

О.Ф. ШЛЁНСКИЙ,
С.И. АНТОНОВ,
К.В. ХИЩЕНКО

НЕРАВНОВЕСНАЯ АКУСТИКА

Москва
Инновационное машиностроение
2021

УДК 536.46+662.42

ББК 24.54:35.63

Ш 68

Рецензенты: В. М. Аристов, доктор физ.-мат. наук,
проф. РХТУ им. Д.И. Менделеева
Т. Б. Крит, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник
МГУ им. М.В. Ломоносова

Шлёнский О.Ф., Антонов С.И., Хищенко К.В.

Ш 68 Неравновесная акустика. — М.: Инновационное машино-
строение, 2021. — 124 с., ил.

ISBN 978-5-907104-41-9

Предложена новая модель распространения звука и ударных волн впервые с учетом массовых сил, анизотропии свойств газа, приобретаемой при возбуждении генератором, и релаксационных процессов перехода к равновесному состоянию.

В настоящее издание внесены коррективы и дополнения в теорию звуковых волн для повышения качества проектирования акустических объектов, устройств и инструментов, точности моделирования гиперзвуковых и детонационных процессов.

Для научных работников и инженеров, специализирующихся в области физики звука.

УДК 536.46, 662.42

ББК 24.54:35.63

ISBN 978-5-907104-41-9

© О.Ф. Шлёнский,
С.И. Антонов,
К.В. Хищенко, 2021

© ООО «Издательство «Инновационное
машиностроение», 2021

Нет, ребята, всё не так,
Всё не так, ребята..

В.С. Высотский

Предисловие

Математический аппарат традиционной акустики соединяет в себе многие упрощения и допущения, сделанные ее основателем Джоном Уильямом Стреттом лордом Рэлеем и его последователями. Волновые дифференциальные уравнения ранее упрощали с целью получать простые аналитические решения акустических задач, не считаясь со снижением точности результата в ущерб его физической корректности. Допускалось принимать волновые процессы термодинамически равновесными, свойства сред неизменными во времени. Физики считали плотность среды и давление скалярными величинами, бегущую волну описывали однородным уравнением, газ представляли изотропным, массовой силой пренебрегали и т.п.

Развитие техники гиперзвуковых полетов, изучение термоядерной детонации, лазерных технологий поставило перед акустикой проблему моделирования бегущих волн со скоростями до тысячи километров в секунду и энергиями до десятков мегаэлектронвольт. Было бы ошибкой решать эти задачи с упрощениями вековой давности. Современные компьютеры позволяют решать системы уравнений практически любой сложности без упрощений и допущений, принятых еще в XIX веке.

Авторы этой книги находят возможным моделирование звуковых волн без упрощений и допущений, некоторые из которых сочли ошибочными и неправомерными.

В монографии приведены доказательства невозможности моделирования бегущей звуковой волны однородным дифференциальным уравнением второго порядка, которое широко используется в традиционной акустике без учета ее непрерывного возбуждения в неподвижной среде, на которую она набегаёт. Впервые рассмотрен процесс генерации звука приборами и живыми организмами. Приведены примеры решения неупрощенных, нелинейных уравнений бегущей волны и их отличия от

стоячих волн. Описаны способы опытного определения времени релаксации неравновесного состояния высокочастотных воздействий на газ. Движение высокочастотных звуковых и ударных волн в отличие от низкочастотных рассматривается как термодинамически неравновесный процесс. Впервые описан эффект увеличения громкости звуковой волны попутным ветром. Сопоставлены способы описания звуковых волн традиционным и предложенным методами, а также описания возбуждения стоячей и бегущей волн.

Важной областью применения и использования волновой теории звука является проектирование и реализация (воплощение) различных акустически совершенных объектов — больших помещений типа вокзалов, концертных и оперных залов, радиостудий, звукозаписывающей и звуковоспроизводящей аппаратуры (громкоговорителей, телефонов, музыкальных центров, стереоколонок и т.п.). Допущения и упрощения, принимаемые при их проектировании приводят при реализации проекта к искажению звука, снижению его качества, в особенности звука большой громкости и при высоких звуковых частотах. Авторы поставили перед собой задачу составления системы волновых уравнений акустики, по возможности, без допущений и упрощений, которые снижают качество звучания голоса и музыкальных инструментов.

Особое внимание уделено эффекту повышения жесткости и возникновения анизотропии воздуха, возникающей при сверх- и гиперзвуковых полетах летательных аппаратов. Ошибки в расчетах аэродинамических характеристик таких аппаратов при воплощении в жизнь проектов снижают их летные качества. Использование упрощенных моделей ведет к ошибкам в расчетах мощности и устойчивости (появлению вибраций и «болтанки»). Авторы поставили себе целью купирование таких ошибок.

В отличие от колебаний давления колебания напряжений анизотропного газа дают направленность луча звука от его источника (генератора).

Отзывы и пожелания читателей можно направлять по адресу masha.shlensky@gmail.com.

Авторы

Кратковременное (ударное) деформирование газа

1.1. Начальные сведения

В традиционной, сложившейся веками акустике принято считать [1—5], что деформации газа исчерпываются только изменением его объёма V и плотности ρ . Однако это не совсем так. Газ как вязкоупругая среда при быстром нагружении становится жёстким, анизотропным и его деформации в разных направлениях могут различаться между собой вопреки сложившейся парадигме.

В кинетической теории газа компоненты давления молекул во всех направлениях одинаковы: $p_x = p_y = p_z = p$. Объёмная концентрация n в объёме V из N молекул $n = N/V$ определяет давление $p = nkT$, где k — постоянная Больцмана. Отсюда следует уравнение состояния идеального газа для мольного объёма V_m : $pV_m = RT$.

При кратковременном (до установления равновесия) линейном деформировании газа вдоль оси x возбуждаются дополнительно поступательные степени свободы молекул. Относительная деформация ε_m отрезков малой длины dx составят $\varepsilon_m = \Delta dx/dx$. Начальный объём V_0 изменится до значения $V_x = V_0(1 + \varepsilon_m)$. Линейная «погонная» концентрация молекул n_x (их число dN_x на единице длины dx) станет равной $n'_x = (dN_x)/(dx + \Delta dx)$, $n'_x = n_x/(1 + \varepsilon_m)$. Объёмная концентрация молекул вместо $n = n_x n_y n_z$ станет равной $n' = n'_x n_y n_z$. Давление p_x станет равным $p_x/(1 + \varepsilon_m)$, где знаком (') обозначено отношение к кратковременно (быстро) нагруженному газу. Корректировка давления имеет следствием изменения многих формул в акустике. Например, уравнение адиабаты Гюгонио

$$\frac{\rho_{2x}}{\rho_1} = \frac{p_{2x}(k+1) + p_1(k-1)}{p_{2x}(k-1) + p_1(k+1)},$$

где k — показатель адиабаты; p_1 — начальное давление.

Давление p_2 изменится и станет равным

$$p'_{2x} = p_2/(1 + \varepsilon_m),$$

Аналогичным образом изменятся формулы газодинамики, в которые входит давление и плотность газа вдоль осей x , y и z .

1.2. Модуль продольной упругости кратковременно (ударно) сжатого газа

Продольное нормальное напряжение кратковременно сжатого газа на молекулярном (локальном) уровне

$$\sigma = p'_x - p_0 = mn'_x n_y n_z \overline{v^2} - mn_x n_y n_z \overline{v^2} = mn_x n_y n_z \overline{v^2} (1/(1 + \varepsilon_m) - 1),$$

где p_0 — внешнее давление; p'_x — давление при однонаправленном ударном нагружении за время свободного пробега молекул $t < \tau_r$.

При малых значениях $|\varepsilon_m| \ll 1$ $1/(1 + \varepsilon_m) \approx 1 - \varepsilon_m$, $\sigma_x = -p_0 \varepsilon_m$, что соответствует закону Гука с модулем упругости $E = p_0$

$$\sigma \approx E \varepsilon_m,$$

где напряжение σ имеет знак, обратный знаку давления p_0 .

При больших значениях деформации ε_m

$$\sigma = p_0(1 - \varepsilon_m + \varepsilon_m^2 - \varepsilon_m^3 + \dots) - p_0$$

получаем нелинейный закон Гука

$$\sigma = E(\varepsilon_m - \varepsilon_m^2 + \dots),$$

который также описывает обратимые деформации, т.е. после снятия напряжения деформации отсутствуют. Точную связь $\sigma(\varepsilon_m)$ определяют потенциалы взаимодействия молекул.

Зависимость $\sigma(\varepsilon_m)$ быстро нагруженного газа имеет ограничения «сверху» и «снизу». При сжатии напряжение σ ограничено критическим значением σ_c потери устойчивости осцилляторов, образованным потенциалами взаимодействия молекул [2].

При растяжении ограничением служит равенство $\sigma = 0$ (вакуум). Продольное напряжение σ возникает также при внезапном расширении газа в поперечном направлении.

1.3. Термодинамическое описание одномерного кратковременно (ударно) деформированного газа

Деформации среды по закону Гука $\sigma = E\varepsilon$ не зависят от времени и подчиняются законам термодинамики. Газ, обладая вязкоупругими свойствами, при быстром нагружении становится упругой средой Гука, поэтому логично проанализировать его поведение с позиций термодинамики.

Уравнение первого начала термодинамики связывает количество подведенной к системе тепловой энергии dQ с работой совершаемой системой dA и внутренней энергии dU : $dQ = dU + pdV$. Для изобарического расширения одного моля идеального газа от объема V_1 до объема V_2 работа $A_1 = RT \ln(V_2/V_1)$.

При объемном нагружении давлением $V_2 = V_1(1 + 3\varepsilon)$, при одномерном нагружении $V_{x2} = V_1(1 + \varepsilon) < V_2$. Работа $A_2 > A_1$, поэтому на короткое время реализуется одномерное состояние газа. Переход в равновесие сопровождается ростом энтропии

$$S_x = \int dQ/T_x < \int dQ/T,$$

где $T_x = p/Rn'_x n_y n_z$ — температура одномерного кратковременно нагруженного газа. Соответственно, сжать газ по энергозатрате в одном направлении легче, чем в трех, в полном соответствии с вариационным принципом наименьшего действия.

По тому же самому принципу и правилам механики затраты энергии на колебания в одном направлении $K_1 = \rho(1 + \varepsilon)u^2/2$ также меньше затрат энергии на объемные колебания $K_2 = \rho(1 + 3\varepsilon) \times (u_v)^2/2$. Здесь K_1 — кинетическая энергия линейных колебаний частиц массы; u_v — колебательная скорость частиц массы газа.

Одноосное линейное деформирование газа в традиционной акустике не рассматривается [1—6] при необоснованном допущении, что вязкость газа при быстром нагружении равна нулю, и нет различия между его быстрым и медленным деформированием. Термодинамическое описание процесса справедливо, если его время протекания больше времени релаксации τ_r достижения равновесия, т.е. при низких частотах звука.

Основные сведения о стоячей и бегущей волне

2.1. Основные определения и терминология

Волной называют систему взаимно и последовательно смещаемых колеблющихся частиц массы среды, распределенных по всему ее объему. Звуковую волну характеризует переносимая ею энергия и количество движения, заданное генератором.

Продольная волна возникает, например, после удара по торцу стержня (по трубе, по гвоздю, по свае), который вызывает смещения частиц массы w вдоль направления удара, колебания деформаций ϵ и напряжений σ в продольном и поперечном направлениях.

Волны разделяют на стоячие с неподвижными центрами колебаний (точками равновесия) и бегущие свободно и неограниченно, удаляющимися от генератора вместе с центрами колебаний. Стоячие волны в воздухе возникают, например, в корпусе скрипки, флейты, в резонаторе Гельмгольца. Генераторами бегущих звуковых волн служат деки струнных музыкальных инструментов, головые связки, музыкальные духовые инструменты.

В акустике сложилась традиция моделирования стоячей и бегущей волн однородными независимыми дифференциальными уравнениями упрощенного типа [1—6]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2},$$

где u — массовая скорость (скорость частиц массы); p — звуковое (избыточное) давление; w — смещение частиц массы.

Уравнения этой линейки выведены при допущении $\rho = \text{const}$, что лишает уравнения физического смысла. В зонах расширения и сжатия среды $\rho \neq \text{const}$ (см. Приложение).

Эта традиция укоренилась как парадигма акустики, при этом коэффициенту c придаётся смысл скорости звука. В стоячей волне скорость звука, равная скорости распространения полной энергии волны \mathcal{E} , равна нулю. Поступательное движение энергии \mathcal{E}

отсутствует. Поэтому присвоение коэффициенту c значения скорости звука не всегда оправдано. Более корректной является комплексная скорость звука, с действительной и мнимой частями комплексного числа [1]. Она зависит от частоты звуковых колебаний: возрастает с увеличением частоты (см. Приложение).

В однородных волновых уравнениях учтена не полная скорость частиц массы $u = u_v + u_i$, а только колебательная составляющая u_v . Начальная скорость u_i исключается при дифференцировании:

$$\partial^2(u_v + u_i)/\partial x^2 = \partial^2 u_v/\partial x^2; \quad \partial^2(u_v + u_i)/\partial t^2 = \partial^2 u_v/\partial t^2.$$

Поэтому однородные уравнения описывают только колебательные движения, моделирование бегущей волны, трансляционной кинетической энергии $K = \rho(u_v + u_i)^2/2$, этими уравнениями исключается.

Массовые инерционные силы в однородном уравнении отсутствуют также, аксиоматически, предполагается, что среда изотропна, компоненты давления $p_x = p_y = p_z = p$, плотность и распределение молекул по скоростям изотропны.

В стоячей волне происходят колебания постоянного состава молекул среды. В этом можно убедиться, пометив молекулы радиоизотопным методом. В бегущей волне меченые молекулы прибывают в ней не более одного периода колебаний T , уступая место другим ранее неподвижным молекулам. Фронт бегущей волны сообщает им и частицам массы среды импульс силы I , полученный от генератора как начальный импульс I_i . Генератор создает этот импульс, распределенной силой воздействия, не как при ударе по стержню груза, а в форме зон сжатия напряжениями σ' длительностью t' , а затем зоны растяжения напряжением σ'' за время t'' и $t' + t'' = T$:

$$I = I_i = \int_0^{t'} \sigma' dt + \int_{t'}^{t'+T} \sigma'' dt = \int_0^T \sigma dt = \bar{\sigma} T = D = \rho u_i 2l,$$

где $\bar{\sigma}$ — среднее напряжение; u_i — начальная массовая скорость.

2.2. «Парадокс» обнуления энергии волны в нулевых точках колебания массовой скорости и давления

Однородные уравнения в §2.1 описывают колебания давления и скорости u в виде синусоиды, которая обращается в нуль при аргументах, кратных π . Возникает вопрос: куда «исчезает» кинетиче-

скают кинетическая и потенциальная энергии звука согласно уравнениям $K = \rho u_v^2/2 = \Pi = p^2/2\rho c^2$ в нулевых точках, где $u_v = 0$? Ответ на этот вопрос дан в главе 13 § 13.2 и § 9.1.

2.3. Пример осциллографирования звуковых колебаний

Волна звука обычно не имеет формы гармонических (синусоидальных) колебаний, как решений однородных уравнений (рис. 1). Датчик звука регистрирует силу удара молекул воздуха за время $t' \approx 10^{-4}$ с, отнесенную к его площади, как составляющую напряжения $\sigma = p_x$. Время прохождения зоны растяжения $t'' \approx 10^{-3}$ с. В такой бегущей волне (волна «добежала» до датчика) импульс в зоне сжатия I' превышает импульс I'' в зоне растяжения

$$I' = \int_0^{t'} \sigma' dt > I'' = \int_{t'}^{t''} \sigma'' dt.$$

Импульс $I_i = I' - I''$ «заставляет» волну двигаться в направлении своего вектора \vec{I}_i от генератора к приемнику звука [1, 7].

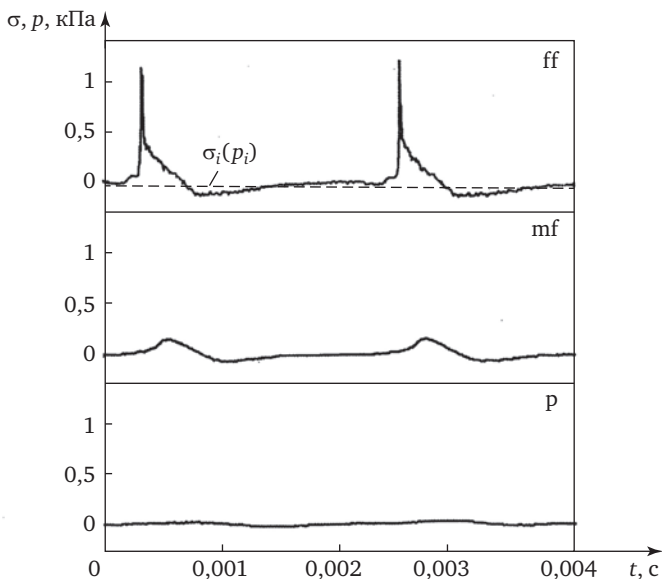


Рис. 1. Осциллограмма звука трубы (музыкального духового инструмента) при исполнении звука с частотой 500 Гц на трёх уровнях громкости: p — пиано; mf — меццо-форте; ff — фортиссимо. Штриховая горизонтальная линия p_i — начальное давление, проведена условно по началу отсчёта сигнала [1]

В стоячей волне этого импульса нет, поступательное движение запрещено граничными условиями,

$$I' = \int_0^{t'} \sigma' dt = I'' = \int_{t'}^{t''} \sigma'' dt .$$

Поэтому $I' - I'' = \bar{\sigma}T = 0$. Начальный импульс отсутствует.

В бегущей высокочастотной волне импульс I_i от генератора передается эстафетным механизмом. Такой механизм демонстрирует школьный опыт с группой выстроенных в ряд стальных шариков. При ударе по концу этого ряда шариком с массой m_b и скоростью u_i , импульс силы удара передается до другого конца ряда и вызывает отскок крайнего шарика с такой же массой и скоростью u_i .

Бегущая волна при ударе большой силы по торцу стержня может вызвать откол противоположного торца, если в зоне растяжения напряжение σ'' превысит откольную прочность σ_c .

Вязкоупругие среды, такие как жидкости и газы, при быстром нагружении (за время t' меньше времени релаксации τ_r) ведут себя согласно модели среды Максвелла как упругие среды Гука. В них выполняется закон Гука $\sigma = E\varepsilon$, E — модуль упругости. Поэтому пример со стержнем относится и к бегущей волне. Наивно считать, что гвоздь можно забить колебаниями «туда-сюда» без удара молотка. Также наивно считать, что бегущая волна возникнет без начального импульса I_i , получаемого от генератора.

Мембрана генератора создает плоскую волну звука с начальным импульсом \bar{I}_i . Выходя из генератора, волна становится сферической, импульс \bar{I}_i переходит в трансляционный I_i с тензором плотности потока \bar{P}_{ik} при огибании препятствий.

Начальная скорость u_i близка к скорости, задаваемой генератором. Количество движения определяется трансляционной скоростью u_i ($D = \rho u_i 2l = \rho u_i c T$, где T — период колебаний).

Фронту звуковой волны предшествует движение молекул со сверхзвуковыми скоростями, полученными от генератора. Средняя квадратичная скорость таких молекул

$$\bar{v}^2 = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv \approx 600 \text{ м/с},$$

где $f(v)$ — функция Максвелла распределения молекул по скоростям.

Изменение свойств газа при быстром (внезапном) нагружении

3.1. Анизотропия плотности газа

В молекулярной физике давление газа в состоянии термодинамического равновесия определяется силой удара молекул ΔF по стенке сосуда на площади ΔS [1, 3]:

$$p = \Delta F / \Delta S.$$

Давление связывают с частотой ударов и квадратами скоростей u_i всех серий из n_i молекул с массой m уравнением

$$p = m \sum n_i u_i u_i = m \sum n_i u_i^2.$$

Концентрация — плотность молекул, т.е. число молекул N в объеме V

$$n = N/V = \sum n_i.$$

Линейные концентрации n_x молекул dN_i на малых отрезках dx , dy , dz равны между собой

$$n_{xi} = dN_{xi}/dx; \quad n_{yi} = dN_{yi}/dy; \quad n_{zi} = dN_{zi}/dz; \quad n_{xi} = n_{yi} = n_{zi}.$$

Произведение $n_x n_y n_z = n$; $n_i u_x$ — частота ударов вдоль оси x .
Составляющие давления вдоль осей координат x, y, z

$$p_x = m \sum n_i u_{xi}^2; \quad p_y = m \sum n_i u_{yi}^2; \quad p_z = m \sum n_i u_{zi}^2,$$

где u_x, u_y, u_z — проекции скоростей на оси координат. Так как они одинаковы, составляющие давления

$$p_x = p_y = p_z = p.$$

Газовая среда в термодинамическом равновесии изотропна, что стало парадигмой в акустике.

При кратковременном, быстром деформировании газа в звуковых и ударных волнах за время, меньшее времени релаксации τ , до установления термодинамического равновесия картина деформирования существенно иная (рис. 2).

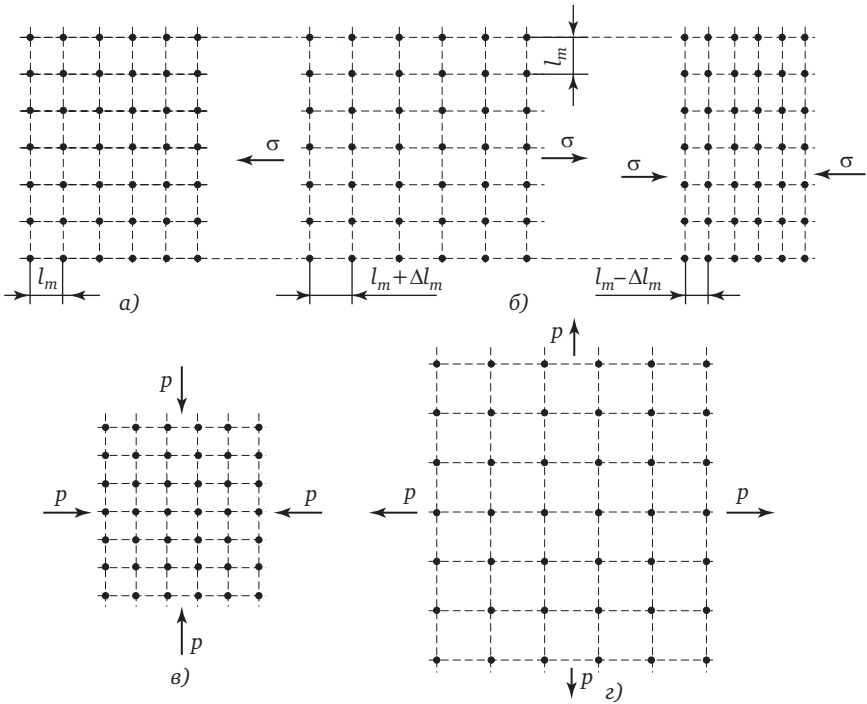


Рис. 2. Различные смещения частиц массы газовой среды как среды Гука при $\nu = 0$ под действием осевого продольного напряжения σ (а, б) и давления (в, з) в отсутствие сдвигов:

а — исходное состояние; б — осевое растяжение—сжатие в ударной волне; в — объемное сжатие повышенным давлением ($p > p_0$); з — разрежение при пониженном давлении ($p < p_0$); точки — частицы массы

Поэтому необходимо уточнение понятий давления и концентраций молекул. При быстром деформировании среды малые отрезки dx получают удлинение $\Delta dx \geq 0$. Число молекул на этом отрезке мгновенно не меняется — молекулы «не успевают» перераспределиться. Поэтому линейная (погонная) концентрация их при $t \rightarrow 0$ на новой длине $dx + \Delta dx$ изменится

$$n'_x = \frac{dN}{dx + \Delta dx} = \frac{n_x}{1 + \varepsilon},$$

где $\varepsilon = \Delta dx/dx$ — относительная деформация.

Поперечная деформация отсутствует, и коэффициент Пуассона $\nu = 0$. Локальный объем (объем в точке) также изменится:

$$dV_0 \pm \Delta dV_0 = dV_0(1 \pm \varepsilon),$$

что влечет за собой локальное изменение линейной осевой плотности $\rho_x = \rho_0/(1 \pm \varepsilon)$. Такое изменение объема отличается от изменения его под действием давления (компрессии)

$$dV_0 + \Delta dV_0 = dV_0(1 \pm \theta),$$

где $\theta = 3\varepsilon = \Delta V/V_0$ — относительная объемная деформация. Осевая плотность отличается от объемной при $t \rightarrow 0$ (см. рис. 2):

$$V'_x = \frac{1 + \varepsilon}{1 + 3\varepsilon} V.$$

Плотности

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + 3\varepsilon}; \quad \rho'_x = \frac{\rho_0}{1 + \varepsilon},$$

поэтому после объемного деформирования

$$\rho'_x = \frac{1 + 3\varepsilon}{1 + \varepsilon} \rho; \quad \rho'_y = \rho'_z = \frac{1 + 1,5\varepsilon}{1 + \varepsilon} \rho.$$

Плотность при быстром нагружении становится неизотропной, точнее — ортотропной. При нагружении в трех направлениях

$$n'_y = \frac{n_y}{1 + \varepsilon_y}; \quad n'_z = \frac{n_z}{1 + \varepsilon_z},$$

соответственно плотность $\rho'''_{xyz} = \frac{\rho}{(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)}$.

При кратковременном осевом деформировании вдоль оси x изменится скорость u_x на величину $\Delta u_x = \int \dot{\varepsilon} dx$ и давление p_x , остальные останутся без изменения

$$p'_x = m \sum \frac{n_i u_{xi}^2}{1 + \varepsilon}; \quad p_y = m \sum n_i u_{yi}^2; \quad p_z = m \sum n_i u_{zi}^2.$$

Сложим последовательно эти уравнения при $\varepsilon \ll 1$ (случай при $\varepsilon > 1$ рассмотрен ниже)

$$p'_x + p_y + p_z \approx m \sum \frac{n_i}{1 + \varepsilon} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2).$$

Так как $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = v^2$, $p'_x = p_x / (1 + \varepsilon)$

$$\frac{p_x}{1 + \varepsilon} + p_y + p_z \approx m \sum n_i v^2 = \frac{3 + 2\varepsilon}{1 + \varepsilon} p.$$

Величина $\sum n_i v_i^2$ — это сумма квадратов скоростей всех молекул в единице объема газа. Среднее значение этой величины

$$\overline{v^2} = \frac{\sum n_i v_i^2}{\sum n_i} = \frac{\sum n_i v_i^2}{n}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum n_i u_i^2 = n_i \overline{u^2}$$

и
$$\chi p = \frac{1}{3} n m \overline{v^2} = \frac{2}{3} n \frac{m \overline{v^2}}{2} = n k T; \quad \chi = \frac{3 + 2\varepsilon}{1 + \varepsilon},$$

где k — постоянная Больцмана; χ — корректирующий коэффициент.

Тогда уравнение состояния кратковременно одноосно деформированного газа примет вид

$$\chi p V'_m = RT,$$

где $V'_m = \frac{1 + \varepsilon}{1 + 3\varepsilon} V_m$; V_m — мольный объем.

Звуковые волны характеризуют так называемым звуковым или избыточным давлением — перепадом $p_{\text{wave}} = p - p_0$, где p_0 — внешнее давление.

При быстром осевом нагружении составляющая p_x изменится:

$$p'_x - p_0 = m n'_x n_y n_z - m n_x n_y n_z = m n v^2 \left(\frac{1}{1 + \varepsilon} - 1 \right) - p_0.$$

В теории упругости такая разность называется напряжением σ , и напряжение сжатия считается отрицательным, $\text{sign } \sigma = -\text{sign } p$.

Поэтому

$$\sigma = p'_x - p_0 = p \frac{1 - 1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} = \frac{p_0 \varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

При малых деформациях $1 + \varepsilon \approx 1$ выполняется закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E — модуль упругости.

Кратковременное деформирование газа отличается от деформирования твердого тела тем, что при сжатии газа поперечное деформирование отсутствует, т.е. коэффициент Пуассона $\nu = 0$. При деформировании в трех направлениях

$$\varepsilon_x = \sigma_x/E; \quad \varepsilon_y = \sigma_y/E; \quad \varepsilon_z = \sigma_z/E$$

объемная относительная деформация $\theta \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$. При действии давления $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$, $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon$, и $\theta = 3\varepsilon$ в состоянии всестороннего объемного сжатия среды.

Согласно уравнению состояния идеального газа при $\Delta T = \text{const}$ давление p связано с плотностью ρ линейной зависимостью

$$p = \rho p_0 / \rho_0;$$
$$p_x = \rho_x p_0 / \rho_0 = p_0 / (1 + \varepsilon).$$

Поэтому допущение $\rho = \text{const}$, положенное в основу вывода в §2.1 волновых однородных уравнений, лишает их физического смысла для движения волн в газах. Отказ от этого допущения рассмотрен в §11.1.

Примечание. Изменение начальной линейной концентрации молекул от равновесного значения n_x до n'_x при быстром воздействии распространяется со скоростью звука по всей длине волны L , что увеличивает время релаксации по сравнению со временем в локальном объеме (10^{-8} — 10^{-9} с). Например, при $L = 0,34$ м и скорости звука 340 м/с время релаксации $\tau_r = 0,34/340 = 10^{-3}$ с. Определением «быстрое» и «кратковременное» обозначено такое воздействие, продолжительность которого менее времени релаксации среды.

При движении волны в раструбе происходит одновременное деформирование газа в продольном и поперечном направлениях (разрежение). Потенциальная энергия объемного деформирования переходит в менее энергоемкую энергию — потенциальную энергию одномерного линейного деформирования. При этом громкость звука увеличивается (см. §9.2 и 9.3).

3.2. Компоненты тензора напряжений

В молекулярной физике шаровой тензор давления газа P вдали от стенок сосуда определяется средним значением переноса импульса через выделенную поверхность [9—11]

$$P = \sum_i n_i m_i \langle \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \rangle,$$

где n_i — концентрация молекул i -й компоненты; \vec{v}_i — скорость молекул i -й компоненты; m_i — масса молекул i -й компоненты, а угловыми скобками обозначено усреднение по всем молекулам i -й компоненты в бесконечно малом макроскопическом объеме, выполняемое с помощью функции распределения скоростей $f_i(\vec{v}, \vec{r}, t)$.

Среднемассовая скорость газа определяется аналогично:

$$\vec{v}_0 \sum_i n_i m_i = \sum_i n_i m_i \langle v_i \rangle,$$

что после подстановки в определение тензора давления

$$P = \sum_i n_i m_i \langle (\vec{v}_i - \vec{v}_0)(\vec{v}_i - \vec{v}_0) \rangle + (\vec{v}_0 \vec{v}_0) \sum_i n_i m_i.$$

Тензор давления газа P определяется суммой переноса импульса за счет собственной скорости молекул теплового движения i -й компоненты $\vec{u}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_0$ и скоростного напора за счет среднемассовой скорости $(\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0) \sum_i n_i m_i$, что стало парадигмой в акустике.

Далее для простоты и наглядности рассмотрим индивидуальный газ, т.е. состоящий из одной компоненты. Применение этого соотношения к поверхностям, параллельным координатным, приводит к следующим равенствам:

$$p_x = n_1 m_1 \langle u_{x1}^2 \rangle;$$

$$p_y = n_1 m_1 \langle u_{x2}^2 \rangle;$$

$$p_z = n_1 m_1 \langle u_{x3}^2 \rangle,$$

из которых следует, что, при изотропном распределении средних квадратов собственных скоростей молекул, тензор давления остается как у стенки $p = p_x = p_y = p_z$.

Из определения температуры

$$\frac{1}{2}m_1 \langle u_1^2 \rangle = \frac{3}{2}kT$$

следует, что

$$\frac{1}{2}m_1 \langle u_{x1}^2 \rangle = \frac{1}{2}m_1 \langle u_{y1}^2 \rangle = \frac{1}{2}m_1 \langle u_{z1}^2 \rangle = \frac{1}{2}kT.$$

При кратковременном быстром деформировании газа, осуществляемом в сильных звуковых или ударных волнах, до времени релаксации τ , и установления локального термодинамического равновесия, картина деформирования может измениться. Средний квадрат $\langle u_{x1}^2 \rangle$, зависящий от направления вдоль оси X , может отличаться от средних квадратов $\langle u_{y1}^2 \rangle$ и $\langle u_{z1}^2 \rangle$ в направлениях Y и Z :

$$\langle u_{x1}^2 \rangle \neq \langle u_{y1}^2 \rangle; \langle u_{x1}^2 \rangle \neq \langle u_{z1}^2 \rangle.$$

3.3. Распределение молекул газа по скоростям. Анизотропия температурного поля

Рассмотрим случай распространения волны вдоль оси X . Пусть средние квадраты собственных скоростей вдоль осей X , Y и Z отличаются в некотором отношении $\xi = \xi(r, t)$ и $\eta = \eta(r, t)$:

$$\langle u_{x1}^2 \rangle = \xi \langle u_{y1}^2 \rangle; \langle u_{x1}^2 \rangle = \eta \langle u_{z1}^2 \rangle,$$

где ξ , η — безразмерные коэффициенты, не равные единице, определяют приращение скорости Δu_x , заданное генератором звука.

Тогда, учитывая $\langle u_1^2 \rangle = \langle u_{x1}^2 \rangle + \langle u_{y1}^2 \rangle + \langle u_{z1}^2 \rangle$, получаем

$$\frac{1}{2}m_1 \langle u_{x1}^2 \rangle = \frac{\xi\eta}{\xi\eta + \xi + \eta} \frac{1}{2}m_1 \langle u_1^2 \rangle = \frac{\xi\eta}{\xi\eta + \xi + \eta} \frac{3}{2}kT;$$

$$\frac{1}{2}m_1 \langle u_{y1}^2 \rangle = \frac{\eta}{\xi\eta + \xi + \eta} \frac{1}{2}m_1 \langle u_1^2 \rangle = \frac{\eta}{\xi\eta + \xi + \eta} \frac{3}{2}kT;$$

$$\frac{1}{2}m_1 \langle u_{z1}^2 \rangle = \frac{\xi}{\xi\eta + \xi + \eta} \frac{1}{2}m_1 \langle u_1^2 \rangle = \frac{\xi}{\xi\eta + \xi + \eta} \frac{3}{2}kT.$$

Для компонент тензора давления

$$p_x = \frac{3\xi\eta}{\xi\eta + \xi + \eta} n_1 kT = n_1 kT_x, \quad T_x = \frac{3\xi\eta}{\xi\eta + \xi + \eta} T;$$

$$p_y = \frac{3\eta}{\xi\eta + \xi + \eta} n_1 kT = n_1 T_y, \quad T_y = \frac{3\eta}{\xi\eta + \xi + \eta} T;$$

$$p_z = \frac{3\xi}{\xi\eta + \xi + \eta} n_1 kT = n_1 T_z, \quad T_z = \frac{3\xi}{\xi\eta + \xi + \eta} T.$$

Из полученных формул следует, что в принятых предположениях нарушается теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы, а также становится неприменимым локальное максвелловское распределение скоростей и температуры.

Выделение из тензора давления шаровой части дает:

$$p = \frac{1}{3}(p_x + p_y + p_z) = n_1 kT;$$

$$p_x = p + \frac{3\xi\eta}{\xi\eta + \xi + \eta} n_1 kT - n_1 kT = p + \pi_x;$$

$$p_y = p + \frac{3\eta}{\xi\eta + \xi + \eta} n_1 kT - n_1 kT = p + \pi_y;$$

$$p_z = p + \frac{3\xi}{\xi\eta + \xi + \eta} n_1 kT - n_1 kT = p + \pi_z,$$

где

$$\pi_x = \frac{3\xi\eta}{\xi\eta + \xi + \eta} n_1 kT - n_1 kT = p \frac{2\xi\eta - \xi - \eta}{\xi\eta + \xi + \eta};$$

$$\pi_y = \frac{3\eta}{\xi\eta + \xi + \eta} n_1 kT - n_1 kT = p \frac{2\eta - \xi\eta - \xi}{\xi\eta + \xi + \eta};$$

$$\pi_z = \frac{3\xi}{\xi\eta + \xi + \eta} n_1 kT - n_1 kT = p \frac{2\xi - \xi\eta - \eta}{\xi\eta + \xi + \eta}.$$

Полагая в целях упрощения $\xi = \eta$, получаем

$$\pi_x = p \frac{2\xi - 2}{\xi + 2}; \quad \pi_y = p \frac{1 - \xi}{\xi + 2}; \quad \pi_z = p \frac{1 - \xi}{\xi + 2}.$$

Обозначив индексами 1, 2 соответственно состояние невозмущенной и возмущенной среды, т.е. состояния среды по обе стороны от поверхности разрыва, получим аналогично [2]:

$$\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x};$$

$$p_1 + \rho_1 v_{1x}^2 = p_2 + p_2 \frac{2\xi_2 - 2}{\xi_2 + 2} + \rho_2 v_{2x}^2;$$

$$h_1 + \frac{1}{2} v_{1x}^2 = h_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \frac{2\xi_2 - 2}{\xi_2 + 2} + \frac{1}{2} v_{2x}^2,$$

здесь h_i — энтальпия газа в состоянии i ; ρ_i — объемная плотность газа в состоянии i , коэффициент ξ_1 считаем равным 1.

Анизотропия распределения молекул по скоростям означает анизотропию поля температур, теплоемкости и теплопроводности.

В виду различия скоростей u_x, u_y, u_z и концентрацией n_x, n_y, n_z функция распределения Максвелла записывается по отдельности для каждой из них: $dn_x/n_x du_x, dn_y/n_y du_y$.

Коэффициенты ξ и η определяются методом последовательных приближений, в первом из них они принимаются равными единице. В волнах химической детонации коэффициент $\xi = 2 \dots 5$, в волнах термоядерной детонации достигает 10^3 ; поэтому допущение о равенстве скоростей молекул по всем направлениям приводит к ошибкам в расчетах давления и температур. Анизотропия сред часто встречается в природе и технике. Напряжения σ возникают под углом 45° к касательным напряжениям τ в ламинарном пограничном слое потока среды, причем $\sigma(45^\circ) = \tau$. С ростом скорости потока v сила взаимодействия молекул достигает f_{\max} (см. рис. 12), после чего ламинарный слой переходит в турбулентный при $R_x = 2300$ и времени взаимодействия сил притяжения пар молекул среды $t = \Lambda/v < \tau_*$.

Эстафетный механизм передачи начального импульса и энергии со скоростью звуковой волны

Эстафетный механизм передачи сигнала весьма распространен в природе и технике. Электрический ток в проводах передается электронами, совершающие колебательные движения в проводниках. Электромагнитные колебания света передают импульс силы светового давления.

Эстафетный механизм трехмерного переноса энергии молекулами возникает при воздействии на газ мембраны генератора звука. Тогда число молекул, заключенных в пределах скоростей от u_i до $u_i + \Delta u_i$ может различаться:

$$f(u_x) = \frac{dn_x}{n_x du_x} \neq f(u_y) = \frac{dn_y}{n_y du_y} \neq f(u_z) = \frac{dn_z}{n_z du_z},$$

где n_x, n_y, n_z — число молекул на единицу длины вдоль оси x, y, z .

Ввиду различия скоростей u_i распределение Максвелла по скоростям молекул становится анизотропным и температура $T_x \neq T_y \neq T_z$, поскольку генератором возбуждается преимущественно показательные степени свободы молекул.

На рис. 3 схематически представлен механизм передачи импульса молекул с возбужденной поступательной степенью свободы молекулам неподвижного газа в покадровом изображении виртуальной киносъемки. Молекулы условно изображены рядами точек без учёта их теплового движения. Левый ряд может двигаться вправо до соударения со вторым рядом. После удара приходит в движение второй и последующий ряд молекул. После удара за счет перепада концентрации молекул они возвращаются в исходное положение в результате хаотичного теплового движения.

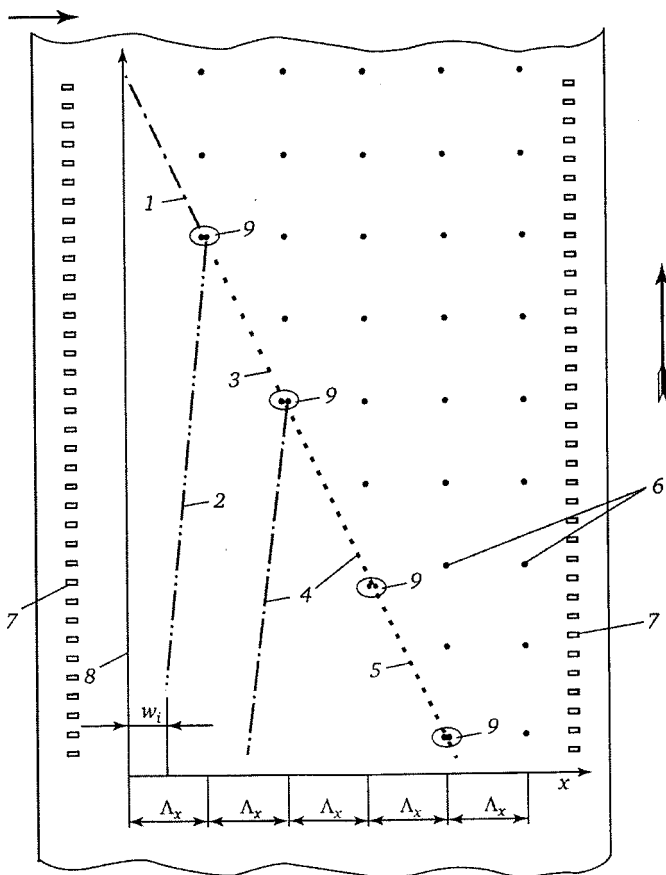


Рис. 3. Схема эстафетного механизма передачи звукового импульса в форме покадровой развертки виртуальной анимации движения молекул:

1 — трек молекулы, получившей импульс от генератора; 2 — трек молекулы, передавшей импульс молекуле второго ряда; 3 — трек молекулы второго ряда; 4, 5 — треки молекул последующих рядов передающих звуковой импульс и затем возвращающихся назад без импульса; 6 — исходное положение неподвижных молекул до получения звукового импульса; 7 — виртуальная префорация; 8 — первый ряд исходного положения системы молекул; 9 — знак соударения двух молекул. Горизонтальная стрелка — направление вектора звукового импульса; стрелка справа — направление движения фильма модели

Соударения молекул как микрогенераторы создают силовое поле по Эйлеру $\rho X = \rho \partial^2 w_g / \partial t^2$ в неподвижных слоях газа, набегающей волной

Связь плотности потока импульса $\bar{P}_{i,k}$ с плотностью энергии \bar{E} бегущей волны звука устанавливает аналог уравнения Ландау—Лифшица [3, с. 362]

$$\bar{P}_{i,k} = \bar{E}n_i n_k,$$

где n_i, n_k — единичный вектор [3]; $\bar{P}_{i,k}$ — тензорная величина.

Если волна распространяется вдоль оси x , то отлична от нуля только одна компонента матрицы (формула Н.Е. Жуковского для гидроудара)

$$\bar{P}_{xx} = I_i/T = \rho u_i c = \Delta p,$$

где u_i — начальная скорость.

Отсюда следует, что при отсутствии начального импульса силы, создаваемого генератором, звуковая энергия отсутствует, звуковая волна не возникает. Возможна только стоячая волна.

Плотность потока энергии равна ее плотности, умноженной на скорости звука [3].

Трансляционный и колебательный поток массы жидкости или газа, переносимой эстафетным механизмом [3]

$$m_i = \rho_0 u_i; j = \rho_0 u_v + \rho_0 u_v / c,$$

Скорость u_i аналогична скорости u_2 «поршневой» модели (§ 13.6).

Трансляционный поток массы дает вклад в энергию звуковой волны

$$E = \rho_0 (u_i + u_v)^2 / 2 + P.$$

Волновые уравнения и их решения без учета импульса силы I_i , получаемого от генератора звука, — однородные, неоднородные, линейные, нелинейные и т.п. (см. § 2.1), не описывают бегущей звуковой волны, ударных и депозиционных волн так как не учитывают переноса количества движения.

Каждая молекула в бегущей волне, сталкиваясь с молекулой среды, является генератором её колебаний. Суммарную массовую силу соударений $X = \rho \partial^2 w_g / \partial x^2$ по Эйлеру, распределённую по длине волны, необходимо включать в волновое уравнение как движущую силу процесса возбуждения волны в неподвижной среде.