



издательство

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

П.В. НОВИКОВ

СИСТЕМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Москва • 2019

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)**

П.В. НОВИКОВ

СИСТЕМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Учебное пособие к лабораторным работам

Под редакцией профессора, доктора техн. наук О.М. Брехова

Утверждено
на заседании редсовета
18 февраля 2019 г.

Москва
Издательство МАИ
2019

Новиков П.В.

Системы цифровой обработки сигналов: Учеб. пособие к лабораторным работам / Под ред. профессора, д-р. техн. наук О.М. Брехова. – М.: Изд-во МАИ, 2019. – 76 с.: ил.

Описаны лабораторные работы, в которых исследуются взаимосвязи и различия между дискретными и непрерывными сигналами, создаются модели детерминированных и случайных сигналов, изучаются приёмы дискретизации моделей сигналов, осваиваются методы обработки сигналов с помощью дискретных тригонометрических преобразований, а также с помощью линейных и нелинейных фильтров и иных алгоритмов оценивания фазовых координат сигналов.

Учебное пособие содержит краткое изложение теоретических сведений по базовым темам дисциплины «Системы цифровой обработки сигналов» вместе с обширной библиографией и со значительным количеством индивидуальных заданий к каждой лабораторной работе для лучшего усвоения дисциплины и для повышения эффективности как аудиторной, так и самостоятельной работы обучающихся.

Предназначено для студентов и аспирантов вузов, обучающихся по направлениям «Информатика», «Обработка информации и управление». Пособие также может быть интересно инженерам и научным работникам, поскольку оно содержит весьма большой объём практически полезной теоретической информации, выраженной большим количеством формул и алгоритмов из этой области знаний.

Рецензенты:

кафедра прикладной информатики Института цифрового образования МГПУ (зав. кафедрой д-р техн. наук, профессор *О.Н. Ромашикова*);

д-р техн. наук, профессор *Г.Н. Лебедев*;

канд. техн. наук, ст. науч. сотр. *Л.А. Сальман*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемые лабораторные работы по дисциплине «Системы цифровой обработки сигналов» охватывают широкий круг задач обработки цифровых сигналов, решаемых на основе теоретических результатов и прикладных алгоритмов, полученных и разработанных с конца 20-х до конца 90-х годов XX века.

В лабораторной работе №1 рассматриваются практические возможности восстановления непрерывного сигнала по дискретным отсчётам согласно теореме Котельникова. Изучаются сильные и слабые стороны этого восстановления.

В лабораторной работе №2 предлагается исследовать частотный спектр цифрового сигнала, фильтровать записанный цифровой сигнал и сжимать объём сохранённого цифрового сигнала с помощью дискретных тригонометрических преобразований, являющихся разновидностью ортогональных функциональных преобразований сигналов. Показана связь с результатами работы №1.

В лабораторной работе №3 предлагаются к изучению методы и алгоритмы, с помощью которых осуществляются аналитическая дискретизация линейных уравнений непрерывных сигналов и представление уравнений непрерывных и дискретных сигналов в шести различных формах, широко применяемых на практике и используемых в последующих лабораторных работах.

Лабораторная работа №4 посвящена различным способам моделирования дискретных случайных процессов для создания программных моделей цифровых сигналов, имеющих случайные составляющие, а также для цифрового моделирования случайных дискретных возмущений и помех как случайных процессов. Используются результаты лабораторных работ № 1 и 3.

В лабораторной работе №5 исследуются процессы стационарной фильтрации цифровых сигналов линейными цифровыми фильтрами частотной селекции. Показана тесная связь с результатами предыдущих четырёх работ.

В лабораторной работе №6 предлагается исследовать линейные дискретные оптимальные алгоритмы оценивания фазовых координат цифровых сигналов. Используются результаты работ № 1, 3 и 4.

В лабораторной работе №7 изучаются нелинейные локально-оптимальные (субоптимальные) алгоритмы оценивания фазовых координат и параметров цифровых сигналов. Используется материал работ № 3, 4 и 6.

В лабораторной работе №8 предлагается исследовать глобально-оптимальные алгоритмы разделённого оценивания фазовых координат и параметров цифровых сигналов в нелинейных задачах оценивания. Используется материал работ № 3, 4 и 6.

Последовательное выполнение заданий лабораторных работ позволит получить правильное представление об этой области знаний, сформирует прави-

льные практические навыки и избавит от ряда устойчивых заблуждений, бытующих в околонуточном сообществе относительно возможностей и ограничений, присущих тем или иным алгоритмам цифровой обработки сигналов (ЦОС)

Список ключевых слов

Теорема Котельникова, частота Найквиста, ряд Шеннона, линейность и обратимость преобразования, дискретизация, квантование, распределение вероятностей, частотная характеристика, "белый шум", процесс Маркова, достаточные координаты, формирующий фильтр, метод Дункана, фильтр частотной селекции, трансверсальный и рекурсивный фильтры, вектор состояния, фазовая координата, ошибка оценивания, критерий оценивания, фильтр Винера, оптимальная оценка, критерий наблюдаемости, матрица наблюдаемости, вектор прогнозов, невязка измерения, матрица корреляционных моментов, субоптимальный алгоритм, радиус сходимости, нелинейная вектор-функция, локально-оптимальный алгоритм, полигауссовская аппроксимация, функция Радемахера, неаналитическая функция.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ СОКРАЩЕНИЙ

ЦОС	– цифровая обработка сигналов
ДТП	– дискретное тригонометрическое преобразование
ДФФ	– дискретное преобразование Фурье
ОДФФ	– обратное дискретное преобразование Фурье
ДПХ	– дискретное преобразование Хартли
ОДПХ	– обратное дискретное преобразование Хартли
ДКП	– дискретное косинусное преобразование
ОДКП	– обратное дискретное косинусное преобразование
ДСП	– дискретное синусное преобразование
ОДСП	– обратное дискретное синусное преобразование
МДКП	– модифицированное дискретное косинусное преобразование
ОМДКП	– обратное модифицированное дискретное косинусное преобразование
КИХ	– конечная импульсная характеристика
БИХ	– бесконечная импульсная характеристика
ФНЧ	– фильтр низких частот
ПФ	– полосовой фильтр
РФ	– режекторный фильтр
ФК	– фильтр Калмана (Стратоновича)
ЛФК	– линейаризованный фильтр Калмана
РФК	– расширенный фильтр Калмана
ФВП	– гауссовский фильтр второго порядка
ИНФ	– итерационный нелинейный фильтр
АРО	– алгоритм разделённого оценивания
ПАО	– парциальный алгоритм оценивания

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Восстановление непрерывных сигналов по дискретным измерениям. Теорема Котельникова

В этой лабораторной работе следует изучить, когда и как возможно восстановить значения непрерывного сигнала из значений точных дискретных измерений.

Если информация о сигнале, зависящем от непрерывного времени t , поступает в дискретные моменты времени k с интервалом Δt , то непрерывная функция сигнала $x(t)$ превращается в функцию с дискретным аргументом $x(k)$. При этом между двумя соседними моментами дискретного времени k и $k+1$ на интервале непрерывного времени $t \in (k \cdot \Delta t; (k+1) \cdot \Delta t)$ информация о сигнале полностью утрачивается. Однако непрерывный сигнал $x(t)$ может быть восстановлен по дискретным отсчётам $x(k)$ в ненаблюдаемые моменты непрерывного времени, если выполняются условия теоремы Котельникова [1]: «Любой аналоговый (непрерывный) сигнал может быть восстановлен с какой угодно точностью по своим дискретным отсчётам, если максимальная частота f_{\max} , которой ограничен спектр реального сигнала, менее половины частоты дискретизации $f_d > 2f_{\max}$ ».

Частота f_H , равная половине частоты дискретизации, называется частотой Найквиста [2]: $f_H = 0,5 \cdot f_d$.

Фактически теорема Котельникова является критерием наблюдаемости непрерывного сигнала по дискретным измерениям.

Точная формула восстановления сигнала в непрерывном времени по дискретным отсчётам (ряд Шеннона) выглядит следующим образом [1, 3]:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k \cdot \Delta t) \cdot \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{t}{\Delta t} - k\right)\right)}{\pi\left(\frac{t}{\Delta t} - k\right)} \quad (1.1)$$

или

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k \cdot \Delta t) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{\Delta t} - k\right), \quad (1.2)$$

где

$$\text{sinc}(u) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} & \text{при } u \neq 0 \\ 1 & \text{при } u = 0 \end{cases} \quad - \text{ функция Шеннона [3],}$$

t – непрерывное время, $t \in \mathbf{R}$, Δt – интервал дискретизации времени, k – дискретный шаг по времени (дискретный отсчёт), $k \in \mathbf{Z}$.

На практике количество дискретных отсчётов конечно, $k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$.

Поэтому предлагается использовать приближённую формулу

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^{N-1} x(k \cdot \Delta t) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{\Delta t} - k\right), \quad (1.3)$$

где N – количество дискретных шагов по времени.

Для выполнения этой лабораторной работы необходимо показать зависимость качества восстановления сигнала от интервала дискретизации Δt (т. е. фактически от количества дискретных отсчётов, приходящихся на один период). Для этого необходимо показать процессы с *высоким* качеством восстановления заданного (в соответствии с номером варианта) непрерывного сигнала и с *низким* качеством такого восстановления, а также пример процесса, в котором сигнал *фактически не восстанавливается*. Общее количество таких процессов должно быть не менее трёх.

Варианты задания для лабораторной работы № 1

1. Фрагмент синусоиды с периодом немного меньшим, чем интервал наблюдения:

$$y(t) = 10 \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

где $\omega > \frac{2\pi}{N \cdot \Delta t}$.

2. Фрагмент функции Радемахера с периодом немного меньшим, чем интервал наблюдения (см. ω в варианте 1):

$$y(t) = 10 \cdot \text{sign}(\sin(\omega \cdot t)),$$

где $\text{sign}(u) = \begin{cases} 1, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \\ -1, & u < 0. \end{cases}$

3. Фрагмент антисимметричной пилообразной функции с симметричными полуволнами и с периодом немного меньшим, чем интервал наблюдения (см. ω в варианте 1):

$$y(t) = 6 \cdot \arcsin(\sin(\omega \cdot t)).$$

4. Фрагмент периодически возрастающей пилообразной функции с несимметричными полуволнами и с периодом немного меньшим, чем интервал наблюдения (см. ω в варианте 1):

$$y(t) = 6 \cdot \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\omega \cdot t)).$$

5. Функция, представляющая собой полуокружность с диаметром, равным интервалу наблюдения:

$$y(t) = \sqrt{(N \cdot \Delta t)^2 - t^2}.$$

6. Функция, представляющая собой синусоиду с увеличивающейся амплитудой и интервалом наблюдения немного более трёх полупериодов:

$$y(t) = 10 \cdot t \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

7. Функция, представляющая собой синусоиду с уменьшающейся по экспоненте амплитудой и интервалом наблюдения немного более трёх полупериодов:

$$y(t) = 10e^{-\eta t} \sin(\omega t),$$

где $\eta=0,1$.

8. Фрагмент синусоиды с периодом немного большим, чем интервал наблюдения:

$$y(t) = 10 \cdot \sin(\Omega \cdot t),$$

где $0 < \Omega < \frac{2\pi}{N \cdot \Delta t}$, при этом $1 < \frac{2\pi}{\Omega \cdot N \cdot \Delta t} < 2$.

9. Фрагмент синусоиды с осью, уходящей из центра координат под углом к оси абсцисс (с коэффициентом ν) и с периодом немного меньшим, чем интервал наблюдения:

$$y(t) = \nu \cdot t + 10 \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

где $\nu = \frac{20}{N \cdot \Delta t}$.

10. Фрагмент периодической функции с участками пилообразного возрастания, перемежающимися постоянными нулевыми участками, а также с периодом немного меньшим, чем интервал наблюдения (см. ω в варианте 1):

$$y(t) = 7 \cdot \arcsin(\sin(\omega \cdot t)) + 7 \cdot \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\omega \cdot t)).$$

11. Фрагмент антисимметричной пилообразной функции с симметричными полуволнами, похожими на домик с покатой крышей, и с периодом немного меньшим, чем интервал наблюдения (см. ω в варианте 1):

$$y(t) = 3 \cdot \arcsin(\sin(\omega \cdot t)) + 5 \cdot \text{sign}(\sin(\omega \cdot t)).$$

12. Фрагмент периодически возрастающей пилообразной функции с периодическими разрывами и с периодом немного меньшим, чем интервал наблюдения (см. ω в варианте 1):

$$y(t) = 3 \cdot \text{arctg}(\text{tg}(\omega \cdot t)) + 5 \cdot \text{sign}(\sin(\omega \cdot t)).$$

13. Фрагмент антисимметричной периодической функции с симметричными полуволнами, представляющей собой «симметрично отодвинутую» от оси абсцисс синусоиду с периодом немного меньшим, чем интервал наблюдения (см. ω в варианте 1):

$$y(t) = 5 \cdot \sin(\omega \cdot t) + 5 \cdot \text{sign}(\sin(\omega \cdot t)).$$

14. Фрагмент пилообразной периодической функции с симметричными полуволнами и с периодом немного меньшим, чем интервал наблюдения (см. ω в варианте 1):

$$y(t) = 6 \cdot \arccos(\cos(\omega \cdot t)).$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Исследование дискретных тригонометрических преобразований

Наиболее известным среди дискретных функциональных преобразований является дискретное преобразование Фурье (ДПФ), вычисляемое по формуле, преобразующей входной сигнал $x(k)$ в комплексный образ $F(u)$ [6, 7]:

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-j \frac{2\pi ku}{N}}, \quad (2.1)$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица,

$k = \overline{0, \dots, N-1}$ – шаг по времени (входной отсчёт),

$u = \overline{0, \dots, N-1}$ – номер частоты (выходной отсчёт),

N – количество дискретных отсчётов (максимальное число шагов по времени и максимальное количество частот).

Другая форма записи дискретного преобразования Фурье:

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi ku}{N}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi ku}{N}\right) \right). \quad (2.2)$$

Отдельно выделяют *действительную часть* ДПФ

$$\operatorname{Re}(F(u)) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \cos\left(\frac{2\pi ku}{N}\right) \quad (2.3)$$

и *мнимую часть* ДПФ

$$\operatorname{Im}(F(u)) = -\frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \sin\left(\frac{2\pi ku}{N}\right). \quad (2.4)$$

Тогда дискретное преобразование Фурье может быть записано как

$$F(u) = \operatorname{Re}(F(u)) + j \cdot \operatorname{Im}(F(u)). \quad (2.5)$$

Также дискретное преобразование Фурье может быть представлено в виде

$$F(u) = A(u) \cdot e^{j \cdot \varphi(u)}. \quad (2.6)$$

Здесь $A(u)$ – амплитудный спектр ДПФ входного сигнала:

$$A(u) = \sqrt{\operatorname{Re}(F(u))^2 + \operatorname{Im}(F(u))^2}, \quad (2.7)$$

а $\varphi(u)$ – фазовый спектр ДПФ входного сигнала, вычисляемый формулой

$$\varphi(u) = \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\operatorname{Im}(F(u))}{\operatorname{Re}(F(u))} \right), \quad (2.8)$$

значения которого распределены на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, либо формулой

$$\varphi(u) = \operatorname{atan2} \left(\operatorname{Im}(F(u)), \operatorname{Re}(F(u)) \right), \quad (2.9)$$

тогда значения $\varphi(u)$ распределены на интервале $(-\pi; \pi]$.

Здесь $\operatorname{atan2}(\operatorname{Im}, \operatorname{Re})$ – двухаргументная функция *арктангенс*, возвращающая фазу комплексного числа во всех четырёх квадрантах комплексной плоскости, часто встречающаяся в разных языках программирования.

Одним из важнейших свойств дискретного преобразования Фурье является его **обратимость**, когда на основе комплексного образа может быть восстановлен входной сигнал.

Обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) преобразует комплексный образ $F(u)$ сигнала во входной сигнал $x(k)$:

$$x(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \cdot e^{j \frac{2\pi k u}{N}}. \quad (2.10)$$

Другая форма записи ОДПФ:

$$x(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{u=0}^{N-1} \left(\operatorname{Re}(F(u)) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k u}{N}\right) + \operatorname{Im}(F(u)) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k u}{N}\right) \right). \quad (2.11)$$

Возможны и иные формы записи ДПФ и ОДПФ, $F_2(u)$ и $F_3(u)$, когда нормирующие коэффициенты перед формулами (2.1) и (2.10) представляются в виде:

$$F_2(u) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-j\frac{2\pi ku}{N}}, \quad (2.12)$$

$$x(k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{u=0}^{N-1} F_2(u) \cdot e^{j\frac{2\pi ku}{N}} \quad (2.13)$$

или

$$F_3(u) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-j\frac{2\pi ku}{N}}, \quad (2.14)$$

$$x(k) = \sum_{u=0}^{N-1} F_3(u) \cdot e^{j\frac{2\pi ku}{N}}. \quad (2.15)$$

Аналогично изменятся формулы (2.2)–(2.4) и (2.11). Однако формулы (2.1)–(2.4), (2.10) и (2.11) предпочтительнее, так как в этом случае нормирование равномерно распределяется между прямым и обратным преобразованиями. Другие прямые и обратные дискретные тригонометрические преобразования, рассматриваемые ниже, также нормируются равномерно, аналогично формулам (2.1) и (2.10).

Кроме свойства обратимости, преобразование Фурье скалярного сигнала обладает рядом других важнейших свойств, например [6–8]:

1. Свойство линейности:

$$F(\mathbf{a} \cdot x(t) + \mathbf{b} \cdot y(t)) = \mathbf{a} \cdot F(x(t)) + \mathbf{b} \cdot F(y(t)).$$

Спектр взвешенной суммы сигналов есть взвешенная сумма спектров этих сигналов.

2. Теорема сдвига: сдвиг сигнала в области независимой переменной вызывает изменение фазы, пропорциональное значению частоты каждой спектральной составляющей сигнала.

3. Свойство подобия:

$$F(x(\mathbf{a} \cdot t)) = 1/\mathbf{a} \cdot S(u/\mathbf{a}),$$

где $S(u)$ есть спектр $x(t)$.

4. Спектр свёртки двух сигналов есть произведение спектров этих функций.

5. Сохранение энергии: интеграл (сумма) от квадратов значений сигнала на всём интервале наблюдения равен интегралу (сумме) от квадратов значений модуля спектра сигнала на всём интервале наблюдения (делённому на количество отсчётов в дискретном случае).

Среди названных свойств преобразования Фурье к важнейшим следует отнести свойство линейности. Это свойство позволяет использовать спектр сигнала как для исследования самого сигнала, так и для его фильтрации. Ведь после преобразования сигнала с аддитивной помехой можно обнулить спектр на частотах, соответствующих помехе, а затем обратным преобразованием Фурье получить отфильтрованный спектр. С этой точки зрения весьма полезным также может быть и свойство подобия.

При использовании дискретного преобразования Фурье следует знать о том, что дискретизация и квантование непрерывного сигнала оказывают **качественное** влияние на спектр сигнала, придавая ему особенности, отсутствующие у непрерывного спектра.

Особенности дискретного спектра, в отличие от непрерывного спектра, такие:

а) *дискретность* спектра, когда спектральные данные есть только на дискретных значениях частоты, а между этими значениями информация отсутствует. Это прямое следствие дискретизации аргумента (времени) преобразуемого сигнала. Часто значения амплитуд дискретного спектра на графиках изображаются не точками, а (для большей наглядности) вертикальными отрезками от оси абсцисс до заданной точки;

б) *повтор спектра* после частоты, равной частоте дискретизации, связанный как с конечностью интервала наблюдения, так и с дискретностью сигнала;

в) *симметричное отражение* спектра относительно частоты Найквиста между нулевой частотой и частотой дискретизации (осевая симметрия у действительной части и у амплитудного спектра и центральная симметрия у мнимой части спектра);

г) *растекание спектра*, когда из-за того что период сигнала и интервал наблюдения не являются строго кратными друг другу, появляются существенно ненулевые амплитудные значения гармоник на частотах, на которых спектральные составляющие дискретного сигнала теоретически должны быть равными нулю.

После квантования дискретного сигнала получают цифровой сигнал. Его особенностью является *шум квантования*, когда из-за недостаточной точности представления вещественных данных (из-за квантования дискретных данных)

появляются не очень большие, но в то же время не совсем нулевые значения на таких частотах, на которых спектральные составляющие дискретного сигнала (так же как в пункте «г») теоретически должны быть равными нулю.

Несмотря на существенные возможности ДПФ по обработке цифровых данных, наличие комплексного образа у действительного сигнала часто делает неудобным непосредственное использование ДПФ в задачах ЦОС. Этот недостаток отсутствует у других дискретных функциональных преобразований, непосредственно связанных с дискретным преобразованием Фурье. Это группа дискретных тригонометрических преобразований (ДТП), таких, как дискретное преобразование Хартли [9], дискретные косинусные преобразования, дискретные синусные преобразования [10–12], модифицированные дискретные косинусные и модифицированные дискретные синусные преобразования. Все эти преобразования возвращают вещественный спектр вещественного сигнала, что оказывается гораздо более удобным при цифровой обработке.

Важно заметить, что переход от комплексного к вещественному спектру не сопровождается потерей информации. Дискретные тригонометрические преобразования непосредственно связаны с дискретным преобразованием Фурье. Так, например, ниже представлены формулы (2.19), (2.20) и (2.21), демонстрирующие, как от дискретного преобразования Хартли перейти к дискретному преобразованию Фурье и наоборот [7].

В настоящей лабораторной работе предлагается, в соответствии с вариантом задания, исследовать предложенное дискретное тригонометрическое преобразование со следующих точек зрения:

1. Проверить свойство обратимости заданного ДТП.
2. Исследовать линейность предложенного ДТП.
3. Изучить особенности повтора спектра у проверяемого ДТП.
4. Определить наличие симметричного отражения спектра у ДТП, как то:
наличие центральной симметрии;
наличие осевой (вертикальной) симметрии.
5. Рассмотреть влияние фазовых сдвигов сигнала на результирующее ДТП.
6. Проверить наличие свойства подобия у заданного преобразования.
7. Исследовать возможность фильтрации сигналов с помощью заданного ДТП.
8. Проверить экспериментально сохранение энергии исследуемым ДТП.
9. Обнаружить связь данного ДТП с дискретным преобразованием Фурье.
10. Рассмотреть различные входные сигналы для более представительного анализа.

Варианты задания для лабораторной работы № 2

1. Дискретное преобразование Хартли (ДПХ)

$$H(u) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \left(\text{cas} \left(\frac{2\pi k u}{N} \right) \right), \quad (2.16)$$

где $\text{cas}(x)$ – функция «кардинальный синус»:

$$\text{cas}(x) = \cos(x) + \sin(x). \quad (2.17)$$

Обратное дискретное преобразование Хартли (ОДПХ)

$$x(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{u=0}^{N-1} H(u) \cdot \text{cas} \left(\frac{2\pi k u}{N} \right). \quad (2.18)$$

Преобразование Хартли непосредственно связано с преобразованием Фурье. Действительную часть ДПФ (2.3) можно вычислить по формуле

$$\text{Re}(F(u)) = \frac{H(u) + H(-u)}{2} = \frac{H(u) + H(N - u)}{2}, \quad (2.19)$$

а мнимую часть ДПФ (2.4), соответственно, по формуле

$$\text{Im}(F(u)) = \frac{H(u) - H(-u)}{2} = \frac{H(u) - H(N - u)}{2}. \quad (2.20)$$

В то же время преобразование Хартли может быть вычислено через действительную и мнимую части преобразования Фурье:

$$H(u) = \text{Re}(F(u)) + \text{Im}(F(u)). \quad (2.21)$$

2. Дискретное косинусное преобразование 1-го типа (ДКП I)

$$F_{CI}(u) = \sqrt{\frac{2}{N-1}} \cdot c_u d_u \cdot \sum_{k=0}^{N-1} c_k d_k \cdot x(k) \cdot \cos \left(\frac{\pi u k}{N-1} \right), \quad (2.22)$$

$$\text{где } c_i = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{при } i = 0, \\ 1 & \text{при } i > 0; \end{cases} \text{ и } d_i = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{при } i = N - 1, \\ 1 & \text{при } 0 \leq i < N - 1. \end{cases} \quad (2.23)$$

Обратное дискретное косинусное преобразование 1-го типа (ОДКП I)

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N-1}} \cdot c_k d_k \cdot \sum_{u=0}^{N-1} c_u d_u \cdot F_{CI}(u) \cdot \cos\left(\frac{\pi u k}{N-1}\right). \quad (2.24)$$

3. Дискретное косинусное преобразование 2-го типа (ДКП II)

$$F_{CII}(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot c_u \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \cos\left(\frac{\pi u \left(k + \frac{1}{2}\right)}{N}\right). \quad (2.25)$$

Обратное дискретное косинусное преобразование 2-го типа (ОДКП II)

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sum_{u=0}^{N-1} c_u \cdot F_{CII}(u) \cdot \cos\left(\frac{\pi u \left(k + \frac{1}{2}\right)}{N}\right). \quad (2.26)$$

4. Дискретное косинусное преобразование 3-го типа (ДКП III)

$$F_{CIII}(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot x(k) \cdot \cos\left(\frac{\pi \left(u + \frac{1}{2}\right) k}{N}\right). \quad (2.27)$$

Обратное дискретное косинусное преобразование 3-го типа (ОДКП III)

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot c_k \cdot \sum_{u=0}^{N-1} F_{CIII}(u) \cdot \cos\left(\frac{\pi \left(u + \frac{1}{2}\right) k}{N}\right). \quad (2.28)$$

5. Дискретное косинусное преобразование 4-го типа (ДКП IV)

$$F_{CIV}(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \cos\left(\frac{\pi \left(u + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{2}\right)}{N}\right). \quad (2.29)$$

Обратное дискретное косинусное преобразование 4-го типа (ОДКП IV)

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sum_{u=0}^{N-1} F_{cIV}(u) \cdot \cos\left(\frac{\pi\left(u + \frac{1}{2}\right)\left(k + \frac{1}{2}\right)}{N}\right). \quad (2.30)$$

6. Дискретное косинусное преобразование 5-го типа (ДКП V)

$$F_{cV}(u) = \sqrt{\frac{2}{N - \frac{1}{2}}} \cdot c_u \cdot \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot x(k) \cdot \cos\left(\frac{\pi uk}{N - \frac{1}{2}}\right). \quad (2.31)$$

Обратное дискретное косинусное преобразование 5-го типа (ОДКП V)

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N - \frac{1}{2}}} \cdot c_k \cdot \sum_{u=0}^{N-1} c_u \cdot F_{cV}(u) \cdot \cos\left(\frac{\pi uk}{N - \frac{1}{2}}\right). \quad (2.32)$$

7. Дискретное косинусное преобразование 6-го типа (ДКП VI)

$$F_{cVI}(u) = \sqrt{\frac{2}{N - \frac{1}{2}}} \cdot c_u \cdot \sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot x(k) \cdot \cos\left(\frac{\pi u\left(k + \frac{1}{2}\right)}{N - \frac{1}{2}}\right). \quad (2.33)$$

Обратное дискретное косинусное преобразование 6-го типа (ОДКП VI)

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N - \frac{1}{2}}} \cdot d_k \cdot \sum_{u=0}^{N-1} c_u \cdot F_{cVI}(u) \cdot \cos\left(\frac{\pi u\left(k + \frac{1}{2}\right)}{N - \frac{1}{2}}\right). \quad (2.34)$$

8. Дискретное косинусное преобразование 7-го типа (ДКП VII)

$$F_{cVII}(u) = \sqrt{\frac{2}{N - \frac{1}{2}}} \cdot d_u \cdot \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot x(k) \cdot \cos\left(\frac{\pi\left(u + \frac{1}{2}\right)k}{N - \frac{1}{2}}\right). \quad (2.35)$$

Обратное дискретное косинусное преобразование 7-го типа (ОДКП VII)

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N - \frac{1}{2}}} \cdot c_k \cdot \sum_{u=0}^{N-1} d_u \cdot F_{cvII}(u) \cdot \cos\left(\frac{\pi(u + \frac{1}{2})k}{N - \frac{1}{2}}\right). \quad (2.36)$$

9. Дискретное косинусное преобразование 8-го типа (ДКП VIII)

$$F_{cvIII}(u) = \sqrt{\frac{2}{N - \frac{1}{2}}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \cos\left(\frac{\pi(u + \frac{1}{2})(k + \frac{1}{2})}{N + \frac{1}{2}}\right). \quad (2.37)$$

Обратное дискретное косинусное преобразование 8-го типа (ОДКП VIII)

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N - \frac{1}{2}}} \cdot \sum_{u=0}^{N-1} F_{cvIII}(u) \cdot \cos\left(\frac{\pi(u + \frac{1}{2})(k + \frac{1}{2})}{N + \frac{1}{2}}\right). \quad (2.38)$$

10. Дискретное синусное преобразование 1-го типа (ДСП I)

$$F_{sI}(u) = \sqrt{\frac{2}{N - 1}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \sin\left(\frac{\pi uk}{N + 1}\right). \quad (2.39)$$

Обратное дискретное синусное преобразование 1-го типа (ОДСП I)

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N - 1}} \cdot \sum_{u=0}^{N-1} F_{sI}(u) \cdot \sin\left(\frac{\pi uk}{N + 1}\right). \quad (2.40)$$

11. Дискретное синусное преобразование 2-го типа (ДСП II)

$$F_{sII}(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot c_u \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \sin\left(\frac{\pi(u + 1)(k + \frac{1}{2})}{N}\right). \quad (2.41)$$

Обратное дискретное синусное преобразование 2-го типа (ОДСП II)

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sum_{u=0}^{N-1} c_u \cdot F_{SII}(u) \cdot \sin\left(\frac{\pi(u+1)\left(k+\frac{1}{2}\right)}{N}\right). \quad (2.42)$$

12. Дискретное синусное преобразование 3-го типа (ДСП III)

$$F_{SIII}(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot x(k) \cdot \sin\left(\frac{\pi\left(u+\frac{1}{2}\right)(k+1)}{N}\right). \quad (2.43)$$

Обратное дискретное синусное преобразование 3-го типа (ОДСП III)

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot c_k \cdot \sum_{u=0}^{N-1} F_{SIII}(u) \cdot \sin\left(\frac{\pi\left(u+\frac{1}{2}\right)(k+1)}{N}\right). \quad (2.44)$$

13. Дискретное синусное преобразование 4-го типа (ДСП IV)

$$F_{SIV}(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \sin\left(\frac{\pi\left(u+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)}{N}\right). \quad (2.45)$$

Обратное дискретное синусное преобразование 4-го типа (ОДСП IV)

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sum_{u=0}^{N-1} F_{SIV}(u) \cdot \sin\left(\frac{\pi\left(u+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)}{N}\right). \quad (2.46)$$

14. Дискретное синусное преобразование 5-го типа (ДСП V)

$$F_{SV}(u) = \sqrt{\frac{2}{N-\frac{1}{2}}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \sin\left(\frac{\pi(u+1)(k+1)}{N+\frac{1}{2}}\right). \quad (2.47)$$

Обратное дискретное синусное преобразование 5-го типа (ОДСП V)

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N - \frac{1}{2}}} \cdot \sum_{u=0}^{N-1} F_{SV}(u) \cdot \sin\left(\frac{\pi(u+1)(k+1)}{N + \frac{1}{2}}\right). \quad (2.48)$$

15. Дискретное синусное преобразование 6-го типа (ДСП VI)

$$F_{SVI}(u) = \sqrt{\frac{2}{N - \frac{1}{2}}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \sin\left(\frac{\pi(u+1)\left(k + \frac{1}{2}\right)}{N + \frac{1}{2}}\right). \quad (2.49)$$

Обратное дискретное синусное преобразование 6-го типа (ОДСП VI)

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N - \frac{1}{2}}} \cdot \sum_{u=0}^{N-1} F_{SVI}(u) \cdot \sin\left(\frac{\pi(u+1)\left(k + \frac{1}{2}\right)}{N + \frac{1}{2}}\right). \quad (2.50)$$

16. Дискретное синусное преобразование 7-го типа (ДСП VII)

$$F_{SVII}(u) = \sqrt{\frac{2}{N - \frac{1}{2}}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \sin\left(\frac{\pi\left(u + \frac{1}{2}\right)(k+1)}{N + \frac{1}{2}}\right). \quad (2.51)$$

Обратное дискретное косинусное преобразование 7-го типа (ОДСП VII)

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N - \frac{1}{2}}} \cdot \sum_{u=0}^{N-1} F_{SVII}(u) \cdot \sin\left(\frac{\pi\left(u + \frac{1}{2}\right)(k+1)}{N + \frac{1}{2}}\right). \quad (2.52)$$

17. Дискретное синусное преобразование 8-го типа (ДСП VIII)

$$F_{SVII}(u) = \sqrt{\frac{2}{N - \frac{1}{2}}} \cdot d_u \sum_{k=0}^{N-1} d_k \cdot x(k) \cdot \sin\left(\frac{\pi\left(u + \frac{1}{2}\right)\left(k + \frac{1}{2}\right)}{N - \frac{1}{2}}\right). \quad (2.53)$$

Обратное дискретное косинусное преобразование 8-го типа (ОДСП VIII)

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N - \frac{1}{2}}} \cdot d_k \sum_{u=0}^{N-1} d_u \cdot F_{SVII}(u) \cdot \sin\left(\frac{\pi\left(u + \frac{1}{2}\right)\left(k + \frac{1}{2}\right)}{N - \frac{1}{2}}\right). \quad (2.54)$$

18. Модифицированное дискретное косинусное преобразование (МДКП)

$$F_{MCIV}(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sum_{k=0}^{2N-1} x(k) \cdot \cos\left(\frac{\pi\left(u + \frac{1}{2} + \frac{N}{2}\right)\left(k + \frac{1}{2}\right)}{N}\right). \quad (2.55)$$

Обратное модифицированное дискретное косинусное преобразование (ОМДКП)

$$x(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sum_{u=0}^{N-1} F_{MCIV}(u) \cdot \cos\left(\frac{\pi\left(u + \frac{1}{2} + \frac{N}{2}\right)\left(k + \frac{1}{2}\right)}{N}\right). \quad (2.56)$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Дискретизация линейных уравнений непрерывных сигналов, представленных в различных формах

1. Представить в виде скалярного дифференциального уравнения n -го порядка непрерывные функции, описывающие сигналы (в соответствии с вариантом).

2. Преобразовать полученное дифференциальное уравнение в форму Коши (представить векторным дифференциальным уравнением 1-го порядка, см. [17, приложение 5, с. 268]). Размерность вектора состояния (вектора фазовых координат) должна быть равна порядку дифференциального уравнения n .

3. Осуществить точную дискретизацию полученного в п. 2 векторного дифференциального уравнения 1-го порядка, приведя его к форме векторного одношагового уравнения (см. [18, приложение А]). Размерность вектора состояния сигнала n (вектора фазовых координат) не должна меняться после дискретизации.

4. Добавив скалярное входное воздействие на заданный сигнал, представить линейное дифференциальное уравнение из п. 1 как *дифференциальное уравнение с правой частью*. После этого, подействовав на полученное дифференциальное уравнение преобразованием Лапласа, получить передаточную функцию $W(p)$ линейной динамической системы, на выходе которой формируется заданный сигнал.

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)}, \quad (3.1)$$

где $X_{\text{ВЫХ}}(p)$ — комплексный образ сигнала $x(t)$ на выходе линейной динамической системы после преобразования Лапласа, $X_{\text{ВХ}}(p)$ — аналогичный комплексный образ входного воздействия на входе линейной динамической системы, а p — комплексный аргумент оператора Лапласа: $p = a + j \cdot b$, где a и b — вещественные числа, а j — мнимая единица.

5. Используя полученную в п. 3 векторную одношаговую форму уравнения сигнала, вычислить импульсную передаточную функцию $H(z)$ дискретной линейной динамической системы:

$$H(z) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(z)}{X_{\text{ВХ}}(z)}, \quad (3.2)$$

где $X_{\text{ВХ}}(z)$ — z -образ входного сигнала, а $X_{\text{ВЫХ}}(z)$ — z -образ выходного сигнала.

Комплексные аргументы z и p функций $H(z)$ и $W(p)$ связаны соотношениями

$$p = \frac{1}{\Delta t} \cdot \ln|z|, \quad \text{а также} \quad z = e^{p \cdot \Delta t}. \quad (3.3)$$

6. С помощью полученной в п. 5 импульсной передаточной функции $H(z)$ представить полученное в п. 3 векторное одношаговое уравнение в скалярной многошаговой форме (см. [19]). Количество шагов запаздывания скалярного дискретного сигнала должно быть равно размерности вектора состояния дискретного сигнала.

Так как элементы вектора состояния есть сигнал и его первая и т.д. производные, то представление дифференциального уравнения сигнала в форме Коши имеет вид

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + \tilde{\Gamma} \cdot X_{\text{вх}}(t), \quad (3.4)$$

где $X(t)$ – n -мерный вектор состояния, $X(0)$ – вектор начальных условий, A – матрица размерности $n \times n$, определяющая динамику сигнала, $\tilde{\Gamma}$ – матрица размерности $n \times m$ ($1 \leq m \leq n$) для связи вектора состояния $X(t)$ и m -мерного входного воздействия $X_{\text{вх}}(t)$.

Точная дискретизация дифференциального уравнения (3.4) осуществляется путём перехода от уравнения (3.4) к векторному разностному уравнению:

$$X(k+1) = \Phi \cdot X(k) + \Gamma \cdot X_{\text{вх}}(k), \quad (3.5)$$

с заданным вектором начального состояния дискретной системы $X(0)$, где $\Phi = \Phi(k+1/k)$ – переходная матрица дискретной динамической системы. Как правило, это постоянная матрица, которую можно найти, решив матричное дифференциальное уравнение [18, приложение А]

$$\dot{\Phi}(\tau) = A \cdot \Phi(\tau) \quad (3.6)$$

с начальным условием

$$\Phi(0) = I, \quad (3.7)$$

где I — единичная матрица размерности $n \times n$:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

После нахождения матрицы $\Phi(\tau)$ следует символично заменить переменную τ числовой константой — значением интервала дискретизации Δt , и матрица Φ получена.

Матрица Γ в уравнении (3.5) аналогична матрице $\tilde{\Gamma}$ в уравнении (3.4). Как правило, они связаны соотношением $\Gamma = \Delta t \cdot \tilde{\Gamma}$. Если $m=1$, то матрица Γ может иметь вид

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Для перевода уравнений сигнала из векторной одношаговой к скалярной многошаговой форме нужно перейти от вектора $X(k)$ к скаляру $x(k)$:

$$x(k) = h \cdot X(k), \quad (3.10)$$

где матрица h есть матрица-строка размерности $1 \times n$:

$$h = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]. \quad (3.11)$$

Затем необходимо найти импульсную передаточную матрицу $H(z)$ из уравнения

$$H(z) = h \cdot [zI - \Phi]^{-1} \cdot \Gamma, \quad (3.12)$$

а затем, после обратного Z -преобразования, получить скалярное многошаговое уравнение сигнала $x(k)$ (см., например [19, 20]).

Варианты задания для лабораторной работы №3

Предлагаются следующие уравнения функций от непрерывного времени, описывающих сигналы с помощью элементарных алгебраических функций:

$$1) \quad x(t) = A \cdot e^{-\eta t},$$

$$2) \quad x(t) = v \cdot t + x_{\text{см}},$$

$$3) \quad x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 \cdot t + x_{\text{см}},$$

$$4) \quad x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

$$5) \quad x(t) = A \cdot e^{-\eta t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

$$6) \quad x(t) = x_{\text{см}} + A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

$$7) \quad x(t) = x_{\text{см}} - A \cdot e^{-\eta t},$$

$$8) \quad x(t) = x_{\text{см}} + A \cdot e^{-\eta t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

$$9) \quad x(t) = x_{\text{см}} + A \cdot e^{-\eta t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

$$10) \quad x(t) = A_{\Omega} \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi_{\Omega}) + A_{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

где $\Omega \ll \omega$.

$$11) \quad x(t) = v_0 \cdot t + x_{\text{см}} + A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

$$12) \quad x(t) = A \cdot e^{-\eta t} + v_0 \cdot t + x_{\text{см}},$$

$$13) \quad x(t) = A_{\eta} \cdot e^{-\eta t} + A_{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

$$14) \quad x(t) = A_{\eta} \cdot e^{-\eta t} + x_{\text{см}} + A_{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

$$15) \quad x(t) = x_{\text{см}} + v_0 \cdot t + A \cdot e^{-\eta t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

$$16) \quad x(t) = A \cdot t \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

где параметры сигналов $x_{\text{см}}$, v , v_0 , φ_0 , φ_{Ω} – константы произвольного знака, а параметры A , A_{ω} , A_{Ω} , A_{η} , ω , Ω , η – положительные константы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Моделирование случайных процессов с заданными характеристиками

Часть 1. Моделирование случайных чисел с заданным законом распределения

1.1. Про моделировать равномерно распределенное случайное число, плотность распределения которого

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & b \geq x \geq a, \\ 0, & x \notin [a; b]. \end{cases} \quad (4.1)$$

Методы моделирования изложены, например, в [21, гл.20, с.719], а также в [22] и т.д.

а) Предлагается создать так называемый *смешанный генератор сравнения* [21] для получения последовательности псевдослучайных чисел x :

$$x_i = [a \cdot x_{i-1} + c] \bmod m, \quad (4.2)$$

где m – заданное натуральное число больше 1 (256, 10000, 65536 и т.д.), $x_0 < m$, $0 < a < m$, $0 \leq c < m$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$

б) Если $c = 0$, то это будет *мультипликативный генератор сравнения* [21].

Аналогичный мультипликативному генератору алгоритм изложен в [22].

При моделировании равномерно распределённой псевдослучайной величины по методу (4.2) рекомендуется подбирать стартовое значение псевдослучайного числа x , а также значения коэффициента a и чисел c и m такими, чтобы добиться возможно более равномерного распределения, поскольку все такие алгоритмы на небольшом количестве итераций дают только ограниченное, а вовсе не равномерное распределение.

Аналогичные этим алгоритмы генерации псевдослучайных чисел встроены в различные языки программирования. Псевдослучайные числа генерируют библиотечные функции типа *random*. Как и в предлагаемых алгоритмах, эти числа имеют скорее ограниченные, чем равномерные распределения.

1.2. Нормальное (гауссово) распределение задаётся плотностью распределения $p(x)$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} \cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2 \cdot \sigma_x^2}}. \quad (4.3)$$

Предлагается промоделировать это распределение с помощью центральной предельной теоремы теории вероятностей [21], согласно которой распределение суммы независимых случайных величин стремится к нормальному распределению при увеличении количества суммируемых величин. При этом в качестве независимых случайных величин предлагается использовать смоделированные в п.1.1 равномерно распределённые случайные числа. Важно убедиться на практике, что чем равномернее будут исходные случайные числа, тем более нормальным будет распределение их суммы. Представленные ниже формулы (4.4) и (4.5) иллюстрируют эту теорему. Здесь y – нормально распределённая величина, x – равномерно распределённая, а i – номер конкретной независимой реализации x . При этом формула (4.4) отражает предельный смысл теоремы, а формула (4.5) показывает процесс приближения к нормальному распределению. Очевидно, на практике нужно выбрать конечное значение числа M :

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} x_i, \quad (4.4)$$

$$y = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M x_i. \quad (4.5)$$

1.3. Если плотность распределения случайной величины задана аналитически, то часто возможно промоделировать такую величину следующим способом [23]:

а) выразить аналитически функцию распределения случайного числа $F(x)$ через плотность распределения этого числа $p(x)$;

б) если удалось получить аналитически функцию $F(x)$, найти обратную функцию $F^{-1}(x)$, выразив алгебраически y через x из уравнения $x = F(y)$;

в) если удалось алгебраически выразить функцию, обратную к $F(y)$, то желаемую случайную величину с заданной плотностью распределения следует определить с помощью формулы

$$y = F^{-1}(x),$$

где x – равномерно распределённое случайное число, а y – желаемое случайное число с аналитически заданной плотностью распределения (см. экспоненциальное распределение в [23]).

Из вышесказанного видно, что не всегда возможно применение такого способа. Если пункт «а» или же пункт «б» не выполняется, получить распределение данным способом невозможно.

Примером успешного применения такого способа моделирования случайного распределения является экспоненциальное распределение (см. [23]):

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Далее предложены варианты распределений случайных чисел, которые могут быть созданы с помощью равномерного и нормального распределений, полученных в п.1.1 и 1.2, а также промоделированных с помощью приёма, предложенного в п.1.3. Также при описании ряда предлагаемых ниже распределений указаны специальные способы, с помощью которых можно получить требуемые случайные числа. Так, в п.1.4 и 1.5 предложены способы моделирования гауссовского (нормального) распределения с помощью преобразования Бокса–Мюллера, альтернативные методу центральной предельной теоремы.

1.4. Преобразование Бокса – Мюллера (синусное):

$$z = \sin(2\pi\varphi)\sqrt{-2 \cdot \ln R} \quad (4.7)$$

позволяет получить нормально распределённую случайную величину z , если φ и R – равномерно распределённые случайные величины:

$$\varphi \text{ и } R \in [0; 1).$$

1.5. Преобразование Бокса – Мюллера (косинусное)

$$z = \cos(2\pi\varphi)\sqrt{-2 \cdot \ln R} \quad (4.8)$$

позволяет получить нормально распределённую случайную величину z , если φ и R – равномерно распределённые случайные величины:

$$\varphi \text{ и } R \in [0; 1).$$

1.6. Распределение Вигнера (полукруговое):

$$p(x) = \frac{2}{\pi R^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2}, \quad (4.9)$$

где $x \in [-R; R]$.

1.7. Распределение Рэлея:

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2 \cdot \sigma_x^2}}. \quad (4.10)$$

1.8. Распределение Пуассона:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda x \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

1.9. Распределение Коши:

$$p(x) = \frac{1}{\pi \alpha} \cdot \frac{\lambda}{1 + \left(\frac{x-m_x}{\alpha}\right)^2}. \quad (4.12)$$

1.10. Распределение Максвелла:

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{x^2}{\sigma_x^2} \cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2 \cdot \sigma_x^2}}. \quad (4.13)$$

1.11. Распределение Максвелла энергетическое:

$$p(x) = \frac{2\pi}{(\sqrt{\pi kT})^3} \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{x}{kT}}. \quad (4.14)$$

1.12. Распределение Лапласа:

$$p(x) = \frac{1}{2\beta} \cdot e^{-\frac{|x-m_x|}{\beta}}. \quad (4.15)$$

1.13. Распределение Парéто:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{k \cdot x_m^k}{x^{k+1}}, & x \geq x_m, \\ 0, & x < x_m. \end{cases} \quad (4.16)$$

1.14. Распределение Вейбулла:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

1.15. Логнормальное распределение:

$$p(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (4.18)$$

1.16. Распределение Рэйса, полученное с помощью преобразования Рэйса:

$$z = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (4.19)$$

где X и Y – нормально распределённые независимые случайные величины (см. (4.3)) с одинаковыми характеристиками, кроме математических ожиданий:

$$m_x \neq m_y.$$

1.17. χ^2 -распределение случайной величины X получают по формуле

$$x = \sum_{i=1}^k z_i^2, \quad (4.21)$$

где z_i – нормально распределённые независимые случайные величины.

1.18. Распределение Фишера случайной величины x получают по формуле

$$x = \frac{Y_1 \cdot k_2}{Y_2 \cdot k_1}. \quad (4.21)$$

Здесь Y_1 и Y_2 – нормально распределённые случайные величины, а k_1 и k_2 – соответствующие им коэффициенты.

1.19. Распределение Стюдента случайной величины x получают по формуле

$$x = \frac{Y}{\sqrt{\frac{1}{k} \chi(k)}}. \quad (4.22)$$

Здесь используется нормальное распределённое число Y и число χ с распределением “хи-квадрат” из п.1.17 и с коэффициентом k .

В приведённых формулах m_x означает математическое ожидание случайной величины, σ_x означает среднее квадратическое отклонение случайной величины, а $R, k, \alpha, \beta, \lambda, \mu$ – параметры распределений (k – степень конкретного распределения).

[Источник сведений по большинству предложенных распределений – статьи из Википедия, посвящённые случайным распределениям.]

Часть 2. Моделирование стационарных случайных процессов с заданными спектральными характеристиками (с помощью моделей случайных чисел с заданным законом распределения)

Созданная согласно варианту задания последовательность из n псевдослучайных чисел может рассматриваться как одна реализация стационарного псевдослучайного процесса. Ансамбль из m таких реализаций представляет собой частичную числовую модель стационарного случайного процесса.

Смоделированный таким образом процесс условно (с некоторым приближением) считается процессом с независимыми значениями (так называемым «дискретным белым шумом»), что отражает отсутствие корреляции между двумя соседними шагами по времени [17, 18, 21]. Спектральная плотность такого процесса $S_{\text{бш}}(\omega)$ на всех частотах является постоянной величиной.

Если нужно создать так называемый «цветной» случайный процесс с заданной спектральной плотностью $S_{\text{цв}}(\omega)$, то он может быть создан с помощью так называемого **формирующего фильтра** [17, 18]. Передаточная характеристика такого фильтра $W_{\text{фф}}(p)$ может быть получена из уравнения

$$S_{\text{цв}}(\omega) = W_{\text{фф}}(j\omega) \cdot W_{\text{фф}}(-j\omega) \cdot S_{\text{бш}}(\omega). \quad (4.23)$$

После получения формулы для $W_{\text{фф}}(j\omega)$ путём замены чисто мнимого $j\omega$ комплексным p получают искомое $W(p)$ (j – мнимая единица).

Несмотря на то что уравнение (4.23) относится к непрерывным моделям, возможно перейти к дискретным моделям с помощью идей и методов, изложенных в лабораторной работе №3.

Часть 3. Моделирование линейных нестационарных дискретных случайных процессов (марковских случайных процессов)

Линейный нестационарный дискретный случайный процесс возможно промоделировать, используя формулу [17, 18]

$$X(k+1) = \Phi \cdot X(k) + \Gamma \cdot w(k), \quad (4.24)$$

где $X(k)$ — вектор состояния фазовых координат дискретного сигнала (размерностью $n \times 1$); Φ — переходная матрица линейного нестационарного дискретного случайного процесса размерностью $n \times n$ (в общем виде нестационарного — $\Phi = \Phi(k+1/k)$); $w(k)$ — дискретный стационарный случайный процесс с независимыми значениями (дискретный “белый шум”), центрированный (с нулевым математическим ожиданием), с интенсивностью Q , распределённый по заданному закону распределения, размерностью $m \times 1$ (целые $n > m > 0$).

Обычно этот случайный процесс обладает гауссовским свойством (распределён по нормальному закону), так как только гауссовский случайный процесс сохраняет своё распределение при прохождении линейного динамического звена [18]; Γ — матрица размерностью $n \times m$, согласующая размерности $X(k)$ и $w(k)$; $k, k+1$ — дискретные шаги по времени.

Так как уравнение (4.24) — разностное, то необходимо начальное условие: $X(0)$ — вектор размерностью $n \times 1$. Это (как правило) гауссовский случайный вектор с математическим ожиданием $m_X(0)$ и матрицей корреляционных моментов $D_X(0)$.

Так как в текущий момент времени плотность распределения вектора состояния сигнала у такого процесса зависит только от плотности распределения в предыдущий момент времени, то это *марковский* случайный процесс. В уравнении (4.24) часть, связанная с матрицей Φ , определяет динамику процесса, а процесс $w(k)$ задаёт случайное воздействие на динамическую систему (см. уравнение (3.5)).

Для того чтобы промоделировать линейный нестационарный дискретный случайный процесс, определяемый уравнением (4.24), необходимо, согласно варианту задания к лабораторной работе №3, дискретизовать представленное в форме Коши детерминированное уравнение сигнала и получить вектор состояния X и матрицу Φ .

Затем нужно создать компьютерную модель стационарного случайного процесса в соответствии с материалом частей 1 и 2 настоящей лабораторной работы. По завершении этого требуется аддитивно соединить *динамическую детерминированную* и *стационарную случайную* части сигнала, согласно матричному разностному уравнению (4.24). В результате компьютерного моделирования этого уравнения будет получен желаемый линейный нестационарный дискретный случайный процесс.

Важно заметить, что форма уравнения (4.24) позволяет вычислять аналитически *достаточные координаты* [17] линейной динамической стохастической системы, описанной этим уравнением. Это уравнения для вычисления математического ожидания $m_X(k)$ случайного процесса:

$$m_X(k+1) = \Phi \cdot m_X(k), \quad (4.25)$$

где $m_x(0)$ — начальный вектор состояния фазовых координат дискретного сигнала (размерностью $n \times 1$), а также уравнения для вычисления матриц корреляционных моментов $D_x(k)$:

$$D_x(k+1) = \Phi \cdot D_x(k) \cdot \Phi^T + \Gamma \cdot Q \cdot \Gamma^T, \quad (4.26)$$

где $D_x(0)$ — начальная матрица корреляционных моментов дискретного сигнала (размерностью $n \times n$).

Уравнения (4.25)–(4.26) верны в случае, если процесс $w(k)$ гауссовский. Они представляют собой так называемый **метод уравнений моментов** для линейных динамических стохастических сигналов, который также известен как метод Дункана [17, 18].

Дискретный скалярный случайный процесс $x_i(k)$ фактически есть функция двух аргументов, один из которых — номер шага по времени k , а другой — номер реализации i . Для вычисления вероятностных характеристик случайного процесса из ансамбля M статистических испытаний ($1 \leq i \leq M$) используют известные формулы математического ожидания [21]

$$m_x(k) = \frac{\sum_{i=1}^M x_i(k)}{N}, \quad (4.27)$$

дисперсии

$$D_x(k) = \frac{\sum_{i=1}^M (x_i(k) - m_x(k))^2}{N-1}, \quad (4.28)$$

и корреляционной функции

$$K_x(k_1, k_2) = \frac{\sum_{i=1}^M (x_i(k_1) - m_x(k_1))(x_i(k_2) - m_x(k_2))}{N-1}. \quad (4.29)$$

В работах № 5–8 настоящего цикла будут рассмотрены применения сигналов, разные модели которых представлены в лабораторных работах № 3 и 4.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Линейная цифровая фильтрация сигналов в частотной области

В этой лабораторной работе следует изучить возможности по восстановлению дискретного (цифрового) сигнала, искаженного различными помехами. Для этого предлагается на основе заданной *импульсной передаточной функции* $H(z)$ промоделировать функционирование линейного цифрового фильтра. При этом *текущие* значения скалярного выходного сигнала $y(k)$ рассчитываются из *предшествующих* значений этого же скалярного выходного сигнала ($y(k-1)$, $y(k-2)$, ...) и из *текущих* и *предшествующих* значений скалярного входного сигнала ($x(k)$, $x(k-1)$, $x(k-2)$, ...).

Если текущие значения скалярного выходного сигнала $y(k)$ цифрового фильтра рассчитываются только с помощью текущих и предшествующих значений скалярного входного сигнала ($x(k)$, $x(k-1)$, $x(k-2)$, ...), без предшествующих значений скалярного выходного сигнала $y(k)$, то это так называемый **нерекурсивный** (или *трансерсальный*) цифровой фильтр [23–29]. Нерекурсивные цифровые фильтры имеют конечную импульсную характеристику (КИХ) (см., например, [24]).

Если же текущие значения скалярного выходного сигнала $y(k)$ цифрового фильтра рассчитываются как с помощью текущих и предшествующих значений скалярного входного сигнала ($x(k)$, $x(k-1)$, $x(k-2)$, ...), так и с помощью предшествующих значений скалярного выходного сигнала ($y(k-1)$, $y(k-2)$, ...), то это так называемый **рекурсивный** цифровой фильтр [23-30]. Рекурсивные цифровые фильтры имеют бесконечную импульсную характеристику (БИХ) (см., например, [24]).

Ниже рассмотрены примеры программного моделирования цифровых фильтров.

Пример 1. КИХ-фильтр 2-го порядка (нерекурсивный) [24].

Дана импульсная передаточная функция:

$$H(z) = 0,1 + 0,5 \cdot z^{-1} + 0,7 \cdot z^{-2}, \quad (5.1)$$

где z – комплексный аргумент z -преобразования. Дискретное время $k \in \{0, 1, \dots, 32\}$. Если $x(k)$ – входной сигнал, а $y(k)$ – выходной сигнал

цифрового фильтра, то, в соответствии с (5.1), текущее значение выходного сигнала вычисляется по формуле

$$y(k) = 0,1 \cdot x(k) + 0,5 \cdot x(k-1) + 0,7 \cdot x(k-2), \quad (5.2)$$

Начальными условиями уравнения (5.2) являются значения $x(0)$, $x(1)$ и $x(2)$.

Значения $y(0)$ и $y(1)$ также должны быть заданы, так как не могут быть вычислены с помощью уравнения (5.2).

Далее приведён фрагмент программы на языке C++, моделирующий КИХ-фильтр (5.1) для простого случая, когда входной сигнал $x(k)$ есть сумма полезного сигнала $x_p = \sin(0,2 \cdot k)$ и высокочастотной помехи $v = \cos(2,0 \cdot k)$.

```

/* начало фрагмента программы моделирования КИХ-фильтра */

double xp, x, y, x1, x2, y1, y2, v;

xp=sin(0.2*0); // вычисление полезного сигнала xp при k=0
v=cos(2.0*0); // вычисление значения помехи v при k=0
x2=xp+v; // вычисление начального x2 с помехой
y2=0; // возможное начальное значение y2
printf("xp= %10.3f x= %10.3f y= %10.3f ", xp, x2, y2);

xp=sin(0.2*1); // вычисление полезного сигнала xp при k=1
v=cos(2.0*1); // вычисление значения помехи v при k=1
x1=xp+v; // вычисление начального x1 с помехой
y1=0; // возможное начальное значение y1
printf("xp= %10.3f x= %10.3f y= %10.3f ", xp, x1, y1);

for (int k=2; k<33; k++) // расчёт со 2-го по 32-й шаг
{
xp=sin(0.2*k); //вычисление текущего значения полезного xp
v=cos(2.0*k); // вычисление текущего значения помехи
x=xp+v; //вычисление текущего значения x с помехой
y=0.1*x+0.5*x1+0.7*x2; // расчёт текущего значения y
x2=x1; // переприсвоение x2 на следующий шаг
x1=x; // переприсвоение x1 на следующий шаг
printf("xp= %10.3f x= %10.3f y= %10.3f ", xp, x, y);
}

/* конец фрагмента программы */

```

Пример 2. БИХ-фильтр 2-го порядка (рекурсивный) [24].

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{1-0,7 \cdot z^{-1}+0,25 \cdot z^{-2}}, \quad (5.3)$$

где z – комплексный аргумент z -преобразования. Дискретное время $k \in \{0, 1, \dots, 32\}$. Если $x(k)$ – входной сигнал, а $y(k)$ – выходной сигнал цифрового фильтра, то, в соответствии с (5.3), текущее значение выходного сигнала вычисляется по формуле:

$$y(k) = x(k) + x(k-1) + x(k-2) + 0,7 \cdot y(k-1) - 0,25 \cdot y(k-2). \quad (5.4)$$

Начальными условиями разностного уравнения (5.2) являются значения $y(0)$ и $y(1)$, а также значения $x(0)$, $x(1)$ и $x(2)$.

Далее приведён фрагмент программы на языке C++, моделирующий БИХ-фильтр (5.3) для того же случая, когда входной сигнал $x(k)$ есть сумма полезного сигнала $x_p = \sin(0,2 \cdot k)$ и высокочастотной помехи $v = \cos(2,0 \cdot k)$.

```

/* начало фрагмента программы моделирования БИХ-фильтра */
double xp, x, y, x1, x2, y1, y2, v;
xp=sin(0.2*0); // вычисление полезного сигнала xp при k=0
v=cos(2.0*0); // вычисление значения помехи v при k=0
x2=xp+v; // вычисление начального x2 с помехой
y2=0; // возможное начальное значение y2
printf("xp= %10.3f x= %10.3f y= %10.3f ", xp, x2, y2);
xp=sin(0.2*1); // вычисление полезного сигнала xp при k=1
v=cos(2.0*1); // вычисление значения помехи v при k=1
x1=xp+v; // вычисление начального x1 с помехой
y1=0; // возможное начальное значение y1
printf("xp= %10.3f x= %10.3f y= %10.3f ", xp, x1, y1);
for (int k=2; k<33; k++) // расчёт со 2-го по 32-й шаг
{
xp=sin(0.2*k); //вычисление текущего значения полезного xp
v=cos(2.0*k); // вычисление текущего значения помехи
x=xp+v; //вычисление текущего значения x с помехой
y=x+x1+x2+0.7*y1-0.25*y2; // расчёт текущего значения y
x2=x1; // переприсвоение x2 на следующий шаг
x1=x; // переприсвоение x1 на следующий шаг
y2=y1; // переприсвоение y2 на следующий шаг
y1=y; // переприсвоение y1 на следующий шаг
printf("xp= %10.3f x= %10.3f y= %10.3f ", xp, x, y);
}
/* конец фрагмента программы */

```

Важно заметить, что порядок переприсвоения переменных x_1, x_2 в примере 1 и в примере 2, как и порядок переприсвоения переменных y_1, y_2 в примере 2, должны осуществляться именно так, как указано в программе. В противном случае фильтры будут работать неправильно.

Далее приведены индивидуальные варианты импульсных передаточных функций для моделирования цифровых линейных фильтров в версиях фильтров низких частот (ФНЧ), наиболее популярных, распространённых [23]—[30].

Варианты импульсных передаточных функций цифровых линейных фильтров низкой частоты (рекурсивных с БИХ и нерекурсивных с КИХ)

1. ФНЧ Баттерворта [23] — частота среза $f_{\text{ср}}$ равна одной пятой частоты дискретизации $f_{\text{д}}$ ($f_{\text{ср}} = 0,2 \cdot f_{\text{д}}$),

$$H(z) = \frac{0,0985 + 0,2956 \cdot z^{-1} + 0,2956 \cdot z^{-2} + 0,0985 \cdot z^{-3}}{1 - 0,5772 \cdot z^{-1} + 0,4218 \cdot z^{-2} - 0,0563 \cdot z^{-3}} =$$

$$= \frac{0,0985 \cdot (1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3})}{1 - 0,5772 \cdot z^{-1} + 0,4218 \cdot z^{-2} - 0,0563 \cdot z^{-3}}.$$

2. ФНЧ эллиптический [23] — частота среза $f_{\text{ср}}$ равна одной десятой частоты дискретизации $f_{\text{д}}$ ($f_{\text{ср}} = 0,1 \cdot f_{\text{д}}$), пульсации в полосе пропускания 1 дБ, подавление в полосе задержки 60 дБ,

$$H(z) = \frac{0,0059 + 0,0053z^{-1} + 0,0096z^{-2} + 0,0053z^{-3} + 0,0059z^{-4}}{1 - 3,0477z^{-1} + 3,8240z^{-2} - 2,2926z^{-3} + 0,5523z^{-4}}.$$

3. ФНЧ [25] — частота дискретизации $f_{\text{д}}=12$,

$$H(z) = \frac{0,003333 \cdot \left(1 + 2e^{-\frac{1}{12}} \cdot \cos\left(\frac{75}{12}\right) \cdot z^{-1} + e^{-\frac{1}{6}} \cdot z^{-2}\right)}{1 - 2e^{-\frac{1}{12}} \cdot \cos\left(\frac{1}{12}\right) \cdot z^{-1} + e^{-\frac{1}{6}} \cdot z^{-2}}.$$

4. ФНЧ первого порядка [26, 27],

$$H(z) = \frac{0,1 \cdot (1 + z^{-1})}{1 - 0,8 \cdot z^{-1}}.$$

5. ФНЧ, синтезированный из непрерывного фильтра [28], – частота дискретизации $f_d=1280$ Гц, частота среза $f_{cp}=150$ Гц, пульсации по уровню 3 дБ,

$$H(z) = \frac{0,3228}{1 - 1,030953 \cdot z^{-1} + 0,353088 \cdot z^{-2}}.$$

6. ФНЧ Баттерворта [28] – частота дискретизации $f_d = 1280$ Гц, частота среза $f_{cp} = 150$ Гц,

$$H(z) = \frac{0,3078 \cdot z^{-1}}{1 - 1,0308 \cdot z^{-1} + 0,3553 \cdot z^{-2}}.$$

7. ФНЧ, синтезированный из непрерывного фильтра [28], – частота дискретизации $f_d=1280$ Гц, частота среза $f_{cp}=150$ Гц, пульсации по уровню 3 дБ,

$$H(z) = \frac{0,1614 \cdot (1 + z^{-1})}{1 - 1,030953 \cdot z^{-1} + 0,353088 \cdot z^{-2}}.$$

8. ФНЧ, синтезированный из непрерывного ФНЧ методом билинейного преобразования [28],

$$H(z) = \frac{0,0815 \cdot (1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1,0308 \cdot z^{-1} + 0,3553 \cdot z^{-2}}.$$

9. ФНЧ Баттерворта [28] – частота дискретизации $f_d = 8000$ Гц, частота среза $f_{cp} = 500$ Гц, частота подавления $f_{под} = 2000$ Гц, пульсации в полосе пропускания 3 дБ, подавление в полосе задержки 20 дБ,

$$H(z) = \frac{0,02995 \cdot (1 + 2 \cdot z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1,4542 \cdot z^{-1} + 0,57408 \cdot z^{-2}}.$$

10. ФНЧ Баттерворта [28] – частота дискретизации равна $f_d = 256$ Гц, частота среза $f_{cp} = 60$ Гц, частота подавления $f_{под} = 110$ Гц, подавление в полосе задержки 15 дБ,

$$H(z) = \frac{0,1432 \cdot (1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3})}{1 - 0,1801 \cdot z^{-1} + 0,3419 \cdot z^{-2} - 0,0165 \cdot z^{-3}}.$$

11. ФНЧ Чебышева [28] — частота дискретизации равна $f_d = 10000$ Гц, частота среза равна $f_{cp} = 2500$ Гц, частота подавления $f_{под} = 2820$ Гц, пульсации в полосе пропускания 0,47 дБ,

$$H(z) = \frac{0,193441 + 0,3783311z^{-1} + 0,5241429z^{-2} + 0,3783311z^{-3} + 0,193441z^{-4}}{1 - 0,2516884z^{-1} + 1,054118z^{-2} - 0,240603z^{-3} + 0,1985961z^{-4}}.$$

12. ФНЧ [28] — частота дискретизации равна $f_d = 15000$ Гц, частота среза равна $f_{cp} = 3000$ Гц, частота подавления $f_{под} = 3450$ Гц, пульсации в полосе пропускания 0,5 дБ, подавление в полосе задержки 15 дБ,

$$H(z) = \frac{0,05846399 + 0,1359507z^{-1} + 0,1820979z^{-2} + 0,1359506z^{-3} + 0,05846398z^{-4}}{1 - 1,325263z^{-1} + 1,480202z^{-2} - 0,784109z^{-3} + 0,233927z^{-4}}.$$

13. ФНЧ с КИХ (нерекурсивный) — частота дискретизации $f_d = 18$ кГц, частота среза $f_{cp} = 5$ кГц = $0,2778 \cdot f_d$, см. [28],

$$H(z) = \sum_{k=0}^8 h_k z^{-k},$$

$$h_0 = h_8 = 0,072522627, \quad h_1 = h_7 = -0,111111111, \quad h_2 = h_6 = -0,059120987, \\ h_3 = h_5 = 0,31993169, \quad h_4 = 0,55555556.$$

14. ФНЧ [29] — частота среза f_{cp} равна одной десятой от частоты дискретизации f_d ($f_{cp} = 0,1 \cdot f_d$),

$$H(z) = \frac{0,0605 \cdot (1 + 2 \cdot z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1,194 \cdot z^{-1} + 0,436 \cdot z^{-2}}.$$

15. ФНЧ Чебышева 2-го порядка [29] — частота дискретизации равна $f_d = 100$ Гц, частота среза равна $f_{cp} = 20$ Гц, синтезирован из аналогового ФНЧ 2-го порядка,

$$H(z) = \frac{0,20482712 \cdot (1 + 2 \cdot z^{-1} + z^{-2})}{1 - 0,53153089 \cdot z^{-1} + 0,35083938 \cdot z^{-2}}.$$

16. ФНЧ Баттерворта – частота дискретизации $f_d = 1280$ Гц, частота среза $f_{cp} = 150$ Гц,

$$H(z) = \frac{0,325}{1 - 1,0308 \cdot z^{-1} + 0,3553 \cdot z^{-2}}.$$

17. ФНЧ Чебышева [29] – частота дискретизации равна $f_d = 100$ Гц, частота среза равна $f_{cp} = 20$ Гц, подавление в полосе задержки 10 дБ,

$$H(z) = \frac{0,2052743848 \cdot (1 + 2 \cdot z^{-1} + z^{-2})}{1 - 0,43278805 \cdot z^{-1} + 0,25171605 \cdot z^{-2}}.$$

18. ФНЧ Бесселя [30] – частота дискретизации $f_d = 1000$ Гц, частота среза $f_{cp} = 100$ Гц, частота подавления $f_{под} = 200$ Гц,

$$H(z) = \frac{1,431 \cdot 10^{-42} \cdot (1 + 3 \cdot z^{-1} + 3 \cdot z^{-2} + z^{-3})}{1 - 2,736808 \cdot z^{-1} + 2,501873 \cdot z^{-2} - 0,704498 \cdot z^{-3}}.$$

19. ФНЧ Баттерворта – частота дискретизации $f_d = 1280$ Гц, частота среза $f_{cp} = 150$ Гц,

$$H(z) = \frac{0,1625 \cdot (1 + z^{-1})}{1 - 1,0308 \cdot z^{-1} + 0,3553 \cdot z^{-2}}.$$

20. Полосовой фильтр (ПФ) [28] –

$$H(z) = \frac{0,00312 \cdot (1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1,8353 \cdot z^{-1} + 0,9748 \cdot z^{-2}}.$$

21. Режекторный фильтр (РФ) с КИХ (нерекурсивный) [28] – частота дискретизации $f_d = 1024$ Гц, частота среза $f_{cp} = 100$ Гц, частота подавления $f_{под} = 110$ Гц, подавление в полосе задержки 40 дБ, пульсации в полосе пропускания 0,05 дБ,

$$H(z) = \sum_{k=0}^5 h_k z^{-k},$$

$$h_0 = 0,0085342, \quad h_1 = 0,0686144, \quad h_2 = -0,3644075, \quad h_3 = 0,0014413, \\ h_4 = -0,405055, \quad h_5 = -0,3146294.$$

Порядок выполнения лабораторной работы № 5

Необходимо промоделировать линейный цифровой фильтр в соответствии с вариантом задания. При этом необходимо рассмотреть различные сочетания полезного сигнала и помехи, а именно:

1. Простое сочетание низкочастотной синусоиды как полезного сигнала и высокочастотной синусоиды как помехи.

2. Сочетание низкочастотной синусоиды как полезного сигнала и дискретного “белого шума” (*с моделированного при выполнении лабораторной работы №4*) в качестве помехи. При этом возможно рассмотреть помеху, имеющую нормальное распределение плотности вероятности, а также помехи, имеющие другие вероятностные распределения.

3. Сочетание несинусоидального низкочастотного периодического сигнала (*например, периодических знакопеременных прямоугольных импульсов, пилообразных периодических импульсов и т.п.*) с высокочастотными синусоидальными помехами. Важно, чтобы спектр полезного сигнала содержал и высокочастотные составляющие.

4. Сочетание непериодического полезного сигнала (*например, параболы, экспоненты, прямой линии и т.п.*) с высокочастотными синусоидальными помехами.

5. Сочетание непериодического полезного сигнала (*например, параболы, экспоненты, прямой линии и т.п.*) и дискретного “белого шума” (*с моделированного при выполнении лабораторной работы №4*) в качестве помехи. При этом важно рассмотреть помеху, имеющую, прежде всего, нормальное распределение плотности вероятности, а также помехи, имеющие другие вероятностные распределения.

Во всех вышеназванных случаях нужно определить качество восстановления формы сигнала и его амплитудных значений, а также оценить задержку по времени между полезным сигналом и его восстановленным значением. Следует учесть, что у периодических полезных сигналов задержка по времени выглядит как фазовый сдвиг.

Используя в качестве входных тестовых сигналов как единичный скачок, так и синусоиды с единичной амплитудой, но с частотами, равными $f_i = 1/(i \Delta t)$ (i – номер частоты, $i \in \{2; 3; \dots; N\}$, Δt – интервал дискретизации), построить амплитудную и фазовую характеристики цифрового фильтра [23].

ЛАБОРАТОРАЯ РАБОТА № 6

Линейное оптимальное оценивание (адаптивная фильтрация) цифровых сигналов

В этой лабораторной работе следует изучить особенности оптимального восстановления фазовых координат дискретного (*цифрового*) сигнала на основе неполных и неточных измерений. При этом в качестве фазовых координат сигнала предполагается рассматривать (как правило) сам скалярный сигнал и его производные по времени. Вместе фазовые координаты сигнала образуют **вектор фазовых координат** сигнала, называемый также **вектором состояния** сигнала. Неполные измерения называются так потому, что не все фазовые координаты сигнала доступны для измерения. Неточными измерения называют вследствие искажения их различными помехами.

Предполагается получить оптимальную текущую оценку (по критерию минимума среднего квадрата ошибки оценивания) вектора состояния сигнала на основе всех измерений от начального до текущего.

Линейная модель сигнала в этом случае описывается уравнением

$$X(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma w(k), \quad (6.1)$$

аналогичным уравнениям (3.5) и (4.24) (см. [17–20, 32, 33]), где $X(k)$ — вектор состояния фазовых координат дискретного сигнала (размерностью $n \times 1$); Φ — переходная матрица линейной модели нестационарного дискретного случайного процесса размерностью $n \times n$ (в общем случае это нестационарная матрица $\Phi = \Phi(k+1/k)$); $w(k)$ — дискретный стационарный случайный процесс с независимыми значениями (дискретный “белый шум”), центрированный (с нулевым математическим ожиданием), с интенсивностью Q , распределённый по гауссовскому закону распределения, размерностью $l \times 1$ (целые $n > l > 0$); Γ — матрица размерностью $n \times l$, согласующая размерности $X(k)$ и $w(k)$; $k, k+1$ — дискретные шаги по времени.

Начальное условие разностного уравнения (6.1) — гауссовский случайный вектор $X(0)$ с размерностью $n \times 1$, математическим ожиданием $m_x(0)$ и матрицей корреляционных моментов $D_x(0)$.

Линейное уравнение измерений сигнала (6.1) имеет вид

$$z(k) = hX(k) + v(k), \quad (6.2)$$

где $z(k)$ — вектор измерений дискретного сигнала (размерностью $m \times 1$, где $0 < m \leq n$); h — матрица в линейной модели измерения дискретного сигнала размерностью $m \times n$, которая показывает, какие координаты вектора состояний доступны для измерения; $v(k)$ — дискретный стационарный случайный процесс с независимыми значениями (дискретный “белый шум”), центрированный (с нулевым математическим ожиданием), с интенсивностью R , распределённый по гауссовскому закону, размерностью $m \times 1$.

Если воздействие $w(k)$ скалярно, как и измерение $z(k)$ ($l=m=1$), то матрицы Γ и h могут иметь вид

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

Критерий оптимальности J в текущий момент времени k :

$$J(k) = \min (M\{ e^T(k) \cdot \gamma(k) \cdot e(k) \}), \quad (6.3)$$

где $M\{ \dots \}$ — оператор математического ожидания, $\gamma(k)$ — произвольная положительно определённая весовая матрица размерности $n \times n$, а $e(k)$ — ошибка оценивания размерности $n \times 1$:

$$e(k) = X(k) - \hat{X}(k). \quad (6.4)$$

Здесь $\hat{X}(k)$ — оценка вектора состояния фазовых координат дискретного сигнала.

В силу того что измерения $z(k)$ могут быть неполными (не все фазовые координаты вектора состояния $X(k)$ могут быть доступны измерениям, $m < n$), возникает вопрос: «Всегда ли возможно фазовые координаты вектора состояний восстановить из измерений?». Для того чтобы однозначно установить возможность восстановления всего вектора состояния из координат вектора измерений, необходимо проверить **наблюдаемость** динамической системы. В соответствии с **критерием наблюдаемости динамической системы**, система (6.1)–(6.2) наблюдаема, если определитель **матрицы наблюдаемости** строго не равен нулю [18, 32–33]:

$$\begin{vmatrix} h \\ h\Phi \\ \vdots \\ h\Phi^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6.5)$$

Если динамическая система (6.1)–(6.2), описывающая состояния и измерения дискретного (цифрового) сигнала, наблюдаема, то текущая оптимальная оценка может быть вычислена в соответствие со следующим алгоритмом [17-18, 20, 32–33].

Прогноз вектора состояния с k -го на $(k+1)$ -й шаг вычисляется, исходя из (6.1):

$$\hat{X}(k+1/k) = \Phi \hat{X}(k). \quad (6.6)$$

Невязка измерения на $(k+1)$ -м шаге вычисляется из прогноза измерения $h\hat{X}(k+1/k)$:

$$\Delta z(k+1) = z(k+1) - h\hat{X}(k+1/k). \quad (6.7)$$

Оценка вектора состояния на $(k+1)$ -м шаге:

$$\hat{X}(k+1) = \hat{X}(k+1/k) + K(k+1) \cdot \Delta z(k+1). \quad (6.8)$$

Коэффициент линейного оптимального фильтра (вектор размерностью $n \times 1$):

$$K(k+1) = P(k+1/k) \cdot h^T \cdot (h \cdot P(k+1/k) \cdot h^T + R)^{-1}. \quad (6.9)$$

Матрица корреляционных моментов ошибок прогнозирования с k -го на $(k+1)$ -й шаг:

$$P(k+1/k) = \Phi P(k) \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T. \quad (6.10)$$

Матрица корреляционных моментов ошибок оценивания на $(k+1)$ -м шаге:

$$P(k+1) = P(k+1/k) - P(k+1/k) h^T \cdot (h P(k+1/k) h^T + R)^{-1} \cdot h P(k+1/k). \quad (6.11)$$

Начальные условия для (6.6) $\hat{X}(0) = m_X(0)$, а для (6.10), соответственно, $P(0) = D_X(0)$.

Алгоритм (6.6)–(6.11) для задачи (6.1)–(6.5) — это линейный дискретный оптимальный стохастический алгоритм оценивания, представляющий собой фильтр Стратоновича [34–35], чаще называемый фильтром Калмана [36–38] (см. рис.6.1).

Важно заметить, что предлагаемый алгоритм можно считать оптимальным в строгом смысле этого термина только в случае, если модель сигнала, задаваемая в алгоритме (6.6)–(6.11), прежде всего матрицами Φ , h и Γ , совпадает с моделью самого сигнала (6.1)–(6.2), задаваемого такими же матрицами. В противном случае алгоритм может считаться субоптимальным. Теоретически не менее важно совпадение матриц Q , R , $m_X(0)$ и $D_X(0)$ в (6.1)–

(6.2) с такими же матрицами в (6.6)–(6.11), однако на практике часто нет достоверной информации о какой-либо из них. В этом случае некоторые из достоверно не известных матриц Q , R , $m_x(0)$ и $D_x(0)$ в (6.6)–(6.11) задаются «исходя из предшествующего опыта». Матрицы Q и R могут зависеть от времени, так же как и Φ , h и Γ , то есть возможно $Q(k)$, $R(k)$, $\Phi(k+1/k)$, $h(k)$ и $\Gamma(k)$. При этом следует знать, что обнуление какой-либо из матриц Q , R и $D_x(0)$ (а порой и обнуление вектора $m_x(0)$) в модели алгоритма (6.6)–(6.11) недопустимо, так как ведёт к практической расходимости алгоритма. С теоретической же позиции такое обнуление невозможно, так как алгоритм (6.6)–(6.11) для (6.1)–(6.5) представляет собой существенно стохастический алгоритм. Случайный фактор в нём не является «усложнением» детерминированной части, а представляет собой неотъемлемую составляющую задачи и решающего эту задачу алгоритма.

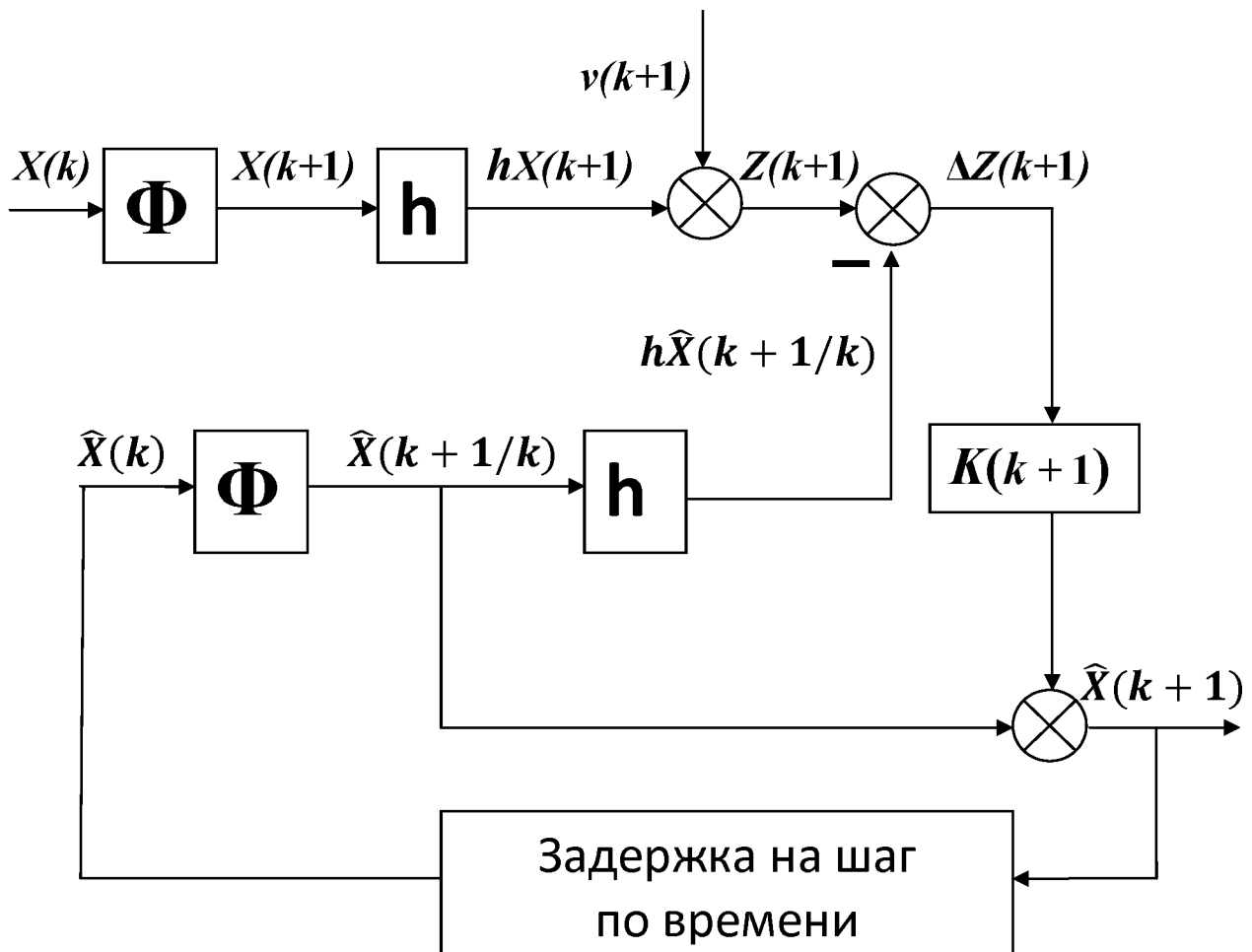


Рис. 6.1. Структурная схема линейного дискретного оптимального алгоритма оценивания фазовых координат цифрового сигнала.
Фильтр Калмана (Стратоновича)

Оптимальный линейный алгоритм (6.6)–(6.11) невозможен в случае детерминированной постановки задачи восстановления сигнала по неполным, но точным измерениям типа (6.1)–(6.2) с отсутствующим возмущением $w(k)$, отсутствующей помехой $v(k)$ и с отсутствующей неопределённостью начального состояния $X(0)$. Для решения такой детерминированной задачи существует иной алгоритм, так называемый детерминированный наблюдатель (см., например, [19, 39]).

Наряду с оптимальным по критерию (6.3) алгоритмом Стратоновича (Калмана), широко известен оптимальный алгоритм для стационарных случайных процессов, так называемый фильтр Винера [23, 40–42]. Когда рассматриваемые сигналы математически описываются как стационарные случайные процессы, критерий оптимальности (6.3) может быть заменён на критерий I , представляющий собой предел от $J(k)$:

$$I = \lim_{k \rightarrow \infty} J(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \min (M \{ e^T(k) \gamma(k) e(k) \}). \quad (6.12)$$

Таким образом, оптимальный по критерию (6.12) алгоритм должен давать качество алгоритма (6.6)–(6.11) в установившемся режиме. Исторически известны различные формы фильтра Винера, предшествовавшего фильтру Стратоновича (Калмана). Первоначально он синтезировался в скалярном виде, напомиравшем формирующий фильтр (4.23), рассмотренный в лабораторной работе №4, и частотные цифровые фильтры, исследуемые в лабораторной работе №5. В этом случае одна из возможных форм фильтра Винера может быть получена из уравнения:

$$W_{\text{ФВ}}(j\omega) \cdot W_{\text{ФВ}}(-j\omega) = \frac{S_{\Pi}(\omega)}{S_{\Pi}(\omega) + S_{\text{ш}}(\omega)}. \quad (6.13)$$

Здесь $W_{\text{ФВ}}(j\omega)$ есть передаточная функция фильтра Винера (6.13), $S_{\Pi}(\omega)$ есть спектральная плотность (энергетический спектр) полезного сигнала, $S_{\text{ш}}(\omega)$ есть спектральная плотность (энергетический спектр) помехи. Следует заметить, что энергетический спектр получают в результате преобразования корреляционной функции случайного процесса с помощью преобразования Фурье, согласно теореме Винера-Хинчина (см., например, [23]).

Уравнение (6.13) представлено в непрерывном виде, так как первоначально фильтр Винера был спроектирован для непрерывных систем. Как и в лабораторной работе №3, уравнение (6.13), представленные в нём спектральные плотности полезного сигнала $S_{\Pi}(\omega)$ и помехи $S_{\text{ш}}(\omega)$, как и соответствующая фильтру Винера передаточная функция $W_{\text{ФВ}}(p)$, могут быть

дискретизованы и представлены в цифровом скалярном виде в соответствии с соотношениями (3.1)–(3.12).

Возможна иная ситуация, когда для построения оптимального по критерию (6.12) алгоритма оценивания используются (6.6)–(6.11). В этом случае уравнения (6.6)–(6.7) остаются неизменными, а в уравнении (6.8) вместо вектора оптимальных переменных коэффициентов $K(k+1)$ используется вектор с постоянными коэффициентами $K_{СТ}$.

Если матрицы Φ , h , Γ , Q и R системы (6.1)–(6.2) постоянны и не зависят от времени, то коэффициенты $K(k+1)$ оптимального фильтра (6.9) стремятся к установившемуся значению. Установившийся векторный коэффициент $K_{СТ}$ линейного оптимального стационарного алгоритма оценивания может быть рассчитан по формуле

$$K_{СТ} = P_{ПР} h^T (h P_{ПР} h^T + R)^{-1}, \quad (6.14)$$

где $P_{ПР}$ — установившаяся матрица корреляционных моментов ошибок прогнозирования:

$$P_{ПР} = \Phi P_{ОЦ} \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T, \quad (6.15)$$

а $P_{ОЦ}$ — установившаяся матрица корреляционных моментов ошибок оценивания:

$$P_{ОЦ} = P_{ПР} - P_{ПР} h^T (h P_{ПР} h^T + R)^{-1} h P_{ПР}. \quad (6.16)$$

Возможно развязать уравнения (6.15)–(6.16) для вычисления $P_{ПР}$:

$$P_{ПР} = \Phi (P_{ПР} - P_{ПР} h^T (h P_{ПР} h^T + R)^{-1} h P_{ПР}) \cdot \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T. \quad (6.17)$$

Решение матричного алгебраического уравнения (6.17) позволит аналитически вычислить установившиеся значения коэффициентов в соответствии с (6.14).

Другой способ вычисления элементов установившегося векторного коэффициента $K_{СТ}$ состоит в непосредственном численном моделировании алгоритма (6.6)–(6.11).

В этом случае в качестве элементов вектора коэффициентов $K_{СТ}$ используются те соответствующие значения элементов вектора $K(k+1)$, которые перестают меняться с увеличением k . В итоге полученный алгоритм (6.6)–(6.7), (6.14) и (6.17) также будет оптимальным, но по критерию (6.12) (см. [32]), что соответствует концепции фильтра Винера.

Оптимальные алгоритмы (6.6)–(6.12) и (6.6)–(6.7), (6.14), (6.17) есть алгоритмы, приспособляющиеся к модели (6.1)–(6.2), поэтому их часто относят к адаптивным алгоритмам [31].

Порядок выполнения лабораторной работы № 6

Необходимо промоделировать линейный дискретный оптимальный стохастический алгоритм оценивания для сигнала, модель которого (в форме Коши) построена в лабораторной работе №3, в соответствии с индивидуальным вариантом задания.

I. В качестве помехи предлагается, в первую очередь, использовать гауссовский дискретный белый шум с интенсивностью R , промоделированный при выполнении заданий лабораторной работы №4. Случайное возмущение $w(k)$ допускается в целях упрощения не подключать к модели (6.1), оставляя ненулевую интенсивность возмущения Q в фильтре (6.6)–(6.11), то есть $Q > 0$. В этом случае алгоритм оценивания остаётся оптимальным. Изучить влияние Q , R , $m_X(0)$ и $D_X(0)$ на качество оценивания.

1. Требуется вычислить текущие оценки и ошибки оценивания всех фазовых координат вектора состояния сигнала. Следует построить совместные графики фазовых координат сигнала и их оценок, а также построить графики ошибок оценивания.

2. Необходимо вычислить аналитически и численно установившиеся коэффициенты оптимального фильтра, промоделировать оптимальный фильтр с установившимися коэффициентами и построить графики процессов аналогично п. I.1.

II. Следует сравнить друг с другом линейный цифровой фильтр из лабораторной работы №5 и оптимальный (или субоптимальный) линейный дискретный алгоритм оценивания из настоящей лабораторной работы №6, для чего нужно рассмотреть различные сочетания полезного сигнала и помехи, а именно:

1. Низкочастотная синусоида как полезный сигнал и дискретный “белый шум” в качестве помехи. При этом нужно рассмотреть помеху, имеющую нормальную плотность распределения, и помехи, имеющие другие распределения.

2. Синусоидальные низкочастотный полезный сигнала и высокочастотная помеха.

3. Сочетание несинусоидального низкочастотного периодического сигнала (*например, периодических знакопеременных прямоугольных импульсов, пилообразных периодических импульсов и т.п.*) с высокочастотными синусоидальными помехами. Важно, чтобы спектр полезного сигнала содержал и высокочастотные составляющие.

4. Сочетание непериодического полезного сигнала (*например, параболы, экспоненты, прямой линии и т.п.*) с высокочастотными синусоидальными помехами.

5. Непериодический полезный сигнал (*например, парабола, экспонента или прямая*) и дискретный “белый шум” как помеха. При этом важно рассмотреть помеху с нормальной плотностью распределения и помехи с другими распределениями.

При выполнении пп. II.1—II.5 настоящей лабораторной работы оптимальный алгоритм оценивания становится субоптимальным, так как модель помехи, а также модель сигнала не полностью соответствуют уравнениям (6.1)—(6.2). Важно исследовать чувствительность или, напротив, грубость алгоритма оценивания к нарушениям и несоответствиям моделей.

Во всех вышеназванных случаях нужно определить качество восстановления сигнала, длительность переходного процесса и ошибки оценивания, убедиться в отсутствии задержки по времени в установившемся режиме между полезным сигналом и его восстановленным значением (его оценкой).

В завершение исследований интересно рассмотреть сравнительные результаты статистических испытаний [21] двух разновидностей цифровых фильтров: фильтра частотной селекции и оптимального фильтра.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

Нелинейная цифровая фильтрация сигналов (нелинейное оценивание). Локально-оптимальное оценивание

В этой лабораторной работе следует изучить особенности восстановления фазовых координат и параметров дискретного (*цифрового*) сигнала на основе неполных и неточных измерений. Однако в качестве фазовых координат сигнала предполагается рассматривать не только сам скалярный сигнал и его производные по времени (как в лабораторной работе №6), но и возможные неизвестные (случайные) параметры сигнала. При этом, как и ранее, все вместе фазовые координаты сигнала образуют **вектор фазовых координат** сигнала (**вектор состояния** сигнала). Практически доступные измерения сигнала неполные (не все фазовые координаты сигнала доступны для измерения) и неточные (измерения искажены помехами, см. ЛР № 6). Однако в настоящей лабораторной работе вместо линейной математической модели сигнала в форме (6.1)–(6.2) исследуется уже **нелинейная** математическая модель. Для решения такой задачи нелинейного оценивания (нелинейной фильтрации) предлагается использовать разновидности алгоритмов нелинейной фильтрации, относящиеся к так называемым **локально-оптимальным** алгоритмам оценивания.

Нелинейная модель сигнала описывается уравнением

$$X(k+1) = f(X(k)) + G(w(k)), \quad (7.1)$$

где $X(k)$ — вектор состояния фазовых координат дискретного сигнала с размерностью $n \times 1$ (натуральное n), в который могут входить также и неизвестные (случайные) параметры сигнала; $f(X(k))$ — нелинейная вектор-функция размерностью $n \times 1$, отвечающая за переход вектора состояния $X(\dots)$ с k -го шага на $(k+1)$ -й шаг; $w(k)$ — дискретный стационарный случайный процесс с независимыми значениями (дискретный “белый шум”), центрированный (с нулевым математическим ожиданием), с интенсивностью Q , распределённый по гауссовскому закону, с размерностью $l \times 1$ (натуральное l), $n \geq l$; $G(w(k))$ — нелинейная вектор-функция размерностью $n \times 1$, зависящая от $w(k)$ и от шага по времени k . $G(w(k))$ аддитивно прибавлена к вектор-функции $f(X(k))$; $k, (k+1)$ — дискретные шаги по времени.

Начальное условие уравнения (7.1) — гауссовский случайный вектор $X(0)$ с размерностью $n \times 1$, математическим ожиданием $m_X(0)$ и матрицей корреляционных моментов $D_X(0)$.

Нелинейное уравнение измерений сигнала (7.1) имеет вид

$$z(k) = h(X(k)) + v(k), \quad (7.2)$$

где $z(k)$ – вектор измерений дискретного сигнала (размерностью $m \times 1$, $m > 0$, $n \geq m$); $h(X(k))$ – нелинейная вектор-функция измерения дискретного сигнала размерностью $m \times 1$, формирующая измерения из вектора состояний; $v(k)$ – дискретный стационарный случайный процесс с независимыми значениями (дискретный “белый шум”), центрированный (с нулевым математическим ожиданием), с интенсивностью R , распределённый по гауссовскому закону, размерностью $m \times 1$, такой же, как и у $z(k)$.

Критерий оптимальности J в текущий момент времени k (см.(6.3)–(6.4)):

$$J(k) = \min (M\{e^T(k) \cdot \gamma(k) \cdot e(k)\}), \quad (7.3)$$

где $M\{\dots\}$ – оператор математического ожидания, $\gamma(k)$ – произвольная положительно определённая весовая матрица размерности $n \times n$, а $e(k)$ – ошибка оценивания размерности $n \times 1$:

$$e(k) = X(k) - \hat{X}(k). \quad (7.4)$$

Здесь $\hat{X}(k)$ – оценка вектора состояния фазовых координат дискретного сигнала.

Как и в лабораторной работе № 6, измерения $z(k)$ могут быть неполными (не все фазовые координаты вектора состояния $X(k)$ могут быть доступны для измерения). Возможна ситуация, когда некоторые фазовые координаты нельзя восстановить из измерений и, чтобы однозначно установить возможность восстановления всех координат вектора состояния из измерений, необходимо проверить наблюдаемость нелинейной динамической системы. Критерием наблюдаемости нелинейной динамической системы следует считать утверждение: «Нелинейная динамическая система (7.1)–(7.2) наблюдаема, если определитель матрицы наблюдаемости строго не равен нулю» [33, 43]:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial X} \\ \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial f}{\partial X} \\ \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial X} \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (7.5)$$

Здесь производные вектор-функций $h(\cdot)$ и $f(\cdot)$ должны быть взяты в непрерывном, а не в дискретном времени (до дискретизации, см. ЛР №3 настоящего пособия).

Фактически критерий (7.5) проверяет на наблюдаемость линеаризованную модель нелинейной динамической системы (7.1)–(7.2).

В отличие от задачи линейного дискретного оценивания (см. ЛР №6 настоящего пособия), задача *нелинейного* дискретного оценивания не имеет общего оптимального решения. Таким образом, алгоритма, аналогичного линейному дискретному алгоритму оптимального оценивания (6.6)–(6.11), для нелинейных моделей нет [33–35, 43–45].

Для решения поставленной задачи нелинейного оценивания используют различные приближения (аппроксимации) нелинейных вектор-функций $h(\cdot)$ и $f(\cdot)$. При этом вместо линейного алгоритма оптимального оценивания используют различные [33, 45] **субоптимальные** алгоритмы нелинейного оценивания. Названные субоптимальные алгоритмы (см. ниже) формируются на основе структуры оптимального алгоритма с заменой ряда линейных составляющих на различные линеаризации (или иные аппроксимации) нелинейных компонент. В силу того что такие нелинейные алгоритмы синтезированы не путём прямой оптимизации, а путём некоторого рода подгонки линейного оптимального алгоритма под нелинейную модель, они имеют серьёзные недостатки. В первую очередь, для таких нелинейных алгоритмов характерна худшая (в сравнении с линейным алгоритмом) сходимость оценок к истинному значению. Начальное отклонение оценок фазовых координат от их истинных значений (**радиус сходимости**) у субоптимальных алгоритмов существенно ограничено, в то время как у оптимальных алгоритмов таких ограничений нет. По этой причине нелинейные субоптимальные алгоритмы называют **локально-оптимальными** [33].

Широко известная структура локально-оптимального дискретного алгоритма оценивания для наблюдаемой динамической системы (7.1)–(7.2) представлена ниже.

Это совокупность уравнений (7.6)–(7.11), напоминающая структуру (6.6)–(6.11):

Прогноз вектора состояния с k -го на $(k+1)$ -й шаг вычисляется, исходя из линеаризации нелинейной модели (7.1):

$$\hat{X}(k+1/k) = \frac{\partial f}{\partial X} \hat{X}(k). \quad (7.6)$$

Невязка измерения на $(k+1)$ -м шаге вычисляется из прогноза измерения $h(\hat{X}(k+1/k))$:

$$\Delta z(k+1) = z(k+1) - \frac{\partial h}{\partial X} \hat{X}(k+1/k). \quad (7.7)$$

Оценка вектора состояния на $(k+1)$ -м шаге вычисляется так же, как в (6.8):

$$\hat{X}(k+1) = \hat{X}(k+1/k) + K(k+1)\Delta z(k+1). \quad (7.8)$$

Коэффициент нелинейного субоптимального фильтра (вектор размерностью $n \times 1$)

$$K(k+1) = P(k+1/k) \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^T \left(\left(\frac{\partial h}{\partial X} \right) P(k+1/k) \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^T + R(k) \right)^{-1}. \quad (7.9)$$

Матрица корреляционных моментов ошибок прогнозирования с k -го на $(k+1)$ -й шаг

$$P(k+1/k) = \frac{\partial f}{\partial X} \cdot P(k) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right)^T + \Gamma Q \Gamma^T. \quad (7.10)$$

Матрица корреляционных моментов ошибок оценивания на $(k+1)$ -м шаге

$$P(k+1) = P(k+1/k) - K(k+1) \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right) \cdot P(k+1/k). \quad (7.11)$$

Начальные условия для (7.6) $\hat{X}(0) = m_X(0)$, а для (7.10), соответственно, $P(0) = D_X(0)$.

Здесь $m_X(0)$ – вектор математических ожиданий начальных значений оценок фазовых координат, а $D_X(0)$ – диагональная матрица дисперсий начальных значений оценок фазовых координат, элементы главной диагонали которой представляют собой квадраты разностей начальных значений фазовых координат и начальных значений оценок фазовых координат.

Производная $\frac{\partial f}{\partial X}$ есть квадратная матрица размерности $n \times n$ (так как является производной вектор-функции $f(X)$ по вектору X), а производная $\frac{\partial h}{\partial X}$ есть прямоугольная матрица размерности $m \times n$ (так как является производной вектор-функции $h(X)$ по вектору X).

Если производная $\frac{\partial f}{\partial X}$ представляет собой $\frac{\partial f(X_{оп}(k))}{\partial X_{оп}(k)}$, а производная $\frac{\partial h}{\partial X}$ представляет собой $\frac{\partial h(X_{оп}(k))}{\partial X_{оп}(k)}$, где $X_{оп}(k)$ – некоторая опорная траектория вектора $X(k)$, выбранная заранее, то тогда алгоритм (7.6)–(7.11) называется **линеаризованный фильтр Калмана (ЛФК)** [33, 44, 45].

Это один из самых простых нелинейных локально-оптимальных алгоритмов оценивания. Его достоинством является возможность заранее, до начала работы алгоритма в реальном времени, рассчитать коэффициенты по формулам (7.9)–(7.11). Это свойство роднит линеаризованный фильтр Калмана с оптимальным линейным дискретным фильтром (6.6)–(6.11).

Недостатком ЛФК является малый радиус сходимости нелинейных оценок фазовых координат к их истинным значениям, а также отсутствие общего для всех возможных ситуаций способа выбора опорной траектории $X_{on}(k)$.

Если же в уравнении (7.6) производная $\frac{\partial f}{\partial X}$ берётся по оценкам с k -го шага вектора состояния $\hat{X}(k)$ и представляет собой матрицу $\frac{\partial f(\hat{X}(k))}{\partial \hat{X}(k)}$, а в уравнениях (7.7)–(7.10) производные $\frac{\partial f}{\partial X}$ и $\frac{\partial h}{\partial X}$ берутся по текущим прогнозам вектора состояния на $(k+1)$ -й шаг $\hat{X}(k+1/k)$ и представляют собой матрицы $\frac{\partial f(\hat{X}(k+1/k))}{\partial \hat{X}(k+1/k)}$ и $\frac{\partial h(\hat{X}(k+1/k))}{\partial \hat{X}(k+1/k)}$, то тогда алгоритм (7.6)–(7.11) представляет собой популярный **расширенный фильтр Калмана (РФК)** [17, 33, 44, 45].

Расширенный фильтр Калмана использует наиболее естественную линеаризацию нелинейной модели (7.1)–(7.2) на каждом шаге k относительно текущих прогнозов $\hat{X}(k+1/k)$ с k -го шага на $(k+1)$ -й шаг и имеет существенно бóльший, по сравнению с ЛФК, радиус сходимости оценок фазовых координат к их истинным значениям. Это определяется влиянием на коэффициенты РФК новой информации, получаемой в реальном времени в виде текущих измерений $z(k)$, что улучшает точность текущих оценок. Однако вычислить заранее коэффициенты $K(k+1)$ невозможно, так как они зависят от текущих измерений, а расчёт в реальном времени матричных уравнений (7.9)–(7.11) достаточно затратен. Тем не менее РФК, благодаря, одновременно, как своей простоте, так и своей эффективности, является самым широко известным среди локально-оптимальных алгоритмов нелинейного оценивания (см. [17, 33, 44, 45]).

Увеличение точности оценок с РФК и увеличение радиуса сходимости РФК возможно путём более точной аппроксимации нелинейных вектор-функций $f(X(k))$ и $h(X(k))$. Если вместе с линейными членами в разложении $f(X(k))$ и $h(X(k))$ в ряд Тейлора использовать и квадратичные члены (то есть вместе с членами первого порядка использовать и члены второго порядка), то может быть синтезирован и так называемый **гауссовский фильтр второго порядка (ФВП)** [33, 44]. Расчёт коэффициентов ФВП (аналогичный расчёту коэффициентов по формулам (7.6)–(7.11)) производится по формулам, приведённым ниже.

Прогноз вектора состояния с k -го на $(k+1)$ -й шаг вычисляется как в [44]:

$$\hat{X}(k+1/k) = \frac{\partial f(\hat{X}(k))}{\partial \hat{X}(k)} \hat{X}(k) + \frac{\partial^2 [f(\hat{X}(k))]}{2 \cdot \partial [\hat{X}(k)]^2} : P(k), \quad (7.12)$$

где $\left[\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} : B \right]_{rs} = \text{tr} \left(\frac{\partial^2 A_{rs}}{\partial X^2} B \right)$.

Невязка измерения на $(k+1)$ -м шаге вычисляется из прогноза нелинейного измерения с учётом членов как 1-го, так и 2-го порядка, в разложении $h(X)$ в ряд Тейлора:

$$\Delta z(k+1) = z(k+1) - \frac{\partial h(\hat{X}(k+1/k))}{\partial \hat{X}(k+1/k)} \cdot \hat{X}(k+1/k) - \frac{\partial^2 [h(\hat{X}(k))]}{2 \cdot \partial [\hat{X}(k)]^2} : P(k+1/k). \quad (7.13)$$

Оценка вектора состояния на $(k+1)$ -м шаге вычисляется так же, как в (6.8) и в (7.8):

$$\hat{X}(k+1) = \hat{X}(k+1/k) + K(k+1) \cdot \Delta z(k+1). \quad (7.14)$$

Коэффициент нелинейного фильтра второго порядка (вектор размерностью $n \times 1$)

$$K(k+1) = P \left(k + \frac{1}{k} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^T \left(\left(\frac{\partial h}{\partial X} \right) P \left(k + \frac{1}{k} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial X} \right)^T + R(k+1) + \Psi(k+1) \right)^{-1}, \quad (7.15)$$

где, в данном случае, $\left(\frac{\partial h}{\partial X} \right) = \frac{\partial h(\hat{X}(k+1/k))}{\partial \hat{X}(k+1/k)}$, а $\Psi(k+1)$ – тензор, вычисляемый по формуле

$$\begin{aligned} \Psi(k+1) = & \frac{1}{4} \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 [h(\hat{X}(k+1/k))]}{\partial [\hat{X}(k+1/k)]_s \partial [\hat{X}(k+1/k)]_r} \times \\ & \times \{ [P(k+1/k)]_{si} [P(k+1/k)]_{rj} + [P(k+1/k)]_{sj} [P(k+1/k)]_{ri} \} \times \\ & \times \frac{\partial^2 [h(\hat{X}(k+1/k))]^T}{\partial [\hat{X}(k+1/k)]_i \partial [\hat{X}(k+1/k)]_j}. \end{aligned}$$

Матрица корреляционных моментов ошибок прогнозирования с k -го на $(k+1)$ -й шаг

$$P(k+1/k) = \frac{\partial f}{\partial X} P(k) \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right)^T + \Gamma Q \Gamma^T + \Xi(k), \quad (7.16)$$

а $\Xi(k)$ – тензор, вычисляемый по формуле

$$\Xi(k) = \frac{1}{4} \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 [f(\hat{X}(k))]}{\partial [\hat{X}(k)]_s \partial [\hat{X}(k)]_r} \times \\ \times \{ [P(k)]_{si} [P(k)]_{rj} + [P(k)]_{sj} [P(k)]_{ri} \} \times \frac{\partial^2 [f(\hat{X}(k))]^T}{\partial [\hat{X}(k)]_i \partial [\hat{X}(k)]_j}.$$

Матрица корреляционных моментов ошибок оценивания на $(k+1)$ -м шаге

$$P(k+1) = P(k+1/k) - K(k+1) \left(\frac{\partial h(\hat{X}(k+1/k))}{\partial \hat{X}(k+1/k)} \right) P(k+1/k). \quad (7.17)$$

Начальные условия для (7.12) $\hat{X}(0) = m_X(0)$, а для (7.16), соответственно, $P(0) = D_X(0)$, так же, как для (7.6) и для (7.10) у РФК.

Использование более точных аппроксимаций нелинейных вектор-функций у ФВП в сравнении с РФК позволяет существенно увеличить радиус сходимости локально-оптимального (субоптимального) алгоритма оценивания (см. [33, 44, 46]). Однако, как видно из уравнений (7.12)–(7.17), для одной и той же нелинейной модели ФВП существенно сложнее РФК, особенно с точки зрения вычислительных затрат. По этой причине члены в разложении нелинейных вектор-функций в ряд Тейлора более высоких порядков, нежели линейный и квадратичный, не используются для синтеза субоптимальных нелинейных алгоритмов (см. [33, 44, 45]).

Иная возможность повышения точности оценок нелинейными локально-оптимальными алгоритмами состоит в том, чтобы учитывать то обстоятельство, что вектор-функции $f(\hat{X}(k))$ и $h(\hat{X}(k+1/k))$ как в РФК, так и в ФВП зависят от текущих оценок и прогнозов вектора состояния. Таким образом, улучшение точности аппроксимаций $f(\dots)$ и $h(\dots)$ напрямую зависит от точности текущих оценок и прогнозов. В то же время точность самих текущих оценок и прогнозов зависит от точности аппроксимаций вышеназванных вектор-функций. В этом случае используется следующий приём:

1. На каждом $(k+1)$ -м шаге оценивания с помощью оценки с $(k+1)$ -го шага $\hat{X}(k+1)$ возможно сформировать *сглаженную* оценку на k -й шаг $\hat{X}(k/k+1)$ в обратном времени (линейные алгоритмы сглаживания см. в [18]).

2. На основе сглаженной оценки на k -м шаге по $(k+1)$ -му измерению $\hat{X}(k/k+1)$ формируется уточнённое значение вектор-функции $f(\hat{X}(k/k+1))$.

3. На основе уточнённого значения вектор-функции $f(\hat{X}(k/k+1))$, согласно уравнению (7.1) или уравнению (7.6), вычисляется уточнённый прогноз $\hat{X}_1(k+1/k)$. По уточнённому прогнозу $\hat{X}_1(k+1/k)$ вычисляется уточнённое значение вектор-функции $h(\hat{X}_1(k+1/k))$.

4. По уточнённому значению вектор-функции $h(\hat{X}_1(k+1/k))$ вычисляется уточнённая невязка измерения $\Delta z_1(k+1)$.

5. По невязке $\Delta z_1(k+1)$ вычисляется уточнённая оценка $\hat{X}_1(k+1)$.

Затем можно возвратиться к шагу (1) и провести новую, уже вторую уточняющую итерацию. Потом третью, четвёртую и так далее. Общее количество итераций определяется необходимой точностью оценок либо (на основе предшествующего опыта) фиксируется для всех случаев на конкретной, заранее заданной, величине.

Субоптимальные алгоритмы нелинейного оценивания такого типа имеют наименование **итерационные нелинейные фильтры** (ИНФ) [33, 44].

Повышение точности оценивания с помощью ряда последовательных уточняющих итераций на каждом шаге оценивания есть подход, дополняющий методы, на которых строятся РФК и ФВП. Если в РФК и ФВП осуществляются аппроксимации с точки зрения аналитического представления вектор-функций, то в ИНФ осуществляется последовательное уточнение аргументов этих вектор-функций – оценок и прогнозов вектора состояния дискретного сигнала.

В силу этого возможно сочетание этих методов и подходов, то есть возможны:

- а) ИНФ на основе РФК, уравнения которого приведены ниже;
- б) ИНФ на основе ФВП, который можно записать самостоятельно, аналогично п. а.

Прогноз вектора состояния с k -го на $(k+1)$ -й шаг вычисляется так:

$$\hat{X}^{(i)}(k+1/k) = \frac{\partial f(\hat{X}^{(i)}(k))}{\partial \hat{X}^{(i)}(k)} \hat{X}^{(i)}(k). \quad (7.18)$$

Невязка измерения на $(k+1)$ -м шаге вычисляется из прогноза измерения $h(\hat{X}^{(i)}(k+1/k))$:

$$\Delta z^{(i)}(k+1) = z(k+1) - \frac{\partial h(\hat{X}^{(i)}(k+1/k))}{\partial \hat{X}^{(i)}(k+1/k)} \hat{X}^{(i)}(k+1/k). \quad (7.19)$$

Оценка вектора состояния на $(k+1)$ -м шаге вычисляется аналогично (7.8) и (7.14):

$$\hat{X}^{(i)}(k+1) = \hat{X}^{(i)}(k+1/k) + K^{(i)}(k+1)\Delta z^{(i)}(k+1). \quad (7.20)$$

Коэффициент нелинейного субоптимального фильтра (вектор размерностью $n \times 1$)

$$K^{(i)}(k+1) = P^{(i)}(k+1/k) \left(\frac{\partial h(\hat{X}^{(i)}(k+1/k))}{\partial \hat{X}^{(i)}(k+1/k)} \right)^T \times \\ \times \left(\left(\frac{\partial h(\hat{X}^{(i)}(k+1/k))}{\partial \hat{X}^{(i)}(k+1/k)} \right) P^{(i)}(k+1/k) \left(\frac{\partial h(\hat{X}^{(i)}(k+1/k))}{\partial \hat{X}^{(i)}(k+1/k)} \right)^T + R(k+1) \right)^{-1}. \quad (7.21)$$

Матрица корреляционных моментов ошибок прогнозирования с k -го на $(k+1)$ -й шаг

$$P^{(i)}(k+1/k) = \frac{\partial f(\hat{X}^{(i)}(k))}{\partial \hat{X}^{(i)}(k)} P^{(i)}(k) \left(\frac{\partial f(\hat{X}^{(i)}(k))}{\partial \hat{X}^{(i)}(k)} \right)^T + \Gamma Q \Gamma^T. \quad (7.22)$$

Матрица корреляционных моментов ошибок оценивания на $(k+1)$ -м шаге

$$P^{(i)}(k+1) = P^{(i)}(k+1/k) - K^{(i)}(k+1) \left(\frac{\partial h(\hat{X}^{(i)}(k+1/k))}{\partial \hat{X}^{(i)}(k+1/k)} \right) P^{(i)}(k+1/k). \quad (7.23)$$

Начальные условия для (7.18) $\hat{X}^{(0)}(0) = m_X(0)$, а для (7.23) $P^{(0)}(0) = D_X(0)$.

Сглаженные оценки с $(k+1)$ -го на k -й шаг для каждой i -й итерации вычисляются по формуле (см. [33, 44, 47]):

$$\hat{X}^{(i)}(k/k+1) = \hat{X}^{(i)}(k) + P^{(i)}(k+1) \left(\frac{\partial f(\hat{X}^{(i)}(k))}{\partial \hat{X}^{(i)}(k)} \right)^T \left(\frac{\partial h(\hat{X}^{(i)}(k+\frac{1}{k}))}{\partial \hat{X}^{(i)}(k+\frac{1}{k})} \right)^T \times \\ \times \left(\left(\frac{\partial h(\hat{X}^{(i)}(k+1/k))}{\partial \hat{X}^{(i)}(k+1/k)} \right) P^{(i)}(k+1/k) \left(\frac{\partial h(\hat{X}^{(i)}(k+1/k))}{\partial \hat{X}^{(i)}(k+1/k)} \right)^T + R(k+1) \right)^{-1} \Delta z^{(i)}(k+1), \quad (7.24)$$

Количество итераций может быть задано фиксированным на каждом k -м шаге по времени с той целью, чтобы сделать одинаковыми вычислительные затраты на каждом шаге. Однако с позиции фиксированной точности оценок на каждом шаге следует прерывать итерационный процесс тогда, когда норма разности оценок на соседних итерациях (на i -й и на $(i-1)$ -й) станет меньше заданного фиксированного числа ε [33]:

$$\left\| \hat{X}^{(i)}(k+1) - \hat{X}^{(i-1)}(k+1) \right\| < \varepsilon, \quad (7.25)$$

где $\| \dots \|$ — оператор нормирования вектора, представляющий собой ту или иную свёртку вектора в скаляр.

Уравнения (7.18)–(7.24) описывают ИНФ на основе РФК. Аналогичный ИНФ может быть построен на базе ФВП.

Усложнение субоптимальных алгоритмов нелинейного оценивания РФК и ФВП за счёт введения итераций и связанного с этими итерациями кратного увеличения вычислительных затрат компенсируется повышением точности оценок и увеличением радиусов сходимости локально-оптимальных алгоритмов.

Порядок выполнения лабораторной работы № 7

Необходимо промоделировать описанные выше нелинейные субоптимальные фильтры в соответствии с вариантом задания. При этом необходимо использовать дискретные модели сигналов в пространстве состояний, полученные в результате дискретизации уравнений, большей частью повторяющих уравнения функций, заданных при выполнении лабораторной работы №3. В вектор состояния следует добавить в качестве дополнительных координат параметры движения, ранее считавшиеся известными. Так как изначально нелинейными являются только дифференциальные уравнения в 1-м и во 2-м вариантах представленных ниже заданий, а остальные варианты содержат уравнения полезных сигналов, сводящиеся к линейным дифференциальным уравнениям (см. лабораторную работу №3), то нелинейными математические модели сигналов становятся только после введения в вектор состояния случайных параметров сигналов в качестве дополнительных фазовых координат. В этом случае все математические модели сигналов становятся нелинейными, что позволяет исследовать точность оценивания, скорость сходимости и радиус сходимости субоптимальных нелинейных фильтров. Для упрощения исследований в заданиях предлагается использовать не уравнение с нелинейными измерениями (7.2), а линейное уравнение измерений $z(k) = h \cdot X(k) + v(k)$, как в лабораторной работе №6. Тогда нелинейной в математической модели будет только вектор-функция $f(X(k))$, что упростит моделирование, не исключая при этом возможности исследовать нелинейные локально-оптимальные алгоритмы. Следует применять сочетание нелинейного полезного сигнала и дискретного гауссовского “белого шума” в качестве помехи.

Порядок исследования нелинейных субоптимальных фильтров:

- а) **линеаризованный фильтр Калмана;**
 - б) **расширенный фильтр Калмана;**
 - в) **гауссовский фильтр второго порядка;**
 - г) **итерационный нелинейный фильтр (на базе РФК).**
- Дополнительно можно изучить **ИНФ на базе ФВП.**

Варианты задания для лабораторной работы № 7

Уравнения сигналов из 1-го и 2-го вариантов по своей форме являются нелинейными. Уравнения сигналов вариантов с 3-го по 14-й линейны, как и в заданиях к лабораторной работе №3. Однако в этой работе параметры, указанные в заданиях как *случайные*, следует включить в вектор состояния. В этом случае линейные модели для вариантов 3–14 станут нелинейными, так же как и в первых двух вариантах. Для определения радиуса сходимости следует постепенно увеличивать разницу между начальным состоянием $X(0)$ и его оценкой $\hat{X}(0)$, начиная со случайных параметров.

1) $\ddot{x}(t) = a - k \cdot \dot{x}^2$, где a и k – известные (заранее заданные) константы ($a \gg k > 0$);

2) $\ddot{x}(t) = a - C \cdot e^{-\frac{x(t)}{x_0}} \cdot \dot{x}^2(t)$, где a и C – известные (заранее заданные) константы ($a \gg C > 0$), $x_0 = x(0)$;

3) $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$, где ω – **случайный** параметр;

4) $x(t) = A \cdot e^{-\eta t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$, где η и ω – **случайные** параметры;

5) $x(t) = x_{см} + A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$, где ω – **случайный** параметр;

6) $x(t) = x_{см} - A \cdot e^{-\eta t}$, где η – **случайный** параметр;

7) $x(t) = x_{см} + A \cdot e^{-\eta t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$, где η и ω – **случайные** параметры;

8) $x(t) = A_\Omega \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi_\Omega) + A_\omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$, где Ω и ω – **случайные** параметры и $\Omega \ll \omega$;

9) $x(t) = v_0 \cdot t + x_{см} + A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$, где ω – **случайный** параметр;

10) $x(t) = A \cdot e^{-\eta t} + v_0 \cdot t + x_{см}$, где η – **случайный** параметр;

11) $x(t) = A_\eta \cdot e^{-\eta t} + A_\omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$, где η и ω – **случайные** параметры;

12) $x(t) = A_\eta \cdot e^{-\eta t} + x_{см} + A_\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$, где η и ω – **случайные** параметры;

13) $x(t) = x_{см} + v_0 \cdot t + A \cdot e^{-\eta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$, где η и ω – **случайные** параметры;

14) $x(t) = A \cdot t \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$, где ω – **случайный** параметр.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8

Разделённое оценивание.

Обработка сигналов, описываемых неаналитическими функциями. Каскадный принцип оценивания

Раздел 1. Алгоритмы разделённого оценивания

В этой лабораторной работе, как и в лабораторной работе № 7, следует изучить особенности по восстановлению фазовых координат дискретного (*цифрового*) сигнала на основе неполных и неточных измерений, но с помощью глобально-оптимальных алгоритмов.

Глобально-оптимальные алгоритмы оценивания ([33]) – это субоптимальные нелинейные алгоритмы оценивания (как правило), сходимость которых задаётся на конечных интервалах, имеющих размеры существенно бóльшие, чем радиусы сходимости рассмотренных выше (см. ЛР №7) *локально-оптимальных* алгоритмов оценивания. Таким образом, начальные значения фазовых координат и параметров сигнала могут быть заданы на весьма больших промежутках. Если у локально-оптимальных алгоритмов есть **фиксированное начальное условие** для вектора оценок, а **радиус сходимости** есть максимально допустимое отклонение начального значения координаты реального сигнала от начального значения оценки этой координаты, то, в свою очередь, у глобально-оптимальных алгоритмов начальные значения координат и/или параметров реального сигнала могут быть заданы в любой точке внутри определённого числового промежутка, размеры которого в несколько раз больше радиуса сходимости соответствующего этой задаче локально-оптимального алгоритма. Кроме этого, у глобально-оптимальных алгоритмов сходимость не зависит от реальных значений параметров и фазовых координат сигнала, в то время как у локально-оптимальных алгоритмов качество оценивания существенно снижается по мере приближения начального значения координаты реального сигнала к границе сходимости.

Такие преимущества глобально-оптимальных алгоритмов оценивания возможны, так как вместо *гауссовской* аппроксимации вектора начальных значений оценок фазовых координат и параметров сигнала (как в локально-оптимальных алгоритмах) используется *полигауссовская* аппроксимация [33]. То есть область равномерного распределения случайного параметра (или фазовой координаты) аппроксимируется взвешенной суммой нормальных (гауссовских) распределений $\mathcal{N}(m_{x_0,i}, \sigma_{x_0}^2)$ с одинаковыми дисперсиями $\sigma_{x_0}^2$, но с различными математическими ожиданиями $m_{x_0,i}$, которые с одинаковыми интервалами заполняют всю область распределения некоего случайного

параметра (или некоторой фазовой координаты). Весовые коэффициенты вышеназванной взвешенной суммы при такой аппроксимации принимают равными $\frac{1}{\mu}$, где μ – количество гауссовских функций $\mathcal{N}(m_{x_0,i}, \sigma_{x_0})$ в полигауссовской аппроксимации функции плотности распределения $p(x_0)$:

$$p(x_0) = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{\mu} \mathcal{N}(m_{x_0,i}, \sigma_{x_0}). \quad (8.1)$$

На основе аппроксимации (8.1) для задачи нелинейного оценивания (7.1)–(7.5) предлагается алгоритм, состоящий из набора локально-оптимальных фильтров. Название этого алгоритма – **парциальный алгоритм оценивания** (ПАО).

В этом случае i -й прогноз вектора состояния с k -го на $(k+1)$ -й шаг будет

$$\hat{X}_i(k+1/k) = F_i(k+1/k)\hat{X}_i(k), \quad (8.2)$$

где $F_i(k+1/k) = \frac{\partial f(\hat{X}_i(k))}{\partial \hat{X}_i(k)}$ (см. (7.6)), $i = \overline{1, \mu}$, а μ – количество парциальных гауссовских плотностей распределения.

Парциальные апостериорные оценки для каждого i -го фильтра вычисляются с учетом очередного поступившего измерения $Z(k+1)$:

$$\hat{X}_i(k+1) = \hat{X}_i(k+1/k) + K_i(k+1)\Delta Z_i(k+1), \quad (8.3)$$

где i -я невязка измерений $\Delta Z_i(k+1)$ вычисляется по формуле

$$\Delta Z_i(k+1) = Z(k+1) - h_i(k+1)\hat{X}_i(k+1/k), \quad (8.4)$$

причём $h_i(k+1) = \frac{\partial h(\hat{X}_i(k+1/k))}{\partial \hat{X}_i(k+1/k)}$.

Коэффициенты усиления в парциальных фильтрах (если в качестве ПАО использовать РФК) определяются как

$$K_i(k+1) = P_i(k+1/k)h_i^T(k+1)D_i^{-1}(k+1), \quad (8.5)$$

где $D_i(k+1)$ – i -я матрица корреляционных моментов ошибок измерений:

$$D_i(k+1) = h_i(k+1)P_i(k+1/k)h_i^T(k+1) + R(k+1), \quad (8.6)$$

а парциальные ковариационные матрицы ошибок прогнозирования

$$P_i(k + 1/k) = F_i(k + 1/k) P_i(k) F_i^T(k + 1/k) + Q_i(k), \quad (8.7)$$

причём матрица $Q_i(k)$ соответствует интенсивности шума возмущения в i -м фильтре.

Парциальные апостериорные ковариационные матрицы ошибок оценивания вычисляются по формуле

$$P_i(k + 1) = P_i(k + 1/k) - K_i(k + 1) h_i(k + 1) P_i(k + 1/k). \quad (8.8)$$

Вероятности гипотез о значениях параметров и/или начальных значениях фазовых координат вычисляются рекуррентно по формуле Байеса:

$$q_i(k) = \frac{q_i(k - 1) \Pi_i(k)}{\sum_{j=1}^{\mu} q_j(k - 1) \Pi_j(k)}. \quad (8.9)$$

Здесь $\Pi_i(k)$ — функции правдоподобия соответствующих гипотез, определяемые в гауссовском приближении как

$$\Pi_i(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\det(D_i(k))}} \exp\left(-\frac{1}{2} \Delta Z_i^T(k) D_i^{-1}(k) \Delta Z_i(k)\right), \quad (8.10)$$

где $\Delta Z_i(k)$ и $D_i(k)$ соответствуют формулам (8.4) и (8.6), но для k -го шага.

Начальные условия для парциальных оценок и ковариационных матриц задаются в виде $\hat{X}_i(0) = X_{0,i}$, $\hat{P}_i(0) = P_{0,i}$, где квадрат σ_{x_0} из (8.1) используется как дисперсия случайного начального значения фазовой координаты, для которой осуществляется полигауссовская аппроксимация (8.1).

Вероятности гипотез в начальный момент времени задаются в соответствии с имеющейся априорной информацией, как правило, одинаковыми:

$$q_i(0) = \frac{1}{\mu}. \quad (8.11)$$

Итоговые оценки вектора состояний $X(k)$ вычисляются как средние взвешенные суммы с весовыми коэффициентами, равными вероятностям гипотез [33, 48]:

$$\hat{X}(k) = \sum_{i=1}^{\mu} q_i(k) \cdot \hat{X}_i(k), \quad (8.12)$$

Следует заметить, что уравнения (8.2)–(8.8) описывают функционирование парциальных алгоритмов оценивания (нелинейных локально-оптимальных фильтров), а формулы (8.9)–(8.12) представляют собой уравнения алгоритма адаптации, изменяющего на основании текущих парциальных невязок измерений $\Delta Z_i(k)$ текущие вероятности гипотез $q_i(k)$ о том, какой из ПАО является наиболее точным (см. [33, 44]).

В качестве парциальных алгоритмов оценивания (рис. 8.1) могут быть выбраны любые из рассмотренных выше, в лабораторной работе №7, локально-оптимальных нелинейных алгоритмов. Так, вместо уравнений (8.2)–(8.8), описывающих РФК, могут быть представлены уравнения парциальных ЛФК, ФВП или ИНФ. Количество ПАО в алгоритме, обозначаемое как μ , может сильно меняться для одного и того же интервала распределения значений случайного параметра или фазовой координаты, так как количество нормальных распределений, используемых в (8.1), зависит от радиусов сходимости нелинейных локально-оптимальных алгоритмов. Усложнение ПАО чаще всего ведёт к увеличению его радиуса сходимости (см. [33, 46]), а значит, к уменьшению числа μ (к уменьшению количества ПАО). Объём вычислительных затрат следует определять экспериментально для каждой конкретной задачи. Предварительный теоретический прогноз в этом случае будет малодостоверным.

Представленные здесь алгоритмы типа (8.1)–(8.12) имеют название **алгоритмы разделённого оценивания (АРО)** (см. [44]). Так как используемые в АРО нелинейные ПАО являются субоптимальными, то и созданный на их основе АРО также является субоптимальным. Однако качественное улучшение сходимости, присущее алгоритму разделённого оценивания в силу того, что для любого конечного интервала распределения случайных параметров (или начальных значений фазовых координат) всегда может быть подобрано конечное количество парциальных фильтров, позволяющее решить поставленную задачу оценивания. По этой причине алгоритмы разделённого оценивания называют **глобально оптимальными** алгоритмами оценивания [33].

При этом следует знать, что каждой гауссовой кривой $\mathcal{N}(m_{x_0,i}, \sigma_{x_0})$ из полигауссовской аппроксимации случайного параметра может соответствовать или гауссовская, или полигауссовская аппроксимация начального значения фазовой координаты (см. [51]). В этом случае количество нелинейных ПАО следует увеличить с учётом новой аппроксимации.

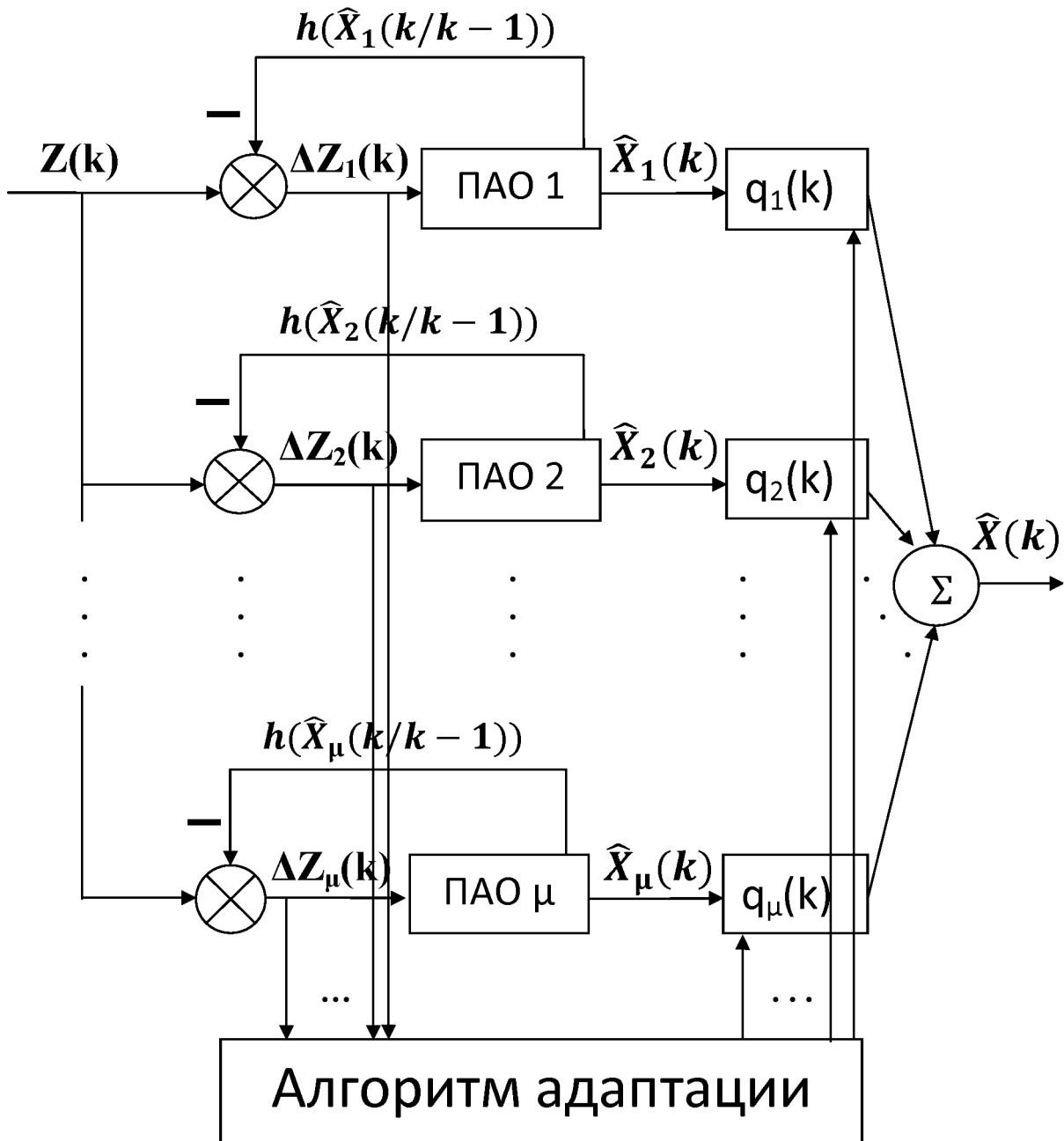


Рис. 8.1. Структурная схема алгоритма разделённого оценивания

Весьма важно отметить, что существует особая, оптимальная форма алгоритма разделённого оценивания. *Строго оптимальным* вышеназванный АРО может стать в случае, если вместо задачи нелинейного оценивания (7.1)–(7.5) ставится задача линейного оценивания фазовых координат и *случайного параметра* сигнала. При этом случайный параметр сигнала не распределён на непрерывном интервале, а принимает значения из конечного фиксированного набора, состоящего из μ заданных значений. В этом случае алгоритм адаптации остаётся прежним, то есть (8.9)–(8.12). В то же время вместо набора нелинейных локально-оптимальных ПАО (8.2)–(8.8) используют набор парциальных линейных фильтров Калмана (линейных дискретных

оптимальных алгоритмов оценивания) типа (6.6)–(6.11), каждый из которых настроен на конкретное фиксированное значение вышеназванного случайного параметра. Такой АРО, в отличие от всех АРО, рассмотренных выше, будет **строго оптимальным** по критерию минимума среднеквадратической ошибки оценивания (6.3)–(6.4) (см. [48]).

Порядок выполнения раздела 1 лабораторной работы № 8

Необходимо создать и промоделировать алгоритм разделённого оценивания для дискретного (цифрового) сигнала, модель которого в форме Коши построена в работе №7, в соответствии с индивидуальным вариантом задания. Предложенные в заданиях сигналы описываются линейными моделями со случайным параметром. Включение случайного параметра в вектор состояния сигнала (в вектор фазовых координат) сразу делает модель сигнала нелинейной. Предлагается синтезировать и исследовать разные АРО, изучив характер сходимости, работу алгоритма адаптации и вычислительные затраты каждого АРО. Границы изменения случайных параметров следует задать самостоятельно, исходя из соображений наглядности.

Порядок исследования нелинейных субоптимальных фильтров следующий:

- а) АРО, использующий набор **РФК**;
- б) АРО, использующий набор **ЛФК**;
- в) АРО, использующий набор **гауссовских ФВП**;
- г) АРО, использующий набор **ИНФ** (на базе РФК);
- д) дополнительно можно изучить АРО, использующий набор **ИНФ** (на базе ФВП).

Варианты задания для раздела 1 лабораторной работы № 8

(уравнения исследуемых сигналов)

- 1) $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$, где ω – **случайный** параметр;
- 2) $x(t) = x_{\text{см}} + A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$, где ω – **случайный** параметр;
- 3) $x(t) = x_{\text{см}} - A \cdot e^{-\eta t}$, где η – **случайный** параметр;
- 4) $x(t) = v_0 \cdot t + x_{\text{см}} + A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$, где ω – **случайный** параметр;
- 5) $x(t) = A \cdot e^{-\eta t} + v_0 \cdot t + x_{\text{см}}$, где η – **случайный** параметр;
- 6) $x(t) = A \cdot t \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$, где ω – **случайный** параметр.

Раздел 2. Обработка сигналов, описываемых неаналитическими функциями. Каскадный принцип оценивания

В этом разделе лабораторной работы №8 предлагается исследовать принцип обработки сигналов, описываемых *неаналитическими* функциями [21]. Этот принцип называется **каскадный принцип оценивания** (см. [49, 50]).

Каскадный принцип оценивания основан на идеях, впервые изложенных в [52]. Суть этого принципа оценивания фазовых координат вектора состояния цифрового сигнала на основании неполных и неточных измерений состоит в том, что не всегда сигнал может быть описан какой-либо *аналитической* моделью, вроде линейных моделей, исследованных в лабораторных работах № 3, № 5 и № 6, а также вроде нелинейных моделей, рассмотренных в лабораторных работах № 7 и № 8 (раздел 1). Сигнал может быть точно описан с помощью существенно *неаналитической* модели, то есть с помощью *неаналитических функций* [21]. При этом важно заметить, что эта ситуация может возникнуть, если динамику сигнала (в силу его природы) невозможно точно описать аналитическими функциями. Оказывается, что все описанные выше методы фильтрации (оценивания) цифровых сигналов не дают достаточно точного (*оптимального либо субоптимального*) решения и не могут быть применены непосредственно. Допускается использование всех вышеназванных алгоритмов фильтрации (или алгоритмов оценивания) лишь при использовании **приближённой** (весьма неточной, грубой) аналитической аппроксимации. На базе этой грубой аппроксимации синтезируется линейный оптимальный или нелинейный субоптимальный алгоритм оценивания, как в работах № 5-7 и № 8 (раздел 1). На выходе такого алгоритма формируются текущие оценки фазовых координат вектора состояния цифрового сигнала, порой недостаточно точные, существенно неоптимальные по критерию оптимизации, названному выше. Итоговые оценки могут быть улучшены (уточнены) при учёте строго однозначной связи между неаналитическими функциями и их аналитическими аппроксимациями [52, 49, 50].

В настоящем разделе каскадный принцип оценивания используется для оценивания периодических несинусоидальных сигналов. Эта задача для заранее известной частоты периодического движения решена в [52]. При этом использованы линейные аналитические аппроксимации неаналитических периодических функций и *гауссовские* аппроксимации случайных начальных значений фазовых координат.

Если же частота периодического несинусоидального сигнала **случайна**, то есть заранее не известна, то её решение представлено в [49, 50]. В этом

решении использованы нелинейные аналитические аппроксимации неаналитических периодических функций и *полигауссовские* аппроксимации случайных параметров и случайных начальных значений фазовых координат.

В случае известной частоты сигнала каскадный алгоритм строится на базе линейного оптимального дискретного фильтра Калмана (Стратоновича), построенного с помощью линейных аналитических аппроксимаций, описываемого уравнениями (6.6)–(6.11) и изучаемого при выполнении лабораторной работы № 6.

В случае же неизвестной частоты сигнала каскадный алгоритм строится на базе нелинейного субоптимального алгоритма разделённого оценивания, построенного с помощью вышеназванных нелинейных аналитических и полигауссовских аппроксимаций. Парциальные локально-оптимальные составляющие (7.6)–(7.17) и (7.18)–(7.25) этого алгоритма изучены в лабораторной работе №7, а сам глобально-оптимальный алгоритм разделённого оценивания (8.1)–(8.12) рассмотрен в 1-м разделе настоящей лабораторной работы.

Общий смысл каскадного принципа оценивания отражён на рис. 8.2.

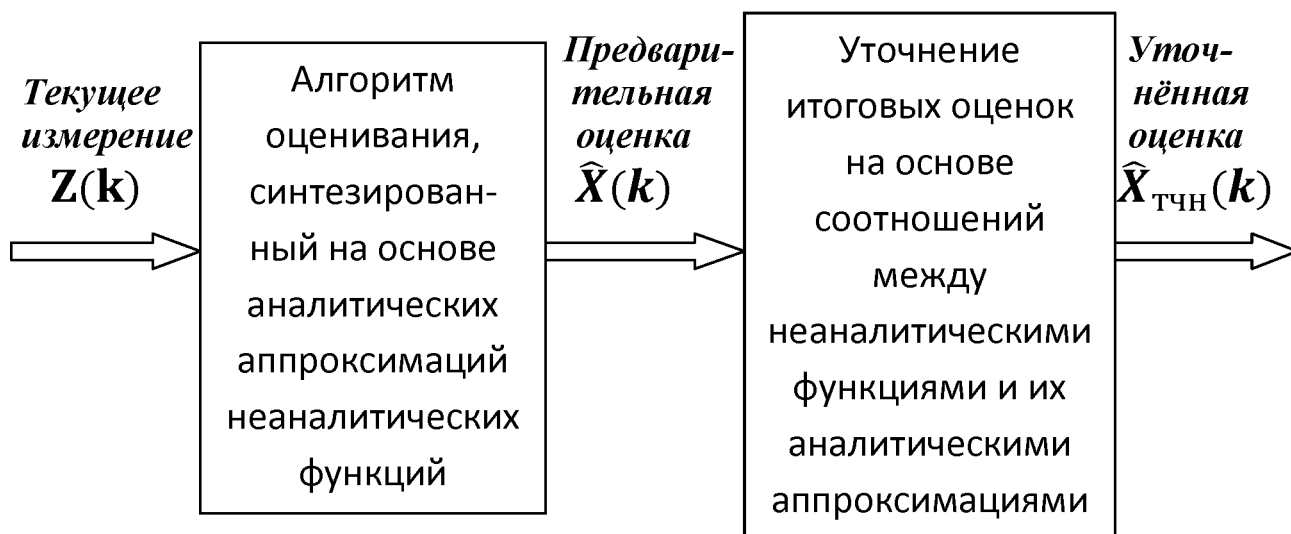


Рис. 8.2. Каскадный принцип оценивания

Например, исследуется заданная ниже (вариант 1) неаналитическая периодическая функция Радемахера [14]:

$$x(t) = \text{sgn}(\sin(\omega \cdot t)), \quad (8.13)$$

где $\text{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \\ -1, & u < 0 \end{cases}$ (см. [21]).

Так как функция Радемахера представляет собой периодические переключки, то есть она периодически меняется с +1 на -1 через 0 синхронно с изменением знака синусоиды той же частоты, то она является неаналитической функцией (поскольку не имеет производной в точках разрыва, в которых эта функция меняет свой знак).

В качестве аналитической аппроксимации функции Радемахера естественно выбрать синусоиду с тем же периодом T (частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$)

$$x_1(t) = \frac{4}{\pi} \sin(\omega t), \quad (8.14)$$

которая является первым ненулевым членом в разложении функции $x(t)$ в ряд Фурье:

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega(2k-1)t)}{2k-1}. \quad (8.15)$$

При этом (если известен период синусоиды) может быть построен дискретный фильтр Калмана (Стратоновича) 2-го порядка для линейной модели типа (6.1)–(6.5) из лабораторной работы № 6.

Уточнённые дискретные оценки $\hat{x}_{\text{ТЧН}}(k)$ вычисляются из текущих оценок $\hat{x}(k)$ в данном случае по формуле

$$\hat{x}_{\text{ТЧН}}(k) = \begin{cases} 1, & \hat{x}(k) > 0, \\ 0, & \hat{x}(k) = 0, \\ -1, & \hat{x}(k) < 0. \end{cases} \quad (8.16)$$

Этот простейший приём показывает принцип, по которому следует выполнять задания в соответствии с заданными ниже вариантами.

Если неизвестен период аппроксимирующей синусоиды, который принимается случайным, то (после включения частоты ω в вектор состояния) может быть создан дискретный локально-оптимальный алгоритм оценивания 3-го порядка типа тех, что описаны формулами (7.6)–(7.23) для нелинейной модели типа (7.1)–(7.5) из лабораторной работы №7. Также для нелинейной модели типа (7.1)–(7.5) может быть синтезирован глобально-оптимальный алгоритм разделённого оценивания (8.1)–(8.12).

Полученные на выходе этих нелинейных субоптимальных алгоритмов текущие оценки $\hat{x}(k)$ могут быть использованы для расчёта уточнённых оценок $\hat{x}_{\text{ТЧН}}(k)$ по той же формуле (8.16), что и для случая с линейной аппроксимацией.

Используя проиллюстрированный в (8.13)–(8.16) пример, следует выполнить задания ко 2-му разделу настоящей лабораторной работы в соответствии с данными ниже вариантами.

Порядок выполнения раздела 2 лабораторной работы № 8

1. Осуществить в соответствии с вариантом задания аналитическую аппроксимацию заданной периодической неаналитической функции с помощью ряда Фурье. Выполнить аппроксимацию периодической составляющей неаналитической функции первой гармоникой.
2. Считая частоту сигнала известной, построить линейную дискретную стохастическую модель сигнала типа (6.1)–(6.5). Синтезировав оптимальный дискретный алгоритм оценивания типа (6.6)–(6.11) для фильтрации входного дискретного сигнала $z(k)$, получить для линейного приближения оценки вектора состояний $\hat{X}(k)$. Вычислить уточнённые оценки фазовых координат вектора состояний $\hat{X}_{\text{ТЧН}}(k)$.
3. Принимая частоту сигнала неизвестной (случайной), включить её в вектор состояния и построить для аппроксимации нелинейную дискретную стохастическую модель сигнала типа (7.1)–(7.5). Синтезировав один из локально-оптимальных дискретных алгоритмов, представленных в (7.6)–(7.23), выполнить нелинейную фильтрацию входного цифрового сигнала $z(k)$ и получить новые $\hat{X}(k)$ и $\hat{X}_{\text{Точн}}(k)$.
4. Осуществить действия, описанные в п. 3, но используя созданный глобально-оптимальный алгоритм типа (8.1)–(8.12). Сравнить полученные результаты.

Варианты задания для раздела 2 лабораторной работы № 8

1. Функция Радемахера:

$$x(t) = \text{sgn}(\sin(\omega \cdot t)), \text{ где } \text{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \\ -1, & u < 0. \end{cases}$$

2. Антисимметричная пилообразная функция с симметричными полуволнами и с периодом, значительно меньшим, чем интервал наблюдения:

$$x(t) = \arcsin(\sin(\omega \cdot t)).$$

3. Периодически возрастающая пилообразная функция с несимметричными полуволнами и с периодом много меньшим, чем интервал наблюдения:

$$x(t) = \arctg(\text{tg}(\omega \cdot t)).$$

4. Периодическая функция с участками пилообразного возрастания и с нулевыми (постоянными) участками, с периодом много меньшим, чем интервал наблюдения:

$$x(t) = \arcsin(\sin(\omega \cdot t)) + \arctg(\text{tg}(\omega \cdot t)).$$

5. Антисимметричная пилообразная функция с симметричными полуволнами и с периодом много меньшим, чем интервал наблюдения:

$$x(t) = \arcsin(\sin(\omega \cdot t)) + \text{sign}(\sin(\omega \cdot t)).$$

6. Периодически возрастающая пилообразная функция с периодическими разрывами и с периодом много меньшим, чем интервал наблюдения:

$$x(t) = 3 \cdot \arctg(\text{tg}(\omega \cdot t)) + 5 \cdot \text{sign}(\sin(\omega \cdot t)).$$

7. Антисимметричная периодическая функция с симметричными полуволнами, то есть симметрично «отодвинутая» от оси абсцисс синусоида с периодом много меньшим, чем интервал наблюдения:

$$x(t) = \sin(\omega \cdot t) + \text{sign}(\sin(\omega \cdot t)).$$

8. Пилообразная периодическая функция с симметричными полуволнами с периодом много меньшим, чем интервал наблюдения:

$$x(t) = \arccos(\cos(\omega \cdot t)).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Котельников В.А.* О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи // Всесоюзный энергетический комитет. Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности, 1933. Репринт статьи в журнале УФН, 176:7 (2006). С.762—770.
2. *Nyquist H.* Certain topics in telegraph transmission theory //Trans. AIEE. V.47, Apr. 1928. P. 617—644.
3. *Shannon C.E.* A Mathematical Theory of Communication // Bell System Technical Journal. 1948. T.27. P. 379—423, 623—656.
4. *Whittaker E.T.* On the Function which was Represented by the Expansion of Interpolation-Theory // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1914. V.35. Pt. 2.
5. *Borel E.* Leçons sur la théorie des fonctions. Paris, Gauthier-Vilars et fils. 1898. — 136 p.
6. *Задирака В.К.* Теория вычисления преобразования Фурье. — Киев: Наукова думка, 1983. — 214 с.
7. *Васильев В.Н., Гуров И.П.* Компьютерная обработка сигналов в приложении к интерферометрическим системам. — СПб.: БХВ-Санкт-Петербург, 1998. — 240 с.
8. *Ahmed X., Rao K.R.* Discrete Fourier and Hadamar Transform // Electronic Letters. 6 (1970). P. 221—224.
9. *Брейсуэлл Р.* Преобразование Хартли. — М.: Мир, 1990. — 176 с.
10. *Ahmed N., Natarajan N., Rao K.R.* Discrete Cosine Transform. // IEEE Trans. of Computers. C-23 (1974). P. 90—93.
11. *Chan S., Ho K.* Direct Methods for Computing Discrete Sinusoidal Transforms // IEE Proc. 137 (1990). P. 433-442.
12. *Пушел М., Моура Ж.М.Ф.* Алгебраический подход к дискретным косинусным и синусным преобразованиям и их быстрым алгоритмам / Пер. с англ. Вашкевича М.И. (*M. Pushel, J.M.E. Moura* The Algebraic Approach to the Discrete Cosine and Sine Trans-forms and their Fast Algorithmus // *SIAM J. of Computing*, 2003, V.32. No 5. P.1280—1316).
13. *Cooley J.W. et al.:* The Finite Fourier Transform // IEEE Trans. Audio and Electronics. AU-17 (1969). P.77—85.
14. *Голстов Г.П.* Ряды Фурье. — М.: Наука, 1980. — 381 с.
15. *Зигмунд Э.* Тригонометрические ряды, Т.1,2. — М.: Мир, 1965.
16. *Штарк Г.Г.* Применение вейвлетов для ЦОС. — М.: Техносфера, 2007. — 192 с.
17. *Лебедев А.А., Бобронников В.Т., Красильщиков М.Н., Малышев В.В.* Статистическая динамика и оптимизация управления летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1985. — 280 с.

18. *Брайсон А., Хо Ю-ши* Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972. – 544 с.
19. *Куо Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления». – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
20. *Острём К., Виттенмарк Б.* Системы управления с ЭВМ. – М.: Мир, 1987. – 480с.
21. *Корн Т., Корн. Г.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1973. – 831 с.
22. *Шрайбер Т.Дж.* Моделирование на GPSS. – М.: Машиностроение, 1980. – 592 с.
23. *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2002. – 608 с.
24. *Солонина А.В., Улахович Д.А., Арбузов С.М., Соловьёва Е.Б., Гук И.И.* Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 608 с.
25. *Рабинер Л., Роулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
26. *Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д.* Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. – СПб.: Политехника, 2000. – 592 с.
27. *Фриск В.В.* Основы теории цепей: Учеб. пособие – М.: ИП РадиоСофт, 2002. - 288 с.
28. *Айфичер Э.С., Джервис Б.У.* Цифровая обработка сигналов. Практический подход. – М.: Вильямс, 2004. – 992 с.
29. *Лайонс Р.* Цифровая обработка сигналов. – М.: Бином, 2007. – 656 с.
30. *Остапенко А.Г., Сушков А.Б., Бутенко В.В., Акимов В.И., Завадовский А.З.* Рекурсивные фильтры на микропроцессорах. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
31. *Грант П.М., Коуэн К.Ф.Н., Фриденлер Б., Трейчлер Д.Р., Тернер Д.М., Феррара Э.Р., Адамс П.Ф.* Адаптивные фильтры. – М.: Мир, 1988. – 392 с.
32. *Петров А.И., Зубов А.Г., Стецко Г.О.* Учеб. пособие к лабораторным работам «Стохастические системы управления». – М.: Издательство МАИ, 1991. – 40 с.
33. *Петров А.И., Зубов А.Г.* Оценивание в стохастических системах управления: Учеб. пособие. – М.: Издательство МАИ, 1993. – 65 с.
34. *Стратонович Р.Л.* Оптимальные нелинейные системы, осуществляющие выделение сигнала с постоянными параметрами из шума // Известия вузов СССР, серия «Радиофизика». 1959. Т.2. С. 862–901.
35. *Стратонович Р.Л.* К теории оптимальной нелинейной фильтрации случайных функций // Теория вероятностей и её применение. 1959. Т.4. № 2.

36. *Kalman R.* A new approach to linear filtering and prediction problems // Trans. of the ASME, J. Basic Eng. 1960. V. 82D.
37. *Kalman R.* New methods and results in linear prediction and filtering theory. – Bladmore, RIAS Tech. Rep. 1961. – P. 1–61.
38. *Kalman R., Bucy R.* New results in linear filtering and prediction theory// ASME, J. Basic Eng.. March, 1961. V. 83.
39. *Браммер К., Зиффлинг Г.* Детерминированное наблюдение и стохастическая фильтрация. – М.: Наука, 1982. – 199 с.
40. *Хинчин А.Я.* Теория корреляции стационарных стохастических процессов // Успехи математических наук. 1938. Вып. 5.
41. *Колмогоров А.Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Известия АН СССР, серия математическая. 1941. № 5.
42. *Wiener N.* The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. – N.Y., Wiley, 1949.
43. Справочник по теории автоматического управления // Под редакцией А.А. Красовского. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 712 с.
44. *Сэйдж Э., Мелс Дж.* Теория оценивания и её применение в связи и управлении. – М.: Радио и связь, 1976. – 496 с.
45. *Соренсон Г.* Обзор методов фильтрации и стохастического управления в динамических системах //Фильтрация и стохастическое управление / Под ред. К.Т. Леондеса. М.: Мир, 1980. С. 74–122.
46. *Зубов А.Г., Новиков П.В., Петров А.И.* Оценивание в стохастических системах при возмущениях, имеющих периодические составляющие // Известия РАН. Теория и системы управления. 1995, № 4. С. 58–66.
47. *Дмитриев С.П., Шимелевич Л.И.* Нелинейные задачи обработки навигационной информации// Зарубежная радиоэлектроника. 1976. №3. С.3-28.
48. *Лайниотис Д.Г.* Разделение – единый метод построения адаптивных систем. Часть I. Оценивание // ТИИЭР. Т.64. 1967. № 8. С. 1–27.
49. *Зубов А.Г., Новиков П.В., Петров А.И.* О задаче оценивания периодических возмущений // Известия РАН. Теория и системы управления. 1997. № 4. С. 21–28.
50. *Zubov A.G., Novikov P.V. and Petrov A.I.* On the Estimation Problem of Periodic Perturbations.// *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 1997. V. 36. No. 4. P. 516–523.
51. *Новиков П.В.* Субоптимальный адаптивный алгоритм нелинейного оценивания периодических движений // Межвузовский сборник научных трудов «Приборостроение». Пермь: ППИ, 1990. С. 116–124.
52. *Новиков П.В.* Алгоритм оценивания периодических движений, описываемых неаналитическими функциями // Межвузовский сборник научных трудов «Приборостроение». Пермь: ППИ, 1991. С. 74–83.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ СОКРАЩЕНИЙ.....	4
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1. Восстановление непрерывных сигналов по дискретным измерениям. Теорема Котельникова	5
Варианты задания для лабораторной работы № 1.....	6
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2. Исследование дискретных тригонометрических преобразований.....	9
Варианты задания для лабораторной работы № 2.....	14
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3. Дискретизация линейных уравнений непрерывных сигналов, представленных в различных формах.....	21
Варианты задания для лабораторной работы № 3.....	24
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4. Моделирование случайных процессов с заданными характеристиками.....	25
Часть 1. Моделирование случайных чисел с заданным законом распределения	25
Часть 2. Моделирование случайных чисел с заданными спектральными характеристиками.....	30
Часть 3. Моделирование линейных нестационарных дискретных случайных процессов.....	30
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5. Линейная цифровая фильтрация сигналов в частотной области.....	33
Варианты импульсных передаточных функций цифровых линейных фильтров низкой частоты (рекурсивных БИХ и нерекурсивных КИХ)....	36
Порядок выполнения лабораторной работы № 5.....	40
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6. Линейное оптимальное оценивание (адаптивная фильтрация) цифровых сигналов.....	41
Порядок выполнения лабораторной работы № 6.....	47
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7. Нелинейная цифровая фильтрация (нелинейное оценивание) сигналов. Локально-оптимальное оценивание	49
Порядок выполнения лабораторной работы № 7.....	58
Варианты задания для лабораторной работы № 7.....	59
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8. Разделённое оценивание. Обработка сигналов, описываемых неаналитическими функциями. Каскадный принцип оценивания.....	60
Раздел 1. Алгоритмы разделённого оценивания.....	60
Порядок выполнения раздела 1 лабораторной работы № 8.....	65
Варианты задания для раздела 1 лабораторной работы № 8.....	65
Раздел 2. Обработка сигналов, описываемых неаналитическими функциями. Каскадный принцип оценивания.....	66
Порядок выполнения раздела 2 лабораторной работы № 8.....	69
Варианты задания для раздела 2 лабораторной работы № 8.....	70
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	71

Тем. план 2019, ч. 2, поз. 5

Новиков Павел Владимирович

СИСТЕМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Редактор *Е.Л. Мочина*

Компьютерная вёрстка *П.В. Новикова*

Подписано в печать 09.10.2019
Бумага писчая. Формат 60x84 1/16 Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4,42. Уч.-изд. л. 4,75. Тираж 100 экз.
Заказ 1048/732

Издательство МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4,
Москва, А-80, ГСП-3 125993

Отпечатано с готового оригинал-макета

Типография Издательства МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4,
Москва, А-80, ГСП-3 125993