальной структуры гироскопической системы, находящейся под действием случайных возмущающих и управляющих воздействий, представляет собой задачу синтеза, которая может состоять в определении либо всей неизвестной структуры гироскопической системы, либо отдельных ее частей [8] , [II] , [I6] , [I8] .

Для решения задачи синтеза должны быть заданы характеристики входных управляющих и возмущающих моментов, приложенных к гиросистеме, а также критерий качества (чаще всего - критерий точности) гироскопической системы. Систему, наилучшим образом удовлетворяющую выбранному критерию качества, обычно называют оптимальной системой, а соответствующий критерий качества - критерием оптимальности системы.

Представляют интерес даже такие результаты решения задачи синтеза, которые невозможно реализовать практически, на базе реальных элементов, поскольку они позволяют оценить, насколько качественные характеристики реальной спроектированной гироскопической системы близки к характеристикам оптимальной системы. Кроме того, найденные структуры и параметры оптимальных систем позволяют при необходимости определить направление, в котором следует изменить характеристики реальных гироскопических систем для приближения их к оптимальным.

Наиболее распространенными методами синтеза гироскопических систем являются методы Винера, Заде и Рагазини, метод оптимальной фильтрации Калмана, а также их разновидности [II] , [I2] , [I6] , [I8].

Остановимся на одном из возможных подходов к синтезу оптимальной передаточной функции канала разгрузки гиростабилизатора, основанном на методе Винера [I].

Изложим предварительно главные допущения и основы расчетной схемы, принятые в методе Винера. Как известно [I3] , [I6] , [I7] , метод Винера представляет собой решение задачи синтеза по критерию минимума средней квадратической ошибки динамической системы, находящейся под воздействием случайных внешних возмущений. В методе Винера приняты следующие основные допущения:

I. Входной полезный сигнал $L(t)$ и помеха $N(t)$, а также желаемый выходной сигнал $M(t)$ являются стационарными и стационарносвязанными центрированными случайными процессами с известными корреляционными функциями.

2. Время наблюдения бесконечно, т.е. система использует все значения входного сигнала в бесконечном интервале времени от $t=-\infty$ до текущего момента. В этом случае выходной сигнал системы в текущий момент времени зависит от всех прошлых значений входного сигнала, а система обладает бесконечной "памятью".

3. Искомая оптимальная система должна осуществлять линейное преобразование полезного сигнала, т.е. должна находиться в классе линейных стационарных систем.

4. Искомая оптимальная система должна удовлетворять условию физической осуществимости, т.е. импульсная переходная или весовая функция системы должна обращаться в нуль для всех моментов времени.

5. В качестве критерия оптимальности используется критерий минимума средней квадратической погрешности.

Следует отметить, что допущение о бесконечной "памяти", являясь идеализацией, существенно упрощает выкладки при отыскании оптимальной системы. Кроме того, синтезировав оптимальную систему с использованием всей прошлой информации о случайном процессе на входе, мы получим систему, которую невозможно улучшить с точки зрения уменьшения среднего квадратического отклонения при использовании информации о случайном процессе на входе на ограниченном интервале времени. Таким образом, синтезированная оптимальная система демонстрирует в этом случае предельные возможности оптимизации на основе выбранного функционала. Заметим также, что в рамках корреляционной теории случайных процессов линейная оптимальная система является наилучшей из возможных.

Согласно методу Винера постановка задачи синтеза состоит в следующем. На вход системы (рис. 3.3) поступают полезный сигнал (управляющее воздействие) $L(t)$ и помеха $N(t)$, являющиеся стационарными случайными процессами с нулевыми математическими ожиданиями. Суммарный входной сигнал

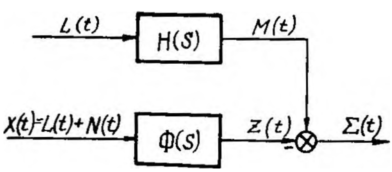

Рис. 3.3

$$X(t) = L(t) + N(t). \qquad (3.45)$$

Система должна осуществлять линейное преобразование управляющего воздействия $L(t)$ на входе в сигнал $M(t)$ на выходе:

$$M(t) = H(s)\,L(t)\,, \tag{3.46}$$

где $H(s)$ - оператор идеальной системы.

Погрешность $\Sigma(t)$ определяется разностью:

$$\Sigma(t) = M(t) - Z(t)\,, \tag{3.47}$$

где $Z(t)$ - действительный выходной сигнал системы.

Требуется на основе этих исходных данных решить задачу синтеза оптимальной системы, которая состоит в отыскании удовлетворяющей условию физической осуществимости импульсной переходной функции системы $l(t)$ или связанной с ней взаимно-однозначными соотношениями передаточной функции $\Phi(j\omega)$, обеспечивающих минимум средней квадратической погрешности $\sqrt{\overline{\Sigma^2}}$:

$$\overline{\Sigma^2} = D[\Sigma(t)] = M\{[M(t) - Z(t)]^2\} = min\,. \tag{3.48}$$

Соотношения, связывающие $l(t)$ и $\Phi(j\omega)$, как известно, таковы:

$$\Phi(j\omega) = \int_0^\infty l(t)\,e^{-j\omega t}\,dt\,; \tag{3.49}$$

$$K(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega\,. \tag{3.50}$$

Метод Винера целесообразно применять в самом общем случае расположения спектров частот полезного сигнала и помехи, т.е. в том случае, когда эти спектры налагаются друг на друга и имеют произвольную форму.

Не останавливаясь на выводе выражения для передаточной функции $\Phi(j\omega)$ оптимальной системы, приведем основные соотношения, которые позволяют ее получить при известных спектральных и взаимных спектральных плотностях полезного сигнала $L(t)$ и помехи $N(t)$.

Спектральная плотность $S_X(\omega)$ суммарного входного сигнала $X(t)$ в соответствии с (3.45) имеет вид

$$S_X(\omega) = S_L(\omega) + S_N(\omega) + S_{LN}(\omega) + S_{NL}(\omega)\,, \tag{3.51}$$

где $S_L(\omega)$, $S_N(\omega)$ - спектральные плотности случайных процессов $L(t)$, $N(t)$ соответственно; $S_{LN}(\omega)$, $S_{NL}(\omega)$ - их взаимные спектральные плотности.

Взаимная спектральная плотность $S_{MX}(\omega)$ случайных процессов $M(t)$ и $X(t)$ такова:

$$S_{MX}(\omega) = S_{ML}(\omega) + S_{MN}(\omega), \qquad (3.52)$$

где $S_{ML}(\omega)$ – взаимная спектральная плотность случайных процессов $M(t)$ и $L(t)$; $S_{MN}(\omega)$ – взаимная спектральная плотность случайных процессов $M(t)$ и $N(t)$.

Введем вспомогательную функцию $\psi(j\omega)$, связанную со спектральной плотностью $S_X(\omega)$ соотношением

$$\psi(j\omega)\,\psi^*(j\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 = S_X(\omega) \qquad (3.53)$$

где $\psi^*(j\omega)$ – функция, комплексно сопряженная с функцией $\psi(j\omega)$.

Функция $\psi(j\omega)$ содержит все нули и полюсы спектральной плотности $S_X(\omega)$, расположенные только в верхней полуплоскости, функция $\psi^*(j\omega)$ содержит все нули и полюсы $S_X(\omega)$, расположенные в нижней полуплоскости.

Учитывая сделанные допущения и принятые обозначения, формулу для оптимальной (в указанном выше смысле) передаточной функции можно записать в следующем виде [17] :

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{2\pi\psi(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{MX}(\omega)}{\psi^*(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega \qquad (3.54)$$

или

$$\Phi(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\psi(j\omega)}, \qquad (3.55)$$

где

$$B(j\omega) = \int_0^{\infty} \beta(t) e^{-j\omega t} dt; \qquad (3.56)$$

$$\beta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{S_{MX}(\omega)}{\psi^*(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega, \quad t > 0. \qquad (3.57)$$

Соотношения (3.54)-(3.57) являются основными в методе Винера. В случае дробно-рациональных спектральных плотностей интеграл (3.54) может быть вычислен в общем виде:

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{\psi(j\omega)} \left[\frac{S_{MX}(\omega)}{\psi(-j\omega)} \right]_+, \qquad (3.58)$$

где квадратные скобки со знаком "+" означают, что выражение в квадратных скобках должно быть разложено на простые дроби и в этом разложении следует отбросить все дроби с полюсами, расположенными в нижней полуплоскости комплексного переменного, и целую часть, а оставить следует только те простые дроби, которые соответствуют полюсам, расположенным в верхней полуплоскости комплексного переменного.

Дисперсию ошибки оптимальной системы (см. рис. 3.3) можно определить следующим образом:

$$D[\Sigma(t)]_{min} = M[\Sigma^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_M(\omega)\,d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 S_X(\omega)\,d\omega \tag{3.59}$$

или

$$D[\Sigma(t)]_{min} = K_M(0) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \beta^2(t)\,dt, \tag{3.60}$$

где $K_M(0)$ - значение (при $\tau = 0$) корреляционной функции случайного процесса $M(t)$; $\beta(t)$ определяется соотношением (3.57).

Перейдем теперь непосредственно к одному из возможных вариантов синтеза оптимальной передаточной функции канала разгрузки силового гиростабилизатора на основе метода Винера [I] . Для определенности все дальнейшие рассуждения будем проводить применительно к одноосному одногироскопному гиростабилизатору, установленному на основании, совершающем случайные угловые колебания.

Линеаризованные уравнения движения гиростабилизатора в преобразованиях Лапласа при нулевых начальных условиях имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &(Js^2 + ns)\beta - H\omega_1 = M_{упр} - Js\,\omega_{y0}\,; \\ &(J_\alpha + m)s\,\omega_1 + Hs\beta + W_p(s)\beta = (ms + b)\,\omega_{x0} - H\omega_{y0}\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.61}$$

Оригиналы $\omega_{x0}(t) = \dot{\varphi}_{x0}(t)$, $\omega_{y0}(t) = \dot{\varphi}_{y0}(t)$ - проекция угловой скорости колебаний основания на соответствующие оси. Эти угловые скорости представляют собой стационарные центрованные (с нулевыми математическими ожиданиями) случайные процессы с известными корреляционными функциями. $M_{упр}(t)$ - полезный управляющий сигнал гиростабилизатора, осуществляющий потребную ориентацию в пространстве платформы гиростабилизатора вокруг оси стабилизации; представляет собой стационарный центрированный случайный процесс с известной корреляционной функцией.

Будем полагать далее, что стационарные случайные процессы $\omega_{x0}(t)$, $\omega_{y0}(t)$, $M_{упр}(t)$ имеют дробно-рациональные спектральные плотности и попарно не коррелированы.

Отметим, что в (3.61) мы пренебрегли в левой части уравнения моментов вокруг оси стабилизации моментом $b\omega_1$, полагая, что он существенно меньше момента вязкого трения $b\omega_{x0}$, учтенного в правой части этого уравнения ($\omega_{x0} \gg \omega_1$).

Из структуры уравнений (3.61) видно, что на вход гиростабилизатора как динамической системы поступают полезный сигнал $M_{упр}(t)$ (управляющий момент вокруг оси прецессии) и помехи: $N_1(t) = -J\dot{\omega}_{y0}(t)$ (возмущающий момент вокруг оси прецессии) и $N_2(t) = m\dot{\omega}_{x0}(t) + b\omega_{x0}(t) - H\omega_{y0}(t)$ (возмущающий момент вокруг оси стабилизации). С целью общности гироскопический стабилизатор можно рассматривать как исполнительное устройство в системе управления, работающее в инерциальной системе координат при наличии случайных стационарных управляющего и возмущающих воздействий. Показателем качества стабилизатора может служить в этом случае точность воспроизведения платформой (ее абсолютной угловой скоростью $\omega_1(t)$) угловой скорости $\frac{M_{упр}(t)}{H}$ при действии помехи $\frac{N_1(t)}{H}$, приложенной там же, где и управляющий сигнал, и помехи $N_2(t)$, приложенной в другой точке.

Разрешая систему (3.61) как систему линейных алгебраических уравнений относительно абсолютной угловой скорости гиростабилизатора вокруг оси стабилизации, получаем

$$\omega_1 = \Phi(s)\left(\frac{M_{упр}}{H} - \frac{N_1}{H}\right) + G(s)N_2\,, \tag{3.62}$$

где

$$\Phi(s) = \frac{H[Hs + W_p(s)]}{s^2(J_\alpha + m)(Js + n) + H[Hs + W_p(s)]}\,; \tag{3.63}$$

$$G(s) = \frac{s(Js + n)}{s^2(J_\alpha + m)(Js + n) + H[Hs + W_p(s)]}\,; \tag{3.64}$$

$$N_1 = -Js\,\omega_{y0}\,, \quad N_2 = ms\,\omega_{x0} + b\omega_{x0} - H\omega_{y0}\,. \tag{3.65}$$

Представим выражение $G(s)N_2$ в виде

$$G(s)N_2 = -[\Phi(s) - 1]^{-1}G(s)N_2 + \Phi(s)[\Phi(s) - 1]^{-1}G(s)N_2 \tag{3.66}$$

при $\Phi(s) \neq 1$.

Подставляя теперь (3.66) в (3.62), получаем

$$\omega_1 + \left[\Phi(s)-1\right]^{-1} G(s) N_2 = \Phi(s)\left\{\frac{M_{упр}}{H} + \left[\Phi(s)-1\right]^{-1} G(s) N_2 - \frac{N_1}{H}\right\} \tag{3.67}$$

при $\Phi(s) \neq 1$.

Используя соотношения (3.63) и (3.64), нетрудно проверить справедливость следующего равенства:

$$\left[\Phi(s)-1\right]^{-1} G(s) = -\frac{1}{(J_\alpha + m)s}\,. \tag{3.68}$$

Примем в (3.67) с учетом (3.68) обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_{упр}}{H} - \frac{1}{(J_\alpha + m)s} N_2\,; \\ \sigma^* &= \omega_1 - \frac{1}{(J_\alpha + m)s} N_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.69}$$

Равенство (3.67) можно переписать теперь следующим образом:

$$\sigma^* = \Phi(s)\left(\sigma - \frac{N_1}{H}\right). \tag{3.70}$$

Обозначим через Σ ошибку воспроизведения платформой гиростабилизатора угловой скорости $\frac{M_{упр}}{H}$, задаваемой управляющим моментом $M_{упр}$:

$$\Sigma = \frac{M_{упр}}{H} - \omega_1\,. \tag{3.71}$$

Из (3.69) и (3.70) видно, что задача минимизации ошибки Σ сводится к задаче минимизации разности $\sigma - \sigma^*$.

Из соотношения (3.70) в этом случае следует (рис. 3.4), что с точки зрения задачи Винера σ можно рассматривать как полезный сигнал на входе гироскопической системы (соответствует L из (3.46)) при наличии в той же точке помехи $\frac{N_1}{H}$ (соответствует N из (3.46)). Суммарный входной сигнал, соответствующий X из (3.46), в этом случае таков:

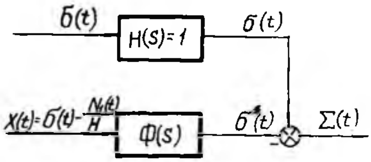

Рис. 3.4

$$X = \sigma - \frac{N_1}{H}\,. \tag{3.72}$$

Таким образом, полученное в результате промежуточных преобразований соотношение (3.70) можно рассматривать как структурную основу для постановки задачи синтеза оптимальной передаточной функции канала разгрузки гиростабилизатора на основе метода Винера. Сформулируем эту задачу. В рамках допущений, принятых в методе, требуется синтезировать оптимальную передаточную функцию одноосного гиростабилизатора $\Phi(s)$, обеспечивающую минимум дисперсии погрешности $D[\Sigma(t)]$:

$$D[\Sigma(t)] = M\left\{[\sigma(t) - \sigma^*(t)]^2\right\}. \tag{3.73}$$

Оптимальная передаточная функция $W_p(s)$ канала разгрузки при этом может быть найдена на основе использования соотношения (3.63) после синтеза оптимальной передаточной функции $\Phi(s)$. Задача, таким образом, разбивается на два этапа: на первом следует отыскивать оптимальную передаточную функцию $\Phi(s)$, на втором - собственно передаточную функцию канала разгрузки $W_p(s)$.

Второй этап представляет собой по существу решение задачи определения оптимального корректирующего устройства $W_p(s)$ гироскопической системы с заданной неизменяемой частью (гироскопом) при известной оптимальной передаточной функции $\Phi(s)$ гиростабилизатора как замкнутой динамической системы. Из (3.63) непосредственно следует:

$$W_p(s) = \frac{\Phi(s)s^2(J_\alpha + m)(Js + n) - H^2 s\,[\Phi(s) - 1]}{[1 - \Phi(s)]\,H}. \tag{3.74}$$

Оптимальная передаточная функция $\Phi(s)$ в общем случае является дробно-рациональной или трансцендентной. В соответствии с этим $W_p(s)$ также будет дробно-рациональной или трансцендентной. В последнем случае для приближенной реализации передаточной функции канала разгрузки ее необходимо аппроксимировать дробно-рациональной функцией.

Частный случай $M_{упр} = 0$ сформулированной задачи синтеза оптимальной передаточной функции соответствует режиму стабилизации одноосного гиростабилизатора.

Рассмотрим теперь путь решения задачи синтеза. Поскольку согласно принятой модели (3.6I) гироскопический стабилизатор относится к классу линейных стационарных систем, а случайные стационарные сигналы управления и возмущения с нулевыми математическими ожиданиями имеют спектральные плотности в виде дробно-рациональных функций от ω^2, при отсутствии ограничений на "память" системы для определения оптимальной передаточной функции $\Phi(j\omega)$ можно воспользоваться ооотношением (3.58), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\Phi(j\omega)=\frac{1}{\psi(j\omega)}\left[\frac{S_{\sigma X}(\omega)}{\psi(-j\omega)}\right]_+ . \qquad (3.75)$$

В соотношении (3.75) $S_{\sigma X}(\omega)$ – взаимная спектральная плотность случайных процессов $\sigma(t)$ и $X(t)$. Полагая с достаточной для практики точностью, что случайные процессы $\sigma(t)$ и $\frac{N_1(t)}{H}$ взаимно не коррелированы, очевидно, с учетом (3.72) согласно (3.52) можно записать:

$$S_{\sigma X}(\omega)=S_\sigma(\omega). \qquad (3.76)$$

Для функции $\psi(j\omega)$ согласно (3.53) справедливо соотношение

$$\psi(j\omega)\,\psi(-j\omega)=S_X(\omega). \qquad (3.77)$$

Спектральная плотность суммарного входного сигнала $S_X(\omega)$ с учетом (3.72) в соответствии с (3.5I) имеет вид

$$S_X(\omega)=S_\sigma(\omega)+S_{\frac{N_1}{H}}(\omega). \qquad (3.78)$$

В свою очередь, спектральную плотность $S_\sigma(\omega)$ можно определить на основе спектральных плотностей случайных процессов $M_{упр}(t)$, $\varphi_{x0}(t)$, $\varphi_{y0}(t)$. Действительно, выражение для сигнала σ, который должен отрабатываться гиростабилизатором с минимальной среднеквадратичной ошибкой, имеет вид

$$\sigma=\frac{M_{упр}}{H}-\frac{1}{(J_\alpha+m)s}\left[(ms^2+bs)\varphi_{x0}-Hs\,\varphi_{y0}\right]. \qquad (3.79)$$

Отсюда, учитывая отсутствие попарной корреляции между управляющим сигналом и угловыми колебаниями основания, получаем

$$S_\sigma(\omega)=\frac{1}{H^2}S_{M_{упр}}(\omega)+\frac{b^2+m^2\omega^2}{(J_\alpha+m)^2}S_{\varphi_{x0}}(\omega)+\frac{H^2}{(J_\alpha+m)^2}S_{\varphi_{y0}}(\omega), \qquad (3.80)$$

где $S_{M_{упр}}(\omega)$, $S_{\varphi_{x0}}(\omega)$, $S_{\varphi_{y0}}(\omega)$ – известные дробно-рациональные спектральные плотности управляющего момента и угловых колебаний основания соответственно.

Спектральная плотность помехи $S_{\frac{N_1}{H}}(\omega)$, очевидно, такова:

$$S_{\frac{N_1}{H}}(\omega)=\frac{J^2\omega^2}{H^2}S_{\omega_{y0}}(\omega)=\frac{J^2\omega^4}{H^2}S_{\varphi_{y0}}(\omega). \qquad (3.8I)$$

Суммируя выражения (3.80) и (3.8I), можно получить согласно (3.78) спектральную плотность суммарного входного сигнала $S_X(\omega)$.

Если теперь определить корни числителя μ_i и знаменателя ν_l спектральной плотности $S_X(\omega)$, то ее выражение можно представить в виде

$$S_X(\omega) = a^2 \frac{P_m(\omega)\, P_m^*(\omega)}{Q_n(\omega)\, Q_n^*(\omega)}, \tag{3.82}$$

где

$$\left.\begin{aligned} P_m(\omega) &= \prod_{i=1}^{\rho} (\omega - \mu_i)^{m_i}, \quad Q_n(\omega) = \prod_{l=1}^{r} (\omega - \nu_l)^{n_l}; \\ P_m^*(\omega) &= \prod_{i=1}^{\rho} (\omega - \mu_i^*)^{m_i}, \quad Q_n^*(\omega) = \prod_{l=1}^{\delta} (\omega - \nu_l^*)^{n_l}, \end{aligned}\right\} \tag{3.83}$$

a^2 – постоянная, равная отношению свободных членов числителя и знаменателя в выражении для $S_X(\omega)$; комплексные корни μ_i и ν_e имеют положительные мнимые части; m_i, n_l – кратности соответствующих корней.

Функция $\psi(j\omega)$ из (3.75) согласно определению может быть получена из выражения (3.82):

$$\psi(j\omega) = a \frac{\prod\limits_{i=1}^{\rho} (\omega - \mu_i)^{m_i}}{\prod\limits_{l=1}^{r} (\omega - \nu_l)^{n_l}}. \tag{3.84}$$

Аналогично, определив корни числителя η_i и знаменателя λ_l в выражении (3.80) для спектральной плотности $S_\sigma(\omega)$, можно записать:

$$S_\sigma(\omega) = b^2 \frac{\prod\limits_{i=1}^{r} (\omega - \eta_i)^{t_i} \prod\limits_{i=1}^{r} (\omega - \eta_i^*)^{t_i}}{\prod\limits_{l=1}^{k} (\omega - \lambda_l)^{S_l} \prod\limits_{l=1}^{k} (\omega - \lambda_l^*)^{S_l}}, \tag{3.85}$$

где b^2 – постоянная, равная отношению свободных членов числителя и знаменателя в выражении для $S_\sigma(\omega)$; комплексные корни η_i, λ_l имеют положительные мнимые части; t_i, S_l – кратности соответствующих корней.

Используя (3.84), (3.85), выражение для $\left[\frac{S_\sigma(\omega)}{\psi(-j\omega)}\right]_+$ нетрудно представить в виде

$$\left[\frac{S_\sigma(\omega)}{\psi(-j\omega)}\right]_+ = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{\omega - \lambda_j}. \tag{3.86}$$

Выражение (3.86) согласно (3.58) представляет собой часть разложения на простые дроби функции $\frac{S_\sigma(\omega)}{\psi(-j\omega)}$; в этом разложении сохранены только простые дроби, соответствующие полюсам λ_i, расположенным в верхней полуплоскости комплексного переменного.

На основании (3.75) с учетом (3.84) и (3.86) искомую оптимальную передаточную функцию гиростабилизатора $\Phi(j\omega)$ можно записать так:

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{a}\,\frac{\prod\limits_{l=1}^{\gamma}(\omega-\nu_l)^{n_l}}{\prod\limits_{i=1}^{p}(\omega-\mu_i)^{m_i}}\sum_{j=1}^{k}\frac{a_j}{\omega-\lambda_j} = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)}. \qquad (3.87)$$

В итоге оптимальная передаточная функция канала разгрузки $W_p(s)$ согласно (3.74), (3.87) может быть записана в следующем виде:

$$W_p(s) = \frac{A(s)s^2(J_\alpha+m)(Js+n) - H^2 s\,[B(s)-A(s)]}{H\,[B(s)-A(s)]}. \qquad (3.88)$$

Ошибка Σ воспроизведения гиростабилизатором угловой скорости $\frac{M_{упр}}{H}$ в этом случае на основании (3.69) - (3.71) с учетом (3.87) такова:

$$\Sigma = \frac{M_{упр}}{H} - \omega_{x1} = \sigma - \sigma^* = \Phi(s)\left(\sigma - \frac{N_1}{H}\right) =$$

$$= \sigma\,[1-\Phi(s)] + \Phi(s)\,\frac{N_1}{H} \qquad (3.89)$$

или

$$\Sigma = \left[\frac{M_{упр}}{H} - \frac{1}{(J_\alpha+m)s}N_2\right][1-\Phi(s)] + \Phi(s)\,\frac{N_1}{H}. \qquad (3.90)$$

Отсюда

$$\Sigma = \frac{B(s)-A(s)}{B(s)}\left[\frac{M_{упр}}{H} - \frac{ms+b}{J_\alpha+m}\varphi_{x0} + \frac{H}{J_\alpha+m}\varphi_{y0}\right] - \frac{Js^2A(s)}{HB(s)}\varphi_{y_0}. \qquad (3.91)$$

Дисперсию ошибки можно определить либо на основании формулы (3.59), либо непосредственно на основании соотношения (3.89) с учетом выражений для $S_\sigma(\omega)$ из (3.80) и $S_{\frac{N_1}{H}}(\omega)$ из (3.81):

$$D[\Sigma(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{B(j\omega)-A(j\omega)}{B(j\omega)}\right|^2\left[\frac{S_{M_{упр}}(\omega)}{H^2} + \right.$$

$$+ \frac{b^2+m^2\omega^2}{(J_\alpha + m)^2} S_{\varphi_{x0}}(\omega) + \frac{H^2}{(J_\alpha + m)^2} S_{\varphi_{y0}}(\omega) \Big] d\omega +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} \right|^2 \frac{J^2\omega^4}{H^2} S_{\varphi_{y0}}(\omega)\, d\omega . \tag{3.92}$$

Погрешности гиростабилизатора в режиме стабилизации при $M_{упр}=0$ можно определить, оценивая угол поворота φ_1, платформы вокруг оси стабилизации ($\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$) без учета кинематического дрейфа.

Из соотношения (3.89) при $M_{упр} = 0$ имеем

$$\omega_1 = \frac{N_2}{(J_\alpha + m)s} \left[1 - \Phi(s) \right] - \Phi(s) \frac{N_1}{H} . \tag{3.93}$$

Отсюда

$$\varphi_1 = \frac{[B(s) - A(s)](ms+b)}{B(s)(J_\alpha + m)s} \varphi_{x0} + \left\{ \frac{[B(s)-A(s)]H}{(J_\alpha+m)sB(s)} + \frac{A(s)Js}{B(s)H} \right\} \varphi_{y0} . \tag{3.94}$$

Математическое ожидание дрейфа $M[\varphi_1(t)]$ при центрированных случайных процессах $\varphi_{x0}(t)$ и $\varphi_{y0}(t)$, очевидно, равно нулю, а дисперсия $D[\varphi_1(t)]$ на основании (3.94) определяется следующим выражением:

$$D[\varphi_1(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{B(j\omega)-A(j\omega)}{B(j\omega)} \right|^2 \frac{(b^2+m^2\omega^2)}{(J_\alpha+m)^2\omega^2} S_{\varphi_{x0}}(\omega)\, d\omega +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{B(j\omega)-A(j\omega)}{B(j\omega)} \right|^2 \frac{H^2}{(J_\alpha+m)^2\omega^2} S_{\varphi_{y0}}(\omega)\, d\omega +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} \right|^2 \frac{J^2\omega^2}{H^2} S_{\varphi_{y0}}(\omega)\, d\omega . \tag{3.95}$$

В заключение отметим, что в получаемой на основе рассмотренного метода оптимальной передаточной функции канала разгрузки степень числителя может быть больше степени знаменателя, вследствие чего при практической реализации оптимальной системы возникают трудности.

Однако в большинстве практически важных случаев возможны значительные отступления от оптимальной передаточной функции без существенного ухудшения качества системы. В то же время оптимальная передаточная функция позволяет произвести оценку предельной потенциальной точности гироскопической системы с точки зрения принятого критерия качества - минимума среднего квадратического отклонения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А б р а м о в А.И., Б е р л и н И.Б. Синтез оптимальной управляющей части силового гироскопического стабилизатора. – "Автоматика и телемеханика", 1970, № 8.

2. Б е с е к е р с к и й В.А., Ф а б р и к а н т Е.А. Динамический синтез систем гироскопической стабилизации. "Судостроение", 1968.

3. Б у л г а к о в Б.В. Прикладная теория гироскопа. ГИТТЛ, 1955.

4. И ш л и н с к и й А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. "Наука", 1976.

5. Л у р ь е А.И. Операционные исчисления. ГИТТЛ, 1950.

6. П е л ь п о р Д.С., К о л о с о в Ю.А., Р а х т е е н к о Е.Р. Расчет и проектирование гироскопических стабилизаторов. "Машиностроение", 1972.

7. Р е п н и к о в А.В. Элементы теории колебаний. Ч.I. МАИ, 1975.

8. Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. Под редакцией В.Д. Андреева [и др.] . "Наука", 1973.

9. П е л ь п о р Д.С. Теория гироскопических стабилизаторов. "Машиностроение", 1965.

10. Р е п н и к о в А.В. Учебное пособие по курсу "Гироскопические платформенные системы". МАИ, 1976.

11. Р и в к и н С.С. Статистический синтез гироскопических устройств. "Судостроение", 1970.

12. Р и в к и н С.С. Метод оптимальной фильтрации Калмана и его применение в инерциальных навигационных системах Ч. I и II. "Судостроение", 1973 и 1974.

13. Р о с и н М.Ф. Статистическая динамика и теория эффективности систем управления. "Машиностроение", 1970.

14. Р о й т е н б е р г Я.Н. Гироскопы. "Наука", 1975.

15. С а й д о в П.И., С л и в Э.И., Ч е р т к о в Р.И. Вопросы прикладной теории гироскопов. "Судпромгиз", 1961.

16. С в е ш н и к о в А.А., Р и в к и н С.С. Вероятностные методы в прикладной теории гироскопов. "Наука", 1974.

17. Теория автоматического регулирования. Кн. I, II. Под ред. В.В. Солодовникова. "Машиностроение", 1967.

18. Р и в к и н С.С., И в а н о в с к и й Р.И., К о с т р о в А.В. Статистическая оптимизация навигационных систем. "Судостроение", 1976.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Александр Васильевич Решников,
Александр Исаевич Черноморский

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
по курсу
"ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ"

Редактор Е.Л. Мочина Техн. редактор К.П. Барановская

Л - 80593 от 21/XI-1977 г. 5,0 уч.-изд.л. 4,75 печ.л.

Зак. 650/8373 Цена 19 коп. Тираж 500

Ротапринт МАИ

Цена 19 коп.