

---

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	30
Часть I. Основы	43
Глава 1. Роль алгоритмов в вычислениях	46
Глава 2. Приступаем к изучению	57
Глава 3. Рост функций	87
Глава 4. Рекуррентные соотношения	109
Глава 5. Вероятностный анализ и рандомизированные алгоритмы	140
Часть II. Сортировка и порядковая статистика	173
Глава 6. Пирамидальная сортировка	178
Глава 7. Быстрая сортировка	198
Глава 8. Сортировка за линейное время	220
Глава 9. Медианы и порядковые статистики	240
Часть III. Структуры данных	255
Глава 10. Элементарные структуры данных	260
Глава 11. Хеш-таблицы	282
Глава 12. Бинарные деревья поиска	316
Глава 13. Красно-черные деревья	336
Глава 14. Расширение структур данных	365
Часть IV. Усовершенствованные методы разработки и анализа	383
Глава 15. Динамическое программирование	386
Глава 16. Жадные алгоритмы	442
Глава 17. Амортизационный анализ	482
Часть V. Сложные структуры данных	511
Глава 18. B-деревья	515
Глава 19. Биномиальные пирамиды	537

Глава 20. Фибоначчиевы пирамиды	558
Глава 21. Структуры данных для непересекающихся множеств	581
Часть VI. Алгоритмы для работы с графами	607
Глава 22. Элементарные алгоритмы для работы с графами	609
Глава 23. Минимальные остовные деревья	644
Глава 24. Кратчайшие пути из одной вершины	663
Глава 25. Кратчайшие пути между всеми парами вершин	708
Глава 26. Задача о максимальном потоке	734
Часть VII. Избранные темы	795
Глава 27. Сортирующие сети	799
Глава 28. Работа с матрицами	823
Глава 29. Линейное программирование	869
Глава 30. Полиномы и быстрое преобразование Фурье	926
Глава 31. Теоретико-числовые алгоритмы	954
Глава 32. Поиск подстроки	1017
Глава 33. Вычислительная геометрия	1047
Глава 34. NP-полнота	1085
Глава 35. Приближенные алгоритмы	1151
Часть VIII. Приложения: математические основы	1189
Приложение А. Ряды	1191
Приложение Б. Множества и прочие художества	1202
Приложение В. Комбинаторика и теория вероятности	1226
Библиография	1257
Предметный указатель	1277

---

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b>	30
<b>Часть I. Основы</b>	43
Введение	44
<b>Глава 1. Роль алгоритмов в вычислениях</b>	46
1.1 Алгоритмы	46
Какие задачи решаются с помощью алгоритмов?	47
Структуры данных	50
Методические указания	50
Сложные задачи	51
Упражнения	52
1.2 Алгоритмы как технология	52
Эффективность	52
Алгоритмы и другие технологии	54
Упражнения	55
Задачи	55
Заключительные замечания	56
<b>Глава 2. Приступаем к изучению</b>	57
2.1 Сортировка вставкой	57
Инварианты цикла и корректность сортировки вставкой	59
Соглашения, принятые при составлении псевдокода	61
Упражнения	63
2.2 Анализ алгоритмов	64
Анализ алгоритма, работающего по методу вставок	66

	Наихудшее и среднее время работы	69
	Порядок возрастания	70
	Упражнения	71
2.3	Разработка алгоритмов	71
2.3.1	Метод декомпозиции	72
2.3.2	Анализ алгоритмов, основанных на принципе “разделяй и властвуй”	78
	Анализ алгоритма сортировки слиянием	78
	Упражнения	81
	Задачи	83
	Заключительные замечания	86
<b>Глава 3.</b>	<b>Рост функций</b>	<b>87</b>
3.1	Асимптотические обозначения	88
	$\Theta$ -обозначения	88
	$O$ -обозначения	91
	$\Omega$ -обозначения	92
	Асимптотические обозначения в уравнениях и неравенствах	93
	$o$ -обозначения	94
	$\omega$ -обозначения	95
	Сравнение функций	96
	Упражнения	97
3.2	Стандартные обозначения и часто встречающиеся функции	98
	Монотонность	98
	Округление в большую и меньшую сторону	98
	Модульная арифметика	98
	Полиномы	99
	Показательные функции	99
	Логарифмы	100
	Факториалы	102
	Функциональная итерация	102
	Итерированная логарифмическая функция	103
	Числа Фибоначчи	103
	Упражнения	104
	Задачи	105
	Заключительные замечания	108
<b>Глава 4.</b>	<b>Рекуррентные соотношения</b>	<b>109</b>
	Технические детали	110
4.1	Метод подстановки	111
	Как угадать решение	112

Тонкие нюансы	113
Остерегайтесь ошибок	114
Замена переменных	114
Упражнения	115
4.2 Метод деревьев рекурсии	115
Упражнения	120
4.3 Основной метод	121
Основная теорема	121
Использование основного метода	122
Упражнения	123
★ 4.4 Доказательство основной теоремы	124
4.4.1 Доказательство теоремы для точных степеней	125
4.4.2 Учет округления чисел	130
Упражнения	133
Задачи	133
Заключительные замечания	138
<b>Глава 5. Вероятностный анализ и рандомизированные алгоритмы</b>	<b>140</b>
5.1 Задача о найме сотрудника	140
Анализ наихудшего случая	142
Вероятностный анализ	142
Рандомизированные алгоритмы	143
Упражнения	144
5.2 Индикаторная случайная величина	144
Анализ задачи о найме сотрудника с помощью индикаторных случайных величин	146
Упражнения	148
5.3 Рандомизированные алгоритмы	149
Массивы, полученные в результате случайной перестановки	151
Упражнения	155
★ 5.4 Вероятностный анализ и дальнейшее применение индикаторных случайных величин	156
5.4.1 Парадокс дней рождения	157
Анализ с помощью индикаторных случайных величин	158
5.4.2 Шары и урны	160
5.4.3 Последовательности выпадения орлов	161
5.4.4 Задача о найме сотрудника в оперативном режиме	165
Упражнения	167
Задачи	168
Заключительные замечания	171

	Наихудшее и среднее время работы	69
	Порядок возрастания	70
	Упражнения	71
2.3	Разработка алгоритмов	71
2.3.1	Метод декомпозиции	72
2.3.2	Анализ алгоритмов, основанных на принципе “разделяй и властвуй”	78
	Анализ алгоритма сортировки слиянием	78
	Упражнения	81
	Задачи	83
	Заключительные замечания	86
<b>Глава 3.</b>	<b>Рост функций</b>	<b>87</b>
3.1	Асимптотические обозначения	88
	$\Theta$ -обозначения	88
	$O$ -обозначения	91
	$\Omega$ -обозначения	92
	Асимптотические обозначения в уравнениях и неравенствах	93
	$o$ -обозначения	94
	$\omega$ -обозначения	95
	Сравнение функций	96
	Упражнения	97
3.2	Стандартные обозначения и часто встречающиеся функции	98
	Монотонность	98
	Округление в большую и меньшую сторону	98
	Модульная арифметика	98
	Полиномы	99
	Показательные функции	99
	Логарифмы	100
	Факториалы	102
	Функциональная итерация	102
	Итерированная логарифмическая функция	103
	Числа Фибоначчи	103
	Упражнения	104
	Задачи	105
	Заключительные замечания	108
<b>Глава 4.</b>	<b>Рекуррентные соотношения</b>	<b>109</b>
	Технические детали	110
4.1	Метод подстановки	111
	Как угадать решение	112

	Тонкие нюансы	113
	Остерегайтесь ошибок	114
	Замена переменных	114
	Упражнения	115
4.2	Метод деревьев рекурсии	115
	Упражнения	120
4.3	Основной метод	121
	Основная теорема	121
	Использование основного метода	122
	Упражнения	123
★ 4.4	Доказательство основной теоремы	124
	4.4.1 Доказательство теоремы для точных степеней	125
	4.4.2 Учет округления чисел	130
	Упражнения	133
	Задачи	133
	Заключительные замечания	138
<b>Глава 5. Вероятностный анализ и рандомизированные алгоритмы</b>		140
5.1	Задача о найме сотрудника	140
	Анализ наихудшего случая	142
	Вероятностный анализ	142
	Рандомизированные алгоритмы	143
	Упражнения	144
5.2	Индикаторная случайная величина	144
	Анализ задачи о найме сотрудника с помощью индикаторных случайных величин	146
	Упражнения	148
5.3	Рандомизированные алгоритмы	149
	Массивы, полученные в результате случайной перестановки	151
	Упражнения	155
★ 5.4	Вероятностный анализ и дальнейшее применение индикаторных случайных величин	156
	5.4.1 Парадокс дней рождения	157
	Анализ с помощью индикаторных случайных величин	158
	5.4.2 Шары и урны	160
	5.4.3 Последовательности выпадения орлов	161
	5.4.4 Задача о найме сотрудника в оперативном режиме	165
	Упражнения	167
	Задачи	168
	Заключительные замечания	171

<b>Часть II. Сортировка и порядковая статистика</b>	173
Введение	174
<b>Глава 6. Пирамидальная сортировка</b>	178
6.1 Пирамиды	179
Упражнения	181
6.2 Поддержка свойства пирамиды	182
Упражнения	184
6.3 Создание пирамиды	184
Упражнения	187
6.4 Алгоритм пирамидальной сортировки	187
Упражнения	188
6.5 Очереди с приоритетами	190
Упражнения	193
Задачи	194
Заключительные замечания	196
<b>Глава 7. Быстрая сортировка</b>	198
7.1 Описание быстрой сортировки	199
Разбиение массива	199
Упражнения	203
7.2 Производительность быстрой сортировки	203
Наихудшее разбиение	203
Наилучшее разбиение	204
Сбалансированное разбиение	204
Интуитивные рассуждения для среднего случая	205
Упражнения	207
7.3 Рандомизированная версия быстрой сортировки	208
Упражнения	209
7.4 Анализ быстрой сортировки	209
7.4.1 Анализ в наихудшем случае	209
7.4.2 Математическое ожидание времени работы	210
Время работы и сравнения	210
Упражнения	213
Задачи	214
Заключительные замечания	219
<b>Глава 8. Сортировка за линейное время</b>	220
8.1 Нижние оценки алгоритмов сортировки	221
Модель дерева решений	221
Нижняя оценка для наихудшего случая	222
Упражнения	223

8.2	Сортировка подсчетом	224
	Упражнения	226
8.3	Поразрядная сортировка	226
	Упражнения	230
8.4	Карманная сортировка	230
	Упражнения	234
	Задачи	234
	Заключительные замечания	238
<b>Глава 9. Медианы и порядковые статистики</b>		<b>240</b>
9.1	Минимум и максимум	241
	Одновременный поиск минимума и максимума	241
	Упражнения	242
9.2	Выбор в течение линейного ожидаемого времени	243
	Упражнения	247
9.3	Алгоритм выбора с линейным временем работы в наихудшем случае	247
	Упражнения	250
	Задачи	252
	Заключительные замечания	254
<b>Часть III. Структуры данных</b>		<b>255</b>
	Введение	256
<b>Глава 10. Элементарные структуры данных</b>		<b>260</b>
10.1	Стеки и очереди	260
	Стеки	260
	Очереди	262
	Упражнения	263
10.2	Связанные списки	264
	Поиск в связанном списке	265
	Вставка в связанный список	265
	Удаление из связанного списка	266
	Ограничители	266
	Упражнения	268
10.3	Реализация указателей и объектов	269
	Представление объектов с помощью нескольких массивов	269
	Представление объектов с помощью одного массива	270
	Выделение и освобождение памяти	271
	Упражнения	273
10.4	Представление корневых деревьев	274
	Бинарные деревья	274

Корневые деревья с произвольным ветвлением	275
Другие представления деревьев	276
Упражнения	276
Задачи	277
Заключительные замечания	280
<b>Глава 11. Хеш-таблицы</b>	<b>282</b>
11.1 Таблицы с прямой адресацией	283
Упражнения	284
11.2 Хеш-таблицы	285
Разрешение коллизий при помощи цепочек	286
Анализ хеширования с цепочками	288
Упражнения	290
11.3 Хеш-функции	291
Чем определяется качество хеш-функции	291
Интерпретация ключей как целых неотрицательных чисел	292
11.3.1 Метод деления	292
11.3.2 Метод умножения	293
★ 11.3.3 Универсальное хеширование	294
Построение универсального множества хеш-функций	297
Упражнения	298
11.4 Открытая адресация	300
Линейное исследование	302
Квадратичное исследование	303
Двойное хеширование	303
Анализ хеширования с открытой адресацией	305
Упражнения	307
★ 11.5 Идеальное хеширование	308
Упражнения	312
Задачи	313
Заключительные замечания	315
<b>Глава 12. Бинарные деревья поиска</b>	<b>316</b>
12.1 Что такое бинарное дерево поиска	317
Упражнения	319
12.2 Работа с бинарным деревом поиска	319
Поиск	320
Поиск минимума и максимума	321
Предшествующий и последующий элементы	321
Упражнения	323
12.3 Вставка и удаление	324
Вставка	324

Удаление	325
Упражнения	327
* 12.4 Случайное построение бинарных деревьев поиска	328
Упражнения	331
Задачи	332
Заключительные замечания	335
<b>Глава 13. Красно-черные деревья</b>	<b>336</b>
13.1 Свойства красно-черных деревьев	336
Упражнения	339
13.2 Повороты	340
Упражнения	341
13.3 Вставка	342
Анализ	350
Упражнения	350
13.4 Удаление	351
Анализ	356
Упражнения	356
Задачи	357
Заключительные замечания	364
<b>Глава 14. Расширение структур данных</b>	<b>365</b>
14.1 Динамические порядковые статистики	366
Выборка элемента с заданным рангом	367
Определение ранга элемента	368
Поддержка размера поддеревьев	369
Упражнения	371
14.2 Расширение структур данных	372
Расширение красно-черных деревьев	373
Упражнения	374
14.3 Деревья отрезков	375
Упражнения	380
Задачи	381
Заключительные замечания	382
<b>Часть IV. Усовершенствованные методы разработки и анализа</b>	<b>383</b>
Введение	384
<b>Глава 15. Динамическое программирование</b>	<b>386</b>
15.1 Расписание работы конвейера	387
Первый этап: структура самой быстрой сборки	389
Второй этап: рекурсивное решение	391

	Третий этап: вычисление минимальных промежутков времени	393
	Четвертый этап: построение самого быстрого пути	394
	Упражнения	395
15.2	Перемножение цепочки матриц	395
	Подсчет количества способов расстановки скобок	397
	Первый этап: структура оптимальной расстановки скобок	398
	Второй этап: рекурсивное решение	399
	Третий этап: вычисление оптимальной стоимости	400
	Четвертый этап: конструирование оптимального решения	403
	Упражнения	404
15.3	Элементы динамического программирования	404
	Оптимальная подструктура	405
	Перекрытие вспомогательных задач	411
	Построение оптимального решения	414
	Запоминание	414
	Упражнения	417
15.4	Самая длинная общая подпоследовательность	418
	Этап 1: характеристика самой длинной общей подпоследовательности	419
	Этап 2: рекурсивное решение	421
	Этап 3: вычисление длины самой длинной общей подпоследовательности	422
	Этап 4: построение самой длинной общей подпоследовательности	423
	Улучшение кода	424
	Упражнения	425
15.5	Оптимальные бинарные деревья поиска	425
	Этап 1: структура оптимального бинарного дерева поиска	429
	Этап 2: рекурсивное решение	430
	Этап 3: вычисление математического ожидания стоимости поиска в оптимальном бинарном дереве поиска	431
	Упражнения	433
	Задачи	434
	Заключительные замечания	440
<b>Глава 16.</b>	<b>Жадные алгоритмы</b>	<b>442</b>
16.1	Задача о выборе процессов	443
	Оптимальная подструктура задачи о выборе процессов	444
	Рекурсивное решение	446

Преобразование решения динамического программирования в жадное решение	446
Рекурсивный жадный алгоритм	449
Итерационный жадный алгоритм	451
Упражнения	452
16.2 Элементы жадной стратегии	453
Свойство жадного выбора	454
Оптимальная подструктура	455
Сравнение жадных алгоритмов и динамического программирования	456
Упражнения	458
16.3 Коды Хаффмана	459
Префиксные коды	460
Построение кода Хаффмана	462
Корректность алгоритма Хаффмана	464
Упражнения	466
★ 16.4 Теоретические основы жадных методов	467
Матроиды	467
Жадные алгоритмы на взвешенном матроиде	470
Упражнения	474
★ 16.5 Планирование заданий	474
Упражнения	478
Задачи	478
Заключительные замечания	481
<b>Глава 17. Амортизационный анализ</b>	482
17.1 Групповой анализ	483
Стековые операции	483
Приращение показаний бинарного счетчика	485
Упражнения	487
17.2 Метод бухгалтерского учета	487
Стековые операции	489
Приращение показаний бинарного счетчика	490
Упражнения	490
17.3 Метод потенциалов	491
Стековые операции	492
Увеличение показаний бинарного счетчика	493
Упражнения	494
17.4 Динамические таблицы	495
17.4.1 Расширение таблицы	496
17.4.2 Расширение и сжатие таблицы	499

Упражнения	504
Задачи	505
Заключительные замечания	510
<b>Часть V. Сложные структуры данных</b>	<b>511</b>
Введение	512
<b>Глава 18. В-деревья</b>	<b>515</b>
Структуры данных во вторичной памяти	516
18.1 Определение В-деревьев	519
Высота В-деревя	521
Упражнения	522
18.2 Основные операции с В-деревьями	522
Поиск в В-дереве	522
Создание пустого В-деревя	523
Вставка ключа в В-деревя	524
Упражнения	528
18.3 Удаление ключа из В-деревя	530
Упражнения	533
Задачи	533
Заключительные замечания	536
<b>Глава 19. Биномиальные пирамиды</b>	<b>537</b>
19.1 Биномиальные деревья и биномиальные пирамиды	539
19.1.1 Биномиальные деревья	539
19.1.2 Биномиальные пирамиды	541
Упражнения	543
19.2 Операции над биномиальными пирамидами	544
Создание новой биномиальной пирамиды	544
Поиск минимального ключа	544
Слияние двух биномиальных пирамид	545
Вставка узла	550
Извлечение вершины с минимальным ключом	551
Уменьшение ключа	552
Удаление ключа	554
Упражнения	554
Задачи	555
Заключительные замечания	557

<b>Глава 20. Фибоначчиевы пирамиды</b>	558
20.1 Структура фибоначчиевых пирамид	559
Потенциальная функция	561
Максимальная степень	562
20.2 Операции над сливаемыми пирамидами	562
Создание новой фибоначчиевой пирамиды	563
Вставка узла	563
Поиск минимального узла	564
Объединение двух фибоначчиевых пирамид	564
Извлечение минимального узла	565
Упражнения	571
20.3 Уменьшение ключа и удаление узла	571
Уменьшение ключа	571
Удаление узла	575
Упражнения	575
20.4 Оценка максимальной степени	575
Упражнения	578
Задачи	578
Заключительные замечания	579
<b>Глава 21. Структуры данных для непересекающихся множеств</b>	581
21.1 Операции над непересекающимися множествами	582
Приложение структур данных для непересекающихся множеств	583
Упражнения	584
21.2 Представление непересекающихся множеств с помощью связанных списков	585
Простая реализация объединения	586
Весовая эвристика	587
Упражнения	588
21.3 Лес непересекающихся множеств	589
Эвристики для повышения эффективности	589
Псевдокоды	590
Влияние эвристик на время работы	592
Упражнения	592
* 21.4 Анализ объединения по рангу со сжатием пути	592
Очень быстро и очень медленно растущая функция	593
Свойства рангов	594
Доказательство границы времени работы	595
Потенциальная функция	596

Изменения потенциала и амортизированная стоимость операций	598
Упражнения	601
Задачи	601
Заключительные замечания	605
<b>Часть VI. Алгоритмы для работы с графами</b>	<b>607</b>
Введение	608
<b>Глава 22. Элементарные алгоритмы для работы с графами</b>	<b>609</b>
22.1 Представление графов	609
Упражнения	612
22.2 Поиск в ширину	613
Анализ	616
Кратчайшие пути	617
Деревья поиска в ширину	620
Упражнения	621
22.3 Поиск в глубину	622
Свойства поиска в глубину	626
Классификация ребер	628
Упражнения	630
22.4 Топологическая сортировка	632
Упражнения	634
22.5 Сильно связные компоненты	635
Упражнения	640
Задачи	641
Заключительные замечания	643
<b>Глава 23. Минимальные остовные деревья</b>	<b>644</b>
23.1 Построение минимального остовного дерева	645
Упражнения	649
23.2 Алгоритмы Крускала и Прима	651
Алгоритм Крускала	651
Алгоритм Прима	653
Упражнения	656
Задачи	658
Заключительные замечания	661
<b>Глава 24. Кратчайшие пути из одной вершины</b>	<b>663</b>
Варианты	664
Оптимальная структура задачи о кратчайшем пути	665
Ребра с отрицательным весом	666

Циклы	667
Представление кратчайших путей	668
Ослабление	669
Свойства кратчайших путей и ослабления	671
Краткое содержание главы	672
24.1 Алгоритм Беллмана-Форда	672
Упражнения	676
24.2 Кратчайшие пути из одной вершины в ориентированных ациклических графах	677
Упражнения	679
24.3 Алгоритм Дейкстры	680
Анализ	684
Упражнения	686
24.4 Разностные ограничения и кратчайшие пути	687
Линейное программирование	687
Системы разностных ограничений	688
Графы ограничений	690
Решение систем разностных ограничений	692
Упражнения	692
24.5 Доказательства свойств кратчайших путей	694
Неравенство треугольника	694
Влияние ослабления на оценки кратчайшего пути	695
Ослабление и деревья кратчайших путей	697
Упражнения	700
Задачи	702
Заключительные замечания	706
<b>Глава 25. Кратчайшие пути между всеми парами вершин</b>	<b>708</b>
Краткое содержание главы	710
25.1 Задача о кратчайших путях и умножение матриц	711
Структура кратчайшего пути	711
Рекурсивное решение задачи о кратчайших путях между всеми парами вершин	712
Вычисление весов кратчайших путей в восходящем порядке	712
Улучшение времени работы	714
Упражнения	716
25.2 Алгоритм Флойда-Варшалла	718
Структура кратчайшего пути	718
Рекурсивное решение задачи о кратчайших путях между всеми парами вершин	719

	Вычисление весов кратчайших путей в восходящем порядке	720
	Построение кратчайшего пути	720
	Транзитивное замыкание ориентированного графа	722
	Упражнения	724
25.3	Алгоритм Джонсона для разреженных графов	726
	Сохранение кратчайших путей	726
	Генерация неотрицательных весов путем их изменения	728
	Вычисление кратчайших путей между всеми парами вершин	728
	Упражнения	730
	Задачи	731
	Заключительные замечания	732
<b>Глава 26.</b>	<b>Задача о максимальном потоке</b>	<b>734</b>
26.1	Транспортные сети	735
	Транспортные сети и потоки	735
	Пример потока	737
	Сети с несколькими источниками и стоками	739
	Как работать с потоками	740
	Упражнения	741
26.2	Метод Форда-Фалкерсона	742
	Остаточные сети	743
	Увеличивающие пути	745
	Разрезы транспортных сетей	746
	Базовый алгоритм Форда-Фалкерсона	749
	Анализ метода Форда-Фалкерсона	750
	Алгоритм Эдмондса-Карпа	752
	Упражнения	755
26.3	Максимальное паросочетание	756
	Задача поиска максимального паросочетания в двудольном графе	757
	Поиск максимального паросочетания в двудольном графе	758
	Упражнения	761
* 26.4	Алгоритмы проталкивания предпотока	761
	Интуитивные соображения	762
	Основные операции	764
	Операция проталкивания	764
	Операция подъема	766
	Универсальный алгоритм	766
	Корректность метода проталкивания предпотока	768

Анализ метода проталкивания предпотока	770
Упражнения	773
★ 26.5 Алгоритм “поднять-в-начало”	774
Допустимые ребра и сети	775
Списки соседей	777
Разгрузка переполненной вершины	777
Алгоритм “поднять-в-начало”	780
Анализ	783
Упражнения	785
Задачи	786
Заключительные замечания	793
<b>Часть VII. Избранные темы</b>	795
Введение	796
<b>Глава 27. Сортирующие сети</b>	799
27.1 Сравнивающие сети	800
Упражнения	803
27.2 Нуль-единичный принцип	805
Упражнения	807
27.3 Битоническая сортирующая сеть	808
Полуфильтр	809
Битонический сортировщик	810
Упражнения	812
27.4 Объединяющая сеть	813
Упражнения	815
27.5 Сортирующая сеть	816
Упражнения	818
Задачи	819
Заключительные замечания	822
<b>Глава 28. Работа с матрицами</b>	823
28.1 Свойства матриц	824
Матрицы и векторы	824
Операции над матрицами	827
Обратные матрицы, ранги и детерминанты	828
Положительно определенные матрицы	831
Упражнения	831
28.2 Алгоритм умножения матриц Штрассена	833
Обзор алгоритма	833
Определение произведений подматриц	834
Обсуждение метода	838

Упражнения	839
28.3 Решение систем линейных уравнений	839
Обзор LUP-разложения	841
Прямая и обратная подстановки	842
Вычисление LU-разложения	845
Вычисление LUP-разложения	848
Упражнения	852
28.4 Обращение матриц	853
Вычисление обратной матрицы из LUP-разложения	853
Умножение матриц и обращение матрицы	854
Упражнения	857
28.5 Симметричные положительно определенные матрицы и метод наименьших квадратов	858
Метод наименьших квадратов	861
Упражнения	865
Задачи	865
Заключительные замечания	867
<b>Глава 29. Линейное программирование</b>	<b>869</b>
Политическая задача	869
Общий вид задач линейного программирования	872
Краткий обзор задач линейного программирования	872
Приложения линейного программирования	876
Алгоритмы решения задач линейного программирования	877
29.1 Стандартная и каноническая формы задач линейного программирования	877
Стандартная форма	878
Преобразование задач линейного программирования в стандартную форму	879
Преобразование задач линейного программирования в каноническую форму	882
Упражнения	885
29.2 Формулирование задач в виде задач линейного программирования	886
Кратчайшие пути	887
Максимальный поток	887
Поиск потока с минимальными затратами	888
Многопродуктовый поток	889
Упражнения	891
29.3 Симплекс-алгоритм	892
Пример симплекс-алгоритма	893

Замещение	897
Формальный симплекс-алгоритм	899
Завершение	905
Упражнения	907
29.4 Двойственность	908
Упражнения	914
29.5 Начальное базисное допустимое решение	914
Поиск начального решения	914
Основная теорема линейного программирования	920
Упражнения	921
Задачи	922
Заключительные замечания	924
<b>Глава 30. Полиномы и быстрое преобразование Фурье</b>	<b>926</b>
Полиномы	926
Краткое содержание главы	928
30.1 Представление полиномов	928
Представление, основанное на коэффициентах	929
Представление, основанное на значениях в точках	929
Быстрое умножение полиномов, заданных в коэффициентной форме	932
Упражнения	934
30.2 ДПФ и БПФ	935
Комплексные корни из единицы	935
Дискретное преобразование Фурье	938
Быстрое преобразование Фурье	938
Интерполяция в точках, являющихся комплексными корнями из единицы	941
Упражнения	942
30.3 Эффективные реализации БПФ	943
Итеративная реализация БПФ	944
Параллельная схема БПФ	947
Упражнения	949
Задачи	949
Заключительные замечания	953
<b>Глава 31. Теоретико-числовые алгоритмы</b>	<b>954</b>
Размер входных наборов данных и стоимость арифметических вычислений	955
31.1 Элементарные обозначения, принятые в теории чисел	956
Делимость и делители	956
Простые и составные числа	956

	Теорема о делении, остатки и равенство по модулю	957
	Общие делители и наибольшие общие делители	958
	Взаимно простые целые числа	960
	Единственность разложения на множители	960
	Упражнения	961
31.2	Наибольший общий делитель	962
	Алгоритм Евклида	963
	Время работы алгоритма Евклида	964
	Развернутая форма алгоритма Евклида	965
	Упражнения	967
31.3	Модульная арифметика	968
	Конечные группы	968
	Группы, образованные сложением и умножением по модулю	969
	Подгруппы	972
	Подгруппы, сгенерированные элементом группы	973
	Упражнения	975
31.4	Решение модульных линейных уравнений	975
	Упражнения	979
31.5	Китайская теорема об остатках	979
	Упражнения	982
31.6	Степени элемента	983
	Возведение в степень путем последовательного возведения в квадрат	985
	Упражнения	987
31.7	Криптосистема с открытым ключом RSA	987
	Криптографические системы с открытым ключом	988
	Криптографическая система RSA	991
	Упражнения	995
* 31.8	Проверка простоты	995
	Плотность распределения простых чисел	996
	Проверка псевдопростых чисел	997
	Рандомизированный тест простоты Миллера-Рабина	999
	Частота ошибок в тесте Миллера-Рабина	1002
	Упражнения	1006
* 31.9	Целочисленное разложение	1006
	Эвристический $\rho$ -метод Полларда	1007
	Упражнения	1012
	Задачи	1013
	Заключительные замечания	1015

<b>Глава 32. Поиск подстроки</b>	1017
Обозначения и терминология	1019
32.1 Простейший алгоритм поиска подстроки	1020
Упражнения	1021
32.2 Алгоритм Рабина-Карпа	1022
Упражнения	1028
32.3 Поиск подстроки с помощью конечных автоматов	1028
Конечные автоматы	1029
Автоматы поиска подстроки	1030
Вычисление функции переходов	1035
Упражнения	1036
★ 32.4 Алгоритм Кнута-Морриса-Пракса	1036
Префиксная функция для образца	1037
Анализ времени работы	1040
Корректность вычисления префиксной функции	1041
Корректность алгоритма Кнута-Морриса-Пракса	1043
Упражнения	1044
Задачи	1045
Заключительные замечания	1046
<b>Глава 33. Вычислительная геометрия</b>	1047
33.1 Свойства отрезков	1048
Векторное произведение	1049
Поворот последовательных отрезков	1050
Определение того, пересекаются ли два отрезка	1051
Другие применения векторного произведения	1053
Упражнения	1053
33.2 Определение наличия пересекающихся отрезков	1055
Упорядочение отрезков	1056
Перемещение выметающей прямой	1057
Псевдокод, выявляющий пересечение отрезков	1058
Корректность	1060
Время работы	1061
Упражнения	1062
33.3 Построение выпуклой оболочки	1063
Сканирование по Грэму	1065
Обход по Джарвису	1071
Упражнения	1073
33.4 Поиск пары ближайших точек	1074
Алгоритм декомпозиции	1075
Корректность	1077

Реализация и время работы алгоритма	1078
Упражнения	1079
Задачи	1080
Заключительные замечания	1083
<b>Глава 34. NP-полнота</b>	1085
NP-полнота и классы P и NP	1087
Как показать, что задача является NP-полной	1088
Краткое содержание главы	1091
34.1 Полиномиальное время	1091
Абстрактные задачи	1092
Кодирование	1093
Структура формальных языков	1096
Упражнения	1100
34.2 Проверка за полиномиальное время	1100
Гамильтоновы циклы	1101
Алгоритмы верификации	1102
Класс сложности NP	1103
Упражнения	1105
34.3 NP-полнота и приводимость	1106
Приводимость	1106
NP-полнота	1108
Выполнимость схем	1110
Упражнения	1117
34.4 Доказательство NP-полноты	1118
Выполнимость формулы	1119
3-CNF выполнимость	1122
Упражнения	1126
34.5 NP-полные задачи	1127
34.5.1 Задача о клике	1128
34.5.2 Задача о вершинном покрытии	1131
34.5.3 Задача о гамильтоновых циклах	1133
34.5.4 Задача о коммивояжере	1138
34.5.5 Задача о сумме подмножества	1140
Упражнения	1144
Задачи	1145
Заключительные замечания	1149
<b>Глава 35. Приближенные алгоритмы</b>	1151
Оценка качества приближенных алгоритмов	1151
Краткое содержание главы	1153
35.1 Задача о вершинном покрытии	1154

Упражнения	1157
35.2 Задача о коммивояжере	1157
35.2.1 Задача о коммивояжере с неравенством треугольника	1158
35.2.2 Общая задача о коммивояжере	1161
Упражнения	1163
35.3 Задача о покрытии множества	1164
Жадный приближенный алгоритм	1166
Анализ	1166
Упражнения	1169
35.4 Рандомизация и линейное программирование	1170
Рандомизированный приближенный алгоритм для задачи о MAX-3-CNF выполнимости	1170
Аппроксимация взвешенного вершинного покрытия с помощью линейного программирования	1172
Упражнения	1175
35.5 Задача о сумме подмножества	1176
Точный алгоритм с экспоненциальным временем работы	1176
Схема аппроксимации с полностью полиномиальным временем работы	1178
Упражнения	1182
Задачи	1182
Заключительные замечания	1186
<b>Часть VIII. Приложения: математические основы</b>	1189
Введение	1190
<b>Приложение А. Ряды</b>	1191
А.1 Суммы и их свойства	1192
Линейность	1192
Арифметическая прогрессия	1193
Суммы квадратов и кубов	1193
Геометрическая прогрессия	1193
Гармонический ряд	1194
Интегрирование и дифференцирование рядов	1194
Суммы разностей	1194
Произведения	1195
Упражнения	1195
А.2 Оценки сумм	1195
Математическая индукция	1196
Почленное сравнение	1196
Разбиение рядов	1198

Приближение интегралами	1199
Упражнения	1201
Задачи	1201
Заключительные замечания	1201
<b>Приложение Б. Множества и прочие художества</b>	<b>1202</b>
Б.1 Множества	1202
Упражнения	1207
Б.2 Отношения	1207
Упражнения	1209
Б.3 Функции	1210
Упражнения	1212
Б.4 Графы	1213
Упражнения	1217
Б.5 Деревья	1218
Б.5.1 Свободные деревья	1218
Б.5.2 Деревья с корнем и упорядоченные деревья	1220
Б.5.3 Бинарные и позиционные деревья	1221
Упражнения	1223
Задачи	1224
Заключительные замечания	1225
<b>Приложение В. Комбинаторика и теория вероятности</b>	<b>1226</b>
В.1 Основы комбинаторики	1226
Правила суммы и произведения	1227
Строки	1227
Перестановки	1227
Сочетания	1228
Биномиальные коэффициенты	1229
Оценки биномиальных коэффициентов	1229
Упражнения	1230
В.2 Вероятность	1232
Аксиомы вероятности	1232
Дискретные распределения вероятностей	1233
Непрерывное равномерное распределение вероятности	1234
Условная вероятность и независимость	1234
Теорема Байеса	1236
Упражнения	1237
В.3 Дискретные случайные величины	1238
Математическое ожидание случайной величины	1239
Дисперсия и стандартное отклонение	1242
Упражнения	1243

---

В.4	Геометрическое и биномиальное распределения	1243
	Геометрическое распределение	1244
	Биномиальное распределение	1245
	Упражнения	1248
★ В.5	Хвосты биномиального распределения	1249
	Упражнения	1254
	Задачи	1255
	Заключительные замечания	1256
	<b>Библиография</b>	1257
	<b>Предметный указатель</b>	1277