

И.Н.Добротворский

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Задачник

Учебное пособие
для техникумов

«Радио и связь»

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ • Задачник



И.Н.Добротворский

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Задачник

*Допущено Министерством связи
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов средних специальных
учебных заведений связи,
обучающихся по специальностям:
«Автоматическая электросвязь»,
«Многоканальная электросвязь»,
«Радиосвязь, радиовещание и телевидение»*

Москва
© "Радио и связь"
1994

ББК 32.88
Д 56
УДК 621.373(075)

Федеральная целевая программа книгоиздания России

Рецензент Е. Ф. Джалалова

Редакция литературы по радиотехнике и электросвязи

Добротворский И. Н.

Д 56 Теория электрических цепей. Задачник: Учеб. пособие для техникумов.— М.: Радио и связь, 1994.— 360 с.: ил.

ISBN 5-256-00996-6.

Книга является третьей частью комплекса учебной литературы по теории электрических цепей для техникумов связи (первые две части — учебник и лабораторный практикум того же автора изданы в 1990 и 1991 гг. соответственно). Главы и разделы данного сборника задач полностью соответствуют главам учебника. Более 40% задач снабжены объяснениями и разнообразными методическими указаниями. Приводится большое число программ для программируемого микрокалькулятора, значительно облегчающих математические расчеты. Имеются варианты заданий для индивидуальных занятий.

Для учащихся техникумов связи всех специальностей.

Д 2303020000-017
046(01)-94 КБ-0-92-93

ББК 32.88

Учебное издание

Добротворский Игорь Николаевич

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ. ЗАДАЧНИК

Учебное пособие

Заведующий редакцией *В. Н. Вьяльцев*
Редакторы *Н. Я. Липкина, В. К. Старикова*
Художественный редактор *Т. Н. Зыкина*
Технический редактор *Т. Г. Родина*
Корректор *Н. В. Козлова*

ИБ № 2484

ЛР № 010164 от 04.01.92.

Сдано в набор 08.09.93 Подписано в печать 17.01.94
Формат 60×90¹/₁₆ Бумага тип. № 2 Гарнитура литературная
Печать высокая Усл. печ. л. 22,5 Усл. кр.-отт. 22,75 Уч.-изд. л. 24,06 Тираж 5000 экз.
Изд. № 23465 Зак. 4230 С-017

Издательство «Радио и связь». 101000 Москва, Почтамт, а/я 693

Производственно-издательский комбинат ВИНТИ. 140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

ISBN 5-256-00996-6

© Добротворский И. Н., 1994

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие является составной частью методического комплекса литературы по дисциплине «Теория электрических цепей» для техникумов связи. Теоретическая часть материала, необходимая для решения задач, изложена в учебнике по ТЭЦ [1]. Главы настоящего задачника полностью соответствуют главам названного учебника. В задачах имеются ссылки на страницы учебника, которые необходимо изучить, чтобы иметь возможность решить данную задачу. В большинстве глав задачи собраны в группы.

К первой группе относятся подробно разобранные задачи, решения которых доведены до числовых результатов. В этих задачах показывается логика подхода к их решению, устанавливается техника расчета как ручным способом, так и с помощью микрокалькуляторов, приводятся рекомендации по использованию приставок к физическим величинам, предлагаются программы для программируемого микрокалькулятора (ПМК), отсутствующие в учебнике, и т. д. В ряде случаев даются разнообразные комментарии, поясняющие теоретический материал. Большое внимание уделено проверке результатов расчетов, определению погрешностей, получающихся при расчетах различных цепей, определению областей допустимых пренебрежений.

При самостоятельном выполнении различных заданий учащиеся должны прежде всего разобрать решенные задачи соответствующего раздела и постараться их повторить. Как правило, не следует переходить к решению иных задач, пока нет полного понимания и способности проделать то же самое, что имеется в решенной задаче. Если остается какая-то неясность, то необходимо еще раз обратиться к учебнику и постараться применить теоретические положения к объяснению хода решенной задачи. Если и после этого остается неясность, то следует обратиться к преподавателю за консультациями.

К второй группе относятся задачи, подлежащие решению, но аналогичные решенным. Все задачи второй и последующих групп снабжены указаниями, помогающими решению задач, и ответами, находящимися в конце книги.

В третью группу включены простые задачи по материалу того же раздела, но несколько отличающиеся от решенных.

В четвертую группу собраны задачи более сложные, чем в третьей группе. Следует заметить, что «более» или «менее» сложные задачи — понятия весьма относительные. Одна и та же задача в одних конкретных условиях может быть простой, а в других представляться сложной, поэтому в задачнике нет пометок, указывающих на какую-то повышенную сложность или ее отсутствие. Каждый преподаватель может выбирать те задачи, которые наиболее полно отвечают педагогическому замыслу.

В пятую группу собраны варианты задач для индивидуальных заданий. Материала учебника и решенных задач совершенно достаточно для решения любой задачи, имеющейся в задачнике, что особенно важно для лиц, занимающихся самостоятельно, например учащихся заочной формы обучения.

Номера программ для ПМҚ состоят из буквы и двух цифр. Буква «З» означает, что программа входит в состав задачника (в отличие от программ, имеющих в учебнике), первая цифра показывает номер главы, к которой данная программа относится, а вторая — номер программы в главе. Все программы снабжены контрольными примерами. Для получения уверенных знаний прежде всего необходимы регулярность в работе и строжайшее выполнение правила — не переходить к изучению последующего раздела, пока полностью не усвоен предыдущий материал. В этом залог качественного освоения знаний.

Глава 1. ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

1.1. В радиофарфоре на расстоянии 10 см друг от друга помещены два точечных заряда: $Q_1=0,2$ мКл и $Q_2=0,5$ мКл. С какой силой взаимодействуют эти заряды?

Указание: изучите сначала с. 6, 7 в [1].

Решение. По закону Кулона $F=Q_1Q_2/(4\pi\epsilon_0\epsilon_rR^2)$, причем для выполнения расчетов в системе СИ заряды должны выражаться в кулонах, а расстояние — в метрах. Напомним, что приставка «м» (читается «милли») равна 10^{-3} . В § 1.2 [1] показано, что $\epsilon_0=8,85\cdot 10^{-12}$ Ф/м, а относительная диэлектрическая постоянная радиофарфора $\epsilon_r=6$. Подставим числовые значения: $F=(0,2\cdot 10^{-3}\cdot 0,5\cdot 10^{-3})/[8,85\cdot 10^{-12}\cdot 6(0,1)^2]=10^{-7}/(111,2\cdot 10^{-14})=10^7/111,2=90\cdot 10^3$ Н=90 кН. (Напомним также, что приставка «к» (кило) означает «тысяча», т. е. 10^3 .)

1.2. Каким должно быть расстояние R , чтобы сила взаимодействия между зарядами, указанными в задаче 1.1, оказалась равной 900 Н?

Указание: изучите сначала задачу 1.1.

1.3. Как изменится взаимодействие зарядов, приведенных в задаче 1.1, если радиофарфор заменить на тиконд с $\epsilon_r=60$?

Указание: изучите сначала задачу 1.1.

1.4. Точечные заряды Q_1 и $Q_2=2Q_1$ находятся в трансформаторном масле ($\epsilon_r=2$), расстояние между ними $R=0,25$ м. Определить Q_1 и Q_2 , если сила взаимодействия между ними $F=10^{-4}$ Н.

Указание: изучите сначала задачу 1.1.

1.5. Во сколько раз изменится сила взаимодействия зарядов, если расстояние между ними изменить в 3 раза?

Указание: изучите сначала задачу 1.1.

1.6. Определить потенциал точки поля, если при переносе заряда $Q=5\cdot 10^{-2}$ Кл из бесконечности в данную точку поля затрачивается работа 2,5 Дж.

Указание: изучите сначала с. 8, 9 в [1].

1.7. Какова разность потенциалов между точками электростатического поля, находящимися в вакууме на расстоянии 0,4 и 1 м от точечного заряда $2\cdot 10^{-9}$ Кл? Какая работа совершается при перемещении положительного заряда $4\cdot 10^{-10}$ Кл из первой точки во вторую?

Указание: изучите сначала с. 8, 9 в [1].

Решение. Разность потенциалов двух точек электростатического поля, созданного точечным зарядом, $\varphi_1 - \varphi_2 = (Q/4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1) - (Q/4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_2) = (Q/4\pi\epsilon_0\epsilon_r) [(1/R_1) - (1/R_2)] = (2 \cdot 10^{-9} / 4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}) [(1/0,4) - (1/1)] \approx \approx 300$ В.

1.8. Плоский конденсатор с воздушным диэлектриком был заряжен до напряжения $U_1 = 200$ В. Как изменится напряжение на зажимах конденсатора, если между обкладками конденсатора поместить фарфоровую пластину?

Указание: изучите сначала с. 10, 11 в [1].

Решение. Емкость конденсатора с воздушным диэлектриком $C_1 = Q/\varphi_1$, а с фарфоровым диэлектриком $C_2 = Q/\varphi_2$. Емкость плоского конденсатора определяется из выражения $C_1 = (\epsilon_0 S)/d$, а емкость конденсатора с диэлектриком — из выражения $C_2 = \epsilon_0 \epsilon_r S/d$, где S — площадь пластин конденсатора; d — расстояние между пластинами; ϵ_r — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика (для фарфора $\epsilon_r = 5$). В первом случае $Q = C_1 \varphi_1 = \epsilon_0 S \varphi_1 / d$, во втором — $Q = \epsilon_0 \epsilon_r S \varphi_2 / d$. Так как наличие диэлектрика не изменяет заряд конденсатора, то оба выражения можно приравнять друг другу, тогда $(\epsilon_0 \epsilon_r S \varphi_2 / d) = (\epsilon_0 S \varphi_1 / d)$, откуда $\varphi_2 = \varphi_1 (\epsilon_0 / \epsilon_r) = 200 \cdot (1/5) = 40$ В.

1.9. Во сколько раз изменится емкость плоского конденсатора, если расстояние между пластинами уменьшить в 3 раза?

Указание: изучите сначала с. 10, 11 в [1].

1.10. Рассчитать погонную емкость C_0 двухпроводной линии, если расстояние между проводами $a = 10$ см, а диаметры проводов $d = 2$ мм (рис. 1.1, а).

Решение. Если имеется два проводника, то между ними существует емкость, значение которой зависит от длины проводников. Емкость проводников длиной 1 м называется погонной и обозначается C_0 . Расчет емкости между двумя проводниками производится по формуле

$$C = (\epsilon_0 \epsilon_r \pi l) / [\ln(2a/d)], \quad (1.1)$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; ϵ_r — относительная диэлектрическая проницаемость среды (для воздуха $\epsilon_r = 1$); $\pi = 3,14$; l — длина проводов, м; a — расстояние между центрами проводов; d — диаметр проводов. Так как для расчета емкости приходится вычислять отношение a/d , то эти величины могут выражаться в любых одинаковых единицах. На практике наиболее удобными

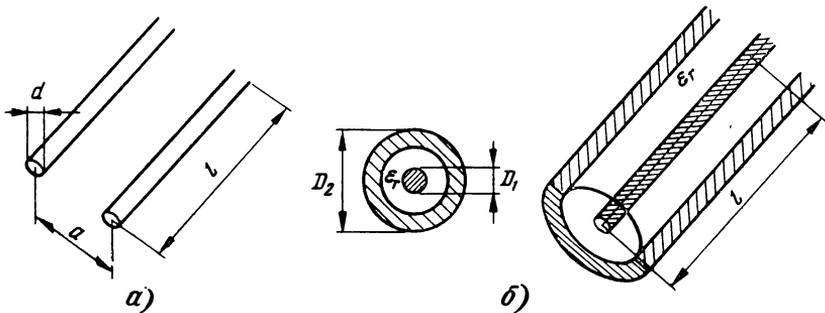


Рис. 1.1

являются сантиметры (1 см=0,01 м). Емкость в этом случае получается в фарадах. Выражение натурального логарифма удобно перевести в выражение десятичного логарифма. Как известно, $\ln A = 2,3 \lg A$. Тогда формула (1.1) приобретает вид

$$C = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \epsilon_r 3,14l}{2,3 \lg(2a/d)} = \frac{12,1l \cdot 10^{-12}}{\lg(2a/d)}, \quad \Phi = 12,1l / [\lg(2a/d)], \text{ пФ.} \quad (1.2)$$

(приставка «п» читается «пико» и означает 10^{-12}). Подставим числовые данные $C_0 = (12,1 \cdot 1) / [\lg(2 \cdot 10 / 0,2)] = 12,1 / \lg 100 = 12,1 / 2 = 6,05$ (пФ/м).

1.11. Какую емкость имеет двухпроводная линия, параметры которой приведены в задаче 1.10, если длина линии $l = 5$ м?

Указание: разберите сначала задачу 1.10.

1.12. Какую емкость будет иметь линия, параметры которой приведены в задаче 1.10, если диаметр проводов равен 0,1 мм?

Указание: разберите сначала задачу 1.10.

1.13. При каком расстоянии между проводами емкость двухпроводной линии, параметры которой приведены в задаче 1.10, имеет погонную емкость $C_0 = 10$ пФ/м.

Указание: разберите сначала задачу 1.10.

Решение. Из формулы (1.2) следует, что $\lg(2a/d) = 12,1/C_0 = 12,1/10 = 1,21$. Потенцируя обе части равенства, получим $2a/d = 10^{1,21} = 16,22$, откуда $a = 16,22d/2 = 8,11d$. При $d = 2$ мм $a = 16,22$ мм = 1,622 см.

1.14. При каком расстоянии между проводами при длине проводов 10 м и диаметре 2 мм емкость между проводами равна 60,5 пФ.

Указание: разберите сначала задачи 1.10 и 1.13.

1.15. Во сколько раз изменится емкость двухпроводной линии, если проводники поместить в воду?

Указание: изучите сначала с. 6, 7 в [1].

1.16. Рассчитать погонную емкость коаксиального кабеля с диаметром жилы $D_1 = 1$ мм, оплетки $D_2 = 10$ мм с диэлектриком из фторопласта ($\epsilon_r = 2,3$).

Решение. Коаксиальным называется кабель, имеющий центральную жилу диаметром D_1 , окруженную диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_r и внешней оплеткой диаметром D_2 при длине кабеля l (рис. 1.1, б). Емкость такого кабеля определяется по формуле

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r 2\pi l}{\ln(D_2/D_1)} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2,3 \cdot 14 \epsilon_r l}{2,3 \lg(D_2/D_1)} = 24,16 \cdot 10^{-12} [\epsilon_r l / \lg(D_2/D_1)] \Phi =$$

$= 24,16 [(\epsilon_r l) / \lg(D_2/D_1)],$ пФ. Погонной емкостью C_0 называется емкость кабеля длиной 1 м, тогда $C_0 = 24,16 [2,3 \cdot 1 / \lg(10/1)] = 24,16 (2,3/1) = 55,58$ пФ/м.

1.17. Какова емкость кабеля длиной 8 м, параметры которого приведены в задаче 1.16?

Указание: разберите сначала задачу 1.16.

1.18. Во сколько раз изменится емкость кабеля, если диаметр центральной жилы оставить без изменения, а диаметр оплетки увеличить в 2 раза?

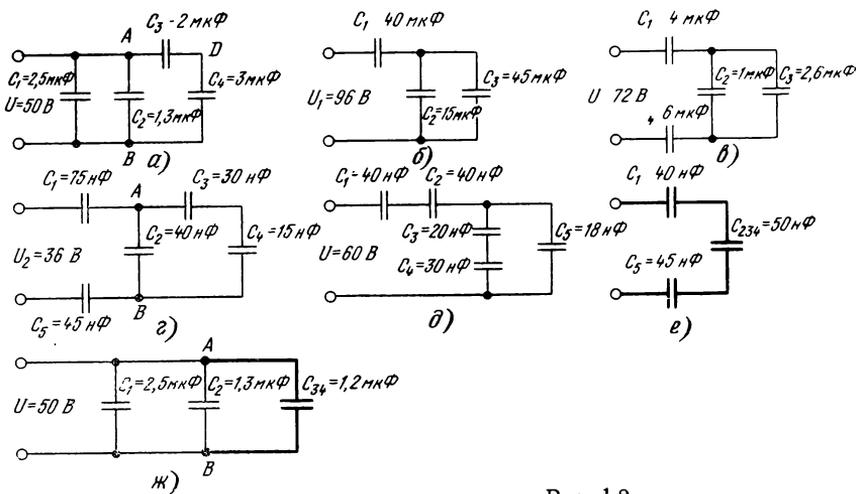


Рис. 1.2

Указание: разберите сначала задачу 1.16.

1.19. Выберите геометрические размеры кабеля при $\epsilon_r = 2$, чтобы погонная емкость C_0 оказалась равной 20; 40; 60; 80 и 100 пФ/м. Постройте кривую $D_2/D_1 = f(C_0)$.

Решение. Рассчитаем первый случай. Так как $C_0 = 24,16[\epsilon_r / \lg(D_2/D_1)]$, то $\lg(D_2/D_1) = 24,16 \epsilon_r / C_0$. При $C_0 = 20$ пФ/м $\lg(D_2/D_1) = (24,16 \cdot 2) / 20 = 2,416$. Потенцируя обе части равенства, получаем $D_2/D_1 = 10^{2,416} = 260$, откуда $D_2 = 260 D_1$.

1.20. Рассчитайте напряжения на каждом конденсаторе, заряд каждого конденсатора и всей цепи, энергию каждого конденсатора и всей цепи в схемах, показанных на рис. 1.2, а—д.

Указание: изучите сначала с. 12—14 в [1].

Решение. Рассчитаем цепь, показанную на рис. 1.2, а. Заменим конденсаторы C_3 и C_4 одним эквивалентным C_{34} . Так как эти конденсаторы соединены последовательно, то $C_{34} = C_3 C_4 / (C_3 + C_4) = 2 \cdot 3 / (2 + 3) = 1,2$ мкФ (поскольку емкость каждого конденсатора выражена в микрофарадах, значение результирующей емкости оказывается также в микрофарадах). Все емкости в данной схеме соединены параллельно, поэтому эквивалентная емкость цепи равна арифметической сумме емкостей всех конденсаторов: $C_{\text{эк}} = C_1 + C_2 + C_{34} = 2,5 + 1,3 + 1,2 = 5$ мкФ. Если конденсаторы соединены параллельно, то напряжения на всех конденсаторах одинаковые, равные напряжению источника, приложенного к цепи, а заряды в общем случае различные, определяемые из выражения $Q = CU$. На этом основании $Q_1 = C_1 U = 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 125 \cdot 10^{-6}$ Кл = 125 мкКл (напомним, что приставка «мк» читается «микро», означает 10^{-6} , т. е. одну миллионную часть значения той физической величины, перед которой эта приставка записана).

Аналогично $Q_2 = C_2 U = 1,3 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 65 \cdot 10^{-6}$ Кл = 65 мкКл, $Q_{34} = C_{34} U = 1,2 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 60 \cdot 10^{-6}$ Кл = 60 мкКл. При последовательном соединении конденсаторов заряд каждого из них равен заряду всей последовательной цепи, а напряжение каждого конденсатора определяется из выражения

$U_C = Q/C$. На этом основании $U_{C_3} = Q_{34}/C_3 = 60 \cdot 10^{-6}/2 \cdot 10^{-6} = 30$ В, а $U_{C_4} = Q_{34}/C_4 = 60 \cdot 10^{-6}/3 \cdot 10^{-6} = 20$ В. Очевидно, что при последовательно соединенных конденсаторах напряжение, приложенное к этой последовательной цепи, распределяется обратно пропорционально значениям емкости, т. е. на малой емкости оказывается большее напряжение, а на большой — малое. Сумма напряжений на C_3 и C_4 равна напряжению U . (Действительно, $30+20=50$.) Энергия каждого конденсатора определяется из выражения $W_9 = CU^2/2$. Соответственно $W_{C_1} = C_1 U^2/2 = 2,5 \cdot 10^{-6}/(50)^2/2 = 3,125 \times 10^{-3}$ Дж = 3,125 мДж, $W_{C_2} = 1,3 \cdot 10^{-6} (50)^2/2 = 1,625$ мДж, $W_{C_3} = 2 \times 10^{-6} (30)^2/2 = 0,9$ мДж, $W_{C_4} = 3 \cdot 10^{-6} (20)^2/2 = 0,6$ мДж.

Произведем проверку. Энергия всей цепи определяется из выражения $W_{C_{\text{эк}}} = C_{\text{эк}} U^2/2 = 5 \cdot 10^{-6} (50)^2/2 = 6,25$ мДж. Сравним с суммой энергий, запасенных во всех конденсаторах: $W_{C_1} + W_{C_2} + W_{C_3} + W_{C_4} = 3,125 + 1,625 + 0,9 + 0,6 = 6,25$ мДж. Проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно. Рассчитаем кратко, без комментариев напряжения, заряды и энергии конденсаторов в цепи, показанной на рис. 1.2, г: $C_{34} = (C_3 C_4)/(C_3 + C_4) = (30 \cdot 15)/(30 + 15) = 10$ нФ, $C_{234} = C_2 + C_{34} = 40 + 10 = 50$ нФ (приставка «н» читается «нано», означает 10^{-9}). Получилась эквивалентная цепь, состоящая из трех конденсаторов ($C_1 = 75$ нФ, $C_{234} = 50$ нФ и $C_5 = 45$ нФ), соединенных последовательно. Определим эквивалентную емкость всей цепи: $1/C_{\text{эк}} = 1/C_1 + 1/C_{234} + 1/C_5 = 1/75 + 1/50 + 1/45 = [(50 \cdot 45) + (75 \cdot 45) + (75 \cdot 50)]/75 \cdot 50 \cdot 45 = 9375/75 \cdot 50 \cdot 45$, откуда $C_{\text{эк}} = 75 \cdot 50 \cdot 45/9375 = 18$ нФ. Можно было сделать и по-другому: заменить конденсаторы C_1 и C_{234} эквивалентным C_{1234} , а получившуюся емкость соединить последовательно с емкостью C_5 . В этом случае $C_{1234} = (C_1 \cdot C_{234})/(C_1 + C_{234}) = (75 \cdot 50)/(75 + 50) = 30$ нФ, $C_{\text{эк}} = (C_5 \cdot C_{1234})/(C_5 + C_{1234}) = (45 \cdot 30)/(45 + 30) = 18$ нФ. (Расчеты при этом получаются более простыми). Определим заряд цепи: $Q_{\text{ц}} = C_{\text{эк}} U = 18 \cdot 10^{-9} \cdot 36 = 648$ нКл. Напряжение на конденсаторе $U_{C_1} = Q_{\text{ц}}/C_1 = (648 \cdot 10^{-9})/75 \cdot 10^{-9} = 8,64$ В. Аналогично напряжение между точками А и В $U_{AB} = U_{234} = Q_{\text{ц}}/C_{234} = 648 \cdot 10^{-9}/50 \cdot 10^{-9} = 12,96$ В; $U_{C_5} = Q_{\text{ц}}/C_5 = 648 \cdot 10^{-9}/45 \cdot 10^{-9} = 14,4$ В.

Произведем проверку. Очевидно, что $U_{C_1} + U_{AB} + U_{C_5}$ должно равняться входному напряжению, т. е. 36 В. Действительно, $8,64 + 12,96 + 14,4 = 36$ В, следовательно, данная проверка выполняется. Определим напряжения на конденсаторах C_2, C_3, C_4 . $U_{C_2} = U_{AB} = 12,96$ В. Заряд эквивалентной емкости C_{34} $Q_{34} = C_{34} U_{AB} = 10 \cdot 10^{-9} \cdot 12,96 = 129,6 \cdot 10^{-9}$ Кл. Так как емкости C_3 и C_4 соединены последовательно, то $Q_3 = Q_4 = Q_{34} = 129,6 \cdot 10^{-9}$ Кл. Напряжения на конденсаторах C_3 и C_4 : $U_{C_3} = Q_3/C_3 = 129,6 \cdot 10^{-9}/30 \cdot 10^{-9} = 4,32$ В; $U_{C_4} = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{129,6 \cdot 10^{-9}}{15 \cdot 10^{-9}} = 8,64$ В. Очевидно, что $U_{C_3} + U_{C_4}$ должно равняться U_{AB} . Действительно, $4,32 + 8,64 = 12,96$ В. Рассчитаем запасы энергии в каждом конденсаторе.

$$W_1 = C_1 U_1^2/2 = 75 \cdot 10^{-9} (8,64)^2/2 = 2,79936 \text{ мкДж.}$$

$$W_2 = C_2 U_2^2/2 = 40 \cdot 10^{-9} (12,96)^2/2 = 3,359232 \text{ мкДж.}$$

$$W_3 = C_3 U_3^2/2 = 30 \cdot 10^{-9} (4,32)^2/2 = 0,279936 \text{ мкДж.}$$

$$W_4 = C_4 U_4^2 / 2 = 15 \cdot 10^{-9} (8,64)^2 / 2 = 0,559872 \text{ мкДж.}$$

$$W_5 = C_5 U_5^2 / 2 = 45 \cdot 10^{-9} (14,4)^2 / 2 = 4,6656 \text{ мкДж.}$$

Произведем проверку. Энергия всей цепи определяется из выражения $W_{\Sigma} = C_{\Sigma} U^2 / 2 = 18 \cdot 10^{-9} (36)^2 / 2 = 11,664 \text{ мкДж}$. Сумма энергий конденсаторов также равна 11,664 мкДж. Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

Глава 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

2.1. Напряжение со значением $U = 0,5 \text{ В}$ выразить в милливольтгах (мВ) и микровольтах (мкВ).

Решение. Единица «м» читается «милли», означает «одна тысячная» любой физической величины, в том числе и напряжения. Так как всякая величина с приставкой «милли» в тысячу раз меньше основной, т. е. не имеющей данной приставки, то число «милли-единиц» в тысячу раз больше числа основных единиц. Следовательно, чтобы числовые значения, выраженные в вольтах, превратить в числовые значения, выраженные в милливольтгах, необходимо число вольт умножить на $1000 = 10^3$. На этом основании $U = 0,5 \text{ В} = 0,5 \cdot 10^3 \text{ мВ} = 500 \text{ мВ}$. Аналогично, поскольку в каждом вольте содержится $1\,000\,000 = 10^6 \text{ мкВ}$ (читается «микровольт»), то $U = 0,5 \text{ В} = 0,5 \cdot 10^6 \text{ мкВ} = 500\,000 \text{ мкВ} = 0,5 \cdot 10^6 \text{ мкВ}$. Таким образом, $U = 0,5 \text{ В} = 500 \text{ мВ} = 0,5 \cdot 10^3 \text{ мВ} = 500\,000 \text{ мкВ} = 0,5 \cdot 10^6 \text{ мкВ}$. Заметим, что запятую в целой части числа записывают или так, чтобы целая часть числа была однозначной, или чтобы степень числа 10 была кратна трем. Например, $0,5 \text{ В}$ можно записать несколькими способами: $5 \cdot 10^2 \text{ мВ} = 0,5 \cdot 10^3 \text{ мВ} = 5 \cdot 10^5 \text{ мкВ} = 0,5 \times 10^6 \text{ мкВ}$. Напомним, что единицы, названные именами ученых, записываются с большой (прописной) буквы, а приставки «милли» (10^{-3}), «микро» (10^{-6}), «нано» (10^{-9}), «пико» (10^{-12}) — малыми (строчными) буквами (м, мк, н, п).

2.2. Емкость со значением $C = 25 \text{ нФ}$ выразить в микрофарадах (мкФ), пикофарадах (пФ) и фарадах (Ф).

Решение. Единица «микрофарада» в 10^3 раз крупнее единицы «нанофарада». Поскольку $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$, а $1 \text{ нФ} = 10^{-9} \text{ Ф}$, то отношение $C (\text{мкФ}) / C (\text{нФ}) = 10^{-6} / 10^{-9} = 10^9 / 10^6 = 10^3 = 1000$. Очевидно, что емкость, выраженная в микрофарадах, в тысячу раз меньше, чем эта же емкость, выраженная в нанофарадах. Следовательно, чтобы число, выраженное в нанофарадах, выразить в микрофарадах, необходимо число нанофард поделить на $1000 = 10^3$ или, что одно и то же, умножить на 10^{-3} . Таким образом, $C = 25 \text{ нФ} = (25/1000) \text{ мкФ} = (25/10^3) \text{ мкФ} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ мкФ}$. Так как $25 \cdot 10^{-3} = 0,025$, то последнее

число можно записать так же, как $2,5 \cdot 10^{-2}$ мкФ. Таким образом, $C = 25 \text{ нФ} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ мкФ} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ мкФ} = 0,025 \text{ мкФ}$.

Заметим, что записывать числовые значения следует, как правило, с множителем 10 в соответствующей степени, которая может быть как положительной, так и отрицательной. Выразим емкость 25 нФ в пикофарадах. Так как $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$, а $1 \text{ нФ} = 10^{-9} \text{ Ф}$, то $C (\text{нФ})/C (\text{пФ}) = 10^{-9}/10^{-12} = 10^{12}/10^9 = 10^3$. Следовательно, пикофарада — единица, в тысячу раз меньшая, чем нанофарада, и соответственно в одной и той же емкости число пикофарад в тысячу раз больше числа нанофарад, в 10^6 раз больше числа микрофарад и в 10^{12} раз больше числа фарад. Таким образом, $C = 25 \text{ нФ} = 25 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ мкФ} = 25 \cdot 10^3 \text{ пФ}$.

2.3. Выразить в вольтах напряжения: а) $U = 6,3 \text{ мВ}$; б) $U = 47 \text{ мкВ}$.

Решение. Чтобы милливольты превратить в вольты, необходимо число милливольт умножить на множитель 10^{-3} . Таким образом, напряжение $U = 6,3 \text{ мВ} = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ В}$. Аналогично $U = 47 \text{ мкВ} = 47 \cdot 10^{-6} \text{ В}$.

2.4. Выразить в миллисекундах (мс) и микросекундах (мкс) время $t = 0,15 \text{ с}$.

Указание: сначала разберите задачи 2.1—2.3.

2.5. Выразить в герцах (Гц) и мегагерцах (МГц) частоту $f = 40 \text{ кГц}$. Напомним, что приставка «мега» (записывается большой буквой М) означает 10^6 .

2.6. Выразить в миллиамперах (мА) и микроамперах (мкА) ток $I = 0,35 \text{ А}$.

Указание: сначала разберите задачи 2.1—2.3.

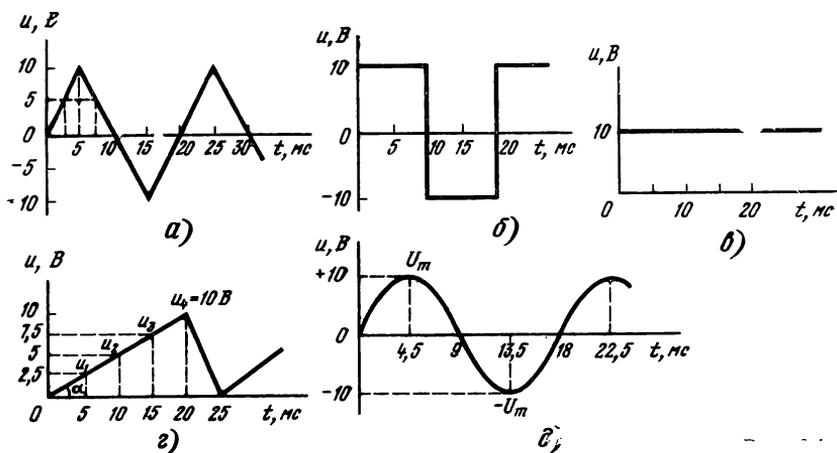
2.7. Выразить в А: а) ток $I = 75 \text{ мА}$; б) ток $I = 75 \text{ мкА}$.

Указание: сначала разберите задачи 2.1—2.3.

2.8. По графикам, показанным на рис. 2.1, а—д, определить мгновенные значения напряжений через время $t = 0—5—10—15—20—25 \text{ мс}$.

Указание: сначала изучите с. 16—19 и 21—22 в [1].

Решение. Из графика рис. 2.1, а видно, что при $t = 0$ $u = 0$, при $t = 5 \text{ мс}$ $u = 10 \text{ В}$, при $t = 10 \text{ мс}$ $u = 0$, при $t = 15 \text{ мс}$ $u = -10 \text{ В}$, при $t = 20 \text{ мс}$ $u = 0$, при $t = 25 \text{ мс}$ $u = 10 \text{ В}$. В соответствии с графиком рис. 2.1, б в интервале от $t = 0$ до $t = 10 \text{ мс}$ мгновенные напряжения остаются неизменными, равными 10 В, в момент $t = 10 \text{ мс}$ напряжение скачкообразно изменяется от 10 до -10 В . Последнее остается неизменным до момента $t = 20 \text{ мс}$, в момент $t = 20 \text{ мс}$ напряжение снова скачкообразно возрастает до 10 В и т. д. Кривая, нанесенная на рис. 2.1, в, показывает, что напряжение в любой момент остается неизменным, равным 10 В (подобные сигналы иногда называют не вполне точно «постоянным током»). Из графика рис. 2.1, д: при $t = 0$ $u = 0$, при $t = 4,5 \text{ мс}$ $u = 10 \text{ В}$, при $t = 9 \text{ мс}$ $u = 0$, при $t = 13,5 \text{ мс}$ $u = -10 \text{ В}$, при $t = 18 \text{ мс}$ $u = 0$, при $t = 22,5 \text{ мс}$ $u = 10 \text{ В}$.



Разберем мгновенные значения напряжений, показанных на рис. 2.1, г. Заметим, что кривые, у которых напряжения нарастают по линейному закону медленно, а спадают быстро, называются *пилообразными*. Напряжения и токи, имеющие пилообразную форму, широко используются в различных электронных устройствах, в том числе осциллографах и телевизорах. Из графика рис. 2.1, г видно, что при $t=0$ $u=0$, при $t=20$ мс $u=10$ В, при $t=25$ мс $u=0$. Определим значения напряжения u_1 при $t=5$ мс, u_2 при $t=10$ мс и u_3 при $t=15$ мс. Определить напряжения u_1, u_2, u_3 можно двумя способами.

Первый способ чисто графический. При его использовании определяют, во сколько раз отрезок lu_1 , равный $0-u_1$ на вертикальной оси, меньше отрезка l_{10} , равного $0-10$ В. Очевидно, что напряжение u_1 во столько же раз меньше напряжения 10 В. Например, если отрезок $0-10$ В составляет 5 см, а отрезок $0-u_1$ 1,25 см, то напряжение $u_1=2,5$ В, так как $u_1 = (l_{\text{при } u_1} / l_{\text{при } 10 \text{ В}}) \cdot 10 = (1,25/5) \cdot 10 = 2,5$ В. Аналогично можно определить напряжения в различные моменты.

Второй способ — аналитический. Зная напряжение в момент $t=20$ мс, определяют тангенс угла наклона α характеристики прямого хода напряжения. Тангенс есть отношение катета, противолежащего углу, к катету, прилежащему к углу, поэтому $\text{tg } \alpha = (u_4/t_4) = 10/20 = 0,5$. Значение напряжения в любой момент определяется из выражения $u_t = t \cdot \text{tg } \alpha$, где u_t — напряжение в момент t . Например, при $t_1=5$ мс $u_1 = t_1 \cdot \text{tg } \alpha = 5 \cdot 0,5 = 2,5$ В и т. д.

2.9. Определить значения напряжений по кривой рис. 2.1, д через время $t_1=1,5$ мс, $t_2=2,25$ мс, $t_3=3$ мс, $t_4=6$ мс, $t_5=6,75$ мс, $t_6=7,5$ мс, $t_7=10,5$ мс, $t_8=11,25$ мс, $t_9=12$ мс, если известно, что кривая представляет синусоиду.

Указание: сначала изучите с. 19—21 и подробно разберите рис. 2.5, а в [1].

Решение. Из графика видно, что период кривой T (т. е. время, через которое все мгновенные значения повторяются) равен 18 мс, что в угловой мере составляет 360° . Следовательно, время 1 мс в данной кривой соответствует углу $360^\circ/18 \text{ мс} = 20^\circ/\text{мс}$. При времени $t_1=1,5$ мс угол равен $20 \cdot 1,5 = 30^\circ$, при $t_2=2,25$ мс — соответственно $20 \cdot 2,25 = 45^\circ$, аналогично при $t_3=3$ мс 60° , при $t_4=6$ мс 120° , при $t_5=6,75$ мс 135° , при $t_6=7,5$ мс 150° , при $t_7=10,5$ мс 210° , при $t_8=11,25$ мс 225° , при $t_9=12$ мс 240° . Мгновенное значение напряжения при синусоидальной форме сигнала в каждый момент есть произведение наибольшего напряжения, которое оказывается за период, на синус угла, соответствующего части периода в данный момент. Следовательно, мгновенное значение напряжения в момент $t=0$ определяется из выражения $u_0 = U_m \sin 0^\circ$. Значение U_m , как видно из рис. 2.1, г, равно 10 В, а $\sin 0^\circ = 0$. Следовательно, $u_0 = 10 \sin 0^\circ = 10 \cdot 0 = 0$ В, что соответствует рис. 2.1, г и 2.5 из [1]. Рассчитаем u_1 при $t_1=1,5$ мс: $u_1 = 10 \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5$ В. Аналогично $u_2 = 10 \sin 45^\circ = 10 \cdot 0,707 = 7,07$ В; $u_3 = 10 \sin 60^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66$ В; $u_4 = 10 \sin 120^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66$ В; $u_5 = 10 \sin 135^\circ = 10 \cdot 0,707 = 7,07$ В; $u_6 = 10 \sin 150^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5$ В; $u_7 = 10 \sin 210^\circ = 10(-0,5) = -5$ В; $u_8 = 10 \sin 225^\circ = 10(-0,707) = -7,07$ В; $u_9 = 10 \sin 240^\circ = 10(-0,866) = -8,66$ В.

2.10. По условиям задачи 2.9 рассчитать мгновенные значения напряжений при $t_{10}=14,25$ мс, $t_{11}=15,0$ мс, $t_{12}=15,75$ мс, $t_{13}=19,5$ мс, $t_{14}=20,25$ мс, $t_{15}=21$ мс.

Указание: сначала разберите задачу 2.9.

2.11. По условиям задачи 2.9 рассчитать мгновенные значения напряжений в интервале от $t=0$ до $t=18$ мс через каждые 2 мс.

Указание: сначала разберите задачу 2.9.

2.12. В электрической цепи за время $t=10$ мс заряд Q изменился на 5 Кл (читается «кулон»). Определить ток I , если заряд изменялся равномерно.

Указание: сначала изучите § 2.7 на с. 24—26 в [1].

Решение. Если заряд изменяется во времени равномерно, то мгновенные значения тока будут одинаковыми в различные моменты. Протекающий в цепи ток будет постоянным. В этом случае ток $I = Q/t = 5/10 = 0,5$ А (читается «ампер»).

2.13. На сколько изменится заряд Q , если постоянный ток со значением $I = 0,56$ мА протекал в течение: а) $t_1 = 15$ мс; б) $t_2 = 2,5$ мин.

Решение. При постоянном токе $Q = It$. Для решения задачи все физические величины следует выразить в основных единицах, т. е. ток — в амперах, время — в секундах, при этом заряд получается в кулонах: $Q_1 = It_1 = 0,56 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot 10^{-3} = 8,4 \times 10^{-6}$ Кл = 8,4 мкКл; $Q_2 = It_2 = 0,56 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5 \cdot 60 = 84 \cdot 10^{-3}$ Кл = 84 мКл (напомним, что в минуте содержится 60 с).

Таблица 2.1

$t, \text{с}$	0	4	8	12	16	20	24
$q, \text{Кл}$	0	-0,96	-1,28	-0,96	0	1,6	3,84
$i, \text{А}$	-0,32	-0,16	0	0,16	0,32	0,48	0,64

2.14. В течение какого времени заряд изменится на: а) $Q_1=100$ мкКл; б) $Q_2=20$ мкКл; в) $Q_3=5$ Кл, если ток во всех случаях постоянный, равный 0,5 мА?

Указание: сначала разберите задачи 2.12 и 2.13.

2.15. Заряд q изменяется по закону $q=20 \cdot 10^{-3}t^2 - 0,32t$. Определить закон изменения тока i во времени.

Указание: сначала разберите с. 25 в [1].

Решение. Так как в общем случае мгновенные токи определяются из выражения $i=dq/dt$, то в данном примере $i=(d/dt)[20 \cdot 10^{-3}t^2 - 0,32t]=20 \cdot 10^{-3} \cdot 2t - 0,32$. Рассчитаем q и i в интервале от $t=0$ до $t=24$ мс через 4 мс. Результаты расчетов сведены в табл. 2.1 и нанесены на графики, показанные на рис. 2.2. Из расчета видно, что значение тока пропорционально значению не заряда, а скорости изменения заряда во времени, иначе говоря, крутизне характеристики кривой $q=f(t)$.

2.16. Рассчитать и построить на одном графике (желательно различными цветами) кривые $q=f(t)$ и $i=f(t)$, если $q=0,32t - 20 \cdot 10^{-3}t^2$.

Указание: сначала разберите задачу 2.15.

2.17. Заряд q определяется выражением $q=Dt^2 - Ft$. Определить время, через которое: а) заряд q равен нулю; б) ток i равен нулю, если $D=1$; $F=1$.

Указание: сначала разберите задачу 2.15.

2.18. Определить размерности коэффициентов D и F по условию задачи 2.17.

Решение. В любых формулах, описывающих физические процессы, размерность всех членов, соединенных знаками «плюс», «минус» или «равно», может быть только одинаковой. Так как размерность левой части равенства есть Кл=А·с, то размерность каждого слагаемого правой части выражения так-

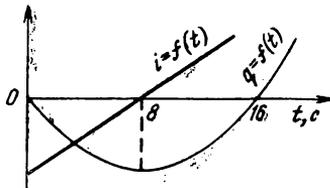


Рис. 2.2

же А·с. Определим размерность коэффициента $D \cdot [A \cdot c] = Dc^2$, откуда $[D] = A \cdot c / c^2 = A / c$. Аналогично $[A \cdot c] = F \cdot c$ или $[F] = A \cdot c / c = A$.

2.19. Рассчитать сопротивление медного проводника длиной 10 м, диаметром 0,2 мм.

Указание: сначала изучите § 2.8 и 2.9 на с. 26, 27 в [1].

Решение. Поскольку сечение проводника имеет форму круга, прежде всего следует определить площадь сечения S . Напомним, что площадь круга $S = \pi D^2 / 4$, где π — постоянное число, равное 3,14, а D — диаметр проводника. Строго говоря, для расчета любых физических величин в системе СИ (System International, т. е. система международная) длину следует брать в метрах (м), площадь — в квадратных метрах (м²), удельное сопротивление ρ — в Ом·м. В этом случае диаметр 0,2 мм следует выразить в линейных метрах. Для этого число миллиметров необходимо умножить на множитель 10^{-3} . Таким образом, $D = 0,2$ мм $= 0,2 \cdot 10^{-3}$ м, а $R = \rho l / S$. Из таблицы приложения 3 (см. с. 351) берем значение удельного сопротивления меди $\rho_m = 0,0175 \cdot 10^{-6}$ Ом·м, тогда $R = \rho l / S = \frac{\rho l}{\pi (D^2 / 4)} = 4 \rho l / \pi D^2 = (4 \cdot 0,0175 \cdot 10^{-6} \cdot 10) / (3,14 \cdot (0,2 \cdot 10^{-3})^2) = \frac{4 \cdot 0,0175 \cdot 10^{-6} \cdot 10}{3,14 \cdot 0,04 \cdot 10^{-6}}$.

Заметим, что для выполнения числовых операций каждый множитель удобно представлять в виде однозначного числа с десятичной частью и множителем 10 в соответствующей степени. На этом основании полученное выше выражение следует записать в виде $\frac{4 \cdot 1,75 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6} \cdot 10}{3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6}}$. После подобных преобразований легко производить сокращения. Очевидно, что в данном примере $R = (1,75 \cdot 10) / 3,14 = 17,5 / 3,14 = 5,57$ Ом. Поскольку измерять диаметры проводников в квадратных метрах на практике не слишком удобно, допускается в этом частном случае оценивать диаметры не в квадратных метрах, а в квадратных миллиметрах. Значение удельного сопротивления ρ при этом необходимо выражать в Ом·мм²/м. Длина проводника остается в метрах. Убедимся, что результат расчетов получается таким же. Действительно, $R = \rho l / S = 4 \rho l / \pi D^2 = [4 \cdot 0,0175 \cdot 10] / [3,14 \cdot (0,2)^2] = (4 \cdot 1,75 \cdot 10^{-2} \cdot 10) / (3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-2}) = 5,57$ Ом.

2.20. Обмотка трансформатора имеет 2000 витков медного провода диаметром $D = 0,2$ мм. Рассчитать резистивное сопротивление обмотки, если средняя длина витка $l_{cp} = 10$ см.

Указание: разберите сначала задачу 2.19.

2.21. Двухпроводная телефонная линия длиной $l = 1$ км выполнена из алюминиевого провода. Какой диаметр должен иметь провод, если общее сопротивление линии равно 100 Ом?

Решение. Линия двухпроводная, поэтому общая длина провода равна 2 км $= 2000$ м $= 2 \cdot 10^3$ м. Так как $R = \rho l / S$, то $S = \rho l / R = (0,028 \cdot 2000) / 100 = (2,8 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^3) / 10^2 = 0,56$ мм². Зная

сечение S , определяем диаметр провода D : $S = \pi D^2/4$, откуда $D^2 = 4S/\pi$, $D = \sqrt{4S/\pi} = 2\sqrt{S/\pi} = 2\sqrt{0,56/3,14} = 2\sqrt{0,178} = 2 \cdot 0,422 = 0,844$ мм.

2.22. Медную линию заменили алюминиевой. Во сколько раз возрастет сопротивление линии?

Указание: разберите сначала задачи 2.19 и 2.21.

2.23. Во сколько раз следует увеличить диаметр D алюминиевого провода по условию задачи 2.22, чтобы сопротивление линии осталось неизменным?

Указание: разберите сначала задачи 2.19 и 2.21.

2.24. Какую длину должен иметь проводник из нихрома диаметром 0,1 мм, чтобы его сопротивление составляло **1,1 кОм**?

Указание: разберите сначала задачи 2.19 и 2.21.

2.25. Рассчитайте удельные проводимости γ меди и алюминия.

Указание: сначала изучите § 2.9 на с. 27 в [1].

Решение. Удельная проводимость γ (читается «гамма») резистивных элементов есть величина, обратная удельному сопротивлению ρ , т. е. $\gamma = 1/\rho$, откуда $\gamma_{\text{м}} = 1/\rho_{\text{м}} = 1/0,0175 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}} = 57,1 \text{ м/Ом} \cdot \text{мм}^2$ или $1/(0,0175 \cdot 10^{-6}) \text{ 1/Ом} \cdot \text{м} = 57,1 \cdot 10^6 \text{ 1/Ом} \cdot \text{м}$. Аналогично $\gamma_{\text{ал}} = 1/\rho_{\text{ал}} = 1/0,028 = 35,7 \text{ м/Ом} \cdot \text{мм}^2 = 35,7 \cdot 10^6 \text{ 1/Ом} \cdot \text{м}$.

2.26. Резистивное сопротивление $R = 10$ Ом, определите его проводимость γ .

Указание: сначала изучите § 2.9 на с. 27 в [1].

2.27. Как изменится сопротивление проводника, если его диаметр увеличить в 2 раза?

Указание: сначала разберите задачи 2.19 и 2.21.

2.28. Сопротивление стальной телеграфной линии R при температуре $t = 20^\circ \text{C}$ равно 1000 Ом. На сколько процентов изменится сопротивление линии при колебании температуры от -30 до $+40^\circ \text{C}$?

Решение. Сопротивления металлических проводников зависят от температуры, причем $R_t = R_0(1 + \alpha \Delta t)$, где R_t и R_0 — сопротивления при начальной и конечной температурах соответственно; α — температурный коэффициент (т. е. величина, показывающая, на какую часть первоначального сопротивления изменяется сопротивление проводника при нагреве его на 1°C), берется из приложения 3; Δt — изменение температуры. Так как при $t = 20^\circ \text{C}$ $R = 1000$ Ом, то при $t = -30^\circ \text{C}$ $\Delta t = -50^\circ$, а при $t = 40^\circ \text{C}$ $\Delta t = 20^\circ \text{C}$. Определим сопротивление проводника в обоих случаях $R_{(t=-30^\circ)} = R_{(t=20^\circ)}(1 + \alpha \cdot \Delta t) = 1000 \cdot (1 - 50 \times \times 0,0062) = 1000(1 - 0,31) = 1000 \cdot 0,69 = 690$ Ом. Аналогично $R_{(t=40^\circ)} = \times R_{(t=0^\circ)}(1 + 210 \cdot 6,2 \cdot 10^3) = 1000 \cdot (1 + 12,4 \cdot 10^{-2}) = 1000 \times \times (1 + 0,124) = 1124$ Ом.

Таким образом, при изменении температуры от -30 до $+40^\circ\text{C}$ сопротивление линии, выполненной из стального провода, изменится от 690 до 1124 Ом, т. е. на 434 Ом, что в данном случае составляет 43,4% (на 31% уменьшается при понижении температуры от 20° до -30° и на 12,4% увеличивает-ся при ее возрастании от 20 до 40°C).

2.29. Во сколько раз увеличится сопротивление вольфрамовой нити лампы накаливания, если температура нагретой нити 2000°C ?

Указание: разберите сначала задачу 2.28.

2.30. Линейными или нелинейными являются проволочные резистивные сопротивления?

Указание: сначала изучите § 2.12 на с. 28—30 в [1] и разберите задачу 2.28.

Решение. При протекании по цепи электрического тока резисторы нагреваются, их сопротивления изменяются, причем тем больше, чем больший через них протекает ток. Строго говоря, проволочные резисторы являются элементами нелинейными. Однако при небольших изменениях температуры проводника изменение сопротивлений также оказывается незначительным, и практически цепь, состоящую из таких элементов, считают линейной. На практике часто пользуются критерием: если при протекании тока сопротивление изменяется не более чем на 10% (иногда на 20%), то такую цепь считают практически линейной. Определим диапазон температур, при котором проволочные резисторы можно считать практически линейными: $R_t = R_0(1 + \alpha \Delta t)$. Рассчитаем Δt , при которых $R_t = 1,1 R_0$ (т. е. сопротивление возрастает на 10%). Для наиболее распространенных материалов $\alpha = (0,004 \dots 0,006)$ 1/град. Выберем $\alpha \approx 0,005$ 1/град. Тогда $1,1R_0 = R_0(1 + 0,005\Delta t)$ или $0,005\Delta t = 1,1 - 1$, откуда $\Delta t = 0,1/0,005 = 20^\circ$. Таким образом, если при протекании тока температура проволочного сопротивления возрастает не более чем на 20°C , то такое сопротивление практически можно считать линейным.

2.31. Через резистивное сопротивление $R = 20$ Ом в течение 5 мин протекал неизменный во времени ток $I = 0,5$ А. Рассчитать электрическую энергию, преобразованную за это время в тепло и мощность преобразования.

Указание: сначала изучите § 2.13 и 2.14 на с. 30—34 в [1].

Решение. При постоянном во времени токе энергия электрического тока рассчитывается по формуле $A = I^2 R t = 0,5^2 \cdot 20 \cdot 60 = 1500$ Дж $= 1,5 \cdot 10^3$ Дж (читается «джоулей»). Мощность рассчитывается по формуле $P = I^2 R = 0,5^2 \cdot 20 = 5$ Вт (читается «ватт»).

2.32. Рассчитать напряжение на зажимах сопротивления $R = 20$ Ом, если форма напряжения неизменна во времени, а мощность $P = 5$ Вт.

Указание: разберите сначала задачу 5.31.

Решение. Так как в линейных резистивных сопротивлениях $I=U/R$, формулу мощности можно записать в виде $P=I^2R=(U/R)^2R=U^2/R$, откуда $U^2=PR$ и $U=\sqrt{PR}=\sqrt{5 \cdot 20}=10$ В.

2.33. В каком сопротивлении R за время $t=10$ мин выделяется энергия 600 Дж, если через сопротивление протекает неизменный во времени ток $I=1$ мА?

Указание: разберите сначала задачу 5.31.

Решение. Энергия неизменного во времени тока (постоянного тока) определяется из выражения $A=I^2Rt$, откуда $R=A/(I^2t)=600/[(10^{-3})^2 \cdot 600]=1/10^{-6}=10^6$ Ом=1 МОм. Напомним, что множитель 10^6 записывается в виде приставки «мега» (обозначается через М).

2.34. При каком неизменном во времени токе I в сопротивлении $R=100$ Ом выделяется мощность $P=0,4$ мВт?

Пояснения к задачам 2.35—2.47. Во всех указанных задачах требуется рассчитать действующее значение напряжения (тока) по заданной форме сигнала, т. е. определить действующие значения U (или I) по заданным мгновенным значениям u (или i). Напомним, что действующим значением переменного напряжения (тока) называется такое постоянное напряжение (ток), которое при прочих равных условиях выделяет такую же энергию, которую выделяет данное переменное напряжение (ток).

Прежде чем приступить к решению задач данного подраздела, следует изучить § 2.15 на с. 34—38 в [1]. В [1] показано, что действующие значения напряжений (токов) определяются из выражений

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}; \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt},$$

где u и i — мгновенные напряжения (токи).

В соответствии с данными формулами действующие значения называются также среднеквадратическими (не путайте со средними, это совершенно различные понятия!) При расчете действующих значений напряжений (токов) необходимо записывать аналитические выражения мгновенных значений по форме сигнала. Примеры получения таких выражений поясняются в последующих задачах. Следует также иметь в виду, что если закон, по которому изменяются мгновенные значения, в течение периода изменяется, то интеграл за период следует разбить на столько интегралов, сколько раз изменяется закон мгновенных значений за период. Во всех приведенных ниже задачах сигналы периодические, т. е. повторяющиеся через время T .

2.35. Рассчитать действующее значение U , если форма переменного во времени напряжения показана на рис. 2.3, а.

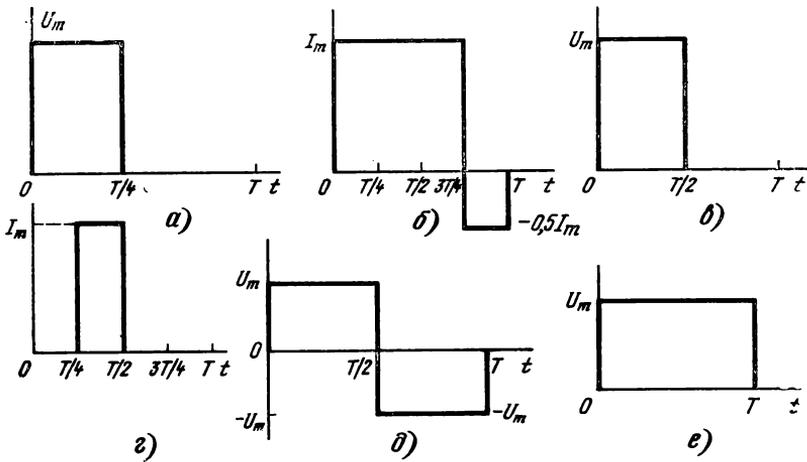


Рис. 2.3

Указание: сначала изучите § 2.15 в [1] и пояснения к решению задач 2.35—2.47 (см. выше).

Решение. Действующее значение меняющегося во времени напряжения U определяется из выражения

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} \quad \text{или} \quad U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt.$$

Как видно из рис. 2.3, *a*, в интервале от 0 до $T/4$ мгновенные значения не изменяются и остаются равными U_m , т. е. $u_1 = U_m$. В интервале от $T/4$ до T мгновенные значения равны нулю, т. е. $u_2 = 0$. Так как мгновенные значения изменяются в течение периода в данном случае по двум различным законам, интеграл за период приходится разбивать на два интеграла для интервалов $0 \dots T/4$ и $T/4 \dots T$. Так приходится делать потому, что в данном случае не существует выражения, с помощью которого можно было бы определить значения напряжения для любого момента в течение всего периода. Для удобства будем рассчитывать U^2 , а по окончании вычислений извлечем корень:

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/4} u_1^2 dt + \int_{T/4}^T u_2^2 dt \right] = \\ &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/4} U_m^2 dt + \int_{T/4}^T 0 \cdot dt \right]. \end{aligned}$$

Максимальное значение U_m выходит за знак интеграла $\int dt = t$, а $\int 0 \cdot dt = 0$, тогда $U^2 = \frac{1}{T} \left[U_m^2 t \right]_0^{T/4} = \frac{1}{T} U_m^2 \times \left(\frac{T}{4} - 0 \right) = (U_m T) / (T \cdot 4) = \frac{U_m^2}{4}$, откуда $U = U_m / 2 = 0,5 U_m$.

2.36. Рассчитать действующее значение тока I для сигнала, показанного на рис. 2.3,б.

Указание: разберите сначала задачу 2.35.

Решение. Как видно из графика рис. 2.3,б, в интервале от 0 до $3T/4$ $i_1 = I_m$, а в интервале от $3T/4$ до T $i_2 = -0,5 I_m$, следовательно,

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{3T/4} i_1^2 dt + \int_{3T/4}^T i_2^2 dt \right] = \\ &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{3T/4} I_m^2 dt + \int_{3T/4}^T (-0,5 I_m)^2 dt \right] = \\ &= \frac{1}{T} \left[I_m^2 \frac{3T}{4} + 0,25 I_m^2 \left(T - \frac{3T}{4} \right) \right] = \\ &= \frac{I_m^2}{T} [(3/4) + 0,25 (1/4)] = I_m^2 (3,25/4) = 0,8125 I_m^2, \end{aligned}$$

откуда $I = \sqrt{0,8125 I_m^2} = 0,9 I_m$.

2.37. Рассчитать действующее значение напряжения U по графику, показанному на рис. 2.3,в.

Указание: разберите сначала задачу 2.35.

2.38. Рассчитать действующее значение тока I по графику, показанному на рис. 2.3,г.

Указание: разберите сначала задачу 2.35.

2.39. Рассчитать действующее значение напряжения U по графику, показанному на рис. 2.3,д.

Указание: разберите сначала задачу 2.35.

2.40. Доказать, что действующее напряжение, мгновенные значения которого изменяются так, как показано на рис. 2.3,е, равно U_m .

Указание: разберите сначала задачу 2.35.

Решение. $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}$ или $U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt$. В дан-

ном случае мгновенные значения в течение периода не изменяются: $u = U_m$, поэтому

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 dt = (U_m T) / T = U_m^2.$$

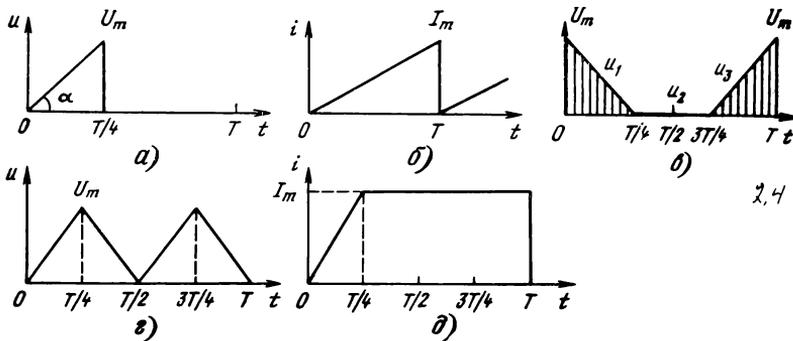


Рис. 2.4

2.41. Рассчитать действующее значение напряжения U по графику, показанному на рис. 2.4,а.

Указание: сначала изучите § 2.15 в [1], разберите пояснение перед задачей 2.35 и ее решение.

Решение. Для расчета действующих значений напряжений необходимо знать выражения, связывающие мгновенные значения этих напряжений со временем. В задачах 2.35—2.40 (см. рис. 2.3,а—е) все напряжения оставались в соответствующих интервалах времени одинаковыми и, следовательно, не зависящими от времени, поэтому в сигналах, показанных на рис. 2.3, $u = U_m$.

В сигналах, показанных на рис. 2.4, напряжения изменяются в зависимости от времени, поэтому в каждом случае следует прежде всего получать выражения, связывающие мгновенные напряжения (или токи) с временем t . Как видно из рис. 2.4,а, напряжение в интервале от $0 \dots T/4$ возрастает линейно от 0 до U_m , а в интервале от $T/4 \dots T$ равно нулю. Поскольку в интервале $0 \dots T/4$ напряжение возрастает по линейному закону, уравнение мгновенных значений описывается уравнением прямой линии, которое, как известно, имеет вид $y = kx$, где y — функция (в нашем случае — мгновенные значения u); x — аргумент (в нашем случае — время t); k — тангенс угла наклона прямой (в нашем случае — отношение катета, противолежащего углу α , т. е. U_m , к катету, прилежащему к углу α , т. е. $T/4$). Таким образом, в интервале от 0 до $T/4$ мгновенные напряжения $u(t)$ описываются уравнением $u_1(t) = \left(\frac{U_m}{T/4}\right) t$,

т. е. $u_1(t) = \frac{4U_m}{T}t$. В интервале от $T/4$ до T $u_2 = 0$. Тогда

$$U^2 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/4} u_1^2 dt + \int_{T/4}^T u_2^2 dt \right] = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/4} \left(\frac{4U_m}{T}t\right)^2 dt + \int_{T/4}^T 0 \cdot dt \right] =$$

$$= \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/4} \frac{16U_m^2}{T^2} t^2 dt + 0 \right] = \frac{1 \cdot 16U_m^2}{T \cdot T^2} \int_0^{T/4} t^2 dt.$$

Напомним, что $\int t^n dt = \frac{t^{(n+1)}}{n+1}$, следовательно, $U^2 =$

$$= \frac{16U_m^2}{T^3} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{T/4} = \frac{16U_m^2}{T^3 \cdot 3} \left(\frac{T}{4} \right)^3 = \frac{16 \cdot U_m^2 T^3}{T^3 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 4} = U_m^2 / 12,$$

откуда $U = \sqrt{U_m^2 / 12} = U_m / 3,464 = 0,289U_m$.

2.42. Рассчитать действующее значение тока I по графику, показанному на рис. 2.4,б.

Указание: разберите сначала задачи 2.35 и 2.41.

2.43. Рассчитать действующее значение напряжения U по графику, показанному на рис. 2.4,в.

Указание: разберите сначала задачи 2.35 и 2.41.

Решение. В интервале от 0 до $T/4$ $u_1 = U_m - (4U_m/T)t$ (действительно, при $t=0$ $u_1 = U_m$, при $t=T/4$ $u_1 = 0$), в интервале от $T/4$ до $3T/4$ $u_2 = 0$, в интервале от $3T/4$ до T $u_3 = (4U_m/T)(t - 3T/4)$ (действительно, при $3T/4$ $u_3 = 0$, при T $u_3 = U_m$). Следовательно,

$$U^2 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/4} u_1^2 dt + \int_{T/4}^{3T/4} u_2^2 dt + \int_{3T/4}^T u_3^2 dt \right] =$$

$$= \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/4} \left(U_m - \frac{4U_m}{T} t \right)^2 dt + \int_{3T/4}^T \left(\frac{4U_m}{T} t - 3U \right)^2 dt \right].$$

Как видно из рис. 2.4,в, площади заштрихованных треугольников (а следовательно, и квадраты этих площадей) равны друг другу. В этом случае можно записывать только один интеграл с коэффициентом 2, тогда

$$U^2 = 2 \cdot \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/4} \left(U_m - \frac{4U_m}{T} t \right)^2 dt \right] =$$

$$= \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/4} U_m^2 dt - \int_0^{T/4} \frac{8U_m^2}{T} t dt + \int_0^{T/4} \frac{16U_m^2}{T^2} t^2 dt \right] =$$

$$= \frac{2}{T} \left[U_m^2 \frac{T}{4} - \frac{8U_m^2}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_0^{T/4} + \frac{16U_m^2}{T^2} \cdot \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^{T/4} \right] =$$

$$= \frac{2}{T} \left[\frac{U_m^2 T}{4} - \frac{8U_m^2 T^2}{T \cdot 2 \cdot 16} + \frac{16U_m^2 T^3}{T^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} \right] =$$

$$= \frac{2}{T} \left[\frac{U_m^2 T}{4} - \frac{U_m^2 T}{4} + \frac{U_m^2 T}{3 \cdot 4} \right] = \frac{2U_m^2 T}{T \cdot 12} = \frac{U_m^2}{6},$$

откуда $U = \sqrt{U_m^2 / 6} = U_m / 2,45 = 0,408U_m$.

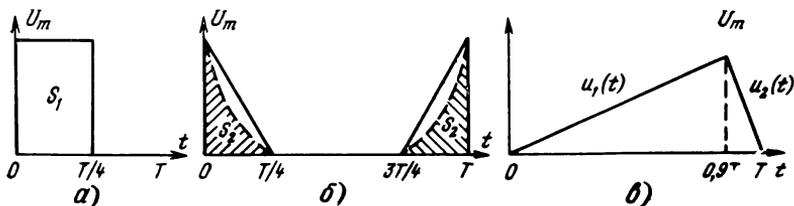


Рис. 2.5

2.44. Во сколько раз действующее значение напряжения, показанного на рис. 2.4,б, больше действующего значения напряжения, показанного на рис. 2.4,а?

Указание: разберите сначала задачи 2.35 и 2.41, 2.43.

Пояснение: следует подсчитать квадрат площади за одну четверть периода, а затем это значение учетверить.

2.45. Рассчитать действующее значение тока I по графику, показанному на рис. 2.4,д.

Указание: разберите сначала задачи 2.35, 2.41 и 2.43.

2.46. Одинаковы ли действующие значения напряжений, показанных на рис. 2.5,а и б. Если нет, то почему?

Решение. Для простоты рассуждений положим $U_m = 1$. На рис. 2.5,а площадь квадратичной кривой равна произведению U_m на $T/4$, а на рис. 2.5,б — сумме значений, численно равных заштрихованным площадям. Из рис. 2.5 видно, что $2S_2 < S_1$. Если произвести точные аналитические расчеты, то получится, что в первом случае $U = 0,5U_m$, а во втором $U = 0,408U_m$, т. е. действующее значение на 18,4% меньше, чем в первом.

2.47. Рассчитать действующее значение напряжения пилообразной формы (рис. 2.5,в).

Указание: разберите сначала задачи 2.41 и 2.43.

Решение. Напряжениями (токами) пилообразной формы называются напряжения (токи), нарастающие полого, а спадающие — круто. Нарастающая часть называется фронтом, а спадающая — спадом. В первом интервале мгновенные значения напряжения определяются из выражения $u_1 = (U_m/0,9T)t$, а во втором — из выражения

$$\begin{aligned} u_2 &= U_m - \left[\frac{U_m}{(T-0,9T)}(t-0,9T) \right] = U_m - \frac{U_m}{0,1T}(t-0,9T) = \\ &= U_m - \frac{10U_m}{T}(T-0,9T) = U_m - \frac{10U_m}{T}t + 9U_m = 10U_m - \frac{10U_m}{T}t. \end{aligned}$$

Произведем проверку второго выражения. Действительно, при $t=0,9T$ $u_2=10U_m-10U_m \cdot 0,9T/T=10U_m-9U_m=U_m$. При $t=T$ $u_2=10U_m-10U_mT/T=10U_m-10U_m=0$, что совпадает с рис. 2.5, в. Тогда

$$\begin{aligned}
 U^2 &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{0,9T} u_1^2 dt + \int_{0,9T}^T u_2^2 dt \right] = \\
 &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{0,9T} \left(\frac{U_m}{0,9T} t \right)^2 dt + \int_{0,9T}^T \left(10U_m - \frac{10U_m}{T} t \right)^2 dt \right] = \\
 &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{0,9T} \frac{U_m^2}{0,81T^2} t^2 dt + \int_{0,9T}^T \left(100U_m^2 - \frac{200U_m^2}{T} t + \frac{100U_m^2}{T^2} t^2 \right) dt \right] = \\
 &= \frac{1}{T} \left[\frac{U_m^2 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9T^3}{0,81T^2 \cdot 3} + 100U_m^2 (T - 0,9T) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{200U_m^2}{T \cdot 2} (T^2 - 0,81T^2) + \frac{100U_m^2}{T^2 \cdot 3} (T^3 - 0,729T^3) \right] = \\
 &= \frac{1}{T} [0,3U_m^2 T + 10U_m^2 T - 19U_m^2 T + 9,03U_m^2 T] = 0,33U_m^2,
 \end{aligned}$$

откуда $U = \sqrt{0,33U_m^2} = 0,574U_m$.

2.48. Рассчитать действующее значение напряжения синусоидальной формы, показанного на рис. 2.6, а.

Указание: изучите сначала § 2.15 на с. 34—36 в [1] и задачи 2.35, 2.41, 2.43.

Решение. При напряжениях синусоидальной формы мгновенные значения напряжения напряжений в течение всего периода описываются выражением $u = U_m \sin \omega t$ (где U_m — максимальное, т. е. наибольшее из всех мгновенных значений, $\omega = 2\pi/T$, где T — период сигнала). Тогда

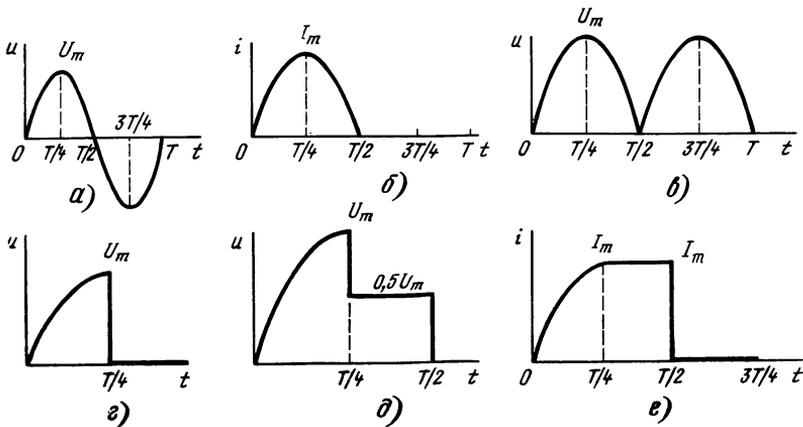


Рис. 2.6

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{U_m^2}{T} \int_0^T \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) dt = \\ = \frac{U_m^2}{T} \left[\int_0^T (1/2) dt - (1/2) \int_0^T \cos 2\omega t dt \right] = \frac{U_m^2}{T} \frac{1}{2} T = U_m^2/2,$$

откуда $U = U_m/\sqrt{2} = 0,707U_m$.

2.49. Рассчитать действующее значение тока I по графику, показанному на рис. 2.6, б.

Указание: разберите сначала задачи 2.43 и 2.48.

Решение. Значение U^2 можно рассчитать двумя способами: с помощью выражения $U^2 = (1/T) \int_0^T U_m^2 \sin^2 \omega t dt$ или

$$U^2 = 2(1/T) \int_0^{T/4} U_m^2 \sin^2 \omega t dt. \text{ Покажем, что оба варианта приводят к одинаковым результатам. Действительно, в первом варианте } U^2 = (U_m^2/T) \left[\int_0^{T/2} (1/2) dt - (1/2) \int_0^{T/2} \cos 2\omega t dt \right] = \\ = (U_m^2/T) (1/2) [(T/2) - 0] = U_m^2/4, \text{ откуда } U = 0,5U_m. \text{ Во втором варианте } U^2 = 2 \cdot (U_m^2/T) \int_0^{T/4} (1/2) dt - (1/2) \int_0^{T/4} \cos 2\omega t dt = \\ = 2(U_m^2/T) (1/2) [(T/4) - 0] = U_m^2/4.$$

Таким образом, если имеется симметрия относительно вертикали, проведенной в некоторый момент времени, то можно подсчитать площадь только одной части, а затем эту площадь умножить на число таких площадей за период. Так, при подсчете действующего значения напряжения, показанного на рис. 2.6, в, наиболее удобно использовать выражение

$$U^2 = 4(1/T) \int_0^{T/4} U_m^2 \sin^2 \omega t dt.$$

2.50. Рассчитать действующее значение напряжения U по графику, показанному на рис. 2.6, г.

Указание: разберите сначала задачу 2.49.

2.51. Рассчитать действующее значение напряжения U по графику, показанному на рис. 2.6, д, если в интервале от 0 до $T/4$ мгновенные напряжения изменяются по синусоидальному закону.

Указание: разберите сначала задачи 2.35, 2.41, 2.48, 2.49.

Решение.

$$\begin{aligned} U^2 &= (1/T) \left[\int_0^{T/4} U_m^2 \sin^2 \omega t \, dt + \int_{T/4}^{T/2} (0,5U_m)^2 dt \right] = \\ &= (1/T) U_m^2 \left[\int_0^{T/4} (1/2) dt - (1/2) \int_0^{T/4} \cos 2\omega t \, dt + \int_{T/4}^{T/2} 0,25 dt \right] = \\ &= (U_m^2/T) [(1/2)(T/4) + 0,25(T/2 - T/4)] = \\ &= (U_m^2/T) [(T/8) + (0,25T/4)] = U_m^2(3/16), \end{aligned}$$

откуда $U = U_m(1,73/4) = 0,433U_m$.

2.52. Рассчитать действующее значение напряжения по графику, показанному на рис. 2.6, в.

Указание: разберите сначала задачи 2.48, 2.49, 2.51.

2.53. Рассчитать действующее значение тока I по графику, показанному на рис. 2.6, е, если в интервале от 0 до $T/4$ мгновенные напряжения изменяются по синусоидальному закону.

Указание: разберите сначала задачи 2.48, 2.49, 2.51.

Глава 3. РЕЗИСТИВНЫЕ ЦЕПИ

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В третьей главе разбираются цепи, содержащие источники различных видов и линейные резистивные сопротивления. Цепи могут быть неразветвленными и разветвленными. *Неразветвленной* называется цепь, не содержащая ни одной точки, к которой подсоединяется более двух проводов, иначе говоря, цепь, не содержащая узлов. (Строго говоря, следует использовать термин «неустраимых узлов», в отличие от узлов «устраимых», т. е. точек, соединенных с двумя проводами. Однако на практике слово «неустраимый» для краткости часто опускают и говорят короче — «узел». Понятие «устраимый узел» удобно использовать при выполнении расчетов на ЭВМ, в данной главе этот термин применяться не будет.)

Разветвленной называется цепь, содержащая узлы, т. е. точки, к которым подходят не менее трех проводов. В неразветвленных цепях следует различать участок цепи и полную цепь. Под полной понимают цепь, в которой имеются источники и потребители, причем каждая полная цепь обязательно является замкнутой, т. е. имеет то свойство, что, выйдя из некоторой точки цепи и пройдя по элементам цепи, можно придти в ту же точку, из которой начался обход.

Для любой замкнутой цепи справедлив второй закон Кирхгофа, в соответствии с которым алгебраическая сумма мгновенных ЭДС равна алгебраической же сумме падений напряжений на всех элементах контура, т. е. выполняется условие $\sum e = \sum u$. В резистивных цепях (только в резистивных, обратите на это внимание!) второй закон Кирхгофа справедлив также для действующих, максимальных значений и размахов, т. е. также могут использоваться выражения $\sum E = \sum U$, $\sum E_m = \sum U_m$, $\sum E_p = \sum U_p$.

Если рассматривается только участок цепи, в котором необходимо установить соотношения между падением напряжения на сопротивлении, током, текущим в этом сопротивлении, и значением сопротивления, то используется закон Ома, в соответствии с которым $u = Ri$ (аналогично $U = RI$, $U_m = RI_m$, $U_p = RI_p$). Внутри участка может иметься источник с ЭДС E , в этом случае $i = (u + e)/R$, аналогично $I = (U \pm E)/R$, $I_m = (U_m \pm E_m)/R$, $I_p = (U_p \pm E_p)/R$ (подробно см. § 3.1—3.7 на с. 40—51 в [1]).

В неразветвленных цепях все источники и сопротивления соединены последовательно, поскольку по ним протекает один и тот же ток. Эквивалентная ЭДС в неразветвленной цепи равна алгебраической сумме ЭДС источников, а эквивалентное сопротивление — арифметической сумме сопротивлений, включенных в цепь. Чтобы определить знак, с которым ЭДС следует записывать в расчетные формулы, необходимо задаться направлением обхода по контуру и все ЭДС, направления которых совпадают с направлением обхода, записывать со знаком «плюс», а все ЭДС, направления которых противоположны направлению обхода, — со знаком «минус».

При расчетах любых откликов по заданным воздействиям (т. е. токов по заданным напряжениям или напряжений по заданным токам) необходимо знать форму воздействия и прежде всего до выполнения каких-либо расчетов определить форму откликов. И еще одно важное замечание: перед словами «напряжение», «ток» обязательно следует сказать «мгновенный», «действующий», «максимальный», «размах». Без данного определяющего слова все понятия становятся неопределенными. В частном случае — при неизменном во времени («постоянном токе») — все названные значения становятся одинаковыми ($u = U = U_m = U_p$, а также $i = I = I_m = I_p$), но в общем случае все эти понятия разные, и следует с самого начала пользоваться точной терминологией.

Еще одно пояснение: Цепи с двумя зажимами называют двухполюсными (или двухполюсниками). Сопротивление между зажимами двухполюсной цепи лучше называть «входным», хотя термин «эквивалентный» вполне правомерный, а в ряде случаев и весьма удобный. Но термин «входной» наиболее общий и достаточно универсальный. (Термин «входной» удобен также и потому, что в четырехполюсных цепях приходится различать зажимы входные и выходные, отсюда понятия «сопротивление входное», «сопротивление выходное», «ток входной», «ток выходной» и т. д.)

Обратим внимание еще на одну особенность. Воздействующие на цепь напряжения можно показывать на схемах двумя способами, изображая либо ЭДС источника (теперь часто говорят не «ЭДС», а «внутреннее напряжение», рис. 3.1, а), либо внешний источник напряжения (рис. 3.1, б). Разберемся с направлением стрелок ЭДС E и напряжения U . Если стрелка источника ЭДС E направлена от точки G к точке A (т. е. так, как показано

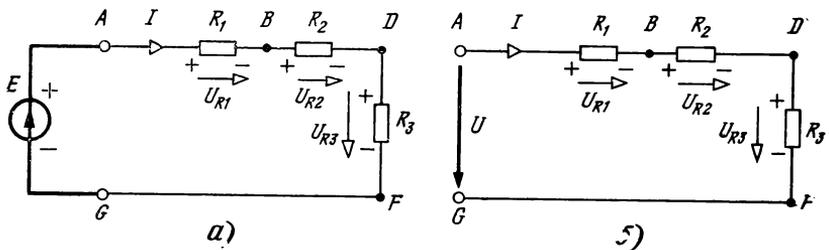


Рис. 3.1

на рис. 3.1, а), то это означает, что потенциал точки A выше потенциала точки G ; в этом случае ток во внешней цепи станет протекать по цепи $ABDFG$. Таким образом, стрелку внутри кружка, обозначающего ЭДС, показывают направленной от точки с меньшим потенциалом к точке с большим. Стрелка, показывающая напряжение, наоборот, направляется от точки с большим потенциалом к точке с меньшим. Например, чтобы ток в цепи, приведенной на рис. 3.1, б), протекал так же, как и в цепи на рис. 3.1, а), необходимо стрелку внешнего напряжения U показать идущей от точки A к точке G , т. е. противоположно стрелке ЭДС. В этом случае ток в цепи течет в прежнем направлении, т. е. по цепи $ABDFG$. При протекании тока через резистор на нем образуется падение напряжения, причем ток течет от точки с более высоким потенциалом к точке с меньшим потенциалом. На этом основании в цепях, показанных на схемах 3.1, а и б), потенциал точки A выше потенциала точки B на значение падения напряжения на сопротивлении R_1 . Аналогично потенциал точки D ниже потенциала точки B на значение $R_2 I$ (потенциал точки B соответственно выше потенциала точки D на такое же значение). Очевидно, что $\varphi_F = \varphi_D - R_3 I$ (откуда $\varphi_D = \varphi_F + R_3 I$). Стрелки падений напряжения на сопротивлениях показаны на рис. 3.1, а и б) в соответствии с полярностью падений напряжений. Так как всякое напряжение есть разность потенциалов между некоторыми точками, то на рис. 3.1, б) $U = \varphi_A - \varphi_B$, где φ_A и φ_B — потенциалы точек A и B соответственно.

НЕРАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ

3.1. В цепи, показанной на рис. 3.1, а), $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = 150$ Ом, $R_3 = 300$ Ом. Форма ЭДС — неизменная во времени (постоянный ток) со значением 100 В. Рассчитать мгновенные и действующие токи, падения напряжения на элементах цепи, проверить баланс мощностей.

Указание: сначала изучите § 3.1—3.5 на с. 40—48 в [1] и с. 26—28 данной книги.

Решение. При напряжениях (ЭДС), неизменных во времени, их мгновенные, действующие, максимальные значения и размах равны между собой, т. е. в данном случае $e = E = E_m = E_p = 100$ В. Так как в пассивных резистивных цепях мгновенные токи пропорциональны мгновенным напряжениям, то и действующие значения токов в этом случае также пропорцио-

нальны действующим значениям напряжений (ЭДС). В соответствии со вторым законом Кирхгофа в данной цепи справедливыми являются выражения $e = u_{R_1} + u_{R_2} + u_{R_3}$, а также $E = U_{R_1} + U_{R_2} + U_{R_3}$, где e , u_{R_1} , u_{R_2} , u_{R_3} — мгновенные значения ЭДС и падений напряжений на сопротивлениях R_1 , R_2 , R_3 . Аналогично E , U_{R_1} , U_{R_2} , U_{R_3} — действующие значения тех же величин. По закону Ома $u_{R_1} = R_1 i$, $u_{R_2} = R_2 i$, $u_{R_3} = R_3 i$, $U_{R_1} = R_1 I$, $U_{R_2} = R_2 I$, $U_{R_3} = R_3 I$. Следовательно, уравнения, составленные по второму закону Кирхгофа, в данном случае принимают вид $e = R_1 i + R_2 i + R_3 i = i(R_1 + R_2 + R_3)$. Аналогично $E = R_1 I + R_2 I + R_3 I = I(R_1 + R_2 + R_3)$, откуда $i = e / (R_1 + R_2 + R_3)$ или $I = E / (R_1 + R_2 + R_3)$.

В неразветвленных цепях (только в неразветвленных!) при наличии одного источника направление действительного тока (не путайте с действующим значением тока, это совершенно разные понятия!) можно показывать однозначно, поскольку в цепях с одним источником ток во внешней цепи течет от «плюса» источника через элементы цепи к «минусу». Под «плюсом» источника понимают точку, потенциал которой в данный момент выше, а «минусом» — ниже, поэтому в цепях, показанных на рис. 3.1, *а* и *б*, ток течет от точки *A* через R_1 , R_2 , R_3 к точке *G*. Для определения значения тока в неразветвленной цепи выражение второго закона Кирхгофа можно записывать сразу в виде $i = e / (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_k)$ или $I = E / (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_k)$, но при расчетах в разветвленных цепях приходится прибегать к общей форме записи уравнений (т. е. виду $\Sigma E = \Sigma U$, показанному выше). Подставим числовые значения $i = I = 100 / (50 + 150 + 300) = 100 / 500 = 0,2$ А, т. е. в рассматриваемой задаче мгновенные токи (т. е. токи в любой момент) равны 0,2 А, действующее значение также равно 0,2 А. (Заметьте, о мгновенных значениях говорят во множественном числе, поскольку мгновенных значений неограниченно много, а о действующем значении — в единственном числе, поскольку действующее значение одно, оно не изменяется в течение периода.) Рассчитаем мгновенные и действующие значения падения напряжения на всех сопротивлениях цепи: $u_{R_1} = U_{R_1} = R_1 i = R_1 I = 50 \cdot 0,2 = 10$ В; $u_{R_2} = U_{R_2} = R_2 i = R_2 I = 150 \cdot 0,2 = 30$ В; $u_{R_3} = U_{R_3} = R_3 i = R_3 I = 300 \cdot 0,2 = 60$ В.

Подсчитаем мощность, отдаваемую источником, а также мощности, рассеиваемые в сопротивлениях, и сравним их. При расчете мощностей гораздо удобнее пользоваться действующими значениями, поэтому $P_n = EI = 100 \cdot 0,2 = 20$ Вт (читается «ватт») и $P_n = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} = I^2 R_1 + I^2 R_2 + I^2 R_3 = (0,2)^2 \cdot 50 + (0,2)^2 \cdot 150 + (0,2)^2 \cdot 300 = 0,04 \cdot 50 + 0,04 \cdot 150 + 0,04 \cdot 300 = 2 + 6 + 12 = 20$ Вт. Как видно из произведенных расчетов, алгебраическая сумма ЭДС в данной цепи равна арифметической сумме падений напряжений на всех сопротивлениях, т. е. $100 = 10 +$

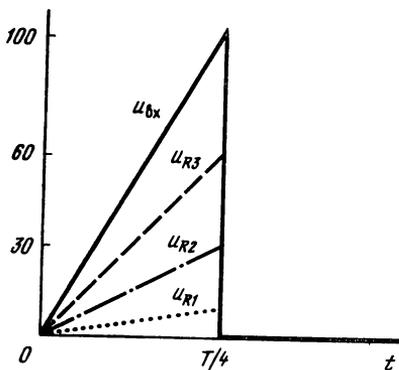


Рис. 3.2

+30+60, и, следовательно, второй закон Кирхгофа выполняется. Выполняется также и баланс мощностей, т. е. равенство мощностей источников и потребителей: $20=2+6+12$, следовательно, задача решена правильно.

3.2. В схеме рис. 3.1, б $R_1=50$ Ом, $R_2=150$ Ом, $R_3=300$ Ом, входное напряжение имеет форму, показанную на рис. 2.4, а. Рассчитать мгновенные и действующие токи, падения напряжения на

всех элементах, а также мощности источника и потребителей.

Указание: разберите сначала задачи 2.35, 2.41, 3.1.

Решение. Поскольку цепь состоит из линейных резистивных сопротивлений, то форма откликов (т. е. мгновенных токов и мгновенных падений напряжений) совпадает с формой воздействия в соответствующем масштабе. Следовательно, кривые мгновенных токов и мгновенных падений напряжений будут подобны кривой, показанной на рис. 2.4, а, т. е. в интервале от 0 до $T/4$ станут возрастать по линейному закону, а в интервале от $T/4$ до T будут равны нулю.

Таким образом, в момент $t=0$ $u=0$, $i=0$, $u_{R_1}=u_{R_2}=u_{R_3}=0$. В момент $t=T/4$ $i=I_m=U_m/(R_1+R_2+R_3)=100/(50+150+300)=0,2$ А, $u_{R_1}=U_{mR_1}=R_1I_m=50\cdot 0,2=10$ В, $u_{R_2}=U_{mR_2}=R_2I_m=150\cdot 0,2=30$ В, $u_{R_3}=U_{mR_3}=R_3I_m=300\cdot 0,2=60$ В. Графики мгновенных значений всех напряжений показаны на рис. 3.2. Чтобы рассчитать мощности, следует определить действующее значение входного напряжения. Как показано в задаче 2.41, при напряжении заданной формы $U=0,289 U_m=0,288\cdot 100=28,9$ В. Действующее значение тока в цепи при этом будет $I=U/(R_1+R_2+R_3)=28,9/500=0,0578$ А $=57,8$ мА $=57,8\cdot 10^{-3}$ А; $U_{R_1}=R_1I=50\cdot 57,8\cdot 10^{-3}=2,89$ В; $U_{R_2}=R_2I=150\cdot 57,8\cdot 10^{-3}=8,67$ В; $U_{R_3}=R_3I=300\times 57,8\cdot 10^{-3}=17,34$ В.

Произведем проверку: $2,89+8,67+17,34=28,9$, т. е. второй закон Кирхгофа выполняется.

Рассчитаем мощность, отдаваемую источником: $P_{ист}=U_{и}I_{и}=28,9\cdot 57,8\cdot 10^{-3}=1,67$ Вт; $P_{R_1}=I^2R_1=(57,8\cdot 10^{-3})^2\cdot 50=3340\cdot 10^{-6}\cdot 50=3,34\cdot 10^3\cdot 10^{-6}\cdot 5\cdot 10=16,7\cdot 10^{-2}=0,167$ Вт; $P_{R_2}=I^2R_2=(57,8\cdot 10^{-3})^2\cdot 150=0,501$ Вт $\approx 0,5$ Вт; $P_{R_3}=I^2R_3=(57,8\cdot 10^{-3})^2\cdot 300=1,002$ Вт ≈ 1 Вт. Выполним проверку: $1,67=0,167+0,501+1,002$. Баланс мощностей выполняется.

3.3. В схеме рис. 3.1, б $R_1=50$ Ом, $R_2=150$ Ом, $R_3=300$ Ом, а входное напряжение имеет форму, показанную на рис. 2.3, а. Рассчитать действующие значения тока, падений напряжений на сопротивлениях и баланс мощностей, если $U_m=100$ В.

Указание: разберите сначала задачи 2.35, 3.1, 3.2.

3.4. Решить задачу 3.3, если входное напряжение имеет форму, показанную на рис. 2.3, в, при $U_m=100$ В.

Указание: разберите сначала задачи 2.35, 3.1, 3.2.

3.5. Определить форму ЭДС и падений напряжений на R_1 , R_2 , R_3 в схеме, показанной на рис. 3.1, а, если ток в цепи имеет форму, показанную на рис. 2.3, г, при $I_m=1$ А, $R_1=50$ Ом, $R_2=150$ Ом, $R_3=300$ Ом. Рассчитать баланс мощностей.

Указание: разберите сначала задачи 2.35, 3.1, 3.2.

3.6. Решите задачу 3.3, если входное напряжение имеет форму, показанную на рис. 2.3, д, при $U_m=100$ В.

Указание: разберите сначала задачи 2.35, 3.1, 3.2.

3.7. Решите задачу 3.5, если ток имеет форму, показанную на рис. 2.3, б.

Указание: разберите сначала задачи 2.35, 3.1, 3.2.

3.8. Решите задачу 3.5, если ток имеет форму, показанную на рис. 2.4, б, причем $I_m=1$ А.

Указание: разберите сначала задачи 2.35, 2.43, 3.1, 3.2.

3.9. Портативный магнитофон питается от сухих элементов с ЭДС $E=9$ В. Какое напряжение будет на зажимах источника питания, если внутреннее сопротивление источника $r=12$ Ом, а ток в цепи $I=100$ мА? Каков коэффициент полезного действия цепи?

Указание: разберите сначала задачу 3.1.

Решение. Эквивалентная схема устройства представляет неразветвленную цепь (рис. 3.3, а), в которой известны ЭДС E , внутреннее сопротивление r , ток I и требуется определить напряжение на нагрузочном сопротивлении. Прежде чем выполнять расчеты, необходимо решить вопрос о форме тока и падений напряжений. Поскольку источником в данной задаче являются сухие элементы, ЭДС в таких источниках неизменна во времени (сухие элементы иногда не совсем строго называют «источниками постоянного тока»). Так как все сопротивления в

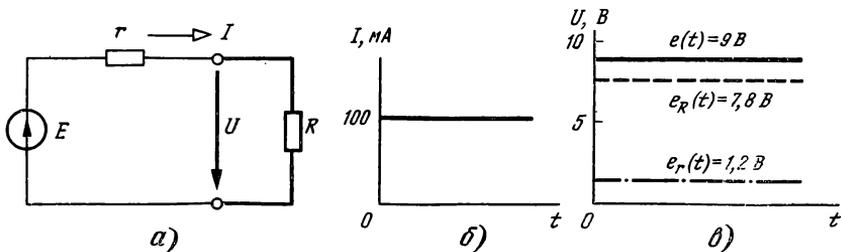


Рис. 3.3

цепи предполагаются резистивными и линейными, то формы тока и падений напряжений будут постоянными во времени, а в этом случае $e = E = E_m = E_p$, $i = I = I_m = I_p$, $u = U = U_m = U_p$. Для краткости все вычисления будем производить в действующих значениях (т. е. E, I, U). По второму закону Кирхгофа $E = U_r + U_R = Ir + IR$, откуда $IR = E - Ir$ или $R = (E - Ir)/I = (9 - 0,1 \cdot 12)/0,1 = (9 - 1,2)/0,1 = 7,8/0,1 = 78 \text{ Ом}$.

Зная действующее значение тока I и сопротивление нагрузки R , можно рассчитать действующее значение падения напряжения на сопротивлении R . По закону Ома $U_R = RI = 78 \cdot 0,1 = 7,8 \text{ В}$. Таким образом, ЭДС, равная 9 В, приложенная к цепи, распределяется следующим образом: на внутреннем сопротивлении r падает 1,2 В, на внешнем сопротивлении R 7,8 В. Графики зависимости тока в цепи и напряжений на элементах от времени показаны на рис. 3.3, б и в. Определим коэффициент полезного действия цепи η (греческая буква, читается «эта»). Коэффициентом полезного действия цепи (сокращенно называемом КПД) называется отношение полезной мощности (т. е. мощности, выделяемой в нагрузочном сопротивлении) к мощности, отдаваемой источником: $\eta = P_n/P_{\text{и}} = I^2 R / EI = IR/E = U/E = IR/I(r+R) = R/(r+R)$. Рассчитывать КПД можно с помощью любого из полученных выражений. Рассчитаем КПД через сопротивления: $\eta = R/(r+R) = 78/(12+78) = 78/90 = 0,867$. Проверим расчет через напряжения: $\eta = U/E = 7,8/9 = 0,867$. Получилось, разумеется, одно и то же значение.

Коэффициент полезного действия можно выражать в относительных числах или процентах. Чтобы число, представляющее относительную величину, превратить в проценты, необходимо это относительное число умножить на 100. На этом основании $\eta = 0,867 = 86,7\%$.

3.10. В цепи, показанной на рис. 3.3, а, $E = 10 \text{ В}$, $R_n = 180 \text{ Ом}$, $I = 50 \text{ мА}$. Рассчитать внутреннее сопротивление r и КПД η .

Указание: разберите сначала задачу 3.9.

3.11. В цепи, показанной на рис. 3.3, а, рассчитать сопротивление нагрузки R и действующее значение напряжения на нагрузке U , если $E = 50 \text{ В}$, $r = 25 \text{ Ом}$.

Указание: разберите сначала задачу 3.9.

3.12. Приемник электрической энергии питается от электрической сети с действующим значением напряжения $U = 250 \text{ В}$. Мощность, потребляемая приемником, $P = 250 \text{ Вт}$. Рассчитать элементы регулировочного устройства, при котором действующее напряжение на приемнике $U_{\text{пр}}$ принимает значения 0—50—100—150—200—250 В.

Указание: разберите сначала задачу 3.9.

Решение. Осуществлять регулировку напряжения на приемнике скачкообразным образом можно путем включения добавочных сопротивлений, на которых падает напряжение ΔU ,

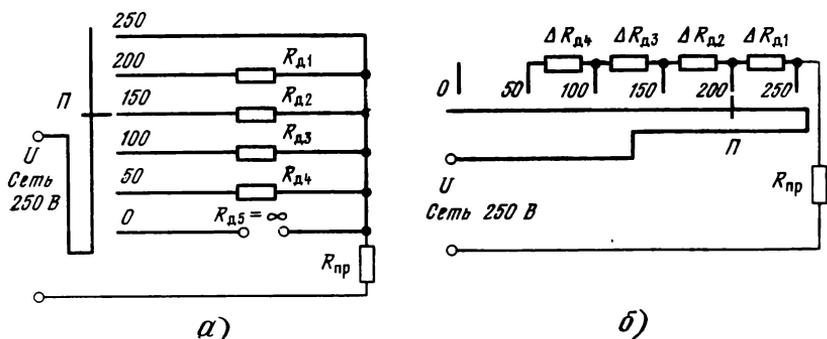


Рис. 3.4

равное разности между питающим напряжением U и напряжением на зажимах приемника $U_{\text{пр}}$, т. е. $\Delta U = U - U_{\text{пр}}$. Схему цепи можно составить двумя способами: либо на каждый предел включать отдельное добавочное сопротивление, как показано на рис. 3.4, а, либо добавлять на каждом пределе к имеющемуся еще одно сопротивление (рис. 3.4, б). Заметим, что греческой буквой Δ (читается «дельта») часто обозначают приращения, изменения и т. д. На этом основании разностное напряжение обозначено через ΔU , а сопротивления в схеме 3.4, б — через ΔR .

Первая схема более удобна в настройке, поскольку для каждого предела имеется свой добавочный резистор, не связанный с резисторами, используемыми на других пределах. Однако вторая схема более экономична, поскольку некоторые резисторы используются на нескольких пределах. Кроме того, мощности, на которые должны быть рассчитаны резисторы в схеме на рис. 3.4, б, у всех резисторов, кроме $R_{\text{д1}}$, меньше, чем у резисторов в схеме на рис. 3.4, а.

Рассчитаем сопротивления для обеих схем. Начнем с сопротивления приемника $R_{\text{пр}}$. Так как при действующем напряжении $U = 250$ В в нагрузке рассеивается мощность $P = 250$ Вт, а $P = U^2/R$, то $R_{\text{пр}} = U^2/P = 250^2/250 = 250$ Ом. Чтобы напряжение на нагрузочном сопротивлении (т. е. на $R_{\text{пр}}$) было $U_{\text{пр}} = 200$ В, последовательно с приемником необходимо включить добавочное сопротивление $R_{\text{д1}}$ с таким значением, при котором падение напряжения на этом сопротивлении составляет 50 В. В этом случае приложенное извне входное напряжение распределится следующим образом: на добавочном сопротивлении $R_{\text{д1}}$ будет падать 50 В, а на сопротивлении $R_{\text{пр}}$ 200 В. Определим действующее значение тока в цепи, при котором на сопротивлении 250 Ом падает 200 В. Поскольку в данном случае речь идет об участке цепи (только о сопротивлении $R_{\text{пр}}$), использовать следует закон Ома, в соответствии с которым $I_1 = U_{\text{пр}}/R_{\text{пр}} = 200/250 = 0,8$ А. Все элементы соединены

последовательно, поэтому в них протекает один и тот же ток, равный в данном случае 0,8 А. Рассчитаем значение сопротивления R_1 исходя из того, что при действующем токе 0,8 А действующее падение напряжения на нем должно составлять 50 В. И в этом случае необходимо использовать закон Ома: $R_{д1}=50/0,8=62,5$ Ом. Рассчитаем мощность P , рассеиваемую в сопротивлении $R_{д1}$. Мощность можно рассчитать по нескольким формулам: $P=UI=I^2R=U^2/R$, где U — действующее значение напряжения на сопротивлении R ; I — действующее значение тока, протекающего через сопротивление R .

Произведем расчет по всем формулам и убедимся, что результаты получаются одинаковыми. Действительно, $P=50 \times 0,8=0,8^2 \cdot 62,5=50^2 \cdot 62,5=40$ Вт. Таким образом, резистор с сопротивлением $R_{д1}=62,5$ Ом в обеих схемах должен быть одинаковым, причем такой конструкции, при которой в нем может рассеиваться мощность 40 Вт при допустимой температуре нагрева. (На мощности рассеяния в десятки ватт изготавливаются проволочные, так называемые остеклованные резистивные сопротивления. Подробнее см. с. 207, 208 и 210 в [2].)

Рассчитаем сопротивление $R_{д2}$ в схеме рис. 3.4, а. Чтобы на сопротивлении $R_{пр}$ падало напряжение $U_{пр}=150$ В, необходимо через приемник, а следовательно, и всю цепь пропускать ток I_2 с действующим значением $150/250=0,6$ А. При этом сопротивление $R_{д2}=100/0,6=166,7$ Ом с мощностью рассеяния $P=U_R I_2=100 \cdot 0,6=60$ Вт.

В схеме рис. 3.4, б на пределе 150 Ом в качестве добавочных используются сопротивления $R_{д1}$ и $\Delta R_{д2}$, соединенные последовательно. Поскольку их общее сопротивление должно быть 166,5 Ом, а сопротивление $R_{д1}=62,5$ Ом, $\Delta R_2=166,5-62,5=104$ Ом. Мощность, рассеиваемая в этом сопротивлении, будет $P_{\Delta R_{д2}}=I^2 \Delta R_2=0,6^2 \cdot 104=37,44$ Вт $\approx 37,5$ Вт. Мощность, рассеиваемая на сопротивлении $R_{д1}$, в этом случае меньше, чем в предыдущем случае, поскольку ток цепи стал меньше (0,6 вместо 0,8 А). Очевидно, что схема рис. 3.4, б экономичнее схемы рис. 3.4, а, так как габариты резистора с сопротивлением $\Delta R_{д2}$ могут быть меньше габаритов резистора с сопротивлением $R_{д2}$ из-за неодинаковых рассеиваемых в них мощностей. Так происходит потому, что все 60 Вт в схеме рис. 3.4, а рассеиваются в одном сопротивлении $R_{д2}$, а в схеме рис. 3.4, б эта же мощность рассеивается в сопротивлениях $\Delta R_{д2}$ и $R_{д1}$, причем на сопротивлении $\Delta R_{д2}$ рассеивается 37,44 Вт, а на сопротивлении $R_{д1}$ — 22,56 Вт.

Остальные сопротивления рассчитываются аналогичным образом. При $U_{пр}=100$ В $I_3=U_{пр}/R_{пр}=100/250=0,4$ А, при этом $R_{д3}=(U-U_{пр})/I_3=(250-100)/0,4=375$ Ом; $\Delta R_{д3}=R_{д3}-\Delta R_2-R_{д1}=375-166,5=208,5$ Ом с мощностью рассеяния $I^2 R=0,4^2 \cdot 208,5=33,36$ Вт. (В сопротивлении $R_{д3}$ рассеивалась бы

мощность $0,4^2 \cdot 375 = 60$ Вт.) При $U_{\text{пр}} = 50$ В $I_4 = U_{\text{пр}}/R_{\text{пр}} = 50/250 = 0,2$ А; $R_{\text{д4}} = (U - U_{\text{пр}}) = (250 - 50)/0,2 = 1000$ Ом; $\Delta R_4 = R_{\text{д4}} - \Delta R_{\text{д3}} - \Delta R_{\text{д2}} - R_{\text{д1}} = 1000 - 375 = 625$ Ом с допустимой мощностью рассеяния в нем $I^2 R = 0,2^2 \cdot 625 = 25$ Вт. (В сопротивлении $R_{\text{д4}}$ рассеивалась бы мощность $0,2^2 \cdot 1000 = 40$ Вт.)

3.13. По условию задачи 3.12 рассчитать сопротивления в схемах рис. 3.4, а и б, если в нагрузке при номинальном напряжении рассеивается мощность $P = 100$ Вт. Рассчитать мощности в каждом сопротивлении.

Указание: сначала разберите задачу 3.12.

3.14. Стрелка прибора магнитоэлектрической системы, имеющего сопротивление $R_{\text{пр}} = 1$ кОм, отклоняется на всю шкалу при токе $I_{\text{н}} = 1$ мА. Рассчитать добавочные сопротивления и мощности рассеяния в них, чтобы стрелка прибора отклонялась на номинальное (т. е. максимальное) значение при входных напряжениях $U_{\text{вх}} = 3 - 10 - 30 - 100$ В.

Указание: разберите сначала задачу 3.12.

Пояснение. Если мощность рассеяния не превышает единиц ватт, то в качестве резисторов чаще всего используют мастичные сопротивления, например весьма распространенного типа МЛТ (металлизированные, лакированные, термостойкие). Резисторы типа МЛТ изготавливают на номинальные мощности 0,125; 0,25; 0,5; 1,0; 1,0; 2,0 Вт. Если рассеиваемая мощность менее 0,125 Вт, то устанавливают резисторы на мощность 0,125 Вт, поскольку резисторов на меньшие мощности промышленность не изготавливает, так как их механическая прочность была бы недостаточной.

3.15. Вольтметр с внутренним сопротивлением 15 кОм, подключенный к батарейке типа «Крона», показал напряжение $U_0 = 9$ В. При включении этого же вольтметра через сопротивление R вольтметр показал напряжение $U_1 = 3$ В (рис. 3.5). Определить значение сопротивления R .

Указание: разберите сначала задачу 3.12.

Решение. Определим действующее значение тока I_1 , протекающего через вольтметр после подключения сопротивления R . Так как внутреннее сопротивление вольтметра $R_V = 15$ кОм, а действующее значение напряжения на нем $U_1 = 3$ В, то $I_1 = U_1/R_V = 3/15 \cdot 10^3 = 0,2 \cdot 10^{-3}$ А = 0,2 мА = 200 мкА. Определим действующее значение падения напряжения на сопротивлении R . По второму закону Кирхгофа $U_R = U_0 - U_1 = 9 - 3 = 6$ В. Таким образом, на сопротивлении R падает напряжение 6 В при токе 0,2 мА, следовательно, в соответствии с законом Ома $R = U_R/I_1 = 6/0,2 \times 10^{-3} = 30 \cdot 10^3$ Ом = 30 кОм. Сделаем проверку. Входное напря-

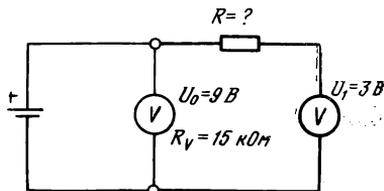


Рис. 3.5

жение 9 В распределяется пропорционально сопротивлениям цепи. Так как сопротивление R оказалось в 2 раза больше сопротивления вольтметра R_V , то и напряжение на этом сопротивлении должно быть также в 2 раза больше, чем напряжение на вольтметре. Действительно, на вольтметре падает 3 В, а на сопротивлении R 6 В, т. е. в 2 раза больше. Арифметическая сумма падений напряжений на сопротивлении R и на вольтметре равна напряжению источника. Следовательно, задача решена правильно.

Можно было решить эту задачу и несколько более строгим образом — по второму закону Кирхгофа $U_0 = U_R + U_V$ или $U_0 = RI + U_1$. Но $I = U_1/R_V$, тогда $U_0 = U_1(R/R_V) + U_1$, следовательно, $U_1(R/R_V) = U_0 - U_1$, откуда $R = [(U_0/U_1) - (U_1/U_1)]R_V$, т. е. $R = [(U_0/U_1) - 1] \times 15 \cdot 10^2 = 30 \cdot 10^3 \text{ Ом} = 30 \text{ кОм}$, результат оказался прежним.

3.16. По условию задачи 3.15 рассчитать сопротивление вольтметра R_V , если $U_0 = 20 \text{ В}$, а при включении сопротивления $R = 50 \text{ кОм}$, $U_1 = 10; 4; 2; 1 \text{ В}$.

Указание: разберите сначала задачу 3.15.

3.17. По условию задачи 3.15 определите напряжение источника, если при $R = 12 \text{ кОм}$, $R_V = 8 \text{ кОм}$ $U_1 = 10 \text{ В}$.

3.18. При подключении к источнику с действующим значением ЭДС E и внутренним сопротивлением r внешнего сопротивления $R_1 = 5 \text{ Ом}$ в цепи протекает ток с действующим значением $I_1 = 1 \text{ А}$. При подключении к этому же источнику сопротивления $R_2 = 15 \text{ Ом}$ в цепи протекает ток $I_2 = 0,5 \text{ А}$. Определить действующее значение ЭДС E и внутреннее сопротивление источника r .

Указание: разберите сначала задачу 3.15.

Решение. Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для обоих случаев. В первом случае $E = rI_1 + R_1I_1$, во втором $E = rI_2 + R_2I_2$. Получилась система двух уравнений, в которых два неизвестных — ЭДС E и внутреннее сопротивление r источника. Подставим числовые значения и решим получившуюся систему:

$$\begin{cases} E = r \cdot 1 + 5 \cdot 1, \\ E = r \cdot 0,5 + 15 \cdot 0,5. \end{cases}$$

Решить данную систему можно различными способами, например методом подстановки. Подставив значение E из первой строки во вторую, получим уравнение с одним неизвестным, которое легко решается: $r + 5 = 0,5r + 7,5$ или $r - 0,5r = 7,5 - 5$, т. е. $0,5r = 2,5$, откуда $r = 2,5/0,5 = 5 \text{ Ом}$. Подставив значение r во вторую строку, получим $E = 50,5 + 7,5 = 10 \text{ В}$.

Произведем проверки: $10 = 5 + 5$; $10 = 5 \cdot 0,5 + 7,5$. Оба равенства выполняются, следовательно, задача решена правильно.

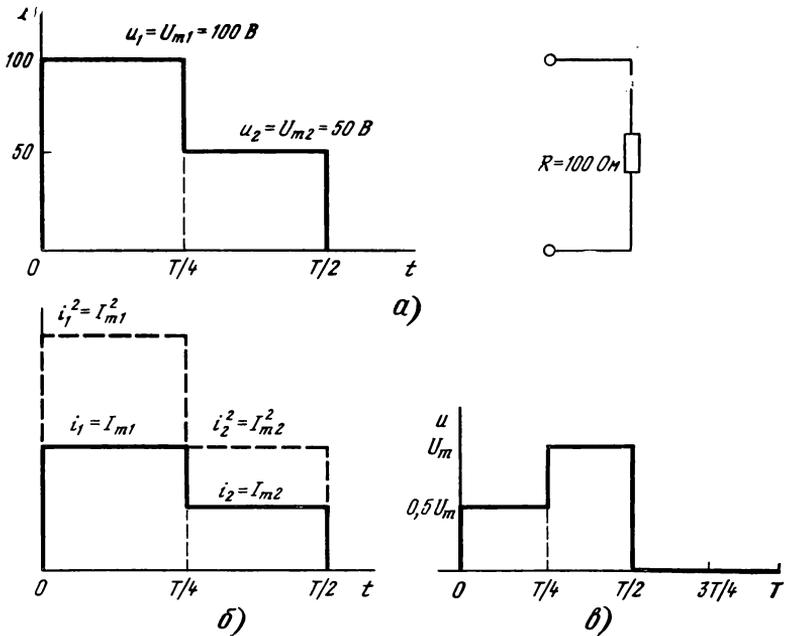


Рис. 3.6

3.19. По условию задачи 3.18 рассчитайте E и r , если при $R_1=100$ Ом $I_1=200$ мА, а при $R_2=900$ Ом $I_2=100$ мА.

Указание: разберите сначала задачу 3.18.

3.20. По условию задачи 3.18 рассчитайте R_1 и R_2 , если $E=100$ мВ, $r=250$ Ом, $I_1=200$ мкА, $I_2=100$ мкА.

Указание: разберите сначала задачу 3.18.

3.21. Рассчитать мощность, рассеиваемую на линейном резистивном сопротивлении $R=100$ Ом, если напряжение на зажимах цепи имеет форму, показанную на рис. 3.6, а.

Указание: просмотрите с. 36—38 в [1] и разберите задачу 2.35 и 2.36.

Решение. Поскольку нагрузка представляет линейное резистивное сопротивление, форма протекающего в цепи тока повторяет форму приложенного к цепи напряжения. Так как в интервале от $t=0$ до $t=T/4$ мгновенные значения напряжения неизменны во времени, то и мгновенные значения тока будут также неизменными, равными $i_1=I_{m1}=U_{m1}/R=100/100=1$ А. Аналогично в интервале от $T/4$ до $T/2$ $i_2=I_{m2}=U_{m2}/R=50/100=0,5$ А. В интервале от $T/2$ до T $u_3=0$, $i_3=0$. График мгновенных токов в цепи показан на рис. 3.6, б. Так как в рассматриваемой цепи мгновенные напряжения и токи в разные моменты неодинаковы, мгновенные мощности также оказываются зависящими от времени t . Для определения средней мощности можно было бы подсчитать мгновенную энергию за бесконечно

малое время $dw = u \cdot i \cdot dt$, затем просуммировать эту энергию за период, для чего потребовалось бы рассчитать выражение $W = \int_0^T uidt$, а затем получившуюся энергию поделить на время периода, что и было бы средней мощностью P за период: $P = (1/T) \int_0^T uidt$. Указанный путь решения является совершенно строгим, но при этом приходится брать интегралы, правда, весьма несложные. Для расчета энергии, как известно, можно напряжение заданной формы заменить напряжением действующим, т. е. эквивалентным постоянным, соответственно не меняющимся во времени.

Напомним, что действующее напряжение определяется из выражения

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}, \quad \text{а ток} \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

Поскольку в данном примере мгновенные значения напряжений (а следовательно, и токов) в определенных интервалы не меняются во времени, рассчитать действующее значение напряжения в течение всего периода весьма просто графически. Для этого необходимо: 1) нарисовать кривую мгновенных значений заданных напряжений; 2) нарисовать кривую квадрата мгновенных значений; 3) подсчитать площадь получившейся квадратичной фигуры; 4) найденное числовое значение площади поделить на основание (т. е. на период T); 5) из получившегося числового значения извлечь квадратный корень. Получившийся результат и будет действующим значением данного переменного напряжения или тока. Если кривая переменного напряжения представляет фигуру достаточно сложную, то продельвать все указанные построения не слишком удобно, но в данном примере графическое определение действующего значения гораздо проще аналитического. Действительно, $U^2 = (1/T)[U_{m1}^2(T/4) + (0,5U_m)^2(T/4)] = (1/4)(U_{m1}^2 + 0,25U_m^2) = (U_m^2/4)1,25$, откуда $U = \sqrt{1,25U_m^2/4} = (1,118/2)U_m = 0,559U_m = 0,559 \cdot 100 \approx 56$ В. Таким образом, энергия, переходящая в сопротивлении R в тепло при напряжении с формой, показанной на рис. 3.6, а, такая же, как и энергия, выделяющаяся в этом же сопротивлении за такое же время при не меняющемся во времени (т. е. постоянном) напряжении со значением $U = 0,559U_m$. Действующее значение тока при этом $I = U/R = 0,559U_m/R = 0,559 \cdot 100/100 = 0,559$ А. Среднюю мощность за период в данном случае можно рассчитать с помощью любого из выражений $P = UI = I^2R = U^2/R = 55,9 \cdot 0,559 = (0,559)^2 \cdot 100 = (55,9)^2/100 = 31,25$ Вт.

3.22. Рассчитать мощность, рассеиваемую на линейном резистивном сопротивлении $R = 500$ Ом, если напряжение на за-

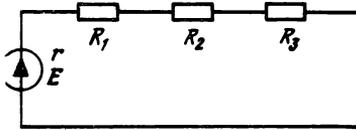


Рис. 3.7

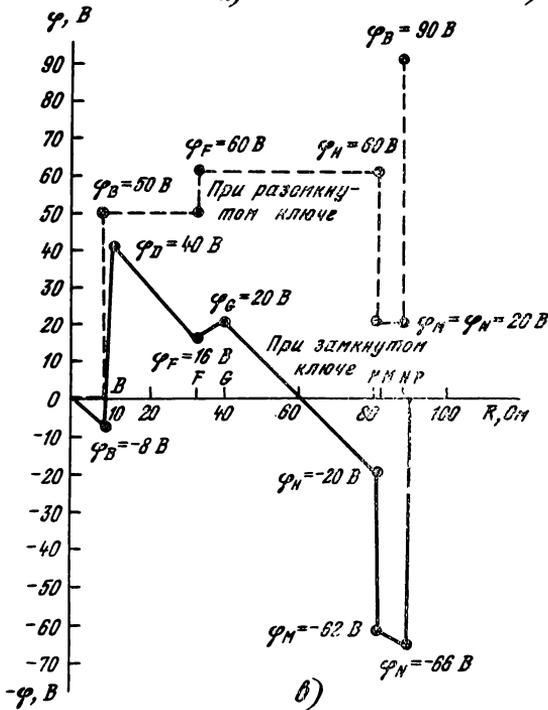
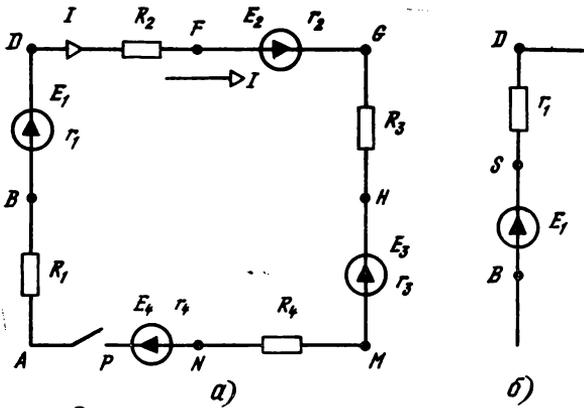


Рис. 3.8

жимах цепи имеет форму, показанную на рис. 3.6, в, причем $U_m = 10$ В.

Указание: разберите сначала задачу 3.21.

3.23. Рассчитайте действующие падения напряжения на всех сопротивлениях цепи рис. 3.7, проверьте выполнение второго закона Кирхгофа и баланса мощностей, если форма ЭДС — неизменная во времени. Числовые значения всех элементов цепи выберите самостоятельно.

3.24. Нарисуйте в масштабе разными цветами графики мгновенных значений тока и падений напряжений на всех элементах цепи, показанной на рис. 3.7, если $r = 50$ Ом, $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 150$ Ом, $R_3 = 200$ Ом, а форма ЭДС показана на рис. 3.6, а при $U_m = 100$ В. Рассчитайте КПД цепи для случаев, если нагрузочным сопротивлением является: а) R_3 ; б) R_2 и R_3 ; в) R_1 , R_2 , R_3 .

3.25. ЭДС в цепи (рис. 3.7) неизменна во времени ($e = E_m$) или имеет форму, показанную на рис. 3.6, а. Определить КПД, если значения сопротивлений соответствуют указанным в задаче 3.24.

3.26. Рассчитать потенциалы точек в цепи, показанной на рис. 3.8, а если ЭДС всех источников неизменны во времени, $E_1 = 50$ В, $E_2 = 10$ В, $E_3 = 40$ В, $E_4 = 70$ В, $r_1 = 2$ Ом, $R_1 = 8$ Ом, $r_2 = 6$ Ом, $R_2 = 24$ Ом, $r_3 = 2$ Ом, $R_3 = 40$ Ом, $r_4 = 4$ Ом, $R_4 = 4$ Ом при замкнутом и разомкнутом ключе.

Указание: изучите сначала § 3.5 на с. 48 в [1].

Решение. Чтобы определять потенциалы различных точек цепи, следует прежде всего рассчитать значения токов, протекающих во всех элементах данной цепи. Так как рассматриваемая цепь представляет при замкнутом ключе цепь неразветвленную, то значение тока во всех элементах данной цепи одно и то же, причем поскольку значения всех ЭДС в соответствии с условием неизменны во времени, то в данном случае $e = E = E_m = E_p$; $i = I = I_m = I_p$. Будем производить все расчеты в действующих значениях. В соответствии со вторым законом Кирхгофа $\Sigma E = \Sigma U$. Поскольку цепь неразветвленная, рассчитывать ток можно по формуле $I = \Sigma E / \Sigma R$, где ΣE — алгебраическая сумма действующих значений ЭДС; ΣR — арифметическая сумма всех резистивных сопротивлений цепи (как внешних, так и внутренних).

Прежде чем записывать уравнение тока, необходимо задать его предполагаемым направлением (заметим, что термин «предполагаемый» не совсем строгий, точным является термин «положительный», но термин «предполагаемый» в ряде случаев весьма понятный, и в данной главе мы им будем пользоваться). Предполагаемый ток может протекать по часовой стрелке либо против нее. Зададимся направлением по часовой стрелке. Предполагаемый ток (в разветвленных цепях — токи) показываюот около провода незащтрихованной стрелкой. Все ЭДС, направ-

ления которых совпадают с направлением предполагаемого тока, записывают со знаком «плюс», а направленные в противоположные стороны — со знаком «минус». Все резистивные сопротивления записывают со знаком «плюс». На основании изложенного

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} = \frac{E_1 + E_2 - E_3 + E_4}{r_1 + R_1 + r_2 + R_2 + r_3 + R_3 + r_4 + R_4} =$$

$$= \frac{50 + 10 - 40 + 70}{2 + 8 + 6 + 24 + 2 + 40 + 4 + 4} = \frac{90}{90} = 1 \text{ А.}$$

Ток получился со знаком «плюс». Это означает, что действительное направление тока совпадает с предполагаемым. Действительное (иногда его называют «истинным») направление тока показывают незаштрихованной стрелкой, нанесенной на проводе.

Определив ток (в общем случае токи), можно приступить к расчету потенциалов точек. Сначала следует обозначить буквами точки соединений элементов цепи. На рис. 3.8, *а* показаны точки *A, B, D, F, G, H, M, N, P* (буквы *C, E, K* использовать для обозначения точек не рекомендуется). Потенциал одной из точек следует принять за начальный. В принципе этому потенциалу можно приписать любое значение, но на практике потенциал точки, от которой производится отсчет, принимают, как правило, за нулевой, так как при этом арифметические расчеты оказываются более простыми. Пусть потенциал точки *A* равен нулю. (Считать начальным можно потенциал любой точки цепи, на результатах расчетов это никак не сказывается.)

Задавшись потенциалом одной точки, следует поочередно определять потенциалы всех остальных точек цепи. Следует иметь в виду, что действительный ток (не путайте с предполагаемым!) в резистивных элементах течет от точки с более высоким потенциалом к точке с меньшим потенциалом. Поскольку действительный ток в рассматриваемой цепи течет от точки *A* к точке *B*, потенциал точки *A* выше потенциала точки *B*, а потенциал точки *B* соответственно ниже потенциала точки *A* на значение падения напряжения на сопротивлении R_1 , т. е. $\varphi_B = \varphi_A - R_1 I = 0 - 8 \cdot 1 = -8 \text{ В}$.

Между точками *B* и *D* находятся ЭДС E_1 и внутреннее сопротивление r_1 (рис. 3.8, *б*). Внутреннее сопротивление на эквивалентных схемах можно показывать либо до источника, либо после него. Условимся, что внутреннее сопротивление будем показывать со стороны положительного зажима источника (т. е. от точки, к которой подходит стрелка источника). Обозначим место соединения ЭДС E_1 и внутреннего сопротивления r_1 буквой *S* (рис. 3.8, *б*). В этом случае при переходе с точки *B* на точку *S* потенциал повысится на значение E_1 ,

поскольку переход происходит от точки с меньшим потенциалом к точке с бóльшим потенциалом. Напомним, что при переходе с «минусового» зажима источника на его «плюсовый» зажим потенциал повышается на значение E , а при обратном переходе — понижается на такое же значение независимо от значения тока, текущего через источник. На сопротивлении r_1 потенциал понизится на значение $r_1 I$. Таким образом, $\varphi_D = \varphi_B + E_1 - r_1 I = -8 + 50 - 1 \cdot 2 = 40$ В. Аналогично $\varphi_F = \varphi_D - R_2 I = 40 - 1 \cdot 24 = 16$ В; $\varphi_G = \varphi_F + E_2 - r_2 I = 16 + 10 - 1 \cdot 6 = 20$ В; $\varphi_H = \varphi_G - R_3 I = 20 - 1 \cdot 40 = -20$ В; $\varphi_M = \varphi_H - r_3 I - E_3 = -20 - 1 \cdot 2 - 40 = -62$ В; $\varphi_N = \varphi_M - R_4 I = -62 - 1 \cdot 4 = -66$ В; $\varphi_P = \varphi_N + E_4 - r_4 I = -66 + 70 - 1 \cdot 4 = 0$. Поскольку точки P и A электрически представляют одну точку, потенциал точки P при замкнутом ключе обязательно должен оказаться равным потенциалу точки A . Равенство потенциалов этих точек свидетельствует о правильности произведенных расчетов.

Построим график распределения потенциалов вдоль цепи $\varphi = f(R)$. Для этого по горизонтали оси следует откладывать сопротивления элементов цепи и наносить соответствующие точки, а по вертикали — потенциалы этих точек (рис. 3.8, в). Все сопротивления в рассматриваемой цепи — линейные, поэтому точки на графике следует соединять прямыми линиями. Получившийся график называют также *потенциальной диаграммой*. Зная потенциалы точек, можно определить напряжения между различными точками цепи. Например, напряжение между точками D и G равно разности потенциалов этих точек, на этом основании $U_{DG} = \varphi_D - \varphi_G = 40 - 20 = 20$ В с «плюсом» в точке D . Аналогично $U_{DM} = \varphi_D - \varphi_M = 40 - (-62) = 102$ В с «плюсом» в точке D ; $U_{MN} = \varphi_M - \varphi_N = 62 - (-66) = 4$ В с «плюсом» в точке M и т. д. Из потенциального графика видно, что нулевой потенциал кроме точки A оказывается на середине сопротивления R_3 , т. е. если бы сопротивление $R_3 = 40$ Ом было выполнено из двух сопротивлений по 20 Ом, соединенных последовательно, то потенциал места соединения этих сопротивлений был бы равен нулю. Если, например, проводником соединить эту промежуточную точку с точкой A , то ток в этом проводнике не протекал бы, поскольку разность потенциалов на зажимах проводника равнялась бы нулю.

Рассмотрим распределение потенциалов при разомкнутом ключе. Так как ток в цепи при этом не протекает, то падения напряжения на всех сопротивлениях равны нулю и потенциалы в этом случае распределяются следующим образом: $\varphi_A = 0$, $\varphi_B = 0$, $\varphi_D = E_1 = 50$ В, $\varphi_F = \varphi_D = 50$ В, $\varphi_G = \varphi_F + E_2 = 50 + 10 = 60$ В, $\varphi_H = \varphi_G = 60$ В, $\varphi_M = \varphi_H - E_3 = 60 - 40 = 20$ В, $\varphi_N = \varphi_M = 20$ В, $\varphi_P = \varphi_N + E_4 = 20 + 70 = 90$ В.

Таким образом, при разомкнутом ключе напряжение между точками P и A $\varphi_P - \varphi_A = 90 - 0 = 90$ В, т. е. равно алгебраической сумме ЭДС, включенных в контур.

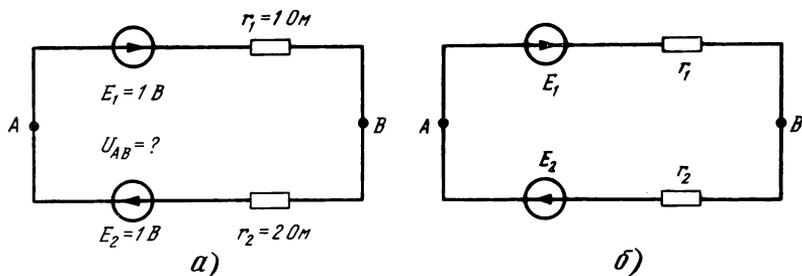


Рис. 3.9

3.27. Потенциал какой точки в схеме, показанной на рис. 3.8, а, следует принять за нулевой, чтобы потенциалы всех точек цепи имели положительные значения? Какие числовые значения потенциалов оказались бы у точек в этом случае? Чему равнялись бы значения напряжений U_{DF} , U_{DM} , U_{MN} : а) при замкнутом ключе; б) при разомкнутом ключе?

Указание: сначала разберите задачу 3.26.

3.28. Рассчитайте напряжение между точками A и B в схеме, показанной на рис. 3.9, а.

3.29. Рассчитайте U_{AB} в схеме, показанной на рис. 3.9, б, если:

а) $E_1=1$ В, $r_1=1$ Ом, $E_2=1$ В, $r_1=1$ Ом;

б) $E_1=1$ В, $r_1=1$ Ом, $E_2=1$ В, $r_2=2$ Ом;

в) $E_1=1$ В, $r_1=1$ Ом, $E_2=2$ В, $r_2=1$ Ом;

г) $E_1=1$ В, $r_1=1$ Ом, $E_2=2$ В, $r_2=2$ Ом.

3.30. В цепи, показанной на рис. 3.10, $R_1=60$ Ом, $R_2=140$ Ом, $R_3=200$ Ом, $E_1=20$ В, $I=30$ мА. Рассчитать ЭДС E_2 и напряжение между точками A и B . Форма ЭДС источников — неизменная во времени. Проверьте выполнение второго закона Кирхгофа и баланса мощностей.

Указание: разберите сначала задачу 3.26.

3.31. В цепи рис. 3.11, а форма ЭДС — неизменная во времени. Требуется рассчитать значения тока в цепи I , падения напряжений и мощности на внешнем (R) и внутреннем (r) сопротивлениях, а также коэффициент полезного действия цепи η , если ЭДС источника равен E , а внешнее сопротивление принимает значения 0 , $r/32$, $r/16$, $r/8$, $r/4$, $r/2$, r , $2r$, $4r$, $8r$, $16r$,

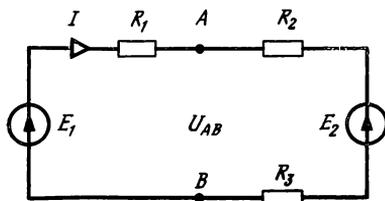


Рис. 3.10

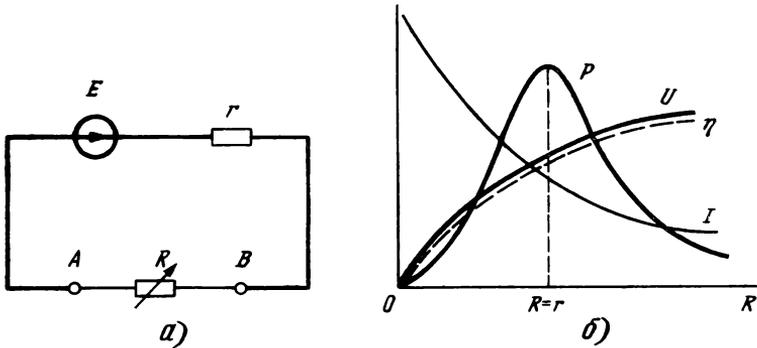


Рис. 3.11

$32r, \infty$. Построить графики зависимостей $I=f(R)$, $U=f(R)$, $U_R=f(R)$, $P=f(R)$, $P_r=f(R)$, $P_H=f(R)$, $\eta=f(R)$, если $E=100$ В, $r=320$ Ом.

Указание: изучите сначала § 3.27 на с. 82—86 в [1].

Решение. Получим сначала все расчетные формулы через исходные данные, а затем определим значения всех величин в зависимости от значений R : $I=E/(r+R)$; $U=RI=ER/(R+r)$; $P=I^2R=[E/(r+R)]^2R$; $\eta=R/(r+R)$. Результаты расчетов сведен в табл. 3.1. По результатам расчетов построим кривые (рис. 3.11, б). Из произведенных расчетов видно, что для получения наибольшего тока в цепи внешнее сопротивление следует уменьшать, для получения больших выходных напряжений и КПД — увеличивать, для получения наибольшей мощности

Таблица 3.1

R , Ом	I , мА	U , В	U_r , В	P , Вт	P_r , Вт	P_H , Вт	η
0	312,5	0	100	0	31,25	31,25	0
10	303	3,3	96,7	1,09	29,2	30,3	0,03
20	294	5,88	94,1	1,73	27,7	29,4	0,059
40	278	11,1	88,9	3,08	24,7	27,8	0,111
80	250	20	80	5,0	20	25	0,20
160	208	33,3	66,7	6,93	13,9	20,8	0,333
320	156	50	50	7,81	7,81	15,6	0,50
640	104	66,7	33,3	6,95	3,47	10,4	0,667
1280	62,5	80	20	5,0	1,25	6,25	0,80
2560	37,4	88,9	11,1	3,09	0,39	3,74	0,889
5120	18,4	94,1	5,9	1,73	0,11	1,84	0,941
∞	0	100	0	0	0	0	1,0

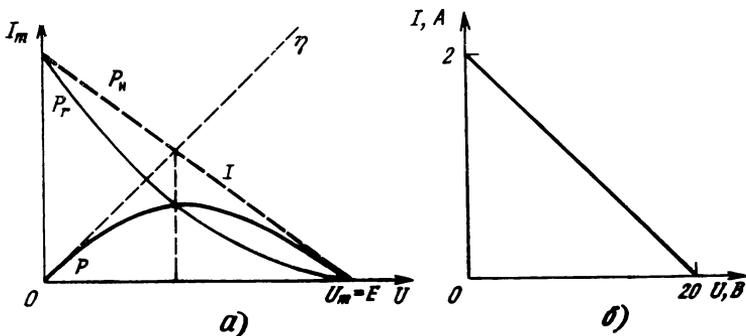


Рис. 3.12

внешнее сопротивление должно быть возможно ближе к внутреннему. При внешних сопротивлениях, меньших внутреннего, мощность, рассеиваемая на внешнем сопротивлении, меньше мощности, рассеиваемой на внутреннем сопротивлении, а при больших внешних сопротивлениях — соответственно больше (т. е. при $R < r$ $P < P_r$, а при $R > r$ $P > P_r$), вследствие чего с увеличением внешнего сопротивления КПД растет.

3.32. По результатам расчетов, произведенных в задаче 3.31, построить график $I = f(U)$, т. е. зависимость тока в цепи от значения напряжения на внешнем сопротивлении. Убедиться, что график представляет прямую, проведенную через точки с координатами $(I_m, 0)$ и $(0, U_m = E)$ (рис. 3.12, а). Построить на этом же графике различными цветами кривые $P = f(U)$, $P_r = f(U)$, $P_n = f(U)$ и $\eta = f(U)$, т. е. зависимости мощностей на внешнем сопротивлении R , внутреннем сопротивлении r , мощности, отдаваемой источником с ЭДС E и КПД цепи. Убедиться, что график $P_n = f(U)$ имеет такой же характер, как и график $I = f(U)$ в соответствующем масштабе, а график $\eta = f(U)$ есть прямая, проведенная через начало координат и точку $(U_m = E, 100\%)$.

3.33. По условию задачи 3.31 рассчитать и построить кривые $I/I_m = f(R)$; $U/U_m = f(R)$; $P/P_m = f(R)$; $\eta/\eta_m = f(R)$.

Указание: разберите сначала задачу 3.31 и учтите, что в цепи, показанной на схеме рис. 3.11, а, $I_m = E/r$, $U_m = E$, $P_m = E^2/4r$, $\eta_m = 1$.

3.34. В цепи, показанной на рис. 3.11, а, $E = 20$ В, внутреннее сопротивление $r = 16$ Ом. Рассчитать внешние сопротивления R и КПД, при которых во внешнем сопротивлении рассеивается мощность $P = 4$ Вт.

Указание: разберите сначала пример 3.18 на с. 85 в [1].

3.35. Какую наибольшую мощность можно получить в сопротивлении R (рис. 3.11, а), если внешняя нагрузочная характеристика имеет вид, показанный на рис. 3.12, б?

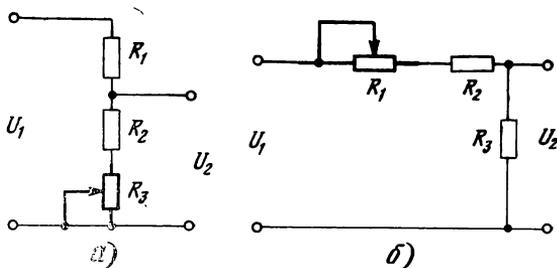


Рис. 3.13

3.36. Определить пределы изменения напряжения U_2 при изменении сопротивления R_3 от 0 до 12 кОм, если $R_1=9$ кОм, $R_2=15$ кОм, $U_1=12$ В (рис. 3.13, а).

Указание: разберите сначала пример 3.1 на с. 45 в [1].

Определите ток в цепи $I=U_1/(R_1+R_2+R_3)$, а затем напряжение $U_2=I(R_2+R_3)$ (рис. 3.13, б).

3.37. Определить пределы изменения напряжения U_2 при изменении сопротивления R_1 от 0 до 25 кОм, если $R_2=17$ кОм, $R_3=8$ кОм, $U_1=25$ В.

Указание: разберите сначала задачу 3.36.

3.38. Выберите сопротивления R_1, R_2, R_3 в схеме на рис. 3.13, б, чтобы при изменении сопротивления R_1 напряжение U_2 изменялось от $0,25U_1$ до $0,75U_1$.

Указание: разберите сначала задачу 3.36.

3.39. Нарисуйте в масштабе различными цветами кривые мгновенных значений напряжений на сопротивлениях R_1, R_2, R_3 , соединенных последовательно, если входное напряжение имеет треугольную форму с размахом $U_p=10$ В, а $R_1=1$ кОм, $R_2=1,5$ кОм, $R_3=2,5$ кОм (рис. 3.14, а).

Решение. Поскольку все сопротивления в цепи линейные резистивные, форма протекающего в цепи тока будет повторять форму приложенного к цепи напряжения, а форма падений напряжений на сопротивлениях — форму тока. Следовательно, падения напряжения на всех элементах имеют одинаковую треугольную форму. Определим размах тока в цепи: $I_p=$

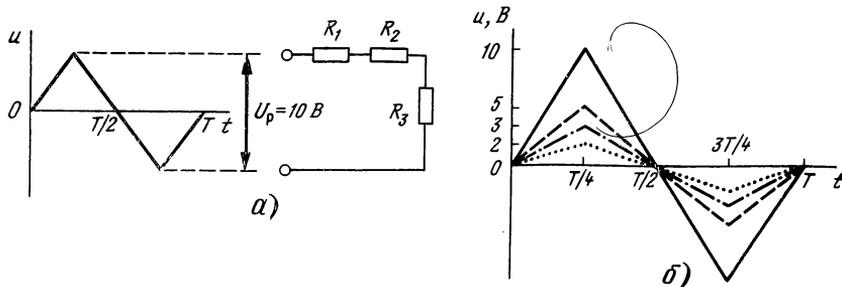


Рис. 3.14

$= U_p / (R_1 + R_2 + R_3) = 10 / (1 + 1,5 + 2,5) \cdot 10^3 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 2 \text{ мА}$. (Заметим, что если напряжения брать в вольтах, сопротивление — в килоомах, то ток будет получаться в миллиамперах. Расчеты в таких единицах вполне возможны и часто используются на практике. В этом случае $I (\text{мА}) = U (\text{В}) / R (\text{кОм}) = 10 / 5 = 2 \text{ мА}$.) Рассчитаем размах падений напряжений на всех сопротивлениях: $U_{p(R_1)} = R_1 I_p = 1 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2 \text{ В}$. (Можно было бы сделать проще: сопротивление взять в килоомах, ток — в миллиамперах, напряжение при этом получается в вольтах: $U_{p(R_1)} = R_1 (\text{кОм}) I_p (\text{мА}) = 1 \cdot 2 = 2 \text{ В}$. Аналогично $U_{p(R_2)} = R_2 I_p = 1,5 \cdot 2 = 3 \text{ В}$; $U_{p(R_3)} = R_3 I_p = 2,5 \cdot 2 = 5 \text{ В}$ (рис. 3.14, б).)

3.40. Решите задачу 3.39, если напряжение на входе имеет форму: а) трапецевидную (рис. 3.15, а); б) прямоугольную (рис. 3.15, б); в) импульсную (рис. 3.15, в); г) однополупериодную (рис. 3.15, г). Размах напряжений всех сигналов равен 25 В.

Указание: разберите сначала задачу 3.39.

3.41. На рис. 3.16, а показан участок цепи с источником внутри участка. Определите направление и значение тока в цепи, если $E = 30 \text{ В}$, $U = 10 \text{ В}$, $R = 20 \text{ Ом}$.

Указание: изучите сначала § 3.6 на с. 48—51 в [1].

Решение. Пусть предполагаемый ток протекает в таком направлении, в котором он стал бы протекать в данной цепи, если бы значение ЭДС E равнялось нулю. Очевидно, что ток в этом случае протекает от точки с более высоким потенциалом к точке с меньшим потенциалом, т. е. от точки A к точке B (рис. 3.16, б). Тогда $I = (U - E) / R = (10 - 30) / 20 = -1 \text{ А}$. Следовательно, действительный ток будет иметь значение 1 А и станет протекать в направлении, противоположном предполагаемому, т. е. от точки B к точке A . Произведем проверку. Если ток $I = 1 \text{ А}$ течет от точки B к точке A , то на сопротивлении $R = 20 \text{ Ом}$ падение напряжения 20 В с «плюсом» в точке B , а «минусом» в точке D . Примем потенциал точки B за нулевой ($\varphi_B = 0$); в этом случае потенциал точки D равен $\varphi_D = \varphi_B - U_R = 0 - 20 = -20 \text{ В}$. Потенциал точки A выше потенциала точки D на значение E , т. е. $\varphi_A = \varphi_D + E = -20 + 30 = 10 \text{ В}$ и $\varphi_A - \varphi_B =$

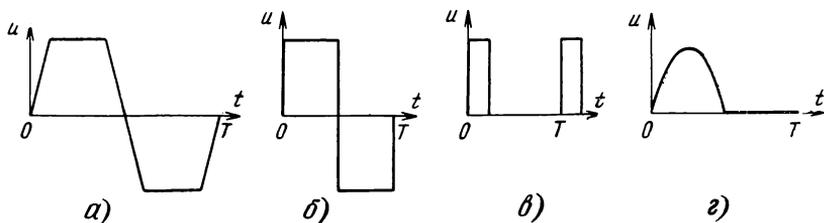


Рис. 3.15

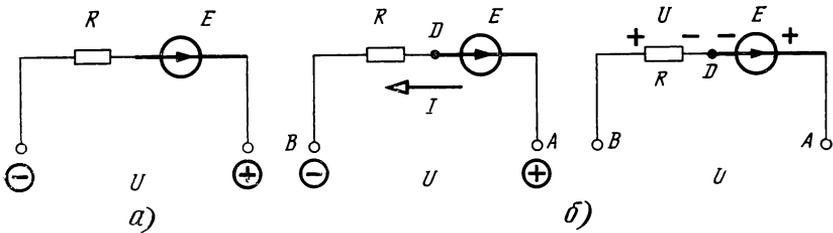


Рис. 3.16

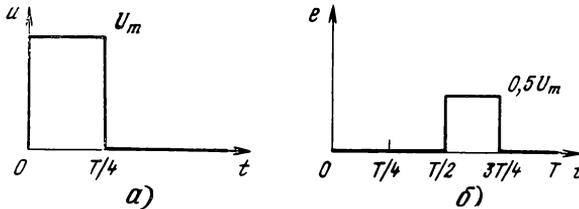


Рис. 3.17

$=10-0=10$ В, что и было задано по условию. Задача, следовательно, решена правильно.

3.42. Может ли в цепи, показанной на рис. 3.16, а, напряжение U быть равным нулю, если $E=30$ В, $R=20$ Ом? Если может, то при каких условиях?

Указание: разберите сначала задачу 3.41.

3.43. Определите форму тока в цепи, показанной на рис. 3.16, а, если форма напряжения $u=f(t)$ показана на рис. 3.17, а, форма ЭДС $e=f(t)$ — на рис. 3.17, б, $U_m=100$ В, $R=20$ Ом.

ЦЕПИ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ СОПРОТИВЛЕНИЙ

3.44. Рассчитать токи во всех ветвях цепи, показанной на рис. 3.18, а, и произвести все проверки, если $U=100$ В, $R_1=26$ Ом, $R_2=40$ Ом, $R_3=60$ Ом.

Указание: изучите сначала § 3.8—3.10 на с. 51—57 в [1].

Решение. Цепь, изображенная на рис. 3.18, а, является разветвленной, поскольку содержит два узла (строго говоря, неустранимых узла, см. пояснения к гл. 3 на с. 26). В процессе решения задач схемы цепей приходится преобразовывать и соответственно перерисовывать, причем как правило, чем сложнее цепь, тем больше в ней приходится производить различных преобразований. Делать это гораздо удобнее, если все характерные точки цепи предварительно обозначить на схеме буквами, даже если в исходной цепи эти узлы обозначены не были. Таким образом, решение задачи следует начинать с

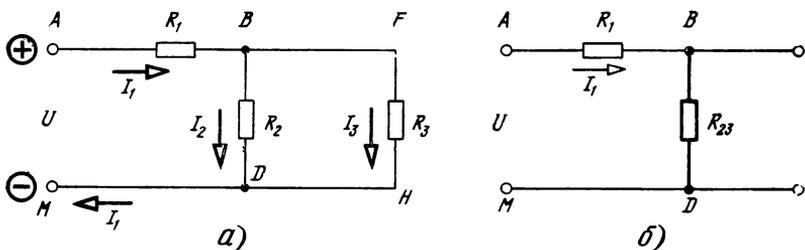


Рис. 3.18

разметки всех узловых точек (а иногда и некоторых других) лучше всего большими буквами, хотя иногда обозначают и цифрами, что в ряде случаев оказывается менее удобным. В рассматриваемой задаче обозначим ветвь с сопротивлением R_1 буквами A и B , с сопротивлением R_2 — B и D , с сопротивлением R_3 — F и H . Входные зажимы обозначим A и M . Точки B и F являются однопотенциальными, следовательно, электрически представляют одну точку и обозначаются одной буквой, но поскольку к разбору задач на разветвленные цепи мы только приступаем, допустим эту некоторую избыточность. Затем следует показать пути, по которым станут протекать токи в данной цепи.

Если в схеме имеется только один источник, то в большинстве случаев можно однозначно показать направления токов в ветвях. При этом следует помнить, что ток течет от положительного зажима источника, проходит по замкнутой цепи и возвращается к отрицательному зажиму этого же источника. (Точнее следовало бы сказать: «Ток начинается на том зажиме источника, потенциал которого в данный момент выше, и возвращается к той точке источника, потенциал которой в этот момент ниже».)

Таким образом, если положительный зажим источника подключен к точке A , то ток начинается именно в точке A и течет через сопротивление R_1 к точке B . Назовем этот ток I_1 . В точке B ток I_1 разделяется на I_2 и I_3 , а в точке D они снова соединяются в I_1 . Следовательно, в данной цепи на участке точка D — точка M — источник — точка A — сопротивление R_1 — точка B течет ток I_1 , на участке точка B — сопротивление R_2 — точка D — ток I_2 , а на участке точка F — сопротивление R_3 — точка H — ток I_3 . В соответствии с первым законом Кирхгофа $I_1 = I_2 + I_3$. После этого цепь следует мысленно разбить на участки, которые содержат элементы, соединенные или только последовательно, или только параллельно. Поскольку на зажимах сопротивлений R_2 и R_3 имеется одно и то же напряжение U_{BD} (или равное ему U_{FH}), эти элементы соединены параллельно и, следовательно, могут быть заменены одним эквивалентным сопротивлением $R_{23} = R_2 \cdot R_3 / (R_2 + R_3)$. После такой замены

схема оказывается неразветвленной (рис. 3.18, б) и в ней протекает ток, который в непреобразованной цепи протекал через R_1 , т. е. I_1 . На основании второго закона Кирхгофа ток I_1 в данной цепи определяется из выражения

$$\begin{aligned} I_1 &= U / (R_1 + R_{23}) = U / [R_1 + (R_2 R_3) / (R_2 + R_3)] = \\ &= U / \left[\frac{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{(R_2 + R_3)} \right] = \\ &= U (R_2 + R_3) / (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Обратим внимание, что все математические выражения, получающиеся в формулах, следует приводить к так называемому нормальному виду, т. е. виду, когда выражение представляет дробную черту, у которой в числителе и знаменателе записаны многочлены. Иногда не вполне строго говорят, что дробь должна быть «двухэтажной», а не «многоэтажной». В соответствии со сказанным выражение для тока следовало привести к виду (3.1). Находить токи во второй и третьей ветвях можно двумя различными способами: либо умножить ток I_1 на эквивалентное сопротивление R_{23} , т. е. получить напряжение между точками B и D , а затем поделить его поочередно на сопротивления R_2 и R_3 , либо разветвить ток I_1 на две параллельные ветви. Рассмотрим оба способа и убедимся в идентичности полученных результатов:

$$\begin{aligned} U_{BD} &= R_{23} I_1 = \frac{R_2 R_3 U (R_2 + R_3)}{(R_2 + R_3) (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} = \\ &= \frac{U R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}; \\ I_2 &= \frac{U_{BD}}{R_2} = \frac{U R_2 R_3}{R_2 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} = \frac{U R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$I_3 = \frac{U_{BD}}{R_3} = \frac{U R_2 R_3}{R_3 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} = \frac{U R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Эти же результаты можно получить гораздо проще, если использовать формулы, с помощью которых, зная ток в неразветвленной части цепи и сопротивления параллельных ветвей, определить токи в этих ветвях. Напомним, что ток в ветви равен току в неразветвленной части цепи, умноженной на дробь, у которой в знаменателе — сумма сопротивлений тех ветвей, на которые ток разветвляется, а в числителе — сопротивление противоположной ветви. Таким образом, в данной цепи

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1 \frac{R_3}{(R_2 + R_3)} = \frac{U (R_2 + R_3) R_3}{(R_2 + R_3) (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} = \\ &= \frac{U R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}; \end{aligned}$$

$$I_3 = I_1 \frac{R_2}{(R_2 + R_3)} = \frac{U (R_2 + R_3) R_3}{(R_2 + R_3) (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} =$$

$$= \frac{U R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Сделаем одно полезное замечание. Зная токи I_1 и I_2 , можно было бы определить ток $I_3 = I_1 - I_2$. Тем не менее искать ток подобным способом не следует по следующим соображениям. Если при подсчете I_2 вкралась какая-то ошибка, даже чисто арифметическая, то I_3 в этом случае также окажется подсчитанным неверно, но эти ошибки станут скрадываться, так как сумма токов I_2 и I_3 будет равна току I_1 , что создаст впечатление правильности произведенных расчетов, поэтому ток I_3 следует искать аналогично току I_2 , после чего следует убедиться в справедливости равенства $I_1 = I_2 + I_3$. Если один из этих токов был найден неверно, то первый закон Кирхгофа выполняться не будет, ошибка при этом сразу же обнаружится.

Произведем числовые подсчеты. Поскольку множитель $R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3$ фигурирует во всех расчетных формулах, то вычислим его отдельно: $26 \cdot 40 + 26 \cdot 60 + 40 \cdot 60 = 5000$. Тогда $I_1 =$

$$= \frac{100 \cdot (40 + 60)}{5000} = \frac{100 \cdot 100}{5000} = 2 \text{ А}; \quad I_2 = 100 \cdot 60 / 5000 = 1,2 \text{ А};$$

$$I_3 = 100 \cdot 40 / 5000 = 0,8 \text{ А}.$$

Произведем проверки. В каждой цепи, как известно, должны выполняться оба закона Кирхгофа и баланс мощностей, т. е. соблюдаться равенства $I_1 = I_2 + I_3$, $U = R_1 I_1 + I_2 R_2$, $0 = R_3 I_3 - R_2 I_2$, $UI = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$. Подставим числовые значения и произведем сравнения левых и правых частей каждого равенства: $2 = 1,2 + 0,8$; $100 = 26 \cdot 2 + 40 \cdot 1,2$; $100 = 26 \cdot 2 + 60 \cdot 0,8$; $0 = 60 \cdot 0,8 - 40 \cdot 1,2$; $100 \cdot 2 = (2)^2 \cdot 26 + (1,2)^2 \cdot 40 + (0,8)^2 \cdot 60$. Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.45. Рассчитать токи во всех ветвях и падение напряжений на всех сопротивлениях цепи, показанной на рис. 3.19, а, если $U_1 = 1 \text{ В}$, $R_1 = 15 \text{ Ом}$, $R_2 = 25 \text{ Ом}$, $R_3 = 40 \text{ Ом}$, $R_4 = 120 \text{ Ом}$, $R_5 = 52 \text{ Ом}$.

Указание: разберите сначала задачу 3.44.

Решение. По сопротивлениям $R_1 - R_3$ протекает один и тот же ток I_1 , поэтому данные элементы соединены последовательно и их можно заменить одним эквивалентным $R_6 = R_1 + R_2 + R_3 = 15 + 25 + 40 = 80 \text{ Ом}$. После такой замены схема, показанная на рис. 3.19, а, приобретает вид, показанный на рис. 3.19, б. Далее следует заменить сопротивления R_6 и R_4 , соединенные параллельно, новым сопротивлением $R_7 = R_6 R_4 / (R_6 + R_4) = 80 \cdot 120 / (80 + 120) = 48 \text{ Ом}$, которое соединено последовательно с R_5 , после чего определяется входное сопротивление цепи $R_{\text{вх}} = R_7 + R_5 = 48 + 52 = 100 \text{ Ом}$ (рис. 3.19, в). Можно записать выражение входного сопротивления непосредственно по

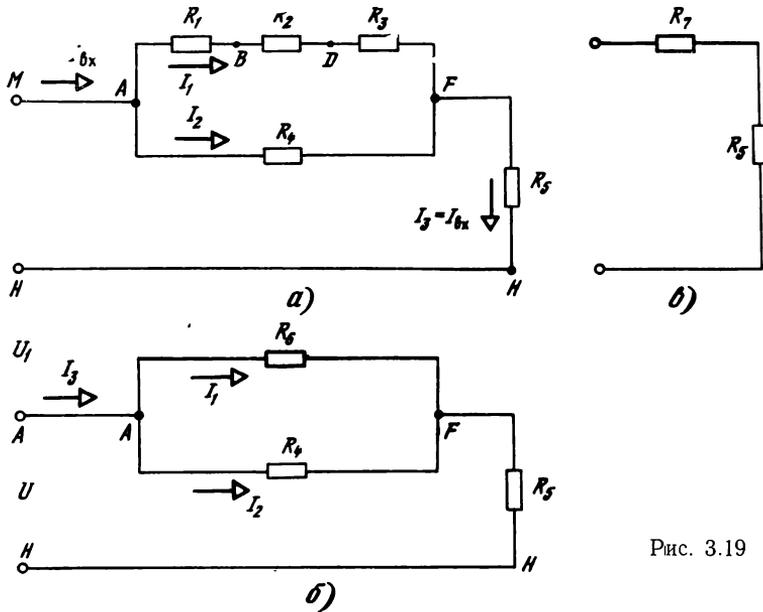


Рис. 3.19

виду схемы рис. 13.19, б, имея в виду, что входное сопротивление $R_{вх}$ представляет сопротивление участка AF , соединенное последовательно с сопротивлением участка FH , т. е. $R_{вх} = R_{AF} + R_{FH} = [R_6 R_4 / (R_6 + R_4)] + R_5 = (R_6 R_4 + R_5 R_6 + R_4 R_5) / (R_6 + R_4) = (80 \cdot 120 + 52 \cdot 80 + 120 \cdot 52) / (80 + 120) = (9600 + 4160 + 6240) / 200 = 20\,000 / 200 = 100$ Ом.

На практике учащиеся, не имеющие достаточных навыков, могут производить расчеты поэлементно, перерисовывая каждый раз схему до тех пор, пока вся цепь не окажется состоящей из нескольких последовательно соединенных сопротивлений. По мере приобретения навыков число промежуточных схем можно уменьшать, проделывая при этом часть преобразований в уме. Определив входное сопротивление цепи, т. е. сопротивление между точками AH , следует определить входной ток цепи $I_{вх}$ из выражения $I_{вх} = U_1 / R_{вх} = 1 / 100 = 0,010$ А = $10 \cdot 10^{-3}$ А = 10 мА. Заметим, что напряжения в данной схеме лучше выражать не в вольтах, а в милливольтках. Так как 1 В = 1000 мВ, то $I_{вх(мА)} = U_{(мВ)} / R_{(Ом)} = 1000$ (мВ) / 100 (Ом) = 10 (мА). Из схемы рис. 3.19, в видно, что ток $I_{вх}$ течет по сопротивлениям R_7 и R_5 . Но сопротивления R_7 на исходной схеме нет, это некоторое эквивалентное сопротивление, а сопротивление R_5 никаким преобразованиям не подверглось. Следовательно, ток $I_{вх}$ в исходной схеме (рис. 3.19, а) течет в ветвях MA и FH , т. е. в сопротивлении R_5 . Соответственно по сопротивлению R_5 протекает ток, который можно назвать током I_3 и являющийся входным током

цепи $I_{\text{вх}}$. В узле A ток $I_{\text{вх}}$ разветвляется на I_1 , протекающий по верхней ветви, и I_2 , текущий по нижней ветви. Рассчитаем токи I_1 и I_2 :

$$I_1 = I_{\text{вх}} = \frac{R_4}{(R_1 + R_2 + R_3) + R_4} = \frac{10 \cdot 120}{15 + 25 + 40 + 120} = \\ = \frac{10 \cdot 120}{200} = 6 \text{ мА};$$

$$I_2 = I_{\text{вх}} \frac{(R_1 + R_2 + R_3)}{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)} = \frac{10 \cdot (15 + 25 + 40)}{15 + 25 + 40 + 120} = \frac{10 \cdot 80}{200} = 4 \text{ мА}.$$

Очевидно, что $10 = 6 + 4$, т. е. первый закон Кирхгофа в узле A выполняется. Рассчитаем падения напряжений на всех сопротивлениях. Поскольку в данном случае необходимо искать напряжения на участках цепи, производить расчеты следует с помощью закона Ома: $U_{AB} = U_{R1} = R_1 I_1 = 15 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 90 \cdot 10^{-3} \text{ В} = 90 \text{ мВ}$. (Заметим, что если сопротивление, выраженное в омах, умножить на ток, выраженный в миллиамперах, то получится напряжение, выраженное в милливольтгах). Действительно, $15 \text{ (Ом)} \cdot 6 \text{ (мА)} = 90 \text{ (мВ)}$. Аналогично $U_{BD} = U_{R2} = R_2 \cdot I_1 = 25 \times 6 = 150 \text{ мВ}$, $U_{DF} = U_{R3} = R_3 I_1 = 40 \cdot 6 = 240 \text{ мВ}$; $U_{R4} = R_4 I_2 = 120 \times 4 = 480 \text{ мВ}$; $U_{FH} = R_5 I_3 = 52 \cdot 10 = 520 \text{ мВ}$.

Напряжение на участке AF можно определить тремя различными способами: сложив падения напряжений на сопротивлениях R_1 , R_2 и R_3 , умножив сопротивление R_4 на ток I_1 либо умножив R_4 на I_2 . Действительно, $U_{AF} = 90 + 150 + 240 = 480 \text{ мВ}$. Проверим выполнение второго закона Кирхгофа: $U_1 = U_{R1} + U_{R2} + U_{R3} + U_{R5}$, т. е. $1000 = 90 + 150 + 240 + 520$, $U_1 = U_{R4} + U_{R5}$, т. е. $1000 = 480 + 520$; $0 = U_{R1} + U_{R2} + U_{R3} - U_{R4}$, т. е. $0 = 90 + 150 + 240 - 480$.

Проверим также выполнение баланса мощностей. Для расчета мощностей напряжения удобнее выражать в вольтах, токи — в амперах, сопротивления — в омах, тогда мощности получаются в ваттах: $U_1 I_{\text{вх}} = I_1^2 (R_1 + R_2 + R_3) + I_2^2 R_4 + I_3^2 R_5$. В числовых значениях $1 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = (6 \cdot 10^{-3})^2 (15 + 25 + 40) + (4 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 120 + (10 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 52$, или $10^{-2} = 36 \cdot 10^{-6} \cdot 80 + 16 \cdot 10^{-6} \cdot 120 + 100 \cdot 10^{-6} \cdot 52$, т. е. $10^{-2} = (2880 + 1920 + 5200) \cdot 10^{-6}$, откуда $10^{-2} \text{ Вт} = 10^{-2} \text{ Вт}$.

Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

Замечание. После решения каждой задачи следует проверять выполнение законов Кирхгофа и баланса мощностей. Необходимость таких проверок в условиях задачи чаще всего не оговаривается, а является само собой разумеющейся.

3.46. В цепи, показанной на рис. 3.19, *а*, найти входное напряжение U_1 , если напряжение на сопротивлении R_5 равно 2,6 В.

Указание: разберите сначала задачу 3.45.

3.47. В цепи, показанной на рис. 3.19, *а*, найти напряжения на всех элементах цепи, если $U_{R2} = 3 \text{ В}$.

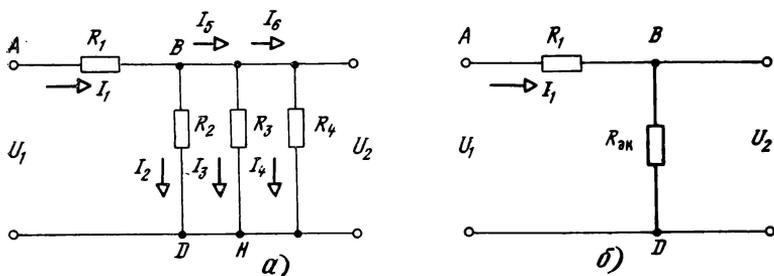


Рис. 3.20

Указание: зная R_2 и U_{R_2} , найти I_1 ; зная I_1 и $R_6 = R_1 + R_2 + R_3$, найти U_{AF} ; зная U_{AF} и R_4 , найти I_2 ; зная I_1 и I_2 , найти $I_3 = I_{вх}$; зная U_{AF} и U_{FH} , найти U_1 . Затем выполнить проверки.

3.48. В цепи, показанной на рис. 3.20, а, рассчитать токи во всех ветвях, если $U_1 = 50$ В, $R_1 = 300$ Ом, $R_2 = 500$ Ом, $R_3 = 400$ Ом, $R_4 = 2000$ Ом.

Указание: изучите сначала § 3.8—3.10 на с. 51—57 в [1].

Решение. Поскольку на зажимах сопротивлений R_2 , R_3 и R_4 имеется одно и то же напряжение или, что то же самое, каждое из этих сопротивлений включено между двумя узлами (B и D), то данные сопротивления соединены между собой параллельно. Но параллельно соединенные сопротивления можно заменить одним эквивалентным, причем если параллельно соединено не менее трех сопротивлений, то сначала следует рассчитать их эквивалентную проводимость: $G_{эк} = 1/R_{эк} = 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4 = 1/500 + 1/400 + 1/2000 = 0,002 + 0,0025 + 0,0005 = 0,005$ См (читается «сименс»). Тогда $R_{эк} = 1/G_{эк} = 1/0,005 = 200$ Ом.

После преобразования схема приобретает вид рис. 3.20, б, где $R_1 = 300$ Ом, а $R_{эк} = 200$ Ом. Ток $I_1 = U_1 / (R_1 + R_{эк}) = 50 / (300 + 200) = 0,1$ А = 100 мА. Напряжение $U_{BD} = 200 \cdot 0,1 = 20$ В. Таким образом, на зажимах сопротивлений R_2 — R_4 , включенных между узлами BD , оказалось напряжение, равное 20 В. Определим токи: $I_2 = U_{BD} / R_2 = 20 / 500 = 0,04$ А = 40 мА; $I_3 = U_{BD} / R_3 = 20 / 400 = 0,05$ А = 50 мА; $I_4 = U_{BD} / R_4 = 20 / 2000 = 0,01$ А = 10 мА. Так как выходные зажимы цепи разомкнуты, то ток в них не течет, следовательно, $I_6 = I_4 = 40$ мА. Ток I_5 по первому закону Кирхгофа равен арифметической сумме токов I_6 и I_3 , т. е. $I_5 = I_3 + I_6 = I_3 + I_4 = 50 + 10 = 60$ мА. Аналогично $I_1 = I_2 + I_5 = 40 + 60 = 100$ мА = 0,1 А.

Определим падение напряжения на участке AB , т. е. сопротивлению R_1 : $U_{R_1} = R_1 I_1 = 300 \cdot 0,1 = 30$ В. Проверим выполнение первого закона Кирхгофа. В узле B $I_1 = I_2 + I_5$, $100 = 40 + 60$, в узле F $I_5 = I_3 + I_6$, $60 = 50 + 10$. По второму закону Кирхгофа $U_1 = U_{AB} + U_{BD}$, $50 = 30 + 20$. Проверим баланс мощностей: $U_1 I_1 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4$; $50 \cdot 0,1 = (0,1)^2 \cdot 300 + (0,04)^2 \cdot 500 +$

$+ (0,05)^2 \cdot 400 + (0,01)^2 \cdot 2000$; $5 = 3 + 0,8 + 1 + 0,2$; $5 = 5$. Таким образом, все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.49. В схеме, показанной на рис. 3.20, а, ток $I_3 = 0,1$ А. а) определить токи во всех ветвях и напряжения на всех элементах цепи.

Указание: по известным значениям I_3 и R_3 определите U_{BD} ; по значениям U_{BD} , R_2 , R_4 определите I_2 и I_4 ; по I_2 , I_3 , I_4 определите I_6 , I_5 , I_1 ; по I_1 и R_1 определите U_{AB} ; по U_{AB} и U_{BD} определите U_1 . Зная напряжения на всех элементах и токи во всех ветвях, произведите проверки. б) Определить токи во всех ветвях и падения напряжений на всех элементах цепи, если $U_{AB} = 12$ В.

Указание: разберите сначала задачи 3.48 и 3.49.

3.50. В схеме, показанной на рис. 3.20, а, оборвали ветвь с сопротивлением R_3 . Что произойдет с токами во всех ветвях и падениями напряжений на всех сопротивлениях, если входное напряжение остается без изменений?

Указание: разберите сначала задачи 3.48 и 3.49.

Решение. Поскольку ветвь с сопротивлением R_3 оборвана, сопротивление третьей ветви увеличивается до бесконечности, а проводимость уменьшается до нуля. Проводимости второй и четвертой ветвей остаются без изменений, а проводимость третьей ветви уменьшается, поэтому общая проводимость участка BD уменьшается, а сопротивление соответственно увеличивается. Увеличение сопротивления участка BD влечет рост входного сопротивления цепи, т. е. сопротивления $R_{вх} = R_{AB} + R_{BD}$, при этом уменьшается ток I_1 , а следовательно, и падение напряжения на участке AB . Но по второму закону Кирхгофа $U_1 = U_{AB} + U_{BD}$. Поскольку U_1 остается неизменным, а U_{AB} уменьшается, напряжение на участке U_{BD} возрастает, что вызывает увеличение токов I_2 и I_4 . Таким образом, при отключении сопротивления R_3 произойдет следующее: ток I_1 уменьшится, токи I_2 и I_4 возрастут, ток I_3 упадет до нуля, напряжение U_{AB} уменьшится, напряжение U_{BD} возрастет, входное напряжение U_1 по условию остается без изменений.

3.51. В схеме, показанной на рис. 3.21, а, известны ЭДС E , сопротивления R_1 , R_2 , R_3 , R_5 и ток I_1 . Требуется определить сопротивление R_4 .

Указание: разберите сначала задачи 3.48 и 3.49.

Решение. Для решения данной задачи используются законы Кирхгофа. Следует предостеречь учащихся от возможных попыток преобразовать один из треугольников в схему звезды. Действительно, если преобразовать треугольник ADF , то исчезнет сопротивление R_1 , в котором известен ток, а в этом случае нельзя воспользоваться условием $U_{AD} = R_1 I_1$. Если преобразовать треугольник FDB , то исчезнет сопротивление R_4 , значение которого необходимо определить. Таким образом, произ-

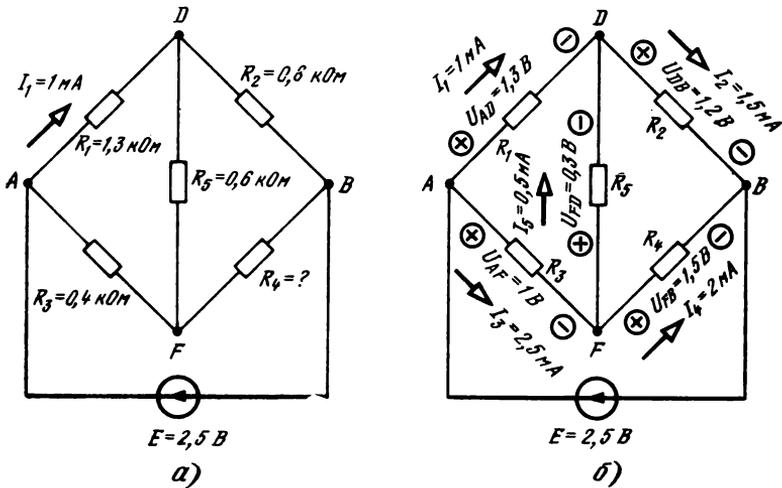


Рис. 3.21

водить какие-либо преобразования в данной схеме не следует.

Определим падение напряжения на сопротивлении R_1 : $U_{AD} = R_1 I_1 = 1,3 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 1,3$ В (можно было бы ток выразить в миллиамперах, а сопротивление — в килоомах, при этом напряжение получилось бы также в вольтах: $U_{AD(B)} = R_{(КОМ)} \times I_{(МА)} = 1,3 \cdot 1 = 1,3$). По второму закону Кирхгофа алгебраическая сумма мгновенных ЭДС (в линейных резистивных цепях, может быть, и действующих) равна алгебраической сумме мгновенных (в R -цепях — действующих) падений напряжений на элементах цепи. Несколько нестрого можно сказать, что какое напряжение приложено извне к зажимам цепи, такое же будет падать на элементах любого контура, имеющегося между этими зажимами. В рассматриваемой цепи к зажимам AB приложено напряжение $E = 2,5$ В от внешнего источника. Значит, на всех сопротивлениях, включенных между точками A и B , в любом случае падает это же самое напряжение, равное 2,5 В.

Между точками A и B включено несколько ветвей, в том числе и ветви AD и DB , а в этом случае $E = U_{AD} + U_{DB}$, т. е. $2,5 = 1,3 + U_{DB}$, откуда $U_{DB} = 2,5 - 1,3 = 1,2$ В. Так как ток в сопротивлении R_2 — от точки D к точке B (что определяется полярностью источника E), то падения напряжений будут иметь полярности, показанные на рис. 3.21, б. Зная U_{DB} и R_2 , определяем ток $I_2 = U_{DB} / R_2 = 1,2 / 0,8 = 1,5$ мА. Для выполнения в узле D первого закона Кирхгофа необходимо, чтобы в пятой ветви к узлу D притекал ток $I_5 = I_2 - I_1 = 1,5 - 1 = 0,5$ мА. При этом на сопротивлении R_5 будет падать напряжение $U_{FD} = R_5 I_5 = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3$ В с «плюсом» в точке F . В соответствии с полярностью источни-

ка по сопротивлению R_3 будет протекать ток I_3 , направленный от точки A к точке F , а по сопротивлению R_4 — ток I_4 , направленный от точки F к точке B (рис. 3.21, б). Но в этом случае на сопротивлении R_3 окажется падение напряжения U_{AF} с «плюсом» в точке A , а на сопротивлении R_4 — U_{FB} — с «плюсом» в точке B .

Запишем выражение второго закона Кирхгофа по пути $A-F-D-B$, т. е. $E = U_{AF} + U_{FD} + U_{DB}$ или $2,5 = U_{AF} + 0,3 + 1,2$, откуда $U_{AF} = 2,5 - 1,5 = 1$ В. Зная U_{AF} и R_3 , находим ток $I_3 = U_{AF} / R_3 = 1 / 0,4 = 2,5$ мА. По первому закону Кирхгофа в узле F $I_3 = I_5 + I_4$, откуда $I_4 = I_3 - I_5 = 2,5 - 0,5 = 2$ мА. Теперь запишем выражение второго закона Кирхгофа по пути $A-D-F-B$, т. е. $E = U_{AD} - U_{DF} + U_{FB}$. (Направление обхода в сопротивлениях R_1 и R_4 совпадает с направлениями токов в этих ветвях, поэтому падения напряжения на этих элементах записываются со знаком «плюс», а направление обхода в сопротивлении R_5 противоположно направлению тока, поэтому напряжение U_{DF} записывается со знаком «минус»). Тогда $U_{FB} = E - U_{AD} + U_{DF} = 2,5 - 1,3 + 0,3 = 1,5$ В. Зная U_{FB} и I_4 , определяем сопротивление $R_4 = U_{FB} / I_4 = 1,5 / 2 = 0,75$ кОм = 750 Ом.

3.52. В схеме рис. 3.21, а $R_1 = 2,6$ кОм, $R_3 = 0,8$ кОм, $R_4 = 1,5$ кОм, $R_5 = 1,2$ кОм, $I_4 = 4$ мА, $E = 10$ В. Определить сопротивление R_2 и произвести проверки.

Указание: разберите сначала задачу 3.52.

3.53. В цепи, показанной на рис. 3.22, а, сопротивление R_1 переменное, его значение может изменяться от 0 до ∞ . Рассчитать и построить кривую $I = f(R_1)$. Все остальные элементы цепи постоянные и известные.

Указание: разберите § 3.27 на с. 82—86 в [1].

Решение. Нанесем на схему точки A, B, D, F и обозна-

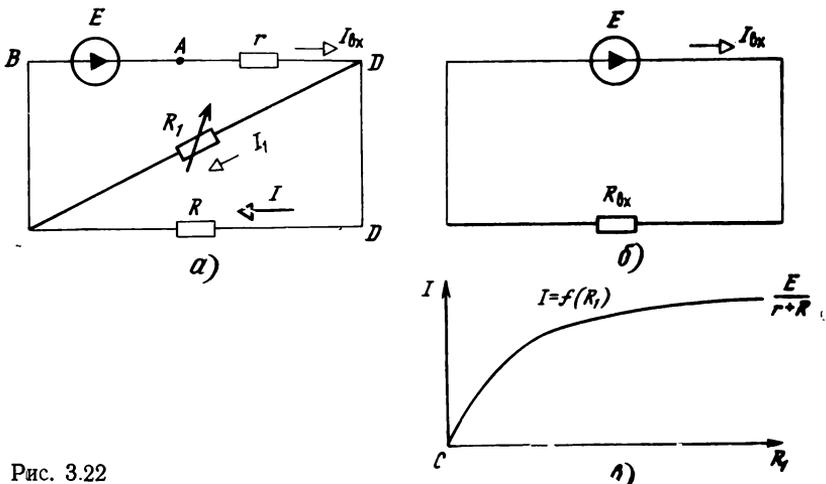


Рис. 3.22

чим токи: в ветви с источником $I_{\text{вх}}$, в ветви с сопротивлением R_1 I_1 , в ветви с сопротивлением R I . Определим входное сопротивление цепи $R_{\text{вх}}$, т. е. сопротивление, к которому подключен источник. Как видно из схемы, сопротивления R_1 и R соединены параллельно, поскольку на их зажимах имеется одно и то же напряжение $U_{\text{ДВ}}$, а сопротивление r соединено с этой группой последовательно, т. е. $R_{\text{вх}} = r + [R_1 R / (R_1 + R)] = (r R_1 + r R + R_1 R) / (R_1 + R)$.

После произведенного преобразования цепь приобретает вид, изображенный на рис. 3.22, б, где $I_{\text{вх}} = E / R_{\text{вх}} = E (R_1 + R) / (r R_1 + r R + R_1 R)$. В схеме рис. 3.22, а ток $I_{\text{вх}}$ течет на участке от точки B через источник E и сопротивление r к точке D . В узле D ток разветвляется на два тока: I_1 , текущий через сопротивление R_1 , и I , текущий через сопротивление R . Найдем их:

$$I_1 = I_{\text{вх}} [R / (R_1 + R)] = \frac{E (R_1 + R) R}{(r R_1 + r R + R_1 R) (R_1 + R)} =$$

$$= \frac{E R}{r R_1 + r R + R_1 R};$$

$$I = I_{\text{вх}} R_1 / (R_1 + R) = E R_1 / (r R_1 + r R + R_1 R).$$

(Если сложить токи I и I_1 , то получится ток $I_{\text{вх}}$, следовательно, разветвление тока произведено правильно).

Определим зависимость тока I от значения сопротивления R_1 . При $R_1 = 0$ $I = 0 / r R = 0$ (поскольку нуль, деленный на целое число, есть нуль). При $R_1 = \infty$ $I = E \infty / (r \infty + r R + R \infty) = \infty / \infty$. Напомним, что при получении выражения вида ∞ / ∞ расчетную формулу необходимо преобразовать: в числителе и знаменателе за скобку следует вынести член, обращающийся в ∞ в той наибольшей степени, которая имеется в выражении, в данном случае — в первой, тогда $I = E R_1 / (r R_1 + r R + R_1 R) = = R_1 E / [R_1 (r + r R / R_1 + R)] = E / (r + r R / R_1 + R)$.

При $R_1 = \infty$ член $r R / \infty$ обращается в нуль и выражение приобретает вид $I = E / (r + R)$. Таким образом, при изменении сопротивления R_1 от 0 до ∞ ток I изменяется от нуля до значения $E / (r + R)$ (рис. 3.22, в). Сравним качественно граничные условия цепи с результатами расчета. При $R_1 = 0$ сопротивление R оказывается замкнутым, ток через него не течет, что и получилось по расчету. При $R_1 = \infty$ средняя ветвь разомкнута, получается неразветвленная цепь с сопротивлениями r и R , в такой цепи $I = E / (r + R)$, что также получилось по расчету. Следовательно, результаты расчетов совпадают с граничными (т. е. предельными) значениями цепи, т. е. задача решена правильно.

3.54. Определите внутренние сопротивления вольтметра R_V и амперметра R_A в схеме, показанной на рис. 3.23, а, если в

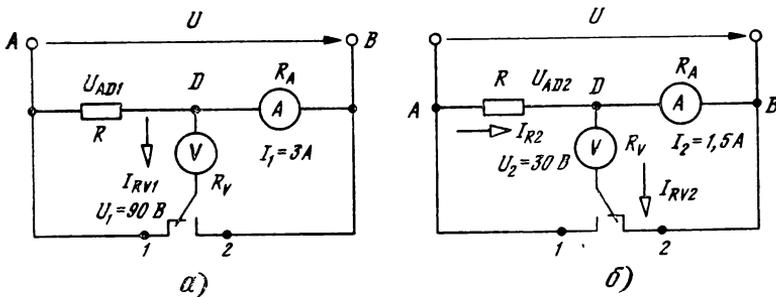


Рис. 3.23

позиции 1 вольтметр показывает 90 В, амперметр — 3 А, а в положении 2 — соответственно 30 В и 1,5 А.

Указание: для решения данной задачи следует использовать законы Ома и Кирхгофа.

Решение. При установке переключателя в позицию 2 вольтметр подключен параллельно амперметру и, следовательно, показывает падение напряжения на его внутреннем сопротивлении. При этом известны ток I_2 , текущий через амперметр, и напряжение U_2 на амперметре, следовательно, можно определить сопротивление амперметра $R_a = U_2 / I_2 = 30 / 1,5 = 20$ Ом. Переведем переключатель в положение 1, в этом случае вольтметр оказывается подключенным параллельно сопротивлению R . По второму закону Кирхгофа в получившейся цепи $U = U_{AD} + U_{DB}$. Но U_{AD} в этом положении есть показание вольтметра U_1 , а U_{DB} — падение напряжения на внутреннем сопротивлении амперметра, т. е. $U_{DB} = R_a I_1$, тогда $U = U_1 + R_a I_1 = 90 + 20 \cdot 3 = 150$ В. Таким образом, напряжение источника U оказалось равным 150 В.

Запишем напряжение на участке AD по-другому, как произведение сопротивления участка AD и тока, текущего через этот участок. Сопротивление между точками A и D при положении 1 переключателя определяется из выражения $RR_V / (R + R_V)$, поскольку вольтметр и сопротивление R соединены параллельно. Через данное эквивалентное сопротивление течет ток I_1 . Следовательно, $U_1 = [RR_V / (R + R_V)] I_1$; $90 = [RR_V / (R + R_V)] 3$, откуда $[RR_V / (R + R_V)] = 30$.

Переведем переключатель в положение 2 и запишем уравнение равновесия токов по первому закону Кирхгофа для узла D : $I_{R_2} = I_2 + I_{RV_2}$. Но $I_{R_2} + U_{AD2} / R = (U - U_{DB2}) / R = (U - U_2) / R$, а $I_{RV_2} = U_2 / R_V$, тогда $(U - U_2) / R = I_2 + U_2 / R_V$, т. е. $(150 - 30) / R = I_2 + 30 / R_V$, $120 / R = 1,5 + 30 / R_V$. Получилась система двух уравнений с двумя неизвестными R и R_V :

$$\begin{cases} [RR_V / (R + R_V)] = 30, \\ 120 / R = 1,5 + 30 / R_V. \end{cases}$$

Подставим во вторую строку R , полученное из первой строки: $RR_V = 30R + 30R_V$, $RR_V - 30R = 30R_V$, $R(R_V - 30) = 30R_V$, $R = 30R_V / (R_V - 30)$. Тогда вторая строка принимает вид $120(R_V - 30) / 30R_V = 1,5 + 30/R_V$. Приведем выражение к общему знаменателю и отбросим его: $120(R_V - 30) = 1,5 \cdot 30R_V + 30 \cdot 30$, $120R_V - 3600 = 45R_V + 900$, $120R_V - 45R_V = 3600 + 900$, $75R_V = 4500$, откуда $R_V = 4500/75 = 60$ Ом. Рассчитаем сопротивление $R = 30R_V / (R_V - 30) = 30 \cdot 60 / (60 - 30) = 60$ Ом. Таким образом, $U = 150$ В, $R = 60$ Ом, $R_V = 60$ Ом, $R_A = 20$ Ом.

Произведем проверки. В положении 1 ключа $I_1 = U / \left(\frac{RR_V}{R + R_V} + R_A \right) = 150 / \left(\frac{60 \cdot 60}{60 + 60} + 20 \right) = 150 / (30 + 20) = 3$ А; $U_1 = U - R_A I_1 = 150 - 20 \cdot 3 = 150 - 60 = 90$ В. В положении 2 ключа $I_{R2} = U / \left[R + \frac{R_V R_A}{(R_V + R_A)} \right] = 150 / [60 + 60 \cdot 20 / (60 + 20)] = 150 / (60 + 15) = 2$ А. В узле D ток I_{R2} разветвляется на два тока: I_2 и I_{V2} . Очевидно, что $I_2 = I_{R2} [R_V / (R_A + R_V)] = 2 \cdot 60 / (60 + 20) = 120/80 = 1,5$ А. Таким образом, все напряжения и токи оказались такими же, какие были заданы по условию. Следовательно, задача решена правильно.

КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ

3.55. Рассчитать коэффициент передачи цепи рис. 3.24, а при изменении сопротивления R_2 от 0 до ∞ .

Указание: изучите сначала § 3.29 на с. 87, 88 в [1].

Решение. В цепях с Г-образной конфигурацией коэффициент передачи можно рассчитывать по формуле $K = R_2 / (R_1 + R_2)$. При $R_2 = 0$ $K = 0$, для определения K при $R_2 = \infty$ выражение коэффициента передачи следует преобразовать, иначе получится ∞ / ∞ : $K = R_2 / [R_2(R_1/R_2 + 1)] = 1 / (1 + R_1/R_2)$. При $R_2 = \infty$ $K = 1$. Таким образом, при изменении сопротивления R_2 от 0 до ∞ коэффициент передачи будет изменяться от 0 до 1 (рис. 3.24, б).

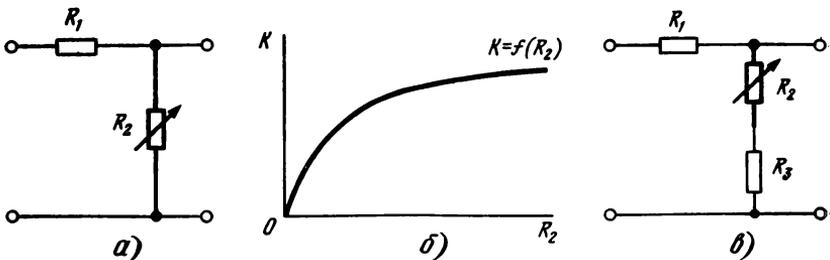


Рис. 3.24

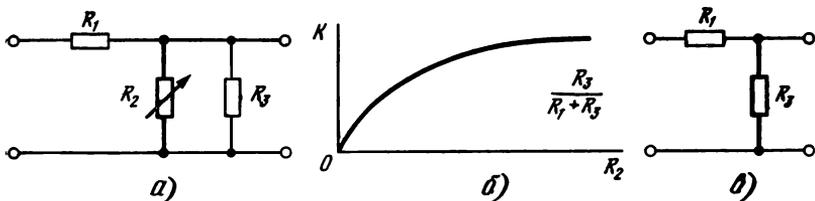


Рис. 3.25

3.56. В цепи, показанной на рис. 3.24, *в*, сопротивление R_2 изменяется от 0 до ∞ . Рассчитайте пределы изменения коэффициента передачи и постройте кривую $K=f(R_2)$.

Указание: разберите сначала задачу 3.55.

3.57. В цепи, показанной на рис. 3.25, *а* сопротивление R_2 изменяется от 0 до ∞ . Рассчитайте пределы изменения коэффициента передачи и постройте кривую $K=f(R_2)$.

Указание: разберите сначала задачу 3.55.

Решение. Выходное сопротивление данной цепи $R_{\text{вых}}$ (т. е. сопротивление между выходными зажимами цепи) представляет собой сопротивления R_2 и R_3 , соединенные параллельно: $R_{\text{вых}} = R_2 R_3 / (R_2 + R_3)$. В этом случае

$$K = \frac{R_{\text{вых}}}{(R_1 + R_{\text{вых}})} = \frac{R_2 R_3 / (R_2 + R_3)}{R_1 + [R_2 R_3 / (R_2 + R_3)]}$$

Приведем выражение к нормальному виду, т. е. «двухэтажной дроби»:

$$K = \frac{R_2 R_3 (R_2 + R_3)}{(R_2 + R_3) (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{R_2 (R_3)}{R_2 (R_1 + R_1 R_3 / R_2 + R_3)} = \frac{R_3}{R_1 + R_1 R_3 / R_2 + R_3}$$

При $R_2=0$ $K=0$, при $R_2=\infty$ $K=R_3/(R_1+R_3)$ (рис. 3.25, *б*).

Произведем проверку. При $R_2=0$ выходные зажимы замкнуты накоротко, сопротивление $R_{\text{вых}}=0$, на нулевом сопротивлении выделяется нулевое напряжение, коэффициент передачи при этом равен нулю. При $R_2=\infty$ сопротивление R_2 отсутствует, схема приобретает вид, показанный на рис. 3.25, *в*, с коэффициентом передачи $R_3/(R_1+R_3)$.

3.58. Каким должно быть сопротивление R_2 в цепи, показанной на рис. 3.24, *а*, чтобы коэффициент передачи K был равен 0,25, если $R_1=750$ Ом?

Указание: разберите сначала задачу 3.55.

3.59. Необходимо разработать делитель напряжения, с помощью которого можно плавно изменять коэффициент передачи K от 0,75 до 0,25, если сопротивление нагрузки $R_2=1,2$ кОм, а переменное сопротивление R_3 может изменяться от 0 до 16 кОм.

Указание: разберите сначала задачу 3.55.

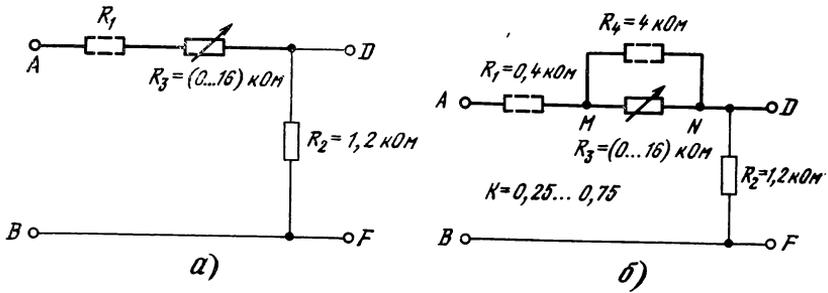


Рис. 3.26

Решение. Будем конструировать схему делителя напряжения с заданными характеристиками. Всякий делитель состоит из продольного и поперечного плеч (например, на рис. 3.24, *а* сопротивление R_1 образует продольное плечо, а сопротивление R_2 — поперечное, а на рис. 3.26, *а* сопротивления R_1+R_3 образуют продольное плечо, а сопротивление R_2 — поперечное и т. д.). В данной задаче сопротивление поперечного плеча по условию $R_2=1,2$ кОм. Если в качестве продольного плеча использовать переменное сопротивление $R_3=0 \dots 16$ кОм, то при $R_3=0$ напряжение на выходе делителя равно напряжению на входе и коэффициент передачи равен 1, что не отвечает условию задачи. Следовательно, в продольное плечо следует добавить такое сопротивление R_1 , при котором максимальный коэффициент передачи равен 0,75, т. е. заданному значению. Получается схема, показанная на рис. 3.26, *а*, где делитель имеет схему Г-образного вида. В такой цепи $K=R_2/(R_1+R_3+R_2)$. Учитывая, что $R_3=0$, а $K=K_m=0,75$, найдем сопротивление R_1 : $0,75=1,2/(R_1+1,2)$. Сопротивление R_2 подставляем в килоомах, поэтому и сопротивление R_1 получается в таких же единицах. В каждой дроби произведение крайних членов равно произведению средних, поэтому $0,75 R_1+0,75 \cdot 1,2=1,2$, откуда $0,75 R_1=1,2-0,9$ или $0,75 R_1=0,3$, т. е. $R_1=0,3/0,75=0,4$ кОм. Следовательно, если выбрать $R_1=0,4$ кОм, то при $R_3=0$, а $R_2=1,2$ кОм $K=R_2/(R_1+R_2)=1,2/(0,4+1,2)=1,2/1,6=0,75$, что и было задано по условию. Но при увеличении сопротивления R_3 до 16 кОм коэффициент передачи $K=R_2/(R_1+R_{3m}+R_2)=1,2/(0,4+16+1,2)=1,2/17,6=0,068$, а вовсе не 0,25, как было задано по условию. Следовательно, в продольное плечо следует добавить элемент, ограничивающий увеличение сопротивления продольного плеча до такого значения, при котором коэффициент передачи оказывается $K_{min}=0,25$ при $R_3=16$ кОм. Для этого параллельно переменному сопротивлению R_3 необходимо подключить постоянное сопротивление R_4 , при котором общее сопротивление продольной ветви обеспечивает коэффициент передачи $K_{min}=0,25$.

Вычислим сопротивление продольной ветви $R_{пр}$, при котором $K=0,25 : K_{min}=R_2/(R_2+R_{пр m})$, т. е. $0,25=1,2/(1,2+R_{пр m})$; $0,25 \cdot 1,2+0,25 R_{пр m}=1,2$, или $0,25 R_{пр m}=1,2-0,3=0,9$, откуда $R_{пр m}=0,9/0,25=3,6$ кОм.

Таким образом, для получения коэффициента передачи $K=0,25$ при $R_2=1,2$ кОм необходимо, чтобы сопротивление продольного плеча было равно 3,6 кОм. Но 0,4 кОм находится постоянно в сопротивлении R_1 , следовательно, регулировочная часть продольного плеча должна изменяться от 0 до $3,6-0,4=3,2$ кОм. Чтобы при изменении сопротивления R_3 от 0 до 16 кОм сопротивление регулируемой части изменялось только от 0 до 3,2 кОм, сопротивление R_3 следует зашунтировать, т. е. подключить параллельно ему такое постоянное сопротивление R_4 , при котором изменение от 0 до 16 кОм приведет к изменению сопротивления цепи только на 3,2 кОм. Получить подобные результаты вполне возможно, поскольку общее сопротивление двух сопротивлений, включенных параллельно, меньше меньшего из них. Схема делителя приобретает вид, показанный на рис. 3.26, б.

Определим сопротивление R_4 , если $R_{3m}=16$ кОм, а сопротивление участка MN должно равняться 3,2 кОм. С учетом параллельного соединения сопротивлений $R_{MN}=R_3 R_4 / (R_3 + R_4)$, т. е. $3,2=16 R_4 / (16+R_4)$ или $3,2 \cdot 16+3,2 R_4=16 R_4$, $16 R_4-3,2 R_4=51,2$, откуда $R_4=51,2/12,8=4$ кОм.

Произведем проверку. При $R_3=16$ кОм $R_4=4$ кОм, $R_{MN}=16 \cdot 4 / (16+4)=64/20=3,2$ кОм; $R_{пр m}=R_1+R_{MN}=0,4+3,2=3,6$ кОм; $K_{min}=R_2/(R_2+R_{пр m})=1,2/(1,2+3,6)=0,25$; $K_m=R_2/(R_1+R_2)=1,2/(0,4+1,2)=0,75$. Проверка выполняется, следовательно, задача решена правильно.

Примечание. Если бы значение R_2 по условию не задавалось и можно было выбирать R_1 или R_2 , то обеспечить коэффициент передачи цепи в заданных пределах путем изменения сопротивления R_3 было бы возможно с помощью схемы, показанной на рис. 3.26, а. Для определения значения R_1 и R_2 в этом случае необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{R_2}{R_1+R_2}=K_{max}, \\ \frac{R_2}{R_1+R_{3max}+R_2}=K_{min}. \end{cases}$$

Если, например, $K_{min}=0,25$, $K_{max}=0,75$, $R_3=(0 \dots 16)$ кОм, $R_1=2$ кОм, а $R_2=6$ кОм.

3.60. Определите пределы изменения коэффициента передачи в схеме, показанной на рис. 3.26, б, если $R_1=600$ Ом, $R_2=3$ кОм, $R_4=400$ Ом, а $R_3=0 \dots 600$ Ом.

Указание: разберите сначала задачи 3.55 и 3.59.

3.61. Определить в схеме рис. 3.26, б сопротивления R_1 и R_4 , если $R_2=800$ Ом, $R_3=0 \dots 20$ кОм, чтобы при изменении R_3 от R_{3min} до R_{3m} коэффициент передачи изменялся от 0,8 до 0,16.

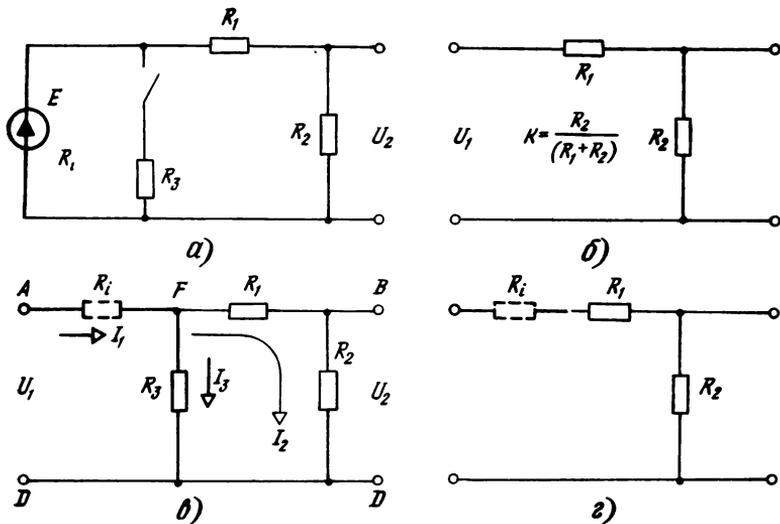


Рис. 3.27

Указание: разберите сначала задачу 3.59.

3.62. Рассчитать коэффициент передачи цепи, показанной на рис. 3.27, а, для случаев: а) $R_i=0$, ключ разомкнут; б) $R_i=0$, ключ замкнут; в) $R_i \neq 0$, ключ разомкнут; г) $R_i \neq 0$, ключ замкнут, если $R_1=100$ Ом, $R_2=300$ Ом, $R_3=400$ Ом, R_i в вариантах а) и б) равно нулю, а в вариантах в) и г) равно 300 Ом.

Решение. В варианте а) схема приобретает вид рис. 3.27, б. Поскольку в этом случае делитель имеет вид Г-образной цепи, $K=R_2/(R_1+R_2)=300/(100+300)=0,75$. В варианте б) параллельно источнику подключено сопротивление R_3 . Так как внутреннее сопротивление источника равно нулю, то наличие сопротивления R_3 не изменяет напряжения на входе цепи, и поскольку это напряжение остается таким же, каким было в варианте а), то и коэффициент передачи определяется по той же формуле, что и в варианте а), т. е. $K=R_2/(R_1+R_2)=0,75$.

Докажем строго, что при $R_i=0$ сопротивление R_3 не влияет на значение коэффициента передачи цепи. После подключения сопротивления R_3 цепь оказывается не Г-образной, поэтому нельзя рассчитывать коэффициент передачи как отношение выходного сопротивления к входному. Во всех случаях, когда конфигурация цепи отличается от Г-образной, для определения коэффициента передачи цепи необходимо использовать общую методику расчета: 1) задаться произвольным напряжением на входе цепи (например, E или U_1); 2) рассчитать токи в ветвях цепи (строго говоря, в некоторых ветвях для определения коэффициента передачи токи можно было бы не определять, поскольку необходимо знать только ток, протекающий через выходное сопротивление, но для общности лучше рассчитывать

токи во всех ветвях, к тому же эти токи можно использовать для выполнения различных проверок); 3) умножить ток, текущий через выходное сопротивление, на это сопротивление, т. е. получить выходное напряжение U_2 ; 4) взять отношение U_2/U_1 . Если все элементы цепи линейные, то входное напряжение U_1 сократится, а получившееся выражение и будет коэффициентом передачи цепи K .

Проделаем расчеты по приведенной методике. После подключения сопротивления R_3 цепь приобретает вид, показанный на рис. 3.27, в, причем $R_i=0$. Чтобы определить выходное напряжение U_2 , необходимо знать ток I_2 , текущий через сопротивление R_2 . Для определения I_2 необходимо знать I_1 . Чтобы его найти, требуется определить входное сопротивление цепи, состоящее из сопротивлений R_1 и R_2 , соединенных последовательно. Параллельно этим сопротивлениям включено R_3 . При $R_i=0$ $R_{вх}=R_{AD}=R_{FD}=[(R_1+R_2)R_3]/(R_1+R_2+R_3)=[(100+300) \cdot 400]/(100+300+400)=200$ Ом.

Зададимся входным напряжением (или ЭДС), например E , и определим ток I_1 (входное напряжение или ЭДС в условии задачи не дается, пользователь должен им задаться самостоятельно, причем лучше всего в общем виде, т. е. U_1 или E , а не числом, результат при этом получается прежний, но наглядность расчета уменьшается). Вообще следует стараться решать задачи в общем виде, а числовые значения подставлять только в окончательные выражения): $I_1=E/R_{вх}=[E(R_1+R_2+R_3)]/[R_3(R_1+R_2)]=E/200=0,005 E$. В узле F ток I_1 разветвляется на два тока: I_2 и I_3 , причем

$$I_2 = \frac{I_1 R_3}{[(R_1+R_2)+R_3]} = \frac{E(R_1+R_2+R_3)R_3}{[R_3(R_1+R_2)](R_1+R_2+R_3)} = \frac{E}{(R_1+R_2)} = \frac{E}{(100+300)} = \frac{E}{400} = 0,0025 E.$$

Зная I_2 и R_2 , находим $U_2=R_2 I_2=R_2 E/(R_1+R_2)$. Определим коэффициент передачи $K=U_2/E=R_2 E/[E(R_1+R_2)]=R_2/(R_1+R_2)=300/(100+300)=0,75$.

Таким образом, получился тот же результат, который был задан в варианте а). Так как подключение сопротивления R_3 не изменило значения напряжения между точками A и B цепи (что могло оказаться только при $R_i=0$), то наличие сопротивления R_3 не влияет на значение коэффициента передачи цепи.

В варианте в) сопротивление R_3 отключено, а $R_i \neq 0$, при этом получается Г-образная схема (рис. 3.27, з), коэффициент передачи определяется из выражения $K=R_2/(R_i+R_1+R_2)=300/(300+100+300)=0,429$.

В варианте г) сопротивление R_3 подключено к $R_i \neq 0$. Схема приобретает вид рис. 3.27, в. Конфигурация этой цепи отлична от Г-образной, поэтому написать сразу выражение для коэффициента передачи не представляется возможным и расчеты сле-

дует производить по общей методике. Определим входное сопротивление цепи:

$$R_{\text{вх}} = R_{AD} = R_1 + \left[\frac{R_3 (R_1 + R_2)}{(R_3 + R_1 + R_2)} \right] = \\ = \frac{R_1 R_1 + R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3},$$

зададимся входной ЭДС E и найдем входной ток:

$$I_1 = \frac{E}{R_{\text{вх}}} = \frac{E (R_1 + R_2 + R_3)}{R_1 R_1 + R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}.$$

В узле F ток I_1 разветвляется на I_2 и I_3 . Первый из них

$$I_2 = I_1 \frac{R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)} = \\ = \frac{E (R_1 + R_2 + R_3) R_3}{(R_1 R_1 + R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3) (R_1 + R_2 + R_3)} = \\ = \frac{E R_3}{(R_1 R_1 + R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3)}.$$

Умножим ток I_2 на сопротивление R_2 , получится выходное напряжение U_2 , поделим на входную ЭДС E , тогда коэффициент передачи цепи $K = R_2 R_3 / (R_1 R_1 + R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3)$.

Сделаем проверки: если в последнем выражении положить $R_3 = 0$, то должен получиться результат варианта б). Действительно, в этом случае $K = R_2 R_3 / [R_3 (R_1 + R_2)] = R_2 / (R_1 + R_2)$, что соответствует варианту б).

Если оставить $R_3 \neq 0$, но отключить сопротивление R_3 (т. е. сделать его бесконечно большим), то должен оказаться результат варианта в). При подстановке вместо R_3 бесконечности получается неопределенность вида ∞/∞ . Напомним, что для раскрытия неопределенности выражение следует преобразовать: в числителе и знаменателе вынести за скобки член, обращающийся в бесконечность в той наибольшей степени, которая имеется в выражении, в данном случае — в первой:

$$K = \frac{R_3 (R_2)}{R_3 [(R_1 R_1 / R_3) + (R_1 R_2 / R_3) + R_1 + R_1 + R_2]} = \\ = \frac{R_2}{[(R_1 R_1 / \infty) + (R_1 R_2 / \infty) + R_1 + R_1 + R_2]} = R_2 / (R_1 + R_1 + R_2),$$

т. е. получилось выражение варианта в). Если R_3 отключить (т. е. положить $R_3 = \infty$), а R_1 закоротить (т. е. $R_1 = 0$), то получится выражение $K = R_2 / (R_1 + R_2)$, т. е. результат варианта а).

Подсчитаем значение коэффициента передачи в варианте г). Для числовых подсчетов формулу коэффициента передачи лучше записать в виде

$$K = \frac{R_2 R_3}{R_1 (R_1 + R_2 + R_3) + R_3 (R_1 + R_2)} =$$

$$= \frac{300 \cdot 400}{300 (100 + 300 + 400) + 400 (100 + 300)} = \frac{300 \cdot 400}{240000 + 160000} = 0,3.$$

Таким образом, в вариантах а) и б) $K=0,75$, в варианте в) $K=0,429$, а в варианте г) K уменьшался до $0,3$.

3.63. В схеме, показанной на рис. 3.27, в, $R_1=100$ Ом, $R_2=300$ Ом, $R_3=400$ Ом. В каких пределах изменяется коэффициент передачи цепи, если сопротивление R_i увеличивать от 0 до 300 Ом?

Указание: разберите сначала задачу 3.62.

3.64. В схеме, показанной на рис. 3.27, в, $R_2=300$ Ом, $R_3=400$ Ом, $R_i=300$ Ом. В каких пределах изменяется коэффициент передачи цепи, если сопротивление R_1 увеличивать от 0 до 100 Ом?

3.65. В схеме, показанной на рис. 3.27, в, $R_1=100$ Ом, $R_2=300$ Ом, $R_i=300$ Ом. При каком значении R_3 коэффициент передачи $K=0,4$?

3.66. В схеме, показанной на рис. 3.28, а, $R_1=30$ Ом, $R_2=40$ Ом, $R_3=15$ Ом, $R_4=50$ Ом, $R_5=30$ Ом, $R_6=20$ Ом. Рассчитать коэффициент передачи цепи.

Указание: разберите сначала задачу 3.62.

Решение. Конфигурация схемы данной цепи отлична от Г-образной, поэтому необходимо использовать общие методы расчета коэффициента передачи цепи. Для этого необходимо задаться произвольным напряжением на входе U_1 , рассчитать ток в сопротивлении R_5 и найти K из выражения $K=R_5 I_5 / U_1$.

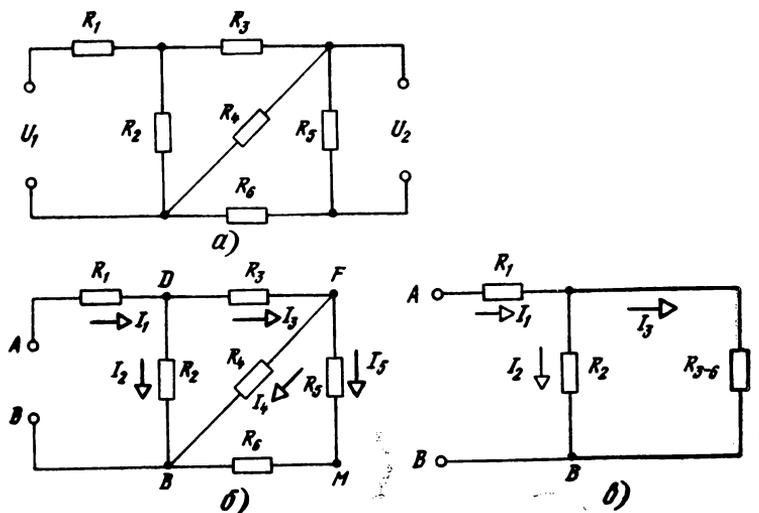


Рис. 3.28

Обозначим буквами все характерные точки и нанесем стрелки токов в ветвях цепи (рис. 3.28, б). Ветвь U_2 показывать не будем, поскольку она разомкнута и ток через нее не протекает. Из рис. 3.28, б видно, что сопротивления R_5 и R_6 соединены последовательно, ветвь R_5+R_6 соединена с ветвью R_4 параллельно, весь участок BF соединен с ветвью R_3 последовательно, получившееся эквивалентное сопротивление соединено с ветвью R_2 параллельно, а эквивалентное сопротивление DB соединено с ветвью R_1 последовательно. Таким образом, $R_5+R_6=30+20=50$ Ом, $R_{FR}=[R_4(R_5+R_6)]/(R_4+R_5+R_6)=[50 \times (30+20)]/(50+30+20)=25$ Ом; $R_3+R_{FB}=15+25=40$ Ом, следовательно, вся группа, состоящая из сопротивлений R_3-R_6 , образует эквивалентное сопротивление $R_{3-6}=40$ Ом (рис. 3.28, в). Входное сопротивление цепи (т. е. сопротивление между точками A и B) $R_{вх}=R_1+(R_2R_{(3-6)})/(R_2+R_{(3-6)})=30+(40 \cdot 40)/(40+40)=30+20=50$ Ом.

Зададимся входным напряжением U_1 и определим ток $I_1=U_1/R_{вх}=U_1/50=0,02U_1$. В узле D ток I_1 разветвляется на токи I_2 и I_3 . Определим ток $I_3=(I_1R_2)/(R_2+R_{3-6})=(0,02U_1 \cdot 40)/(40+40)=0,01U_1$. Как видно из рис. 3.28, б, в узле F ток I_3 разветвляется на токи I_4 и I_5 , причем $I_5=(I_3R_4)/(R_4+(R_5+R_6))=(0,01U_1 \cdot 50)/[50+(30+20)]=0,005U_1$. Зная значения I_5 и R_5 , определим выходное напряжение $U_2=R_5I_5=30 \cdot 0,005=0,15U_1$, откуда $K=U_2/U_1=0,15U_1/U_1=0,15$.

3.67. В схеме, показанной на рис. 3.29, а, все значения сопротивлений указаны в омах. Рассчитать коэффициент передачи цепи.

Указание: разберите сначала задачи 3.62 и 3.66.

Решение. Прежде всего упростим данную схему. Для этого заменим участки, содержащие последовательно или параллельно соединенные сопротивления, эквивалентными. Между точками A и D включены две ветви: R_2 и параллельная ей R_1+R_3 . Очевидно, что сопротивления R_1-R_3 можно заменить одним эквивалентным $R_{(1-3)}=[(R_1+R_3)R_2]/(R_1+R_3+R_2)=[(5+15)20]/(5+15+20)=10$ Ом. Сопротивления R_6 и R_8 соединены последовательно, а вся ветвь R_6+R_8 соединена параллельно с R_7 . Следовательно, сопротивление участка FN определяется

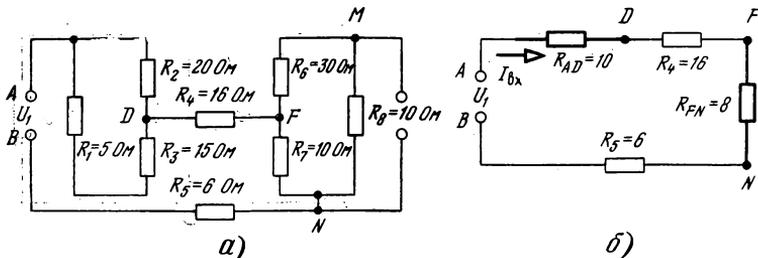


Рис. 3.29

из выражения $R_{FN} = R_{(6-8)} = [R_7(R_6 + R_8)] / (R_7 + R_6 + R_8) = [10(30 + 10)] / (10 + 30 + 10) = 8$ Ом. Таким образом, схема приобретает вид, показанный на рис. 3.29, б. Зададимся входным напряжением U_1 , определим входное сопротивление $R_{ВХ}$ и входной ток цепи $I_{ВХ}$: $R_{ВХ} = R_{AD} + R_4 + R_{FN} + R_5 = 10 + 16 + 8 + 6 = 40$ Ом; $I_{ВХ} = U_1 / R_{ВХ} = U_1 / 40 = 0,025 U_1$.

Поскольку сопротивление R_4 не подвергалось никаким преобразованиям, ток, текущий через R_4 в схеме рис. 3.29, а, будет таким же, каким он оказался на рис. 3.29, б, т. е. $I_4 = I_{ВХ} = 0,025 U_1$. Ток I_4 в узле F разветвляется на ток I_6 , текущий через R_6 и R_8 , и ток I_7 , текущий через R_7 . Ток $I_6 = (I_4 R_7) / (R_6 + R_7 + R_8) = (0,025 U_1 \cdot 10) / (10 + 30 + 10) = 0,005 U_1$. Выходное напряжение U_2 снимается с сопротивления R_8 , следовательно, $U_2 = R_8 I_6 = 10 \cdot 0,005 U_1 = 0,05 U_1$, откуда $K = U_2 / U_1 = 0,05 U_1 / U_1 = 0,05$. Таким образом, напряжение на выходе данной цепи U_2 при любом значении входного напряжения в 20 раз меньше, чем напряжение на входе U_1 .

3.68. Рассчитать пределы изменения коэффициента передачи цепи, показанной на рис. 3.30, а, при изменении сопротивления R_4 от 0 до ∞ , если $R_1 = 1000$ Ом, $R_2 = 100$ Ом, $R_3 = 400$ Ом. При каком значении сопротивления R_3 , $K = 0$? Рассчитайте и изобразите кривую $K = f(R_4)$.

Указание: изучите § 3.30 на с. 88—90 в [1].

Решение. Схема цепи имеет конфигурацию, отличную от Г-образной, поэтому рассчитывать коэффициент передачи в данном случае следует общим методом: 1) задать входным напряжением U_1 ; 2) рассчитать токи в ветвях цепи; 3) поскольку между выходными зажимами включено несколько сопротивлений, по которым протекают различные токи, сначала следует задаться начальным потенциалом одной из выходных точек

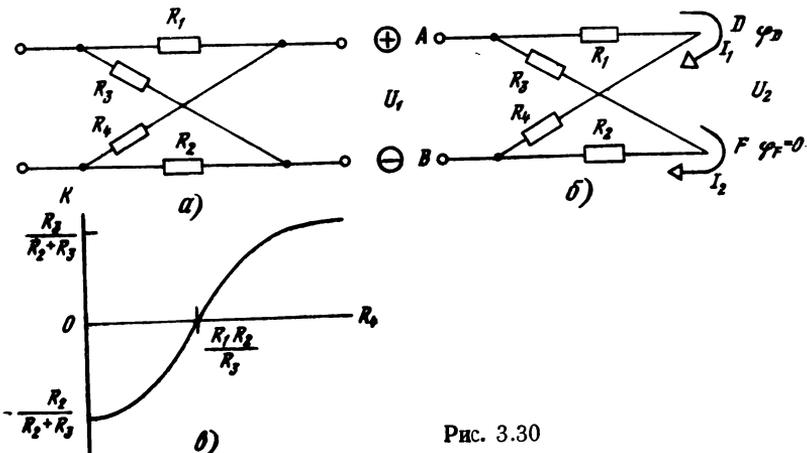


Рис. 3.30

(например, принять потенциал точки F за нулевой, т. е. положить $\varphi_F=0$); 4) зная токи и сопротивления ветвей, рассчитать потенциал второй выходной точки (в рассматриваемой цепи точки D); 5) определить выходное напряжение U_2 как разность потенциалов выходных зажимов (в данной цепи $U_2=\varphi_D-\varphi_F$); 6) поделить выходное напряжение U_2 на входное U_1 . Если все элементы цепи линейные, то напряжение U_1 при этом сократится. Получившееся выражение и будет коэффициентом передачи данной цепи; 7) если значение какого-то элемента цепи может изменяться, то рассчитать K при различных значениях переменного параметра и построить соответствующую кривую.

Рассчитаем коэффициент передачи данной цепи в соответствии с приведенными правилами. Для удобства рассуждений перерисуем схему цепи, отбросив участки, ток по которым не протекает (рис. 3.30, б). Между входными зажимами A и B включены две параллельные ветви, соединенные последовательно: R_1, R_4 и R_3, R_2 . Если к входным зажимам приложить напряжение U_1 с «плюсом» в точке A , то в первой ветви потечет ток $I_1=U_1/(R_1+R_4)$, а во второй $I_2=U_1/(R_3+R_2)$. Пусть потенциал точки F равен нулю ($\varphi_F=0$). Так как ток через R_3 течет от точки A к точке F (что определяется полярностью источника), то потенциал точки A выше потенциала точки F на значение падения напряжения на R_3 , т. е. $\varphi_A=\varphi_F+R_3I_2=R_3U_1/(R_3+R_2)$. Потенциал точки D ниже потенциала точки A на значение падения напряжения на сопротивлении R_1 , поскольку ток в нем течет от точки A к точке D :

$$\begin{aligned}\varphi_D &= \varphi_A - R_1 I_1 = \frac{R_3 U_1}{(R_3 + R_2)} - \frac{R_1 U_1}{(R_1 + R_4)} = \\ &= U_1 \left[\frac{R_1 R_3 + R_3 R_4 - R_1 R_2 - R_1 R_3}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)} \right] = \frac{U_1 (R_3 R_4 - R_1 R_2)}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)}.\end{aligned}$$

Этот же результат можно получить, если идти от точки F к точке D по пути $F-B-D$. Действительно, при $\varphi_F=0$ $\varphi_B=-R_2 I_2$ (поскольку ток в R_2 течет от F к B), $\varphi_B=-R_2 U_1/(R_2+R_3)$.

Так как через R_4 ток течет от D к B , то потенциал точки D выше потенциала точки B на $R_4 I_1$. В этом случае

$$\begin{aligned}\varphi_D &= \varphi_B + \frac{R_4 U_1}{(R_1 + R_4)} = \frac{R_4 U_1}{(R_1 + R_4)} - \frac{R_2 U_1}{(R_2 + R_3)} = \\ &= U_1 \left[\frac{R_2 R_4 + R_3 R_4 - R_1 R_2 - R_2 R_4}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)} \right] = U_1 \left[\frac{R_3 R_4 - R_1 R_2}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)} \right],\end{aligned}$$

т. е. получился прежний результат. Таким образом, идти от точки F к точке D можно по любому пути, в том числе и по пути $F-B$ — источник U_1-A-D .

Произведем проверку:

$$\varphi_A = \varphi_B + U_1 = \frac{-R_2 U_1}{(R_2 + R_3)} + U_1 = \frac{(R_2 U_1 + R_3 U_1 - R_2 U_1)}{(R_2 + R_3)} = \frac{R_3 U_1}{(R_2 + R_3)}.$$

Значение потенциала точки A получилось таким же, как при расчете в первом варианте. Эти результаты и должны были получиться, поскольку по второму закону Кирхгофа напряжение между точками D и F (т. е. U_2) равно алгебраической сумме падений напряжений на всех элементах, заключенных между этими точками при любой конфигурации цепи.

Определим коэффициент передачи цепи $K = U_2/U_1 = (R_3 R_4 - R_1 R_2) / [(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)]$. Будем изменять значение сопротивления R_4 от 0 до бесконечности. При $R_4 = 0$ $K(0) = -R_1 R_2 / [R_1 (R_2 + R_3)] = -R_2 / (R_2 + R_3)$. Если в выражении коэффициента передачи положить $R_4 = \infty$, то получится ∞/∞ , следовательно, формулу следует преобразовать, вынеся за скобки множитель R_4 в числителе и знаменателе. В этом случае

$$K = \frac{R_4 (R_3 - R_1 R_2 / R_4)}{R_4 (R_1 / R_4 + 1) (R_2 + R_3)} = \frac{R_3 - R_1 R_2 / R_4}{(1 + R_1 / R_4) (R_2 + R_3)}.$$

При $R_4 = \infty$

$$K = \frac{(R_3 - R_1 R_2 / \infty)}{(1 + R_1 / \infty) (R_2 + R_3)} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}.$$

Таким образом, при изменении в схеме рис. 3.30, a сопротивления R_4 от 0 до ∞ коэффициент передачи изменяется от $-R_2 / (R_2 + R_3) = -100 / (100 + 400) = -0,2$ до $R_3 / (R_2 + R_3) = 400 / (100 + 400) = 0,8$ (рис. 3.30, b). Поскольку при изменении R_4 знак коэффициента передачи изменяется с отрицательного на положительный, очевидно, имеется сопротивление R_4 , при котором коэффициент передачи становится равным нулю. Чтобы найти это значение, необходимо выражение K приравнять нулю и решить его относительно R_4 . При $K = 0$ числитель выражения для коэффициента передачи равен нулю, т. е. $R_3 R_4 - R_1 R_2 = 0$, откуда $R_4 = R_1 R_2 / R_3 = 1000 \cdot 100 / 400 = 250$ Ом. Таким образом, если сопротивление R_4 в данной цепи меньше $R_1 R_2 / R_3 = 250$ Ом, то коэффициент передачи отрицательный, а если больше — положительный. Отрицательный знак у коэффициента передачи означает, что полярность выходного напряжения обратна полярности входного. При положительном K полярности входного и выходного напряжений получаются одинаковыми. Если потенциалы точек D и F оказываются равными, то $U_2 = \varphi_D - \varphi_F = 0$ и коэффициент передачи также становится равным нулю.

3.69. В цепи, показанной на рис. 3.30, a , рассчитать коэффициент передачи, если $R_2 = 100$ Ом, $R_3 = 400$ Ом, $R_4 = 1000$ Ом, а R_1 изменяется от 0 до ∞ . Построить кривую $K = f(R_1)$.

Указание: разберите сначала задачу 3.68.

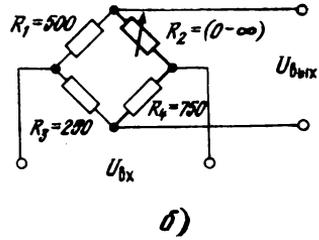
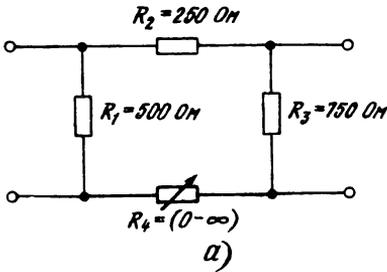


Рис. 3.31

3.70. Рассчитать коэффициент передачи K в схеме, показанной на рис. 3.31, а. Построить кривую $K=f(R_4)$.

Указание: разберите сначала задачу 3.68.

3.71. Рассчитать коэффициент передачи K в схеме, показанной на рис. 3.31, б. Построить кривую $K=f(R_2)$.

Указание: разберите сначала задачу 3.68.

3.72. Рассчитайте пределы изменения коэффициента передачи цепи, показанной на рис. 3.32, а, при изменении сопротивления R_4 от 0 до ∞ , если $R_1=300$ Ом, $R_2=100$ Ом, $R_3=200$ Ом.

Указание: разберите сначала задачу 3.68.

Решение. Поскольку конфигурация данной цепи отличается от Г-образной, то для расчета коэффициента передачи следует использовать общие методы расчета. Разберем, каким образом соединены сопротивления в данной схеме. Обозначим характерные точки цепи буквами A, B, D, F, M, P, S . Тогда входными зажимами будут точки A и B , а выходными — D и F . Поскольку зажимы D и F в данной схеме разомкнуты, то ток

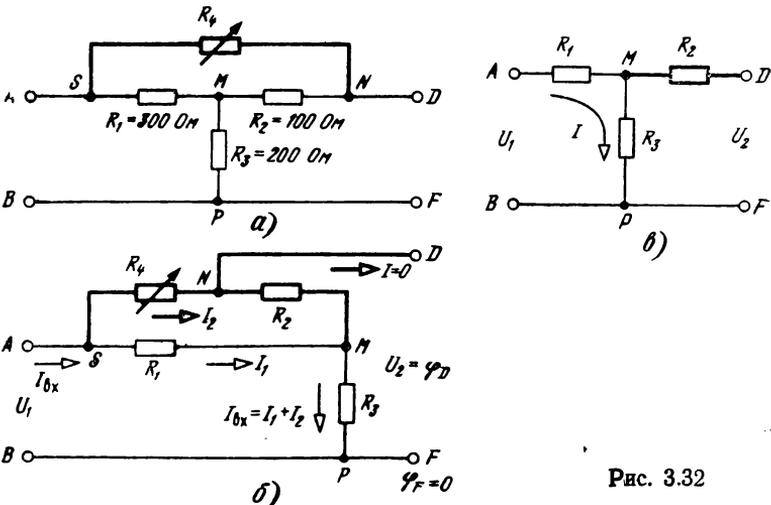


Рис. 3.32

в участках ND и FP не протекает, следовательно, точка N не является узлом (точнее, неустранимым узлом) и ток, текущий через R_4 , является током, текущим через R_2 . Но это означает, что R_4 и R_2 соединены последовательно. Таким образом, входное сопротивление рассматриваемой цепи есть R_1 , параллельно которому включена цепочка R_4+R_2 , а последовательно с участком R_{SM} включено сопротивление R_3 (рис. 3.32, б): $R_{вх} = R_1(R_4+R_2)/(R_1+R_4+R_2) + R_3$. Для удобства анализа алгебраические выражения следует приводить к так называемому нормальному виду, когда выражение представляет собой дробь, у которой в общем случае в числителе и знаменателе имеются некоторые полиномы (т. е. многочлены). Приведем выражение входного сопротивления к нормальному виду:

$$R_{вх} = \frac{R_1(R_2+R_4)}{R_1+R_2+R_4} + R_3 = \frac{R_1R_2 + R_1R_4 + R_1R_3 + R_2R_3 + R_3R_4}{R_1+R_2+R_4}.$$

Зададимся входным напряжением U_1 и определим входной ток

$$I_{вх} = U_1/R_{вх} = [U_1(R_1+R_2+R_4)]/(R_1R_2 + R_1R_4 + R_1R_3 + R_2R_3 + R_3R_4).$$

Дойдя до точки S , ток $I_{вх}$ разветвляется на I_1 , текущий через R_1 от S до M и I_2 , текущий через R_4 и R_2 (т. е. от S до M). На участке ND ток не протекает. Рассчитаем ток:

$$\begin{aligned} I_2 &= I_{вх} \frac{R_1}{(R_1+R_4+R_2)} = \\ &= \frac{U_1(R_1+R_2+R_4)R_1}{(R_1R_2 + R_1R_4 + R_1R_3 + R_2R_3 + R_3R_4)(R_1+R_2+R_4)} = \\ &= \frac{U_1R_1}{(R_1R_2 + R_1R_4 + R_1R_3 + R_2R_3 + R_3R_4)}. \end{aligned}$$

В точке M токи I_1 и I_2 соединяются и через R_3 снова течет ток $I_1+I_2=I_{вх}$. Пусть потенциалы точек F и P $\varphi_F = \varphi_P = 0$. Определим потенциал точки M . Так как ток $I_{вх}$ течет от M к P , то потенциал точки M выше потенциала точки F (точки P и F — электрически одна точка) на значение падения напряжения на сопротивлении R_3 , т. е.

$$\varphi_M = \varphi_F + R_3 I_{вх} = \frac{R_3(R_1+R_2+R_4)U_1}{(R_1R_2 + R_1R_4 + R_1R_3 + R_2R_3 + R_3R_4)}.$$

Аналогично потенциал точек N и D (электрически это также одна точка) выше потенциала точки M на значение $R_2 I_2$, т. е.

$$\varphi_N = \varphi_M + R_2 I_2 = \frac{R_3(R_1+R_2+R_4)U_1 + R_1R_2U_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_3R_4}.$$

Так как в ветви ND ток не протекает, $\varphi_D = \varphi_N$. Выходное напряжение $U_2 = \varphi_D - \varphi_F = \varphi_D$. Коэффициент передачи четырехполюсника

$$K = U_2/U_1 = \frac{R_1 R_3 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}. \quad (3.2)$$

Произведем проверку. Как видно из схемы рис. 3.32, *a*, при $R_4 = 0$ потенциал точки D становится равным потенциалу точки A . Напряжение на выходе U_2 в этом случае равно напряжению на входе U_1 , а коэффициент передачи равен единице. Следовательно, если в (3.2) положить $R_4 = 0$, то K должен стать равным единице. Действительно, $K_{(R_4=0)} = (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) / (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) = 1$. При $R_4 = \infty$ схема рис. 3.32, *a* приобретает вид рис. 3.32, *b*. В этой цепи ток I от источника U_1 течет через сопротивления R_1 и R_3 . Так как через R_2 ток не протекает, падения напряжения на этом сопротивлении нет и потенциалы точек M и D оказываются одинаковыми. Следовательно, при $R_4 = \infty$ выходным напряжением является напряжение на сопротивлении R_3 . Но в этом случае цепь приобретает Г-образную форму, а в такой схеме $K = R_3 / (R_1 + R_3) = 200 / (300 + 200) = 0,4$.

Таким образом, в цепи рис. 3.32, *a* при изменении сопротивления R_4 от 0 до ∞ коэффициент передачи изменяется от 1 до 0,4. Очевидно, что если в выражение коэффициента передачи вместо R_4 подставить бесконечность, то должно получиться выражение $R_3 / (R_1 + R_3)$. Чтобы при $R_4 = \infty$ получилось конечное число, выражение K следует преобразовать:

$$K = \frac{R_4 (R_1 R_2 / R_4 + R_1 R_3 / R_4 + R_2 R_3 / R_4 + R_3)}{R_4 (R_1 R_2 / R_4 + R_1 R_3 / R_4 + R_1 + R_2 R_3 / R_4 + R_3)}.$$

При $R_4 = \infty$ $K = R_3 / (R_1 + R_3)$, что и должно было получиться. Проверки выполняются, значит, задача решена правильно.

3.73. По условию задачи 3.72 определить сопротивление R_4 , при котором коэффициент передачи K равен 0,5.

Указание: разберите сначала задачу 3.72.

Решение. В задаче 3.72 коэффициент передачи определяется выражением (3.2). При изменении сопротивления R_4 от 0 до ∞ коэффициент передачи изменяется от 1 до 0,4, поэтому существует сопротивление, при котором $K = 0,5$. Решим данное уравнение относительно сопротивления R_4 . Записав равенство произведений крайних и средних членов уравнения, получим $KR_1 R_2 + KR_1 R_4 + KR_1 R_3 + KR_2 R_3 + KR_3 R_4 = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_3 R_4$, откуда $KR_1 R_4 + KR_3 R_4 - R_3 R_4 = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 - KR_1 R_2 - KR_1 R_3 - KR_2 R_3$ или

$$R_4 (KR_1 + KR_3 - R_3) = R_1 (R_2 + R_3 - KR_2 - KR_3) + R_2 R_3 (1 - K), \text{ т. е.}$$

Таблица 3.2

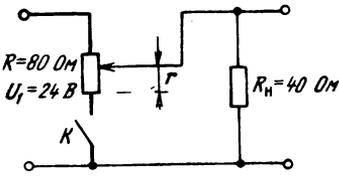


Рис. 3.33

Поло- жение ключа	Параметр цепи	Значение параметра при r , равном, Ом								
		0	10	20	30	40	50	60	70	80
Замк- нут	K									
	U_2									
Ра- зомк- нут	K									
	U_2									

$$\begin{aligned}
 R_4 &= \frac{R_1(R_2 + R_3 - KR_2 - KR_3) + R_2R_3(1-K)}{K(R_1 + R_3) - R_3} = \\
 &= \frac{300 \cdot (100 + 200 - 0,5 \cdot 100 - 0,5 \cdot 200) + 100 \cdot 200 \cdot (1 - 0,5)}{0,5 \cdot (300 + 200) - 200} = \\
 &= \frac{300 \cdot 150 + 100 \cdot 100}{50} = 1100 \text{ Ом.}
 \end{aligned}$$

Таким образом, при $R_4 = 1100$ Ом коэффициент передачи схемы рис. 3.32, а должен оказаться равным 0,5.

Произведем проверку. Подставим в (3.2) $R_1 = 300$ Ом, $R_2 = 100$ Ом, $R_3 = 200$ Ом, $R_4 = 1100$ Ом, тогда

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{R_1(R_2 + R_3) + R_3(R_2 + R_4)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_3(R_2 + R_4)} = \\
 &= \frac{300 \cdot (100 + 200) + 200 \cdot (100 + 1100)}{300 \cdot (100 + 200 + 1100) + 200 \cdot (100 + 1100)} = \frac{300 \cdot 300 + 200 \cdot 1200}{300 \cdot 1400 + 200 \cdot 1200} = 0,5.
 \end{aligned}$$

Проверка выполняется, следовательно задача решена правильно.

3.74. По условию задачи 3.72 определить сопротивление R_4 , при котором коэффициент передачи четырехполюсника равен 0,8.

Указание: разберите сначала задачи 3.72 и 3.73.

3.75. Для цепи, показанной на рис. 3.33, рассчитайте коэффициент передачи K и напряжение на выходе, если ключ: а) замкнут и б) разомкнут. Заполните табл. 3.2 и постройте кривые $K = f(r)$ для обоих случаев.

Указание: изучите сначала § 3.31 в [1].

РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ С ОДНИМ ИСТОЧНИКОМ НАПРЯЖЕНИЯ

3.76. В цепи, показанной на рис. 3.34, а, рассчитать токи во всех ветвях, если $R_1 = 40$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 50$ Ом, $R_4 = 20$ Ом, $R_5 = 16$ Ом, $R_6 = 80$ Ом, $E = 200$ В.

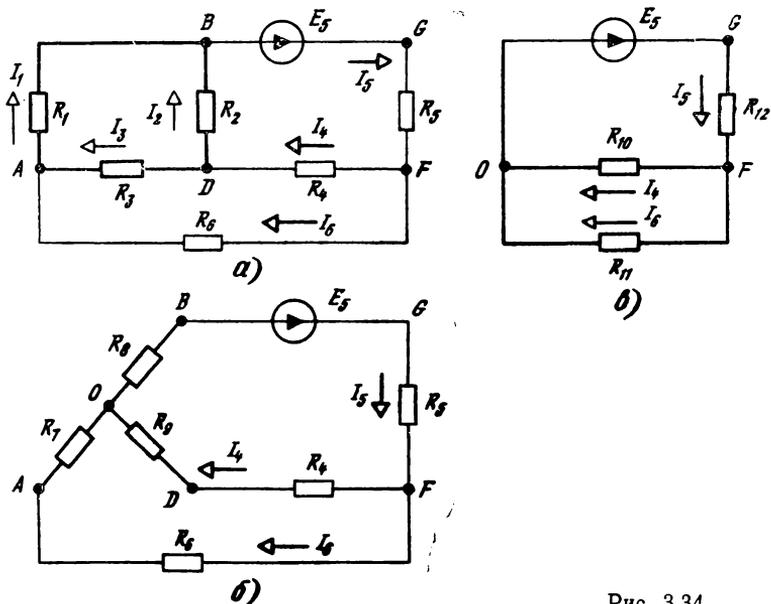


Рис. 3.34

Указание: разберите сначала § 3.11 в [1].

Решение. Обозначим буквами характерные точки схемы и пронумеруем ветви, причем в данном случае нумерацию ветвей удобно произвести в соответствии с нумерацией сопротивлений. При последующем решении задачи токи, текущие в первой ветви (т. е. через R_1), будем обозначать I_1 , через $R_2—I_2$ и т. д. На этом основании ЭДС E обозначим как E_5 , поскольку данная ЭДС находится в пятой ветви. (В схемах с одним источником индекс ЭДС, строго говоря, не слишком важен, но в схемах с несколькими источниками их индексы должны совпадать с номерами ветвей, в которые данные источники включены.) Покажем стрелками направления токов во всех ветвях. Поскольку данная цепь содержит только один источник, направления токов следует показывать такими, при которых ток выходит из плюсового зажима источника, проходит по замкнутой цепи и возвращается на минусовой зажим этого же источника.

Как видно из рис. 3.34, а, в схеме нет сопротивлений, соединенных последовательно или параллельно, но сопротивления $R_1—R_2—R_3$ образуют треугольник, который, как известно, можно преобразовать в эквивалентную звезду. Напомним приемы, которыми целесообразно пользоваться при выполнении эквивалентных преобразований. Сначала следует перенести все буквы, которыми помечены характерные точки цепи, расположив их примерно в прежней конфигурации, затем нанести все эле-

менты, не подвергающиеся преобразованиям, и только после этого элементы, получившиеся в результате преобразований. В нашем случае элементы R_4 — R_6 и E_5 перенесем в прежнем виде, внутри треугольника ABD поставим точку O , которой не было в исходной схеме, и покажем три новых сопротивления — R_{AO} , R_{BO} и R_{DO} , обозначив их для краткости R_7 , R_8 и R_9 (рис. 3.34, б). Рассчитаем эти сопротивления: $R_7 = R_1 R_3 / (R_1 + R_2 + R_3) = 40 \cdot 50 / (40 + 10 + 50) = 20$ Ом; $R_8 = R_1 R_2 / (R_1 + R_2 + R_3) = 40 \cdot 10 / 100 = 4$ Ом; $R_9 = R_2 R_3 / (R_1 + R_2 + R_3) = 10 \cdot 50 / 100 = 5$ Ом.

После преобразований получились три ветви: ODF и OAF , соединенные параллельно, и OBF , соединенная с ними последовательно. Так как сопротивление R_4 не подвергалось преобразованиям, ток, текущий через это сопротивление, будет таким же, который протекал по сопротивлению R_4 в исходной схеме (рис. 3.34, а). Заменяем последовательно соединенные сопротивления R_4 и R_9 эквивалентным $R_{10} = R_4 + R_9 = 20 + 5 = 25$ Ом. Очевидно, что через сопротивление R_{10} протекает ток I_4 . Аналогично через сопротивление $R_{11} = R_6 + R_7 = 80 + 20 = 100$ Ом протекает ток I_6 , а через сопротивление $R_{12} = R_5 + R_8 = 16 + 4 = 20$ Ом и источник E_5 — ток I_5 (рис. 3.34, в).

Определим

$$\begin{aligned} I_5 &= E_5 / R_{GO} = \frac{E_5}{R_{12} + [R_{10} R_{11} / (R_{10} + R_{11})]} = \\ &= \frac{E_5 (R_{10} + R_{11})}{R_{10} R_{12} + R_{11} R_{12} + R_{10} R_{11}} = \frac{200 \cdot (25 + 100)}{25 \cdot 20 + 100 \cdot 20 + 25 \cdot 100} = \\ &= \frac{200 \cdot 125}{500 + 2000 + 2500} = \frac{200 \cdot 125}{5000} = 5 \text{ А.} \end{aligned}$$

В узле F ток I_5 разветвляется на I_4 и I_6 , причем $I_4 = (I_5 R_{11}) / (R_{10} + R_{11}) = (5 \cdot 100) / (25 + 100) = 4$ А.

Произведем проверку: арифметическая сумма токов I_4 и I_6 должна равняться току I_5 . Действительно, $4 + 1 = 5$. Поскольку данная проверка выполняется, можно продолжать расчеты. Токи I_4 и I_6 , получившиеся в схеме рис. 3.34, в, будут такими, как в схемах рис. 3.34, б и а. Таким образом, в исходной цепи три тока найдены. Теперь необходимо найти I_1 — I_3 , т. е. токи, протекающие в ветвях треугольника исходной цепи. В тех случаях, когда схему треугольника преобразуют в схему звезды, искать токи в ветвях треугольника приходится с помощью следующего приема.

В схеме звезды (т. е. рис. 3.34, б) задаются значением потенциала точки (например, нулевым), которая на рис. 3.34, б является вершиной звезды, а на рис. 3.34, а — соответственно вершиной треугольника. После этого, зная значения токов и сопротивлений в схеме звезды, определяют потенциалы двух остальных вершин звезды, которые будут также потенциалами

соответствующих вершин треугольника (напомним, что преобразование треугольника в звезду не изменяет ни токов, текущих за пределами треугольника, ни потенциалов точек, к которым подключены сопротивления треугольника). По известным потенциалам на зажимах треугольника определяют напряжение на каждом сопротивлении треугольника, а по напряжениям и сопротивлениям ветвей треугольника рассчитывают в них токи.

Проведем указанные операции применительно к цепи, показанной на рис. 3.34, *а*. Примем потенциал точки *A* в схеме рис. 3.34, *б* равным нулю ($\varphi_A=0$), в этом случае потенциал точки *O* ниже потенциала точки *A* на значение падения напряжения на R_7 (поскольку ток в данной схеме течет от точки *A* к точке *O*): $\varphi_O=\varphi_A-R_7I_6=0-20\cdot 1=-20$ В. Определим потенциалы точек *B* и *D*: $\varphi_B=\varphi_O-R_8I_5=-20-4\cdot 5=-40$ В и $\varphi_D=\varphi_O+R_9I_4=-20+5\cdot 4=0$. Потенциалы точек *A*, *B*, *D* на рис. 3.34, *а* будут такими же, которые получились в тех же точках на преобразованной схеме, показанной на рис. 3.34, *б*. Поскольку в схеме треугольника $\varphi_A=0$, а $\varphi_B=-40$ В, потенциал точки *A* выше потенциала точки *B*, а его значение можно определить из выражения $I_1=(\varphi_A-\varphi_B)/R_1=[0-(-40)/40]=1$ А.

Аналогично потенциал точки *D* выше потенциала точки *B* и $I_2=(\varphi_D-\varphi_B)/R_2=[0-(-40)]/10=4$ А. Потенциалы точек *A* и *D* оказались одинаковыми, поэтому ток I_3 равен нулю. Таким образом, в ветвях схемы рис. 3.34, *а* протекают следующие токи: $I_1=1$ А, $I_2=4$ А, $I_3=0$, $I_4=4$ А, $I_5=5$ А, $I_6=1$ А.

Произведем проверки. По первому закону Кирхгофа в узле *A* $I_6=I_1$, т. е. $1=1$; в узле *B* $I_1+I_2=I_5$, т. е. $1+4=5$; в узле *F* $I_5=I_4+I_6$, т. е. $5=4+1$; в узле *D* $I_4=I_2$, т. е. $4=4$. Первый закон Кирхгофа во всех узлах выполняется. Проверим выполнение второго закона Кирхгофа. В контуре *ABDA* $0=R_1I_1-R_2I_2+R_3I_3$, т. е. $0=40\cdot 1-10\cdot 4+0$; в контуре *BGFDB* $E_5=R_5I_5+R_4I_4+R_2I_2$, т. е. $200=16\cdot 5+20\cdot 4+10\cdot 4$ или $200=200$; в контуре *ADFA* $0=R_3I_3-R_4I_4+R_6I_6$, т. е. $0=0-20\cdot 4+80\cdot 1$; в контуре *ABGFDA* $E_5=R_5I_5+R_4I_4+R_3I_3+R_1I_1$, т. е. $200=16\cdot 5+20\cdot 4+50\cdot 0+40\cdot 1=80+80+40$, в контуре *ABGF* (через R_6) $E_5=R_5I_5+R_6I_6+R_1I_1$, т. е. $200=16\cdot 5+80\cdot 1+40\cdot 1=80+80+40$. Второй закон Кирхгофа во всех контурах выполняется.

Проверим баланс мощностей: $E_5I_5=I_1^2R_1+I_2^2R_2+I_3^2R_3+I_4^2R_4+I_5^2R_5+I_6^2R_6$, т. е. $200\cdot 5=(1)^2\cdot 40+(4)^2\cdot 10+0\cdot 50+(4)^2\cdot 20+(5)^2\cdot 16+(1)^2\cdot 80$ или $1000=40+160+0+320+400+80$, откуда $1000=1000$. Таким образом, все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.77. Рассчитать токи во всех ветвях и выполнить проверки в схеме, показанной на рис. 3.34, *а*, если $R_1=80$ Ом, $R_2=20$ Ом, $R_3=100$ Ом, $R_4=40$ Ом, $R_5=32$ Ом, $R_6=160$ Ом, $E_5=100$ В.

Указание: разберите сначала задачу 3.76.

3.78. Рассчитать токи во всех ветвях в схеме, показанной на рис. 3.35, *а*.

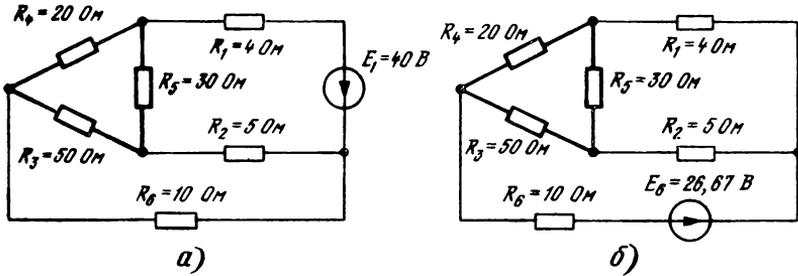


Рис. 3.35

Указание: разберите сначала задачу 3.76.

3.79. Рассчитать токи во всех ветвях в схеме, показанной на рис. 3.35, б.

Указание: разберите сначала задачу 3.76.

ЦЕПИ С ОДНИМ ИСТОЧНИКОМ ТОКА

3.80. Рассчитать токи во всех ветвях, падения напряжения и мощности во всех элементах цепи, показанной на рис. 3.36, а.

Указание: разберите сначала § 3.10 и 3.32 в [1].

Решение. Ток J в узле A разветвляется на токи I_1 и I_2 , причем $I_1 = J[R_2 / (R_1 + R_2)] = (2 \cdot 60) / (40 + 60) = 1,2$ А; $I_2 = J[R_1 / (R_1 + R_2)] = 2 \cdot 40 / 100 = 0,8$ А. Сопротивления R_1 и R_2 включены параллельно, напряжения на их зажимах можно найти либо как $R_1 I_1$, либо как $R_2 I_2$. В обоих случаях получается, разумеется, одно и то же значение. Действительно, $U_{AB} = 40 \cdot 1,2 = 60 \cdot 0,8 =$

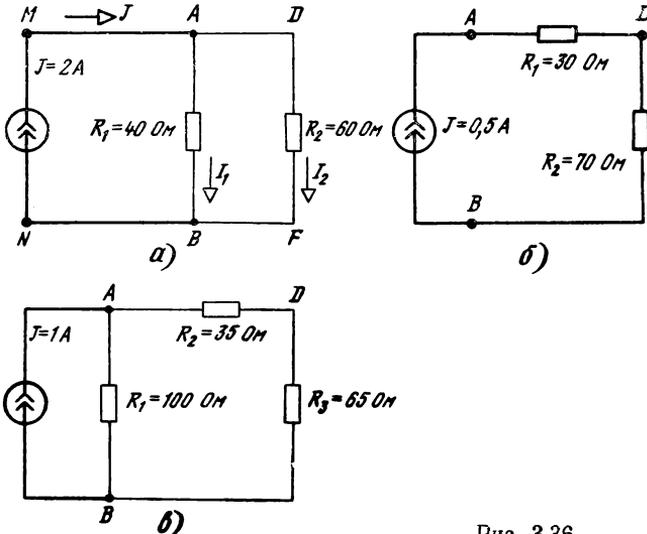


Рис. 3.36.

=48 В. Таким образом, напряжение на обоих сопротивлениях и на источнике тока равно 48 В.

Произведем проверки. В узлах A и B по первому закону Кирхгофа $J=I_1+I_2$, т. е. $2=1,2+0,8$. Обратим внимание, что нельзя составлять уравнения по второму закону Кирхгофа для контуров, в которые входят источники тока. На этом основании в данной цепи можно составить уравнение по второму закону Кирхгофа для контура $ADFBA$, но нельзя составлять для контура $MABNM$ или $MADFBNM$. В контуре $ADFBA$ $0=-I_1R_1+I_2R_2$, т. е. $0=40\cdot 1,2-60\cdot 0,8$.

Проверим баланс мощностей в цепи. Чтобы определить мощность, отдаваемую источником тока, следует подсчитать напряжение на зажимах ветви (или ветвей), параллельно которой (или которым) подключен источник тока. В данной цепи напряжение на источнике тока есть напряжение между точками A и B (или D и F , что одно и то же). Весьма существенным является полярность напряжения на этом участке. Если стрелка источника тока направлена к точке с более высоким потенциалом (иногда говорят: «к плюсу падения напряжения»), то мощность, отдаваемая источником, положительна, а если к «минусу» — то отрицательна. В данной цепи ток через сопротивление R_1 течет от A к B , следовательно, потенциал точки A выше потенциала точки B , в этом случае «плюс» напряжения $U_{AB}=R_1I_1=R_2I_2$ находится на точке A .

Тот же результат получится, если рассматривать напряжение во второй ветви. Мощности в резистивных сопротивлениях определяются, как обычно, из выражения $P_n=I^2R=U^2/R$, где I — действующее значение тока, текущего через сопротивление R , а U — действующее значение напряжения на зажимах этого сопротивления. Так как $P_{\text{ист}}=\sum P_n$, то в данной цепи $JU_{AB}=I_1^2R_1+I_2^2R_2$ или $JR_1I_1=I_1^2R_1+I_2^2R_2$. Подставив числовые значения, получим $2\cdot 40\cdot 1,2=(1,2)^2\cdot 40+(0,8)^2\cdot 60$, или $96=57,6+38,4$, откуда $96=96$.

Таким образом, источник тока отдает мощность 96 Вт, которая рассеивается в резистивных сопротивлениях цепи. Все проверки сходятся, следовательно, задача решена правильно.

3.81. Рассчитать токи во всех ветвях, напряжения на всех элементах, выполнить проверки для цепи, показанной на рис. 3.36, б.

Указание: разберите задачу 3.80.

3.82. Рассчитать токи во всех ветвях, напряжения на всех элементах, выполнив проверки для цепи, показанной на рис. 3.36, в.

Указание: разберите задачу 3.80.

3.83. Рассчитать токи во всех ветвях, напряжения на всех элементах, выполнить проверки для цепи, показанной на рис. 3.37, а.

Указание: разберите задачу 3.80.

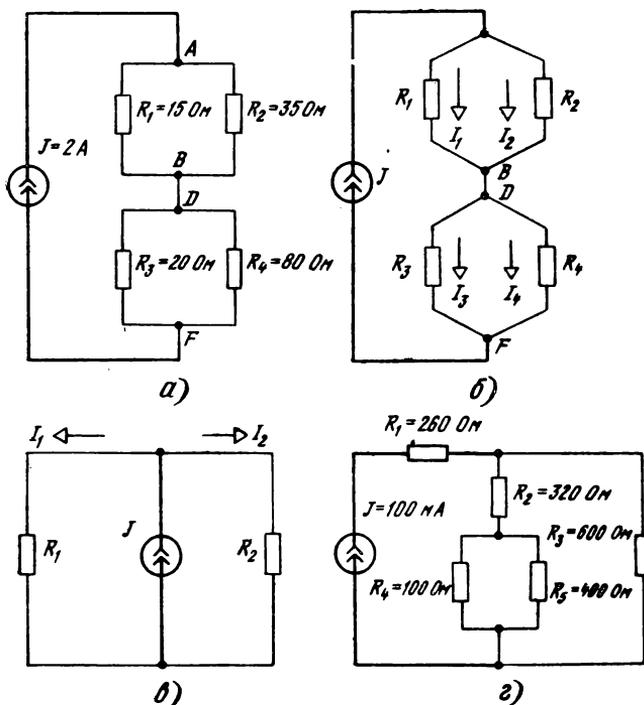


Рис. 3.37

Решение. Схема рис. 3.37, а выглядит несколько нагляднее в начертании, показанном на рис. 3.37, б. К узлу А поступает ток J , который разветвляется на I_1 и I_2 , причем $I_1 = J[R_2/(R_1+R_2)] = 2 \cdot 35/(15+35) = 1,4$ А; $I_2 = J[R_1/(R_1+R_2)] = 2 \cdot 15/50 = 0,6$ А. В узле В токи I_1 и I_2 снова соединяются в ток J , а в точке D последний разветвляется на токи I_3 и I_4 . Очевидно, что $I_3 = J[R_4/(R_3+R_4)] = 2 \cdot 80/(20+80) = 1,6$ А; $I_4 = J[R_3/(R_3+R_4)] = 2 \cdot 20/100 = 0,4$ А.

Напряжение между точками А и В можно рассчитать как $R_1 I_1$ или $R_2 I_2$, т. е. $U_{AB} = 15 \cdot 1,4 = 35 \cdot 0,6 = 21$ В. Напряжение U_{AB} можно также найти как произведение тока J и эквивалентного сопротивления между точками А и В, т. е. $U_{AB} = J R_{AB} = J[R_1 R_2/(R_1+R_2)] = (2 \cdot 15 \cdot 35)/(15+35) = 21$ В. Последний способ определения U_{AB} более громоздкий, но вполне возможный. Аналогично $U_{DF} = R_3 I_3 = R_4 I_4 = R_{DF} J = 20 \cdot 1,6 = 80 \cdot 0,4 = 2[20 \cdot 80/(20+80)] = 32$ В. Напряжение на точках АF и, следовательно, на зажимах источника тока $U_{AF} = U_{AB} + U_{DF} = 21 + 32 = 53$ В.

Произведем проверки. Легко видеть, что первый закон Кирхгофа во всех узлах выполняется. По второму закону Кирхгофа в данной цепи можно составить два уравнения: $0 = R_2 I_2 - R_1 I_1$, т. е. $0 = 35 \cdot 0,6 - 15 \cdot 1,4$, и $0 = R_4 I_4 - R_3 I_3$, т. е. $0 = 80 \cdot 0,4 - 20 \cdot 1,6$.

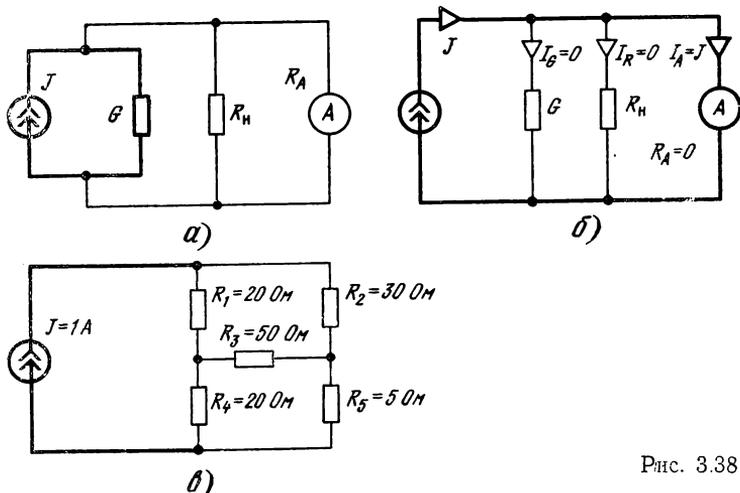


Рис. 3.38

Проверим баланс мощностей: $JU_{AF} = \sum I^2 R$, т. е. $J(U_{AB} + U_{DF}) = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4$. Подставим числовые значения $2 \cdot (21 + 32) = 1,4^2 \cdot 15 + 0,6^2 \cdot 35 + 1,6^2 \cdot 20 + 0,4^2 \cdot 80$, т. е. $106 = 29,4 + 12,6 + 51,2 + 12,8$, откуда $106 \text{ Вт} = 106 \text{ Вт}$. Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.84. Рассчитать ток I , падения напряжения и мощности во всех элементах для цепи, показанной на рис. 3.37, в, если $J = 1 \text{ А}$, $I_1 = 0,3 \text{ А}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$.

Указание: разберите сначала задачу 3.80.

3.85. Рассчитать токи во всех ветвях, падения напряжений и мощности во всех элементах для цепи, показанной на рис. 3.37, г.

Указание: разберите сначала задачу 3.80.

3.86. Определить ток, текущий через амперметр в схеме, показанной на рис. 3.38, а, если внутреннее сопротивление амперметра пренебрежимо мало.

Указание: изучите сначала § 3.9 в [1].

Решение. Перерисуем схему в более привычном начертании (рис. 3.38, б). Сопротивления $1/G$, R_H и R_A соединены параллельно. В такой цепи токи распределяются обратно пропорционально сопротивлению ветвей, а точнее, пропорционально их проводимости. Поскольку первая и вторая ветви (т. е. G и R_H) имеют конечные проводимости (G и $1/R_H$), а третья ветвь — бесконечно большую ($G_A = 1/R_A = 1/0 = \infty$), весь ток потечет через третью ветвь, а токи в первой и второй ветвях будут равны нулю.

3.87. Рассчитать напряжения и мощности во всех элементах, токи во всех ветвях, не преобразуя источник тока в источник напряжения (рис. 3.38, в).

Указание: разберите сначала задачи 3.76 и 3.80.

ЦЕПИ С НЕСКОЛЬКИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТОКА

3.88. Рассчитать токи во всех ветвях, напряжения и мощности во всех элементах цепи, показанной на рис. 3.39, *а*.

Указание: разберите сначала § 3.9 в [1].

Решение. Если два или несколько источников тока соединены параллельно, их можно заменить одним эквивалентным, причем ток эквивалентного источника равен алгебраической сумме токов каждого источника, т. е. $J_{\text{ЭК}} = \sum J$ (подобно тому, как соединяются источники напряжения при их последовательном включении). Так как источники тока в схеме рис. 3.39, *а* соединены параллельно согласно (т. е. стрелки обоих источников направлены к точке *A*), $J_{\text{ЭК}} = J_1 + J_2 = 500 + 300 = 800$ мА, а $G_{\text{ЭК}} = G_1 + G_2 + G_3 = (1/R_1) + (1/R_2) + (1/R_3) = [(R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2) / (R_1 R_2 R_3)] = [(500 \cdot 1000 + 200 \cdot 1000 + 200 \cdot 500) / (200 \times 500 \cdot 1000)] = 8/1000$ См, откуда $R_{\text{ЭК}} = 1/G_{\text{ЭК}} = 1000/8 = 125$ Ом. Таким образом, в схеме рис. 3.39, *б* через сопротивление 125 Ом течет ток 800 мА. Определим падение напряжения на сопротивлении $R_{\text{ЭК}}$, т. е. между точками *A* и *B*: $U_{AB} = R_{\text{ЭК}} \times J_{\text{ЭК}} = 125 \cdot 800 \cdot 10^{-3} = 100$ В. Схема, показанная на рис. 3.39, *б*, эквивалентна схеме рис. 3.39, *а*, поэтому напряжение между точками *A* и *B* в обеих схемах одинаково и равно 100 В. Определим токи в сопротивлениях R_1, R_2, R_3 : $I_1 = U_{AB}/R_1 = 100/200 = 500$ мА; $I_2 = U_{AB}/R_2 = 100/500 = 200$ мА; $I_3 = U_{AB}/R_3 = 100/1000 = 100$ мА.

Найдем токи в ветвях *DA* и *AM*. К узлу *D* притекает ток $J_1 = 500$ мА, по ветви R_1 протекает ток I_1 , также равный

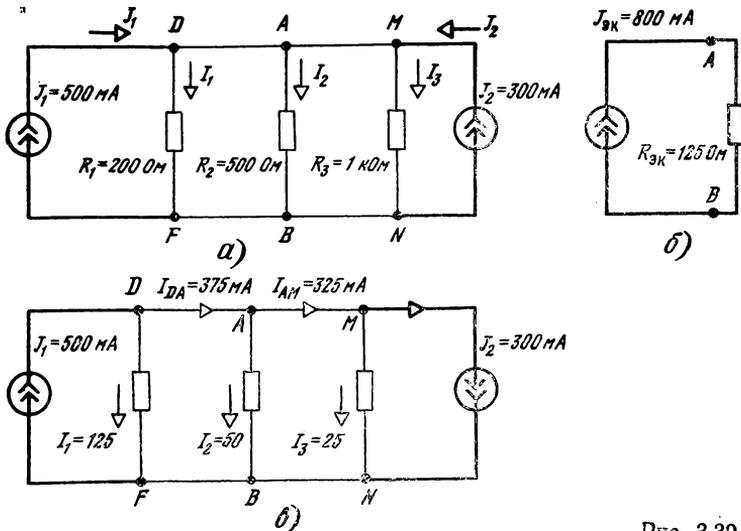


Рис. 3.39

500 мА, следовательно, в ветви DA ток может быть равным только нулю, в противном случае первый закон Кирхгофа в узле D не будет выполняться. Во второй ветви от точки A к точке B течет ток $I_2=200$ мА, следовательно, к узлу A должен притекать такой же ток. Ток I_{DA} равен нулю, поэтому ток, текущий в ветви MA и притекающий к узлу A , может составлять только 200 мА.

Проверим выполнение первого закона Кирхгофа в узле M . К узлу M притекает ток $J_2=300$ мА, а вытекают $I_{MA}=200$ мА и $I_3=100$ мА. Первый закон Кирхгофа выполняется.

Второй закон Кирхгофа можно проверить для контуров $DABFD$, $AMNBA$ и $DAMNFD$ ($-R_1I_1+I_2R_2=0$; $-R_2I_2+R_3I_3=0$; $-R_1I_1+R_3I_3=0$). Напомним, что составлять уравнения по второму закону Кирхгофа можно только для таких контуров, в которые не входят источники тока. Обратим внимание еще на одно обстоятельство. В ветвях с нулевым сопротивлением ток может иметь самые различные значения, как равные, так и отличные от нуля. Сам по себе факт наличия ветви с нулевым сопротивлением не является признаком какого-либо определенного тока в этой ветви, как иногда неверно считают. Например, в ветви DA схемы рис. 3.39, *a* ток оказался нулевым, а в ветви AM — отличным от нуля и т. д. Проверим баланс мощностей $J_1U_{AB}+J_2U_{AB} = I_1^2R_1+I_2^2R_2+I_3^2R_3$, т. е. $(0,5+0,3) \cdot 100 = 0,5^2 \times 200 + 0,2^2 \cdot 500 + 0,1^2 \cdot 1000$ или $80 = 50 + 20 + 10$. Баланс мощностей выполняется.

3.89. Рассчитать токи, напряжения и мощности в схеме рис. 3.39, *a*, если полярность источника J_2 изменена на обратную.

Указание: разберите задачу 3.88.

Решение. Поскольку источники J_1 и J_2 соединены встречно, $J_{\text{эк}} = J_1 - J_2 = 500 - 300 = 200$ мА. Сопротивление $R_{\text{эк}}$ осталось без изменений, поэтому $U_{AB} = U_{DF} = U_{MN} = J_{\text{эк}}R_{\text{эк}} = 0,2 \cdot 125 = 25$ В, откуда $I_1 = 125$ мА, $I_2 = 50$ мА, $I_3 = 25$ мА. Найдем токи в остальных ветвях. К узлу D притекает ток $J_1 \approx 500$ мА, а вытекает ток $I_1 = 125$ мА, следовательно, весь остальной ток вытекает по ветви DA , т. е. $I_{DA} = J_1 - I_1 = 500 - 125 = 375$ мА, к узлу A притекает ток $I_{DA} = 375$ мА, вытекает ток $I_2 = 50$ мА, значит $I_{AM} = 325$ мА. К узлу M притекает ток $I_{AM} = 325$ мА, а вытекают $I_3 = 25$ мА и $J_2 = 300$ мА (рис. 3.39, *в*). Первый закон Кирхгофа выполняется. Проверим баланс мощностей: $J_1U_{AB} - J_2U_{AB} = I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + I_3^2R_3$, т. е. $0,5 \cdot 25 - 0,3 \cdot 25 = (0,125)^2 \cdot 200 + (0,05)^2 \cdot 500 + (0,025)^2 \cdot 1000$ или $5 = 3,125 + 1,25 + 0,625$, откуда 5 Вт = 5 Вт.

3.90. Рассчитать токи во всех ветвях, напряжения и мощности во всех элементах (рис. 3.40, *a*).

Указание: разберите задачу 3.88.

Решение. В данной цепи соединены параллельно два источника тока и три резистивных сопротивления. Очевидно, что

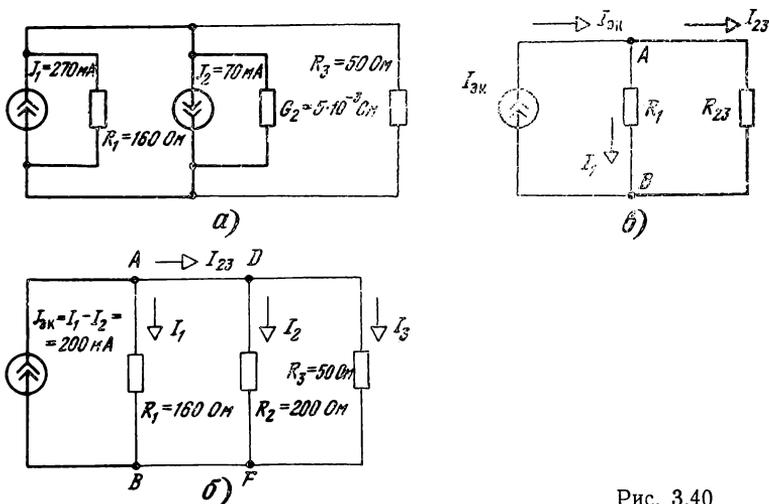


Рис. 3.40

данную цепь можно привести к эквивалентной подобно схеме, показанной на рис. 3.39, б или в. Рассчитаем токи несколько иным способом, чем в задачах 3.88 и 3.89. Изобразим схему так, как показано на рис. 3.40, б. Здесь $I_{\text{эк}} = I_1 - I_2 = 270 - 70 = 200$ мА, $R_2 = 1/G_2 = 1/5 \cdot 10^{-3} = 200$ Ом. Остальные элементы перенесены без изменений: Объединим сопротивления R_2 и R_3 в эквивалентное: $R_{23} = R_2 R_3 / (R_2 + R_3) = 200 \cdot 50 / (200 + 50) = 40$ Ом (рис. 3.40, в). Ток $I_{\text{эк}}$ в узле А разветвляется на I_1 и I_{23} : $I_1 = I_{\text{эк}} [R_{23} / (R_1 + R_{23})] = (200 \cdot 40) / (160 + 40) = 40$ мА, а $I_{23} = I_{\text{эк}} [R_1 / (R_1 + R_{23})] = (200 \cdot 160) / (160 + 40) = 160$ мА. Ток I_{23} в узле D разветвляется на I_2 и I_3 , причем $I_2 = I_{23} [R_3 / (R_2 + R_3)] = (160 \cdot 50) / (200 + 50) = 32$ мА, $I_3 = I_{23} [R_2 / (R_2 + R_3)] = (160 \cdot 200) / 250 = 128$ мА. Таким образом, $I_1 = 40$ мА, $I_2 = 32$ мА, $I_3 = 128$ мА, т. е. $40 + 32 + 128 = 200$.

Проверим баланс мощностей: $I_1 U_{AB} - I_2 U_{AB} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$. Напряжение на зажимах ветвей можно найти с помощью любого из следующих выражений: $U_{AB} = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3 = 160 \cdot 0,04 = 200 \cdot 0,032 = 50 \cdot 0,128 = 6,4$ В. Тогда $0,27 \times 6,4 - 0,07 \cdot 6,4 = (0,04)^2 160 + (0,032)^2 200 + (0,128)^2 50$, т. е. $1,28 = 0,256 + 0,2048 + 0,8192$, откуда $1,28 \text{ Вт} = 1,28 \text{ Вт}$.

3.91. Рассчитать токи во всех ветвях, напряжения и мощности во всех элементах (рис. 3.41, а).

Указание: изучите сначала § 3.32 в [1].

Решение. Заменяем источники тока эквивалентными источниками напряжения. Схема приобретает вид, показанный на рис. 3.41, б. Напомним, что эквивалентная ЭДС определяется из выражения $E = RJ$, т. е. $E' = 0,1 \cdot 100 = 10$ В, а сопротивление, включенное параллельно источнику тока, оказывается включенным последовательно с источником напряжения. Аналогично $E'' = R_2 J_2 = 250 \cdot 0,2 = 50$ В. В схеме рис. 3.41, б

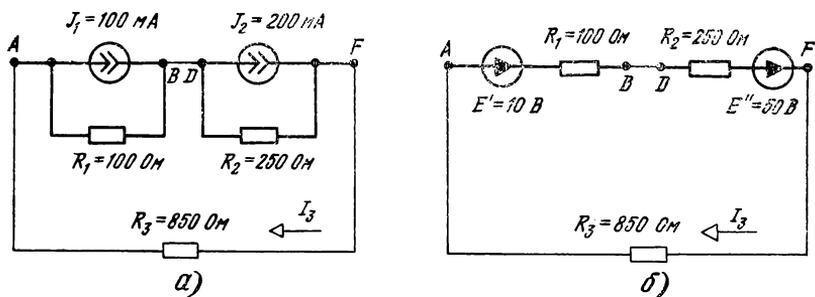


Рис. 3.41

непреобразованным остается участок с сопротивлением R_3 , поэтому текущий через него ток в обеих схемах — это один и тот же ток $I_3 = (E' + E'') / (R_1 + R_2 + R_3) = (10 + 50) / (100 + 250 + 850) = 60 / 1200 = 50$ мА.

Возвратимся к исходной схеме и определим токи в R_1 и R_2 . Так как от узла A к узлу B течет ток $J_1 = 100$ мА, то сумма токов, притекающих к узлу A , также должна равняться 100 мА, из которых 50 мА есть ток I_3 и 50 мА — ток I_1 , текущий через сопротивление R_1 от точки B к точке A . Ток $I_2 = 150$ мА должен протекать через R_2 от точки F к точке D . На участке BD течет ток $I_3 = 50$ мА. Проверим выполнение второго закона Кирхгофа: $0 = -R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3$, т. е. $0 = -100 \cdot 0,05 - 250 \times 0,15 + 850 \cdot 0,05$.

Проверим баланс мощностей. Поскольку в сопротивлении R_1 ток течет от B к A , потенциал B выше потенциала A , «плюс» напряжения U_{BA} оказывается в точке B , т. е. точке, к которой обращена стрелка источника тока. Следовательно, мощность, отдаваемая источником тока J_1 , является положительной. Аналогично определяется мощность в источнике J_2 . Таким образом,

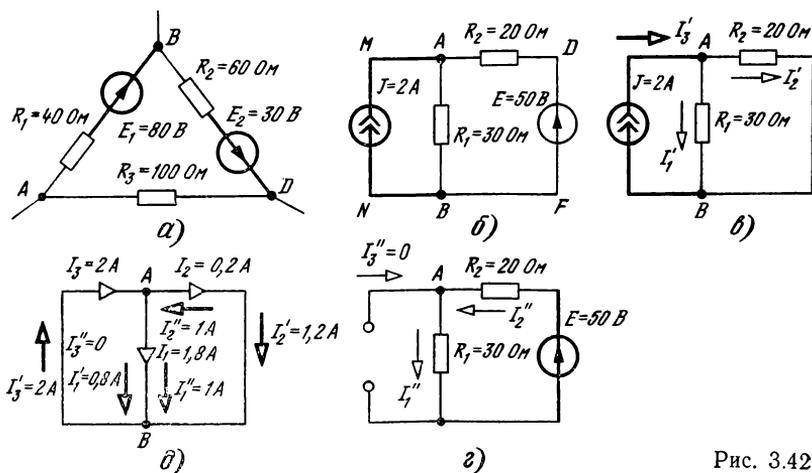


Рис. 3.42

$J_1 R_1 I_1 + J_2 R_2 I_2 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$, т. е. $0,1 \cdot 100 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 250 \times 0,15 = (0,05)^2 \cdot 100 + (0,15)^2 \cdot 250 + (0,05)^2 \cdot 850$ или $0,5 + 7,5 = 0,25 + 5,625 + 2,125$, откуда $8 \text{ Вт} = 8 \text{ Вт}$.

3.92. Схему треугольника сопротивлений с источниками напряжения, показанную на рис. 3.42, а, преобразовать в эквивалентную схему звезды с источниками напряжения.

Указание: изучите сначала § 3.33 и 3.35 в [1].

3.93. Рассчитать токи в ветвях, напряжения и мощности на всех элементах цепи, показанной на рис. 3.42, б.

Указание: разберите сначала пример 3.21 на с. 95 в [1].

3.94. Решите задачу 3.93, если полярность источника напряжения изменена на обратную.

Указание: разберите § 3.32 и 3.35 в [1].

МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ

3.95. Рассчитать токи в цепи, показанной на рис. 3.42, б, методом наложения.

Указание: изучите сначала § 3.21 и раздел «Метод наложения» в § 3.34 в [1].

Решение. Чтобы рассчитать токи в ветвях цепи методом наложения, необходимо изобразить столько частных схем, сколько независимых источников имеет исходная схема. В каждой частной схеме следует оставить только один независимый и все зависимые источники, остальные необходимо исключить. Внутренние сопротивления исключенных источников напряжения и внутренние проводимости источников тока остаются на своих местах неизменными. Токи в частных схемах записывают с двумя индексами: нижний в виде арабской цифры показывает номер ветви, в которой течет данный ток, верхний в виде штрихов, число которых соответствует номеру источника, оставленного в схеме. (Могут быть и иные системы индексов, но данная система удобна и достаточно распространена.)

В соответствии с изложенным покажем первую частную схему (с источником J , но без источника E) на рис. 3.42, в, а вторую частную схему (с источником E , но без источника J) на рис. 3.42, г.

Внутреннее сопротивление источника E по условию равно нулю, поэтому в первой частной схеме вместо источников E во второй ветви ставится короткозамкнутая перемычка, соответствующая ветви с нулевым сопротивлением. Найдем токи в ветвях этой цепи: $I_3' = J = 2 \text{ А}$; $I_1' = J[R_2 / (R_1 + R_2)] = (2 \cdot 20) / (30 + 20) = 0,8 \text{ А}$; $I_2' = J[R_1 / (R_1 + R_2)] = 2 \cdot 30 / 50 = 1,2 \text{ А}$. Во второй частной схеме вместо исключенного источника тока показывают разрыв цепи, ибо только в разомкнутой цепи ток источника тока может стать равным нулю. Как видно из рис. 3.42, г, $I_1'' = I_2'' = E / (R_1 + R_2) = 50 / (30 + 20) = 1 \text{ А}$; $I_3'' = 0$.

После нахождения токов во всех ветвях частных схем удоб-

но нарисовать граф цепи (т. е. сделать чертеж, на котором сплошными линиями показаны ветви цепи, подробнее см. § 3.12 и рис. 3.20, б, 3.23, б, 3.24 в [1]). В каждой ветви желательно различными цветами нанести получившиеся частные токи, а затем определить ток в каждой ветви схемы как алгебраическую сумму частных токов. Частные токи следует показывать сбоку, около провода (точнее, линии графа), а результирующие токи — на проводе (линии графа) (рис. 3.42, д). В данной схеме $I_1 = I_1' + I_1'' = 0,8 + 1 = 1,8$ А (поскольку токи I_1' и I_1'' направлены в одну сторону, общий ток I_1 равен их арифметической сумме). Ток $I_2 = I_2' - I_2'' = 1,2 - 1 = 0,2$ А (поскольку токи I_1' и I_1'' направлены в разные стороны, результирующий ток I_2 равен их арифметической разности и направлен в сторону большего тока). Ток $I_3 = I_3' + I_3'' = J + 0 = 2$ А.

Рассчитав токи, необходимо выполнить проверки. (Строго говоря, проверки следует производить для каждой частной схемы, но в крайнем случае проверку можно произвести для окончательных результатов расчета.) В узле $AI_3 = I_1 + I_2$, т. е. $2 = 1,8 + 0,2$. Для контура $ADFBA$ $E = -R_2 I_2 + R_1 I_1$, т. е. $50 = -20 \cdot 0,2 + 1,8 \cdot 30$ или $50 = -4 + 54$. Проверим баланс мощностей: $JU_{AB} - I_2 E = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2$. (Знак у члена JU_{AB} получается положительным, потому что ток в сопротивлении R_1 течет от точки A к точке B , следовательно, «плюс» падения напряжения на сопротивлении R_1 оказывается в точке A , к которой направлена стрелка источника тока. Член $I_2 E$ имеет знак «минус», потому что направления ЭДС и тока, текущего через эту ЭДС, противоположны.) Мощности, выделяющиеся в резистивных сопротивлениях, положительны при любых направлениях тока, поскольку эффективность преобразования электрической энергии в тепловую не зависит от направления тока в проводнике: $2 \cdot 1,8 \cdot 30 - 0,2 \cdot 50 = (1,8)^2 \cdot 30 + (0,2)^2 \cdot 20$ или $108 - 10 = 97,2 + 0,8$, откуда 98 Вт = 98 Вт. Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.96. Рассчитать методом наложения токи во всех ветвях и произвести проверку для цепи, показанной на рис. 3.42, б, если полярность источника E изменена на обратную.

Указание: разберите сначала задачу 3.95.

3.97. В схеме, показанной на рис. 3.43, а, рассчитать токи во всех ветвях, напряжения и мощности на всех элементах.

Указание: разберите сначала задачу 3.95.

Решение. Составим частные схемы (рис. 3.43, б и в). Как видно из чертежей, в первой частной схеме $I_1' = I_3' = J_1 = 0,2$ мА, $I_2' = 0$. Во второй частной схеме $I_2'' = I_3'' = J_2 = 0,3$ мА. Нанесем все токи на граф (рис. 3.43, г). Очевидно, что $I_1 = I_1' = 0,2$ мА; $I_2 = I_2'' = 0,3$ мА; $I_3 = I_3' + I_3'' = 0,2 + 0,3 = 0,5$ мА. В узле A $I_1 + I_2 = I_3$, т. е. $0,2 + 0,3 = 0,5$. Произвести проверку по второму закону Кирхгофа в данной схеме не представляется возможным, поскольку нет контуров, в которые не входил бы источник тока.

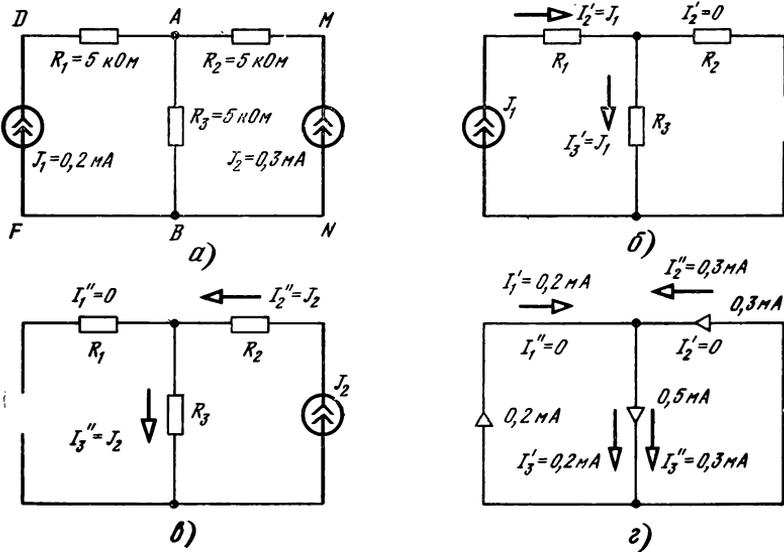


Рис. 3.43

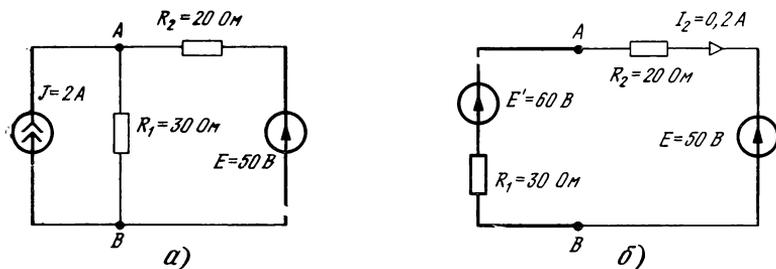
Проверим баланс мощностей. Для этого необходимо определить напряжения на зажимах источников тока. Пусть потенциал точки B $\varphi_B = 0$. В этом случае $\varphi_A = \varphi_B + R_3 I_3 = 0 + 5 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 2,5 \text{ В}$; $\varphi_D = \varphi_A + R_1 I_1 = 2,5 + 5 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} = 2,5 + 1 = 3,5 \text{ В}$; $\varphi_M = \varphi_A + R_2 I_2 = 2,5 + 5 \cdot 10^3 \cdot 0,3 \cdot 10^{-3} = 4 \text{ В}$. Таким образом, на зажимах первого источника тока оказалось напряжение $U_{DF} = \varphi_D - \varphi_F = 3,5 \text{ В}$, а на зажимах второго $U_{MN} = \varphi_M - \varphi_N = 4 \text{ В}$. Стрелка обоих источников тока направлена к «плюсу» падений напряжений, поэтому мощности, отдаваемые этими источниками, оказываются положительными: $J_1 U_{DF} + J_2 U_{MN} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$, т. е. $0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 3,5 + 0,3 \cdot 10^{-3} \cdot 4 = (0,2 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 5 \cdot 10^3 + (0,3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 5 \cdot 10^3 + (0,5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 5 \cdot 10^3$ или $0,7 \cdot 10^{-3} + 1,2 \cdot 10^{-3} = 0,2 \cdot 10^{-3} + 1,25 \cdot 10^{-3} + 0,45 \cdot 10^{-3}$, откуда $1,9 \cdot 10^{-3} \text{ Вт} = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}$ или $1,9 \text{ мВт} = 1,9 \text{ мВт}$. Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.98. Рассчитать токи, напряжения и мощности в схеме, показанной на рис. 3.43, а, если полярность источника J_2 изменена на обратную.

Указание: разберите сначала задачу 3.97.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИСТОЧНИКА ТОКА В ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ИСТОЧНИК НАПРЯЖЕНИЯ

3.99. Рассчитайте токи, напряжения и мощности в цепи, показанной на рис. 3.44, а, с помощью преобразования источника тока в эквивалентный источник напряжения.



Рим. 3.44

Указание: разберите сначала пример 3.21 в [1] и задачу 3.91.

Решение. Вместо источника тока и сопротивления R_1 , соединенного с ним параллельно, включенных между точками A и B , включают между этими же точками эквивалентный источник напряжения $E=R_1J$, соединенный последовательно с тем же сопротивлением R_1 . В полученной схеме (рис. 3.44, б) ток I_2 течет по часовой стрелке, поскольку $E' > E$. Ток $I_2 = (E' - E) / (R_1 + R_2) = (60 - 50) / (30 + 20) = 10 / 50 = 0,2$ А. Так как вторая ветвь не подвергалась преобразованиям, то I_2 в схеме рис. 3.44, б будет током, текущим в этой же ветви исходной цепи, показанной на рис. 3.44, а. Зная токи J и I_2 , можно найти I_1 по первому закону Кирхгофа. Так как к узлу A притекает ток $J = 2$ А, а вытекает ток $I_2 = 0,2$ А, для соблюдения электрического равновесия от узла A должен вытекать ток $I_1 = J - I_2 = 2 - 0,2 = 1,8$ А.

Решив задачу, сравним полученные результаты с аналогичными, полученными в задаче 3.95. Из сравнения видно, что цепи, показанные на рис. 3.42, б и 3.44, а, одинаковые, но в задаче 3.95 цепь рассчитывалась методом наложения, а в данной задаче — методом эквивалентного преобразования источника тока в источник напряжения. Это подтверждает правильность расчета токов в цепи различными методами.

3.100. Рассчитать токи, напряжения и мощности в цепи, показанной на рис. 3.45, а, методом преобразования источника тока в эквивалентный источник напряжения.

Указание: изучите сначала § 3.33 в [1].

Решение. Чтобы преобразовать источник тока в эквивалентный источник напряжения, необходимо иметь схему, в которой параллельно источнику тока включено сопротивление (но не цепочка сопротивлений, по которым текут различные токи, как, например, в схеме рис. 3.45, а). Чтобы в указанной схеме преобразовать источник тока в источник напряжения, необходимо расщепить источник тока, т. е. последовательно с ним включить такой же источник, и подключить место соединения источников тока к точке D (рис. 3.45, б). Поскольку $J_1 = J_2 = J$, ток в перемычке MD равен нулю и, следовательно, наличие этой перемычки не перераспределяет токи в ветвях.

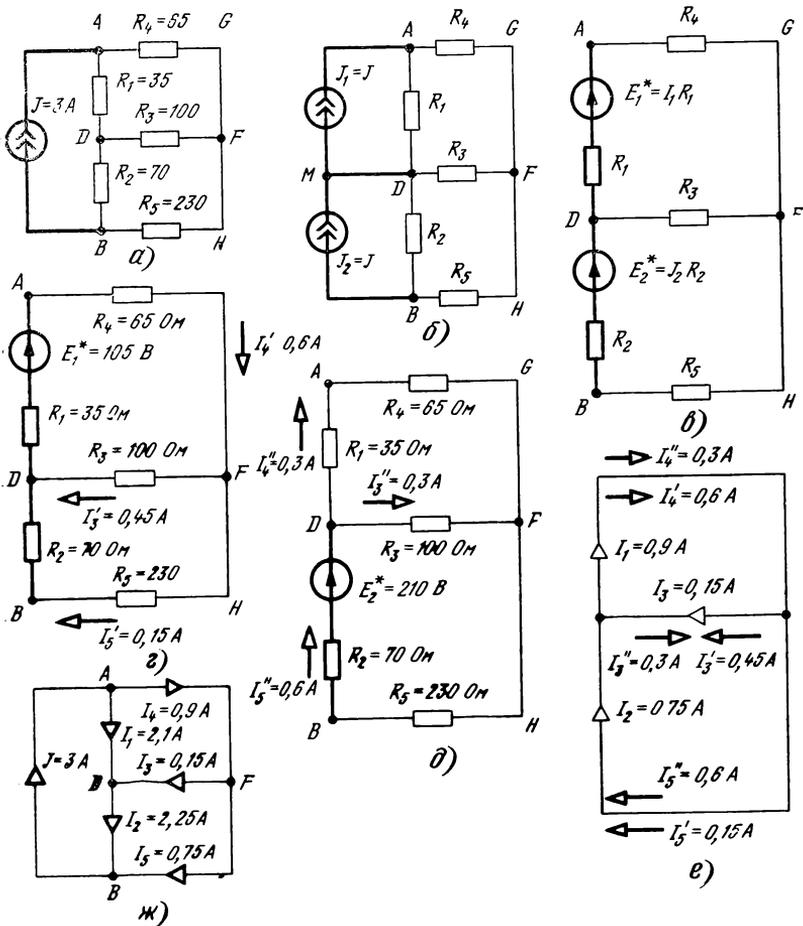


Рис. 3.45

После указанного преобразования источники тока можно заменить эквивалентными источниками напряжения, в которых $E_1^* = J R_1 = 3 \cdot 30 = 90\text{ В}$; $E_2^* = J R_2 = 3 \cdot 70 = 210\text{ В}$ (рис. 3.45, б).

Получившуюся схему рассчитаем методом наложения. Составим частные схемы (рис. 3.45, г и д). Нумеровать токи следует в соответствии с номерами ветвей, не подвергшихся преобразованию. На этом основании ток в ветви DAF следует обозначить через I_4' (а не I_1'), в ветви DF — через I_3' , в ветви BH — через I_5' . В первой частной схеме

$$I_4' = \frac{E_1^*}{(R_1 + R_4) + R_3(R_2 + R_5)/(R_3 + R_2 + R_5)} =$$

$$= \frac{105}{(35+65)+100(70+230)/(100+70+230)} = \frac{105}{100+(100 \cdot 300/400)} =$$

$$= \frac{105}{175} = 0,6 \text{ A}; \quad I_5' = \frac{I_4' R_3}{(R_3+R_2+R_5)} = \frac{0,6 \cdot 100}{(100+70+230)} = 0,15 \text{ A};$$

$$I_3' = I_4' \left[\frac{(R_2+R_5)}{(R_3+R_2+R_5)} \right] = \frac{0,6 \cdot 300}{400} = 0,45 \text{ A}.$$

Аналогично во второй частной схеме

$$I_2'' = \frac{E_2^*}{(R_2+R_5)+R_3(R_1+R_4)/(R_3+R_1+R_4)} =$$

$$= \frac{210}{(70+230)+100(35+65)/(100+35+65)} + \frac{210}{(300+50)} = 0,6 \text{ A};$$

$$I_1'' = I_2'' \frac{R_3}{(R_3+R_1+R_4)} = \frac{0,6 \cdot 100}{100+35+65} = 0,3 \text{ A};$$

$$I_3'' = I_2'' \frac{(R_1+R_4)}{R_3+R_1+R_4} = \frac{0,6(35+65)}{200} = 0,3 \text{ A}.$$

Нанесем на граф (рис. 3.45, *е*) частные токи и подсчитаем результирующие токи: $I_4 = I_4' + I_4'' = 0,6 + 0,3 = 0,9 \text{ A}$; $I_5 = I_5' + I_5'' = 0,15 + 0,6 = 0,75 \text{ A}$; $I_3 = I_3' - I_3'' = 0,45 - 0,3 = 0,15 \text{ A}$.

Возвратимся к исходной схеме (рис. 3.45, *а*) и найдем токи I_1 (в сопротивлении R_1) и I_2 (в R_2). К узлу *A* притекает ток $J = 3 \text{ A}$, а вытекает $I_4 = 0,9 \text{ A}$. Следовательно, ток $I_1 = J - I_4 = 3 - 0,9 = 2,1 \text{ A}$ вытекает от точки *A* к точке *D*. Аналогично к узлу *B* притекает ток $I_5 = 0,75 \text{ A}$, а вытекает $J = 3 \text{ A}$. Для выполнения первого закона Кирхгофа к узлу *B* должен притекать ток $I_2 = J - I_5 = 3 - 0,75 = 2,25 \text{ A}$.

Нанесем все токи на граф (рис. 3.45, *ж*). Легко видеть, что первый закон Кирхгофа выполняется во всех узлах. Проверим второй закон Кирхгофа. В контуре $AGFDA$ $0 = -R_1 I_1 + R_4 I_4 + R_3 I_3$, т. е. $0 = -35 \cdot 2,1 + 65 \cdot 0,9 + 100 \cdot 0,15$ или $0 = -73,5 + 58,5 + 15$. В контуре $BDFHB$ $0 = -R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_5 I_5$, т. е. $0 = -70 \times 2,25 - 100 \cdot 0,15 + 230 \cdot 0,75$ или $0 = -157,5 - 15 + 172,5$.

Для проверки баланса мощности необходимо найти напряжение на зажимах источника тока, т. е. между точками *A* и *B*. Примем потенциал точки *B* равным нулю ($\varphi_B = 0$), тогда $\varphi_D = \varphi_B + R_2 I_2 = 0 + 70 \cdot 2,25 = 157,5 \text{ В}$; $\varphi_A = \varphi_D + R_4 I_4 = 157,5 + 35 \cdot 2,1 = 157,5 + 73,5 = 231 \text{ В}$. Рассчитаем мощности источника и нагрузок: $JU_{AB} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5$, т. е. $3 \cdot 231 = (2,1)^2 35 + (2,25)^2 70 + (0,15)^2 100 + (0,9)^2 65 + (0,75)^2 230$ или $693 = 154,35 + 354,375 + 2,25 + 52,65 + 129,375$, откуда $693 \text{ Вт} = 693 \text{ Вт}$. Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.101. В схеме, показанной на рис. 3.45, *а*, $J = 600 \text{ мА}$, $R_1 = 105 \text{ Ом}$, $R_2 = 210 \text{ Ом}$, $R_3 = 300 \text{ Ом}$, $R_4 = 195 \text{ Ом}$, $R_5 = 690 \text{ Ом}$.

Рассчитать методом преобразования источника тока в эквивалентный источник напряжения токи во всех ветвях, напряжения и мощности во всех элементах.

Указание: разберите сначала задачу 3.100.

ЦЕПИ С ИСТОЧНИКАМИ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА

3.102. Рассчитать токи во всех ветвях, напряжения и мощности во всех элементах (рис. 3.46, а) методом наложения.

Решение. Исключим источник тока J и рассчитаем токи в первой частной схеме (рис. 3.46, б). Как видно из схемы, $I_1' = I_2' = E / (R_1 + R_2) = 100 / (20 + 30) = 2$ А; $I_3' = I_4' = E / (R_3 + R_4) = 100 / (80 + 120) = 0,5$ А. Во второй частной схеме (рис. 3.46, в) исключен источник напряжения, а так как его внутреннее сопротивление равно нулю, между точками A и B включена короткозамкнутая перемычка (рис. 3.46, в). Получившаяся схема выглядит гораздо нагляднее, если учесть, что точки A и B — это одна точка, и изобразить данную схему, как показано на рис. 3.46, г. На участке DA ток J разветвляется на токи I_1'' и I_2'' , а на участке BF — на токи I_3'' и I_4'' , причем $I_1'' = J R_2 / (R_1 + R_2) = 1 \cdot 30 / (20 + 30) = 0,6$ А; $I_2'' = J R_1 / (R_1 + R_2) = 1 \cdot 20 / (20 +$

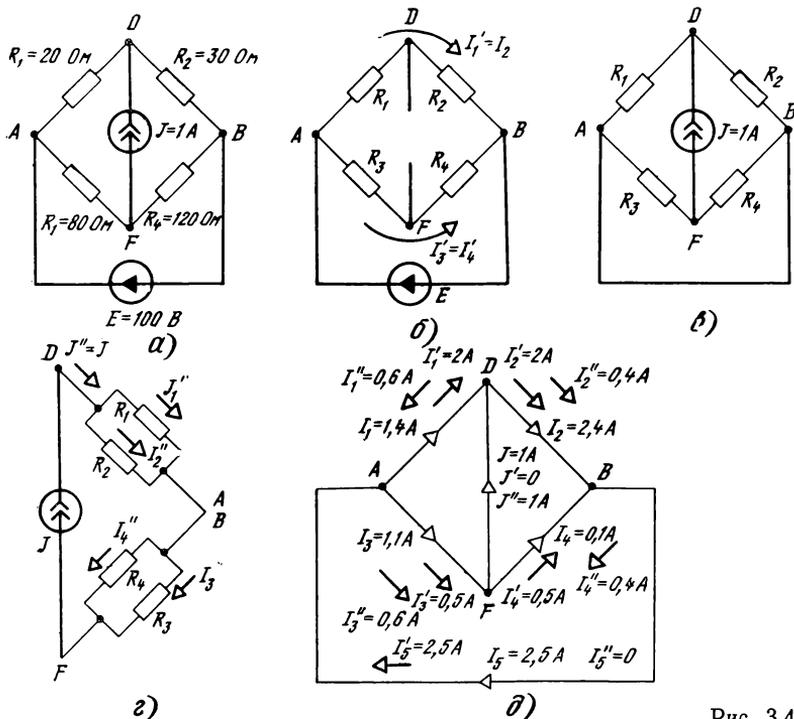


Рис. 3.46

+30)=0,4 А. Аналогично $I_3''=JR_4/(R_3+R_4)=1 \cdot 120/(80+120)=0,6$ А; $I_4''=JR_3/(R_3+R_4)=1 \cdot 80/200=0,4$ А.

Нанесем частные токи на граф (рис. 3.46, д). При этом следует обратить внимание на то, что ток I_1'' течет от точки D к точке A , поскольку это ток в сопротивлении R_1 , а ток I_2'' — от точки D к точке B . Аналогично ток I_3'' течет от точки A к точке F , а ток I_4'' — от точки B к точке F . Как видно из схемы графа, $I_1=I_1'-I_1''=2-0,6=1,4$ А; $I_2=I_2'+I_2''=2+0,4=2,4$ А; $I_3=I_3'+I_3''=0,5+0,6=1,1$ А; $I_4=I_4'-I_4''=0,5-0,4=0,1$ А. Ток I_5 в перемычке AB можно найти, используя первый закон Кирхгофа, например в узле B . Так как к узлу B притекают токи $I_2=2,4$ А и $I_4=0,1$ А, то и утекать от узла B может только такой же ток, т. е. $I_5=I_2+I_4=2,4+0,1=2,5$ А.

Проверим выполнение первого закона Кирхгофа во всех узлах. В узле A $I_5=I_1+I_3$, т. е. $2,5=1,4+1,1$; в узле D $I_1+I_2=I_5$, т. е. $1,4+1=2,4$; в узле B $I_2+I_4=I_5$, т. е. $2,4+0,1=2,5$; в узле F $I_3=I_4+I_5$, т. е. $1,1=0,1+1$.

Второй закон Кирхгофа можно проверять в контурах ADB (через источник E) и $A\bar{F}BA$ (через источник E), но нельзя в $ABFA$ и $DBFD$, поскольку эти контуры содержат источники тока. Составим уравнения по второму закону Кирхгофа: $E=R_1I_1+R_2I_2$, т. е. $100=20 \cdot 1,4+30 \cdot 2,4$ или $100=28+72$. Аналогично $E=R_3I_3+R_4I_4$, т. е. $100=80 \cdot 1,1+120 \cdot 0,1$ или $100=88+12$.

Для проверки баланса мощностей необходимо определить напряжение на зажимах источника тока, т. е. U_{DF} . Пусть потенциал точки F равен нулю ($\varphi_F=0$), тогда $\varphi_A=\varphi_F+R_3I_3=0+80 \cdot 1,1=88$ В; $\varphi_D=\varphi_A-R_1I_1=88-20 \cdot 1,4=60$ В. Следовательно, $U_{DF}=\varphi_D-\varphi_F=60$ В. Составим уравнение баланса мощностей: $EI_5+U_{DF}I_5=I_1^2R_1+I_2^2R_2+I_3^2R_3+I_4^2R_4$, т. е. $100 \cdot 2,5+60 \cdot 2,5=(1,4)^2 \cdot 20+(2,4)^2 \cdot 30+(1,1)^2 \cdot 80+(0,1)^2 \cdot 120$ или $250+60=39,2+172,8+96,8+1,2$, откуда $310 \text{ Вт}=310 \text{ Вт}$. Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.103. Решить задачу 3.102 преобразованием источника тока в эквивалентный источник напряжения.

Указание: разберите задачу 3.100.

3.104. Рассчитать токи в схеме, показанной на рис. 3.47, а, методом наложения.

Указание: разберите задачу 3.95.

ВХОДНЫЕ И ВЗАИМНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ (ПРОВОДИМОСТИ)

3.105. Рассчитать входные сопротивления цепи, показанной на рис. 3.47, а.

Указание: изучите сначала материал на с. 81, 82 в [1].

Решение. В общем случае в цепях можно различать столько входных сопротивлений, сколько ветвей имеет цепь.

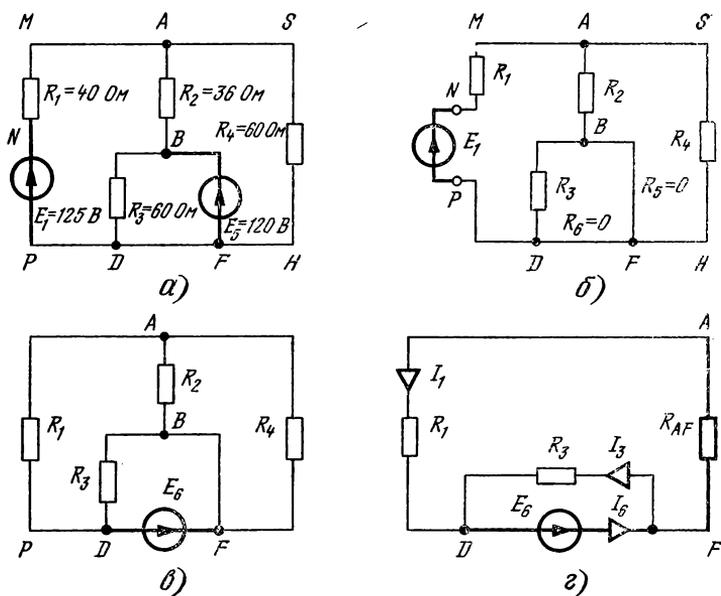


Рис. 3.47

Например, в цепи, показанной на рис. 3.47, а, шесть ветвей (AMP , AB , BD , $ASHF$, BF , DF). В схеме на рис. 3.47, б электрически точки P , D , F , H являются одной точкой, поскольку между ними нет ни источников, ни сопротивлений, на которых образуются падения напряжения, но между точками P и H имеются три участка цепи и в каждом участке протекают свои токи. Участок DF можно представить как шестую ветвь с сопротивлением $R_6=0$.

Поскольку данная цепь имеет шесть ветвей, в ней можно различать шесть различных входных сопротивлений: $R_{вх(1)}$, $R_{вх(2)}$, ..., $R_{вх(6)}$. Так как входные сопротивления зависят только от конфигурации цепи и значений элементов, входящих в цепь, для их расчета следует прежде всего исключить все независимые источники, имеющиеся в цепи (зависимые источники остаются на своих местах). Для этого ЭДС всех независимых источников напряжения и токи всех источников тока полагают равными нулю, а все внутренние сопротивления или проводимости оставляют неизменными. После этого в ветвь, относительно которой следует определять входное сопротивление, включают независимый источник напряжения и рассчитывают ток, протекающий в данной ветви, а затем берут отношение включенной в ветвь ЭДС к получившемуся в ветви току: $R_{вх(K)} = E_{(K)} / I_{(K)}$, где K — номер ветви, в которую включен источник.

В качестве примера рассчитаем входные сопротивления цепи (рис. 3.47, а) относительно первой и шестой ветвей $R_{вх1}$ и

$R_{вх6}$. Чтобы рассчитать $R_{вх1}$ необходимо исключить все источники, а в первую ветвь включить ЭДС E_1 , причем ЭДС этого источника может иметь любое значение, а вовсе не 125 В, как показано на рис. 3.47, а. После этого схема приобретает вид, показанный на рис. 3.47, б. Так как $R_5=0$, то $R_{вд}=R_{вф}=0$, а в этом случае R_2 и R_4 соединены параллельно, т. е. $R_{AD}=R_2R_4/(R_2+R_4)=36 \cdot 60/(36+60)=22,5$ Ом. Входное сопротивление цепи относительно первой ветви (т. е. между точками N и P) есть эквивалентное сопротивлением R_1 и R_{AD} , соединенным последовательно: $R_{вх1}=R_1+R_{AD}=40+22,5=62,5$ Ом.

Поскольку данная схема не имеет зависимых источников (см. § 3.36 и 3.37 в [1] и задачи 3.163 и 3.166 в данной книге), входное сопротивление в различных ветвях можно определить непосредственно по виду схемы, но в общем случае делать так нельзя, поэтому и приходится сначала рассчитывать ток I_1 , а затем определять $R_{вх1}=E_1/I_1$.

Рассчитаем $R_{вх6}$ (рис. 3.47, в). Преобразуем схему. Сопротивления R_2 и R_4 соединены параллельно, $R_{AF}=R_2R_4/(R_2+R_4)=30 \cdot 60/96=22,5$ Ом (рис. 3.47, г). Входное сопротивление относительно шестой ветви определяется из выражения $R_{вх6}=R_3(R_1+R_{AF})/(R_3+R_1+R_{AF})=60(40+22,5)/(60+40+22,5)=30,6$ Ом, откуда $G_{вх6}=1/R_{вх6}=1/30,6=3,27 \cdot 10^{-2}$ См.

3.106. Рассчитать в схеме рис. 3.47, а входные сопротивления и проводимости относительно второй и третьей ветвей.

Указание: разберите задачу 3.105.

Пояснения. При определении $R_{вх2}$ схема имеет вид, показанный на рис. 3.48, а. Так как сопротивление R_3 закорочено ветвью BF , напряжение на зажимах R_1 и R_4 оказывается одним и тем же, следовательно, R_1 и R_4 соединены параллельно, а R_2 подключено к ним последовательно (рис. 3.48, б), откуда $R_{вх2}=R_2+R_1R_4/(R_1+R_4)$.

Для определения $R_{вх3}$ схема приобретает вид, показанный на рис. 3.48, в. Сопротивления R_1 , R_2 и R_4 соединены параллельно, а вся группа — последовательно с R_3 , что в более наглядном начертании показано на рис. 3.48, г. Отсюда $R_{вх3}=R_3+$

$$+ \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_4}.$$

3.107. Рассчитать в схеме рис. 3.47, а входные сопротивления и проводимости относительно четвертой и пятой ветвей.

Указание: разберите сначала задачу 3.105 и пояснения к задаче 3.106.

3.108. Рассчитать взаимные сопротивления и проводимости между первой и четвертой R_{1-4} , G_{1-4} и между первой и шестой (R_{1-6} и G_{1-6}) ветвями схемы, показанной на рис. 3.47, а.

Указание: изучите сначала § 3.24 и 3.26 в [1].

Решение. Чтобы рассчитать взаимные сопротивления (проводимости) между двумя ветвями разветвленной цепи, на-

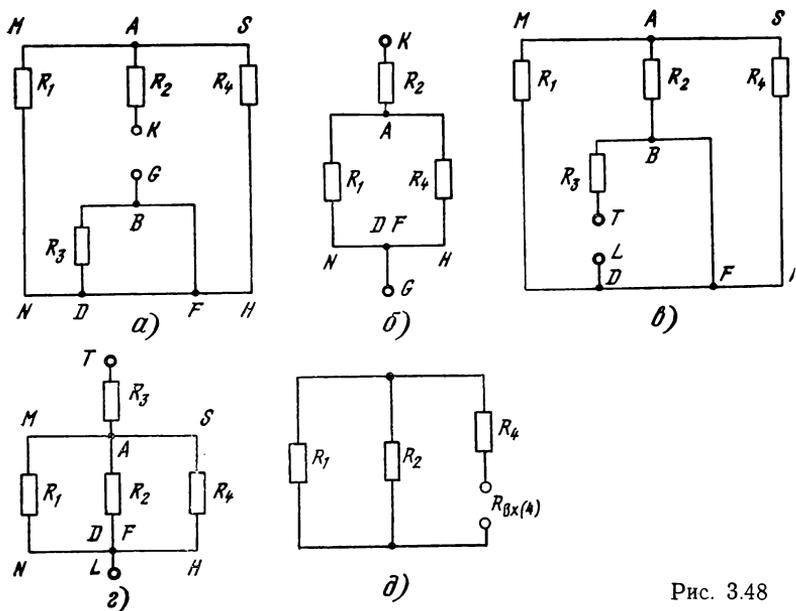


Рис. 3.48

пример между ветвями k и q , необходимо исключить все независимые источники, в одну ветвь (например, в k -ю) включить источник напряжения с ЭДС E , рассчитать ток в другой ветви (в нашем случае q -й) и взять их отношение $R_{k-q} = E_k/I_q$ или E_q/I_k , что совершенно одно и то же, причем по принципу взаимности $R_{k-q} = R_{q-k}$; $G_{k-q} = I_q/E_k$ или I_k/E_q . Применим все приведенные правила для расчета R_{1-4} в схеме рис. 3.47, а. Чтобы рассчитать R_{1-4} , необходимо определить ток I_4 на рис. 3.47, б и получить отношение E_1/I_4 . Как было показано в задаче 3.105, входное сопротивление цепи относительно первой ветви есть отношение E_1/I_1 . Напомним, что «сопротивление первой ветви» и «входное сопротивление относительно первой ветви» — совершенно разные понятия. Первый термин означает, что следует рассчитать сопротивление первой ветви, если все остальные ветви отключены и на сопротивление этой ветви никак не влияют. Второй термин означает, что определяется отношение ЭДС в первой ветви к току в этой же ветви при наличии всех остальных ветвей цепи. Так как $R_{вх1} = R_1 + R_2 R_4 / (R_2 + R_4) = 62,5$ Ом, то $I_1 = E_1 / R_{вх1} = E_1 / 62,5$.

Ток I_1 разветвляется на I_2 и I_4 , причем $I_4 = I_1 R_2 / (R_2 + R_4) = E_1 \cdot 36 / [62,5(36 + 60)] = 6 \cdot 10^{-3} E_1$, откуда $R_{1-4} = E_1 / I_4 = E_1 / 6 \times 10^{-3} E_1 = 166,6$ Ом, $G_{1-4} = 1 / R_{1-4} = 6 \cdot 10^{-3}$ См. Убедимся, что если источник напряжения включить в четвертую ветвь и рассчитать ток, получающийся в первой ветви, то отношение E_4 / I_1 будет таким же, как и E_1 / I_4 . Из задачи 3.107 видно, что входное сопротивление цепи относительно четвертой ветви $R_{вх4}$ определяется

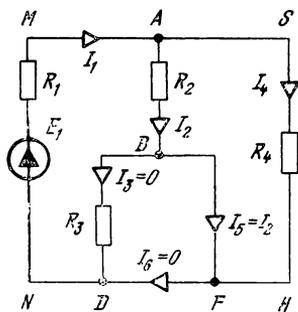


Рис. 3.49

Так как $\varphi_B = \varphi_F$, то $R_{AF} = R_2 R_4 / (R_2 + R_4) = 36 \cdot 60 / 96 = 22,5$ Ом; $I_1 = E_1 / (R_1 + R_{AF}) = E_1 / 62,5$ (см. расчет R_{1-4}); $I_4 = 6 \cdot 10^{-3} E_1$. Аналогично $I_2 = I_1 R_4 / (R_2 + R_4) = E_1 \cdot 60 / (62,5 + 96) = 10 \cdot 10^{-3} E_1$, тогда $I_6 = I_5 + I_4$. Так как $I_5 = I_2$, то $I_6 = I_2 + I_4 = (6 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 10^{-3}) E_1 = 16 \cdot 10^{-3} E_1$, откуда $R_{1-6} = E_1 / I_6 = E_1 / (16 \cdot 10^{-3} E_1) = 62,5$ Ом.

Это же значение можно получить проще, используя результат из задачи 3.105. Удобнее источник поместить в шестую ветвь и найти ток в первой ветви, что нагляднее всего видно из схемы рис. 3.47, г. В этом случае $I_6 = E_6 / R_{\text{вх}6} = E_6 / 30,6$, тогда $I_1 = I_6 R_3 / (R_3 + R_1 + R_{AF}) = E_6 \cdot 60 / [30,6(60 + 40 + 22,5)] = 16 \cdot 10^{-3} E_6$, откуда $R_{6-1} = E_6 / I_1 = E_6 / (16 \cdot 10^{-3} E_6) = 62,5$ Ом или $G_{6-1} = 1 / R_{6-1} = 1 / 62,5 = 16 \cdot 10^{-3}$ См. Таким образом, $R_{6-1} = R_{1-6}$, а $G_{6-1} = G_{1-6}$. Принцип взаимности выполняется.

3.109. Рассчитать взаимные сопротивления (проводимости) в схеме рис. 3.47, а между первой и второй, первой и третьей ветвями. Проверить выполнение принципа взаимности.

Указание: разберите задачи 3.105 и 3.108.

3.110. Рассчитать взаимные сопротивления (проводимости) в схеме рис. 3.47, а между первой и пятой, второй и третьей ветвями. Проверьте выполнение принципа взаимности.

Указание: разберите сначала задачи 3.105 и 3.108.

3.111. Рассчитать взаимные сопротивления (проводимости) в схеме рис. 3.47, а между второй и четвертой, второй и пятой ветвями.

Указание: разберите сначала задачи 3.105 и 3.108.

3.112. Рассчитать взаимные сопротивления (проводимости) в схеме рис. 3.47, а между второй и шестой, третьей и пятой ветвями.

Указание: разберите сначала задачи 3.105 и 3.108.

из схемы, показанной на рис. 3.48, д: $R_{\text{вх}4} = R_4 + R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 60 + 40 \times 36 / 76 = 60 + 18,95 = 78,95$, т. е. $I_4 = E_4 / 78,95$, откуда $I_1 = I_4 R_2 / (R_1 + R_2) = E_4 \cdot 36 / (78,95 \cdot 76) = 6 \cdot 10^{-3} E_4$. Тогда $R_{4-1} = E_4 / I_1 = E_4 / (6 \cdot 10^{-3} E_4) = 166,6$ Ом и, следовательно, $R_{4-1} = R_{1-4}$.

Определим R_{1-6} . Расчет следует производить по схеме (рис. 3.49). Чтобы найти ток I_6 , необходимо определить I_5 и I_4 , а затем по первому закону Кирхгофа для узла F найти I_6 .

МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА (МЕТОД ХХ—КЗ)

3.113. В схеме, показанной на рис. 3.50, *а*, рассчитать токи в первой и шестой ветвях методом эквивалентного генератора (методом ХХ—КЗ).

Указание: изучите сначала § 3.23 в [1].

Решение. Чтобы рассчитать ток в одной ветви (например, в первой), необходимо разомкнуть эту ветвь, любым методом определить разность потенциалов между точками разрыва U_x , положить ЭДС всех источников напряжения и токи

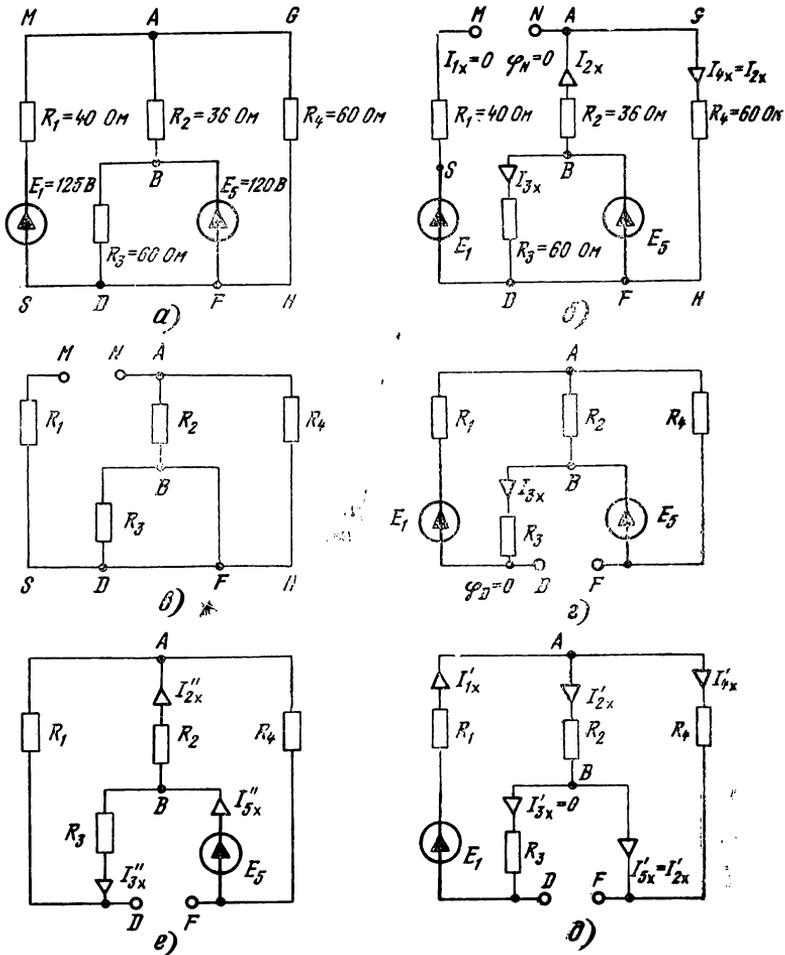


Рис. 3.50

всех источников тока равными нулю, рассчитать сопротивление между точками разрыва R_k и получить отношение U_x/R_k . Для определения тока I_1 по приведенной методике разомкнем первую ветвь и рассчитаем токи во всех ветвях. Чтобы отличать токи, протекающие в ветвях цепи при одной разомкнутой ветви, от токов в этих же ветвях в непреобразованной схеме, токи в первом случае будем обозначать с индексом «х» (холостой). После размыкания первой ветви схема приобретает вид, показанный на рис. 3.50, б, где напряжение E_5 приложено к точкам B и F . К этим же точкам подключены сопротивления R_3 и R_2+R_4 . Рассчитаем токи в получившейся схеме: $I_{3x} = E_5/R_3 = 120/60 = 2$ А; $I_{2x} = I_{4x} = E_5/(R_2+R_4) = 120/(36+60) = 1,25$ А. Пусть потенциал точки N равен нулю ($\varphi_N = 0$). Пройти от точки N к точке M можно тремя различными путями: $AGHFDMS$, $NABFDSM$ или $NABDSM$. Пройдем по каждому из этих путей и убедимся, что φ_M во всех случаях получится одинаковым. По первому пути $\varphi_M = \varphi_N - R_4 I_{4x} = 0 - 60 \cdot 1,25 = -75$ В; $\varphi_S = \varphi_N + E_1 = -75 + 125 = 50$ В. Так как $I_{1x} = 0$, то $\varphi_M = \varphi_S = 50$ В. По второму пути $\varphi_B = \varphi_N + R_2 I_{2x} = 0 + 36 \cdot 1,25 = 45$ В; $\varphi_F = \varphi_B - E_5 = 45 - 120 = -75$ В, а далее все, как в первом варианте. По третьему пути $\varphi_B = 45$ В, $\varphi_D = \varphi_B - R_3 I_{3x} = 45 - 60 \cdot 2 = 45 - 120 = -75$ В; далее все, как в первых двух вариантах. Таким образом, при $\varphi_N = 0$ $\varphi_M = 50$ В, следовательно, $U_{1x} = \varphi_M - \varphi_N = 50 - 0 = 50$ В.

Положим ЭДС всех источников равными нулю и рассчитаем сопротивление между точками M и N . Как видно из схемы рис. 3.50, в, $R_{1x} = R_1 + R_2 R_4 / (R_2 + R_4) = 40 + 36 \cdot 60 / 96 = 62,5$ Ом, откуда $I_{1x} = U_{1x} / R_{1x} = 50 / 62,5 = 0,8$ А.

Рассчитаем ток I_6 , для этого разомкнем шестую ветвь, схема при этом приобретает вид, показанный на рис. 3.50, г. Пусть потенциал точки D равен нулю ($\varphi_D = 0$). Чтобы рассчитать потенциал точки F , достаточно знать ток в сопротивлении R_3 , который можно рассчитать различными способами, например методом наложения. Составим частные схемы (3.50, д и е). Ток $I_{3x}' = I_{1x}' = E_1 / [(R_1 + R_3) + R_2 R_4 / (R_2 + R_4)] = 125 / [(40 + 60) + (36 \cdot 60 / 96)] = 125 / (100 + 22,5) = 1,02$ А. Как видно из схемы, показанной на рис. 3.50, е,

$$I_{5x}'' = E_5 / \left[R_4 + \frac{R_2 (R_1 + R_3)}{(R_2 + R_1 + R_3)} \right] = 120 / 60 + \frac{36 (40 + 60)}{(36 + 40 + 60)} = \\ = 120 / (60 + 26,47) = 1,388 \text{ А};$$

$$I_{3x}'' = I_{5x}'' [R_2 / (R_2 + R_1 + R_3)] = 1,388 \cdot 36 / 136 = 0,3673 \text{ А}.$$

В схеме рис. 3.50, г ток $I_{3x} = I_{3x}' + I_{3x}'' = 1,02 + 0,3673 = 1,387$ А. Определим потенциал точки B : $\varphi_B = \varphi_D + R_3 I_{3x} = 0 + 60 \cdot 1,387 = 83,24$ В; $\varphi_F = \varphi_B - E_5 = 83,24 - 120 = -36,76$ А, т. е. $U_{6x} = \varphi_D - \varphi_F = 0 - (-36,76) = 36,76$ В. Чтобы найти R_{6x} , необходи-

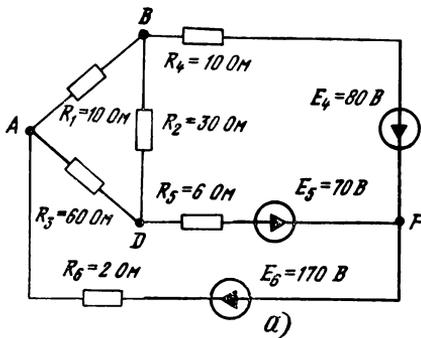
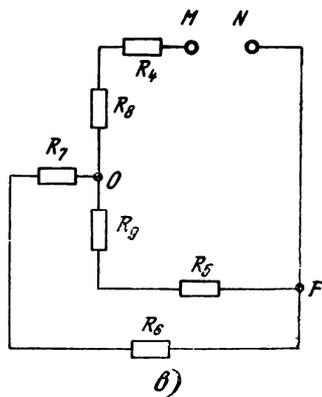
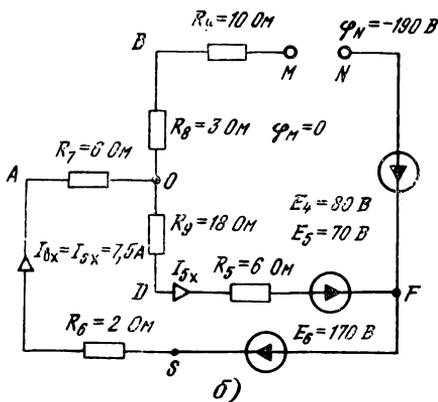


Рис. 3.51



мо в схеме 3.50, e положить $E_5=0$. В этом случае схема приобретает вид рис. 3.47, z , из которого видно, что $R_{AF}=R_2R_4/(R_2+R_4)=36 \cdot 60/96=22,5$ Ом, а $R_{6к}=[R_3(R_1+R_{AF})]/(R_3+R_1+R_{AF})=60(40+22,5)/(60+40+22,5)=60 \cdot 62,5/122,5=30,6$ Ом, откуда $I_6=U_{вх}/R_{6к}=36,76/30,6=1,2$ А. Так как в схеме рис. 3.50, e потенциал точки D выше потенциала точки F , то в исходной схеме (рис. 3.47, a) ток в шестой ветви течет от точки D к точке F .

3.114. В схеме, показанной на рис. 3.50, a , рассчитать токи I_2 и I_3 методом эквивалентного генератора.

Указание: разберите задачу 3.113.

3.115. В схеме, показанной на рис. 3.50, a , рассчитать токи I_4 и I_5 методом эквивалентного генератора.

Указание: разберите задачу 3.113.

3.116. В схеме, показанной на рис. 3.51, a , рассчитать ток I_4 методом эквивалентного генератора.

Указание: разберите задачу 3.113.

Решение. Преобразуем треугольник сопротивлений ABD в эквивалентную звезду и разомкнем четвертую ветвь. Схема приобретает вид, показанный на рис. 3.51, b . Из-за разрыва

четвертой ветви ток в участках OM и NF не протекает. Контур $AODFSA$ представляет собой неразветвленную цепь, во всех элементах которой течет ток $I_{5x}=I_{6к}=(E_5+E_6)/(R_5+R_9+R_7+R_6)$. Так как $R_7=R_1R_3/(R_1+R_2+R_3)=6$ Ом, $R_8=R_1R_2/(R_1+R_2+R_3)=3$ Ом, $R_9=R_2R_3/(R_1+R_2+R_3)=18$ Ом, то $I_{5x}=(70+170)/(6+18+6+2)=240/32=7,5$ А. Положим потенциал точки M равным нулю ($\varphi_M=0$). Поскольку по сопротивлениям R_4 и R_3 ток не протекает, потенциал точки O равен потенциалу точки M ($\varphi_O=\varphi_M=0$), $\varphi_F=\varphi_O-R_9I_{5x}-R_5I_{5x}+E_5=0-24\cdot 7,5+70=-110$ В; $\varphi_N=\varphi_F-E_4=-110-80=-190$ В. Напряжение холостого хода $U_x=\varphi_M-\varphi_N=0-(-190)=190$ В.

Для расчета сопротивления короткого замыкания R_k в схеме рис. 3.51, б исключим источники. Схема приобретет вид рис. 3.51, в, откуда следует, что $R_k=R_{MN}=R_4+R_8+(R_5+R_9)(R_6+R_7)/(R_5+R_6+R_7+R_9)=10+3+(6+18)(2+6)/(6+18+2+6)=13+6=19$ Ом, тогда $I_4=U_{x4}/R_{k4}=190/19=10$ А.

3.117. В схеме, показанной на рис. 3.51, а, рассчитать токи I_5 и I_6 методом эквивалентного генератора.

Указание: разберите задачу 3.116.

МЕТОД ДВУХ УЗЛОВ

3.118. В схеме, показанной на рис. 3.52, а, рассчитать токи во всех ветвях методом двух узлов.

Указание: изучите сначала § 3.6 и 3.22 в [1].

Решение. Для расчета токов в ветвях цепи методом двух узлов необходимо прежде всего рассчитать напряжение между узлами A и B . При этом следует задаться полярностью предполагаемого результирующего напряжения U_{AB} . Предположим, например, что в напряжении, которое получается после расчета, потенциал точки A окажется выше потенциала точки B . (Нестрого говоря, «плюс» результирующего напря-

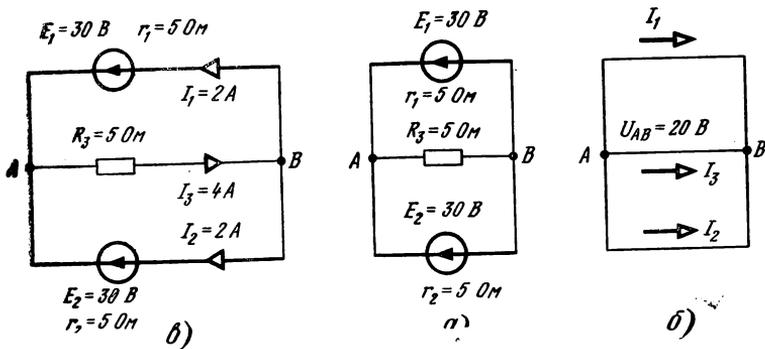


Рис. 3.52

жения будет в точке A). Напряжение между узлами $U_{AB} = \Sigma EG / \Sigma G$. Применительно к схеме рис. 3.52, a данное выражение принимает вид

$$U_{AB} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{E_1 (1/R_1) + E_2 (1/R_2)}{(1/R_1) + (1/R_2) + (1/R_3)}$$

(в числителе должно быть еще слагаемое $E_3 G_3$, но так как ЭДС в третьей ветви равна нулю, то этот член обычно не пишется). Обратим внимание на знаки у членов в числителе. Поскольку стрелка источника E_1 направлена к точке A , т. е. к точке с «плюсом» предполагаемого результирующего напряжения, ЭДС E_1 записывается со знаком «плюс». То же относится и к ЭДС E_2 . Так как сопротивления в цепи резистивные, то все слагаемые проводимостей имеют знак «плюс». Тогда

$$U_{AB} = \frac{30 (1/5) + 30 (1/5)}{(1/5) + (1/5) + (1/5)} = 12/0,6 = 20 \text{ В.}$$

Напряжение U_{AB} оказалось положительным. Это означает, что его действительная полярность совпадает с предполагаемой, т. е. «плюс» узлового напряжения будет в точке A . Далее определяются токи во всех ветвях. В каждой ветви сначала задаются предполагаемым током, направленным от точки с большим потенциалом к точке с меньшим, в данном случае от точки A к точке B . Предполагаемые токи следует показывать стрелками, нанесенными около проводов (рис. 3.52, b). Ток в ветви $I = (U_{AB} \pm E) / R$, где E — ЭДС, имеющаяся в ветви, причем если направление этой ЭДС совпадает с направлением предполагаемого тока, то со знаком «плюс», а если противоположно, то со знаком «минус».

В первой ветви направление предполагаемого тока противоположно направлению ЭДС, находящейся в этой ветви, поэтому $I_1 = (U_{AB} - E_1) / R_1 = (20 - 30) / 5 = -2$ А. Следовательно, действительный ток, текущий в первой ветви, направлен противоположно предполагаемому. Действительные токи показывают на проводах незаштрихованными стрелками. Аналогично $I_2 = (U_{AB} - E_2) / R_2 = (20 - 30) / 5 = -2$ А. В третьей ветви источника нет, поэтому $I_3 = U_{AB} / R_3 = 20 / 5 = 4$ А (рис. 3.52, $в$).

Выполним проверки (все проверки производятся для действительных токов, а не предполагаемых). По первому закону Кирхгофа $I_3 = I_1 + I_2$, т. е. $4 = 2 + 2$. По второму закону $E_1 = r_1 I_1 + R_3 I_3$, т. е. $30 = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 4$; $E_2 = r_2 I_2 + R_3 I_3$, т. е. $30 = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 4$; $-E_1 + E_2 = -r_1 I_1 + r_2 I_2$, т. е. $-30 + 30 = -5 \cdot 2 + 5 \cdot 2$. Баланс мощностей: $E_1 I_1 + E_2 I_2 = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 + I_3^2 R_3$, т. е. $30 \cdot 2 + 30 \cdot 2 = 2^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 5 + 4^2 \cdot 5$ или $120 = 20 + 20 + 80$. Все проверки выполняются, значит, задача решена правильно.

3.119. Решить задачу 3.118, если полярность источника E_2 изменена на противоположную.

Указание: разберите сначала задачу 3.118.

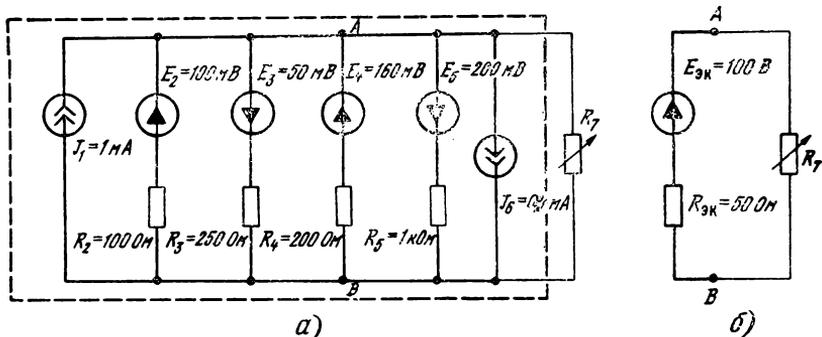


Рис. 3.53

Решение. Напряжение между узлами $U_{AB} = E_1/R_1 - E_2/R_2 / (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3) = (30/5 - 30/5) / 0,5 = 0$; $I_1 = (U_{AB} + E_1) / R_1 = 6$ А; $I_2 = (U_{AB} + E_2) / R_2 = 6$ А; $I_3 = U_{AB} / R_3 = 0$.

3.120. В схеме, показанной на рис. 3.53, а, определить сопротивление R_7 , в котором выделится наибольшая возможная мощность. Рассчитать значение этой мощности.

Указание: разберите задачу 3.118.

Решение. Заменяем шесть ветвей, содержащих источники, одной эквивалентной с ЭДС $E_{Эк}$ и внутренним сопротивлением $R_{Эк}$ (рис. 3.53, б). Положим, что «плюс» результирующего напряжения окажется на узле А. В этом случае

$$U_{AB} = \frac{\sum EG + \sum J}{\sum G} = \frac{J_1 + (E_2/R_2) - (E_3/R_3) + (E_4/R_4) - (E_5/R_5) - J_5}{(1/R_2) + (1/R_3) + (1/R_4) + (1/R_5)} =$$

$$= \frac{1 + (100/100) - (50/250) + (160/200) - (200/1000) - 0,4}{(1/100) + (1/250) + (1/200) + (1/1000)} =$$

$$= \frac{2 + 1 - 0,2 + 0,8 - 0,2 - 0,4}{0,010 + 0,004 + 0,005 + 0,001} = \frac{2}{0,02} = 100 \text{ В};$$

$1/R_{Эк} = (1/R_2) + (1/R_3) + (1/R_4) + (1/R_5) = 0,02$ См, откуда

$$R_{Эк} = 1/0,02 = 50 \text{ Ом.}$$

Как известно, максимальная мощность выделяется в нагрузочном сопротивлении неразветвленной цепи, если внешнее сопротивление цепи равно внутреннему сопротивлению источника. Следовательно, для получения наибольшей мощности сопротивление R_7 должно равняться $R_{Эк}$, т. е. 50 Ом. В этом случае $P_{R, \max} = E^2 / 4R_{Эк} = 100^2 / (4 \cdot 50) = 50$ Вт.

3.121. Решить задачу 3.120, если полярность источника E_2 в схеме рис. 3.53, а изменена на противоположную.

Указание: разберите сначала задачу 3.120.

3.122. Рассчитать токи во всех ветвях, напряжения и мощности на всех элементах цепи, схема которой показана на рис. 3.54, а.

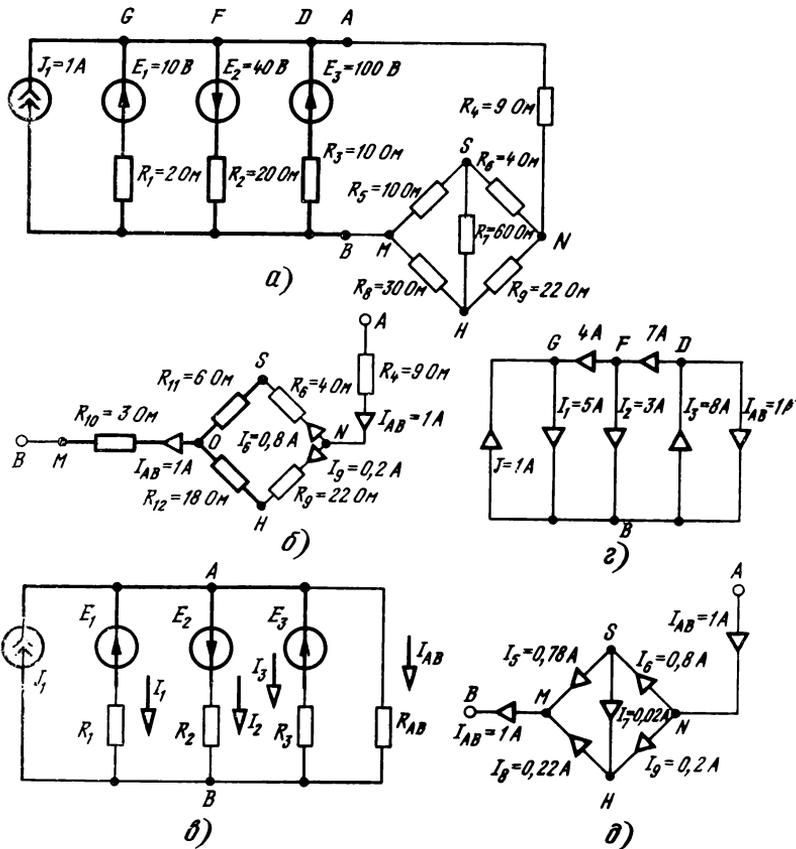


Рис. 3.54

Указание: разберите задачи 3.76 и 3.118.

Решение. Прежде всего заменим все нагрузочные сопротивления (т. е. сопротивления, находящиеся на участке AB) одним эквивалентным. Для этого преобразуем треугольник сопротивлений $MSHM$ в звезду. Тогда участок AB примет вид рис. 3.54, б, причем $R_{10} = R_5 R_8 / (R_5 + R_7 + R_8) = 10 \cdot 30 / (10 + 60 + 30) = 3 \text{ Ом}$; $R_{11} = R_5 R_7 / (R_5 + R_7 + R_8) = 6 \text{ Ом}$; $R_{12} = R_7 R_8 / (R_5 + R_7 + R_8) = 18 \text{ Ом}$.

Сопротивление участка AB $R_{AB} = R_{10} + (R_{11} + R_6) (R_{12} + R_9) / (R_{11} + R_6 + R_{12} + R_9) + R_4 = 3 + (10 \cdot 40 / 50) + 9 = 20 \text{ Ом}$, и схема приобретает вид, приведенный на рис. 3.54, в. Определим напряжение между точками A и B (примем, что $\varphi_A > \varphi_B$, т. е. «плюс» находится в точке A). Тогда

$$U_{AB} = \frac{J_1 + (E_1/R_1) - (E_2/R_2) + (E_3/R_3)}{(1/R_1) + (1/R_2) + (1/R_3) + (1/R_{AB})} =$$

$$= \frac{1 + (10/2) - (40/20) + (100/10)}{(1/2) + (1/20) + (1/10) + (1/20)} = \frac{1 + 5 - 2 + 10}{0,5 + 0,05 + 0,1 + 0,05} =$$

$$= \frac{14}{0,7} = 20 \text{ В.}$$

Напряжение U_{AB} оказалось положительным; это означает, что потенциал точки A действительно выше потенциала точки B . В этом случае предполагаемые токи следует направлять сверху вниз (по рис. 3.54, σ). Рассчитаем токи: $I_1 = (U_{AB} - E_1)/R_1 = (20 - 10)/2 = 5 \text{ А}$; $I_2 = (U_{AB} + E_2)/R_2 = (20 + 40)/20 = 3 \text{ А}$; $I_3 = (U_{AB} - E_3)/R_3 = (20 - 100)/10 = -8 \text{ А}$; $I_{AB} = U_{AB}/R_{AB} = 20/20 = 1 \text{ А}$.

Таким образом, действительные направления токов I_1 , I_2 и I_{AB} совпадают с предполагаемыми, а тока I_3 — противоположно предполагаемому. Нанесем эти токи на граф (рис. 3.54, ε).

Рассчитаем токи в перемычках. К узлу G по ветви FG , очевидно, должен притекать ток 4 А, к узлу F по ветви DF — ток 7 А. При этом первый закон Кирхгофа оказывается выполненным во всех узлах, в том числе и в узле D . (Заметим, что если какой-либо ток рассчитан неверно, то первый закон Кирхгофа в узле не будет выполняться, эту проверку при расчете подобных задач обязательно следует производить).

Определим теперь токи в ветвях мостовой части цепи. Как видно из схемы рис. 3.54, δ , ток $I_{AB} = 1 \text{ А}$, текущий через сопротивление R_4 , в узле N разветвляется на токи I_6 и I_9 , причем $I_6 = I_{AB}[(R_9 + R_{12})/(R_6 + R_{11} + R_9 + R_{12})] = 1[(22 + 18)/(4 + 6 + 22 + 18)] = 40/50 = 0,8 \text{ А}$; $I_9 = I_{AB}[(R_6 + R_{11})/(R_6 + R_{11} + R_9 + R_{12})] = 1 \times (4 + 6)/50 = 0,2 \text{ А}$. (Еще раз обращаем внимание, что индексы токов должны соответствовать индексам сопротивлений, не подвергавшихся преобразованиям. Например, ток I_6 не следует обозначать через I_{11} , поскольку сопротивления R_{11} в исходной схеме нет, сопротивление с таким индексом получилось в результате произведенных преобразований. Аналогично ток I_9 не следует называть током I_{12} и т. д.)

Вернемся к исходной схеме (рис. 3.54, α). В ней необходимо определить токи I_5 , I_7 , I_8 . Напомним (см. задачу 3.76), что если треугольник сопротивлений преобразовался в схему эквивалентной звезды, то для определения токов в ветвях треугольника следует в схеме звезды рассчитать напряжения между точками, к которым в исходной схеме подключены сопротивления треугольника. Примем потенциал точки M в схеме рис. 3.54, δ за нулевой ($\varphi_M = 0$), в этом случае $\varphi_O = \varphi_M + R_{10} \times I_{AB} = 0 + 3 \cdot 1 = 3 \text{ В}$; $\varphi_S = \varphi_O + R_{11} I_6 = 3 + 6 \cdot 0,8 = 7,8 \text{ В}$; $\varphi_H = \varphi_O + R_{12} I_9 = 3 + 18 \cdot 0,2 = 6,6 \text{ В}$, т. е. $U_{SM} = \varphi_S - \varphi_M = 7,8 - 0 = 7,8 \text{ В}$; $U_{SH} = \varphi_S - \varphi_H = 7,8 - 6,6 = 1,2 \text{ В}$; $U_{HM} = \varphi_H - \varphi_M = 6,6 - 0 = 6,6 \text{ В}$, откуда $I_7 = U_{SH}/R_7 = 1,2/60 = 0,02 \text{ А}$; $I_5 = U_{SM}/R_5 = 7,8/10 = 0,78 \text{ А}$; $I_8 = U_{HM}/R_8 = 6,6/30 = 0,22 \text{ А}$. Нанесем токи в сопротивлениях нагрузки на граф (рис. 3.54, δ).

Легко видеть, что первый закон Кирхгофа выполняется во всех узлах. По второму закону Кирхгофа можно писать уравнения для любых контуров, в которые не входят источники тока (рекомендуем учащимся самостоятельно проверить выполнение этого закона для нескольких контуров). Проверим баланс мощностей: $I_1 U_{AB} - E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 + I_7^2 R_7 + I_8^2 R_8 + I_9^2 R_9$ (знак «минус» у члена $E_1 I_1$ потому, что направление действительного тока в первой ветви противоположно направлению ЭДС E_1). Подставим числовые значения: $1 \cdot 20 - 10 \cdot 5 + 40 \cdot 3 + 100 \cdot 8 = 5^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 20 + 8^2 \cdot 10 + 1^2 \cdot 9 + 0,78^2 \cdot 10 + 0,8^2 \cdot 4 + 0,02^2 \cdot 60 + 0,22^2 \cdot 30 + 0,2^2 \cdot 22$ или $22 - 50 + 120 + 800 = 50 + 180 + 640 + 9 + 6,084 + 2,56 + 0,024 + 1,452 + 0,88$, т. е. $890 \text{ Вт} = 890 \text{ Вт}$.

Проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.123. Решить задачу 3.122, если ЭДС $E_3 = 110 \text{ В}$ и включена с противоположной (по сравнению с рис. 3.54, а) полярностью. Все остальные элементы остаются неизменными.

Указание: разберите сначала задачу 3.122.

3.124. В каких пределах будет изменяться напряжение U_{AB} в схеме (рис. 3.54, в), если сопротивление R_{AB} изменять от нуля до бесконечности?

Указание: разберите сначала задачу 3.122.

3.125. Варианты для индивидуальных заданий. Рассчитать токи во всех ветвях, напряжения и мощности на всех элементах, произвести все проверки для цепи, показанной на схеме 3.54, а, в соответствии с исходными данными, приведенными в табл. 3.3 и 3.4. Каждый учащийся имеет свой шифр, состоящий

Таблица 3.3

Первый знак шифра	Исходные данные					
	$E_1, \text{ В}$	$R_1, \text{ Ом}$	$E_2, \text{ В}$	$R_2, \text{ Ом}$	$E_3, \text{ В}$	$R_3, \text{ Ом}$
1	20	5	100	25	100	10
2	15	4	90	30	110	11
3	20	4	80	20	120	12
4	25	5	70	14	130	13
5	30	10	60	25	140	14
6	36	12	50	20	150	15
7	40	10	40	20	120	12
8	45	15	30	10	110	11
9	50	10	20	4	100	10
0	55	11	10	5	90	9

Второй знак шифра	Исходные данные					
	$R_5, \text{ Ом}$	$R_6, \text{ Ом}$	$R_7, \text{ Ом}$	$R_8, \text{ Ом}$	$R_9, \text{ Ом}$	$J_1, \text{ А}$
1	10	4	60	30	20	1
2	60	8	30	10	20	2
3	30	4	10	60	10	3
4	10	6	30	60	10	4
5	30	8	60	10	20	5
6	20	8	50	30	10	5
7	50	6	30	20	20	4
8	30	12	20	50	10	3
9	20	12	30	50	20	2
0	30	10	50	20	10	1

из двух цифр, в соответствии с которыми берутся исходные данные. Сопротивление R_4 учащиеся должны выбрать самостоятельно, так чтобы напряжение U_{AB} оказалось целым числом.

ОБЩИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

3.126. Методом использования законов Кирхгофа рассчитать токи в цепи, показанной на рис. 3.55, а. Выполнить все проверки.

Указание: изучите сначала § 3.14—3.16 в [1].

Решение. Чтобы рассчитать токи в ветвях цепи с помощью законов Кирхгофа, необходимо прежде всего определить число неизвестных токов, которое определяется числом ветвей, не имеющих источников тока (в ветвях с источниками ток уже известен, он равен току, задаваемому источником).

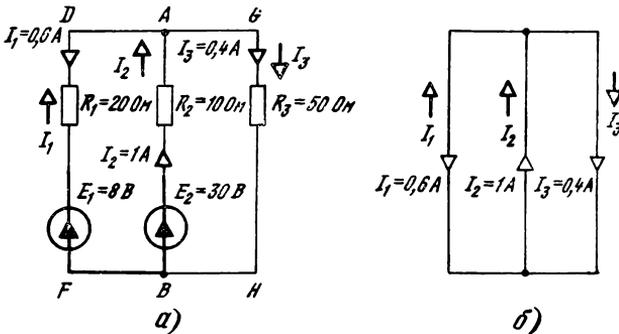


Рис. 3.55

В данной схеме три ветви ($ADFB$, AB и $AGHB$). Следовательно, в данной цепи имеются три различных тока. Обозначим эти токи в соответствии с номерами ветвей, т. е. I_1 , I_2 , I_3 . Далее следует задаться предполагаемыми (точнее, положительными) направлениями токов в каждой ветви. Предполагаемые токи на схемах следует наносить около проводов (точнее, линий, обозначающих соединительные провода) незаштрихованными стрелками. Направления предполагаемых токов можно выбирать произвольно. Например, в первой и второй ветвях — снизу вверх, а в третьей — сверху вниз. Далее следует составить по первому закону Кирхгофа $n-1$ уравнений, где n — число узлов (точнее, неустраиваемых узлов) в схеме. Так как в данной схеме два узла (A и B), по первому закону Кирхгофа можно составить одно независимое уравнение для любого из этих узлов. Уравнение для узла A имеет вид $I_1 + I_2 = I_3$. Остальные необходимые уравнения записываются по второму закону Кирхгофа. Если в схеме нет источников тока, то по второму закону приходится составлять столько уравнений, сколько простых контуров (т. е. контуров с кратчайшим периметром) содержит цепь. В данном случае оставшиеся два уравнения можно записать для любых двух контуров, например для $DABFD$ и $AGHBA$.

Чтобы составить уравнения по второму закону Кирхгофа, необходимо задаться направлением обхода по контуру — либо по часовой стрелке, либо против (пока у учащихся недостаточны навыки, лучше выбирать обход по часовой стрелке). При этом со знаком «плюс» записываются все ЭДС, направления которых совпадают с направлением обхода, и все падения напряжений, которые образуются токами, направления которых также совпадают с направлением обхода. Получилась система из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3, \\ E_1 - E_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2, \\ E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3. \end{cases}$$

Подставим числовые значения

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3, \\ 20I_1 - 10I_2 + 8 = 30, \\ 10I_2 - 50I_3 = 30. \end{cases}$$

Данную систему решают либо ручным способом, либо с помощью вычислительной техники. Если расчеты будут осуществляться ручным способом, то, где возможно, следует произвести сокращения в строках уравнений. После сокращения уравнения принимают вид.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3, & (3.1) \\ 10I_1 - 5I_2 = -11, & (3.2) \\ I_2 + 5I_3 = 3. & (3.3) \end{cases}$$

Проще всего решать систему способом подстановок. В данном случае удобно значение тока I_3 из (3.1) подставить в (3.2) и (3.3), т. е. записать новую систему, в которой имеется два неизвестных и две строки:

$$\begin{cases} 10I_1 - 5I_2 = -11, \\ I_2 + 5(I_1 + I_2) = 3, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} 10I_1 - 5I_2 = -11, \\ I_2 + 5I_1 + 5I_2 = 3 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 10I_1 - 5I_2 = -11, & (3.4) \\ 5I_1 + 6I_2 = 3. & (3.5) \end{cases}$$

Проще всего умножить все члены строки (3.5) на -2 и сложить строки (3.4) и (3.5), тогда

$$\begin{cases} 10I_1 - 5I_2 = -11, \\ -10I_1 - 12I_2 = -6 \end{cases}$$

или $-17I_2 = -17$, откуда $I_2 = 1$ А. Ток I_1 найдем из (3.5): $5I_1 = 3 - 6I_2$, т. е. $I_1 = (3 - 6I_2)/5 = (3 - 6)/5 = -0,6$ А. Знак «минус» указывает на то, что направление действительного тока в первой ветви противоположно предполагаемому. Ток $I_3 = I_1 + I_2 = -0,6 + 1 = 0,4$ А. Действительные токи в схемах наносятся на изображении проводов (рис. 3.55, а, б) в отличие от токов предполагаемых, наносимых рядом с изображением проводов.

Решать систему трех уравнений с тремя неизвестными очень удобно с помощью ПМК Б-3-34, МК-54, МК-56, МК-61 и МК-52 (МК-52 освоен промышленностью уже после подготовки учебника, поэтому в [1] не упоминается). В [1] на с. 63 приводится программа 3.1 для расчета системы трех уравнений. Чтобы ввести исходные данные в память калькулятора, уравнения следует записать в виде матрицы:

$$\begin{cases} 1I_1 + 1I_2 - 1I_3 = 0, \\ 10I_1 - 5I_2 + 0 \cdot I_3 = -11, \\ 0 \cdot I_1 + 1I_2 + 5I_3 = 3, \end{cases} \quad \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 10 & -5 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{array} \right\|.$$

При матричной форме записи коэффициентов системы уравнений опускают обозначения токов I_1, I_2, I_3 и знаки равенства. Записывать коэффициенты для их ввода в ЭВМ гораздо удоб-

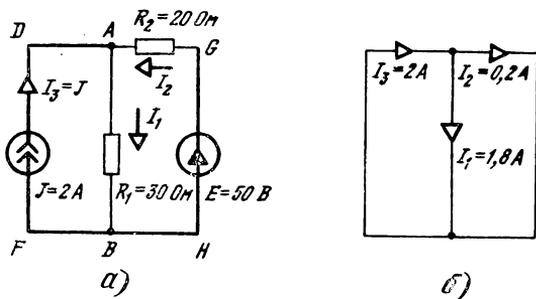


Рис. 3.56

нее именно в матричной форме, поскольку в этом случае остаются только числа, вводимые в память ПМК (или иных ЭВМ). После необходимых операций, описанных на с. 62—64 в [1], калькулятор выдает результаты расчетов $-0,6$; 1 ; $0,4$.

Произведем проверки. Ток $I_2 = I_1 + I_3$, т. е. $1 = 0,6 + 0,4$; $E_1 - E_2 = -R_1 I_1 - R_2 I_2$, т. е. $8 - 30 = -20 \cdot 0,6 - 10 \cdot 1$ или $22 = 22$; $E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3$, т. е. $30 = 10 \cdot 1 + 50 \cdot 0,4$ или $30 = 30$; $E_1 = -R_1 I_1 + R_3 I_3$, т. е. $8 = -20 \cdot 0,6 + 50 \cdot 0,4$ или $8 = 8$; $-E_1 I_1 - E_2 I_2 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$, т. е. $-8 \cdot 0,6 + 30 \cdot 1 = 0,6^2 \cdot 20 + 1^2 \cdot 10 + 0,4^2 \cdot 50$ или $-4,8 + 30 = 7,2 + 10 + 8$, откуда $25,2 \text{ Вт} = 25,2 \text{ Вт}$.

Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.127. Решить задачу 3.126, если полярность источника E_2 изменена на противоположную.

Указание: разберите сначала задачу 3.126.

3.128. В схеме рис. 3.56, а рассчитать токи с помощью законов Кирхгофа.

Указание: изучите сначала § 3.34 в [1].

Решение. В схеме, показанной на рис. 3.56, а, три ветви, следовательно, в цепи протекают три различных тока, но в третьей ветви включен источник тока, поэтому ток I_3 известен и равен току J . Так как вычисляются токи I_1 и I_2 , необходимо составить систему из двух уравнений, причем по первому закону Кирхгофа составляют одно уравнение (поскольку узлов два), а оставшееся уравнение — по второму закону Кирхгофа, но обязательно для контура, в который не входит источник тока, в данном случае для контура $AGHBA$:

$$\begin{cases} I_3 + I_2 = I_1, \\ E = R_2 I_2 + R_1 I_1, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} 2 + I_2 = I_1, & (3.6) \\ 50 = 20I_2 + 30I_1; & (3.7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + I_2 = I_1, & (3.8) \\ 5 = 2I_2 + 3I_1. & (3.9) \end{cases}$$

Подставим I_1 из (3.8) в (3.9), тогда $5=2I_2+3(2+I_2)$ или $5=2I_2+6+3I_2$, т. е. $5I_2=-1$, откуда $I_2=-1/5=-0,2$ А. Из (3.6) $I_1=I_2+J=-0,2+2=1,8$ А. Покажем токи на графе рис. 3.56, б.

Произведем проверки $I_3=I_1+I_2$, т. е. $2=1,8+0,2$; $E=-R_2I_2+R_1I_1$, т. е. $50=-20\cdot 0,2+30\cdot 1,8$ или $50=-4+54$; $JR_1I_1-EI_2=I_1^2R_1+I_2^2R_2$, т. е. $2\cdot 30\cdot 1,8-50\cdot 0,2=1,8^2\cdot 30+0,2^2\cdot 20$ или $108-10=97,2+0,8$. Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

Примечание. Сравните данную задачу с задачами 3.93 и 3.95, убедитесь, что одна и та же задача решалась различными способами. Результаты оказались одинаковыми. Если метод расчета не оговаривается, то выбирать следует тот способ, который приводит к более простому решению.

3.129. В схеме, показанной на рис. 3.43, а рассчитать токи с помощью законов Кирхгофа.

Указание: разберите задачу 3.128.

Решение. В схеме три ветви, но в двух ветвях ток известен, искать необходимо только один ток I_3 , который определяется из уравнения $I_3=J_1+J_2=0,2+0,3=0,5$ мА.

3.130. Рассчитать с помощью законов Кирхгофа токи в ветвях схемы, показанной на рис. 3.57, а.

Указание: разберите задачи 3.126 и 3.128.

Решение. В данной схеме шесть ветвей, но одна содержит источник тока, следовательно, определять нужно пять токов. Узлов четыре, поэтому по первому закону Кирхгофа следует составить три уравнения, а оставшиеся два — по второму закону для любого замкнутого контура, в который не входит источник тока. Зададимся предполагаемыми токами и составим уравнения для узлов А, D, В:

$$\begin{array}{l} A \\ D \\ B \end{array} \left| \begin{array}{l} I_5 = I_1 = I_3, \\ I_1 + J = I_2, \\ I_2 + I_4 = I_5. \end{array} \right.$$

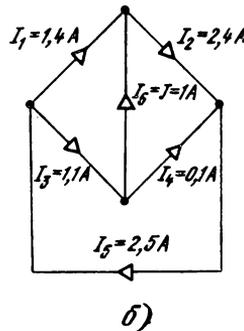
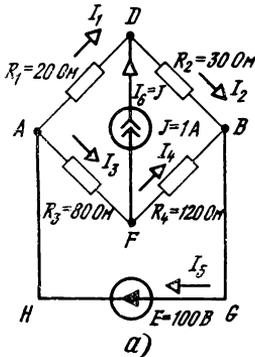


Рис. 3.57

Уравнения по второму закону Кирхгофа составим для контуров $HADBGH$ и $HAFBGH$:

$$\begin{cases} E = R_1 I_1 + R_2 I_2, \\ E = R_3 I_3 + R_4 I_4. \end{cases}$$

Получившуюся систему из пяти уравнений с пятью неизвестными методом подстановок целесообразно превратить в систему из трех уравнений с тремя неизвестными. Для этого ток I_5 из первой строки подставим во все остальные строки. Тогда I_5 исчезает, остаются четыре неизвестных и четыре строки:

$$\begin{cases} I_1 + J = I_2, \\ I_2 + I_4 = I_1 + I_3, \\ E = R_1 I_1 + R_2 I_2, \\ E = R_3 I_3 + R_4 I_4. \end{cases}$$

Теперь подставим значение тока I_2 из первой строки во все последующие, при этом получается система

$$\begin{cases} I_1 + J + I_4 = I_1 + I_3, \\ E = R_1 I_1 + R_2 (I_1 + J), \\ E = R_3 I_3 + R_4 I_4. \end{cases}$$

После произведенных преобразований остаются три неизвестных: I_1 , I_3 и I_4 . Приведем уравнения к нормальному виду:

$$\begin{cases} 0 \cdot I_1 + 1 \cdot I_3 - 1 \cdot I_4 = J, \\ (R_1 + R_2) I_1 + 0 \cdot I_3 + 0 \cdot I_4 = E - R_2 J, \\ 0 \cdot I_1 + R_3 I_3 + R_4 I_4 = E \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 0 \cdot I_1 + 1 \cdot I_3 - 1 \cdot I_4 = 1, \\ 50 I_1 + 0 \cdot I_3 + 0 \cdot I_4 = 100 - 30 \cdot 1, \\ 0 \cdot I_1 + 80 I_3 + 120 I_4 = 100. \end{cases}$$

Полученную систему из трех уравнений с тремя неизвестными проще всего решать на программированном микрокалькуляторе с помощью программы 3.1 (см. § 3.16 в [1] и задачу 3.126), при этом оказывается $I_1 = 1,4$ А; $I_3 = 1,1$ А; $I_4 = 0,1$ А. Рассчитаем остальные токи: $I_2 = I_1 + J = 1,4 + 1 = 2,4$ А; $I_5 = I_1 + I_3 = 1,4 + 1,1 = 2,5$ А. Нанесем токи на граф (рис. 3.57, б). Сравним полученные результаты, с результатами решения задачи 3.102 и убедимся в правильности ее решения.

3.131. Решить задачу 3.130, если полярность источника тока изменена на противоположную.

Указание: разберите сначала задачу 3.130.

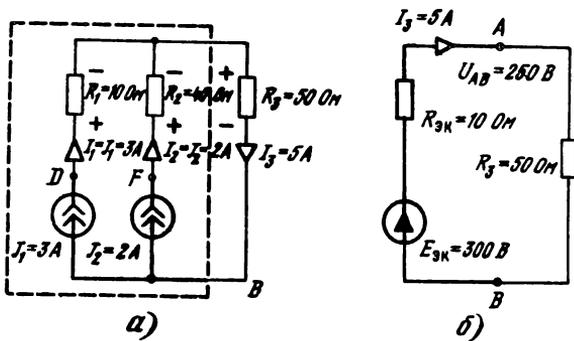


Рис. 3.58

3.132. В схеме цепи, показанной на рис. 3.58, а, рассчитать токи, напряжения, мощности и заменить источники тока эквивалентными источниками напряжения.

Указание: разберите сначала задачу 3.128.

Решение. В данной цепи три ветви, но в двух ветвях токи известны, следовательно, определять необходимо только ток I_3 . Начинать составлять уравнения, как всегда, следует на основании первого закона Кирхгофа. В данном случае вся система состоит только из одного уравнения $I_3 = I_1 + I_2$, откуда $I_3 = 3 + 2 = 5$ А.

Определим падения напряжения на всех элементах цепи: $U_{AB} = R_3 I_3 = 50 \cdot 5 = 250$ В (с «плюсом» в точке А); $U_{FA} = R_2 I_2 = 40 \cdot 2 = 80$ В (с «плюсом» в точке F); $U_{DA} = R_1 I_1 = 10 \cdot 3 = 30$ В (с «плюсом» в точке D). Зная напряжения на сопротивлениях, можно определить напряжения на источниках тока: $U_{J1} = U_{R1} + U_{AB} = 30 + 250 = 280$ В; $U_{J2} = U_{R2} + U_{AB} = 80 + 250 = 330$ В. Рассчитаем мощности источников $U_{J1} I_1 + U_{J2} I_2 = 280 \cdot 3 + 330 \cdot 2 = 1500$ Вт. Мощности в сопротивлениях $I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 3^2 \cdot 10 + 2^2 \cdot 40 + 5^2 \cdot 50 = 90 + 160 + 1250 = 1500$ Вт, из них 250 Вт рассеивается в сопротивлениях R_1 и R_2 , а 1250 Вт — в сопротивлении R_3 .

Заменим участок с источниками тока (т. е. участок, обведенный на схеме рис. 3.58, а штриховой линией) эквивалентным источником напряжения с ЭДС E_{3K} и внутренним сопротивлением R_{3K} (рис. 3.58, б). Элементы E_{3K} и R_{3K} должны быть такими, при которых на сопротивлении R_{3K} рассеивается такая же мощность, как и на R_1 и R_2 , а E_{3K} — такой, при которой напряжение между точками А и В равно напряжению U_{AB} в схеме (рис. 3.58, а), т. е. $I_3^2 R_{3K} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2$, откуда $R_{3K} = (I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2) / (I_1 + I_2)^2 = (2^2 \cdot 10 + 3^2 \cdot 40) / (2 + 3)^2 = 250 / 25 = 10$ Ом;

$$E_{3K} = I_3 R_{3K} + I_3 R_3 = (I_1 + I_2) \frac{(I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2)}{(I_1 + I_2)^2} + R_3 = \frac{I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + R_3 (I_1 + I_2)}{I_1 + I_2} =$$

$$= \frac{3^2 \cdot 10 + 2^2 \cdot 40 + 50(3+2)^2}{3+2} = \frac{90 + 160 + 1250}{5} = 300 \text{ В.}$$

(Токи J_1 и J_2 записывались со знаком «плюс», потому что стрелки этих источников направлены к точке A , т. е. к точке с более высоким потенциалом, чем у точки B . В противном случае ток является отрицательным.)

Выполним проверку. В схеме рис. 3.58, б ток должен оказаться равным 5 А, напряжение между точками A и B 250 В, мощности: на сопротивлении 1250 Вт, на внутреннем сопротивлении $R_{\text{ЭК}}$ 250 Вт. Ток $I_3 = E_{\text{ЭК}} / (R_{\text{ЭК}} + R_3) = 300 / (10 + 50) = 5$ А; $P_{R_{\text{ЭК}}} = I_3^2 R_{\text{ЭК}} = 5^2 \cdot 10 = 250$ Вт; $P_{R_3} = I_3^2 R_3 = 5^2 \cdot 50 = 1250$ Вт; $U_{AB} = E_{\text{ЭК}} - I_3 R_{\text{ЭК}} = 300 - 5 \cdot 10 = 250$ В или $U_{AB} = R_3 I_3 = 50 \cdot 5 = 250$ В; $E_{\text{ЭК}} = U_{R_{\text{ЭК}}} + U_{R_3} = 10 \cdot 5 + 250 = 300$ В.

Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.133. Решить задачу 3.132, если $J_1 = 6$ мА, $J_2 = 4$ мА, причем полярность источника J_2 изменена на противоположную.

Указание: разберите сначала задачу 3.132.

3.134. В схеме, показанной на рис. 3.59, а, с помощью законов Кирхгофа рассчитать токи в ветвях, напряжения и мощности во всех элементах, произвести проверки.

Указание: разберите сначала задачи 3.124 и 3.128.

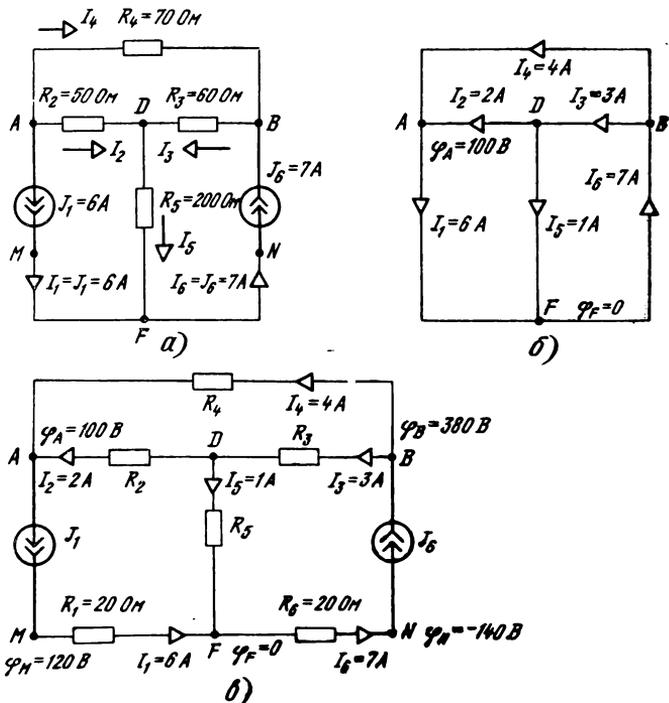


Рис. 3.59

Решение. Зададимся предполагаемыми токами произвольным образом (например, как показано на рис. 3.59, а). В схеме шесть ветвей, в двух из них токи известны ($I_1=I_1=6$ А и $I_6=I_6=7$ А), остальные четыре тока $I_2—I_5$ необходимо найти. Для определения четырех токов надо составить систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Начинать составлять уравнения следует с узлов на основании первого закона Кирхгофа. Так как в схеме четыре узла, то можно составить три независимых уравнения для любых трех узлов, например А, D, В:

$$\begin{array}{l|l} A & I_1 + I_2 + I_4 = 0, \\ D & I_2 + I_3 = I_5, \\ B & I_6 + I_4 = I_3. \end{array}$$

Четвертое уравнение составляется по второму закону Кирхгофа для контура $ABDA$ (в данной схеме ни для какого другого контура нельзя записать уравнение по второму закону Кирхгофа, поскольку в любой иной контур входит источник тока): $0=R_4I_4+R_3I_3-R_2I_2$.

Чтобы свести систему к трем уравнениям, выражение для тока I_3 из третьей строки подставим в остальные строки:

$$\begin{cases} 6 + I_2 + I_4 = 0, \\ I_2 + 7 + I_4 = I_5 \\ 0 = 70I_4 + 60 \cdot 7 + 60I_4 - 50I_2. \end{cases}$$

Получилась система уравнений, в которой неизвестными являются токи I_2, I_4, I_5 . Решить ее можно либо ручным способом, либо на ПМК с помощью программы 3.1 (см. с. 62—65 в [1]). Запишем уравнения в нормальном виде или в виде матрицы:

$$\begin{cases} 1 \cdot I_2 + 1 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 = -6, \\ 1 \cdot I_2 + 1 \cdot I_4 - 1 \cdot I_5 = -7, \\ 5 \cdot I_2 - 13 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 = 42, \end{cases} \quad \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & -7 \\ 5 & -13 & 0 & 42 \end{array} \right\|.$$

Решением оказываются значения $I_2=-2$ А, $I_4=-4$ А, $I_5=1$ А. Тогда $I_3=I_4+I_6=-4+7=3$ А.

Из полученных результатов следует, что направления действительных токов I_3 и I_5 совпадают с предполагаемыми, а токов I_2 и I_4 противоположны. Нанесем действительные токи на граф (рис. 3.59, б).

Произведем проверки: $I_2+I_4=I_1$, т. е. $2+4=6$; $I_3=I_2+I_5$, т. е. $3=2+1$; $I_6=I_3+I_4$, т. е. $7=3+4$; $I_1+I_5=I_6$, т. е. $6+1=7$. По второму закону Кирхгофа $0=-R_4I_4+R_3I_3+R_2I_2$, т. е. $0=-70 \cdot 4 + 60 \cdot 3 + 50 \cdot 2$, откуда $0=-280+280$.

Рассчитаем напряжения на источниках тока. Положим потенциал точки F равным нулю ($\varphi_F=0$) Тогда $\varphi_D=\varphi_F+R_5I_5=0+200\cdot 1=200$ В; $\varphi_A=\varphi_D-R_2I_2=200-50\cdot 2=100$ В; $U_{AF}=\varphi_A-\varphi_F=100-0=100$ В (с «плюсом» в точке A); $\varphi_B=\varphi_D+R_3I_3=200+60\cdot 3=380$ В; $U_{BF}=\varphi_B-\varphi_F=380-0=380$ В (с «плюсом» в точке B). Баланс мощностей: $-U_{AF}J_1+U_{BF}J_6=I_2^2R_2+I_3^2R_3+I_4^2R_4+I_5^2R_5$. Первый член имеет знак «минус», поскольку стрелка источника тока направлена к точке F , потенциал которой меньше потенциала точки A (не строго говоря, стрелка источника тока обращена к «минусу» напряжения, имеющегося на зажимах этого источника): $-100\cdot 6+380\cdot 7=2^2\cdot 50+3^2\cdot 60+4^2\cdot 70+1^2\cdot 200$ или $-600+2660=200+540+1120+200$, откуда 2060 Вт $=2060$ Вт. Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.135. Решить задачу 3.134, если последовательно с источником тока включены сопротивления по 20 Ом (рис. 3.59, $в$).

Указание: разберите задачу 3.134.

Решение. Поскольку для контуров, содержащих источники тока, уравнения по второму закону Кирхгофа не составляются, добавление сопротивлений не изменяет системы уравнений, следовательно, токи в ветвях остаются такими же, как и на рис. 3.59, $а$. Однако на сопротивлениях R_1 и R_2 окажутся падения напряжения, а значит, изменятся напряжения на источниках тока и мощности, отдаваемые этими источниками. (Иначе и быть не могло: по сопротивлениям R_1 и R_6 протекают токи, следовательно, на них рассеивается мощность, но для того, чтобы баланс мощностей сохранился, источники должны отдать в цепь мощность, большую, чем в предыдущей схеме, на значение мощности, рассеиваемой в сопротивлениях R_1 и R_6 .)

Рассчитаем напряжения на зажимах источников тока. Пусть потенциал точки F остается по-прежнему нулевым. Тогда потенциал точки A , как и в предыдущей схеме, равен 100 В, но потенциал точки M оказывается не нулевым: $\varphi_M=R_1I_1=0+20\cdot 6=120$ В. Напряжение U_{MA} на источнике J_1 вместо -100 В оказывается $\varphi_M-\varphi_A=120-100=20$ В. Аналогично потенциал точки B останется равным 380 В, а потенциал точки N , равный потенциалу точки F $\varphi_N-R_6I_6=0-20\cdot 7=-140$ В, и тогда $U_{BN}=\varphi_B-\varphi_N=380-(-140)=620$ В.

Проверим баланс мощностей: $U_{MA}J_1+U_{BN}J_6=I_1^2R_1+I_6^2R_6+I_2^2R_2+I_3^2R_3+I_4^2R_4+I_5^2R_5$, т. е. $20\cdot 6+520\cdot 7=6^2\cdot 20+7^2\cdot 20+2060$ или $120+3640=720+980+2060$, откуда 3760 Вт $=3760$ Вт. Проверка выполняется, следовательно, задача решена правильно.

3.136. Решить задачу 3.134, если $J_1=18$ мА с прежней полярностью, $J_2=21$ мА с противоположной по сравнению с показанной на рис. 3.59, $а$ полярностью. Все сопротивления остаются без изменений.

Указание: разберите задачу 3.134.

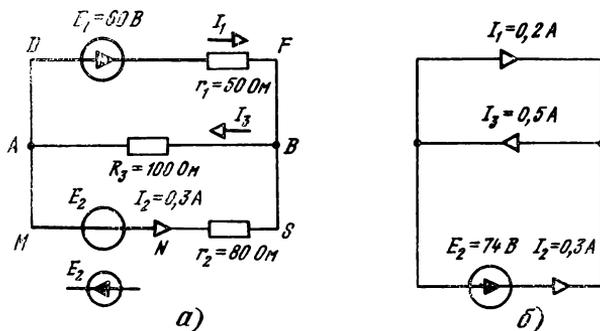


Рис. 3.60

3.137. Решите задачу 3.135, если источники соответствуют указанным в задаче 3.136.

Указание: разберите задачи 3.134 и 3.135.

3.138. С помощью законов Кирхгофа рассчитать значение и полярность источника напряжения E_2 , токи I_1 и I_3 , напряжения и мощности на всех элементах схемы, показанной на рис. 3.60, а.

Указание: изучите сначала § 3.14—3.16 в [1].

Решение. В рассматриваемой схеме три ветви, причем в первой ветви известна ЭДС, но неизвестен ток, а во второй, наоборот, известен ток, но неизвестна ЭДС, которую необходимо найти. Поскольку во второй ветви включен источник напряжения (а не тока), уравнения следует составлять по законам Кирхгофа обычным образом. Для этого зададимся предполагаемыми (положительными) токами в первой и третьей ветвях и предполагаемой полярностью источника E_2 . Предполагаемые токи покажем стрелками, а предполагаемую полярность источника E_2 — кружком со стрелкой. Пусть, например, «плюс» ЭДС E_2 будет направлена к точке M . Все направления могут выбираться совершенно произвольно. Составим одно уравнение по первому и два уравнения по второму законам Кирхгофа:

$$\text{для узла } B \quad I_1 + I_2 = I_3;$$

$$\text{для контура } ADFBA \quad E_1 = r_1 I_1 + R_3 I_3;$$

$$\text{для контура } MABSM \quad E_2 = -R_3 I_3 - r_2 I_2.$$

Подставим числовые значения:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3, \\ 60 = 50I_1 + 100I_3, \\ E_2 = -100I_3 - 80 \cdot 0,3 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} I_1 - I_3 = -0,3, \\ 5I_1 + 10I_3 = 6, \\ E_2 + 100I_3 = -24. \end{cases}$$

Решить систему можно ручным или машинным способом, например, на ПМК по программе 3.1 (см. с. 62—65 в [1]). Покажем решение системы ручным способом. Из первой строки $I_3 = I_1 + 0,3$. Подставим I_3 в остальные строки:

$$\begin{cases} 5I_1 + 10(I_1 + 0,3) = 6, \\ E_2 + 100(I_1 + 0,3) = -24, \end{cases}$$

т. е. $15I_1 = 6 - 3 = 3$, откуда $I_1 = 3/15 = 0,2$ А, $I_3 = I_1 + I_2 = 0,2 + 0,3 = 0,5$ А, тогда $E_2 = -24 - 100 \cdot 0,2 - 100 \cdot 0,3 = -24 - 20 - 30 = -74$ В. Поскольку ЭДС E_2 получилась со знаком «минус», то действительное направление этой ЭДС противоположно предполагаемому (рис. 3.60, б).

Произведем проверки: $I_3 = I_1 + I_2$, т. е. $0,5 = 0,2 + 0,3$; $E_1 = r_1 I_1 + R_3 I_3$, т. е. $60 = 50 \cdot 0,2 + 100 \cdot 0,5$ или $60 = 10 + 50$; $E_2 = r_2 I_2 + R_3 I_3$, т. е. $74 = 80 \cdot 0,3 + 100 \cdot 0,5$ или $74 = 24 + 50$; $E_1 - E_2 = r_1 I_1 - r_2 I_2$, т. е. $60 - 74 = 50 \cdot 0,2 - 80 \cdot 0,3$ или $-14 = 10 - 24$; $E_1 I_1 + E_2 I_2 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$, т. е. $60 \cdot 0,2 + 74 \cdot 0,3 = (0,2)^2 \cdot 50 + (0,3)^2 \cdot 80 + (0,5)^2 \cdot 100$ или $12 + 22,2 = 2 + 7,2 + 25$, $34,2$ Вт $= 34,2$ Вт. Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.139. С помощью законов Кирхгофа рассчитать токи в ветвях, ЭДС E_1 , показания вольтметров V_1 и V_2 (внутренние сопротивления вольтметров принять бесконечно большими), произвести все проверки для схемы, показанной на рис. 3.61, а. Между точками O и D построить две потенциальные диаграммы — одну по возможно более короткому, а другую — по возможно более длинному пути.

Указание: разберите сначала задачу 3.138.

Решение. В данной схеме девять ветвей, причем в первой ветви известен ток $I_1 = 2$ А, но неизвестна ЭДС E_1 , в восьмой ветви включен источник тока $J_7 = 4$ А, а в девятой ветви ток равен нулю, поскольку нижняя точка ветви не соединена ни с какой точкой цепи. Таким образом, в схеме следует определить одну ЭДС и шесть токов, т. е. семь величин, для чего необходимо составить систему из семи уравнений с семью неизвестными.

Зададимся полярностью ЭДС E_1 и предполагаемыми токами $I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7$ (рис. 3.61, а). В этом случае

$$\text{для узла } A \quad I_2 + I_4 = I_1,$$

$$\text{для узла } D \quad I_3 + I_5 = I_2,$$

$$\text{для узла } B \quad I_6 = I_3 + I_4 + I_8,$$

$$\text{для узла } F \quad I_1 + I_7 = I_5,$$

$$\text{для контура } ADFMA \quad E_1 + E_5 + E_2 = R_1 I_1 + R_5 I_5 + R_2 I_2,$$

$$\text{для контура } ABDA \quad E_3 + E_2 = -R_4 I_4 + R_3 I_3 + R_2 I_2,$$

$$\text{для контура } DBHFD \quad E_5 - E_3 - E_6 = R_5 I_5 - R_3 I_3 - R_6 I_6 - R_7 I_7,$$

Получилась довольно сложная система уравнений, однако она решается достаточно просто даже без вычислительной техники.

Проделаем все преобразования подробно. Подставим числовые значения, а из второй строки во все остальные строки вме-

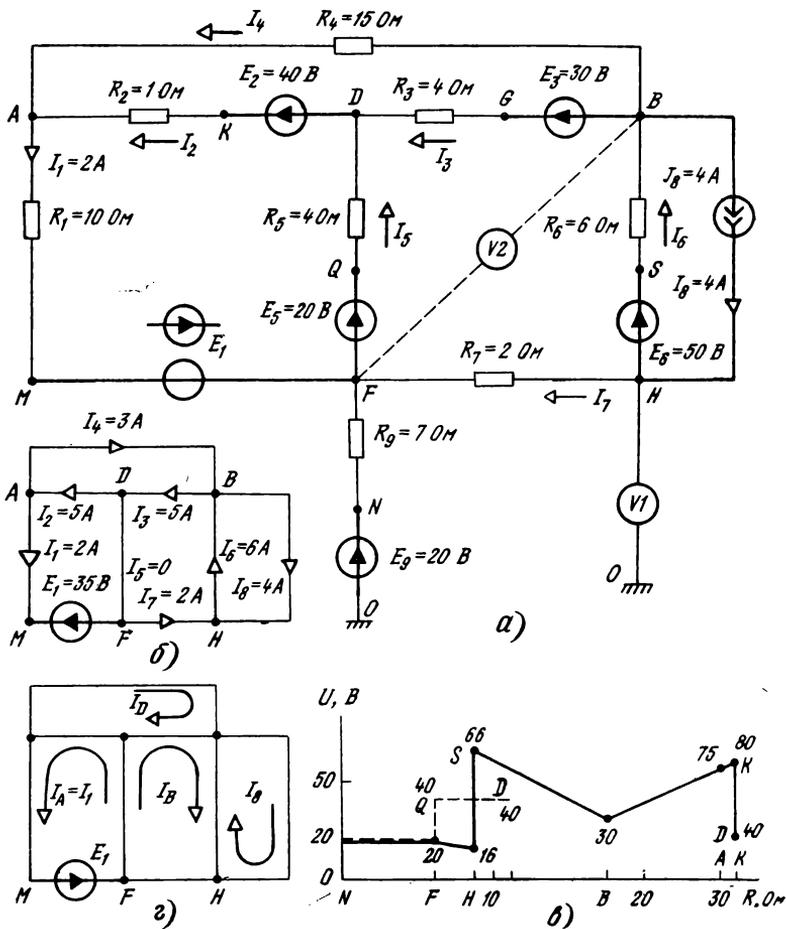


Рис. 3.61

сто тока I_2 — выражение $I_3 + I_5$. При этом и число неизвестных, и число строк уменьшается на единицу:

$$\begin{cases} I_3 + I_5 + I_4 = 2, \\ I_6 - I_3 - I_4 = 4, \\ I_5 - I_7 = 2, \\ E_1 + 20 + 40 = 10 \cdot 2 + 4I_5 + 1(I_3 + I_5), \\ 30 + 40 = -15I_4 + 4I_3 + 1(I_3 + I_5), \\ 20 - 30 - 50 = 4I_5 - 4I_3 - 6I_6 + 2I_7. \end{cases}$$

Из третьей строки данной системы получим $I_5 = 2 + I_7$ и подставим в остальные строки. Число неизвестных и число строк уменьшится еще на единицу:

$$\begin{cases} I_3 + 2 + I_7 + I_4 = 2, \\ -I_3 - I_4 + I_6 = 4, \\ I_3 + 5(2 - I_7) - E_1 = 40, \\ 5I_3 - 15I_4 + (2 - I_7) = 70, \\ -4I_3 + 4(2 + I_7) - 6I_6 + 2I_7 = -60 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} I_3 = -I_4 - I_7, \\ -I_3 - I_4 + I_6 = 4, \\ I_3 + 5I_7 - E_1 = 30, \\ 5I_3 - 15I_4 + I_7 = 68, \\ -2I_3 - 3I_6 + 3I_7 = -34 \end{cases}$$

(в последней строке все члены были сокращены на 2). Теперь из первой строки подставим во все остальные строки вместо тока I_3 выражение $-I_4 - I_7$, тогда

$$\begin{cases} I_4 + I_7 - I_4 + I_6 = 4, \\ (-I_4 - I_7) + 5I_7 - E_1 = 30, \\ 5(-I_4 - I_7) - 15I_4 + I_7 = 68, \\ -2(-I_4 - I_7) - 3I_6 + 3I_7 = -34 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} I_7 = 4 - I_6, \\ -I_4 + 4I_7 - E_1 = 30, \\ -20I_4 - 4I_7 = 68, \\ 2I_4 - 3I_6 + 5I_7 = -34. \end{cases}$$

Из первой строки подставим во все остальные вместо тока I_7 выражение $4 - I_6$:

$$\begin{cases} -I_4 + 4(4 - I_6) - E_1 = 30, \\ -20I_4 - 4(4 - I_6) = 68, \\ 2I_4 - 3I_6 + 5(4 - I_6) = -34 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -I_4 - 4I_6 - E_1 = 14, \\ -20I_4 + 4I_6 = 84, \\ 2I_4 - 8I_6 = -54. \end{cases}$$

Полученную систему из трех уравнений с тремя неизвестными (I_4 , I_6 и E_1) можно решить на ПМК с помощью программы 3.1 (см. с. 63 в [1]), но можно и ручным способом. Для этого следует выражать одни переменные через другие до тех пор, пока не останется одно неизвестное. Но данную систему можно ре-

шить проще: все члены третьей строки умножить на 10 и сложить со второй строкой. Тогда

$$\begin{cases} -20I_4 + 4I_6 = 84, \\ 20I_4 - 80I_6 = -540 \end{cases}$$

или $-76I_6 = -456$, откуда $I_6 = -456 / -76 = 6$ А. Получив значение одного тока, можно найти и все остальные. Ток $I_7 = 4 - I_6 = 4 - 6 = -2$ А. Так как $2I_4 - 8I_6 = -54$, сокращая на 2, получаем $I_4 - 4I_6 - 27 = 4 \cdot 6 - 27 = -3$ А; $I_3 = -I_4 - I_7 = -(-3) - (-2) = 5$ А; $I_5 = 2 + I_7 = 2 - 2 = 0$ А; $I_2 = I_3 + I_5 = 5 + 0 = 5$ А; $E_1 = -I_4 - 4I_6 - 14 = -(-3) - 4 \cdot 6 - 14 = -35$ В. Таким образом, действительные направления токов I_2 , I_3 и I_6 совпадают с предполагаемыми, а направления токов I_4 , I_7 и ЭДС E_1 противоположны предполагаемым.

Нанесем получившиеся токи на граф (рис. 3.61, б). Рассчитаем потенциалы точек цепи. Положим потенциал O равным нулю ($\varphi_O = 0$), тогда $\varphi_N = E_9 = 20$ В. Так как в сопротивлении R_9 ток не протекает, $\varphi_F = \varphi_N = 20$ В; $\varphi_H = \varphi_F - R_7 I_7 = 20 - 2 \cdot 2 = 16$ В; $\varphi_5 = \varphi_H + E_6 = 16 + 50 = 66$ В; $\varphi_B = \varphi_5 - R_6 I_6 = 66 - 6 \cdot 6 = 30$ В; $\varphi_G = \varphi_B + E_3 = 30 + 30 = 60$ В; $\varphi_D = \varphi_G - R_3 I_3 = 60 - 4 \cdot 5 = 40$ В; $\varphi_K = \varphi_D + E_2 = 40 + 40 = 80$ В; $\varphi_A = \varphi_K - R_2 I_2 = 80 - 1 \cdot 5 = 75$ В; $\varphi_M = \varphi_A - R_1 I_1 = 75 - 10 \cdot 2 = 55$ В; $U_{HO} = \varphi_H - \varphi_O = 16 - 0 = 16$ В (с «плюсом» в точке H). Напряжение $U_{BF} = \varphi_B - \varphi_F = 30 - 20 = 10$ В.

Произведем проверки. Ток $I_2 = I_1 + I_4$, т. е. $5 = 2 + 3$; $I_3 + I_5 = I_2$, т. е. $5 + 0 = 5$; $I_4 + I_6 = I_3 + I_8$, т. е. $3 + 6 = 5 + 4$; $I_7 + I_8 = I_6$, т. е. $2 + 4 = 6$; $I_1 = I_5 + I_7$, т. е. $2 + 0 = 2$; $-E_1 + E_5 + E_2 = R_1 I_1 + R_5 I_5 + R_2 I_2$, т. е. $-35 + 20 + 40 = 10 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5$ или $25 = 20 + 5$; $E_5 - E_3 - E_6 = R_5 I_5 - R_3 I_3 - R_6 I_6 - R_7 I_7$, т. е. $20 - 30 - 50 = 0 \cdot 4 - 4 \cdot 5 - 6 \cdot 6 - 2 \cdot 2$ или $-60 = -20 - 36 - 4$; $E_3 + E_2 = R_4 I_4 + R_3 I_3 + R_2 I_2$, т. е. $30 + 40 = 15 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 5$ или $70 = 45 + 20 + 5$.

Баланс мощностей: $P_{\text{и}} = -E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 + E_5 I_5 + E_6 I_6 - U_{BH} I_8$, т. е. $-35 \cdot 2 + 40 \cdot 5 + 30 \cdot 5 + 0 + 50 \cdot 6 = -70 + 200 + 150 + 300 - (30 - 16) 4 = 524$ Вт; $P_{\text{н}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 + I_7^2 R_7 = 2^2 \cdot 10 + 5^2 \cdot 1 + 5^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 15 + 0 \cdot 4 + 6^2 \cdot 6 + 2^2 \cdot 2 = 524$ Вт. Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

Построим потенциальные графики между точками O и D . Потенциальным графиком (диаграммой) называется чертеж, в котором по горизонтальной оси отложены сопротивления элементов цепи, а по вертикальной — потенциалы точек цепи, т. е. зависимость $\varphi = f(R)$. Чтобы построить потенциальный график, необходимо знать значения ЭДС источников, сопротивлений элементов цепи, токов в каждом элементе. Зная значения данных величин, следует рассчитать потенциалы всех точек, имеющих на пути, по которому строится график. Самым коротким путем между точками O и D является путь $ONFQD$, а самым

длинным — *ONFHSB* (через R_4AKD). Пусть потенциал точки O равен нулю. Рассчитаем потенциалы остальных указанных точек. В соответствии со вторым законом Кирхгофа разность потенциалов между некоторыми точками замкнутой цепи не зависит от пути из одной точки до другой, а зависит только от значений элементов цепи и вида их соединения. Таким образом, разность потенциалов между точками O и D должна оказаться одинаковой в обоих случаях. Рассчитаем потенциалы точек по короткому пути: $\varphi_O=0$; $\varphi_N=E_9=20$ В; $\varphi_F=\varphi_N+R_9I_9=20+0.7=20.7$ В; $\varphi_Q=\varphi_F+E_5=20+20=40$ В; $\varphi_D=\varphi_Q-R_5I_5=40-4.0=40$ В. По длинному пути $\varphi_H=\varphi_F-R_7I_7=20-2.2=16$ В; $\varphi_S=\varphi_H+E_6=16+50=66$ В; $\varphi_B=\varphi_S-R_6I_6=66-6.6=30$ В; $\varphi_A=\varphi_B+R_4I_4=30+15.3=75$ В; $\varphi_K=\varphi_A+R_2I_2=75+1.5=80$ В; $\varphi_D=\varphi_K-E_2=80-40=40$ В, т. е. получилось прежнее значение. (Если пройти по некоторому иному пути, например *FMAKD*, то результат получится бы тот же, поскольку во всех случаях составлялись уравнения по второму закону Кирхгофа.) Нанесем полученные значения на граф (рис. 3.61, в).

3.140. С помощью законов Кирхгофа рассчитать в схеме, показанной на рис. 3.62, а, токи в ветвях, напряжения и мощности во всех элементах.

Указание: разберите задачу 3.139.

3.141. Решить задачу 3.140, если полярность источника E_5 изменена на противоположную.

Указание: разберите задачу 3.139.

3.142. Решить задачу 3.140 методом контурных токов.

Указание: изучите § 3.19 на с. 71—73 в [1].

Решение. Зададимся в каждом простом контуре (рис. 3.62, б) контурными токами I_A, I_B, I_D (нельзя путать контурные токи с токами в ветвях) и составим уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\text{для контура } ADMA \quad E_1 = I_A(R_2 + r_1 + R_1) - I_B R_2,$$

$$\text{для контура } ABDA \quad 0 = I_B(R_2 + R_3 + R_4) - I_A R_2 - I_D R_4,$$

$$\text{для контура } BNDB \quad -E_5 = I_D(R_4 + r_5 + R_5) - I_B R_4.$$

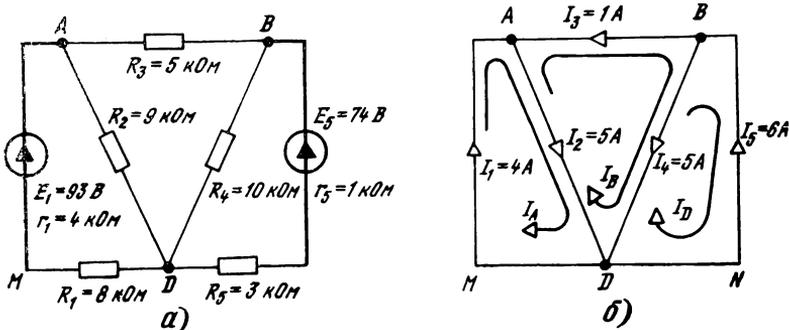


Рис. 3.62

Подставим числовые значения (напряжения в вольтах, сопротивления в килоомах, тогда токи получатся в миллиамперах):

$$\begin{cases} 21I_A - 9I_B = 93, \\ -9I_A + 24I_B - 10I_D = 0, \\ -10I_B + 14I_D = -74 \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{vmatrix} 21 & -9 & 0 & 93 \\ -9 & 24 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & 14 & -74 \end{vmatrix}.$$

С помощью программы 3.1 (см. с. 63 в [1]) на ПМК получают значения 4, -1, -6. Это означает, что $I_A = 4$ мА, $I_B = -1$ мА, $I_D = -6$ мА. Следовательно, направление действительного контурного тока I_A совпадает с предполагаемым, а направления контурных токов I_B и I_D противоположны.

Рассчитаем токи в ветвях: $I_1 = I_A = 4$ мА; $I_2 = I_A - I_B = 4 - (-1) = 5$ мА; $I_3 = I_B = -1$ мА; $I_4 = I_D - I_B = -6 - (-1) = -5$ мА. Положительные (действительные) направления токов показаны на рис. 3.62, б.

Произведем проверки (напомним, что проверки производятся для действительных, а не для предполагаемых токов и напряжений): $I_1 + I_3 = I_2$, т. е. $4 + 1 = 5$; $I_5 = I_3 + I_4$, т. е. $6 = 1 + 5$; $I_2 + I_4 = I_1 + I_5$, т. е. $5 + 5 = 4 + 6$; $E_1 = I_1(r_1 + R_1) + R_2 I_2$, т. е. $93 = 4(4 + 8) + 5 \cdot 9 = 48 + 45$; $0 = -I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_4 R_4$, т. е. $0 = -5 \cdot 9 - 1 \cdot 10 + 5 \cdot 10$ (заметим, что если ток выражается в миллиамперах (мА), сопротивления — в килоомах (кОм), то напряжения получаются в вольтах (В), а мощность — в милливаттах (мВт)). Баланс мощностей: $E_1 I_1 + E_5 I_5 = I_1^2 (r_1 + R_1) + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 (r_5 + R_5)$, т. е. $93 \cdot 4 \cdot 10^{-3} + 74 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = (4 \cdot 10^{-3})^2 (4 + 8) \cdot 10^3 + (5 \cdot 10^{-3})^2 9 \cdot 10^3 + (1 \cdot 10^{-3})^2 5 \cdot 10^3 + (5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10 \cdot 10^3 + (6 \cdot 10^{-3})^2 (1 + 3) \cdot 10^3$ или $(372 + 444) \cdot 10^{-3} = (192 + 225 + 5 + 250 + 144) \cdot 10^{-3}$, откуда $816 \text{ мВт} = 816 \text{ мВт}$.

Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.143. Решить задачу 3.139 методом контурных токов.

Указание: разберите сначала задачу 3.142.

Решение. Составим граф цепи, показанной на рис. 3.61, а, нанесем на нем контурные токи (рис. 3.61, з) и составим систему уравнений по второму закону Кирхгофа. В контуре с источником тока может протекать только контурный ток I_B , т. е. ток, равный току источника тока, а контурный ток I_A должен быть равен току I_1 , поскольку в первой ветви никакие другие токи, кроме I_A , не протекают. Положим, что «плюс» источника E_1 находится в точке F . В этом случае справедливы уравнения

$$E_1 + E_5 + E_2 = I_A (R_1 + R_5 + R_2) + I_D R_2 + I_B R_5;$$

$$E_5 - E_3 - E_6 = I_B(R_5 + R_3 + R_6 + R_7) + I_A R_5 - I_D R_3 - I_8 R_6;$$

$$E_3 + E_2 = I_D(R_4 + R_3 + R_2) + I_A R_2 - I_B R_3$$

или после подстановки числовых значений

$$\begin{cases} E_1 + 20 + 40 = 2(10 + 4 + 1) + I_D \cdot 1 + I_B \cdot 4; \\ 20 - 30 - 50 = I_B(4 + 4 + 6 + 2) + 2 \cdot 4 - I_D \cdot 4 - 4 \cdot 6; \\ 30 + 40 = I_D(15 + 4 + 1) + 2 \cdot 1 - I_B \cdot 4. \end{cases}$$

Получившуюся систему можно решить с помощью ПМК или ручным способом. Для этого умножим все члены последней строки на 4 и сложим с предыдущей строкой:

$$\begin{array}{r} 16I_B - 4I_D = -44 \\ + \\ -16I_B + 80I_D = 272 \\ \hline 76I_D = 228, \end{array}$$

откуда $I_D = 228/76 = 3$ А.

(Обе последние строки можно было сначала сократить на 4, тогда бы числовые значения коэффициентов пропорционально уменьшились, но значение тока I_D , разумеется, осталось бы прежним, т. е. равным 3 А.) Очевидно, что $-4I_B + 20I_D = 68$ или, сокращая на -4 , получаем $I_B = 5I_D - 17 = 5 \cdot 3 - 17 = -2$ А. Из первой строки $E_1 = 4I_B + I_D - 30 = 4(-2) + 3 - 30 = -35$ В.

Определим токи в ветвях: $I_2 = I_A + I_D = 2 + 3 = 5$ А; $I_3 = I_D - I_B = -3 - (-2) = 5$ А; $I_4 = I_D = 3$ А; $I_5 = I_A + I_B = 2 + (-2) = 0$; $I_6 = -I_8 - I_B = 4 - (-2) = 6$ А; $I_7 = I_B = -2$ А. Действительные направления всех положительных токов совпадают с направлениями предполагаемых токов, а всех отрицательных — противоположны. Легко видеть, что действительные токи совпадают с токами, рассчитанными методом использования законов Кирхгофа и нанесенными на граф (рис. 3.61, б).

3.144. В схеме, показанной на рис. 3.63, а, рассчитать токи методом контурных токов.

Указание: разберите сначала задачу 3.142.

Решение. В схеме два простых контура, но контурный ток в левом контуре известен и равен току J . Следовательно, необходимо составить только одно уравнение для контура А: $E = I_A(R_2 + R_1) + JR_1$, т. е. $50 = I_A(20 + 30) + 2 \cdot 30$ или $50I_A = 50 - 60$, откуда $I_A = -10/50 = -0,2$ А, тогда $I_1 = I_A + J = -0,2 + 2 = 1,8$ А. Нанесем токи на граф (рис. 3.63, б). Выполним проверки: $I_3 = I_1 + I_2$, т. е. $2 = 1,8 + 0,2$; $E = -R_2 I_2 + R_1 I_1$, т. е. $50 = -20 \cdot 0,2 + 30 \cdot 1,8 = -4 + 54$. Баланс мощностей: $J I_1 R_1 - E I_2 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2$, т. е. $2 \cdot 1,8 \cdot 30 - 50 \cdot 0,2 = (1,8)^2 \cdot 30 + (0,2)^2 \cdot 20$ или $108 - 10 = 97,2 + 0,8$.

Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.145. Решить задачу 3.144, если полярность источника E изменена на противоположную.

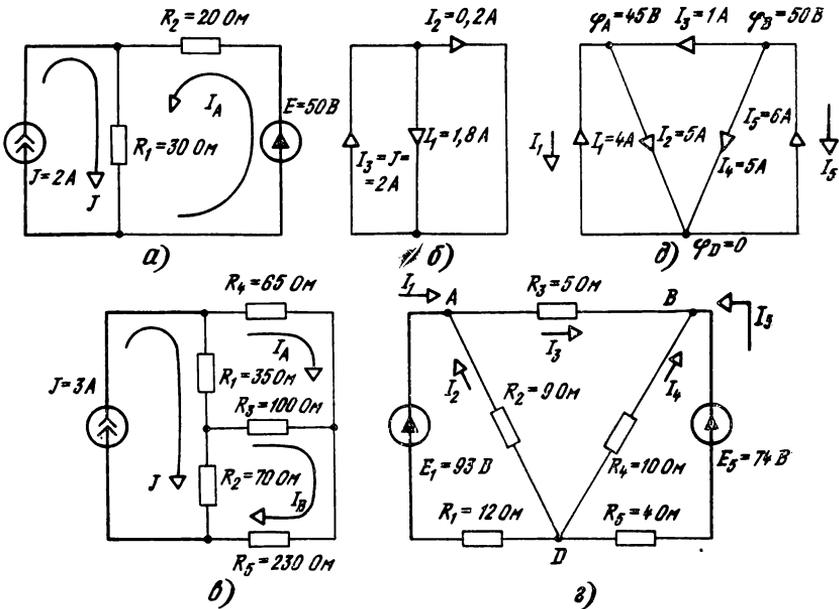


Рис. 3.63

Указание: разберите сначала задачу 3.144.

3.146. Рассчитать токи в схеме, показанной на рис. 3.63, в, методом контурных токов.

Указание: разберите сначала задачу 3.144.

Решение. В данной схеме три контура, ток в одном из них известен, необходимо составить два уравнения:

$$\begin{cases} 0 = I_A (R_1 + R_4 + R_3) - I_B R_3 - J R_1, \\ 0 = I_B (R_2 + R_3 + R_5) - I_A R_3 - J R_2, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} 0 = I_A (35 + 65 + 100) - I_B \cdot 100 - 3 \cdot 35, \\ 0 = I_B (70 + 100 + 230) - I_A \cdot 100 - 3 \cdot 70 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 200 I_A - 100 I_B = 105, \\ -100 I_A + 400 I_B = 210. \end{cases}$$

Умножим вторую строку на 2 и сложим строки, при этом получается $700 I_B = 525$, откуда $I_B = 525/700 = 0,75$ А. Из второй строки $-I_A + 4 I_B = 2,1$, т. е. $I_A = 4 I_B - 2,1 = 4 \cdot 0,75 - 2,1 = 0,9$ А. Рассчитаем токи в ветвях. Как видно из схемы (рис. 3.63, в), $I_1 = J - I_A = 3 - 0,9 = 2,1$ А; $I_2 = J - I_B = 3 - 0,75 = 2,25$ А; $I_3 = I_A - I_B = 0,9 - 0,75 = 0,15$ А; $I_4 = I_A = 0,9$ А; $I_5 = I_B = 0,75$ А. Сравните ре-

зультаты расчетов данной задачи с результатами расчета задачи 3.100.

3.147. Решите задачу 3.102 методами законов Кирхгофа и контурных токов.

Указание: разберите сначала задачу 3.146.

3.148. В схеме, показанной на рис. 3.50, *а*, рассчитайте токи во всех ветвях методом контурных токов.

Указание: разберите сначала задачу 3.142.

3.149. В схеме, показанной на рис. 3.51, *а*, рассчитайте токи во всех ветвях методом контурных токов.

Указание: разберите сначала задачу 3.142.

3.150. В схеме, показанной на рис. 3.63, *г*, рассчитайте токи во всех ветвях методом узловых напряжений.

Указание: изучите сначала § 3.20 в [1].

Решение. Зададимся предполагаемыми токами во всех ветвях и укажем их на схеме рис. 3.63, *г*, как обычно, — около проводов. Так как схема содержит три узла, то по первому закону Кирхгофа можно записать два независимых уравнения, например для узлов *A* и *B*:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3, \\ I_3 + I_4 + I_5 = 0. \end{cases}$$

Выразим токи через потенциалы, в этом случае уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} [(\varphi_D - \varphi_A + E_1)/R_1] + [(\varphi_D - \varphi_A)/R_2] &= [(\varphi_A - \varphi_B)/R_3]; \\ [(\varphi_A - \varphi_B)/R_3] + [(\varphi_D - \varphi_B)/R_4] + [(\varphi_D - \varphi_B + E_5)/R_5] &= 0 \end{aligned}$$

или после подстановки числовых значений

$$\begin{aligned} [(\varphi_D - \varphi_A + 93)/12] + [(\varphi_D - \varphi_A)/9] &= [(\varphi_A - \varphi_B)/5]; \\ [(\varphi_A - \varphi_B)/5] + [(\varphi_D - \varphi_B)/10] + [(\varphi_D - \varphi_B + 74)/4] &= 0. \end{aligned}$$

Приведем каждую строку к общему знаменателю и отбросим их (в первой строке 180, во второй — 20), а потенциал одного узла (например, *D*) положим равным нулю. Тогда получаются уравнения

$$\begin{cases} -15\varphi_A + 15 \cdot 93 - 20\varphi_A = 36\varphi_A - 36\varphi_B; \\ 4\varphi_A - 4\varphi_B - 2\varphi_B - 5\varphi_B + 74 \cdot 5 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 71\varphi_A - 36\varphi_B = 1395; \\ 4\varphi_A - 11\varphi_B = -370. \end{cases}$$

Из второй строки $\varphi_A = (11\varphi_B - 370)/4 = 2,75\varphi_B - 92,5$. Тогда в первой строке $71(2,75\varphi_B - 92,5) - 36\varphi_B = 1395$ или $195,25\varphi_B - 6567,5 - 36\varphi_B = 1395$, т. е. $159,25\varphi_B = 7962,5$, откуда $\varphi_B = 50$ В, тогда

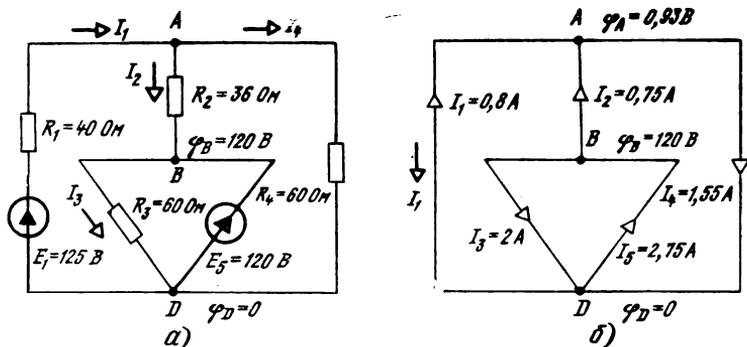


Рис. 3.64

$\varphi_A = 2,75\varphi_B - 92,5 = 2,75 \cdot 50 - 92,5 = 137,5 - 92,5 = 45$ В. Нанесем потенциалы точек на граф (рис. 3.63, δ) и найдем токи в ветвях. Так как $\varphi_A > \varphi_D$, предполагаемый ток в первой ветви следует направить от точки A к точке D, а в пятой ветви — от точки B к точке D. В этом случае $I_1 = [(\varphi_A - \varphi_D - E_1)/R_1] = [(45 - 0 - 93)/12] = -48/12 = -4$ А. Следовательно, действительный ток (положительный) в первой ветви течет от точки D к точке A. Аналогично $I_5 = [(\varphi_B - \varphi_D - E_5)/R_5] = (50 - 74)/4 = -6$ А, т. е. действительный ток в пятой ветви течет от точки D к точке B (рис. 3.63, δ). Остальные токи текут от точек с большими потенциалами к точкам с меньшими потенциалами, а именно $I_2 = (\varphi_A - \varphi_D)/R_2 = (45 - 0)/9 = 5$ А; $I_3 = (\varphi_B - \varphi_A)/R_3 = (50 - 45)/5 = 1$ А; $I_4 = (\varphi_B - \varphi_D)/R_4 = (50 - 0)/10 = 5$ А. Сравните результаты решения данной задачи с аналогичными результатами, полученными в задаче 3.140.

3.151. В схеме, показанной на рис. 3.50, *а*, рассчитать токи в ветвях методом узловых напряжений.

Указание: разберите сначала задачу 3.150.

Решение. Поскольку точки D и F в схеме рис. 3.50, *а* равнопотенциальны, при расчете токов методом узловых напряжений эти точки удобнее показать на схеме в виде одной точки (рис. 3.64, *а*). Нанесем предполагаемые токи в ветвях цепи. Примем потенциал точки D за нулевой ($\varphi_D = 0$), в этом случае потенциал точки B оказывается равным 120 В. (Если бы в пятой ветви кроме ЭДС E_5 имелись бы сопротивления, то для определения потенциала точки B было бы необходимо знать ток в этой ветви, но так как в данной схеме пятая ветвь содержит только источник напряжения, то потенциал точки B отличается от потенциала точки D на значение E_5). Таким образом, неизвестным в данной схеме остается потенциал точки A, а для его определения следует составить всего одно уравнение: $I_1 + I_2 = I_4$ или $[(\varphi_D - \varphi_A + E_1)/R_1] + [(\varphi_A - \varphi_B)/R_2] = [(\varphi_A - \varphi_D)/R_4]$. Так как $\varphi_D = 0$, $\varphi_B = 120$ В, то $[(-\varphi_A + 125)/40] + [(\varphi_A - 120)/36] = (\varphi_A/60)$. Приведа выражение к

общему знаменателю, равному 360, и отбросив его, получим $-9\varphi_A + 9 \cdot 125 = 10 \cdot \varphi_A - 1200 + 6\varphi_A$, т. е. $25\varphi_A = 1125 + 1200 = 2325$, откуда $\varphi_A = 2325/25 = 93$ В. Нанесем потенциалы и предполагаемые токи на граф (рис. 3.64, б). Так как $\varphi_A > \varphi_B$, то предполагаемый ток I_1 должен быть направлен от точки A к точке D , тогда $I_1 = (\varphi_A - \varphi_D - E_1)/R_1 = (93 - 0 - 125)/40 = -0,8$ А. Следовательно, действительный ток в первой ветви течет от точки D к точке A . Обратим внимание, что так как сопротивление пятой ветви равно нулю, то находить ток в этой ветви подобным образом не представляется возможным. Этот ток можно определить, используя первый закон Кирхгофа в узле B после определения токов I_2 и I_3 : $I_2 = (\varphi_B - \varphi_A)/R_2 = (120 - 93)/36 = 27/36 = 0,75$ А; $I_3 = (\varphi_B - \varphi_D)/R_3 = 120/60 = 2$ А; $I_4 = (\varphi_A - \varphi_D)/R_4 = 93/60 = 1,55$ А. Так как из узла B вытекают токи $I_2 = 0,75$ А и $I_3 = 2$ А, т. е. $2,75$ А, то и втекать должен такой же ток, следовательно, $I_5 = I_2 + I_3 = 2,75$ А.

Произведем проверки: $I_1 + I_2 = I_4$, т. е. $0,8 + 0,75 = 1,55$; $I_5 = I_2 + I_3$, т. е. $2,75 = 2 + 0,75$; $I_3 + I_4 = I_1 + I_5$, т. е. $2 + 1,55 = 0,8 + 2,75$; $E_1 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3$, т. е. $125 = 40 \cdot 0,8 - 36 \cdot 0,75 + 60 \cdot 2$ или $125 = 36 - 27 + 120$; $E_5 = R_3 I_3$, т. е. $120 = 60 \cdot 2$; $E_5 = R_2 I_2 + R_4 I_4$, т. е. $120 = 36 \cdot 0,75 + 60 \cdot 1,55$ или $120 = 27 + 93$.

Баланс мощностей: $E_1 I_1 + E_5 I_5 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4$, т. е. $125 \cdot 0,8 + 120 \cdot 2,75 = (0,8)^2 \cdot 40 + (0,75)^2 \cdot 36 + (2)^2 \cdot 60 + (1,55)^2 \cdot 60$ или $100 + 330 = 25,6 + 20,25 + 240 + 144,15$, откуда $430 \text{ Вт} = 430 \text{ Вт}$.

Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.152. Методом узловых напряжений рассчитать токи в схеме, показанной на рис. 3.65, а. Выполнить все проверки.

Указание: разберите сначала задачи 3.151 и 3.150.

Решение. В данной схеме семь ветвей, следовательно, необходимо определить семь различных токов (I_1, I_2, \dots, I_7). В данной схеме четыре узла. Если бы во всех ветвях с источниками напряжений имелись сопротивления, то для решения

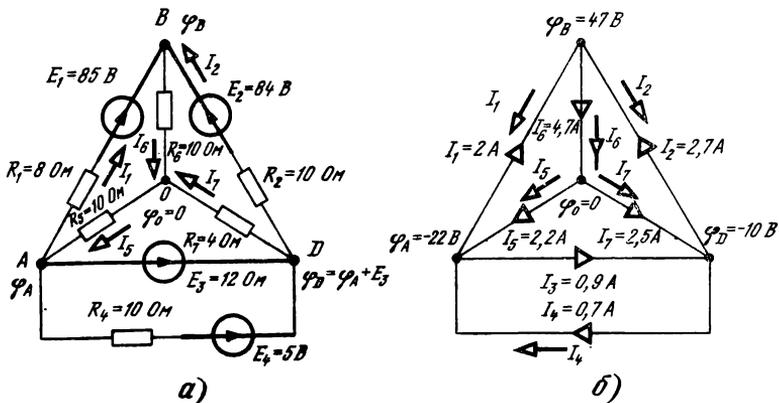


Рис. 3.65

данной задачи методом узловых напряжений потребовалось бы составить три уравнения. Однако в третьей ветви включен источник E_3 с нулевым сопротивлением, а в этом случае потенциалы точек, между которыми включен источник, отличаются друг от друга на значение ЭДС этого источника. Таким образом, если потенциал точки A равен φ_A , то в точке $D = \varphi_A + E_3$. Следовательно, необходимо записать только два уравнения, но при этом следует иметь в виду, что составлять уравнения по первому закону Кирхгофа можно для любых узлов, кроме тех, между которыми включен источник с нулевым сопротивлением. Значит, использовать уравнения для узлов A и D не представляется возможным, а в этом случае остаются только узлы B и O : для узла B $I_1 + I_2 = I_6$, для узла O $I_6 + I_7 = I_5$. Выразим токи через потенциалы:

$$\begin{cases} [(\varphi_A - \varphi_B + E_1)/R_1] + [(\varphi_D - \varphi_B + E_2)/R_2] = (\varphi_B - \varphi_O)/R_6; \\ [(\varphi_B - \varphi_O)/R_6] + [(\varphi_D - \varphi_O)/R_7] = (\varphi_O - \varphi_A)/R_5. \end{cases}$$

Подставим числовые значения, учитывая, что $\varphi_O = 0$, $\varphi_D = \varphi_A + E_3 = \varphi_A + 12$, тогда

$$\begin{cases} [(\varphi_A - \varphi_B + 85)/8] + [(\varphi_A + 12 - \varphi_B + 84)/10] = \varphi_B/10; \\ (\varphi_B/10) + [(\varphi_A + 12)/4] = -\varphi_A/10. \end{cases}$$

Приведа выражения к общему знаменателю (в первой строке 40, во второй 20) и отбросив их, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 5\varphi_A - 5\varphi_B + 5 \cdot 85 + 4\varphi_A + 4 \cdot 12 - 4\varphi_B + 4 \cdot 84 = 4\varphi_B; \\ 2\varphi_B + 5\varphi_A + 5 \cdot 12 = -2\varphi_A \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 9\varphi_A - 13\varphi_B = -48 - 336 - 425 = -809; \\ 7\varphi_A + 2\varphi_B = -60. \end{cases}$$

Получим из второй строки φ_A и подставим в первую: $\varphi_A = (-60 - 2\varphi_B)/7$, тогда $[9(-60 - 2\varphi_B)/7] - 13\varphi_B = -809$, т. е. $9(-60) - 9(2\varphi_B) - 7 \cdot 13\varphi_B = -7 \cdot 809$ или $-540 - 18\varphi_B - 91\varphi_B = -5663$, откуда $109\varphi_B = 5123$ и, следовательно, $\varphi_B = 5123/109 = 47$ В; $\varphi_A = (-60 - 2\varphi_B)/7 = (-60 - 2 \cdot 47)/7 = -154/7 = -22$ В; $\varphi_D = \varphi_A + E_3 = -22 + 12 = -10$ В.

Нанесем получившиеся потенциалы на граф (рис. 3.65,б). Рассчитаем токи в ветвях: $I_1 = (\varphi_B - \varphi_A - E_1)/R_1 = (47 + 22 - 85)/8 = -2$ А; $I_2 = (\varphi_B - \varphi_D - E_2)/R_2 = (47 + 10 - 84)/10 = -2,7$ А; $I_4 = (\varphi_D - \varphi_A - E_4)/R_4 = (-10 + 22 - 5)/10 = 0,7$ А; $I_6 = (\varphi_B - \varphi_O)/R_5 = 47/10 = 4,7$ А; $I_5 = (\varphi_O - \varphi_A)/R_6 = -(-22)/10 = 2,2$ А; $I_7 = (\varphi_O - \varphi_D)/4 = 10/4 = 2,5$ А. Ток I_3 следует определить, используя первый закон Кирхгофа в узле A или D . Например, в узел

А без тока I_3 втекают токи $I_4=0,7$ А и $I_5=2,2$ А, т. е. 2,9 А, а вытекает ток $I_1=2$ А. Следовательно, весь остальной ток, равный $2,9-2=0,9$ А, вытекает от узла А по третьей ветви. Нанесем токи на граф (рис. 3.65,б).

Выполним проверки: $I_4+I_5=I_1+I_3$, т. е. $0,7+2,2=2+0,9$; $I_1+I_2=I_6$, т. е. $2+2,7=4,7$; $I_5+I_7=I_2+I_4$, т. е. $2,2+2,5=2,7+0,7$; $I_6=I_5+I_7$, т. е. $4,7=2,2+2,5$; $E_1=R_1I_1+R_6I_6+R_5I_5$, т. е. $85=8\cdot 2+10\cdot 4,7+10\cdot 2,2=16+47+22=85$; $E_2=R_2I_2+R_6I_6+R_7I_7$, т. е. $84=10\cdot 2,7+10\cdot 4,7+4\cdot 2,5=27+47+10=84$; $E_3=-R_7I_7+R_5I_5$, т. е. $12=-4\cdot 2,5+10\cdot 2,2=-10+22$; $E_3-E_4=R_4I_4$, т. е. $12-5=10\cdot 0,7$.

Баланс мощностей: $E_1I_1+E_2I_2+E_3I_3-E_4I_4=I_1^2R_1+I_2^2R_2+I_4^2R_4+I_5^2R_5+I_6^2R_6+I_7^2R_7$, т. е. $85\cdot 2+84\cdot 2,7+12\cdot 0,9-5\cdot 0,7=(2)^2\cdot 8+(2,7)^2\cdot 10+(0,7)^2\cdot 10+(2,2)^2\cdot 10+(4,7)^2\cdot 10+(2,5)^2\cdot 4$ или $170+226,8+10,8-3,5=32+72,9+4,9+48,4+220,9+25$, откуда $404,1$ Вт $=404,1$ Вт.

Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.153. В схеме, показанной на рис. 3.66,а, методом узловых напряжений рассчитать токи в ветвях. Произвести все проверки.

Указание: разберите сначала задачи 3.150—3.152.

3.154. Методом узловых напряжений рассчитать токи в схеме, показанной на рис. 3.66,б, если $E_1=30$ мВ, $E_2=10$ мВ, $E_3=200$ мВ, $E_4=56$ мВ, $r_1=10$ Ом, $R_1=20$ Ом, $R_2=30$ Ом, $R_3=6$ Ом, $R_4=8$ Ом, $R_5=15$ Ом, $R_6=40$ Ом. Выполнить все проверки.

Указание: разберите сначала задачи 3.150—3.152.

3.155. Рассчитать ток, напряжения и мощность на всех элементах в цепи, показанной на рис. 3.67,а, если E_1 — независимый источник напряжения с ЭДС, равной 10 В, E_2 — зависимый источник напряжения, управляемый током цепи (ИНУТ), причем $E_2=\beta I$, где $\beta=3$ Ом — коэффициент пропорциональности между током I и ЭДС E_2 , имеющий размерность сопротивления и называемый поэтому «управляющим сопротивлением»; $R=5$ Ом.

Указание: изучите сначала с. 101—106 в [1].

Решение. Поскольку данная цепь неразветвленная, для расчета тока необходимо составить всего одно уравнение по вто-

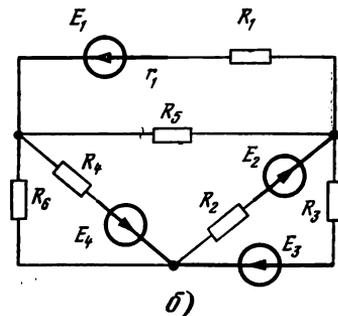
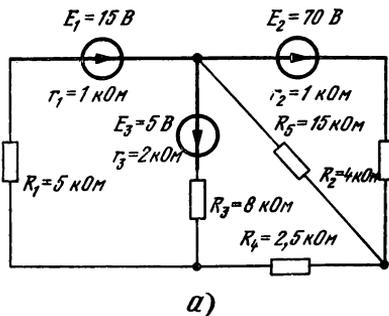


Рис. 3.66

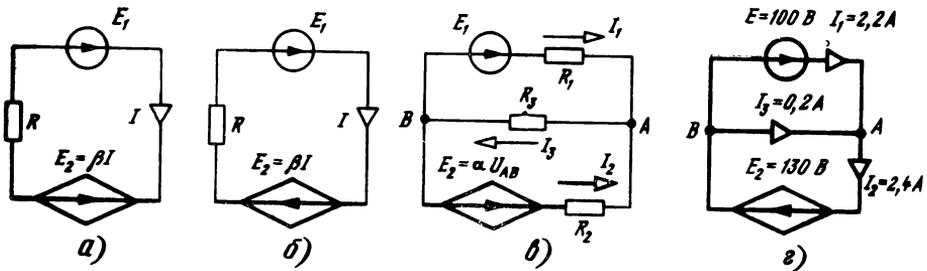


Рис. 3.67

рому закону Кирхгофа. Напомним, что наличие зависимых источников в цепи не увеличивает число уравнений, необходимых для выполнения расчетов напряжений и токов. Выберем обход по часовой стрелке; в этом случае $E_1 - E_2 = RI$, но $E_2 = \beta I$, следовательно, $E_1 - \beta I = RI$, откуда $I = E_2 / (R + \beta) = 10 / (5 + 3) = 1,25$ А, $E_2 = \beta I = 3 \cdot 1,25 = 3,75$ В.

Произведем проверки: $I = (E_1 - E_2) / R = (10 - 3,75) / 5 = 1,25$ А.

Баланс мощностей: $E_1 I - E_2 I = I^2 R$, т. е. $10 \cdot 1,25 - 3,75 \cdot 1,25 = (1,25)^2 \cdot 5$ или $7,8125$ Вт $= 7,8125$ Вт.

Проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.156. Решить задачу 3.155, если коэффициент пропорциональности β принимает значения 0, 1, 2, 5, 7 и 10 Ом. Постройте кривые $E_2 = f(\beta)$ и $I = f(\beta)$.

Указание: разберите сначала задачу 3.155.

3.157. Рассчитайте ток, напряжения и мощности в схеме, показанной на рис. 3.67,б, если $E_1 = 10$ В, $R = 5$ Ом, а коэффициент пропорциональности β принимает значения 0, 1, 2, 3, 5, 7 и 9 Ом.

Указание: разберите сначала задачу 3.155.

3.158. Рассчитать в схеме рис. 3.67,а управляющие сопротивления β и значение ЭДС E_2 , если $E_1 = 10$ В, $R = 5$ Ом для случаев: а) $I = 2$ А; б) $I = 1$ А; в) $I = 0,5$ А; г) $I = 0,1$ А.

Указание: разберите сначала задачу 3.155.

3.159. В задаче 3.158 определите β и E_2 для случаев: а) $I = 4$ А; б) $I = 5$ А; в) $I = 10$ А.

Указание: разберите сначала задачу 3.155.

Решение. Так как $\beta = (E_1 / I) - R$, то при $I = 4$ А $\beta = (10 / 4) - 5 = -2,5$, откуда $E_2 = \beta I = -2,5 \cdot 4 = -10$ В. Знак «минус» означает, что полярность источника E_2 для получения тока $I = 4$ А должна быть обратной по сравнению с указанной на рис. 3.67,а. В этом случае $(E_1 + E_2) / R = (10 + 10) / 5 = 4$ А. Аналогично при $I = 5$ А $\beta = -3$ Ом, $E_2 = -15$ В.

Произведем проверку: $(10 + 15) / 5 = 5$ А, что и было задано по условию. При $I = 10$ А $\beta = -4$ Ом, $E_2 = -40$ В, при этом $(10 + 40) / 5 = 10$ А. Проверки выполняются. Таким образом, в

данной задаче при токах в цепи, не превышающих 2 А, коэффициент β оказывается положительным и направление ЭДС E_2 противоположно направлению ЭДС E_1 . При $I=2$ А β и E_2 равны нулю, а при $I>2$ А коэффициент β становится отрицательным, что влечет изменение полярности источника на обратную.

3.160. Рассчитать токи, напряжения и мощности в цепи, показанной на рис. 3.67,в, если источник E_1 — независимый, а источник E_2 управляется напряжением U_{AB} . Исходные данные: $E_1=100$ В, $R_1=R_2=R_3=50$ Ом. Коэффициент пропорциональности между напряжением на точках AB и ЭДС E_2 $\alpha=13$.

Указание: разберите сначала задачу 3.155.

Решение. В рассматриваемой цепи три ветви, следовательно, в них протекают три различных тока, и для их расчета необходимо составить три уравнения — одно по первому закону Кирхгофа (поскольку узлов в цепи — два), а остальные — по второму. В соответствии с обозначениями, показанными на рис. 3.67,в, получается система уравнений

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2; \\ E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3; \\ E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3. \end{cases}$$

Так как $E_2 = \alpha U_{AB} = \alpha R_3 I_3$, уравнения приобретают вид

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2; \\ E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3; \\ \alpha R_3 I_3 = R_2 I_2 + R_3 I_3. \end{cases}$$

Значение $I_2 = I_3 - I_1$ из первой строки подставим в остальные строки:

$$\begin{cases} E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3; & (3.10) \\ \alpha R_3 I_3 = R_2 I_3 - R_2 I_1 + R_3 I_3. & (3.11) \end{cases}$$

Аналогично из (3.10) $I_1 = (E_1 - R_3 I_3) / R_1$ подставим в (3.11), тогда $\alpha R_3 I_3 = R_2 I_3 - (R_2 E_1 / R_1) + (R_2 R_3 I_3 / R_1) + R_3 I_3$. Приведя выражение к общему знаменателю, отбросив его и сложив подобные члены, получим уравнение с одним неизвестным: $I_3 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 - \alpha R_1 R_3) = R_2 E_1$, откуда $I_3 = R_2 E_1 / (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 - \alpha R_1 R_3)$. Так как $I_1 = (E_1 / R_1) - (R_3 I_3 / R_1)$, то

$$\begin{aligned} I_1 &= (E_1 / R_1) - [(R_2 R_3 E_1) / R_1 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 - \alpha R_1 R_3)] = \\ &= \frac{E_1 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 - \alpha R_1 R_3 - R_2 R_3)}{R_1 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 - \alpha R_1 R_3)} = \\ &= \frac{E_1 (R_1 R_2 + R_1 R_3 - \alpha R_1 R_3)}{R_1 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 - \alpha R_1 R_3)} = \\ &= \frac{E_1 (R_2 + R_3 - \alpha R_3)}{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 - \alpha R_1 R_3)}; \end{aligned}$$

$$I_2 = I_3 - I_1 = \frac{E_1 (\alpha R_1 R_3 - R_1 R_3)}{R_1 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 - \alpha R_1 R_3)} =$$

$$= \frac{E_1 R_3 (\alpha - 1)}{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 - \alpha R_1 R_3)}.$$

Подставим числовые значения:

$$I_1 = \frac{100 (50 + 50 - 13 \cdot 50)}{(50 \cdot 50 + 50 \cdot 50 + 50 \cdot 50 - 13 \cdot 50 \cdot 50)} = 2,2 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{100 (13 \cdot 50 - 50)}{(50 \cdot 50 + 50 \cdot 50 + 50 \cdot 50 - 13 \cdot 50 \cdot 50)} = -2,4 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{50 \cdot 100}{(50 \cdot 50 + 50 \cdot 50 + 50 \cdot 50 - 13 \cdot 50 \cdot 50)} = -0,2 \text{ А}.$$

Как видно из полученных решений, направление тока I_1 совпадает с предполагаемым, а направления токов I_2 и I_3 противоположны. Электродвижущая сила $E_2 = \alpha U_{AB} = \alpha R_3 I_3 = 13 \times 50 (-0,2) = -130 \text{ В}$. Нанесем действительные токи на граф (рис. 3.67,2).

Выполним проверки: $I_1 + I_3 = I_2$, т. е. $2,2 + 0,2 = 2,4$; $E_1 = R_1 I_1 - R_3 I_3$, т. е. $100 - 2,2 \cdot 50 - 0,2 \cdot 50$; $E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3$, т. е. $130 = 2,4 \cdot 50 + 0,2 \cdot 50$; $E_1 + E_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2$, т. е. $100 + 130 = 50 \times 2,2 + 50 \cdot 2,4$.

Баланс мощностей: $E_1 I_1 + E_2 I_2 = 100 \cdot 2,2 + 130 \cdot 2,4 = 532 \text{ Вт}$;
 $I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = (2,2)^2 \cdot 50 + (2,4)^2 \cdot 50 + (0,2)^2 \cdot 50 = 242 + 242 + 288 = 532 \text{ Вт}$.

Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.161. Решить задачу 3.160, если $E_1 = 5 \text{ В}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 5 \text{ Ом}$, $\alpha = 5$.

Указание: разберите сначала задачу 3.160.

3.162. Решите задачу 3.160, если $E_1 = 10 \text{ В}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 5 \text{ Ом}$, $\alpha = 2$.

Указание: разберите сначала задачу 3.160.

3.163. Рассчитайте входное сопротивление цепи, показанной на рис. 3.68,а.

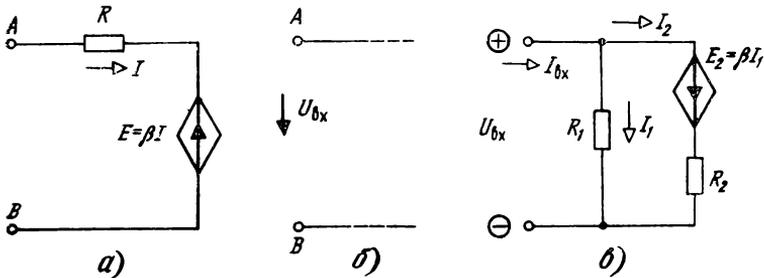


Рис. 3.68

Указание: повторите материал на с. 81, 82 и 102—105 в [1].

Решение. Входным сопротивлением цепи $R_{вх}$ в общем случае называется отношение входного напряжения цепи $U_{вх}$ к входному току. Обратите внимание, что при наличии зависимых источников определять входное сопротивление цепи по виду схемы в принципе не представляется возможным. Чтобы рассчитать входное сопротивление (или входную проводимость) цепи, необходимо в общем случае:

затяться произвольным напряжением на входе U_1 (это напряжение по условию не дается, его следует выбрать самостоятельно, значение этого напряжения роли не играет, поскольку впоследствии это напряжение сократится);

любым методом (чаще всего с помощью законов Кирхгофа) рассчитать ток во входной ветви цепи, причем отношение $U_{вх}/I_{вх}$ есть входное сопротивление цепи $R_{вх}$, а $I_{вх}/U_{вх}$ — входная проводимость $G_{вх}$. В общем случае цепь имеет столько входных сопротивлений (проводимостей), сколько ветвей в цепи (подробнее см. задачу 3.105). Приложим к входным зажимам цепи напряжение $U_{вх}$ (рис. 3.68, б). По второму закону Кирхгофа справедливо выражение $U_{вх} - E = RI$. Так как $E = \beta I$, то $U_{вх} - \beta I = RI$ или $I = U_{вх}/(R + \beta)$, откуда $R_{вх} = U_{вх}/I = R + \beta$. Обратите внимание, что если $\beta = 0$, то зависимый источник E перестает существовать, тогда $R_{вх} = R$. Если коэффициент управления β отличен от нуля, то $R_{вх} \neq R$, на что было указано выше. В общем случае $G_{вх} = 1/(R + \beta)$.

3.164. Решить задачу 3.163, если ЭДС зависимого источника E пропорциональна входному напряжению цепи, т. е. $E = \alpha U_{AB}$, где α — безразмерный коэффициент пропорциональности между ЭДС E_2 и входным напряжением U_{AB} . Чему равно $R_{вх}$ при $\alpha = 1$?

Указание: разберите сначала задачу 3.163.

3.165. Решить задачу 3.164, если полярность источника E изменена на обратную.

Указание: разберите сначала задачу 3.163.

3.166. Рассчитайте входные сопротивление $R_{вх}$ и проводимость $G_{вх}$ в схеме, показанной на рис. 3.68, а, если полярность источника E изменена на противоположную по сравнению с показанной на схеме. Может ли при этом входное сопротивление цепи равняться нулю, и если может, то при каких условиях?

Указание: разберите сначала задачу 3.163.

Решение. Изменение полярности зависимого источника на обратную равносильно изменению знака у коэффициента пропорциональности. На этом основании в получившейся цепи $R_{вх} = R - \beta$. Очевидно, что при $\beta > R$ входное сопротивление цепи оказывается резистивным и отрицательным. Отрицательное резистивное сопротивление широко используется в современных электронных устройствах. В качестве зависимых источников применяются активные элементы, чаще всего операционные

усилители, а в некоторых случаях транзисторы (подробнее см. задачу 6.46).

3.167. Рассчитать входное сопротивление цепи, показанной на рис. 3.68, в, если ЭДС E_2 управляется током I_1 .

Указание: разберите сначала задачи 3.155, 3.160 и 3.163.

Решение. Зададимся входным напряжением U_1 с полярностью, показанной на рис. 3.68, в, и определим токи I_1 и I_2 . Как видно из схемы, $I_1 = U_{вх}/R_1$, $U_{вх} - E_2 = R_2 I_2$. Но $E_2 = \beta I_1 = \beta U_{вх}/R_1$, поэтому $U_{вх} - (\beta U_{вх}/R_1) = R_2 I_2$ или $U_{вх}(R_1 - \beta) = R_1 R_2 I_2$, откуда $I_2 = [U_{вх}(R_1 - \beta)]/R_1 R_2$. Входной ток $I_{вх} = I_1 + I_2 = U_{вх}[(1/R_1) + (R_1 - \beta)/(R_1 R_2)] = U_{вх}(R_2 + R_1 - \beta)/R_1 R_2$, тогда $R_{вх} = U_{вх}/I_{вх} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2 - \beta)$. Обратим внимание, что при отсутствии независимого источника (т. е. при $\beta = 0$) входное сопротивление цепи есть сопротивление двух ветвей, соединенных параллельно, т. е. $R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$, при наличии зависимых источников ($\beta \neq 0$) входное сопротивление цепи становится отличным от $R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ и, следовательно, не может быть записано непосредственно по виду схемы. Как неоднократно указывалось выше, входное сопротивление всякой цепи есть отношение напряжения на зажимах цепи к току во входной ветви данной цепи.

3.168. В схеме, показанной на рис. 3.69, источник напряжения E — независимый, а источник тока J зависит от напряжения на сопротивлении R_1 (т. е. между точками AB), причем $J = S U_{AB} = S R_1 I_1$, где S — конструктивный параметр, часто называемый крутизной управления током J . Рассчитать токи, напряжения и мощности, если $E = 100$ В, $R_1 = 40$ Ом, $R_2 = 60$ Ом, а параметр S принимает значения 0; 100 мА/В; 500 мА/В; 1 А/В.

Указание: разберите сначала задачу 3.160.

Решение. Решим данную задачу методом контурных токов. Зададимся контурными токами I_A и J . В этом случае получается уравнение $E = I_A(R_1 + R_2) + R_2 J = I_A(R_1 + R_2) + R_2 S R_1 I_A$ (поскольку $I_1 = I_A$), откуда $I_A = E / (R_1 + R_2 + S R_1 R_2)$. Тогда $I_1 = I_A$, $I_2 = I_A + J = [E / (R_1 + R_2 + S R_1 R_2)] + [R_1 E / (R_1 + R_2 + S R_1 R_2)] = [E(1 + S R_1) / (R_1 + R_2 + S R_1 R_2)]$; $J = S R_1 E / (R_1 + R_2 + S R_1 R_2)$. При $S = 0$ $I_1 = E / (R_1 + R_2) = 100 / 100 = 1$ А, $J = 0$, $I_2 = 1$ А. При $S = 500 \cdot 10^{-3}$ А/В $I_1 = 100 / (100 + 1200) = 76,9$ мА, $J = 1,538$ А, $I_2 = 1,6153$ А. При $S = 1$ $I_1 = 0,04$ А, $J = 1,6$ А, $I_2 = 1,64$ А.

Произведем проверку для последнего случая. По второму закону Кирхгофа $E = R_1 I_1 + R_2 I_2 = 40 \cdot 0,04 + 60 \cdot 1,64 = 1,6 + 98,4 = 100$ В.

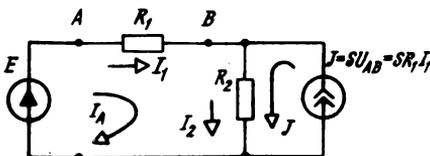


Рис. 3.69

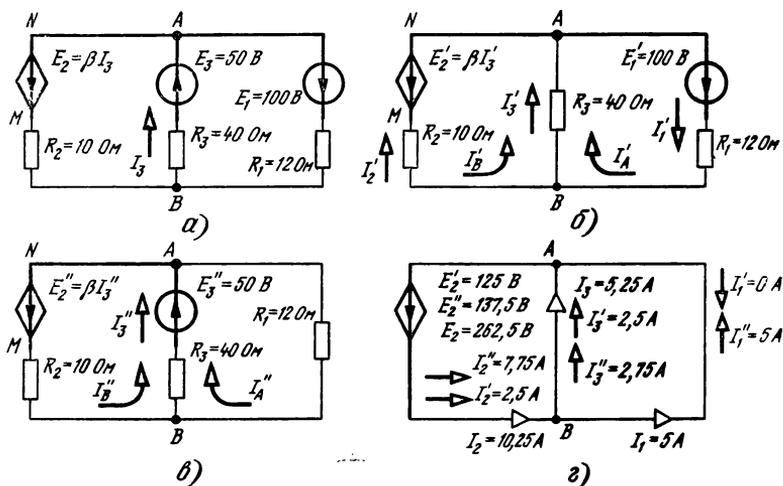


Рис. 3.70

Баланс мощностей: $E_1 I_1 + J R_2 I_2 = 100 \cdot 0,04 + 1,6 \cdot 60 \cdot 1,64 = 4 + 157,44 = 161,44$ Вт; $I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = (0,04)^2 \cdot 40 + (1,64)^2 \cdot 60 = 161,44$ Вт.

Проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.169. Решить задачу 3.168, если $S = 0,1 - 0,2 - 0,3$ А/В.

Указание: разберите сначала задачу 3.168.

3.170. Рассчитать токи и напряжения методом наложения в цепи, показанной на рис. 3.70, а, если $\beta = 50$. Проверить баланс мощностей.

Указание: повторите материал на с. 105, 106 в [1].

Решение. Цепь, показанная на рис. 3.70, а, содержит три источника, из которых два (E_1 и E_3) — независимые источники напряжения, а E_2 — зависимый, управляемый током третьей ветви, т. е. являющийся ИНУТ. При расчете цепей с зависимыми (управляемыми) источниками следует быть чрезвычайно внимательными к направлению стрелок как самого зависимого источника, так и управляющего им тока (или управляющего напряжения). Например, в схеме, показанной на рис. 3.70, а, задана такая зависимость, при которой ЭДС E_2 , направленная от точки N к точке M , будет положительной в том случае, если управляющий этой ЭДС ток I_3 течет в третьей ветви от точки B к точке A , т. е. так, как показано на рис. 3.70, а. Если в результате проведенных расчетов оказывается, что действительное направление тока I_3 противоположно предполагаемому (т. е. показанному на рис. 3.70, а), то знак ЭДС E_2 в этом случае изменяется на противоположный. На это обстоятельство при расчете цепей с зависимыми источниками следует обращать внимание.

Есть еще одно важное правило, касающееся расчета цепей с зависимыми источниками методом наложения. При расчете линейных цепей методом наложения, как известно, поочередно исключаются все источники, кроме одного, отклики от которого рассчитываются во всех ветвях цепи. При наличии зависимых источников исключаются все независимые источники, кроме одного, но зависимые источники так же, как и пассивные элементы цепи, не исключаются и остаются на своих местах неизменными. Коэффициент пропорциональности зависимого источника определяется его конструкцией, которая не зависит от вида включения цепи, поэтому этот коэффициент остается неизменным при составлении различных частных схем. Поскольку управляющий ток (или управляющее напряжение), как правило, при изменении схемы цепи изменяется, значение зависимой (управляемой) ЭДС (или источника тока) также изменится.

Учитывая сделанные замечания, рассчитаем параметры цепи, показанной на рис. 3.70, а, методом наложения. Составим первую частную схему. Для этого оставим независимый источник E_1 , зависимый источник E_2 и исключим независимый источник E_3 (рис. 3.70, б). Как обычно, все ЭДС и токи в первой частной схеме обозначаются одним штрихом, хотя в данном случае очевидно, что $E_1' = E_1$. Получившаяся схема содержит два источника (независимый $E_1' = E_1$ и зависимый $E_2' = \beta I_3'$), поэтому для расчета токов в ветвях следует выбрать один из общих методов расчета. В данном случае наиболее простым является метод контурных токов.

Зададимся контурными токами I_A' и I_B' , как показано на рис. 3.70, б. В этом случае справедливыми являются уравнения

$$\begin{cases} E_1' = I_A' (R_1 + R_3) + I_B' R_3; \\ E_2' = I_B' (R_2 + R_3) + I_A' R_3. \end{cases}$$

Так как $E_2' = \beta I_3'$, а $I_3' = I_A' + I_B'$, то $E_2' = \beta (I_A' + I_B')$, и тогда

$$\begin{cases} E_1' = I_A' (R_1 + R_3) + I_B' R_3; \\ \beta I_A' + \beta I_B' = I_B' (R_2 + R_3) + I_A' R_3. \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} E_1' = I_A' (12 + 40) + I_B' 40; \\ 50 I_A' + 50 I_B' = I_B' (10 + 40) + I_A' 40 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 52 I_A' + 40 I_B' = 100; \\ 10 I_A' = 0, \end{cases}$$

откуда $I_A' = 0$, $I_B' = 100/40 = 2,5$ А. Как видно из схемы (рис. 3.70,б), $I_1' = I_A' = 0$, $I_2' = I_B' = 2,5$ А, $I_3' = I_A' + I_B' = 0 + 2,5 = 2,5$ А, $E_2' = \beta I_3' = 50 \cdot 2,5 = 125$ В. Составим и рассчитаем вторую частную схему (рис. 3.70,в). В этом случае ЭДС зависимого источника $E_2'' = \beta I_3''$, где I_3'' — ток третьей ветви, текущий от точки А к точке В. Зададимся контурными токами I_A'' и I_B'' , составим систему двух уравнений и определим токи во всех ветвях схемы. (Для общности обозначений источник третьей ветви назовем $E_3'' = E_3 = 50$ В). Получается система уравнений

$$\begin{cases} E_3'' = I_A''(R_1 + R_3) + I_B''R_3; \\ E_3'' + E_2'' = I_B''(R_2 + R_3) + I_A''R_3. \end{cases}$$

Так как $E_2'' = \beta I_3'' = \beta(I_A'' + I_B'')$, система принимает вид

$$\begin{cases} 50 = I_A''(12 + 40) + I_B'' \cdot 40; \\ 50 + 50I_A'' + 50I_B'' = I_B''(10 + 40) + I_A'' \cdot 40 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 52I_A'' + 40I_B'' = 50; \\ (50 - 40)I_A'' = -50, \end{cases}$$

откуда $I_A'' = -5$ А, тогда $40I_B'' = 50 - 52(-5) = 310$, т. е. $I_B'' = 310/40 = 7,75$ А. Как видно из схемы (рис. 3.70,в), $I_1'' = I_A'' = -5$ А; $I_2'' = I_B'' = 7,75$ А; $I_3'' = I_A'' + I_B'' = -5 + 7,75 = 2,75$; $E_2'' = \beta I_3'' = 50 \cdot 2,75 = 137,5$ В. Нанесем получившиеся токи на граф, рис. 3.70,г. Рассчитаем общие токи в ветвях и ЭДС зависимого источника в исходной схеме: $I_1 = I_1' + I_1'' = 0 + (-5) = -5$ А; $I_2 = I_2' + I_2'' = 2,5 + 7,75 = 10,25$ А; $I_3 = I_3' + I_3'' = 2,5 + 2,75 = 5,25$ А; $E_2 = E_2' + E_2'' = 125 + 137,5 = 262,5$ В.

Произведем проверки. По первому закону Кирхгофа $I_2 = I_1 + I_3$, действительно, $10,25 = 5 + 5,25$. По второму закону Кирхгофа $E_1 + E_3 = -R_1I_1 + R_3I_3$ или $100 + 50 = -5 \cdot 12 + 5,25 \cdot 40$, т. е. $150 = -60 + 210$; $E_3 + E_2 = R_3I_3 + R_2I_2$ или $50 + 262,5 = 40 \times 5,25 + 10 \cdot 10,25$, т. е. $312,5 = 210 + 102,5$; $E_1 - E_2 = R_2I_2 + R_1I_1$ или $262,5 - 100 = 102,5 + 60$.

Рассчитаем напряжение между узлами А и В. Примем потенциал точки А за нулевой ($\varphi_A = 0$); в этом случае при обходе первой ветви $\varphi_B = \varphi_A + E_1 + R_1I_1 = 0 + 100 + 12 \cdot 5 = 160$ В, а второй $\varphi_B = \varphi_A - E_3 + R_3I_3 = 0 - 50 + 40 \cdot 5,25 = -50 + 210 = 160$ В; аналогично по третьей ветви $\varphi_B = \varphi_A + E_2 - R_2I_2 = 0 + 262,5 - 102,5 = 160$ В. Результат во всех случаях получился одинаковым, что, разумеется, и должно было быть.

Проверим баланс мощностей: $P_{\Sigma} = -E_1I_1 + E_3I_3 + E_2I_2 = -100 \cdot 5 + 50 \cdot 5,25 + 262,5 \cdot 10,25 = -500 + 262,5 + 2690,625 =$

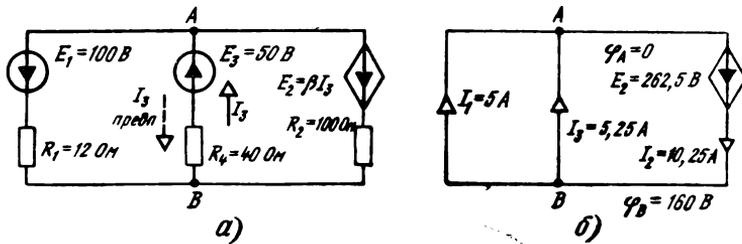


Рис. 3.71

$$= 2453,125 \text{ Вт}; P_H = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = (5)^2 \cdot 12 + (10,25)^2 \cdot 10 + (5,25)^2 \cdot 40 = 300 + 1102,5 + 1050,625 = 2453,125 \text{ Вт}.$$

Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

3.171. Решить задачу 3.170 методом двух узлов.

Указание: повторите материал на с. 78,79 и 101—104 в [1].

Решение. Перерисуем схему задачи 3.171 на рис. 3.71,а. Как всегда, при расчете цепей методом двух узлов необходимо задаться предполагаемой полярностью результирующего напряжения на узлах цепи. Примем, что потенциал φ_A выше потенциала φ_B (т. е. нестрогая говоря, примем, что «плюс» результирующего напряжения находится в точке А). В этом случае напряжение между точками А и В рассчитывается по обычной формуле:

$$U_{AB} = \Sigma EG / \Sigma G = \frac{[(-E_1/R_1) + (E_3/R_3) - (E_2/R_2)]}{(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3)} \quad (3.12)$$

(подробнее см. с. 78, 79 в [1] и задачи 3.118, 3.120, 3.122). Так как ЭДС второго источника зависит от тока в третьей ветви, то ток I_3 следует выразить через напряжение U_{AB} . Поскольку последнее выражение было составлено из предположения, что $\varphi_A > \varphi_B$, положительный ток в третьей ветви должен быть направлен от точки А к точке В (на рис. 3.71,а показан штриховой линией) и рассчитан из выражения $I_{3\text{пол}} = (U_{AB} - E_3) / R_3$. Но ЭДС E_2 будет иметь знак «плюс» в случае, если ток I_3 течет от точки В к точке А, а так как ток $I_{3\text{пол}}$ имеет противоположное направление, ЭДС E_2 является величиной отрицательной. Таким образом, в данной цепи

$$E_2 = \beta (-I_{3\text{пол}}) = \beta \left[- \left(\frac{U_{AB} - E_3}{R_3} \right) \right] = -\beta \left(\frac{U_{AB} - E_3}{R_3} \right).$$

Подставим получившееся выражение в (3.12):

$$U_{AB} = \frac{(-E_1/R_1) + (E_3/R_3) - \left[-\beta \left(\frac{U_{AB} - E_3}{R_3} \right) \right]}{(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3)} =$$

$$= \frac{- (100/12) + (50/40) + (50/400) (U_{AB} - 50)}{(1/12 + 1/40 + 1/10)} =$$

$$= \frac{-8,333 + 1,25 + 0,125U_{AB} - 6,25}{0,083 + 0,025 + 0,1} = \frac{-13,33 + 0,125U_{AB}}{0,208},$$

т. е. $0,208 U_{AB} - 0,125 U_{AB} = -13,33$ или $0,083 U_{AB} = -13,33$, откуда $U_{AB} = -(13,33/0,083) = -160$ В. Знак «минус» указывает, что действительная полярность напряжения между узлами противоположна предполагаемой, и, следовательно, потенциал точки B выше потенциала точки A на 160 В, что совпадает с результатами, полученными при решении задачи 3.170. Зная напряжение между узлами, ЭДС и сопротивления ветвей, легко рассчитать токи во всех ветвях: $I_1 = (U_{BA} - E_1)/R_1 = (160 - 100)/12 = 5$ А; $I_3 = (U_{BA} + E_3)/R_3 = (160 + 50)/40 = 5,25$ А (в направлении от точки B к точке A); $I_2 = (U_{BA} - E_2)/R_2 = (U_{BA} - \beta I_3)/R_2 = (160 - 50 \cdot 5,25)/10 = (160 - 262,5)/10 = -10,25$ А. Получившиеся токи показаны на графе (рис. 3.71,б).

3.172. Рассчитайте токи в цепи, показанной на рис. 3.72,а, методом наложения, если $\beta = 20$ Ом. Выполните все проверки.
Указание: разберите сначала задачу 3.170.

3.173. Решите задачу 3.172, если $E_1 = 100$ В, $E_2 = 40$ В, $E_3 = \beta I_1$, где $\beta = 120$ Ом. Выполните все проверки.

Указание: разберите сначала задачу 3.170.

3.174. Рассчитайте в схеме, показанной на рис. 3.72,б, токи во всех ветвях методом наложения. Выполните все проверки.

Указание: разберите сначала задачу 3.170.

Решение. В цепи, показанной на рис. 3.72,б, три источника: независимый источник напряжения E_1 , независимый источник тока J_1 и зависимый источник тока $J_2 = \beta I_1$, где β — в данном случае безразмерный коэффициент пропорциональности, а I_1 — ток, текущий через сопротивление R_1 от точки A к точке B (т. е. так, как показано на рис. 3.72,б). Обратите внимание, что при противоположном направлении тока I_1 коэффициент β становится величиной отрицательной. Для удобства рассмотрения методики расчета преобразуем зависимый источник тока J_2 в эквивалентный зависимый источник напряжения. Напомним, что для этого вместо источника тока, включенного параллельно сопротивлению R_2 , следует включить последовательно с этим же сопротивлением источник напряжения, ЭДС которого равна произведению тока источника тока, который преобразуется в источник напряжения, на сопротивление, параллельно которому источник тока включен. Так как источник тока $J_2 = \beta I_1$, то эквивалентный ему источник напряжения определяется из выражения $E_2 = J_2 R_2 = \beta I_1 R_2$, схема при этом принимает вид рис. 3.72,в.

Поскольку по условию задача должна решаться методом наложения, составим первую частную схему, состоящую из не-

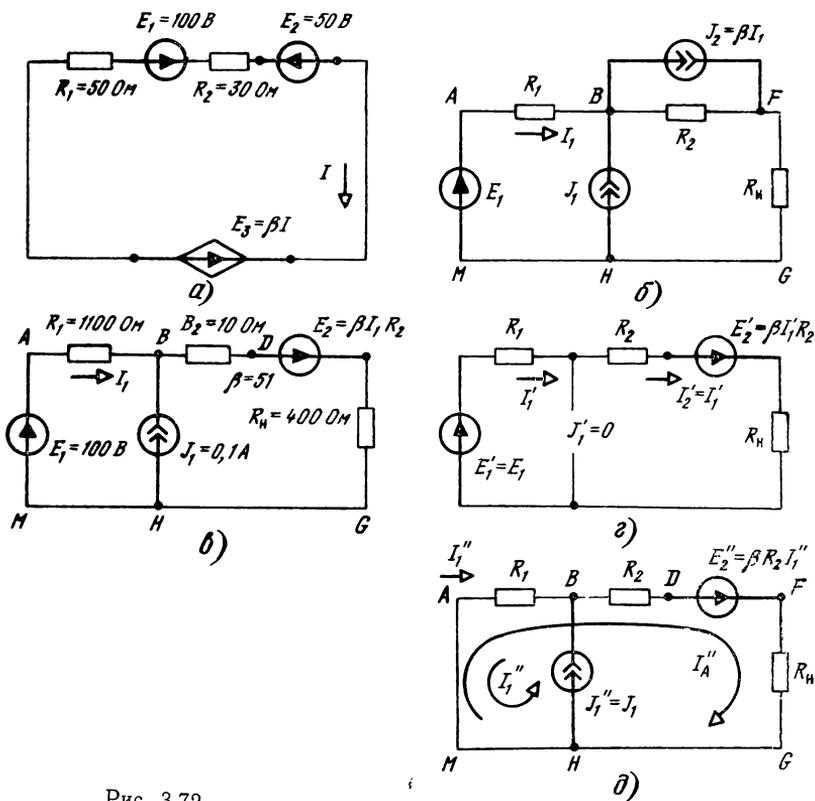


Рис. 3.72

зависимого источника E_1 , зависимого E_2 и пассивных элементов, в которой, как видно из рис. 3.72,з, $I_1' = I_2' = (E_1' + E_2') / (R_1 + R_2 + R_H) = (E_1 + \beta I_1' R_2) / (R_1 + R_2 + R_H)$ или $I_1' (R_1 + R_2 + R_H - \beta R_2) = E_1$, откуда $I_1' = I_2' = E_1 / [R_1 + R_H - R_2(\beta - 1)] = 100 / [1100 + 400 - 10(51 - 1)] = 0,1 \text{ A} = 100 \text{ mA}$.

Составим вторую частную схему. Для этого необходимо оставить независимый источник тока, зависимый источник напряжения, пассивные элементы и исключить независимый источник напряжения E_1 (рис. 3.72,д). В получившейся схеме два контура, но в одном из них (например, $ВАНВ$) ток известен, так как он задается током независимого источника $J_1'' = J_1$. Следовательно, для расчета токов в данной цепи необходимо составить всего одно уравнение, но обязательно по контуру, в который не входит источник тока (подробнее см. с. 98—100 в [1] и задачи 3.144, 3.146), а это возможно только для контура $АВDFGHMA$. При этом получается уравнение $E_2'' = I_A'' (R_1 + R_2 + R_H) - J_1'' R_1$. Так как $E_2'' = \beta R_2 I_1'' = \beta R_2 (I_A'' - J_1)$, то $\beta R_2 I_A'' - \beta R_2 J_1 = I_A'' (R_1 + R_2 + R_H) - J_1 R_1$, откуда после простых преобразований $I_A'' = [J_1 (R_1 - \beta R_2)] / (R_1 + R_2 + R_H - \beta R_2)$. Как вид-

но из схемы (рис. 3.72, *д*), $I_1'' = I_A'' - J_1 = \{[J_1(R_1 - \beta R_2)] / (R_1 + R_2 + R_H - \beta R_2)\} - J_1 = [-J_1(R_2 + R_H)] / (R_1 + R_2 + R_H - \beta R_2)$; $I_2'' = I_A''$.

Определим токи I_1 , I_2 и зависимую ЭДС E_2 :

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1' + I_1'' = \frac{E_1}{R_1 + R_2 + R_H - \beta R_2} + \frac{-J(R_2 + R_H)}{R_1 + R_2 + R_H - \beta R_2} = \\ &= \frac{E_1 - J(R_2 + R_H)}{R_1 + R_2 + R_H - \beta R_2} = \frac{100 - 0,1(10 + 400)}{1100 + 10 + 400 - 51 \cdot 10} = \frac{59}{1000} = \\ &= 0,059 \text{ А} = 59 \text{ мА}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= I_2' + I_2'' = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_H - \beta R_2} + \frac{J(R_1 - \beta R_2)}{R_1 + R_2 + R_H - \beta R_2} = \\ &= \frac{100 + 0,1(1100 - 51 \cdot 10)}{1000} = 0,159 \text{ А} = 159 \text{ мА}; \end{aligned}$$

$$E_2 = \beta I_1 R_2 = 51 \cdot 59 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = 30,09 \text{ В} \approx 30 \text{ В}.$$

Произведем проверки: $I_1 + J = I_2$, т. е. $59 + 100 = 159$ мА; $E_1 + E_2 = R_1 I_1 + I_2(R_2 + R_H)$ или $100 + 30,09 = 1,1 \cdot 10^3 \cdot 59 \cdot 10^{-3} + 159 \times 10^{-3} \cdot 0,41 \cdot 10^3 = 130,09$ В.

Проверим баланс мощностей. Рассчитаем напряжение между точками BH , т. е. на зажимах источника тока. Примем потенциал точки H за нулевой. В этом случае $\varphi_B = E_1 - R_1 I_1 = 100 - 64,9 = 35,1$ В, тогда $U_{BH} = \varphi_B - \varphi_H = 35,1$ В; $P_{\text{и}} = E_1 I_1 + U_{BH} J_1 + E_2 I_2 = 100 \cdot 59 \cdot 10^{-3} + 0,1 \cdot 35,1 + 30,09 \cdot 0,159 = 5,9 + 3,51 + 4,78431 = 14,19431$ Вт; $P_{\text{а}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 (R_2 + R_H) = (0,059)^2 \cdot 1100 + (0,159)^2 \cdot 410 = 3,8291 + 10,36521 = 14,19431$ Вт.

Вернемся к исходной схеме (рис. 3.72, *б*). Ток зависимого источника J_2 в этом случае можно найти двумя способами: либо умножив коэффициент β на ток I_1 , либо поделив ЭДС E_2 на сопротивление R_2 , т. е. $I_2 = \beta I_1 = 51 \cdot 59 \cdot 10^{-3} = 3,009$ А или $J_2 = E_2 / R_2 = 30,09 / 10 = 3,009$ А ≈ 3 А. В данной схеме $I_1 = 59$ мА; $J_1 = 100$ мА; $I_{R_2} = -2850$ мА; $J_2 = 3009$ мА; $I_H = 159$ мА.

Заметим, что число уравнений, необходимых для расчета токов в схемах рис. 3.72, *б* и *в*, одинаковое, а именно единица. Действительно, в схеме рис. 3.72, *б* три контура, но в ней два источника тока и составлять, таким образом, приходится только одно уравнение по контуру $ABFGHMA$: $E_1 = I_A(R_1 + R_2 + R_H) - R_1 J_1 - R_2 I_2$. Подставив $J_2 = \beta I_1 = \beta(I_A - J_1)$, получим результат, найденный ранее.

Учащимся предлагается проделать все проверки для схемы рис. 3.72, *в*.

3.175. Решите задачу 3.174 методом контурных токов, если полярность независимого источника тока J_1 изменена на противоположную. Выполните все проверки.

Указание: разберите сначала задачу 3.174.

3.176. Рассчитайте токи в цепи, показанной на рис. 3.72, в, методом двух узлов, если $\beta=10$. Выполните все проверки.
Указание: разберите сначала задачу 3.171.

Глава 4. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

4.1. Рассчитать магнитную проницаемость материала μ_a с относительной магнитной проницаемостью $\mu_r=79,6$.

Указание: изучите сначала с. 122 в [1].

4.2. При какой относительной магнитной проницаемости μ_r магнитное сопротивление материала $R_M=2 \cdot 10^6$ 1/Гн $=2$ 1/мкГн, если средний диаметр магнитопровода $D_{ср}=20$ см, а сечение магнитопровода $S=2,5$ см².

Указание: изучите сначала с. 122, 123 в [1].

4.3. Магнитопровод имеет сечение $S=2,5$ см², средняя длина магнитопровода $l_{ср\ магн}=62,8$ см², длина воздушного зазора $l_в=5$ мм. Рассчитать магнитное сопротивление магнитопровода, если $\mu_r=1000$. Какое сопротивление больше — магнитопровода или воздушного зазора и во сколько раз?

Указание: изучите сначала с. 122, 123 в [1].

4.4. На магнитопровод с воздушным зазором, параметры которого приведены в задаче 4.3, намотана обмотка, имеющая $\omega=1000$ витков, по которой протекает постоянный ток $I=0,5$ А. Рассчитать магнитное падение напряжения на магнитопроводе и воздушном зазоре. На каком участке магнитное падение напряжения больше и во сколько раз?

Указание: изучите сначала с. 122—124 в [1].

4.5. Во сколько раз увеличится магнитное напряжение на магнитопроводе, параметры которого приведены в задачах 4.3 и 4.4, если ширину воздушного зазора уменьшить до нуля?

Указание: изучите сначала с. 122—124 в [1].

4.6. На тороид, длина средней линии которого $l_{ср}=10$ см, намотана обмотка $\omega=500$ витков. Какой максимальный ток можно пропустить по обмотке, чтобы катушка работала в линейном режиме, если основная кривая намагничивания имеет вид, показанный на рис. 4.1, а? Каков магнитный поток в магнитопроводе при сечении $S=5$ см²?

Указание: изучите сначала с. 124—127 в [1].

Решение. Из рис. 4.1, а видно, что линейным является участок, в котором напряженность магнитного поля H не превышает 1000 А/м. Так как $H=I\omega/l$, то $I=Hl/\omega=1000 \cdot 0,1/500=0,2$ А $=200$ мА. При $H=1000$ А/м значение магнитной индукции $B=0,5$ Тл (читается «тесла»). Магнитный поток Φ определяется из выражения $\Phi=BS=0,5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}=250 \cdot 10^{-6}$ Вб $=250$ мкВб (читается «микровебер»).

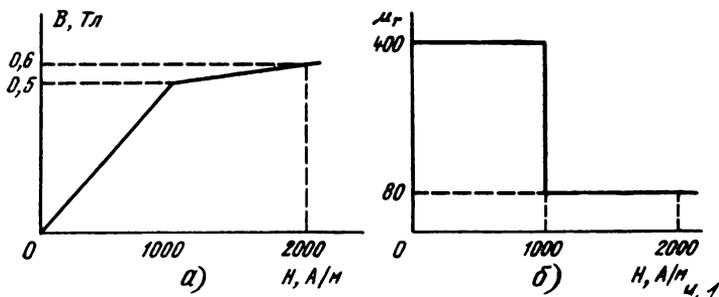


Рис. 4.1

4.7. Как изменяется относительная магнитная проницаемость μ_r в магнитопроводе, параметры которого приведены в задаче 4.6?

Указание: изучите сначала с. 125, 126 в [1].

Решение. В интервале от $H=0$ до $H_1=1000$ А/м (т. е. при токах, не превышающих 200 мА) характеристика $B=f(H)$ представляет собой прямую линию, следовательно, на этом интервале магнитная индукция B пропорциональна напряженности магнитного поля H , а это означает, что магнитная проницаемость μ имеет неизменное значение. Так как $B=\mu_a H$, то $\mu_a=B/H=0,5/1000=0,5 \cdot 10^{-3}$ Гн/м. Поскольку $\mu_a=\mu_0 \mu_r$, а $\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — величина постоянная, то $\mu_r=\mu_a/\mu_0=0,5 \cdot 10^{-3}/4\pi \cdot 10^{-7}=398 \approx 400$. В интервале от $H_1=1000$ А/м до $H_2=2000$ А/м скорость нарастания магнитной индукции уменьшается, а это означает, что материал приближается к насыщению, его магнитное сопротивление возрастает, а относительная магнитная проницаемость уменьшается (подобно тому, как в электрической цепи увеличение электрического сопротивления означает уменьшение электрической проводимости). На этом основании $\mu_a=\Delta B/\Delta H=(0,6-0,5)/(2000-1000)=0,1 \times 10^{-3}$ Гн/м, откуда $\mu_r=\mu_a/\mu_0=0,1 \cdot 10^{-3}/4\pi \cdot 10^{-7}=79,6 \approx 80$.

Таким образом, при $H=0 \dots 1000$ А/м относительная магнитная проницаемость равнялась 400, а при напряженности от 1000 до 2000 А/м — только 80, т. е. в 5 раз меньше (рис. 4.1, б).

4.8. Рассчитать индуктивность тороида, параметры которого приведены в задаче 4.7.

Указание: изучите сначала с. 136—138 в [1].

Решение. Индуктивность катушки, намотанной на тороидальный сердечник, можно рассчитать несколькими различными способами. Если известны число витков катушки w , ток, текущий в катушке I , и каким-то образом можно определить значение магнитного потока в сердечнике Φ , то индуктивность $L=\psi/I=\Phi w/I$.

Как было показано в задаче 4.6, при $H < 1000$ А/м $\Phi=250$ мкВб, тогда $L=250 \cdot 10^{-6} \cdot 500/0,2=0,625$ Гн $=625$ мГн. Если известны конструктивные данные катушки (т. е. длина средней линии тороида l_{cp} , сечение S , число витков w (см. рис. 4.17, в [1])) и относительная магнитная проницаемость μ_r , которая берется из справочников, то индуктивность L удобно рассчитывать по формуле $L=\mu_0 \mu_r w^2 S/l_{cp}=4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400(500)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}/0,2=0,625$ Гн. Результат, разумеется, получился прежним. При $1000 < H < 2000$ А/м μ_r

уменьшается до 80, т. е. в 5 раз. Поскольку все параметры, кроме μ_r , остаются при этом неизменными, а μ_r уменьшается в 5 раз, индуктивность также уменьшается в 5 раз и становится равной $0,625/5=0,125 \text{ Гн}=125 \text{ мГн}$. Таким образом, если катушка индуктивности намотана на сердечник из ферромагнитного материала, то индуктивность зависит от степени намагниченности материала, т. е. в конечном счете от тока, протекающего по катушке. Индуктивность, получающуюся при весьма малых токах, когда насыщения материала заведомо быть не может, часто называют статической, а индуктивность при больших токах — динамической.

4.9. Сколько витков должна иметь катушка индуктивности, геометрические размеры которой приведены в предыдущей задаче, чтобы индуктивность увеличилась в 2 раза?

Указание: разберите сначала задачи 4.6—4.8.

4.10. Определите индуктивность однослойной катушки без сердечника, если диаметр катушки $D=10 \text{ см}$, длина намотки $l=5 \text{ см}$, число витков $\omega=100$.

Указание: изучите сначала с. 136—139 в [1].

4.11. Начертите кривую $B=f(H)$, коэффициент прямоугольности которой $K_{\text{пр}}=0,95$.

Указание: изучите сначала с. 126, 127 в [1].

4.12. Во сколько раз возрастет индуктивность катушки, длина намотки которой в 10 раз больше диаметра, если в катушку ввести незамкнутый ферритовый сердечник из материала 1000 НН, длина которого близка к длине намотки?

Указание: изучите сначала с. 136—139 в [1]. Кривые для материала 1000 НН возьмите из рис. 4.19 в [1].

4.13. Во сколько раз изменится индуктивность катушки, диаметр которой в 20 раз меньше длины намотки, если вместо ферритового стержня марки 1000 НН ввести стержень марки 50 ВЧ2?

Указание: изучите сначала с. 136—139 в [1] и используйте кривые, приведенные на рис. 4.19 в [1].

4.14. Определить силу притяжения якоря электромагнита со стержневой формой сердечника площадью 2 см^2 при $\omega=1000$ витков и индукции сердечника $0,2 \text{ Тл}$.

Указание: изучите сначала § 4.10 на с. 131 в [1].

4.15. Во сколько раз увеличится сила притяжения якоря, если в электромагните, параметры которого приведены в задаче 4.14, стержневой сердечник заменить на подковообразный из того же материала?

Указание: изучите сначала § 4.10 на с. 131 в [1].

4.16. Какая ЭДС наводится в катушке, имеющей 1000 витков, через время $t=12 \text{ с}$, если магнитный поток изменяется по закону $\Phi(t)=20 \times 10^{-3}t^2-0,25t$?

Указание: изучите сначала с. 132—135 в [1].

4.17. Катушка, имеющая $\omega=1000$ витков, сцеплена с магнитным потоком, изменяющимся по закону $\Phi(t)=0,01e^{-20t}-0,005e^{-50t}$. Определите наибольшее значение ЭДС, наводимой в катушке.

Указание: изучите сначала с. 132—135 в [1].

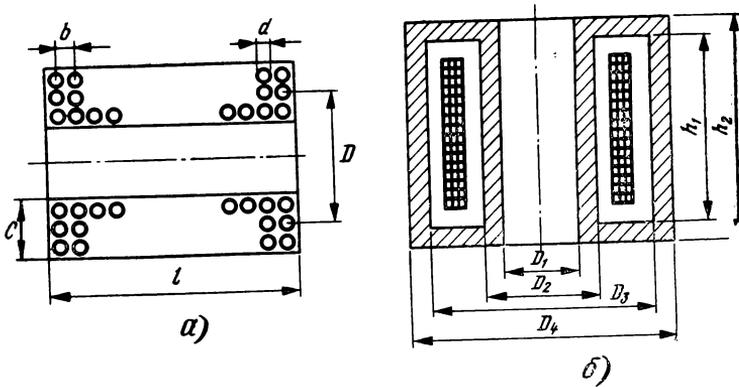


Рис. 4.2

Решение. Так как ЭДС, наводимая в катушке, определяется из выражения $e = -\omega(d\Phi/dt)$, то в данном случае ЭДС будет изменяться по закону $e(t) = -\omega(d\Phi/dt) = -1000[d/dt(0,01e^{-20t} - 0,005e^{-50t})] = -1000(-20 \times 0,01e^{-20t} + 50 \cdot 0,005e^{-50t}) = 200e^{20t} - 250e^{-50t}$. Определим время t , через которое ЭДС будет максимальной. Очевидно, что выражение $e = f(t)$ следует исследовать на экстремум. Для этого необходимо взять производную de/dt , приравнять ее нулю и решить получившееся уравнение: $de/dt = 50 \cdot 250e^{-50t} - 20 \cdot 200e^{-20t} = 0$, откуда $12,5 \cdot 10^3 e^{-50t} = 4 \cdot 10^3 e^{-20t}$ или $12,5/4 = e^{-20t}/e^{-50t}$, т. е. $3,125 = e^{30t}/e^{20t}$. Потенцируя обе части выражения, получим $30t = \ln 3,125 = 2,3 \lg 3,125 = 2,3 \cdot 0,49485 = 1,1394$ с = 1139,4 мс, откуда $t = 1139,4/30 \approx 38$ мс.

4.18. Рассчитать индуктивность круглого витка со средним диаметром $D = 5$ см и диаметром провода $d = 0,2$ см.

Решение. Расчетная формула: $L = 2\pi D [\ln(8D/d) - 1,75] = 6,28 \times 5 [\ln(85/0,2) - 1,75] = 31,4 \cdot 3,55 = 111,4$ нГн = 0,114 мкГн.

4.19. Рассчитать индуктивность круглого витка, если $D = 2$ см, $d = 1$ мм.

Указание: разберите сначала задачу 4.18.

4.20. Рассчитать число витков многослойной короткой цилиндрической катушки по заданным размерам, показанным на рис. 4.2, а, чтобы индуктивность катушки была равна L , если $D = 1,5$ см, $l = 1,5$ см, $c = 0,8$ см, $L = 200$ мкГн.

Решение. Расчетная формула:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{L \text{ (нГн)} [(3D + 9l + 10c)/(25\pi D^2)]} = \\ &= \sqrt{2 \cdot 10^5 [(3 \cdot 1,5 + 9 \cdot 1,5 + 10 \cdot 0,8)/(25 \cdot 3,14 \cdot 1,5^2)]} = \\ &= \sqrt{(2 \cdot 10^5 \cdot 26)/176,625} = 172 \text{ витка.} \end{aligned}$$

4.21. Определить число витков многослойной цилиндрической катушки без сердечника для получения индуктивности $L = 2 \cdot 10^5$ нГн, если $D = 2,5$ см, $l = 1$ см, $c = 1$ см.

Указание: разберите сначала задачу 4.20.

4.22. Рассчитать число витков w катушки, намотанной на тороидальный сердечник из ферромагнитного материала с относительной магнитной проницаемостью $\mu_r = 1000$, если наружный диаметр тороида $D_{\text{нар}} = 4$ см, внутренний $D_{\text{вн}} = 2,5$ см, высота тороида 1 см. Индуктивность катушки L должна быть равна 20 мГн.

Решение: При $(D_{\text{нар}}/D_{\text{вн}}) < 1,75$ $w = \sqrt{[L(D_{\text{нар}} + D_{\text{вн}})] / 4\mu_r h (D_{\text{нар}} - D_{\text{вн}})}$. При $(D_{\text{нар}}/D_{\text{вн}}) > 1,75$ $w = \sqrt{L / [2\mu_r h \ln(D_{\text{нар}}/D_{\text{вн}})]}$. (Индуктивность следует выражать в наногенри (нГн), остальные размеры — в сантиметрах.) Отношение $D_{\text{нар}}/D_{\text{вн}} = 4/2,5 = 1,6$, что меньше 1,75, поэтому рассчитывать число витков следует по первой формуле. Так как $20 \text{ мГн} = 20 \cdot 10^6 \text{ нГн}$, то $w = \sqrt{[20 \cdot 10^6 (4 + 2,5) / [4 \cdot 1000 \cdot 1 (4 - 2,5)]]} = \sqrt{[130 \cdot 10^6 / 60 \cdot 10^3]} = 147$ витков.

4.23. Решить задачу 4.22, если $D_{\text{вн}} = 2$ см. Остальные данные остаются без изменений.

Указание: разберите сначала задачу 4.22.

Решение. Поскольку в данном случае $D_{\text{нар}}/D_{\text{вн}} = 4/2 = 2$, что больше 1,75, то $w = \sqrt{L / [2\mu_r h \ln(D_{\text{нар}}/D_{\text{вн}})]} = \sqrt{20 \cdot 10^6 / [2 \cdot 1000 \cdot 1 \cdot \ln(4/2)]} = \sqrt{20 \cdot 10^6 / [2 \cdot 10^3 \cdot 0,693]} = 120$ витков.

4.24. Решить задачу 4.22, если $D_{\text{вн}} = 3$ см. Остальные данные остаются без изменений.

Указание: разберите сначала задачу 4.22.

4.25. Рассчитать число витков катушки, намотанной на броневой сердечник из материала с относительной магнитной проницаемостью $\mu_r = 10$, чтобы индуктивность была равна $5 \cdot 10^5$ нГн. Геометрические размеры катушки и сердечника показаны на рис. 4.2, б ($D_1 = 1$ см, $D_2 = 2$ см, $D_3 = 4$ см, $D_4 = 5$ см, $h_1 = 3$ см, $h_2 = 4$ см).

Решение. Число витков в данной катушке $w = \sqrt{[L(A + B)] / (19,74\mu_r)}$, где $A = (h_1 + h_2) \{ [1/(D_4^2 - D_3^2)] + [1/(D_2^2 - D_1^2)] \} = (3 + 4) \{ [1/(24 - 16)] + [1/(4 - 1)] \} = 7 \{ 1/9 + 1/3 \} = 3,11$; $B = [1/(h_2 - h_1)] \ln [(D_3 + D_4)/(D_1 + D_2)] = [1/(4 - 3)] \ln [(4 + 5)/(1 + 2)] = 1 \cdot \ln 3 = 1,0986$; $w = \sqrt{[5 \cdot 10^5 (3,11 + 1,0986)] / (19,76 \cdot 10)} = \sqrt{5 \cdot 10^5 (4,2086 / 194,7)} = 104$ витка.

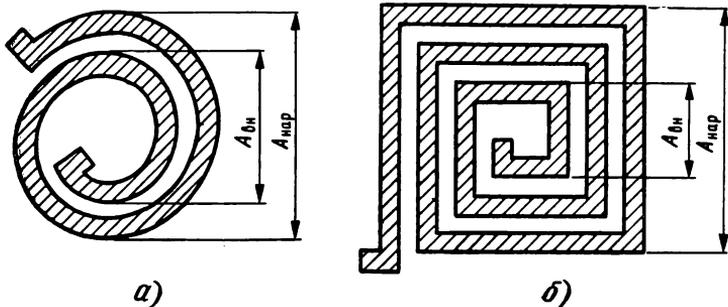


Рис. 4.3

4.26. Решить задачу 4.25, если $L=100$ мкГн, остальные данные остаются без изменений.

Указание: разберите сначала задачу 4.25.

4.27. Рассчитать число витков тонкопленочной катушки с размерами, показанными на рис. 4.3, а и б.

Решение. Число витков в тонкопленочных катушках

$$\omega = \left\{ L \left/ \left[K_1 (A_{\text{нар}} + A_{\text{вн}}) \cdot \ln \left(K_2 \frac{A_{\text{нар}} + A_{\text{вн}}}{A_{\text{нар}} - A_{\text{вн}}} \right) \right] \right\}^{3/5}.$$

где K_1 и K_2 — коэффициенты, учитывающие геометрическую форму витка ($K_1=2,33$ и $K_2=4$ для круглой катушки, $K_1=12,05$ и $K_2=8$ — для квадратной формы витка). Расчет числа витков удобно производить на ПМК по программе 3.4.1.

Программа 3.4.1 для расчета числа витков тонкопленочных катушек

F /-/ B/O F B/P

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	x-П9 49	С/П 50	x-П8 48	С/П 50	x-П7 47	С/П 50	x-П6 46	С/П 50	П-х9 69	÷ 13
1	П-х7 67	П-х6 66	+ 10	x-П5 45	÷ 13	П-х5 65	П-х8 68	× 12	П-х7 67	П-х6 66
2	— 11	÷ 13	F3 18	÷ 13	3 03	↑ 0E	5 05	÷ 13	↔ 14	F ↔ 24
3	Б/П 51	07 07	F	/-/ B/O	B/O					

Ввод исходных данных: $K \rightarrow C/P$ $K_2 \rightarrow C/P$ $A_{\text{нар}}$ (см) $\rightarrow C/P$ $A_{\text{вн}}$ (см) $\rightarrow C/P$ L (нГн) $\rightarrow C/P$. Примерно через 10 с на экране высветится результат расчета. Если необходимо изменить значение индуктивности, то следует набрать новое значение L (нГн) и нажать клавишу С/П. Если необходимо изменить геометрические размеры, то надо нажать клавишу В/О, после чего набрать все значения в последовательности, указанной выше. После ввода каждого параметра нажимают клавишу С/П.

Контрольные примеры. При $K_1=2,33$, $K_2=4$, $A_{\text{нар}}=0,8$ см, $A_{\text{вн}}=0,4$ см, $L=100$ нГн, $\omega=4,9532656$ витков. При $K_1=12,05$, $K_2=8$, $A_{\text{нар}}=1$ см, $A_{\text{вн}}=0,5$ см, $L=500$ нГн получается $\omega=3,663011$ витков.

4.28. Решить задачу 4.27, если тонкопленочная катушка круглая, $A_{\text{нар}}=1$ см, $A_{\text{вн}}=0,5$ см, а L принимает значения 200, 300, 400, 500 нГн.

Указание: разберите сначала задачу 4.27.

4.29. Решить задачу 4.28, если катушка прямоугольная.

Указание: разберите сначала задачи 4.27 и 4.28.

Глава 5. ЦЕПИ С НАКОПИТЕЛЯМИ ЭНЕРГИИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

5.1. Сравните кривые токов в С-цепи, если напряжение на конденсаторе в первом случае $u_c = at^2$, а во втором $u_c = U_0 + at^2$, где a — постоянная величина.

Указание: изучите сначала с. 144—148 в [1].

5.2. Напряжение на конденсаторе $C=1$ мкФ изменяется по закону $u_c = 100(1 - e^{-500t})$. Определить выражение для мгновенных токов в цепи.

Указание: изучите сначала с. 144—148 в [1].

5.3. В цепи, показанной на рис. 5.1, а, нарисуйте кривую формы тока.

Указание: изучите сначала с. 144—148 в [1].

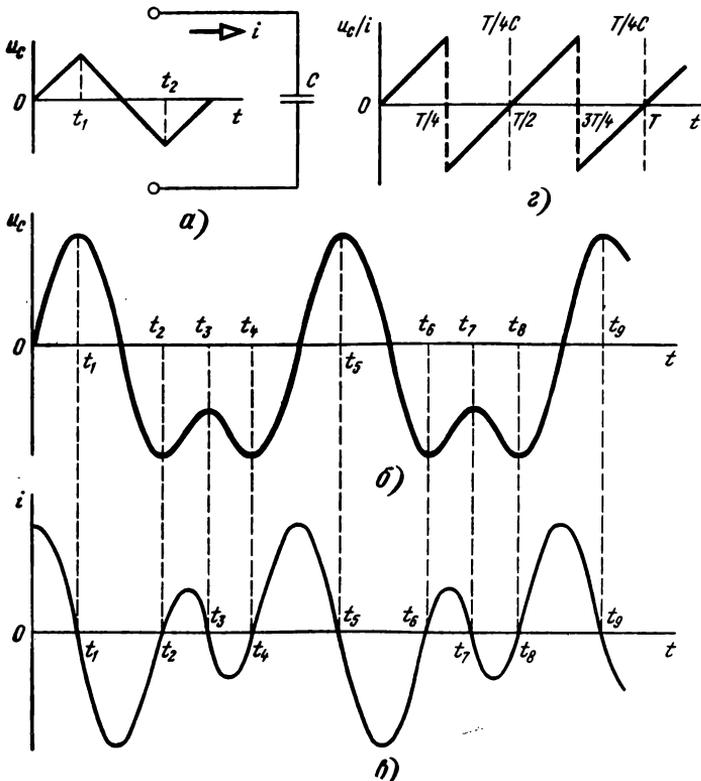


Рис. 5.1

5.4. К входу С-цепи приложено напряжение, форма которого показана на рис. 5.1, б. Нарисуйте кривую мгновенных значений тока в цепи.

Указание: изучите сначала с. 144—148 в [1].

Решение. Поскольку мгновенные значения тока в С-цепи пропорциональны значениям производной по времени от мгновенных напряжений на конденсаторе, то в моменты $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8$ токи равны нулю. (В указанные моменты касательные к кривой $u_c = f(t)$ идут по горизонтали, следовательно, углы между касательными и осью времени равны нулю, а в этом случае тангенсы этих углов, а следовательно, и производные также равны нулю.) Таким образом, прежде всего необходимо отметить моменты, в которые токи равны нулю. Затем следует определить знаки производной в различные интервалы времени. Если напряжения возрастают (как, например, в интервалах от 0 до t_1 , от t_2 до t_3 , от t_4 до t_5 , от t_6 до t_7 , от t_8 до t_9 и т. д.), то в этих интервалах производные имеют положительные значения, а в интервалах, в которых напряжения уменьшаются (от t_1 до t_2 , от t_3 до t_4 , от t_5 до t_6 , от t_7 до t_8 и т. д.), — отрицательные. Чем круче касательная, проведенная к любой точке характеристики, тем больше абсолютное значение производной. Кривая $i = f(t)$ для цепи (рис. 5.1, б) показана на рис. 5.1, в.

5.5. По условию задачи 5.3 постройте кривую $u_c(t)/i(t)$.

Указание: изучите сначала с. 144—148 в [1] и задачи 2.41, 2.43, 2.47.

Решение. Как было показано в задачах 2.41, 2.43, 2.47 и других уравнение прямой линии, проходящей через начало координат, в интервале от $t=0$ до $t=T/4$ определяется из выражения $u_c(t) = 4U_m t/T$. Определим ток в этом же интервале времени: $i = C(dU_c/dt) = C(d/dt)(4U_m t/T) = 4U_m C/T$. Тогда отношение $u_c/i = (4U_m t/T)/(4U_m C) = t/C$. При $t=0$ $u_c/i = 0$, при $t=T/4$ $u_c/i = T/4C$. В интервале от $T/4$ до $t=3T/4$

$$\begin{aligned} u_c &= U_m - (4U_m/T)(t - T/4) = U_m - (4U_m t/T) + U_m = 2U_m - (4U_m t/T); \\ i &= C(du_c/dt) = C[(d/dt)(2U_m - 4U_m t/T)] = -4U_m C/T, \text{ а } u_c/i = [2U_m - (4U_m t/T)]/(-4U_m C/T) = \\ &= [2U_m(T - 2t)T]/(4U_m TC) = -(T - 2t)/2C. \text{ При } t=T/4 \text{ } u_c/i = \\ &= -T/4C. \end{aligned}$$

Аналогично в интервале от $3T/4$ до T $u_c = [(4U_m/T)(t - 3T/4)] - U_m = [(4U_m t/T)] - 3U_m - U_m = (4U_m t/T) - 4U_m = 4U_m(t/T - 1)$; $i = C(du_c/dt) = 4U_m C/T$; $u_c/i = [4U_m(t/T - 1)]/(4U_m C) = (T/C)(t/T - 1)$. При $t=T$ $u_c/i = 0$, при $t=5T/4$ $u_c/i = T/4C$ и т. д. Кривая $(u_c/i) = f(t)$ показана на рис. 5.1, г. Поясним физический смысл отношения $u_c(t)/i(t)$. Данное отношение имеет размерность сопротивления и поэтому может быть обозначено $Z_c(t)$ (буквой «Z», как будет подробно показано в гл. 6, обозначаются сопротивления, отличные от резистивных). Действительно, выражение t/C имеет размерность сопротивления, поскольку $[t/C] = c/(c/\text{Ом}) = \text{Ом}$. При изменении напряжений на конденсаторе

или токов в индуктивности изменяется состояние полей в этих элементах, которое в общем случае препятствует или, наоборот, помогает протеканию тока в данном элементе и, следовательно, ведет себя как сопротивление с положительным или отрицательным знаком. Не следует путать сопротивление, обусловленное изменением состояния полей, называемое реактивным (а иногда — сопротивлением смещения), с резистивным сопротивлением, в котором электрический ток необратимо переходит в тепло. Эти сопротивления имеют различные свойства. Реактивное сопротивление влияет на форму тока в цепи и никак не сказывается на количестве выделяемого в цепи тепла. Линейное резистивное сопротивление, наоборот, не изменяет формы тока, но влияет на количество выделяемого тепла. Значения реактивных сопротивлений в различные моменты зависит от формы приложенного воздействия (напряжений на конденсаторе, токов в индуктивностях), а резистивных сопротивлений — не зависят.

5.6. Напряжение на входе C -цепи $u_c(t)$ изменяется в соответствии с кривой, показанной на рис. 5.2, а, причем в интервале от $T/4$ до $3T/4$ кривая представляет отрезок синусоиды. Определить и построить кривые $i=f(t)$ и $u_c/i=f(t)$.

Указание: изучите сначала с. 148—150 в [1].

Решение. В интервалах от 0 до $T/4$ и от $3T/4$ до T $u(t) = 0$. В интервале от $T/4$ до $3T/4$ мгновенные напряжения на конденсаторе изменяются в соответствии с выражением $u_c = U_m \sin(2\pi t/T)$. Так как в первом и последнем интервалах производная равна нулю, то и ток в этих интервалах также равен нулю. В интервале от $T/4$ до $3T/4$ $i = C(d/dt)[U_m \sin(2\pi t/T)] = C(2\pi/T)U_m \cos(2\pi t/T)t$.

При $t=T/4$ $u_c = U_m \sin(2\pi T/4T) = U_m \sin(\pi/2) = U_m$; $i = (2\pi CU_m/T) \cos(\pi/2) = 0$.

При $t=T/2$ $u_c = U_m \sin \pi = 0$; $i = (2\pi CU_m/T) \cos \pi = -(2\pi CU_m/T)$.

При $t=3T/4$ $u_c = U_m \sin(3T/4) = -U_m$, $i = (2\pi CU_m/T) \cos(3T/4) = 0$. Кривая $i=f(t)$ показана на рис. 5.2, а штриховой линией. В первом и последнем интервалах отношение $u_c/i = 0/0$ и представляет величину неопределенную, поскольку какие-либо дополнительные данные, позволяющие раскрыть данную неопределенность, в задаче не приводятся. В интервале от $T/4$ до $3T/4$ $u_c/i = [U_m \sin(2\pi t/T)] / [(2\pi CU_m/T) \cos(2\pi t/T)] = (T/2\pi C) \operatorname{tg}(2\pi t/T)$.

При $t=T/4$ $u_c/i = (T/2\pi C) \operatorname{tg}(2\pi T/4T) = (T/2\pi C) \operatorname{tg}(\pi/2) = \infty$.

При $t=T/2$ $\operatorname{tg} \pi = 0$, поэтому $u_c/i = 0$, при $t=3T/4$ $\operatorname{tg}(3\pi/4) = \infty$ и $u_c/i = 0$.

Кривая $u_c/i=f(t)$ показана на рис. 5.2, б.

5.7. В интервалах от $t=0$ до $t=T/4$ и от $t=3T/4$ до $t=T$ $u_c = 0$, а в интервале от $t=T/4$ до $t=3T/4$ изменяется по косинусоидальному закону. Рассчитать и построить кривые $i=f(t)$ и $u_c/i=f(t)$.

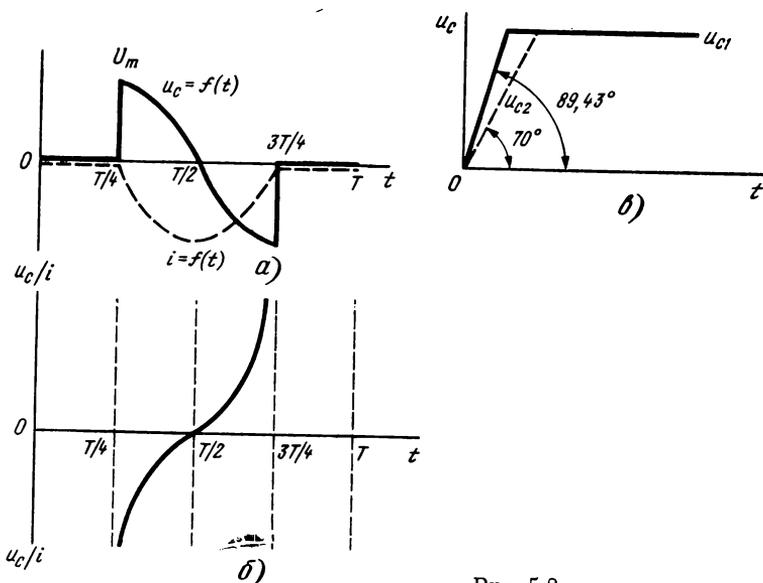


Рис. 5.2

Указание: разберите сначала задачу 5.6.

5.8. Какова форма тока в L -цепи, если напряжение на индуктивности имеет прямоугольную форму?

Указание: изучите сначала с. 148—150 в [1].

5.9. Ток в катушке индуктивности имеет пилообразную форму. Какова форма напряжения на зажимах катушки?

Указание: изучите сначала с. 144—148 в [1].

5.10. За какое время напряжение u_c изменяется на 10 В, если ток в емкости $C=1$ нФ равен 10 мА?

Указание: изучите сначала с. 146—148 в [1].

5.11. Во сколько раз изменится ток в C -цепи, если угол наклона кривой $u_c=f(t)$ уменьшится с $89,43^\circ$ до: а) 85° , б) 80° , в) 75° , г) 70° .

Указание: изучите сначала с. 146—148 в [1].

Решение. Значение тока в C -цепи пропорционально производной du_c/dt , а следовательно, тангенсу угла наклона характеристики $u_c=f(t)$. Если положить, что напряжение u_c нарастает по линейному закону, то производная, а значит, и ток в течение времени изменения напряжения имеют одно и то же значение. Отношение токов, очевидно, равно отношению тангенсов углов наклона касательных. Например, в варианте г) $i_0/i_1 = \operatorname{tg} 89,43^\circ / \operatorname{tg} 70^\circ = 100/2,75 = 36,4$.

Таким образом, при уменьшении крутизны характеристики напряжения с $89,43^\circ$ до 70° ток в емкости уменьшится в 36,4 раза (рис. 5.2, в). Расчеты для остальных вариантов рекомендуется произвести самостоятельно.

5.12. В схеме, показанной на рис. 5.3, а, ключ K через каждые 200 мкс замыкается и размыкается. Определить форму напряжения на конденсаторе, если $C=1$ мкФ, $U=5$ В, $R_3=1$ кОм.

Указание: разберите сначала задачу 5.5 и с. 144—148 в [1].

Решение. Цепь, показанная на рис. 5.3, а и обведенная штриховой линией, представляет источник тока, нагруженный на емкость (доказательство того, что данная цепь представляет источник тока, приводится в задаче 8.39). Если в данной цепи $R_1=R_3$, $R_2=R_4$, причем $R_1=(5\dots 10)R_2$, то ток в нагрузке остается равным $I_H=U_1/R_3$ вне зависимости от сопротивления нагрузки до тех пор, пока операционный усилитель не достигает режима насыщения (подробнее см. с. 111—115 в [1]), т. е. цепь представляет источник тока, эквивалентная схема которого показана на рис. 5.3, б.

Как было показано в задачах 5.3 и 5.5, при линейно возрастающем напряжении на конденсаторе u_C ток в цепи остается неизменным. Это обстоятельство можно подтвердить строго математически. Так как $i=C(du_C/dt)$, то $u_C=\frac{1}{C}\int idt$. Поскольку ток, текущий через емкость, задается источником тока и остается неизменным во времени, $i=I_H=U_1/R_3$, а в этом случае $u_C=\frac{1}{C}\int I_H dt = \frac{I_H t}{C}$, т. е. напряжение на конденсаторе действительно будет изменяться по линейному закону. Положим, что до момента $t=0$ ключ K был замкнут. Конденсатор при этом оказывается разряженным, напряжение на нем равно нулю. В момент $t=0$ ключ размыкается и напряжение на конденсаторе начинает расти по линейному закону, т. е. в соответствии с выражением $u_C=U_1 t/R_3 C=(5\cdot 200\cdot 10^{-6})/(10^3\cdot 10^{-6})=0,5$ В. Через время $t=200$ мкс ключ замыкается, конденсатор разряжается, напряжение на нем падает до нуля. Через 200 мкс ключ размыкается и напряжение на конденсаторе снова возрастает по

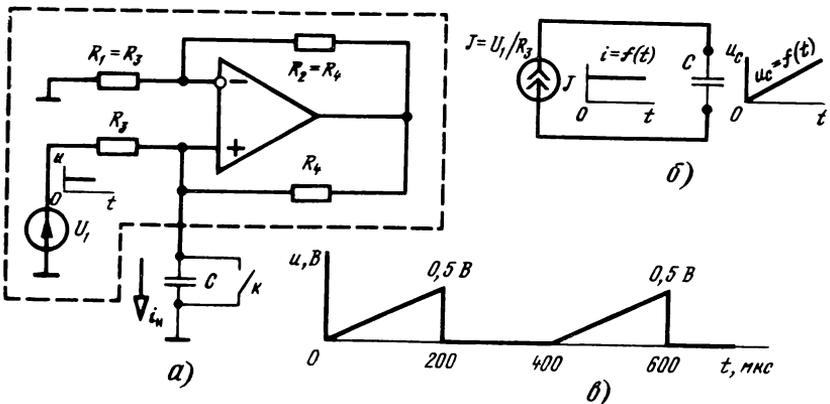


Рис. 5.3

линейному закону, затем процесс повторяется. Кривая $u_c=f(t)$ показана на рис. 5.3, б.

5.13. В схеме рис. 5.3, а ключ K исключен, а в качестве нагрузочного элемента вместо конденсатора C включено: а) резистивное сопротивление $R_n=0,5$ кОм; б) катушка с индуктивностью $L=100$ мГн. Определить формы напряжений на этих элементах.

Указание: разберите сначала задачу 5.12.

Решение. Так как в резистивном сопротивлении форма напряжения повторяет форму тока, то при неизменном во времени токе напряжение на этом элементе будет также постоянным со значением $U_{RH}=U_1R_n/R_3=5\cdot 0,5/1=2,5$ В. Если изменять сопротивление R_n , то значение напряжения на этом сопротивлении также будет изменяться, но форма этого напряжения останется прежней, неизменной во времени. (Следует иметь в виду, что увеличивать сопротивление R_n можно до тех пор, пока операционный усилитель работает в линейном режиме, подробнее см. с. 111—115 в [1] и задачу 8.39). Если в качестве нагрузочного элемента использовать индуктивность, то мгновенные напряжения на ее зажимах определяются из выражения $u_L=L(di/dt)$. При $i=I=\text{const}$ $u_L=0$. Таким образом, если в качестве нагрузочного элемента использовать емкость, то напряжение u_c станет нарастать по линейному закону, при резистивном сопротивлении — останется неизменным, при индуктивности окажется равным нулю.

Глава 6. ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При решении каждой задачи данной главы необходимо использовать ряд важнейших положений, справедливых только при воздействиях сигналов гармонической формы.

Напомним кратко эти положения.

А. Если воздействия имеют гармоническую форму, а цепь состоит только из линейных элементов, то все отклики (т. е. токи в ветвях и напряжения между различными точками цепи) имеют также гармоническую форму.

Б. При сигналах гармонической формы напряжения и токи в различные моменты являются величинами переменными и определяются из выражений $u(t)=U_m\sin(\omega t\pm\psi)$ и $i(t)=$

$= U_m \cos(\omega t \pm \psi)$, $i(t) = I_m \sin(\omega t \pm \varphi)$ и $i(t) = I_m \cos(\omega t \pm \varphi)$. Здесь U_m и I_m — максимальные (т. е. наибольшие из всех мгновенных значений) напряжение и ток; ω — угловая частота, равная $2\pi f$ или $2\pi/T$, где f — частота; T — период; π — постоянное число, приближенно равное 3.14; ψ и φ — угол (или часть периода), заключенный или между началом координат и началом синусоиды или между началами двух синусоид, описывающих процессы в цепях, например между напряжением и током, между двумя напряжениями в различных точках цепи и т. д. Обозначения $u(t)$ и $i(t)$ часто записывают короче — u и i .

В. Вместо расчетов синусоидальных или косинусоидальных функций производят аналогичные расчеты комплексных выражений, т. е. выражений, содержащих сведения об амплитудных (или действующих) значениях и аргументах этих гармонических функций. Такие комплексные выражения имеют вид $\underline{A} = Ae^{j\psi}$ или $\underline{A} = A \cos \psi + jA \sin \psi$, где \underline{A} — комплексное значение любой электротехнической величины (ЭДС, напряжения, сопротивления, тока, мощности, проводимости и т. д.), а A — модуль (т. е. числовое значение) этой комплексной величины.

Комплексные величины можно показывать также графически с помощью векторов, причем длины векторов должны быть пропорциональны амплитудным или действующим значениям напряжений и токов, а угол между векторами — аргументу комплексного выражения.

Г. Складывать можно мгновенные или комплексные выражения, но не их модули. Обратим внимание, что перед словами «напряжение», «сопротивление», «ток», «мощность» и т. д. обязательно следует вводить одно или даже несколько поясняющих слов, например «резистивное сопротивление», «реактивная мощность», «комплекс тока» (правильно следовало бы сказать «комплексное значение тока», но на практике часто говорят короче: «комплекс», «модуль напряжения» и т. д.). Законы электротехники (Ома, Кирхгофа и др.) в общем случае справедливы для мгновенных или комплексных значений, но не для действующих или амплитудных. Например, если $\dot{U}_1 = 50 e^{-j36^\circ}$, $\dot{U}_2 = 52 e^{j67^\circ}$, то $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 62 e^{j16^\circ}$ (а вовсе не 102, поскольку $U_1 + U_2 \neq U$, где U_1 и U_2 — модули отдельных напряжений, а U — модуль результирующего напряжения). Складывать модули арифметически можно в том случае, если цепь состоит из резистивных элементов. При наличии накопителей энергии (т. е. индуктивностей и емкостей) все величины, входящие в цепь (напряжений, сопротивлений, токов и т. д.), складываются геометрически, иначе говоря, по законам сложения векторных величин. Складывать модули комплексных выражений арифметически можно также в тех случаях, когда аргументы этих выражений одинаковы, а складывать алгебраически — в случаях, когда аргументы или равны, или отличаются на 180° .

Д. Комплексные амплитудные выражения напряжений и токов, а также сопротивлений и проводимостей состоят из модуля и аргумента, и так как время в них не входит, эти выражения являются величинами постоянными и, следовательно, их можно выносить за знаки производной и интеграла. Для того чтобы определить мгновенные напряжения и токи, необходимо умножить значения комплексной амплитуды $\underline{A}_m = A_m e^{j\psi}$ на множитель $e^{j\omega t}$, а от полученного комплексного выражения взять мнимую часть. Например, если $\underline{U}_m = 5 e^{j37^\circ}$, то $\dot{u}(t) = 5 e^{j37^\circ} e^{j\omega t} = 5 e^{j(\omega t + 37^\circ)} = 5 \cos(\omega t + 37^\circ) + j 5 \sin(\omega t + 37^\circ)$, откуда $u(t) = I_m [\dot{u}(t)]_j = 5 \sin(\omega t + 37^\circ)$, где I_m обозначает мнимую часть комплексного числа. На практике промежуточные выкладки опускают и сразу по заданному комплексному выражению записывают выражения для определения мгновенных значений или наоборот — по выражению мгновенных значений записывают соответствующие им комплексные выражения. Выражения мгновенных значений называют оригиналами, а соответствующие им комплексные выражения — изображениями. В выражениях оригиналов гармонических функций записывают всегда максимальные значения напряжений или токов, а в соответствующих им оригиналах, т. е. комплексных выражениях, можно записывать как амплитудные, так и действующие значения. Например, если $u = 10 \sin(\omega t + 37^\circ) = 7,07 \sqrt{2} \sin(\omega t + 37^\circ)$, то $\underline{U}_m = 10 e^{j37^\circ}$ или $\underline{U} = 7,07 e^{j37^\circ}$. На практике комплексные выражения напряжений и токов записывают, как правило, для действующих значений.

Е. При записи комплексных сопротивлений в алгебраической форме перед индуктивными сопротивлениями ставится множитель j , а перед емкостными $-j$. Множитель j указывает на то, что вектор, символизирующий эту величину, повернут на 90° против часовой стрелки относительно оси, по которой откладываются значения резистивных элементов (или пропорциональных им величин). Множитель $-j$ указывает на поворот вектора на 90° по часовой стрелке. Физически наличие множителя 1, имеющегося у резистивных величин, означает, что в данном элементе мгновенные напряжения и токи пропорциональны друг другу, множитель $\pm j$ означает, что мгновенные напряжения и токи связаны через производную d/dt или интеграл $\int dt$. В показательной форме j изображается множителем e^{j90° , а $-j$ — множителем e^{-j90° . Поскольку $d/dt (\sin \omega t) = \omega \cos \omega t$, а $\int \sin \omega t dt = (-1/\omega) \cos \omega t$, все мгновенные напряжения и токи, описываемые вещественной частью комплексного числа, представляют во временном виде синусоиды, а мнимой частью — косинусоиды. Например, если некоторое гармоническое (только гармоническое!) напряжение описывается комплексным

выражением $\dot{U} = 10e^{j30^\circ} = 10 \cos \omega t + j10 \sin \omega t = 8,87 + j5$, то это означает, что мгновенные значения данного напряжения можно представить либо в виде синусоиды, построенной по уравнению $u = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ)$, либо в виде синусоиды и косинусоиды, построенных по уравнениям $8,87\sqrt{2} \sin \omega t$ и $5\sqrt{2} \cos \omega t$ соответственно (рис. 6.1, а).

Ж. Цепи с накопителями энергии (т. е. RLC-цепи) можно рассчитывать с помощью выражений, формул, приемов, по которым производятся расчеты резистивных цепей (см. гл. 3) при условии, что все величины представлены в комплексной форме. Например, в резистивной цепи (рис. 6.1, б) $K = R_2 / (R_1 + R_2)$. Соответственно в цепи с накопителями энергии, показанной на рис. 6.1, в, $\underline{K} = \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = j\omega L / (R + j\omega L)$. Аналогично в цепи рис. 6.1, г $\underline{I}_1 = \underline{I} [\underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)]$ и т. д. Так как расчетные формулы цепей с накопителями энергии аналогичны формулам для расчета резистивных цепей, комплексные сопротивления \underline{Z} показывают на схемах так же, как и резистивные сопротивления, поскольку в этом случае $\underline{Z} = R e^{j0^\circ} = R$ (рис. 6.1, д).

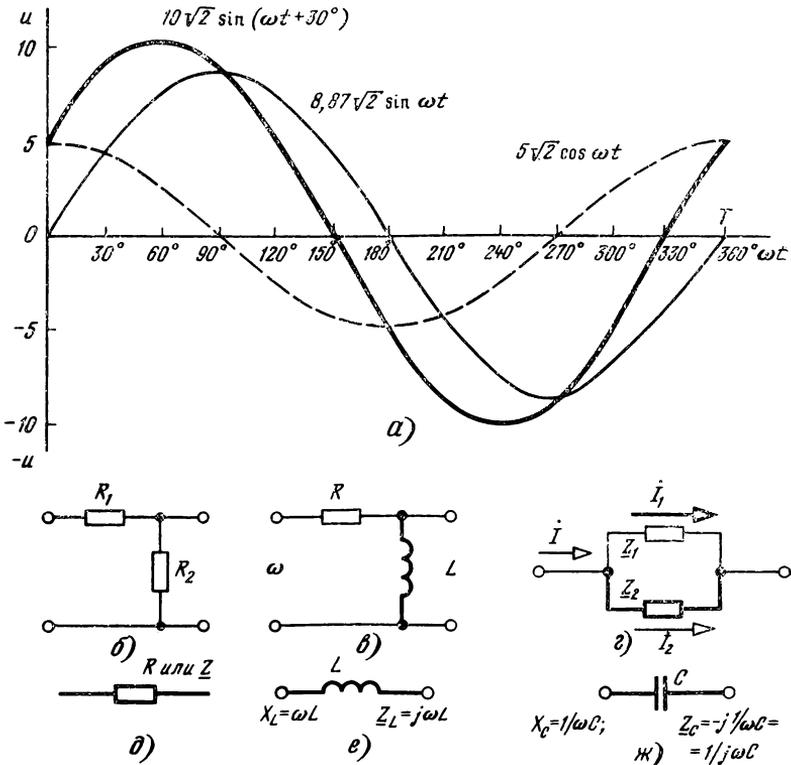


Рис. 6.1

В L -цепи модуль реактивного сопротивления $X_L = \omega L$, комплексное сопротивление в алгебраической форме $Z_L = jX_L = j\omega L$ (рис. 6.1, e). Аналогично в C -цепи $X_C = 1/\omega C$, а $Z_C = 1/j\omega C = -j(1/\omega C) = -jX_C$. При сложении комплексных чисел следует использовать алгебраическую форму, а при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня — показательную.

Переход от алгебраической формы к показательной и обратно производится по формулам $A + jB = M e^{j\psi}$, где $M = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\psi = \arctg(B/A)$, $A = M \cos \psi$, $B = M \sin \psi$.

Перейти от одной формы комплексного числа к другой легче всего с помощью ПМК по программе 6.1, имеющейся на с. 181, 182 в [1]. Можно производить данные расчеты и с помощью непрограммируемых микрокалькуляторов или даже без них, но при этом трудоемкость расчетов возрастает. После набора программы 6.1 рекомендуется просчитать контрольный пример: $4 + j3$, при этом в показательной форме должно получиться $5 e^{j36,8699^\circ}$. Для расчета на калькуляторе необходимо нажать клавиши

4 x → П А 3 x → П В 58 В/О С/П.

Примерно через 13 с на экране высветится модуль 5. Для вывода на экран аргумента следует нажать клавиши П→х0, на экране должен высветиться аргумент $36,8699^\circ$.

Предупреждение. Перед вводом программы 6.1 в ПМК не забудьте переключатель углов установить в позицию «Г» (градусы). Если переключатель установлен в положение «Р», то угол получится в радианах, в данном примере $0,64350114$ рад. Напомним, что $1 \text{ рад} = 57,3^\circ$. После этого следует просчитать второй контрольный пример: $10 e^{j30^\circ} = 8,6602544 + j5$. Для проверки необходимо нажать клавиши

10 x → П 130 x → П 0 8 6 В/О С/П.

После счета на экране высветится вещественная часть числа $8,6602544$, для вывода мнимой части необходимо проделать операции П → х В, на экране должна оказаться цифра 5. Если контрольные примеры выполняются, то можно использовать программу для расчетов комплексных чисел. При вводе новых числовых значений в оперативную память ПМК нет необходимости стирать ранее введенные числа, так как это происходит автоматически. Аналогично при исправлении введенного в память числа следует просто набрать новое число, клавишу х→П и цифру ячейки памяти, в которую вводится данное число.

3. Так как расчеты цепей при гармонических воздействиях требуют использования тригонометрических функций, которые для большинства углов являются числами иррациональными, то почти всегда расчеты осуществляются с определенной степенью точности. Как правило, все расчеты в RLC -цепях следует производить с четырьмя значащими цифрами.

ПРОСТЕЙШИЕ RL - и RC -ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

6.1. В схеме, показанной на рис. 6.2, *a* рассчитать мгновенные значения тока, напряжений на всех элементах, произвести проверки, если $R=4$ Ом, $X_L=3$ Ом, $U=10$ В.

Указание: изучите сначала § 6.9, с. 165—172 в [1].

Решение. Запишем выражение мгновенных значений входного напряжения. В общем случае $u=U_m \sin(\omega t + \psi)$. Так как $U=10$ В, то $U_m=10\sqrt{2}$. Начальную фазу ψ можно считать любой, в том числе и нулевой. Таким образом, $u=10\sqrt{2} \sin \omega t$. Представим это выражение в комплексном виде: $\dot{U}=Ue^{j\psi}=10e^{j0}$. Запишем комплексное сопротивление цепи $\underline{Z}=R+jX_L=4+j3$. Комплексный ток \dot{I} определяется из выражения $i=U/Z=10e^{j0}/(4+j3)$. Поскольку необходимо выполнить операцию деления, комплексное выражение знаменателя необходимо из алгебраической формы перевести в показательную. Так как $A+jB=\sqrt{A^2+B^2}e^{j \arctg(B/A)}$, то $4+j3=\sqrt{4^2+3^2}e^{j \arctg(3/4)}=5e^{j36,87^\circ}$, тогда $\dot{I}=10e^{j0}/5e^{j36,87^\circ}=2e^{j(0-36,87^\circ)}=2e^{-j36,87^\circ}$ А. Рассчитаем комплексные напряжения на элементах цепи: $\dot{U}_{AB}=\dot{I}R=2e^{-j36,87^\circ}4e^{j0}=8e^{-j36,87^\circ}$; $\dot{U}_{BD}=\dot{I}(jX_L)$. Комплексный ток \dot{I} умножается на комплексное индуктивное сопротивление, поэтому сопротивление следует выразить в показательной форме, т. е. $\dot{U}_{BD}=\dot{I}X_Le^{j90^\circ}=2e^{-j36,87^\circ}3e^{j90^\circ}=6e^{j(90-36,87^\circ)}=6e^{j53,13^\circ}$.

Поскольку физически в цепях существуют переменные напряжения и токи, изменяющиеся по гармоническому закону, то все напряжения и токи в окончательном виде должны быть представлены во временной форме. Иначе говоря, по полученным комплексным изображениям следует записать их временные оригиналы. Из выражения $\dot{I}=2e^{-j36,87^\circ}$ следует, что $i=2\sqrt{2} \sin(\omega t - 36,87^\circ)$, аналогично при $\dot{U}_{AB}=8e^{-j36,87^\circ}$, $u_{AB}=8\sqrt{2} \sin(\omega t - 36,87^\circ)$, $\dot{U}_{BD}=6e^{j53,13^\circ}$, $u_{BD}=6\sqrt{2} \sin(\omega t + 53,13^\circ)$. Произведем проверки. По второму закону Кирхгофа $\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BD} = \dot{U}_{AD}$, т. е. $8e^{-j36,87^\circ} + 6e^{j53,13^\circ}$ должно оказаться равным $10e^{j0}$. Поскольку необходимо выполнять операцию сложения комплексных чисел, их следует записать в алгебраической форме. Так как $Me^{j\psi} = M \cos \psi + jM \sin \psi$, то $8e^{-j36,87^\circ} + 6e^{j53,13^\circ} = 8 \cos(-36,87^\circ) + j8 \sin(-36,87^\circ) + 6 \cos 53,13^\circ + j6 \sin 53,13^\circ = 8 \cdot 0,8 - j8 \cdot 0,6 + 6 \cdot 0,6 + j6 \cdot 0,8 = 6,4 - j4,8 + 3,6 + j4,8 = 10$ В. Можно было бы сложить и выражения мгновенных значений, т. е. $8\sqrt{2} \sin(\omega t - 36,87^\circ) + 6\sqrt{2} \sin(\omega t + 53,13^\circ)$.

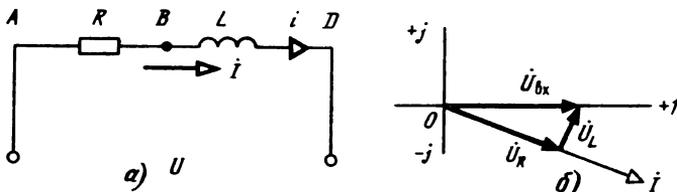


Рис. 6.2

Используя тригонометрическое преобразование $\sin(\omega t + \psi) = \cos \psi \sin \omega t + \sin \psi \cos \omega t$, легко получить тот же результат, однако расчеты в тригонометрической форме, как правило, более громоздки. Обратим внимание, что сумма модулей напряжений на R и на X_L не равна модулю входного напряжения. Действительно, $8 + 6 \neq 10$. Векторная диаграмма данной цепи показана на рис. 6.2, б.

Проверим баланс мощностей. Поскольку напряжения и токи источника (или источников, если их несколько) являются величинами комплексными, мощность также является величиной комплексной, т. е. состоящей из двух мощностей — резистивной и реактивной. Комплексная мощность $\underline{P}_{\text{ист}}$, отдаваемая источником, есть произведение комплексного напряжения источника \dot{U} на сопряженный комплексный ток, текущий через источник \dot{I} (подробнее см. с. 174, 175 в [1]). Сопряженным комплексом называется комплексное выражение, знак мнимой части которого противоположен знаку мнимой части того комплекса, с которым данный комплекс сопряжен. Например, если $\dot{I} = 2e^{-j36,87^\circ}$, то $\dot{I}^* = 2e^{j36,87^\circ}$ (подробнее см. с. 163 в [1]). Таким образом, в данной цепи $\underline{P}_{\text{ист}} = \dot{U}_{\text{ист}} \dot{I}_{\text{ист}}^* = 10e^{j0^\circ} 2e^{j36,87^\circ} = 20e^{j36,87^\circ}$. Получившееся выражение следует преобразовать в алгебраическую форму, тогда вещественная часть будет показывать резистивную мощность, а мнимая — реактивную, причем знак «плюс» у мнимой части указывает на индуктивный характер реактивной мощности, а знак «минус» — на емкостной.

Разложим комплексную мощность, отдаваемую источником, на резистивную P и реактивную P_Q : $20e^{j36,87^\circ} = 20 \cos 36,87^\circ + j20 \sin 36,87^\circ = 20 \cdot 0,8 + j20 \cdot 0,6 = 16 + j12$. Таким образом, источник отдает 16 Вт резистивной (активной) мощности и 12 вар реактивной индуктивной.

Рассчитаем мощность, потребляемую цепью. Резистивная мощность $P_R = I^2 R$, а реактивная $P_{Q_R} = I^2 X$, где I — действующее значение тока в цепи. Тогда $P_R = 2^2 \cdot 4 = 16$ Вт, $P_Q = 2^2 \cdot 3 = 12$ вар индуктивных. Проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

6.2. Решить задачу 6.1, если $R = 3$ Ом, $X_L = 4$ Ом, $U = 10$ В.
Указание: разберите сначала задачу 6.1.

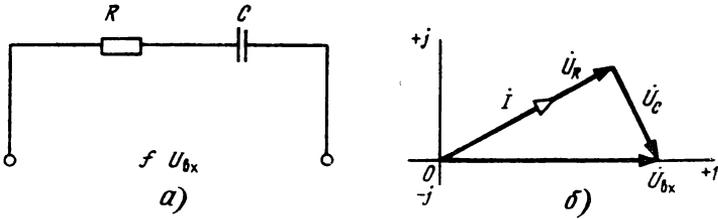


Рис. 6.3

6.3. В цепи, показанной на рис. 6.3, а, $R=21,2$ Ом, $f=5$ МГц, $C=2$ нФ, $U_{вх}=5,3$ В. Рассчитать мгновенный ток и напряжения на элементах. Произвести проверки.

Указание: разберите сначала с. 171 в [1] и задачу 3.1.

Решение. Рассчитаем значение емкостного сопротивления X_C на частоте 5 МГц $=5 \cdot 10^6$ Гц. Так как 2 нФ $=2 \cdot 10^{-9}$ Ф, то $X_C = 1/2\pi fC = 1/(6,28 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-9}) = 100/6,28 = 15,93$ Ом; $u_{вх} = U_{мвх} \sin \omega t = 5,3 \sqrt{2} \sin 6,28 \cdot 10^6 t$; $\dot{U} = 5,3 e^{j0}$; $Z = R - jX_C = 21,2 - j15,93 = 26,5 e^{-j36,87^\circ}$ Ом; $\dot{I} = \dot{U}/Z = 5,3 e^{j0} / (26,5 e^{-j36,87^\circ}) = 0,2 e^{j36,87^\circ}$; $\dot{U}_R = \dot{I}R = 0,2 e^{j36,87^\circ} 21,2 e^{j0} = 4,24 e^{j36,87^\circ}$; $\dot{U}_C = \dot{I}(-jX_C) = \dot{I}X_C e^{-j90^\circ} = 0,2 e^{j36,87^\circ} 15,93 e^{-j90^\circ} = 3,186 e^{-j53,13^\circ}$, т. е. $u_{вх} = 5,3 \sqrt{2} \sin \omega t$, $i = 0,2 \sqrt{2} \sin(\omega t + 36,87^\circ)$, $U_R = 4,24 \sqrt{2} \sin(\omega t + 36,87^\circ)$, $U_C = 3,18 \sqrt{2} \sin(\omega t - 53,13^\circ)$.

Произведем проверки. Напряжение $\dot{U}_R + \dot{U}_C = 4,24 e^{j36,87^\circ} + 3,18 e^{-j53,13^\circ} = 4,24 \cos 36,87^\circ + j4,24 \sin 36,87^\circ + 3,18 \times \cos(-53,13^\circ) + j3,18 \sin(-53,13^\circ) = 3,392 + j2,544 + 1,908 - j2,544 = 5,3 + j0 = 5,3 e^{j0} = 5,3$. Таким образом, $\dot{U}_R + \dot{U}_C = \dot{U}_{вх}$. Векторная диаграмма цепи показана на рис. 6.3, б.

Баланс мощностей: $P_{ист} = \dot{U}_{ист} \dot{I}_{ист}^* = 5,3 e^{j0} 0,2 e^{-j36,87^\circ} = 1,06 e^{-j36,87^\circ} = 1,06 \cos(-36,87^\circ) + j1,06 \sin(-36,87^\circ) = 0,848 - j0,636$; $P_R = I^2 R = (0,2)^2 21,2 = 0,848$ Вт; $P_{QH} = I^2 X_C = (0,2)^2 (-15,93) = -0,637$ вар.

Проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

6.4. На какой частоте в цепи, показанной на рис. 6.3, а, аргумент входного тока равен 45° .

Указание: изучите сначала § 6.14 на с. 177, 178 в [1].

Решение. В последовательной цепи $\operatorname{tg} \varphi = X/R$. Так как модуль фазного угла должен быть равен 45° , а $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, то $X=R$. Определим частоту, при которой $X_C = R = 21,2$ Ом. Так как $X_C = 1/2\pi fC$, то $f = 1/2\pi X_C C = 1/(6,28 \cdot 21,2 \cdot 2 \cdot 10^{-9}) = 1000 \times 10^9 / 266,272 = 3,756 \cdot 10^6$ Гц $= 3,756$ МГц.

6.5. При какой емкости в цепи, показанной на рис. 6.3, а, при $f=5$ МГц входной фазный угол равен: а) 30° , б) 45° , в) 60° ?

Указание: разберите сначала задачу 6.4.

6.6. Рассчитать мгновенные напряжения и токи в схеме, показанной на рис. 6.4, а.

Указание: изучите сначала § 6.15 на с. 178—180 в [1].

Решение. Рассчитаем емкостное сопротивление $X_C = 1/2\pi fC = 1/(6,28 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-9}) = 31,85$ Ом. Как видно из схемы, сопротивления R_2 и X_C соединены между собой параллельно, а сопротивление R_1 — последовательно с ними. Найдем комплексное входное сопротивление цепи: $\underline{Z}_{AD} = R_1 + \frac{R_2(-jX_C)}{R_2 - jX_C} = 57,8 + \frac{63,7(-j31,85)}{63,7 - j31,85} = 57,8 + \frac{63,7 \cdot 31,85 e^{-j90^\circ}}{71,22 e^{-j26,57^\circ}} = 57,8 + 28,49 e^{-j63,43^\circ} = 57,8 + 12,74 - j25,48 = 70,54 - j25,48 = 75 e^{-j19,86^\circ}$.

Рассчитаем комплексный входной ток: $\dot{I}_1 = \dot{U} / \underline{Z}_{AD} = 30 e^{j0^\circ} / 75 e^{-j19,86^\circ} = 0,4 e^{j19,86^\circ}$. Разветвим ток \dot{I}_1 на токи \dot{I}_2 и \dot{I}_3 .

Обозначим $\underline{Z}_1 = R_1 e^{j0^\circ} = 57,8$ Ом, $\underline{Z}_2 = R_2 e^{j0^\circ} = 63,7$ Ом, $\underline{Z}_3 = -jX_C = -j31,85 = 31,85 e^{-j90^\circ}$ Ом, тогда $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{0,4 e^{j19,86^\circ} \cdot 31,85 e^{-j90^\circ}}{71,22 e^{-j26,57^\circ}} = 0,1789 e^{-j43,57^\circ}$, $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{0,4 e^{-j19,86^\circ} \cdot 63,7 e^{j0^\circ}}{71,22 e^{-j26,57^\circ}} = 0,3578 e^{j46,43^\circ}$. Комплексное напряжение

между точками BD можно определить с помощью любого из следующих выражений $\dot{U}_{BD} = \dot{I}_2 \underline{Z}_2 = \dot{I}_3 \underline{Z}_3 = \dot{I}_1 [\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)]$, причем проще всего как $\dot{I}_2 \underline{Z}_2$. В этом случае $\dot{U}_{BD} = 0,1789 e^{-j43,57^\circ} \cdot 63,7 e^{j0^\circ} = 11,4 e^{-j43,57^\circ}$.

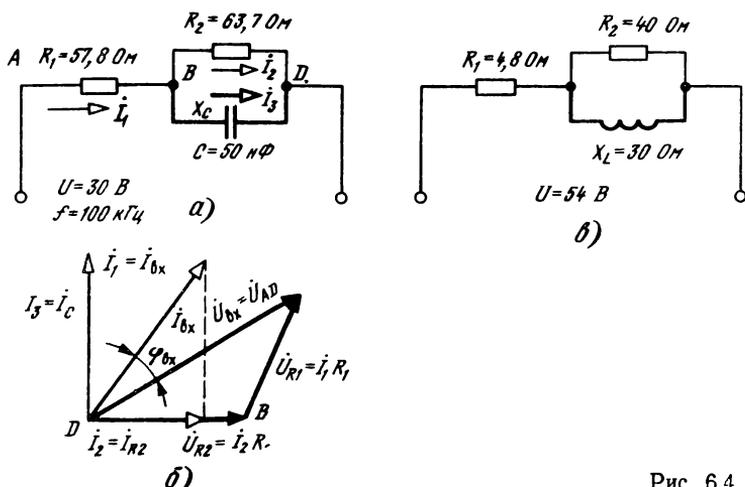


Рис. 6.4

Для проверки рассчитаем $\dot{U}_{BD} = I_3 Z_3 = 0,3578 e^{j46,43^\circ} \times 31,85 e^{-j90^\circ} = 11,4 e^{-j43,57^\circ}$. Аналогично $\dot{U}_{BD} = 0,4 e^{j19,86^\circ} \times 28,49 e^{-j63,43^\circ} = 11,4 e^{-j43,57^\circ}$. Проверим выполнение в узле B первого закона Кирхгофа: $\dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \dot{I}_1$, т. е. $0,1789 e^{-j43,57^\circ} + 0,3578 e^{j46,43^\circ} = 0,1789 \cos(-43,57^\circ) + j0,1789 \sin(-43,57^\circ) + 0,3578 \cos 46,43^\circ + j0,3578 \sin 46,43^\circ = 0,1789 \cdot 0,7245 - j0,1789 \times 0,6892 + 0,3578 \cdot 0,6892 + j0,3578 \cdot 0,7245 = 0,1296 - j0,1233 + 0,2466 + j0,2592 = 0,3762 + j0,1359 = 0,4 e^{j19,86^\circ} = \dot{I}_1$. Рассчитаем $\dot{U}_{AB} = \dot{I}_1 R_1 = 0,4 e^{j19,86^\circ} \cdot 57,8 = 23,12 e^{j19,86^\circ}$.

Таким образом, в цепи имелись следующие мгновенные напряжения и токи:

$$\begin{aligned} u_{AD} &= U_{mAD} \sin \omega t = 30 \sqrt{2} \sin \omega t; \quad u_{AB} = U_{mAB} \sin(\omega t + \psi_{AB}) = \\ &= 23,12 \sqrt{2} \sin(\omega t + 19,86^\circ); \quad u_{BD} = U_{mBD} \sin(\omega t + \varphi_B) = \\ &= 11,4 \sqrt{2} \sin(\omega t - 43,57^\circ); \quad i_1 = 0,4 \sqrt{2} \sin(\omega t + 19,86^\circ); \\ i_2 &= 0,1789 \sqrt{2} \sin(\omega t - 43,57^\circ); \quad i_3 = 0,3578 \sqrt{2} \times \\ &\times \sin(\omega t + 46,43^\circ). \end{aligned}$$

Произведем проверку. По второму закону Кирхгофа $\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BD}$ должно оказаться $\dot{U}_{AD} = 30$ В. Действительно, $23,12 e^{j19,86^\circ} + 11,4 e^{-j43,57^\circ} = 21,74 + j7,854 + 8,26 - j7,854 = 30 e^{j0^\circ} = 30$ В, т. е. равно напряжению \dot{U}_1 .

Проверим баланс мощностей: $\underline{P}_{\text{ист}} = \dot{U}_{\text{ист}} \dot{I}_1^* = 30 \cdot 0,4 e^{-j19,86^\circ} = 12 e^{-j19,86^\circ} = 11,29 - j4,077$, т. е. генератор отдает 11,29 Вт резистивной мощности и 4,077 вар реактивной емкостной мощности (на емкостный характер реактивной мощности указывает знак «минус» у мнимой части). Подсчитаем мощности в нагрузках: $P_{\text{н}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = (0,4)^2 57,8 + (0,1789)^2 63,7 = 9,28 + 2,6387 = 11,287$ Вт; $P_{\text{QH}} = I_3^2 (-X_C) = (0,3578)^2 (-31,85) = -4,077$ вар.

Все проверки выполняются, следовательно задача решена правильно. Векторная диаграмма цепи показана на рис. 6.4, б.

6.7. Какую емкость следует включить последовательно с сопротивлением R_1 в схеме рис. 6.4, а, чтобы входной фазный угол был бы равен -45° ?

Указание: разберите сначала задачи 6.4 и 6.6.

6.8. Рассчитайте мгновенные напряжения и токи в схеме, показанной на рис. 6.4, в. Произведите проверки.

Указание: разберите сначала задачи 6.1 и 6.6.

6.9. В схеме, показанной на рис. 6.5, а, определите X_C , при котором модуль входного сопротивления равен 180 Ом.

Указание: разберите сначала задачу 6.6.

Решение. Несмотря на то что по условию дается модуль входного сопротивления, все расчеты следует производить толь-

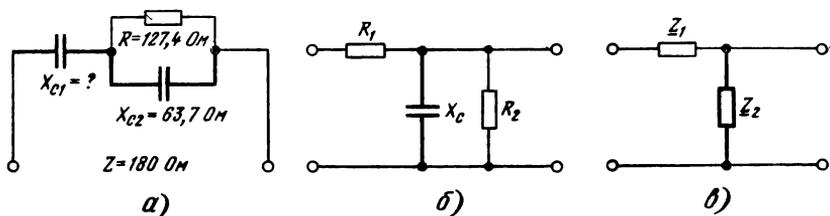


Рис. 6.5

ко в комплексной форме (напомним еще раз, что складывать можно только комплексные выражения, а не их модули).

Входное комплексное сопротивление цепи $\underline{Z}_{\text{вх}} = -jX_C + \frac{R(-jX_C)}{R-jX_C} = -jX_C + \frac{127,4e^{j0}63,7e^{-j90^\circ}}{127,4-j63,7} = -jX_C + \frac{127,4e^{j0}63,7e^{-j90^\circ}}{142,44e^{-j26,57^\circ}} = -jX_C + 57,97e^{-j63,43^\circ} = -jX_C + 25,48 - j50,95 = 25,48 - j(50,95 + X_C)$. Модуль получившегося комплексного выражения приравняем 180 Ом и из получившегося выражения найдем X_C : $180 = \sqrt{(25,48)^2 + (50,95 + X_C)^2}$. (Обратите внимание, что при вычислении модуля под корнем записывается сумма квадратов вещественной и мнимой частей комплексного выражения вне зависимости от знаков у каждой составляющей.) Возведя обе части равенства в квадрат, получим $(180)^2 = (25,48)^2 + (50,95)^2 + 2 \cdot 50,95 X_C + X_C^2$ или $X_C^2 + 2 \cdot 50,95 X_C + (2595,9 + 649,23 - 32400) = 0$, т. е. $X_C^2 + 2 \times 50,95 X_C - 29155 = 0$, откуда $X_{1,2} = -50,95 \pm \sqrt{2596 + 29155} = -50,95 \pm 178,2$, следовательно, $X_C = 178,2 - 50,95 = 127,2$ Ом.

З а м е ч а н и е. При решении данной задачи все числа записывались с их точными значениями. На практике при выполнении различных расчетов производят округления, например 56,97 принимают за 57; 50,95 — за 51; 178,2 — за 178 и т. д. Погрешность расчетов при этом не превышает нескольких процентов, что считается вполне допустимым. Примем $X_{C1} = 127$ Ом, $R = 127$ Ом, $X_{C2} = 64$ Ом, тогда $\underline{Z}_{\text{вх}} = -j127 + \frac{127 \cdot 64 e^{-j90^\circ}}{127 - j64} = -j127 + \frac{127 \cdot 64 e^{-j90^\circ}}{142 e^{-j26,7^\circ}} = -j127 + 57 e^{-j63,3^\circ} = -j127 + 25,7 - j51,1 = 25,7 - j178 = 179,9 e^{-j81,8^\circ}$. Как видно, погрешность, получившаяся за счет округления величин, составила всего $(180 - 179,9) 100 / 180 = 0,05\%$. Если бы в данной задаче погрешность была бы в 20 раз больше, то и тогда она не превышала бы 2,5% и т. д.

6.10. В схеме, показанной на рис. 6.5, б, рассчитать комплексный коэффициент передачи цепи, если $R_1 = 100$ Ом, $X_L = 50$ Ом, $R_2 = 28$ Ом.

Указание: повторите § 3.29 на с. 87,88 в [1] и разберите задачу 6.6.

Решение. Заменим схему, приведенную на рис. эквивалентной (рис. 6.5, в). В этой схеме $\underline{Z}_1 = R_1$, $\underline{Z}_2 = \frac{R_2(-jX_C)}{R_2 - jX_C}$, тогда комплексный коэффициент передачи $\underline{K} = \frac{\underline{Z}_2}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}$. Рассчитаем \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 и \underline{K} : $\underline{Z}_1 = 100e^{j0^\circ}$; $\underline{Z}_2 = \frac{28e^{j0^\circ} \cdot 50e^{-j90^\circ}}{28 - j50} = \frac{28e^{j0^\circ} \cdot 50e^{-j90^\circ}}{57,3e^{-j60,75^\circ}} = 24,43e^{-j29,25^\circ}$; $\underline{K} = \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = (24,43e^{-j29,25^\circ}) / (100 + 24,4 \cos 29,25^\circ - j24,43 \sin 29,25^\circ) = 24,43e^{-j29,25^\circ} / (121,31 - j11,94) = 24,43e^{-j29,25^\circ} / 121,9e^{-j5,62^\circ} = 0,2e^{-j23,63^\circ}$.

Напомним, что если равны два комплексных числа, записанные в показательной форме, то порознь равны их модули и аргументы. Если комплексные числа записаны в алгебраической форме, то при их равенстве равны их вещественные и мнимые части. Комплексный коэффициент передачи исследуемой цепи $\underline{K} = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$ или $\underline{K} e^{j\psi_K} = (U_2 e^{j\psi_{U_2}}) / (U_1 e^{j\psi_{U_1}}) = (U_2 / U_1) e^{j(\psi_{U_2} - \psi_{U_1})}$, откуда $\underline{K} = U_2 / U_1$, а $\psi_K = \psi_{U_2} - \psi_{U_1}$, т. е. $U_2 = \underline{K} U_1 = 0,2 U_1$, $\psi_{U_2} = \psi_K + \psi_{U_1}$. Так как $\psi_{U_1} = 0$, то $\psi_{U_2} = \psi_K = -23,63^\circ$.

6.11. Определить, в каких пределах будет изменяться модуль и аргумент коэффициента передачи в схеме, показанной на рис. 6.5, б, при изменении сопротивления R_2 от 0 до ∞ , если $R_1 = 100$ Ом, $X_C = 50$ Ом.

Указание: разберите сначала задачу 6.10.

6.12. При каком значении сопротивления R_2 модуль коэффициента передачи в цепи, показанной на рис. 6.6, а, равен 0,3, если $R_1 = 200$ Ом, $X_L = 100$ Ом? Чему равен при этом аргумент коэффициента передачи?

Указание: разберите сначала задачу 6.9.

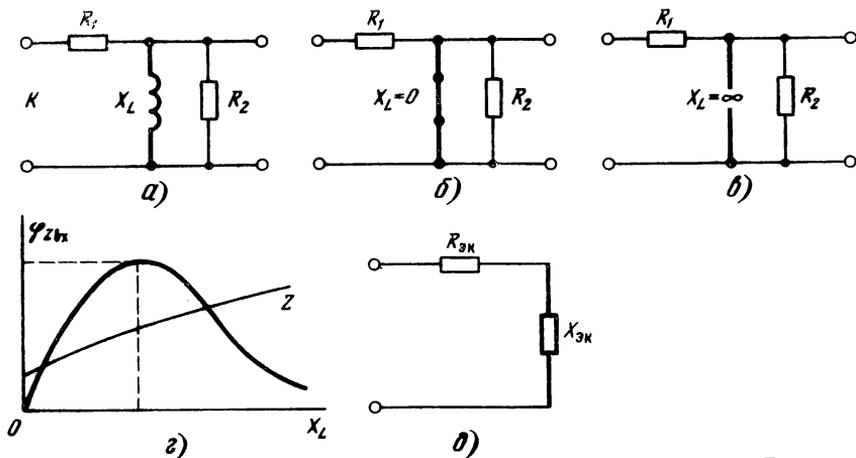


Рис. 6.6

6.13. В схеме, показанной на рис. 6.6, а, $R_1=100$ Ом, $X_L=200$ Ом. В каких пределах будут изменяться модуль и аргумент коэффициента передачи цепи при изменении сопротивления R_2 от 50 до 500 Ом?

Указание: разберите сначала задачу 6.10.

6.14. Рассчитать и построить кривые модуля и аргумента комплексного входного сопротивления цепи (рис. 6.6, а) при изменении индуктивного сопротивления X_L от 0 до ∞ , если $R_1=100$ Ом, $R_2=300$ Ом.

Указание: сначала изучите § 6.13 на с. 175—177 в [1].

Решение. При $X_L=0$ схема рис. 6.6, а приобретает вид, показанный на рис. 6.6, б, а при $X_L=\infty$ — рис. 6.6, в. В обоих случаях входное сопротивление цепи оказывается чисто резистивным и, следовательно, входной фазный угол будет равен нулю. Но если функция изменяется от 0 до 0, то она обязательно имеет максимум. Вид кривой $\varphi_{Z_{вх}} = f(X_L)$ показан на рис. 6.6, г. Запишем аналитическое выражение входной фазной характеристики цепи. Для этого следует составить схему замещения заданной цепи, т. е. по виду цепи записать комплексное выражение входного сопротивления $Z_{вх}$, привести это выражение к виду $R_{эк} + jX_{эк}$ и рассчитать $\varphi_{Z_{вх}}$. Проведем все выкладки: $Z_{вх} = R_1 + R_2 j X_L / (R_2 + j X_L) = (R_1 R_2 + j R_1 X_L + j R_2 X_L) / (R_2 + j X_L)$. Чтобы выделить в этом комплексном выражении вещественную и мнимую части, необходимо избавиться от мнимости в знаменателе. Для этого числитель и знаменатель получившейся дроби следует умножить на множитель, сопряженный с комплексным выражением знаменателя, тогда

$$\begin{aligned} Z_{вх} &= \frac{(R_1 R_2 + j R_1 X_L + j R_2 X_L)(R_2 - j X_L)}{(R_2 + j X_L)(R_2 - j X_L)} = \\ &= \frac{R_1 R_2^2 + j R_1 R_2 X_L + j R_2^2 X_L - j R_1 R_2 X_L + R_1 X_L^2 + R_2 X_L^2}{R_2^2 + X_L^2} = \\ &= \frac{R_1 R_2^2 + R_1 X_L^2 + R_2 X_L^2}{R_2^2 + X_L^2} + j \frac{R_2^2 X_L}{R_2^2 + X_L^2} = R_{эк} + j X_{эк}, \end{aligned}$$

что соответствует схеме, изображенной на рис. 6.6, д. Таким образом, последовательная неразветвленная цепь с резистивным сопротивлением $R_{эк} = (R_1 R_2^2 + R_1 X_L^2 + R_2 X_L^2) / (R_2^2 + X_L^2)$ и $X_{эк} = R_2^2 X_L / (R_2^2 + X_L^2)$ энергетически эквивалентна цепи, показанной на рис. 6.6, а. Во всякой неразветвленной последовательной цепи $\varphi_{Z_{вх}} = \arctg(X/R)$, откуда в цепи на рис. 6.6, д, а следовательно, и в исходной схеме (рис. 6.6, а)

$$\varphi_{Z_{вх}} = \arctg [R_2^2 X_L / (R_1 R_2^2 + R_1 X_L^2 + R_2 X_L^2)]. \quad (6.1)$$

Поделив числитель и знаменатель на X_L^2 , получим

$$\varphi_{z_{\text{вх}}} = \arctg[(R_2^2/X_L)/(R_1R_2^2/X_L^2 + R_1 + R_2)] = \arctg A_1, \quad (6.2)$$

где A — аргумент данной функции.

При $X_L=0$ и $X_L=\infty$ $\varphi_{z_{\text{вх}}}=0$. Подставим $X_L=0$ в (6.1), а $X_L=\infty$ в (6.2). Тогда $\varphi_{z_{\text{вх}}}$ в обоих случаях действительно равен нулю (характеристика, показанная на рис. 6.6, з).

Определим значение X_L , при котором входной фазный угол максимален. Очевидно, что $\varphi_{z_{\text{вх}}}$ будет максимальным при максимальном значении аргумента A . Исследуем значение аргумента на экстремум. Для этого вычислим выражение dA/dX_L , приравняем его нулю и решим получившееся уравнение относительно X_L , т. е.

$$\frac{dA}{dX_L} = \frac{R_2^2(R_1R_2^2 + R_1X_L^2 + R_2X_L^2) - R_2^2X_L(2R_1X_L + 2R_2X_L)}{(R_1R_2^2 + R_1X_L^2 + R_2X_L^2)^2} = 0.$$

Дробь, как известно, равна нулю в двух случаях: при знаменателе, равном бесконечности, или при числителе, равном нулю. В данной задаче при $X_L=\infty$ знаменатель становится равным бесконечности, но в этом случае функция оказывается равной нулю, а не максимуму. Следовательно, в данном случае числитель равен нулю, т. е. получается выражение $R_2^2(R_1R_2^2 + R_1X_L^2 + R_2X_L^2 - 2R_1X_L^2 - 2R_2X_L^2) = 0$. Так как $R_2 \neq 0$ (поскольку R_2 по условию — величина постоянная), то нулю равно выражение в скобках, откуда $X_L^2(R_1 + R_2) = R_1R_2^2$ или $X_{L_{\text{эктр}}} = R_2 \sqrt{R_1/(R_1 + R_2)}$. При таком значении X_L входной угол оказывается максимальным. Очевидно, что $X_{L_{\text{max}}} = 200 \sqrt{100/(100 + 300)} = 200 \sqrt{0,25} = 200 \cdot 0,5 = 100$ Ом. Рассчитаем $\varphi_{z_{\text{max}}}$. Для этого в выражение для $\varphi_{z_{\text{вх}}}$ подставим $X_L = 100$ Ом, тогда $\varphi_{z_{\text{вх}}} = \arctg [R_2^2 X_L / (R_1 R_2^2 + R_1 X_L^2 + R_2 X_L^2)] = \arctg [(300^2 \cdot 100) / (100 + 300^2 + (100 + 300) 100^2)] = \arctg 0,692 = 34,7^\circ$. Из выражения $Z_{\text{вх}} = [R_1 + j X_L (R_1 + R_2)] / (R_2 + j X_L)$ определим модуль этого выражения. Так как модуль дроби комплексного числа равен модулю числителя, деленному на

модуль знаменателя, то $Z_{\text{вх}} = \sqrt{\frac{R_1^2 R_2^2 + X_L^2 (R_1 + R_2)^2}{(R_2^2 + X_L^2)}} = \sqrt{\frac{(R_1 R_2 / X_L)^2 + (R_1 + R_2)^2}{(R_2 / X_L)^2 + 1}}$. Из данных выражений видно, что

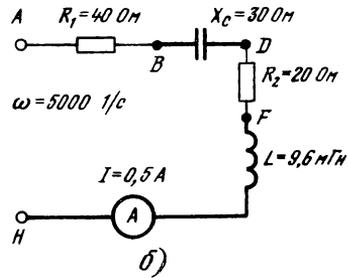
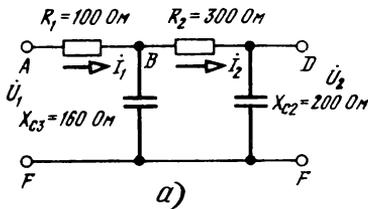


Рис. 6.7

при $X_L = 0$ $Z_{\text{вх}} = R_1 = 100$ Ом, при $X_L = \infty$ $Z_{\text{вх}} = R_1 + R_2 = 400$ Ом, что и должно было получиться исходя из физических рассуждений, приведенных выше (см. рис. 6.6, з).

Рассчитаем $Z_{\text{вх}}$ при $X_L = 100$ Ом: $Z_{\text{вх}} = \sqrt{\frac{(100 \cdot 300)^2 + (100 \cdot 400)^2}{300^2 + 100^2}} = 158$ Ом.

6.15. По условию задачи 6.14 рассчитать $Z_{\text{вх}}$, $\varphi_{Z_{\text{вх}}}$ и построить кривые $Z_{\text{вх}} = f(X_L)$ и $\varphi_{Z_{\text{вх}}} = f(X_L)$ при $X_L = 25, 50, 100, 200, 400$ Ом.

Указание: разберите сначала задачу 6.14.

6.16. Рассчитать модуль и аргумент коэффициента передачи цепи, показанной на рис. 6.7, а.

Указание: разберите сначала задачу 3.62.

Решение. Чтобы рассчитать коэффициент передачи цепи в общем случае, необходимо задаться входным напряжением \dot{U}_1 , рассчитать ток \dot{I}_2 в выходном элементе (в данной цепи в емкостном сопротивлении X_{C_2}), определить комплексное напряжение $\dot{U}_2 = \dot{I}_2(-jX_{C_2})$ и поделить его на входное напряжение \dot{U}_1 . Получившееся выражение будет комплексным коэффициентом передачи цепи. Проведем указанные расчеты. Обозначим $\underline{Z}_1 = R_1$, $\underline{Z}_2 = R_2 - jX_{C_2}$, $\underline{Z}_3 = -jX_{C_2}$. Рассчитаем

$$\underline{Z}_2 = R_2 - jX_{C_2} = 300 - j200 = 360,56e^{-j33,7^\circ};$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{вх}} &= \underline{Z}_1 + (\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3) / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = 100 + \frac{360,56e^{-j33,7^\circ} \cdot 160e^{j90^\circ}}{300 - j(200 + 160)} = \\ &= 100 + 123,12e^{-j73,51^\circ} = 100 + 34,94 - j118,06 = \\ &= 134,94 - j118,06 = 179e^{-j41,18^\circ}. \end{aligned}$$

Рассчитаем комплексные токи:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 / \underline{Z}_{\text{вх}} = \dot{U}_1 / (179,3e^{-j41,18^\circ}) = 5,577 \cdot 10^{-3} \dot{U}_1 e^{j41,18^\circ};$$

$$i_2 = i_1 [Z_3 / (Z_2 + Z_3)] = \frac{5,577 \cdot 10^{-3} U_1 e^{j41,18^\circ} \cdot 160 e^{-j90^\circ}}{468,6 e^{-j50,19^\circ}} = 1,9 \cdot 10^{-3} U_1 e^{j1,37^\circ}.$$

Комплексное напряжение $\dot{U}_2 = i_2 (-j X_{C_2}) = 1,9 \cdot 10^{-3} \dot{U}_1 e^{j1,37^\circ} \times \times 200 e^{-j90^\circ} = 0,38 \dot{U}_1 e^{-j88,63^\circ}$. Комплексный коэффициент передачи $\underline{K} = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = 0,38 \dot{U}_1 e^{-j88,63^\circ} / U_1 = 0,38 e^{-j88,63^\circ}$.

Таким образом, модуль коэффициента передачи равен 0,38, а аргумент $(-88,63)^\circ$, откуда $\dot{U}_2 = 0,38 U_1$. Так как $\psi_k = \psi_2 - \psi_1$, а $\psi_1 = 0$, то $\psi_2 = \psi_k = -88,63^\circ$.

RLC-ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

6.17. Рассчитать ток в цепи, напряжения и мощности на элементе цепи, показанной на рис. 6.7, б.

Указание: изучите сначала § 6.15 на с. 178, 179 в [1].

Решение. Определим индуктивное сопротивление катушки X_L и комплексное сопротивление цепи Z : $X_L = \omega L = = 5 \cdot 10^3 \cdot 9,6 \cdot 10^{-3} = 48 \text{ Ом}$; $Z_{AH} = (R_1 + R_2) + j(X_L - X_C) = = (40 + 20) + j(48 - 30) = 60 + j18 = 62,64 e^{j16,7^\circ}$. Стрелочные приборы показывают действующее значение тока. Запишем выражение мгновенных токов в цепи: $i = I_m \sin \omega t = = 0,5 \sqrt{2} \sin \omega t$ (начальную фазу тока принимаем за нулевую). В комплексном виде $\dot{i} = 0,5 e^{j0^\circ}$; $\dot{U}_{AB} = \dot{i} R_1 = 0,5 e^{j0^\circ} \cdot 40 e^{j0^\circ} = = 20 e^{j0^\circ}$; $\dot{U}_{BD} = \dot{i} Z_C = 0,5 e^{j0^\circ} 30 e^{-j90^\circ} = 15 e^{-j90^\circ}$; $\dot{U}_{DF} = \dot{i} R_2 = = 0,5 e^{j0^\circ} 20 e^{j0^\circ} = 10 e^{j0^\circ}$; $\dot{U}_{FH} = \dot{i} Z_L = 0,5 e^{j0^\circ} 48 e^{j90^\circ} = 24 e^{j90^\circ}$; $\dot{U}_{AD} = \dot{i} Z_{AD} = 0,5 e^{j0^\circ} (40 - j30) = 0,5 e^{j0^\circ} 50 e^{-j36,87^\circ} = 25 e^{-j36,87^\circ}$; $\dot{U}_{DH} = \dot{i} Z_{DH} = 0,5 e^{j0^\circ} (20 + j48) = 0,5 e^{j0^\circ} 52 e^{j67,38^\circ} = 26 e^{j67,38^\circ}$; $\dot{U}_{AH} = \dot{i} Z_{AH} = 0,5 e^{j0^\circ} 62,64 e^{j16,7^\circ} = 31,32 e^{j16,7^\circ}$.

Произведем проверку: $\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BD} + \dot{U}_{DF} + \dot{U}_{FH}$ должно равняться \dot{U}_{AH} , т. е. $31,32 e^{j16,7^\circ}$. Произведем числовые расчеты: $20 e^{j0^\circ} + 15 e^{-j90^\circ} + 10 e^{j0^\circ} + 24 e^{j90^\circ} = 20 - j15 + 10 + j24 = = 30 + j9 = 31,32 e^{j16,7^\circ}$. Второй закон Кирхгофа выполняется.

Проверим баланс мощностей:

$$P_{\text{ист}} = \dot{U}_{\text{ист}}^* I_{\text{ист}} = 31,32 e^{j16,7^\circ} 0,5 e^{j0^\circ} = 15,66 e^{j16,7^\circ} = 15 + j4,5;$$

$$P_R = I^2 R = (0,5)^2 (40 + 20) = 15 \text{ Вт};$$

$$P_{QH} = I^2 (X_L - X_C) = (0,5)^2 (48 - 30) = 4,5 \text{ вар}.$$

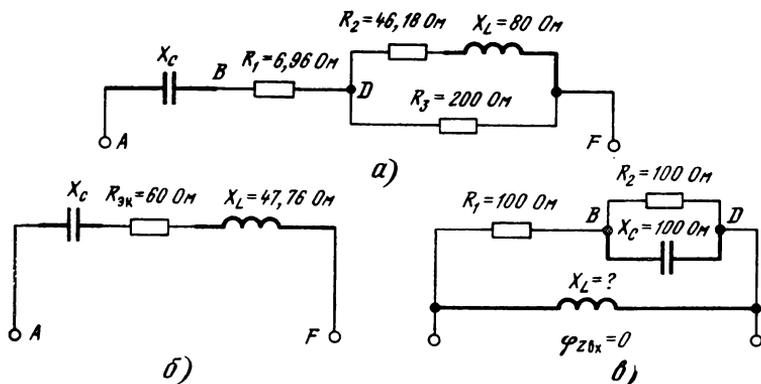


Рис. 6.8

Баланс мощностей выполняется, задача решена правильно.

6.18. В схеме, показанной на рис. 6.8, а, рассчитать емкостные сопротивления, при которых входной фазный угол принимает значения 30, 20, 10, 0, -10, -20 и -30°.

Указание: разберите сначала задачу 6.14.

Решение. Определим эквивалентное комплексное сопротивление участка BF:

$$\begin{aligned} Z_{BF} &= R_1 + \frac{R_3(R_2 + jX_L)}{R_3 + R_2 + jX_L} = 6,96 + \frac{200(46,18 + j80)}{246,18 + j80} = \\ &= 6,96 + \frac{200 \cdot 92,37e^{j60^\circ}}{258,85e^{j18^\circ}} = 6,96 + 71,37e^{j42^\circ} = \\ &= 6,96 + 53,04 + j47,76 = 60 + j47,76. \end{aligned}$$

Таким образом, эквивалентное комплексное сопротивление участка BF имеет вид последовательной цепи с резистивным сопротивлением 60 Ом и реактивным сопротивлением 47,76 Ом (рис. 6.8, б). В последовательной цепи $\operatorname{tg} \varphi_{Z_{\text{вх}}} = (X_L - X_C)/R$. При $\varphi_{Z_{\text{вх}}} = 30^\circ$ $X/R = \operatorname{tg} 30^\circ = 0,577$, откуда $X = 0,577R = 34,6$.

Так как $X_L = 47,7$ Ом, то $X_C = 47,7 - 34,6 = 13,1$ Ом.

Произведем проверку: $\varphi_{Z_{\text{вх}}} = \operatorname{arctg} [(X_L - X_C)/R] = \operatorname{arctg} [(47,76 - 13,1)/60] = \operatorname{arctg} (34,66/60) = \operatorname{arctg} 0,577 = 30^\circ$. При $\varphi_{Z_{\text{вх}}} = -30^\circ$ $\operatorname{tg} \varphi_{Z_{\text{вх}}} = -0,577$, т. е. $X = -0,577R = -34,6$ Ом. Так как $X_L = 47,76$ Ом, то для получения $X = -34,6$ Ом X_C должно иметь значение $47,76 + 34,6 = 82,36$ Ом.

Произведем проверку $\operatorname{tg} \varphi_{Z_{\text{вх}}} = (X_L - X_C)/R = (47,76 - 82,36)/60 = -34,6/60 = -0,577$, т. е. $\varphi_{Z_{\text{вх}}} = -30^\circ$, как и было задано по условию. Расчет значений X_C для $\varphi_{Z_{\text{вх}}} = \pm 20, \pm 10$ и 0° предлагается учащимся произвести самостоятельно.

6.19. При каком значении индуктивного сопротивления X_L в схеме, показанной на рис. 6.8, в, входной фазный угол равен нулю? Чему равен при этом модуль входного сопротивления цепи?

Указание: разберите сначала задачу 6.18.

Решение. Рассчитаем эквивалентное сопротивление участка AD : $Z_{AD} = R_1 + [R_2(-jX_C)] / (R_2 - jX_C) = 100 + (100 \times 100e^{-j90^\circ}) / (100 - j100) = 100 + 70,7 e^{-j45^\circ} = 100 + 50 - j50 = 150 - j50 = 158,1e^{-j18,43^\circ}$. Комплексное входное сопротивление цепи

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{158,1e^{-j18,43^\circ} X_L e^{j90^\circ}}{150 - j50 + jX_L} = \frac{158,1X_L e^{j71,57^\circ}}{150 + j(X_L - 50)} = \frac{(50X_L + j150X_L)}{150 + j(X_L - 50)}$$

Получившееся выражение следует привести к виду $R_{\text{эк}} + jX_{\text{эк}}$, для этого числитель и знаменатель дроби умножим на комплексное выражение, сопряженное с комплексом знаменателя:

$$\begin{aligned} & \frac{(50X_L + j150X_L)(150 - jX_L + j50)}{(150 + jX_L - j50)(150 - jX_L + j50)} = \\ & = \frac{50 \cdot 150X_L + j150 \cdot 150X_L - j50X_L^2 + 150X_L^2 + j50 \cdot 50X_L - 150 \cdot 50X_L}{(150)^2 + (X_L - 50)^2} \end{aligned}$$

Получилась схема замещения цепи, т. е. схема, состоящая из резистивного сопротивления $R_{\text{эк}} = [150(50X_L + X_L^2 - 50X_L)] / [(150)^2 + (X_L - 50)^2]$ и реактивного $X_{\text{эк}} = [50(3 \cdot 150X_L - X_L^2 + 50X_L)] / [(150)^2 + (X_L - 50)^2]$. Чтобы входной фазный угол равнялся нулю, необходимо выполнение условия $X_{\text{эк}} = 0$, т. е. числитель выражения $X_{\text{эк}}$ должен быть равен нулю и, следовательно, должно выполняться условие $450X_L - X_L^2 + 50X_L = 0$, откуда $X_L = 500$ Ом.

Произведем проверку. В выражение для $\underline{Z}_{\text{вх}}$ вместо X_L подставим значение 500 Ом, входное сопротивление при этом должно оказаться величиной вещественной:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{50 \cdot 500 + j150 \cdot 500}{150 + j450} = \frac{2500 + j7500}{15 + j45} = \frac{7905,7e^{j71,57^\circ}}{47,43e^{j71,57^\circ}} = 167e^{j0^\circ}$$

Входное сопротивление оказалось чисто резистивным, что и было задано по условию. Проверка выполняется, следовательно, задача решена правильно.

6.20. Составьте схему замещения цепи, показанной на рис. 6.9, а.

Указание: изучите сначала § 6.10 и 6.11 на с. 172—174 в [1].

Решение. Комплексная входная проводимость цепи $Y_{\text{вх}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = 1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_3 = 1/R_1 + 1/(R_2 + jX_2) + 1/(\underline{R}_3 -$

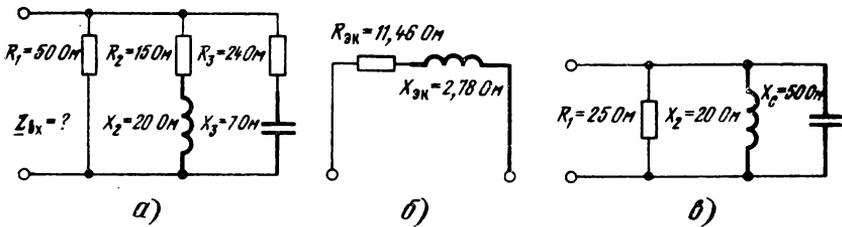


Рис. 6.9

$-jX_3) = 1/50 + 1/(15 + j20) + 1/(24 - j7) = 1/(50e^{j0^\circ}) + 1/(25e^{j53,13^\circ}) + 1/(25e^{-j16,26^\circ}) = 10^{-2}(2 + 4e^{-j53,13^\circ} + 4e^{j16,26^\circ}) = 10^{-2}(2 + 2,4 - j3,19 + 3,84 + j1,2) = 10^{-2}(8,24 - j2) = 10^{-2} \times 8,48e^{-j13,64^\circ}$, откуда $Z_{BK} = 1/Y_{BK} = 1/(10^{-2} \cdot 8,48 e^{-j13,64^\circ}) = 11,79 e^{j13,6^\circ} = 11,46 + j2,78 \text{ Ом}$. Таким образом, схема, показанная на рис. 6.9, а, энергетически эквивалентна последовательной цепи с резистивным сопротивлением 11,46 Ом и индуктивным сопротивлением 2,78 Ом (рис. 6.9, б).

6.21. Рассчитайте схему замещения цепи, показанной на рис. 6.9, в.

Указание: разберите сначала задачу 6.20.

6.22. Рассчитайте комплексные токи, напряжения и мощности в схеме, показанной на рис. 6.10, а.

Указание: изучите сначала § 6.17 на с. 182—184 в [1].

Решение. Данную задачу можно решить различными способами, в том числе методами использования законов Кирхгофа, контурных токов, двух узлов, наложения и т. д. Используем метод контурных токов. Зададимся комплексными контурными токами \dot{I}_A и \dot{I}_B (рис. 6.10, а).

В этом случае можно составить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{E}_1 = \dot{I}_A(Z_1 + Z_3) - \dot{I}_B Z_3; \\ -\dot{E}_2 = \dot{I}_B(Z_3 + Z_2) - \dot{I}_A Z_3 \end{cases}$$

или, подставив числовые значения,

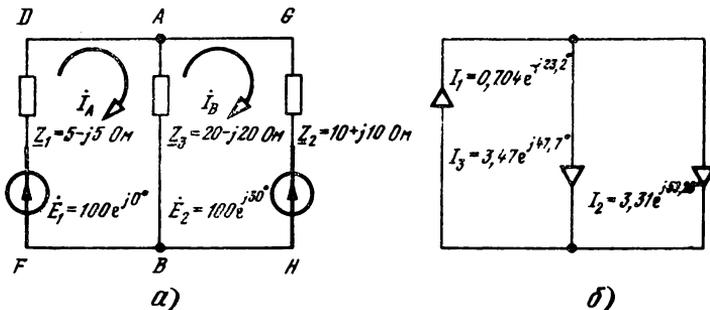


Рис. 6.10

$$\begin{cases} \dot{I}_A(5 - j5 + 20 - j20) - \dot{I}_B(20 - j20) = 100 + j0, \\ \dot{I}_A(20 - j20) - \dot{I}_B(20 - j20 + 10 + j10) = 100e^{j30^\circ}; \\ \dot{I}_A(25 - j25) - \dot{I}_B(20 - j20) = 100 + j0; \\ \dot{I}_A(20 - j20) - \dot{I}_B(30 - j10) = 86,6 + j50. \end{cases}$$

Решать систему двух уравнений с комплексными коэффициентами проще всего на ПМК по программе 3. 6.1.

Программа 3. 6.1 для решения системы двух линейных уравнений с комплексными коэффициентами вида $(A+jB)X + (C+jD)Y = F+jH$ $(M+jN)X + (P+jS)Y = Q+jV$, где $\bar{X} = X' + jX''$; $\bar{Y} = Y' + jY''$

F /-/ B/O F B/O

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	9 09	x-10 40	11 53	56 56	11 53	58 58	C/11 50	11 53	56 56	11 53
1	58 58	11-x7 67	11-x3 63	- 11	x-11A 4-	11-x8 68	11-x4 64	- 11	x-11B 4L	11 53
2	65 65	11-x5 65	11-x1 61	- 11	x-11A 4-	11-x6 66	11-x2 62	- 11	x-11B 4L	9 09
3	x-10 40	11 53	59 59	11-x2 62	11-x3 63	11-x8 68	x 12	- 11	11-x4 64	11-x7 67
4	x 12	- 11	x-115 45	11-x1 61	11-x3 63	11-x7 67	x 12	- 11	11-x4 64	11-x8 68
5	x 12	+ 10	x-114 44	C/11 50	B/11 51	00 00	11 53	65 65	C/11 50	11 53
6	78 78	Kx-10 L0	↔ 14	Kx-10 L0	B/O 52	11-xA 6-	↑ 0E	F x 22	11-xB 6L	F x 22
7	+ 10	÷ 13	x-11C 4C	11-xB 6L	F ↑ 0	÷ 13	x-11D 4Г	B/O 52	11-xA 6-	11-xC 6C
8	x 12	11-xB 6L	11-xD 6Г	x 12	+ 10	11-xB 6L	11-xC 6C	x 12	11-xA 6-	11-xD 6Г
9	x 12	- 11	B/O 52	F F	/-/ /-/					

Ввод исходных данных:
 B/O A→PA B→PB C/11 C→PA D→PB C/11
 F→PA H→PB C/11 M→PA N→PB C/11 P→PA
 S→PB C/11 Q→PA V→PB C/11

После счета на экране и в регистре 4 высветится значение X' , а X'' берется из регистра 5. Аналогично Y' — из регистра 7, Y'' — из регистра 8.

Введем в качестве контрольного примера уравнения, получившиеся в данной задаче:

$$\begin{cases} \dot{I}_A(25 - j25) - \dot{I}_B(20 - j20) = 100 + j0; \\ \dot{I}_A(20 - j20) - \dot{I}_B(30 - j10) = 86,6 + j50. \end{cases}$$

Разберем подробно манипуляции с клавиатурой ПМК при вводе исходных данных этого примера:

В/О 2 5 x → П А 2 5 В x → П В С/П

Через 15 с на экране должно высветиться —2, —02. Получившееся число свидетельствует о том, что калькулятор работает правильно и ввод исходных данных можно продолжить:

2 0 В x → П А 2 0 x → П В С/П

Если на экране будет —8. —01, то ввод данных продолжается:

1 0 0 x → П А 0 x → П В С/П

Должно высветиться 2:

2 0 x → П А 2 0 В x → П В С/П

На экране —2.5 —02

3 0 В x → П А 1 0 x → П В С/П

На экране —1.

8 6 А 6 x → П А 5 0 x → П В С/П

На экране высвечивается вещественная часть корня X , в данном примере 6,468967 —01 (этот же результат находится и в регистре 4). Мнимая часть корня X (т. е. X'') находится в регистре 5 (П—x 5), на экране —2,772413 —01. Аналогично Y' находится в регистре 7 (П—x 7), —1,6913792. Значение Y'' находится в регистре 8 (П—x 8), —2,8465517. Таким образом, $\dot{I}_A = X = 0,6468967 - j 0,2772413$ А; $\dot{I}_B = Y = -1,6913792 - j 2,8465517$ А. Если контрольный пример выполняется, то следует нажать клавишу В/О, ввести исходные данные и выполнить необходимые расчеты.

Найдем токи в ветвях:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_A = 0,6469 - j0,2772 = 0,70779 e^{-j23,2^\circ};$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 = \dot{I}_B &= -1,6914 - j2,8465 = 3,31 e^{-j120,72^\circ} = \\ &= -3,31 e^{j(180^\circ - 120,72^\circ)} = -3,31 e^{j59,28^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Таким образом, ток \dot{I}_2 можно представить либо как ток, действительное направление которого совпадает с предполагаемым, но тогда аргумент этого тока будет $(-120, 72^\circ)$, либо как ток, действительное направление которого противоположно предполагаемому, но с аргументом $+59,28^\circ$. Второй

вариант для практики предпочтительнее. Определим ток $I_3 = I_A - I_B = 0,6469 - j0,2772 - (-1,6914 - j2,8465) = 2,2382 + j2,5694 = 3,474 e^{j47,7^\circ}$. Покажем токи на графе (рис. 6.10, б).

Произведем проверки. Проверять выполнение первого закона Кирхгофа при использовании метода контурных токов не имеет смысла, поскольку ток I_3 получен сложением токов I_1 и I_2 . Проверим выполнение второго закона Кирхгофа.

В контуре $DABFD$ $\dot{E}_1 = \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_3 Z_3 = 0,704 e^{-j23,20^\circ} (5 - j5) + 3,47 e^{j47,7^\circ} (20 - j20) = 1,8568 - j4,6424 + 97,9 + j4,7 = 99,76 - j0,0576 \approx 100$.

В контуре $BAGHB$ $\dot{E}_2 = \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_3 Z_3 = 3,31 e^{j59,28^\circ} (10 + j10) + 3,47 e^{j47,7^\circ} (20 - j20) = -11,51 + j45,23 + 97,9 + j4,7 = 86,4 + j49,7 = 99,67 e^{j29,9^\circ} \approx \dot{E}_2 = 100 e^{j30^\circ}$.

В контуре $DAGHBF$ $\dot{E}_1 - \dot{E}_2 = 100 - 100 e^{j30^\circ} = 100 - 86,6 - j50 = 13,4 - j50 = 51,76 e^{-j75^\circ}$; $\dot{I}_1 Z_1 - \dot{I}_2 Z_2 = 1,857 - j4,642 + 11,51 - j45,23 = 13,37 - j49,87 = 51,63 e^{-j75^\circ}$.

Баланс мощностей: комплексная мощность, отдаваемая источниками, $P_{ист} = \dot{E}_1 \dot{I}_1^* + \dot{E}_2 \dot{I}_2^* = 100 e^{j0^\circ} \cdot 0,704 e^{j23,7^\circ} + 100 e^{j30^\circ} \times 3,31 e^{-j59,28^\circ} = 64,69 + j27,73 + 288,7 - j161,9 = 353,4 - j134,2 = 378 e^{-j20,80^\circ}$.

Резистивная мощность в нагрузке $P_n = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = (0,704)^2 5 + (3,31)^2 10 + (3,474)^2 20 = 353,37$ Вт. Реактивная мощность в нагрузке $P_{QH} = -I_1^2 X_1 + I_2^2 X_2 - I_3^2 X_3 = -(0,704)^2 5 + (3,31)^2 10 - (3,474)^2 20 = -135$ вар. Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

6.23. Решите задачу 6.22 методом двух узлов.

Указание: разберите сначала задачи 3.118 и 6.22.

6.24. Решите задачу 6.22 методом наложения.

Указание: разберите сначала задачу 3.95.

6.25. Составьте систему уравнений по законам Кирхгофа для цепи, показанной на рис. 6.10, а.

Указание: разберите сначала задачу 3.126.

6.26. Рассчитайте комплексные токи, напряжения и мощности методами контурных токов и узловых потенциалов для цепи, показанной на схеме рис. 6.11.

Указание: разберите сначала задачу 6.22.

6.27. Рассчитать методом эквивалентного генератора комплексный ток во второй ветви для схемы, показанной на рис. 6.11.

Указание: разберите сначала задачу 3.113.

6.28. Рассчитать комплексные токи, напряжения и мощности в цепи, показанной на рис. 6.12.

Указания:

обозначить узлы большими буквами (A, B, D, \dots);

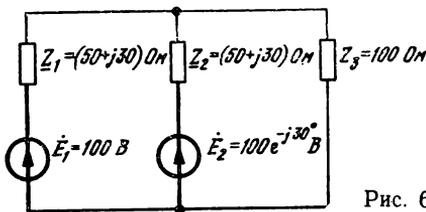


Рис. 6.11

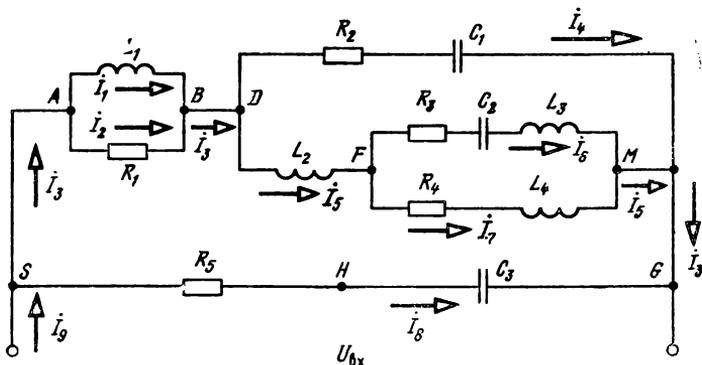


Рис. 6.12

нанести положительные (предполагаемые) комплексные токи во всех ветвях ($\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{I}_4, \dots, \dot{I}_8, \dot{I}_9$);

зная частоту f , индуктивности L и емкости C , рассчитать индуктивные и емкостные сопротивления ($X_L = 2\pi fL$, $X_C = 1/2\pi fC$);

рассчитать комплексные сопротивления участков AB, FM, DM, AM, SG и нарисовать несколько эквивалентных схем, заменяя различные участки цепи одним эквивалентным сопротивлением. Свертывать схемы до тех пор, пока вся схема не будет заменена одним комплексным сопротивлением. Рассчитать это сопротивление;

по модулю действующего значения входного напряжения записать комплексное входное напряжение и рассчитать входной комплексный ток \dot{I}_9 , по $\dot{U}_{вх}$ рассчитать комплексные токи \dot{I}_3 и \dot{I}_8 ; по \dot{I}_3 рассчитать \dot{I}_1 и \dot{I}_2 , а также \dot{I}_4 и \dot{I}_5 ; по \dot{I}_5 рассчитать \dot{I}_6 и \dot{I}_7 ;

зная комплексные токи в элементах и комплексные сопротивления этих элементов, рассчитать комплексные напряжения на всех участках цепи;

зная комплексное напряжение и токи, рассчитать мгновенные напряжения и токи;

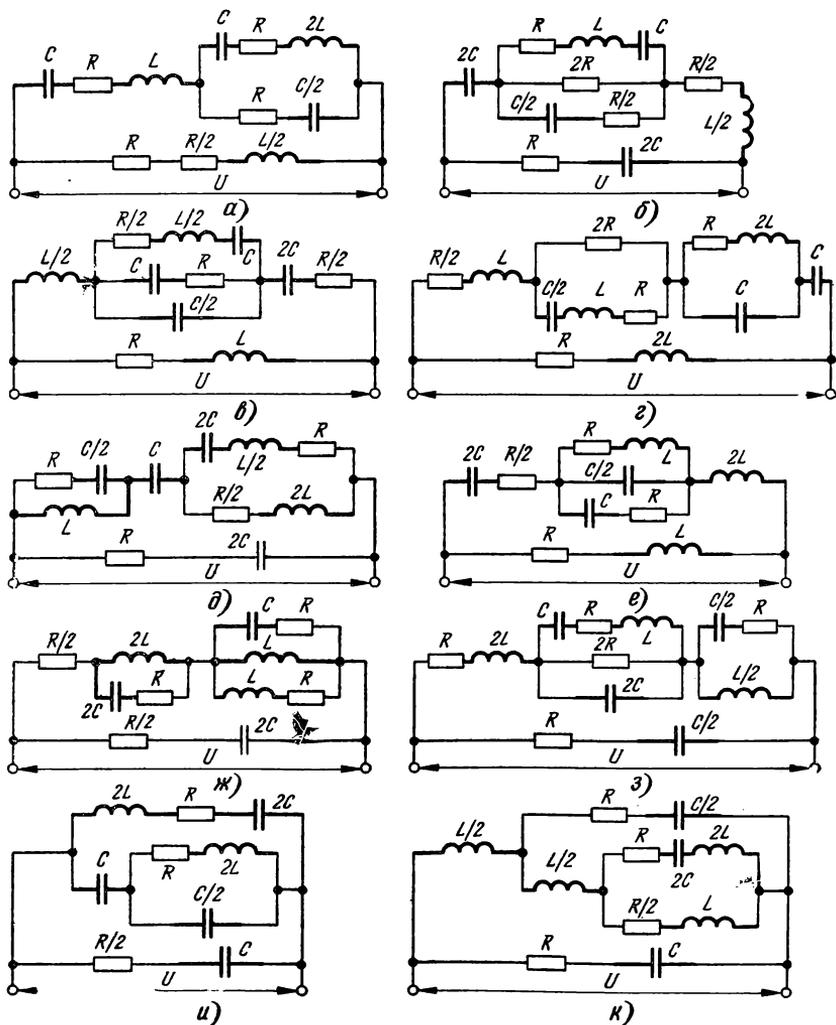


Рис. 6.13

зная комплексные токи, напряжения и сопротивления элементов, проверить выполнение первого закона Кирхгофа в узлах второго — в контурах и баланса резистивных и реактивных мощностей в цепи.

6.29. Варианты для индивидуальных заданий.

З а д а н и е. Рассчитать комплексные и мгновенные значения токов, напряжений во всех элементах цепи, показанных на рис. 6.13, а—к. Выполнить все проверки. Напомним, что первый знак шифра показывает номер схемы, а второй знак — исходные данные по табл. 6.1.

Таблица 6.1

Второй знак шифра	Исходные данные					Второй знак шифра	Исходные данные				
	U, В	R, Ом	f, кГц	L, мГн	C, мкФ		U, В	R, Ом	f, кГц	L, мГн	C, мкФ
1	100	10	1	3,20	5,32	6	225	35	6	1,87	0,254
2	125	15	2	2,40	1,78	7	250	40	7	1,83	0,19
3	150	20	3	2,14	0,89	8	275	45	8	1,80	0,148
4	175	25	4	2,0	0,532	9	300	50	9	1,78	0,118
5	200	30	5	1,92	0,357	0	325	55	10	1,76	0,097

RLC-ЦЕПИ С ЗАВИСИМЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

6.30. Рассчитать комплексные токи в цепи, показанной на рис. 6.14, а, и выполнить все проверки, если \dot{E}_1 — независимый источник ЭДС, а \dot{E}_2 — зависимый, управляемый током \dot{I}_3 (т. е. ИНУТ), причем $\dot{E}_1 = (10 + j10)$ В, $\dot{E}_2 = \beta \dot{I}_3$, $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = (10 + j10)$ Ом, $\beta = 10$ Ом.

Указание: разберите сначала задачу 3.160.

Решение. Схема, показанная на рис. 6.14, а, аналогична схеме рис. 3.67, в, в которой резистивные сопротивления R_1 , R_2 и R_3 заменены комплексными \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 , \underline{Z}_3 , а коэффициент пропорциональности источника \dot{E}_2 ($\alpha R_3 \dot{I}_3$) — коэффициентом $\beta \dot{I}_3$. После такой замены получаются уравнения

$$\begin{cases} \dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \\ \dot{E}_1 = \underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_3 \dot{I}_3; \\ \dot{E}_2 = \underline{Z}_2 \dot{I}_2 + \underline{Z}_3 \dot{I}_3. \end{cases}$$

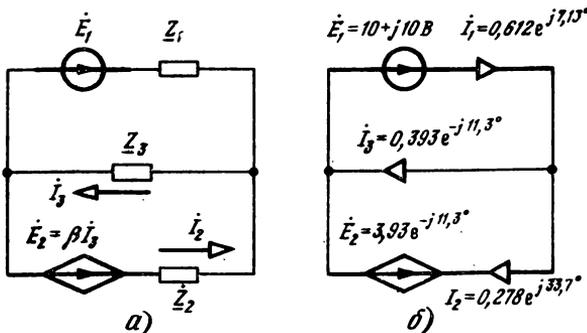


Рис. 6.14

Так как $\dot{E}_2 = \beta \dot{I}_3$, то уравнения принимают вид

$$\begin{cases} \dot{I}_3 = \dot{I}_2 + \dot{I}_1; \\ \dot{E}_1 = \underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_3 \dot{I}_3; \\ \beta \dot{I}_3 = \underline{Z}_2 \dot{I}_2 + \underline{Z}_3 \dot{I}_3. \end{cases}$$

По аналогии с решением задачи 3.160

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{E}_1 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 - \beta)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \beta \underline{Z}_1}; \\ \dot{I}_2 &= \frac{\dot{E}_1 (\beta - \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \beta \underline{Z}_1}; \\ \dot{I}_3 &= \frac{\underline{Z}_2 \dot{E}_1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \beta \underline{Z}_1}; \\ \dot{E}_2 &= \frac{\beta \underline{Z}_3 \dot{E}_1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \beta \underline{Z}_1} = \beta \dot{I}_3. \end{aligned}$$

Заметим, что знаменатель всех выражений один и тот же, имеющий размерность сопротивления во второй степени. Для краткости обозначим его \underline{Z}^2 . В этом случае выражения для токов можно записать короче:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= [\dot{E}_1 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 - \beta)] / \underline{Z}^2; & \dot{I}_2 &= [\dot{E}_1 (\beta - \underline{Z}_3)] / \underline{Z}^2; \\ \dot{I}_3 &= \underline{Z}_2 \dot{E}_1 / \underline{Z}^2; & \dot{E}_2 &= \beta \dot{I}_3. \end{aligned}$$

Решение. Рассчитаем знаменатель:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \beta \underline{Z}_1) = \\ &= [3(10 + j10)^2 - 10(10 + j10)] = 3 \cdot 200 e^{j90^\circ} - 100 \sqrt{2} e^{j45^\circ} = \\ &= j600 - 100 - j100 = (-100 + j500) = 510 e^{j101,3^\circ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{E}_1 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 - \beta) / \underline{Z}^2 = \frac{10 \sqrt{2} e^{j45^\circ} (20 + j20 - 10)}{510 e^{j101,30^\circ}} = \\ &= \frac{10 \sqrt{2} e^{j45^\circ} (10 + j20)}{510 e^{j101,30^\circ}} = \frac{10 \sqrt{2} e^{j45^\circ} \cdot 22,36 e^{j63,43^\circ}}{510 e^{j101,30^\circ}} = 0,621 e^{j7,13^\circ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \dot{E}_1 (\beta - \underline{Z}_3) / \underline{Z}^2 = \frac{10 \sqrt{2} e^{j45^\circ} (10 - 10 - j10)}{510 e^{j101,30^\circ}} = \\ &= 0,278 e^{-j146,30^\circ} = -0,278 e^{j33,70^\circ}; & \dot{I}_3 &= \dot{E}_1 \underline{Z}_2 / \underline{Z}^2 = \\ &= \frac{(10 \sqrt{2} e^{j45^\circ})^2}{510 e^{j101,30^\circ}} = 0,393 e^{-j11,30^\circ}; & \dot{E}_2 &= \beta \dot{I}_3 = \\ &= 10 \cdot 0,393 e^{-j11,30^\circ} = 3,93 e^{-j11,30^\circ}. \end{aligned}$$

Нанесем получившиеся комплексные токи на граф (рис. 6.14, б).

Выполним проверки. По первому закону Кирхгофа $\dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \dot{I}_1$ или $0,278e^{j33,70^\circ} + 0,393e^{-j11,30^\circ} = 0,2312 + j0,154 + 0,385 - j0,0770 = 0,6162 + j0,0770 = 0,621e^{j7,12^\circ}$, т. е. току \dot{I} . По второму закону Кирхгофа $\dot{E}_1 = \underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_3 \dot{I}_3$ или

$$\begin{aligned} 10 + j10 &= 10\sqrt{2}e^{j45^\circ} \cdot 0,621e^{j7,13^\circ} + 10\sqrt{2}e^{j45^\circ} \cdot 0,393e^{-j11,30^\circ} = \\ &= 8,756e^{j52,13^\circ} + 5,541e^{j33,70^\circ} = 5,375 + j6,92 + 4,60 + j3,074 = 10 + j10; \\ \dot{E}_2 &= -\underline{Z}_2 \dot{I}_2 + \underline{Z}_3 \dot{I}_3 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 3,93e^{-j11,3^\circ} &= 10\sqrt{2}e^{j45^\circ} \cdot 0,278e^{j33,70^\circ} + 10\sqrt{2}e^{j45^\circ} \cdot 0,393e^{j11,30^\circ} = \\ &= -3,93e^{j78,70^\circ} + 5,541e^{j33,70^\circ} = -0,79 - j3,85 + 4,61 + j3,07 = \\ &= 3,84 - j0,78 = 3,92e^{-j11,40^\circ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 - \dot{E}_2 &= 10 + j10 - 3,92e^{-j11,30^\circ} = 10 + j10 - 3,84 + j0,78 = \\ &= 6,16 + j10,78 = 12,41e^{j60,26^\circ}. \end{aligned}$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2 &= 10\sqrt{2}e^{j45^\circ} \cdot 0,621e^{j7,13^\circ} + 10\sqrt{2}e^{j45^\circ} \cdot 0,278e^{j33,70^\circ} = \\ &= 8,925e^{j52,13^\circ} + 3,92e^{j78,7^\circ} = 5,375 + j6,912 + 0,77 + j3,85 = \\ &= 6,145 + j10,77 = 12,4e^{j60,30^\circ}. \end{aligned}$$

Баланс мощностей:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 \dot{I}_1^* - \dot{E}_2 \dot{I}_2^* &= (10 + j10) \cdot 0,621e^{-j7,13^\circ} - 3,92e^{-j11,30^\circ} \cdot 0,278e^{-j33,70^\circ} = \\ &= 8,925e^{j37,87^\circ} - 1,132e^{-j45^\circ} = 7,046 + j5,479 - 0,8028 + j0,8028 = 6,24 + j6,28; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{н}} &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = (0,621)^2 10 + (0,278)^2 10 + (0,392)^2 10 = 6,2 \text{ Вт}; \\ P_{\text{Q в}} &= I_1^2 X_1 + I_2^2 X_2 + I_3^2 X_3 = (0,621)^2 10 + (0,278)^2 10 + (0,392)^2 10 = 6,3 \text{ вар}. \end{aligned}$$

Процент расхождения мощностей источника и нагрузки

$$\delta \% = \frac{P_{\text{ист}} - P_{\text{н}}}{P_{\text{ист}}} 100 = \frac{6,24 - 6,20}{6,26} 100 = 0,64\% < 1\%.$$

что вполне допустимо.

6.31. Решить задачу 6.30, если $\underline{\beta} = (10 + j10)$ Ом.

Указание: разберите сначала задачу 6.30.

6.32. Решите задачу 6.30, если $\underline{\beta} = (10 - j10)$ Ом.

Указание: разберите сначала задачу 6.30.

6.33. Решите задачу 6.30, если $\underline{\beta} = 10$ Ом.

Указание: разберите сначала задачу 6.30.

6.34. Решите задачу 6.30, если $\underline{\beta} = -j10$ Ом.

Указание: разберите сначала задачу 6.30.

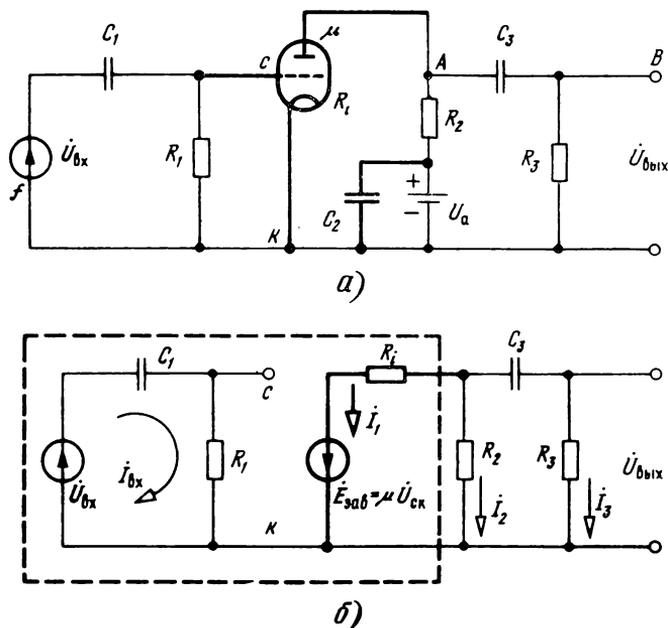


Рис. 6.15

6.35. Рассчитать в общем виде комплексные токи для цепи, показанной на рис. 6.15, а, если известны комплексное напряжение на входе цепи $\dot{U}_{вх}$, частота f , коэффициент усиления электронной лампы μ и ее внутреннее сопротивление R_i , резистивные сопротивления R_1, R_2, R_3 , емкости C_1 и C_2 .

Указание: изучите сначала с. 106—109 в [1].

Решение. Электронная лампа представляет собой зависимый источник, анодный ток которого при сигналах с малыми амплитудами изменяется пропорционально напряжениям, приложенным между управляющей сеткой и катодом. В общем случае все рассуждения и расчеты следует производить для мгновенных напряжений и токов, но при воздействиях гармонической формы все операции, как обычно, могут производиться в комплексном виде. Электронную лампу на схемах замещения представляют чаще всего в виде зависимого источника напряжения $\dot{E}_{зав} = \mu \dot{U}_{ск}$, последовательно с которым включено резистивное сопротивление R_i , либо зависимого источника тока $\dot{E}_{зав}/R_i = \mu \dot{U}_{ск}/R_i = S \dot{U}_{ск}$, включенного параллельно сопротивлению R_i , где μ — коэффициент усиления переменной составляющей лампы; S — крутизна характеристики, т. е. величина, показывающая, насколько изменится ток в анодной цепи при изменении напряжения между управляющей сеткой и катодом на единицу (подробнее см. с. 106—109 в [1]).

Сразу обратим внимание на весьма важное обстоятельство: активные элементы, обладающие усилительным эффектом (электронные лампы, транзисторы, операционные усилители) для своей нормальной работы и соот-

ветственно для получения усилительного эффекта, должны иметь источник постоянного напряжения, причем в общем случае чем больше мощность, потребляемая активным элементом от этого источника, тем эффективнее работа зависимого элемента. Например, для работы электронно-лучевой лампы необходим источник постоянного напряжения, часто называемый анодным (на рис. 6.15, *a* этот источник обозначен через U_a). Без данного источника коэффициент усиления μ (или пропорциональный ему параметр S) будет равен нулю и работа усилительного элемента станет невозможной, поэтому питающий источник U_a (или аналогичные ему) на схеме часто не показывают.

Усилительные элементы рассматриваемых типов предназначены, как правило, для усиления переменных напряжений или токов. Но при работе усилительного элемента существует также и постоянная составляющая, не передающая информацию с входа цепи на ее выход, но вызывающая нагрев анода лампы и резисторов, по которым токи протекают. В цепях с усилительными элементами в общем случае всегда имеются две составляющие токов (напряжений), поэтому следует четко представлять, для какой (или каких) составляющей должен производиться расчет: постоянной, переменной или обеих. Следует иметь в виду, что внутреннее сопротивление лампы постоянному току $R_{\text{л}}$ и внутреннее сопротивление в общепринятом смысле этого слова R_i (т. е. сопротивление переменному току) — совершенно различные сопротивления.

Постоянная и переменная составляющие токов на некоторых участках цепи текут по одним и тем же элементам, а в некоторых случаях — по разным. В частности, постоянная составляющая анодного тока проходит от положительного зажима источника U_a через резистор R_2 , внутреннее сопротивление лампы постоянному току и возвращается к отрицательному зажиму источника U_a . Переменная составляющая тока не должна протекать через источник U_a (при этом появились бы нежелательные искажения сигнала), поэтому параллельно источнику U_a (или какому-либо иному источнику со схожими функциями) обязательно включается конденсатор большой емкости, при которой сопротивление этого конденсатора на самой низкой частоте оказывается пренебрежимо малым. Таким образом, по переменной составляющей источник U_a практически во всех схемах оказывается замкнутым и нижний вывод сопротивления R_2 по переменной составляющей (только по переменной!) оказывается соединенным с общей (корпусной) точкой цепи или устройства.

Переменная составляющая анодного тока, протекая по сопротивлению R_2 , создает на нем падение напряжения, которое через конденсатор C_3 , не пропускающий постоянную составляющую анодного напряжения, подводится к сопротивлению R_3 , являющемуся входным сопротивлением следующего каскада. Анодный ток управляется напряжением, подведенным к участку сетка—катод (точки с—к на схеме рис. 6.15, *a*), причем сеточный ток в лампах, работающих в усилительных режимах, отсутствует. Если нет специальных оговорок, то цепи с усилительными элементами предназначаются для усиления сигналов, изменяющихся во времени, поэтому на эквивалентной схеме участок сетка—катод показывают разомкнутым, а источник U_a и шунтирующий его конденсатор (на схеме C_2) не показывают вовсе. В ряде случаев источник U_a и конденсатор C_2 не рисуют даже на принципиальных схе-

мах, как элементы само собой разумеющиеся, без которых реальные устройства работать не могут. С учетом изложенного эквивалентная схема цепи рис. 6.15, а имеет вид, показанный на рис. 6.15, б. Получившуюся схему можно рассчитывать по любым законам электротехники, например с помощью законов Кирхгофа. В этом случае получаются следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0; \\ -E_{зав} = -R_1 \dot{I}_1 + R_2 \dot{I}_2; \\ 0 = -R_2 \dot{I}_2 + \dot{I}_3 (R_3 - jX_{C_3}) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0; \\ -\mu \dot{U}_{ск} = R_1 \dot{I}_1 + R_2 \dot{I}_2; \\ 0 = -R_2 \dot{I}_2 + \underline{Z}_3 \dot{I}_3. \end{cases}$$

где $\underline{Z}_3 = R_3 - jX_{C_3} = R_3 - j(1/2\pi f C_3)$.

Для решения полученной системы необходимо знать напряжение $\dot{U}_{ск}$ (между управляющей сеткой и катодом). Из рассмотрения входного контура видно, что $\dot{U}_{ск} = \dot{U}_{вх} R_1 / (R_1 - jX_{C_1}) = \dot{U}_{вх} R_1 / \underline{Z}_1$, где $\underline{Z}_1 = R_1 - jX_{C_1}$. Система уравнений при этом приобретает вид

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0 \\ (-\mu \dot{U}_{вх} R_1) / \underline{Z}_1 = -R_1 \dot{I}_1 + R_2 \dot{I}_2; \\ 0 = -R_2 \dot{I}_2 + \underline{Z}_3 \dot{I}_3. \end{cases}$$

Решение системы в общем виде приводит к следующим выражениям для искоемых токов:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\mu \dot{U}_{вх} R_1 (R_2 + R_3)}{\underline{Z}_1 (R_1 \underline{Z}_3 + R_2 \underline{Z}_3 + R_1 R_2)}; & \dot{I}_2 &= -\frac{\mu \dot{U}_{вх} R_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 (R_1 \underline{Z}_3 + R_2 \underline{Z}_3 + R_1 R_2)}; \\ \dot{I}_3 &= -\frac{\mu \dot{U}_{вх} R_1 R_2}{\underline{Z}_1 (R_1 \underline{Z}_3 + R_2 \underline{Z}_3 + R_1 R_2)}. \end{aligned}$$

Обозначим множитель $\frac{\mu \dot{U}_{вх} R_1}{\underline{Z}_1 (R_1 \underline{Z}_3 + R_2 \underline{Z}_3 + R_1 R_2)} = N$, тогда $\dot{I}_1 = (R_2 + R_3) / \underline{N}$; $\dot{I}_2 = -\underline{Z}_3 / \underline{N}$; $\dot{I}_3 = -R_2 / \underline{N}$.

6.36. Рассчитать комплексные токи и коэффициент передачи по напряжению в цепи, показанной на рис. 6.15, а, если $U_{вх} = 1$ В, $f = 100$ кГц, $R_2 = 50$ кОм, $C_3 = 159$ пФ, $R_3 = 100$ кОм.

Указание: разберите сначала задачу 6.35.

6.37. Рассчитать комплексный коэффициент передачи по напряжению в цепи, показанной на рис. 6.16, если ЭДС зависимого источника $E_{зав}$ пропорциональна напряжению между точками G и K цепи ($E_{зав} = \mu \dot{U}_{ГК}$).

Указание: разберите сначала задачу 6.35.

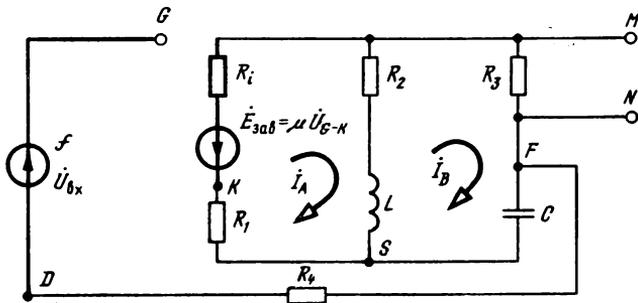


Рис. 6.16

Решение. В данной схеме управляемая ЭДС зависит от напряжения между точками G и K цепи. Но чтобы знать напряжение между этими точками, необходимо иметь выражения токов в ветвях цепи, которые в данном случае легче всего определить методом контурных токов. Зададимся контурными токами \dot{I}_A и \dot{I}_B и составим уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} -\mu \dot{U}_{GK} = \dot{I}_A (R_1 + R_i + R_2 + j\omega L) - \dot{I}_B (R_2 + j\omega L); \\ 0 = \dot{I}_B [R_2 + R_3 + j\omega L - j(1/\omega C)] = \dot{I}_A (R_2 + j\omega L). \end{cases}$$

Обозначив $\underline{Z}_A = R_i + R_1 + R_2 + j\omega L$, $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L$, $\underline{Z}_B = R_2 + R_3 + j\omega L - j(1/\omega C)$, получим $\dot{I}_A \underline{Z}_A - \dot{I}_B \underline{Z}_2 = -\mu \dot{U}_{GK}$, где \dot{U}_{GK} — комплексное напряжение между точками G и K . Данная схема позволяет составить два независимых уравнения, в то время как неизвестных величин в схеме три: контурные токи \dot{I}_A , \dot{I}_B и напряжение \dot{U}_{GK} . Чтобы избавиться от третьей неизвестной величины, выразим напряжение \dot{U}_{GK} через токи \dot{I}_A и \dot{I}_B , тогда неизвестных останется только две. Для этого зададимся потенциалом точки G и определим потенциал точки K . Примем потенциал точки G за начальный, т. е. положим $\dot{\varphi}_G = 0$. В этом случае $\dot{\varphi}_D = \dot{\varphi}_G - \dot{U}_{вх} = -\dot{U}_{вх}$. Поскольку через сопротивление R_4 ток не протекает, падение напряжения на нем равно нулю и $\dot{\varphi}_F = \dot{\varphi}_D = -\dot{U}_{вх}$. Потенциал точки S ниже потенциала точки F (ток \dot{I}_B показан текущим от точки F к точке S), следовательно, $\dot{\varphi}_S = \dot{\varphi}_F - \dot{I}_B (1/j\omega C) = -\dot{U}_{вх} + j\dot{I}_B/\omega C$. Аналогично $\dot{\varphi}_K = \dot{\varphi}_S - \dot{I}_A R_1 = -\dot{U}_{вх} + j(1/\omega C)\dot{I}_B - R_1 \dot{I}_A$ и $\dot{U}_{GK} = \dot{\varphi}_G - \dot{\varphi}_K = 0 + \dot{U}_{вх} - j(1/\omega C)\dot{I}_B + R_1 \dot{I}_A$. Подставив выражение \dot{U}_{GK} в уравнения, получим

$$\begin{cases} \dot{I}_A \underline{Z}_A - \dot{I}_B \underline{Z}_2 = -\mu [\dot{U}_{вх} + \dot{I}_A R_1 - j(1/\omega C)\dot{I}_B]; \\ -\dot{I}_A \underline{Z}_2 + \dot{I}_B \underline{Z}_B = 0. \end{cases}$$

Остались два уравнения с двумя неизвестными: \dot{I}_A и \dot{I}_B . Решать получившуюся систему можно с помощью ПМК по программе 6.2, приведенной на с. 183, 184 в [1], или по программе З. 6.1.

Для этого уравнения следует записать в нормальном виде, т. е.

$$\begin{cases} (\underline{Z}_A + \mu R_1) \dot{I}_A - \left(\underline{Z}_2 + j\mu \frac{1}{\omega C} \right) \dot{I}_B = -\mu \dot{U}_{\text{вх}}; \\ -\underline{Z}_2 \dot{I}_A + \underline{Z}_B \dot{I}_B = 0, \end{cases}$$

затем подсчитать комплексные коэффициенты, записать каждый из них в алгебраической форме, выбрать на ПМК программу З. 6.1, просчитать контрольный пример, приведенный в задаче 6.22, и ввести исходные данные этой задачи.

При расчете ручным способом необходимо сначала получить выражения для токов \dot{I}_A и \dot{I}_B , которые после решения данной системы уравнений принимают вид

$$\dot{I}_A = \frac{\mu \dot{U}_{\text{вх}} \underline{Z}_B}{\underline{Z}_2^2 - \underline{Z}_A \underline{Z}_B - \mu [R_1 \underline{Z}_B - j \underline{Z}_2 (1/\omega C)]}.$$

Обозначив

$$\underline{F} = \frac{\mu \dot{U}_{\text{вх}}}{\underline{Z}_2^2 - \underline{Z}_A \underline{Z}_B - \mu [R_1 \underline{Z}_B - j \underline{Z}_2 (1/\omega C)]},$$

получим $\dot{I}_A = \underline{F} \underline{Z}_B$; $\dot{I}_B = \underline{F} \underline{Z}_2$. Как видно из схемы (рис. 6.16), $\dot{I}_1 = \dot{I}_A$, $\dot{I}_2 = \dot{I}_A - \dot{I}_B$, $\dot{I}_3 = \dot{I}_B$. Комплексное выходное напряжение $\dot{U}_2 = R_3 \dot{I}_B$, комплексный коэффициент передачи цепи $\underline{K} = \dot{U}_{\text{вых}} / \dot{U}_{\text{вх}} = R_3 \dot{I}_B / \dot{U}_{\text{вх}} = R_3 \underline{Z}_2 \underline{F} / \dot{U}_{\text{вх}}$. Рассчитаем зависимую ЭДС:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{зав}} &= \mu \dot{U}_{G-K} = \mu [\dot{U}_{\text{вх}} - j(1/\omega C) \dot{I}_B + R_1 \dot{I}_A] = \\ &= \mu [\dot{U}_{\text{вх}} - j(1/\omega C) \underline{F} \underline{Z}_2 + R_1 \underline{F} \underline{Z}_B] = \\ &= \mu [\dot{U}_{\text{вх}} + \underline{F} (R_1 \underline{Z}_B - j(1/\omega C) \underline{Z}_2)]. \end{aligned}$$

Теперь можно производить все проверки обычными способами.

6.38. Рассчитать комплексные токи в ветвях, значения зависимого источника и коэффициент передачи по напряжению в цепи, показанной на рис. 6.16, если $U_{\text{вх}} = 1$ В, $f = 1$ кГц, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 100$ Ом, $L = 15,9$ мГн, $C = 1,59$ мкФ.

Указание: разберите сначала задачу 6.37.

6.39. Решить задачу 6.37, если $\dot{E}_{\text{зав}} = \mu \dot{U}_{\text{вх}}$, где $\mu = 10$. Параметры остальных элементов такие же, как и в задаче 6.38.

Указание: разберите сначала задачи 6.37 и 6.38.

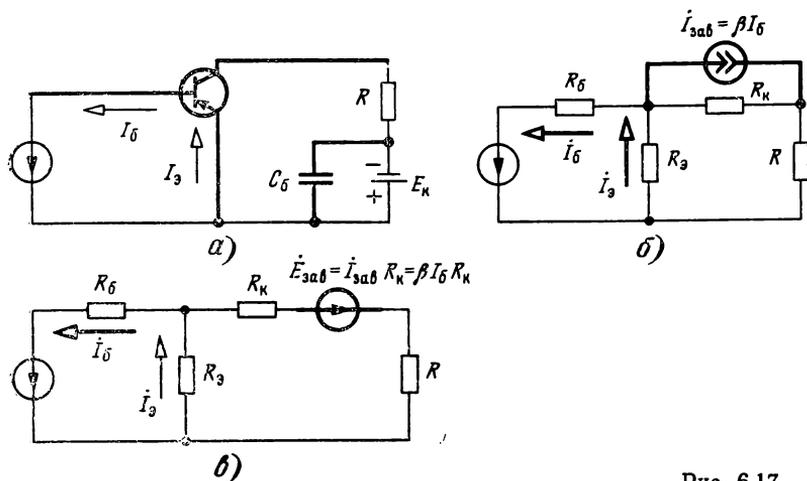


Рис. 6.17

6.40. Составьте уравнение для определения комплексных токов в цепи, показанной на рис. 6.16, если ЭДС зависимого источника $\dot{E}_{зав}$ пропорциональна току I_2 ($\dot{E}_{зав} = \beta \dot{I}_2$), где β — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность сопротивления.

Указание: разберите сначала задачи 6.37, 6.38.

6.41. Рассчитать схему замещения биполярного транзистора (рис. 6.17, а).

Решение. Все транзисторы делятся на две большие группы: полевые и биполярные. Полевые транзисторы имеют большое входное сопротивление, поэтому схема замещения этих транзисторов аналогична схеме замещения электронных ламп (см. рис. 6.15). Входное сопротивление биполярных транзисторов сравнительно невелико, поэтому схема замещения биполярных транзисторов иная, нежели у полевых. Поскольку биполярные транзисторы распространены больше полевых, то слово «биполярный» для краткости часто опускают. Таким образом, под словом «транзистор» будем понимать биполярный транзистор. Существует достаточно большое число различных схем замещения транзисторов. Вид схемы замещения зависит от диапазона частот, в котором работает транзистор, возможности пренебрежения некоторыми элементами (например, паразитными емкостями), схемы включения и т. д.

Весьма распространенной является схема замещения транзистора, работающего в диапазоне низких частот (до нескольких килогерц, иногда десятков килогерц) в режиме малых сигналов (т. е. практически в линейном режиме) при включении с общим эмиттером (т. е. так, как показано на рис. 6.17, а). Такой транзистор может быть замещен схемой, состоящей из трех сопротивлений ($R_б$, $R_э$, $R_к$) с зависимым источником тока, включенным параллельно сопротивлению $R_к$ (рис. 6.17, б), или с зависимым источником напряжения, включенным последовательно с сопротивлением $R_к$ (рис. 6.17, в).

Еще раз обратим внимание, что источник постоянного напряжения по переменной составляющей тока замкнут конденсатором C_6 , имеющим большую емкость (подробнее см. объяснение к задаче 6.35). По целому ряду причин в справочниках по транзисторам приводятся не сопротивления R_6 , R_3 , R_K , а некоторые определенные для каждого типа транзистора постоянные коэффициенты, называемые h -параметрами. Зная h -параметры, можно рассчитать сопротивления R_6 , R_3 , R_K , коэффициент пропорциональности β , а также целый ряд других параметров, которые в данной задаче не рассматриваются. Каждый транзистор характеризуется четырьмя коэффициентами группы h : h_{11} , h_{12} , h_{21} , h_{22} . Коэффициент h_{11} показывает входное сопротивление транзистора при замкнутых накоротко выходных зажимах и имеет размерность сопротивления. Коэффициент $h_{11} = U_1/I_1$ при $U_2 = 0$. Коэффициент h_{12} показывает отношение U_1/U_2 при $I_1 = 0$, т. е., являясь коэффициентом обратной передачи по напряжению при холостом токе на входе, при разомкнутых входных зажимах представляет величину безразмерную. Также безразмерным при $U_2 = 0$ является коэффициент $h_{21} = I_2/I_1$, являющийся коэффициентом передачи по току при замкнутых вторичных зажимах. Коэффициент $h_{22} = I_2/U_2$ при $I_1 = 0$ показывает выходную проводимость при холостом токе на входе.

В схеме транзистора с общим эмиттером эквивалентные сопротивления рассчитываются с помощью формул $R_K = (1 + h_{21}) / (h_{21} \cdot h_{22})$; $R_3 = h_{12} / h_{22}$; $R_6 = [h_{11} \cdot h_{22} - (1 + h_{21}) \cdot h_{12}] / h_{22}$; $\beta = h_{21}$. Электродвижущая сила (ток) зависимого источника может зависеть от тока в цепи базы или тока в цепи эмиттера. Коэффициент пропорциональности между током базы и током (ЭДС) зависимого источника часто обозначают через β , а между током эмиттера и зависимым источником — через α , причем коэффициенты α и β связаны соотношениями $\alpha = \beta / (1 + \beta)$; $\beta = \alpha / (1 - \alpha)$. В реальных транзисторах $\beta \gg 1$, а α немного меньше единицы. Составив схему замещения, можно производить расчеты любыми методами, пригодными для линейных цепей.

6.42. Рассчитать в общем виде токи и коэффициенты передачи по напряжению и току в цепи, показанной на рис. 6.18.

Указание: разберите сначала задачи 6.37 и 6.41.

Решение. Как видно из схемы, данная цепь представляет транзистор, нагруженный на комплексное сопротивление $Z_H = R_H - jX_{C_6}$. Значение тока зависимого источника тока пропор-

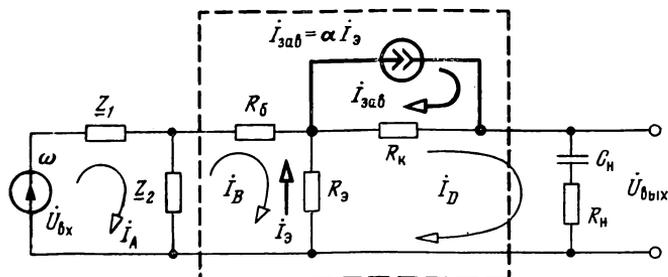


Рис. 6.18

ционально току в эмиттере транзистора: $I_{зав} = \alpha I_э$. Данную задачу проще всего решить методом контурных токов. Зададимся контурными токами I_A, I_B, I_D . В контуре с источником тока может протекать только ток $I_{зав}$. Напомним, что при составлении уравнений по второму закону Кирхгофа в цепях, содержащих источники тока (как зависимые, так и независимые), нельзя составлять уравнения по контуру, в который входит источник тока, поскольку напряжение на зажимах источника тока является величиной неопределенной, зависящей от падения напряжения на элементах цепи, включенных параллельно источнику тока.

Составим уравнения для контуров A, B, D :

$$\begin{cases} \dot{U}_{вх} = I_A(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) - I_B \underline{Z}_2; \\ 0 = I_B(\underline{Z}_2 + R_6 + R_э) - I_A \underline{Z}_2 - I_D R_э; \\ 0 = I_D(R_э + R_K + \underline{Z}_н) - I_{зав} R_K - I_B R_э. \end{cases}$$

Ток источника $I_{зав}$ зависит от тока $I_э$. Выразим ток $I_э$ через контурные токи I_B и I_D . В соответствии с обозначениями, показанными на рис. 6.18, $I_э = I_D - I_B$. После соответствующей подстановки система уравнений приобретает вид

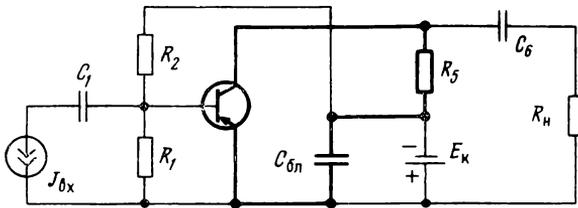
$$\begin{cases} \dot{U}_{вх} = I_A(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) - I_B \underline{Z}_2; \\ 0 = I_B(\underline{Z}_2 + R_6 + R_э) - I_A \underline{Z}_2 - I_D R_э; \\ 0 = I_D(R_э + R_K + \underline{Z}_н) - \alpha(I_D - I_B)R_K - I_B R_э. \end{cases}$$

Получилась система трех уравнений с тремя неизвестными. Для удобства решения введем обозначения: $\underline{Z}_A = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$; $\underline{Z}_B = \underline{Z}_2 + R_6 + R_э$; $\underline{Z}_D = R_э + R_K + \underline{Z}_н$, при этом система принимает вид

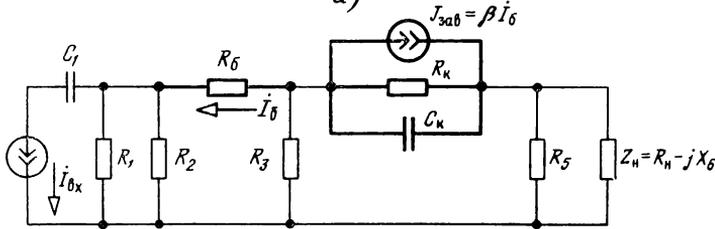
$$\begin{cases} \dot{U}_{вх} = I_A \underline{Z}_A - I_B \underline{Z}_2; \\ 0 = I_B \underline{Z}_B - I_A \underline{Z}_2 - I_D R_э; \\ 0 = I_D \underline{Z}_D - \alpha R_K I_D + \alpha R_K I_B - I_B R_э, \end{cases}$$

откуда после решения получаем

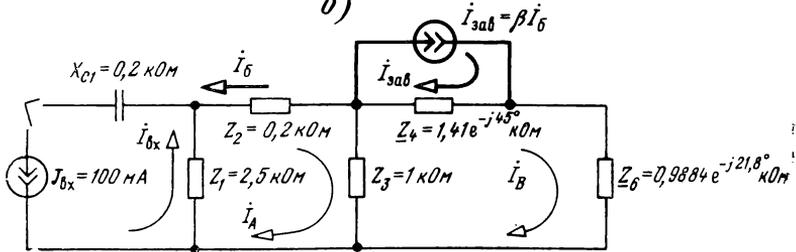
$$\begin{aligned} I_A &= \frac{\dot{U}_{вх} [\alpha R_K (\underline{Z}_2 + R_6) - \underline{Z}_B \underline{Z}_D]}{(\underline{Z}_A \underline{Z}_B - \underline{Z}_2^2) (\alpha R_K - \underline{Z}_D) - \alpha R_K R_э \underline{Z}_A}; \\ I_B &= \frac{-\dot{U}_{вх} \underline{Z}_2 [R_K (1 - \alpha) + R_э + \underline{Z}_н]}{(\underline{Z}_A \underline{Z}_B - \underline{Z}_2^2) (\alpha R_K - \underline{Z}_D) - \alpha R_K R_э \underline{Z}_A}; \\ I_D &= \frac{-\alpha R_K \underline{Z}_2 \dot{U}_{вх}}{(\underline{Z}_A \underline{Z}_B - \underline{Z}_2^2) (\alpha R_K - \underline{Z}_D) - \alpha R_K R_э \underline{Z}_A}. \end{aligned}$$



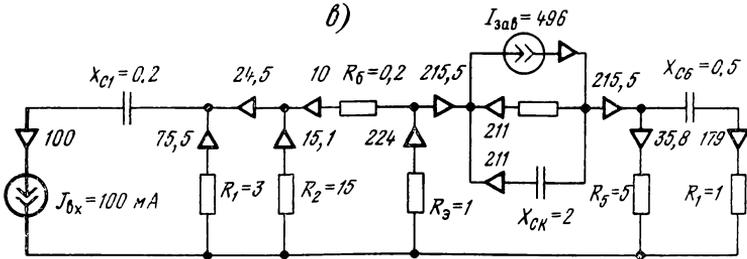
а)



б)



в)



г)

Примечание. Иной способ решения системы трех уравнений с тремя неизвестными приводится в задаче 6.44. Ток во входной цепи равен \dot{I}_A , в выходной — \dot{I}_D , отсюда коэффициент передачи по току $K_I = \dot{I}_{\text{ВЫХ}} / \dot{I}_{\text{ВХ}} = \dot{I}_D / \dot{I}_A = \alpha R_K Z_2 / [\alpha R_K (Z_2 + R_6) - Z_B Z_D]$, а коэффициент передачи по напряжению $K = \dot{U}_{\text{ВЫХ}} / \dot{U}_{\text{ВХ}} = \frac{-\alpha R_K Z_2 Z_H}{(Z_A Z_B - Z_A^2) (\alpha R_K - Z_D) - \alpha R_K R_5 Z_A}$.

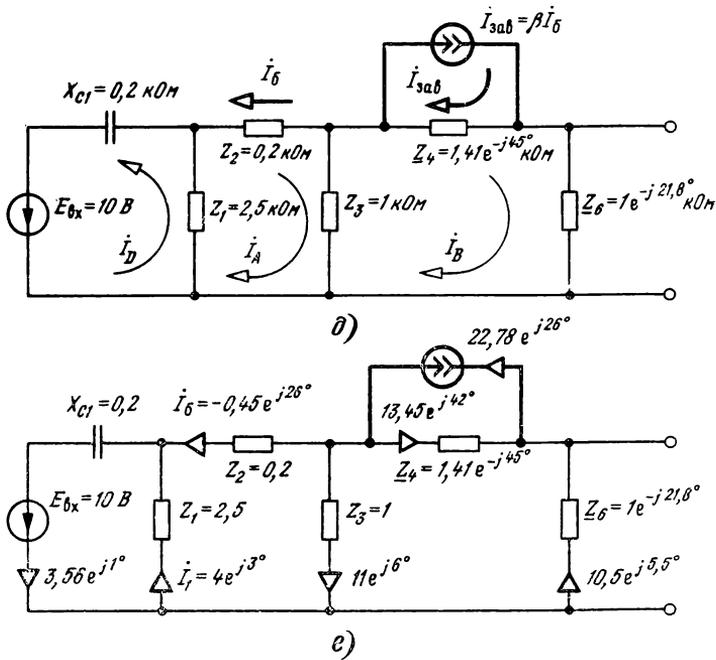


Рис. 6.19

6.43. Рассчитать переменные составляющие комплексных токов в ветвях, коэффициент передачи по току в цепи, показанной на рис. 6.19,а, если ток независимого источника $J_{вх} = 1$ мА, $f = 100$ кГц. Параметры цепи: $R_1 = 3$ кОм, $R_2 = 15$ кОм, $R_5 = 5$ кОм, $R_n = 1$ кОм, $C_1 = 795$ пФ, $C_6 = 320$ пФ; параметры транзистора: $h_{11} = 51,2$ кОм, $h_{12} = 0,51$, $h_{21} = 50$, $h_{22} = 0,51$ мСм (миллисименс), емкость коллекторной цепи $C_k = 80$ пФ. Влиянием емкостей базы и эмиттера можно пренебречь.

Указание: разберите сначала задачи 6.41 и 6.42.

Решение. Заменяем схему рис. 6.19,а эквивалентной. Вместо транзистора покажем Т-образную схему с источником тока. Коллекторная емкость, как и источник тока, включена параллельно сопротивлению R_k , сопротивлением блокировочной емкости $C_{6л}$ пренебрегаем из-за его малости. При этом получается схема рис. 6.19,б.

Рассчитаем сопротивления: $R_6 = \frac{h_{11} \cdot h_{22} - (1 + h_{21}) h_{12}}{h_{22}} = [51,2 \times 10^3 \cdot 0,51 \cdot 10^{-3} - (1 + 50) \cdot 0,51] / 0,51 \cdot 10^{-3} = 200 \text{ Ом} = 0,2 \text{ кОм}$, $R_9 = h_{12} / h_{22} = 0,51 / (0,51 \cdot 10^{-3}) = 1000 \text{ Ом} = 1 \text{ кОм}$; $R_k = (1 + h_{21}) / (h_{21} \cdot h_{22}) = (1 + 50) / 50 \cdot 0,51 \cdot 10^{-3} = 2000 \text{ Ом} = 2 \text{ кОм}$.

Рассчитаем емкостные сопротивления: $X_{C_1} = 1 / (2\pi f C_1) = 1 / (6,28 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 795 \cdot 10^{-12}) = 200 \text{ Ом} = 0,2 \text{ кОм}$; аналогично $X_{C_6} = 0,5 \text{ кОм}$, $X_{C_k} = 2 \text{ кОм}$. Упростим схему рис. 6.19,б.

Сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно, обозначим их эквивалентное сопротивление через Z_1 и рассчитаем его: $Z_1 = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 3 \cdot 15 / (3 + 15) = 2,5$ кОм. Аналогично цепочку $R_k - C_k$ обозначим через Z_4 , тогда $Z_4 = R_k (-j X_{C_k}) / (R_k - j X_{C_k}) = 2(-j2) / (2 - j2) = 1,41 e^{-j45^\circ} = (1 - j1)$ кОм.

Для идентичности обозначим: $Z_2 = R_6 = 0,2$ кОм; $Z_3 = R_3 = 1$ кОм; $Z_6 = R_5 Z_n / (R_5 + Z_n) = 5(1 - j0,5) / (5 + 1 - j0,5) = 0,9884 e^{-j21,8^\circ}$ кОм. После произведенных замен схема приобретает вид, показанный на рис. 6.19, в. В получившейся схеме четыре контура, но так как оба источника являются источниками тока (один независимый $\dot{I}_{вх}$, второй зависимый $\dot{I}_{зав} = \beta \dot{I}_6$), то для расчета методом контурных токов достаточно составить всего два уравнения. Зададимся контурными токами \dot{I}_A , \dot{I}_B и составим уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} 0 = \dot{I}_A (Z_1 + Z_2 + Z_3) + j Z_1 - \dot{I}_B Z_3; \\ 0 = \dot{I}_B (Z_3 + Z_4 + Z_6) - \dot{I}_{зав} Z_4 - \dot{I}_A Z_3. \end{cases}$$

Поскольку через сопротивление Z_2 течет ток \dot{I}_A , причем в направлении, противоположном току I_6 , то $\dot{I}_{зав} = \beta \dot{I}_6 = -\beta \dot{I}_A$ и уравнения принимают вид

$$\begin{cases} \dot{I}_A (Z_1 + Z_2 + Z_3) - \dot{I}_B Z_3 = -j Z_1; \\ -\dot{I}_A Z_3 - (-\beta \dot{I}_A) Z_4 + \dot{I}_B (Z_3 + Z_4 + Z_6) = 0. \end{cases}$$

или после приведения подобных членов

$$\begin{cases} \dot{I}_A (Z_1 + Z_2 + Z_3) - \dot{I}_B Z_3 = -j Z_1; \\ \dot{I}_A (\beta Z_4 - Z_3) + \dot{I}_B (Z_3 + Z_4 + Z_6) = 0. \end{cases}$$

Введем обозначения: $Z_A = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 2,5 + 0,2 + 1 = 3,7$ кОм; $Z_B = Z_3 + Z_4 + Z_6 = 1 + 1 - j1 + 0,918 - j0,367 = 2,918 - j1,367 = 3,222 e^{-j25,1^\circ}$; $Z_F = \beta Z_4 - Z_3 = 5(1 - j1) - 1 = 49 - j50 = 70 e^{-j45,58^\circ}$ (числовые значения сопротивлений выражены в килоомах, токи — в миллиамперах, напряжения при этом получаются в вольтах). После указанной замены уравнения принимают вид

$$\begin{cases} \dot{I}_A Z_A - \dot{I}_B Z_3 = -100 \cdot 2,5; \\ \dot{I}_A Z_F + \dot{I}_B Z_B = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (3,7 + j0) \dot{I}_A - (1 + j0) \dot{I}_B = -250; \\ (49 - j50) \dot{I}_A + (2,918 - j1,367) \dot{I}_B = 0. \end{cases}$$

Решение данной системы по программе 3.6.1 дает следующие значения:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= -9,458794 - j2,9883324 = 9,9197 e^{j197,53^\circ} \\ &= -9,9197 e^{j17,51^\circ}; \end{aligned}$$

$$\dot{I}_B = 215,22669 - j11,067898 = 215,5 e^{-j2,94^\circ},$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= J + \dot{I}_A = 100 - 9,458794 - j2,9883324 = \\ &= 90,541206 - j2,9883324 = 90,59 e^{-j1,89^\circ}; \end{aligned}$$

$$\dot{I}_6 = -\dot{I}_A = 9,9197 e^{j17,5^\circ};$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= \dot{I}_A - \dot{I}_B = -9,458794 - j2,9883324 - 215,22669 + \\ &+ j11,067898 = -224,68548 + j8,079566 = -224,82522 e^{-j2,06^\circ} \end{aligned}$$

(таким образом, направление тока \dot{I}_3 удобно показывать противоположным току \dot{I}_A , т. е. снизу вверх);

$$\begin{aligned} \dot{I}_4 &= \dot{I}_B - \dot{I}_{зав} = I_B - (-\beta \dot{I}_A) = 215,22669 + \\ &+ 50(-9,9197 e^{j17,50^\circ}) = 215,22669 - 495,985 e^{j17,50^\circ} = \\ &= 215,22669 - 473,029 - j149,15 = -257,8 - j149,15 = \\ &= -297,84 e^{j30^\circ} \end{aligned}$$

(ток в сопротивлении Z_4 удобно показывать в направлении противоположном направлению тока \dot{I}_B).

Как видно из схемы рис. 6.19, в, ток $\dot{I}_6 = \dot{I}_B$.

Найдем теперь токи в сопротивлениях R_5 и \underline{Z}_H . На рис. 6.19, б видно, что $\dot{I}_5 = \dot{I}_B \underline{Z}_H / (R_5 + \underline{Z}_H) = 215,5 e^{-j2,94^\circ} / (5 + 1 - j0,5) = 215,5 e^{-j2,94^\circ} / 6,02 e^{-j4,76^\circ} = 35,8 e^{j1,82^\circ}$. Аналогично $\dot{I}_H = \dot{I}_B R_5 / (R_5 + \underline{Z}_H) = (5 \cdot 215 e^{-j2,94^\circ}) / (6,02 e^{-j4,76^\circ}) = 178,987 e^{j1,82^\circ} \approx 179 e^{j1,82^\circ}$.

Определим коэффициент передачи цепи по току $\underline{K}_I = \dot{I}_H / \dot{I}_{вх} = 179 e^{j1,82^\circ} / 100 = 1,79 e^{j1,82^\circ}$. Таким образом, $K_I = 1,79$, $\psi_K \approx 2^\circ$.

Найдем токи в сопротивлении R_k и емкости C_k :

$$\begin{aligned} \dot{I}_k &= \dot{I}_4 (-j X_{C_k}) / (R_k - j X_{C_k}) = (297,8 e^{j30^\circ} \cdot 2 e^{-j90^\circ}) / 2\sqrt{2} e^{-j45^\circ} = \\ &= 211,2 e^{-j15^\circ}; \quad \dot{I}_{C_k} = \dot{I}_B R_k / (R_k - j X_{C_k}) = 211,2 e^{-j15^\circ}. \end{aligned}$$

Ток зависимого источника тока $\dot{I}_{зав} = -\beta \dot{I}_A = -50(-9,9197 e^{j17,5^\circ}) = 496 e^{j17,5^\circ}$. Округленные значения модулей токов приведены на графе (рис. 6.19, г) (токи указаны в миллиамперах, сопротивления — в килоомах).

6.44. В схеме на рис. 6.19,в независимый источник тока на входе заменен независимым источником напряжения $E_{\text{вх}}=10$ В. Все остальные элементы остались прежними. Рассчитать методом контурных токов комплексные токи во всех ветвях и коэффициент передачи по напряжению, если выходное напряжение снимается с сопротивления \underline{Z}_6 (рис. 6.19,д) (сопротивления даны в килоомах, токи — в миллиамперах, напряжения — в вольтах).

Указание: разберите сначала задачу 6.43.

Решение. Зададимся контурными токами $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_D$. В контуре с источником тока может протекать только контурный ток $\dot{I}_{\text{зав}}$. Составим уравнения по второму закону Кирхгофа для контуров D, A, B :

$$\begin{cases} \dot{E}_{\text{вх}} = \dot{I}_D(\underline{Z}_1 - jX_{C1}) + \dot{I}_A \underline{Z}_1; \\ 0 = \dot{I}_A(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) + \dot{I}_D \underline{Z}_1 - \dot{I}_B \underline{Z}_3; \\ 0 = \dot{I}_B(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6) - \dot{I}_A \underline{Z}_3 - \dot{I}_{\text{зав}} \underline{Z}_4. \end{cases}$$

Обозначим, как и в предыдущей задаче, $\underline{Z}_D = \underline{Z}_1 - jX_{C1} = 2,5 - j0,2 = 2,508e^{-j4,57^\circ}$; $\underline{Z}_A = \underline{Z}_A = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = 2,5 + 0,2 + 1,0 = 3,7$; $\underline{Z}_B = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6 = 1 + 1 - j1 + 0,928 - j0,371 = 3,233e^{-j25^\circ}$. Из рис. 6.19, д видно, что $\dot{I}_6 = -\dot{I}_A$, поэтому $\dot{I}_{\text{зав}} = -\beta \dot{I}_A$.

Перепишем систему уравнений с новыми обозначениями

$$\begin{cases} \dot{I}_A \underline{Z}_1 + \dot{I}_D \underline{Z}_D = \dot{E}_{\text{вх}}; \\ \dot{I}_A \underline{Z}_A - \dot{I}_B \underline{Z}_3 + \dot{I}_D \underline{Z}_1 = 0; \\ \dot{I}_A(\beta \underline{Z}_4 - \underline{Z}_3) + \dot{I}_B \underline{Z}_B = 0. \end{cases}$$

Обозначим $\underline{Z}_F = (\beta \underline{Z}_4 - \underline{Z}_3) = 50(1 - j1) - 1 = 49 - j50 = 70e^{-j45,58^\circ}$, тогда

$$\begin{cases} \dot{I}_A \underline{Z}_1 + \dot{I}_D \underline{Z}_D = \dot{E}_{\text{вх}}; \\ \dot{I}_A \underline{Z}_A - \dot{I}_B \underline{Z}_3 + \dot{I}_D \underline{Z}_1 = 0; \\ \dot{I}_A \underline{Z}_F + \dot{I}_B \underline{Z}_B = 0. \end{cases}$$

Получилась система из трех уравнений с комплексными коэффициентами. Решение подобной системы выглядит достаточно громоздко. Рациональнее свести ее к системе из двух уравнений, которые решаются весьма просто. Для этого из первого уравнения получим выражение для \dot{I}_D и подставим его в остальные строки: $\dot{I}_D = (\dot{E}_{\text{вх}} - \dot{I}_A \underline{Z}_1) / \underline{Z}_D$. Тогда

$$\begin{cases} \dot{I}_A \underline{Z}_A - \dot{I}_B \underline{Z}_3 + [(\dot{E}_{\text{вх}} - \dot{I}_A \underline{Z}_1) \underline{Z}_1] / \underline{Z}_D = 0; \\ \dot{I}_A \underline{Z}_F + \dot{I}_B \underline{Z}_B = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \dot{I}_A (\underline{Z}_A \underline{Z}_D - \underline{Z}_1^2) + \dot{I}_B \underline{Z}_3 \underline{Z}_D = -\dot{E}_{\text{вх}} \underline{Z}_1; \\ \dot{I}_A \underline{Z}_F + \dot{I}_B \underline{Z}_B = 0. \end{cases}$$

Обозначим $\underline{Z}_N^2 = \underline{Z}_A \underline{Z}_D - \underline{Z}_1^2 = 3,7 (2,5 - j 0,2) - 6,25 = 3 - j 0,74 = 3,09 e^{-j 13,86^\circ}$, тогда уравнения приобретают вид

$$\begin{cases} \dot{I}_A \underline{Z}_N^2 + \dot{I}_B \underline{Z}_3 \underline{Z}_D = -\dot{E}_{\text{вх}} \underline{Z}_1; \\ \dot{I}_A \underline{Z}_F + \dot{I}_B \underline{Z}_B = 0. \end{cases}$$

Для использования программы 6.2 (см. с. 183 в [1]) уравнения следует сделать приведенными, т. е. поделить все члены строки на коэффициент при первом члене этой строки:

$$\begin{cases} \dot{I}_A + (\underline{Z}_3 \underline{Z}_D / \underline{Z}_N^2) \dot{I}_B = -\dot{E}_{\text{вх}} \underline{Z}_1 / \underline{Z}_N^2; \\ \dot{I}_A + (\underline{Z}_B / \underline{Z}_F) \dot{I}_B = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dot{I}_A + (0,801 + j 0,131) \dot{I}_B = -7,8544 - j 1,938; \\ \dot{I}_A + (0,0432 + j 0,01624) \dot{I}_B = 0. \end{cases}$$

При использовании программы 3.6.1 (см. задачу 6.22) делать, уравнения приведенными нет необходимости.

Используя программу 6.2 или 3.6.1, найдем $\dot{I}_A = 0,4384 + j 0,2124 = 0,4555 e^{j 25,83^\circ}$; $\dot{I}_B = -10,511 - j 0,9656 = -10,55 e^{j 5,46^\circ}$ тогда $\dot{I}_6 = -\dot{I}_A$; $\dot{I}_{\text{зав}} = \beta (-\dot{I}_A) = -22,775 e^{j 25,84^\circ} = -(20,49 + j 9,926)$; $\dot{I}_D = (\dot{E} - \dot{I}_A \underline{Z}_1) / \underline{Z}_D = 3,556 e^{j 1,16^\circ}$; $\dot{I}_1 = \dot{I}_D + \dot{I}_A = 4 + j 0,2124 = 4 e^{j 3^\circ}$; $\dot{I}_3 = \dot{I}_B - \dot{I}_A = -10,948 - j 1,178 = -11 e^{j 6,14^\circ}$; $\dot{I}_4 = \dot{I}_{\text{зав}} - \dot{I}_B = 10 + j 9 = 13,45 e^{j 42^\circ}$; $\dot{U}_{\text{вых}} = \dot{I}_B \underline{Z}_6 = -10,55 e^{j 5,46^\circ} \cdot e^{-j 21,8^\circ} = -10,55 e^{-j 16,34^\circ} = 10,55 e^{j (-16,34^\circ + 180^\circ)} = 10,55 e^{j 163,66^\circ}$, откуда $\underline{K} = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = 10,55 e^{j 163,66^\circ} / 10 = 1,055 e^{j 163,66^\circ}$

Округленные значения комплексных токов показаны на схеме рис. 6.19,е.

6.45. Варианты для индивидуальных заданий. Рассчитать комплексные токи во всех ветвях и коэффициент передачи по напряжению. Первый знак шифра указан на рис. 6.20. Второй знак шифра — исходные данные из табл. 6.2.

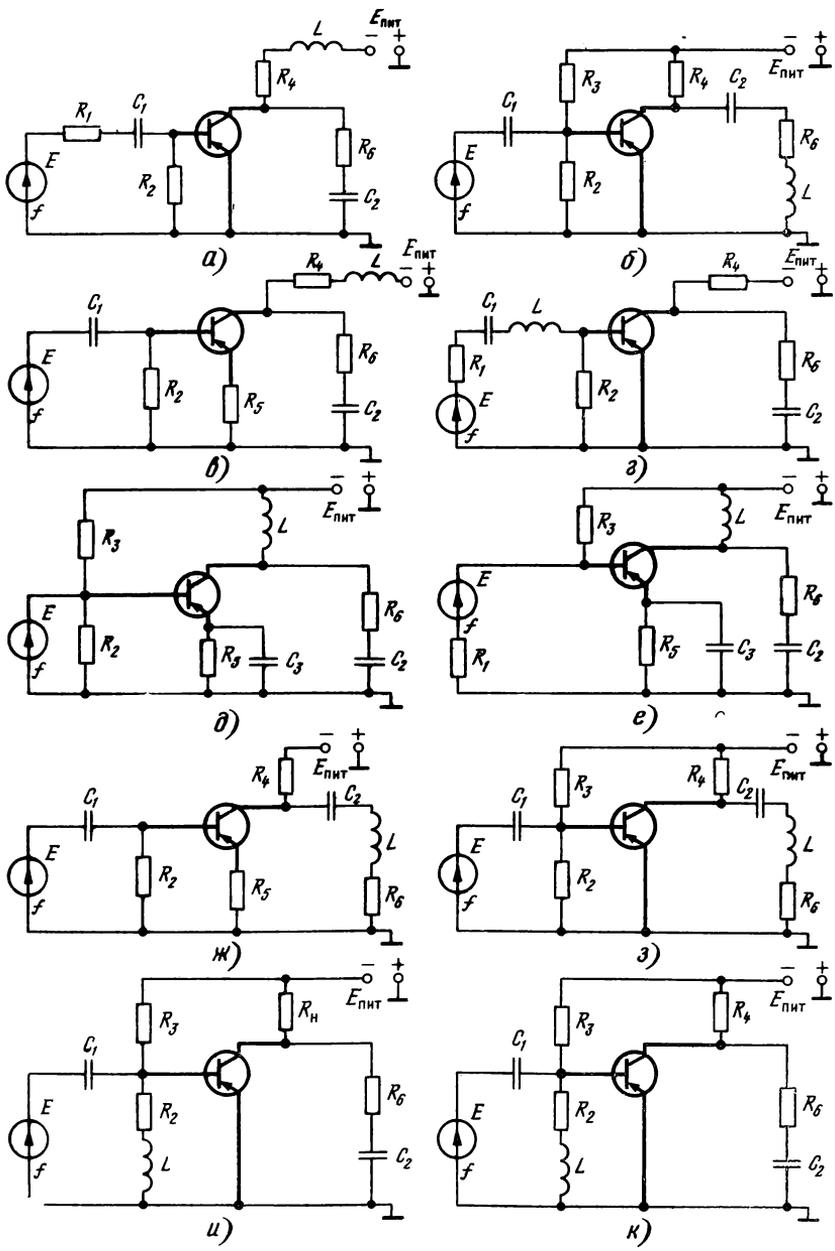


Рис. 6.20

Таблица 6.2

Второй знак шифра	Исходные данные																					
	$E_{1,B}$	$f, \text{кГц}$	$R_{11}, \text{Ом}$	$R_{12}, \text{кОм}$	$R_{13}, \text{кОм}$	$R_{14}, \text{кОм}$	$R_{15}, \text{кОм}$	$R_{16}, \text{кОм}$	$R_{17}, \text{кОм}$	$R_{18}, \text{кОм}$	$R_{19}, \text{кОм}$	$R_{20}, \text{кОм}$	$R_{21}, \text{кОм}$	$R_{22}, \text{кОм}$	$C_{11}, \text{мкФ}$	$C_{12}, \text{мкФ}$	$C_{13}, \text{мкФ}$	$L_1, \text{мкГн}$	$h_{11}, \text{кОм}$	h_{12}	h_{21}	$h_{22}, \text{мСм}$
1	10	700	100	10	20	1,5	10	100	0,01	0,05	10	40	71,15	2,028	70	2,028	2,028	70	2,028	70	2,028	2,028
2	9	650	200	11	22	1,7	20	150	0,02	0,06	15	50	62,84	2,143	65	2,143	2,143	65	2,143	65	2,143	2,256
3	8,5	600	300	12	24	1,9	30	200	0,03	0,07	20	60	55,03	2,287	60	2,287	2,287	60	2,287	60	2,287	2,541
4	8	550	400	13	26	2,1	40	250	0,04	0,08	25	70	47,72	2,472	55	2,472	2,472	55	2,472	55	2,472	2,909
5	7,5	500	500	14	28	2,3	50	300	0,05	0,09	30	80	40,91	2,72	50	2,72	2,72	50	2,72	50	2,72	3,4
6	7	400	600	15	30	2,5	60	350	0,06	0,1	35	90	34,6	3,066	45	3,066	3,066	45	3,066	45	3,066	4,08
7	6,5	300	700	16	32	2,6	70	400	0,07	0,15	40	100	28,79	3,5875	40	3,5875	3,5875	40	3,5875	40	3,5875	5,125
8	6	200	800	17	34	2,7	80	450	0,08	0,2	45	110	23,48	4,4571	35	4,4571	4,4571	35	4,4571	35	4,4571	6,857
9	5,5	100	900	18	36	2,8	90	500	0,09	0,25	50	120	18,67	4,96	30	4,96	4,96	30	4,96	30	4,96	8,266
0	5	50	1000	19	38	2,9	100	550	0,1	0,3	55	130	14,36	5,72	25	5,72	5,72	25	5,72	25	5,72	10,4

ЦЕПИ С ОПЕРАЦИОННЫМИ УСИЛИТЕЛЯМИ

6.46. Рассчитать в общем виде входное сопротивление цепи, показанной на рис. 6.21, а.

Указание: изучите сначала с. 115, 116 в [1].

Решение. Комплексным входным сопротивлением цепи в общем случае называется отношение комплексного входного напряжения $\dot{U}_{вх}$ к комплексному входному току $\dot{I}_{вх}$, т. е. $Z_{вх} = \dot{U}_{вх} / \dot{I}_{вх}$. В операционном усилителе напряжение между входными зажимами ОУ (т. е. между точками A и B) и ток между ними близки к нулю (подробнее см. с. 109—114 в [1]), а в этом случае $U_{вх}$ практически равно $\dot{U}_{вых}$, и тогда $Z = \dot{U}_{вых} / \dot{I}_{вх}$. По второму закону Кирхгофа $\underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2 = \dot{U}_{AB} \approx 0$, откуда $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2 \underline{Z}_2 / \underline{Z}_1$. Так как $I_A \approx 0$, то $\dot{I}_{вх} = \dot{I}_1 = -\dot{I}_2 \underline{Z}_2 / \underline{Z}_1$. Поскольку $I_B \approx 0$, ток $\dot{I}_2 = \dot{I}_{вых}$, поэтому $\dot{I}_{вх} = -\dot{I}_{вых} \underline{Z}_2 / \underline{Z}_1$. Тогда

$$\underline{Z}_{вх} = [\dot{U}_{вых} / (-\dot{I}_{вых} \underline{Z}_2 / \underline{Z}_1)] = -(\dot{U}_{вых} / \dot{I}_{вых}) (\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2).$$

Но $\dot{U}_{вых} / \dot{I}_{вых} = \underline{Z}_н$. Следовательно, $Z_{вх} = -\underline{Z}_н (\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2)$.

6.47. Рассчитать в общем виде входное сопротивление цепи (рис. 6.21, а), если все сопротивления резистивные, т. е. $\underline{Z}_1 = R_1$, $\underline{Z}_2 = R_2$, $\underline{Z}_н = R_н$.

Указание: изучите сначала с. 115, 116 в [1] и задачу 6.46.

Решение. В задаче 6.46 было показано, что в схеме рис. 6.21, а $Z_{вх} = -\underline{Z}_н (\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2)$. Если все сопротивления резистивные, то $R_{вх} = -R_н (R_1 / R_2)$. Получившаяся при этом схема называется конвертом отрицательных сопротивлений (КОС). Если $R_1 = R_2$, то $R_{вх} = -R_н$. Таким образом, с помощью активных элементов можно получать отрицательные резистивные сопротивления.

6.48. Рассчитать ток в цепи (рис. 6.21, б) при замкнутом и разомкнутом положениях ключа, если КОС состоит из резистивных сопротивлений для случаев: а) $R_1 = R_2 = R_н = 100$ Ом; б) $R_1 = 200$ Ом, $R_2 = R_н = 100$ Ом; в) $R_1 = R_н = 100$ Ом, $R_2 = 200$ Ом.

Указание: разберите сначала задачу 6.47.

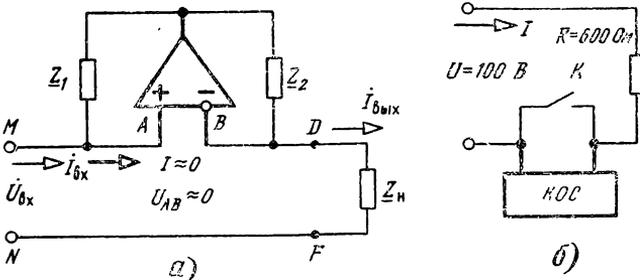


Рис. 6.21

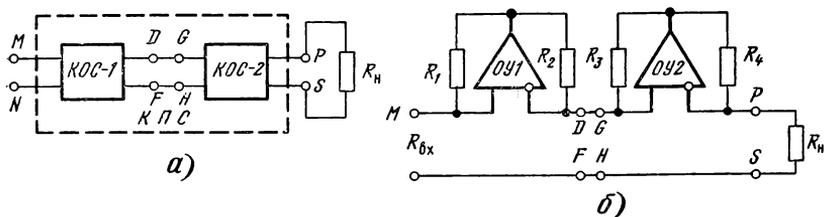


Рис. 6.22

6.49. Рассчитать в общем виде входное сопротивление цепи, показанной на рис. 6.22, а, б.

Указание: разберите сначала задачи 6.46 и 6.47.

Решение. Если соединить последовательно два КОС, то знак входного сопротивления еще раз изменится и станет снова положительным, при этом получается конвертор положительных сопротивлений (КПС) (рис. 6.22, а и б). Такие цепи широко используются для различного рода согласований сопротивлений, например выходного сопротивления одного каскада с входным сопротивлением другого. Конверторы положительных сопротивлений имеют значительные преимущества перед трансформаторами, часто применяющимися в качестве согласующих устройств. Схемы КПС могут иметь параметры, при которых четырехполюсники, содержащие эти КПС, обладают такими же внешними характеристиками, что и трансформаторы, близкие к идеальным, значительно превосходя последние по ряду конструктивных данных (см. с. 336 в [1]).

Рассчитаем входное сопротивление цепи, показанной на рис. 6.22, б. Входное сопротивление КОС-2 (между точками GH) $R_{GH} = -R_n(R_3/R_4)$ является нагрузочным сопротивлением КОС-1, откуда $R_{вх(КОС)} = R_{MN} = -R_{GH}(R_1/R_2) = R_1R_3R_n/R_2R_4$. На практике одно или два сопротивления могут быть выполнены в виде подстроечных, при этом удобно производить необходимые регулировки, согласования и т. д.

6.50. Рассчитать входное сопротивление цепи, показанной на рис. 6.22, а, если: а) $R_1 = R_2 = R_3 = R_n$, а сопротивление R_4 можно регулировать от 20 до 500 Ом; б) $R_1 = 1$ кОм, R_2 может изменяться от 0,5 до 2 кОм, $R_3 = 5$ кОм, R_4 может изменяться от 1 до 10 кОм, $R_n = 5$ кОм.

Указание: разберите сначала задачу 6.49.

6.51. Рассчитать в общем виде входное сопротивление цепи, показанной на рис. 6.23, а.

Указание: разберите сначала задачу 6.46.

Решение: как было показано в задаче 6.46, $Z_{вх} = -Z_n(Z_1/Z_2)$. В данной схеме $Z_1 = 1/j\omega C_1$, $Z_2 = R_2$, $Z_n = 1/j\omega C_n$, следовательно, $Z_{вх} = -1/j\omega C_n j\omega C_1 R_2 = 1/\omega^2 R_2 C_1 C_n$, т. е. входное сопротивление цепи (рис. 6.23, а) является резистивным, положительным, частотно-зависимым. Как видно из полученного вы-

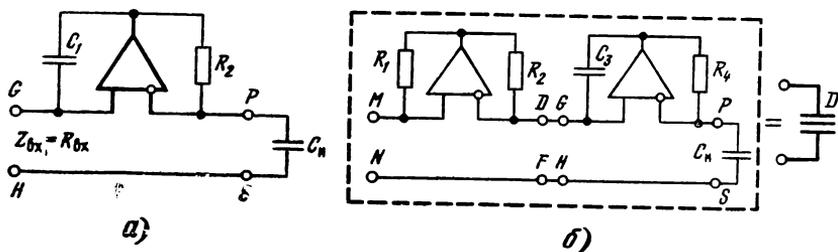


Рис. 6.23

ражения, с увеличением частоты входное сопротивление цепи резко падает.

6.52. Рассчитать входное сопротивление цепи, показанной на рис. 6.23,а, при изменении частоты от 50 до 500 кГц, если $R_2 = 10 \text{ кОм}$, $C_1 = C_H = C = 1 \text{ нФ}$.

Указание: разберите сначала задачу 6.51.

Решение. В данной цепи $Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} = 1/\omega^2 R_2 C_1 C_H = 1/(2\pi)^2 f^2 R_2 C^2 = 1/[(6,28)^2 \cdot 10 \cdot 10^3 (10^{-9})^2 f^2] = 2500 \cdot 10^9 / f^2$. При $f = 50 \text{ кГц} = 5 \cdot 10^4 \text{ Гц}$ $R_{\text{вх}} = 2500 \cdot 10^9 / 2500 \cdot 10^6 = 1000 \text{ Ом}$. При $f = 500 \text{ кГц} = 5 \cdot 10^5 \text{ Гц}$ $R_{\text{вх}} = 2500 \cdot 10^9 / 25 \cdot 10^{10} = 10 \text{ Ом}$. Таким образом, при увеличении частоты в 10 раз входное сопротивление остается резистивным и уменьшается с 1000 до 10 Ом, т. е. в 100 раз.

6.53. Определить частоту, при которой входное сопротивление цепи, показанной на схеме рис. 6.23,а, будет 250 Ом, если $R_2 = 625 \text{ Ом}$, $C_1 = C_H = 1 \text{ мкФ}$. При решении учтите, что $(2\pi)^2 = 39,6 \approx 40$.

Указание: разберите сначала задачу 6.51.

6.54. Рассчитать в общем виде входное сопротивление цепи, показанной на рис. 6.23,б.

Указание: разберите сначала задачи 6.47 и 6.51.

Решение. Если перед цепью, показанной на рис. 6.23,а, включить КОС (рис. 6.23,б), то знак входного сопротивления изменится на противоположный и входное сопротивление всей цепи станет резистивным, отрицательным, частотно-зависимым. Активная цепь с указанными свойствами получила название «элемент D». Такие элементы имеют микрорезистивное исполнение и весьма часто являются составной частью более сложных микросхем. Элементы D широко используются в различных электронных устройствах, в частности для получения частотно-зависимых цепей, фильтрующих устройств и т. д. (см. задачи 6.59 и 6.60). Определим входное сопротивление D-элемента. Как видно из схемы (рис. 6.23,б) $R_{\text{вх}(D)} = R_{MN} = -Z_{DF} (R_1/R_2) = -R_1/(\omega^2 R_4 C_3 C_H R_2)$. Множитель $D = R_2 R_4 C_3 C_H / R_1$ получил название «параметр D». Таким образом, входное сопротивление D-элемента имеет вид $R_{\text{вх}(D)} = -1/\omega^2 D$, где D — величина посто-

янная, зависящая от значений сопротивлений и емкостей, входящих в элемент D . Таким образом, термин « D -элемент» указывает на микроэлектронную схему, входное сопротивление которой резистивное, отрицательное, с модулем, убывающим пропорционально квадрату частоты.

6.55. Рассчитать входные сопротивления D -элемента, показанного на схеме 6.23, б, в диапазоне 15,9...159 кГц, если $R_1 = R_2 = R_4 = R = 10$ кОм, $C_3 = C_n = 1$ нФ.

Указание: разберите сначала задачу 6.54.

Решение. Рассчитаем параметр D данной цепи: $D = R_2 R_4 C_3 C_n / R_1 = 10^4 \cdot 10^4 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-9} / 10^4 = 10^{-14}$ с²/Ом. Тогда $R_{вх} = -1/\omega^2 R$. При $f = 15,9$ кГц $R_{вх} = -1/[(2\pi \cdot 15,9 \cdot 10^3)^2 \cdot 10^{-14}]$. Таким образом, при увеличении частоты в 10 раз модуль входного сопротивления данного D элемента уменьшается в 100 раз.

6.56. На какой частоте входное сопротивление цепи с параметрами, приведенными в предыдущей задаче, составляет 1000 Ом?

Указание: разберите сначала задачу 6.55.

6.57. Рассчитать входное сопротивление цепи, показанной на рис. 6.24.

Указание: разберите сначала задачи 6.46, 6.51 и 6.54.

Решение. Входное сопротивление цепи

$$\begin{aligned} Z_{вх} = Z_{MN} &= -Z_{DF} (Z_1 / Z_2) = -(R_n Z_3 Z_1) / (Z_4 Z_2) = \\ &= \frac{R_n R_3 R_1}{(1/j\omega C_4)(1/j\omega C_2)} = -\omega^2 R_1 R_3 R_n C_2 C_4 = -\omega^2 E. \end{aligned}$$

Множитель $R_1 R_3 R_n C_2 C_4$, имеющий размерность Ом·с², часто называют E -параметром, а цепь, показанную на рис. 6.24, — E -элементом. Таким образом, элементом E является цепь, входное сопротивление которой резистивное, отрицательное, с модулем, возрастающим от частоты по квадратическому закону. Элементы E так же, как и D , изготавливаются в микроэлектронном исполнении. Схематичное обозначение E -элемента показано на рис. 6.24.

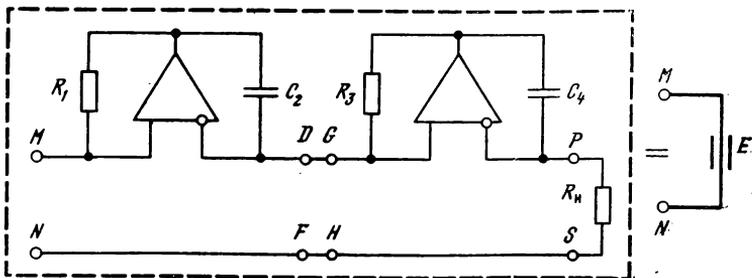


Рис. 6.24

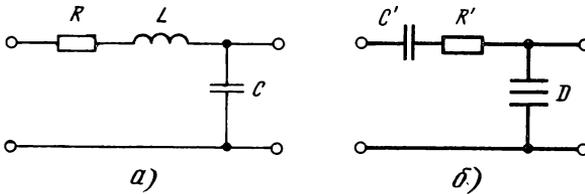


Рис. 6.25

6.58. Рассчитать входное сопротивление цепи, показанной на рис. 6.24, в диапазоне 1,59...15,9 кГц, если $R_1=R_3=R_H=10$ кОм, $C_2=C_4=1$ нФ.

Указание: разберите сначала задачу 6.57.

6.59. Заменить цепь, показанную на рис. 6.25, а, эквивалентной, безындуктивной, использующей D -элемент.

Указание: разберите сначала задачи 6.51, 6.52, 6.54.

Решение. Комплексный коэффициент передачи данной цепи $\underline{K} = \underline{Z}_C / (R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C) = \frac{1/j\omega C}{R + j\omega L + 1/j\omega C}$. Поделим числитель и знаменатель данного выражения на множитель $j\omega$. Формула коэффициента передачи при этом принимает вид

$$\underline{K} = \frac{1/(j\omega C \cdot j\omega)}{R/j\omega + j\omega L/j\omega + [1/(j\omega C \cdot j\omega)]} = \frac{-1/\omega^2 C}{R/j\omega + L - 1/\omega^2 C}$$

Разберем физический смысл каждого слагаемого. Член $-1/\omega^2 C$ представляет резистивное отрицательное сопротивление, модуль которого уменьшается пропорционально квадрату частоты, т. е. имеет те же характеристики, что и D -элементы. Так как $R_{\text{вх}(D)} = -1/\omega^2 D$, а в нашем случае $-1/\omega^2 C$, очевидно, что D -элемент должен иметь параметр, численно равный значению емкости C (рис. 6.25, а). Член $R/j\omega$ есть выражение комплексного сопротивления емкостного элемента, емкость которого C' численно (заметьте, только численно!) равна $1/R$. Второе слагаемое знаменателя представляет вещественное число (как всякое число, не имеющее множителя j) и, следовательно, физически представляет сопротивление R' , численно (опять-таки только численно!) равное индуктивности L исходной цепи. Таким образом, чтобы RLC -цепь заменить эквивалентной, с D -элементом, необходимо проделать следующее: резистивное сопротивление R заменить емкостью C' , у которой C' численно равно $1/R$, вместо индуктивности включить резистивное сопротивление R' , численно равное L , а вместо емкости $-D$ -элемент с параметром, численно равным значению емкости C в исходной цепи (рис. 6.25, б). Полученная цепь не содержит индуктивностей и может быть реализована в микроэлектронном виде. Коэффициент передачи эквивалентной цепи такой же, как и исходной.

6.60. В RLC -цепи, показанной на рис. 6.25, а, $R=200$ Ом, $C=0,159$ мкФ. Рассчитать значение индуктивности L , при кото-

рой напряжение и ток во входной цепи совпадают по фазе при $f=50$ Гц. Определить резистивное сопротивление цепи, при котором на частоте $f_1=50,25$ Гц входной фазный угол равен 45° . Заменить данную схему эквивалентной с помощью D -элемента.

Указание: разберите сначала задачу 6.59.

Решение. Запишем входное комплексное сопротивление цепи (рис. 6.25, а): $Z_{вх}=R+j(\omega L-1/\omega C)$. Напряжение и ток во входной цепи совпадают по фазе, если цепь имеет чисто резистивный характер, а для этого необходимо, чтобы мнимая часть входного комплексного сопротивления равнялась нулю, т. е. выполнялось условие $\omega L-1/\omega C=0$, откуда $L=1/\omega^2 C=1/(6,28 \times 50 \cdot 0,159 \cdot 10^{-6})=63,79$ Гн ≈ 64 Гн.

Из выражения $\operatorname{tg}\varphi_{z_{вх}}=X/R=(\omega_1 L-1/\omega_1 C)/R=(1/R)[(6,28 \times 50,25 \cdot 63,79) - (1/6,28 \cdot 50,25 \cdot 0,159 \cdot 10^{-6})] = (20\,130 - 19\,900)/R=230/R$ определим $R=230/\operatorname{tg} 45^\circ=230/1=230$ Ом.

Таким образом, оказалось, что цепь, показанная на рис. 6.25, а, для выполнения поставленных требований должна иметь следующие параметры: $R=230$ Ом, $L=64$ Гн, $C=0,159$ мкФ.

Изготовить катушку с индуктивностью 64 Гн практически невозможно, габариты такой катушки были бы совершенно неприемлемыми. Заменяем исходную RLC -схему эквивалентной (рис. 6.25, б) и рассчитаем ее параметры. Как было показано в задаче 6.59, D -параметр в такой цепи численно равен значению емкости C в исходной схеме, т. е. $D=15,9 \cdot 10^{-8}$ с²/Ом. Если в D -элементе принять все сопротивления одинаковыми, например по 1 МОм, то емкости D элемента оказываются равными 0,4 мкФ, а если выбрать $R_2=R_4=1$ МОм, а $R_1=10$ кОм, то емкости C_3 и C_n оказываются еще меньше, всего по 40 нФ, что следует из выражения $D=R_2 R_4 C_3 C_n / R_1$, откуда $C_3=C_n= \sqrt{D R_1 / R_2} = \sqrt{15,9 \cdot 10^{-8} \cdot 10^4 / 10^6} = 4 \cdot 10^{-2} / 10^6 = 40$ нФ.

Резистивное сопротивление R' имеет значение, численно равное индуктивности L , т. е. 74 Ом. Определим емкость C' , которая численно равна $1/R$, т. е. $C=1/230=4,35 \cdot 10^{-3}$ Ф $=4,35$ мФ $=4350$ мкФ. Конденсаторы емкостью до 5000 мкФ изготавливаются серийно и имеют небольшие габариты. В ряде случаев устанавливать в схему конденсатор даже такой емкости нет необходимости, поскольку существуют устройства, позволяющие производить умножение емкостей, т. е. при наличии малой емкости получать такой же эффект, как при значительно большей (см. с. 196 в [8] и задачу 6.62).

Таким образом, используя D -элементы, можно конструировать цепи с параметрами, которые практически невозможно получить без использования активных элементов.

6.61. Нарисовать схемы, эквивалентные показанным на рис. 6.26, а и б.

Указание: разберите сначала задачи 6.59 и 6.60.

6.62. Вычислить входное сопротивление цепи (рис. 6.27, а)

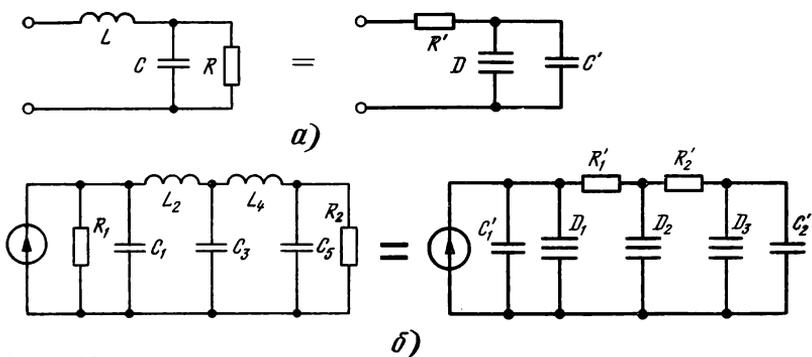


Рис. 6.26

и убедиться, что эта цепь является умножителем емкостей.

Указание: разберите сначала с. 196—199 в [11].

Решение. Покажем на рис. 6.27, б эквивалентную схему исходной цепи. В операционном усилителе с неинвертирующим (положительным) входом значения напряжения U_{AB} , а также токов I_A и I_B близки к нулю. По первому закону Кирхгофа $\dot{I}_{вх} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$, но $\dot{I}_C = \dot{I}_1$. По второму закону Кирхгофа $\dot{U}_{вх} = R_1 \dot{I}_1 + \dot{I}_1 (1/j\omega C)$. Выразим ток \dot{I}_1 через ток $\dot{I}_{вх}$. Так как $U_{AB} \approx 0$, то потенциал точки А практически равен потенциалу точки В. В этом случае $\dot{I}_1 = \dot{I}_{вх} [R_2 / (R_1 + R_2)]$, и тогда $\dot{U} = R_1 [\dot{I}_{вх} R_2 / (R_1 + R_2)] + (1/j\omega C) [\dot{I}_{вх} R_2 / (R_1 + R_2)] = \dot{I}_{вх} [R_1 R_2 / (R_1 + R_2) - j1/\omega C (\frac{R_1 + R_2}{R_2})] = \dot{I}_{вх} Z_{вх}$, где $R_{вх} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$, $C_{эк} = C [(R_1 + R_2) / R_2] = C (1 + R_1 / R_2)$. Таким образом, эквивалентная входная емкость цепи (рис. 6.27, в) в $(1 + R_1 / R_2)$ раза больше емкости С.

6.63. В цепи, показанной на рис. 6.27, а, $C = 1$ нФ, $R_1 = 5$ кОм, $R_2 = 20$ Ом. Рассчитать $C_{эк}$.

Указание: разберите сначала задачу 6.62.

Решение. $C_{эк} = C (1 + R_1 / R_2) = 1 \cdot (1 + 5000 / 20) = 256$ нФ.

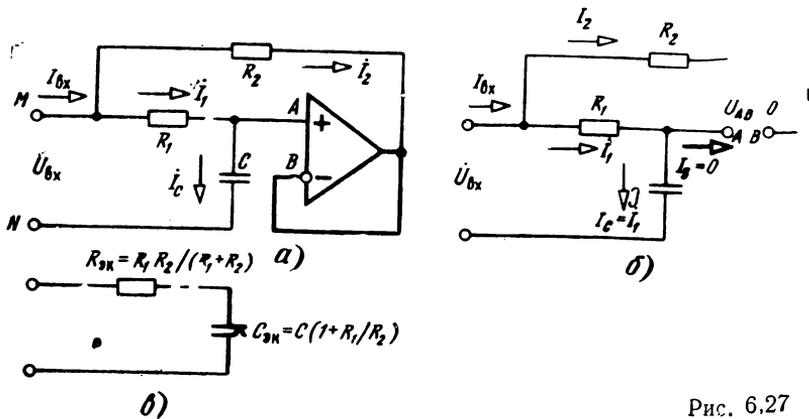


Рис. 6.27

Таким образом, в данной цепи значение емкости возрастает более чем в 250 раз. Подобными множителями емкостей широко пользуются на практике в тех случаях, когда по каким-то причинам, например конструктивным, желательно использовать емкость, меньшую, чем получившуюся по расчету. Так, в схеме рис. 6.25, б (задача 6.59) требовалась емкость 4350 мкФ. Используя схему множителя емкостей, показанную на рис. 6.27, а, можно получить такой же эффект при емкости, в 256 раз меньшей, т. е. при $C'' \approx 17$ мкФ. Подобных примеров можно привести множество.

Глава 7. RL- И RC-ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ПЕРЕМЕННОЙ ЧАСТОТЕ

7.1. Рассчитать и построить кривые входных и передаточных амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик цепей, показанных на рис. 7.1, а и б.

Указание: изучите сначала с. 191—194 и 198—204 в [1].

7.2. Рассчитать и построить кривые входных и передаточных амплитудно- и фазочастотных характеристик цепей, показанных на рис. 7.1, в и г.

Указание: изучите сначала с. 191—194 и 198—204 в [1].

7.3. Рассчитать и построить кривые входных и передаточных амплитудно- и фазочастотных характеристик цепей, показанных на рис. 7.2, а и б.

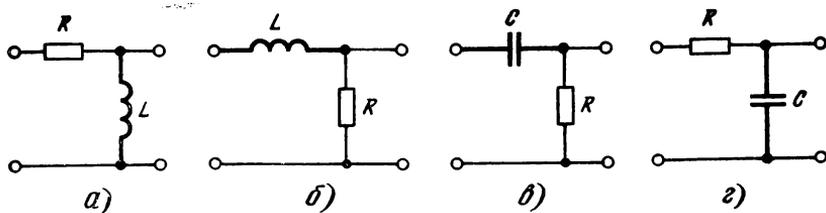


Рис. 7.1

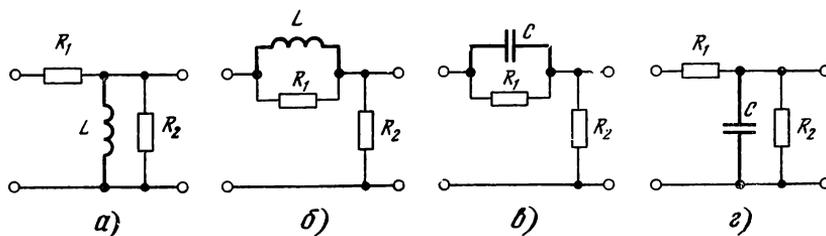


Рис. 7.2

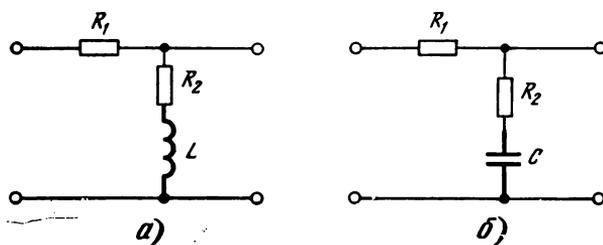


Рис. 7.3

Указание: изучите сначала с. 195—204 в [1].

7.4. Рассчитать и построить кривые входных и передаточных амплитудно- и фазочастотных характеристик цепей, показанных на рис. 7.2, в и г.

Указание: изучите сначала с. 95—204 в [1].

7.5. Определить частоту ω , при которой в схемах рис. 7.2, а и б входной фазовый угол максимален. Каково значение $\varphi_z \text{ вх макс?}$

Указание: изучите сначала с. 191—197 в [1].

7.6. Определить частоту f , при которой в схемах (рис. 7.2, в и г) входной фазный угол максимален, и значение этого угла, если $R_1=1$ кОм, $R_2=2$ кОм, $C=0,1$ мкФ.

Указание: изучите сначала с. 191—197 в [1].

7.7. Рассчитать и построить кривые $H=f(\omega)$ и $\varphi_H=f(\omega)$ для схем, показанных на рис. 7.3, а и б.

Указание: изучите сначала с. 198—204 в [1].

7.8. В схеме, показанной на рис. 7.2, а, $R_1=\text{const}$, $L=\text{const}$, $\omega=\text{const}$, $R_2=\text{var}$. Рассчитайте и постройте кривую $H=f(R_2)$.

Указание: изучите сначала с. 198—200 в [1].

7.9. В схеме, показанной на рис. 7.2, б, $\omega=\text{const}$, $L=\text{const}$, $R_2=\text{const}$, $R_1=\text{var}$. Рассчитайте и постройте кривую $H=f(R_1)$.

Указание: изучите сначала с. 198—200 в [1].

7.10. В схеме, показанной на рис. 7.2, в, $\omega=\text{const}$, $C=\text{const}$, $R_2=\text{const}$, $R_1=\text{var}$. Рассчитать и построить кривую $H=f(R_1)$.

Указание: изучите сначала с. 198—200 в [1].

7.11. В схеме, показанной на рис. 7.2, г, $\omega=\text{const}$, $C=\text{const}$, $R_1=\text{const}$, $R_2=\text{var}$. Рассчитать и построить кривую $H=f(R_2)$.

Указание: изучите сначала с. 198—200 в [1].

7.12. Для схем, показанных на рис. 7.1, а—г, определить диапазоны частот, в которых цепь: практически резистивная; практически реактивная; представляет собой RL -цепь (рис. 7.1, а, б); RC -цепь (рис. 7.1, в, г).

Решение. Если оказывается, что значение одного слагаемого некоторого выражения много меньше значения другого слагаемого, то меньшим слагаемым можно пренебречь по сравнению с большим. При этом полную величину приближенно считают равной большей величине. При таком пренебрежении возникает некоторая погрешность δ . Как известно, если $A_d \rightarrow$

действительное значение, а $A_{\text{пр}}$ — приближенное, то относительная погрешность, возникающая за счет принятия значения приближенного за действительное значение, определяется из выражения

$$\delta = \frac{A_d - A_{\text{пр}}}{A_d} 100\%,$$

где δ — относительная погрешность, %.

Пусть две величины складываются геометрически (что и имеет место в цепях с резистивными и реактивными элементами). Примем большую величину за 1, а меньшую за B . Определим, при каких значениях B ею можно пренебрегать, чтобы погрешность, обусловленная таким пренебрежением, не превысила наперед заданное значение относительной погрешности δ . Очевидно, что в этом случае

$$\delta = \left[(\sqrt{1+B^2} - 1) / \sqrt{1+B^2} \right] 100\%.$$

Решив это уравнение относительно B , получим

$$B \leq \sqrt{\frac{100^2}{(100-\delta\%)^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{(1-\delta)^2} - 1}.$$

В последнем выражении δ берется в относительных единицах. Если задаться допустимой погрешностью $\delta = 0,5\%$, то $B = \sqrt{\frac{100^2}{(100-0,5)^2} - 1} = 0,1$. При $\delta = 5\%$ $B = \sqrt{\frac{100^2}{(100-5)^2} - 1} = 0,33$.

Таким образом, если формула описывает геометрическую сумму двух величин (т. е. $\sqrt{A^2+B^2}$) и значение меньшего элемента составляет 0,1 большего, то погрешность при пренебрежении величиной с меньшим значением по модулю не превышает 0,5%, а по фазе $\varphi = \arctg(0,1/1) = 5^\circ 44'$. Если меньшая величина отличается от большей в 3 раза, то погрешность при отбрасывании меньшей величины по модулю не превышает 5%, а по фазе — $18^\circ 30'$. Как правило, в RX -цепях понятие «много больше» означает, что значение данной величины по крайней мере в 3 раза больше значения меньшей величины. Определим частоты, при которых RX -цепь практически резистивная и при которых практически реактивная. В последовательной RL -цепи (рис. 7.1, а) $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$. Однако цепь остается практически резистивной, если выполняется условие $R \geq 3X_L$, откуда $R \geq 3 \times 2\pi f_1 L$ или $f_1 = R/6\pi L = 0,053(R/L) \approx 0,05(R/L)$. Частота f_2 определяется из выражения $2\pi f_2 L = 3R$ или $f_2 = 3R/2\pi L = 0,478R/L \approx 0,5R/L$. Следовательно, последовательную RL -цепь в диапазоне от $f=0$ до $f=f_1$ можно считать близкой к резистивной, в диапазоне от $f=f_2$ до $f=\infty$ — индуктивной. В диапазоне от f_1 до f_2 цепь является комплексной RL -цепью (рис. 7.4, а).

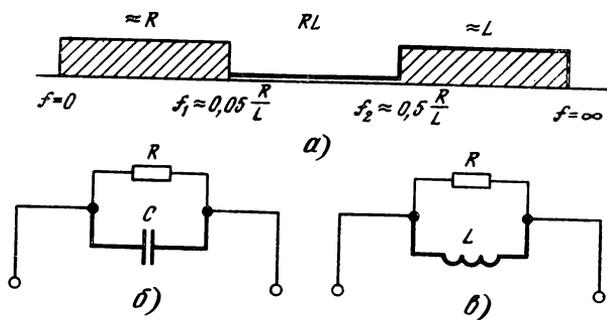


Рис. 7.4

При параллельном соединении резистивных и реактивных элементов можно пренебрегать ветвью в том случае, если ее проводимость хотя бы в 3 раза меньше проводимости второй ветви. На этом основании в схеме рис. 7.4, б при $(1/R) \geq 3\omega C$ цепь можно считать практически резистивной, а при $\omega C \geq 3/R$ — емкостной. Следует также иметь в виду, что на практике в качестве предельного соотношения часто принимают $\sqrt{10} = 3,16$, что удобно при многих расчетах. При округлении значения 0,053 до 0,05, а 0,478 до 0,5 трехкратное соотношение заменяется на 3,16. При анализе различных цепей могут встречаться случаи, при которых критерии допуска должны быть более строгими. Об этом обыкновенно можно судить или из постановки задачи, или из дополнительных ограничений, накладываемых на задачи или эксперимент. Критерий 3-кратного (или 3,16) соотношения является близким к предельно допустимому, но достаточно распространенному при практических работах. Разумеется, без особой необходимости не следует пренебрегать величинами, которые отличаются от других менее чем на порядок. Иногда приходится руководствоваться и еще более жесткими критериями. Все зависит от той конкретной задачи, которая решается, или той схемы, которая анализируется.

7.13. Определить диапазоны частот, в которых цепь, показанная на рис. 7.1, а, практически резистивная, практически реактивная, является RC -цепью, если $R=1$ кОм, $C=0,1$ мкФ.

Указание: разберите сначала задачу 7.12.

7.14. Определить диапазоны частот, в которых цепь, показанная на рис. 7.4, б, практически реактивная, практически резистивная, является RL -цепью, если $R=10$ кОм, $L=0,1$ Гн.

Указание: разберите сначала задачу 7.12.

7.15. Определить диапазоны частот, в которых цепь, показанная на рис. 7.4, б, практически резистивная, практически реактивная, является RC -цепью, если $R=1$ кОм, $C=1$ нФ.

Указание: разберите сначала задачу 7.12.

7.16. Варианты для индивидуальных заданий. Рассчитать и построить характеристики $Z_{вх} = f(f)$, $\varphi_{Z_{вх}} = f(f)$, $H = f(f)$, $\varphi_H = f(f)$, $\tau = f(f)$. Первый знак шифра — номер схемы, рис. 7.5

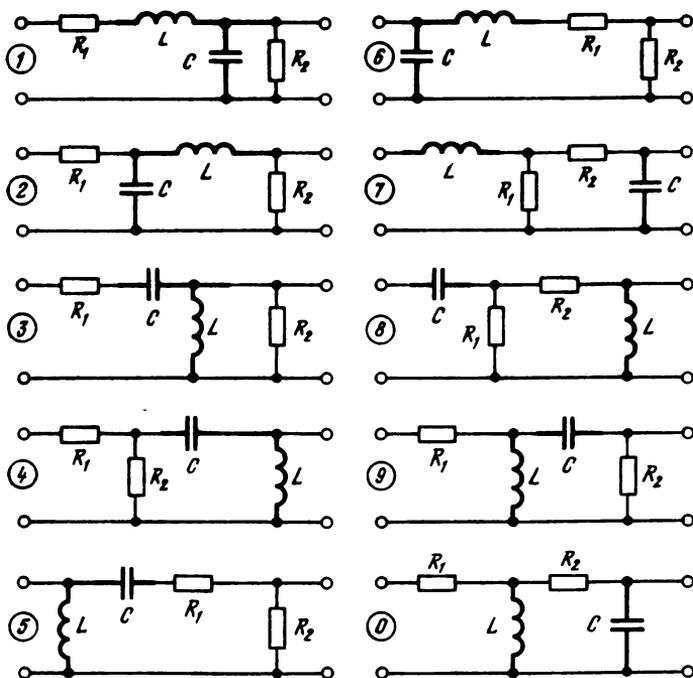


Рис. 7.5

Таблица 7.1

Второй знак шифра	Исходные данные				Второй знак шифра	Исходные данные			
	R_1 , Ом	R_2 , Ом	L , мГн	C , мкФ		R_1 , Ом	R_2 , Ом	L , мГн	C , мкФ
1	100	800	133	0,214	6	150	1300	66,5	0,52
2	110	900	66,5	0,053	7	160	1400	46,2	0,29
3	120	1000	33,3	0,107	8	170	1500	38	0,16
4	130	1100	266	0,052	9	180	700	26	0,092
5	140	1200	133	0,036	0	190	600	154	0,137

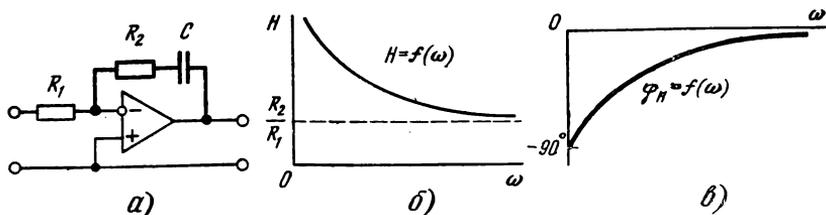


Рис. 7.6

(1—10), второй знак шифра — исходные данные, приведенные в табл. 7.1.

7.17. Рассчитать и построить кривые АЧХ и ФЧХ цепи, показанной на рис. 7.6, а.

Указание: изучите сначала с. 109—114 и 189, 190 в [1].

Решение. Как было показано на с. 112 в [1], коэффициент передачи цепи с операционным усилителем (см. рис. 3.53 на с. 112 в [1]) — представляет отношение сопротивления обратной связи к входному сопротивлению. В общем случае коэффициент передачи такой цепи (т. е. отношение \dot{U}_2/\dot{U}_1 при постоянной частоте) есть величина комплексная, причем $\underline{K} = \underline{Z}_2/\underline{Z}_1$. При переменной частоте комплексный коэффициент передачи превращается в комплексную передаточную функцию $\underline{H} = H(j\omega) = \underline{Z}_2/\underline{Z}_1 = H(\omega) e^{j\varphi_H}$. Модуль передаточной функции представляет амплитудно-частотную характеристику (АЧХ), а аргумент — передаточную фазочастотную характеристику (ФЧХ). Определим АЧХ и ФЧХ для цепи (рис. 7.6, а):

$$H(j\omega) = \underline{Z}_2/\underline{Z}_1 = (R_2 + 1/j\omega C)/R_1 = (1 + j\omega R_2 C)/j\omega R_1 C,$$

откуда $H(\omega) = (1/\omega R_1 C) \sqrt{1 + \omega^2 R_2^2 C^2}$.

Проанализируем ход кривой $H = f(\omega)$. При $\omega = 0$ $H \rightarrow \infty$, для определения значения $H(\infty)$ преобразуем выражение: $H(\omega) = (1/R_1 C) \sqrt{[(1/\omega^2) + R_2^2 C^2]}$, из которого видно, что при $\omega = \infty$ $H = R_2/R_1$. Таким образом, кривая $H = f(\omega)$ цепи, показанной на рис. 7.6, а, изменяется от ∞ до R_2/R_1 (рис. 7.6, б). Фазочастотная характеристика $\varphi_H(\omega)$ определяется из выражения $\varphi_H = (\arg \operatorname{tg} \omega R_2 C) - 90^\circ$ и соответственно изменяется от -90° до 0° (рис. 7.6, в). Полученную характеристику можно было определить чисто качественно, путем рассуждений. Действительно, при $\omega = 0$ $X_C = \infty$, цепь обратной связи оказывается разомкнутой, отрицательная обратная связь (ООС) при этом отсутствует и коэффициент передачи оказывается значительным (теоретически равным бесконечности). При высоких частотах (теоретически — бесконечно больших) сопротивление емкостного элемента уменьшается до нуля, цепь ООС состоит только из резистивного сопротивления R_2 , а в этом случае $K = R_2/R_1$, что и получилось выше.

7.18. При какой частоте ω модуль коэффициента передачи цепи, показанной на рис. 7.6, а, равен $\sqrt{2}$?

Указание: разберите сначала задачу 7.17.

Решение. Так как в данной цепи $H = \sqrt{(1 + \omega^2 R_2^2 C^2) / \omega^2 R_1^2 C^2}$, то при $H = \sqrt{2}$ получается уравнение $2\omega^2 R_1^2 C^2 = 1 + \omega^2 R_2^2 C^2$, откуда $\omega = 1/C \sqrt{(2R_1^2 - R_2^2)}$.

7.19. Рассчитать АЧХ и ФЧХ цепей, показанных на рис. 7.7, а—г, и построить их кривые.

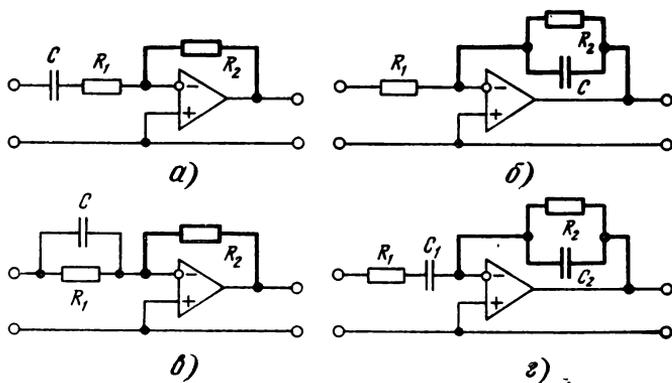


Рис. 7.7

Указание: разберите сначала задачу 7.17.

7.20. Варианты для индивидуальных заданий. Рассчитайте и постройте кривые АЧХ и ФЧХ в диапазоне частот, в котором $H(\omega)$ изменяется от 0,1 до 10 для цепей, показанных на рис. 7.8, а—к. Исходные данные приведены в табл. 7.2.

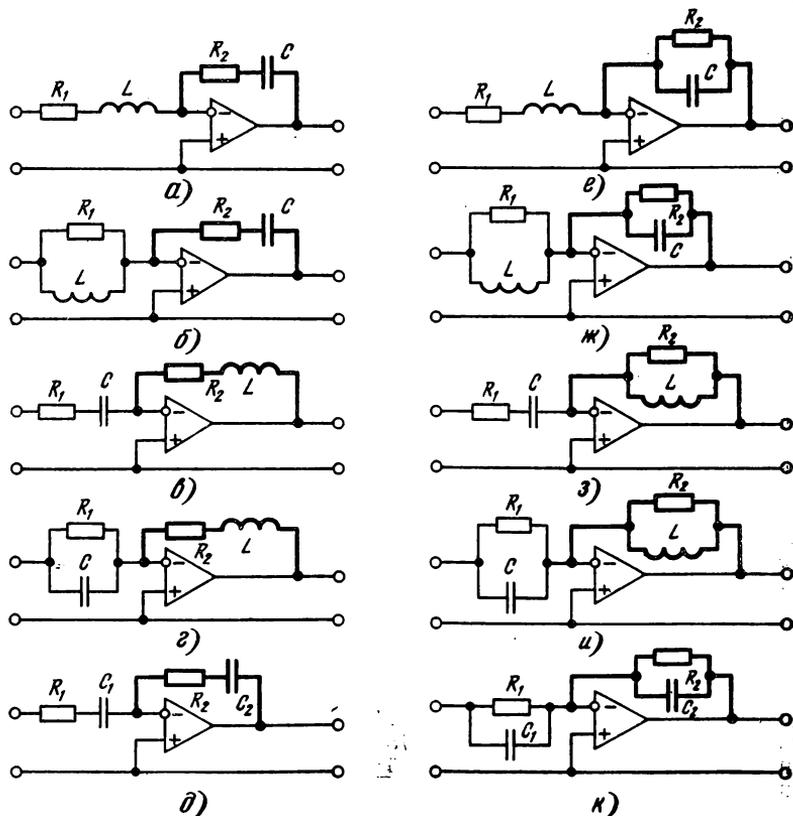


Рис. 7.8

Номер вариантов	Схема рис. 7.8	R_1 , КОМ	R_2 , КОМ	L , МГН	C_1 , нФ	C_2 , нФ
01	<i>a</i>	1	5	50	1	—
02	<i>б</i>	20	0,5	100	1	—
03	<i>в</i>	10	1	50	10	—
04	<i>г</i>	20	1	10	0,1	—
05	<i>д</i>	50	1	—	100	5
06	<i>е</i>	1	50	1	1	—
07	<i>ж</i>	50	1	10	10	—
08	<i>з</i>	1	50	0,5	10	—
09	<i>и</i>	5	25	5	10	—
10	<i>к</i>	50	1	—	50	1
11	<i>a</i>	1,1	6	45	2	—
12	<i>б</i>	25	0,6	90	2	—
13	<i>в</i>	15	0,5	50	9	—
14	<i>г</i>	25	1,2	12	0,2	—
15	<i>д</i>	55	0,8	—	80	4
16	<i>е</i>	1,5	55	2	2	—
17	<i>ж</i>	55	1,2	8	12	—
18	<i>з</i>	1,5	60	0,4	12	—
19	<i>и</i>	6	30	6	10	—
20	<i>к</i>	40	0,8	—	40	0,8
21	<i>a</i>	1,2	7	40	3	—
22	<i>б</i>	30	0,7	80	3	—
23	<i>в</i>	20	1,75	45	8	—
24	<i>г</i>	30	1,4	14	0,3	—
25	<i>д</i>	60	0,6	—	60	3
26	<i>е</i>	2	60	3	3	—
27	<i>ж</i>	60	1,5	6	14	—
28	<i>з</i>	1,75	65	0,6	8	—
29	<i>и</i>	7	35	7	7	—
30	<i>к</i>	30	0,6	—	30	0,6
31	<i>a</i>	1,3	8	35	4	—
32	<i>б</i>	35	0,8	70	4	—
33	<i>в</i>	25	2	40	7	—
34	<i>г</i>	35	1,6	16	0,4	—
35	<i>д</i>	65	0,8	—	50	2,5
36	<i>е</i>	2,5	65	4	4	—
37	<i>ж</i>	65	1,75	4	16	—
38	<i>з</i>	2	70	0,8	10	—
39	<i>и</i>	8	40	8	8	—
40	<i>к</i>	20	0,5	—	20	0,5
41	<i>a</i>	1,4	9	30	5	—
42	<i>б</i>	40	0,9	65	5	—
43	<i>в</i>	30	2,25	35	6	—
44	<i>г</i>	40	2	18	0,5	—
45	<i>д</i>	70	1	—	40	2
46	<i>е</i>	3	70	5	5	—
47	<i>ж</i>	60	1,5	6	12	—
48	<i>з</i>	2,5	75	0,4	8	—
49	<i>и</i>	9	45	9	9	—
50	<i>к</i>	20	0,75	—	25	1

Таблица 7.2

Номер вариантов	Схема рис. 7.8	R_1 , кОм	R_2 , кОм	L , мГн	C_1 , нФ	C_2 , нФ
51	<i>a</i>	1,5	10	25	6	—
52	<i>б</i>	45	1	60	6	—
53	<i>в</i>	35	2,5	30	5	—
54	<i>г</i>	45	2,25	20	0,6	—
55	<i>д</i>	75	1,5	—	20	1
56	<i>е</i>	3,5	75	6	6	—
57	<i>ж</i>	55	1,25	8	14	—
58	<i>з</i>	3	80	0,5	10	—
59	<i>и</i>	10	50	10	10	—
60	<i>к</i>	30	1,5	—	50	2
61	<i>a</i>	1,6	11	20	7	—
62	<i>б</i>	50	1,2	55	7	—
63	<i>в</i>	40	2,75	25	4	—
64	<i>г</i>	50	2,5	22	0,7	—
65	<i>д</i>	80	2	—	40	2
66	<i>е</i>	4	80	7	7	—
67	<i>ж</i>	50	1	10	10	—
68	<i>з</i>	3,5	75	0,4	12	—
69	<i>и</i>	11	55	8	10	—
70	<i>к</i>	60	2	—	40	0,8
71	<i>a</i>	1,7	12	25	8	—
72	<i>б</i>	55	1,4	50	8	—
73	<i>в</i>	45	3	30	3	—
74	<i>г</i>	55	2,75	24	0,8	—
75	<i>д</i>	85	2,5	—	60	3
76	<i>е</i>	4,5	85	8	8	—
77	<i>ж</i>	45	1,2	12	12	—
78	<i>з</i>	3	60	0,5	8	—
79	<i>и</i>	12	50	6	12	—
80	<i>к</i>	80	4	—	50	2
81	<i>a</i>	1,8	13	30	9	—
82	<i>б</i>	60	1,6	45	9	—
83	<i>в</i>	50	3,5	35	2	—
84	<i>г</i>	60	3	26	0,5	—
85	<i>д</i>	75	3	—	80	4
86	<i>е</i>	5	90	9	9	—
87	<i>ж</i>	40	2	14	6	—
88	<i>з</i>	2,5	50	0,75	10	—
89	<i>и</i>	10	40	5	8	—
90	<i>к</i>	40	1	—	40	1
91	<i>a</i>	1,9	14	35	10	—
92	<i>б</i>	65	2	40	10	—
93	<i>в</i>	55	4	40	1	—
94	<i>г</i>	65	5	30	1	—
95	<i>д</i>	50	2	—	100	5
96	<i>е</i>	5,5	100	10	10	—
97	<i>ж</i>	45	1,5	12	12	—
98	<i>з</i>	2	40	0,6	8	—
99	<i>и</i>	14	60	4	10	—
100	<i>к</i>	50	2	—	50	1,75

Глава 8. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ОДИНОЧНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНТУРАХ

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ ПАССИВНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

8.1. В последовательном пассивном колебательном контуре, показанном на рис. 8.1, *a*, $r=20$ Ом, $L=100$ мкГн, $C=100$ пФ. Рассчитать резонансную частоту f_0 , характеристическое сопротивление ρ , добротность Q , относительную S_0 и абсолютную Π полосы пропускания.

Указание: изучите сначала с. 213—215 и 223—225 в [1].

8.2. В цепь, показанную на рис. 8.1, *a* и имеющую параметры, приведенные в задаче 8.1, последовательно с катушкой индуктивности включено резистивное сопротивление $R_{\text{посл}}=100$ Ом. Рассчитать f_0 , ρ , $Q_{\text{ц}}$, S_0 , Π .

Указание: изучите сначала с. 213—215 и 219—225 в [1].

8.3. В цепь, показанную на рис. 8.1, *a* и имеющую параметры, приведенные в задаче 8.1, параллельно конденсатору включено резистивное сопротивление $R_{\text{пар}}=5$ кОм. Рассчитать f_0 , ρ , $Q_{\text{ц}}$, S_0 , Π .

Указание: изучите сначала с. 213—219 и 221—225 в [1].

8.4. Рассчитать и построить на одном графике различными цветами кривые модулей входного сопротивления цепей, показанных на рис. 8.1, *a—в*, в диапазоне частот 1490...1690 кГц по числовым данным, приведенным в задачах 8.1, 8.2 и 8.3.

Указание: изучите сначала с. 218—220 в [1].

Решение. Рассчитаем резонансную частоту f_0 и добротность Q контура, показанного на рис. 8.1, *a*: $f_0=1/(2\pi\sqrt{LC})=1/(6,28\sqrt{100\cdot 10^{-6}\cdot 100\cdot 10^{-12}})=10^7/6,28=1,59\cdot 10^6$ Гц=1590 кГц; $Q=\sqrt{L/C}/R=\sqrt{\frac{100\cdot 10^{-6}}{100\cdot 10^{-12}}}/20=1000/20=50$.

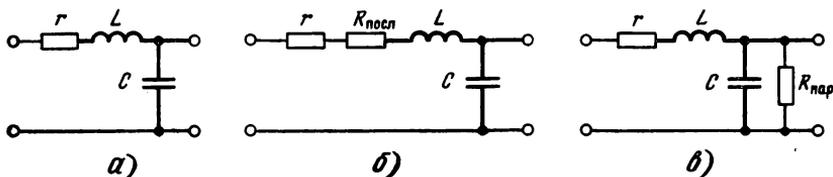


Рис. 8.1

Рассчитаем модули входного сопротивления цепи из выражения $Z_{вх} = R \sqrt{1 + \xi^2}$, причем обобщенная расстройка $\xi = 2\Delta f Q / f_0$, а абсолютная расстройка $\Delta f = f - f_0$, где f — частота, на которой определяется входное сопротивление, а f_0 — резонансная частота контура. По условию задачи входное сопротивление цепи следует определять в диапазоне 1490...1690 кГц, т. е. в пределах $f_0 \pm 100$ кГц. Поскольку в выражении $Z_{вх} = R \sqrt{1 + \xi^2}$ обобщенная расстройка ξ находится в квадрате, значения модуля $Z_{вх}$ не зависят от знака абсолютной Δf и обобщенной расстройки, поэтому можно рассчитать только одну ветвь характеристики, а вторую построить симметрично. Так как на резонансной частоте $f = f_0$, все расстройки (абсолютная Δf , относительная $\Delta f / f_0$ и обобщенная $2\Delta f Q / f_0$) равны нулю. Очевидно, что при этом входное сопротивление контура оказывается наименьшим, равным резистивному сопротивлению цепи R . По мере увеличения абсолютного значения расстроек модуль входного сопротивления увеличивается. Рассчитаем $Z_{вх}$ при изменении частоты f , если $r = 20$ Ом, $Q = 50$, результаты сведем в табл. 8.1. Обобщенная расстройка $\xi = \pm 2\Delta f Q / f_0 = \pm 2 \cdot 10 \cdot 50 / 1590 = \pm 0,623$, тогда $Z_{вх} = R \sqrt{1 + \xi^2} = 20 \sqrt{1 + 0,623^2} = 23,63$ Ом. Аналогично при $\Delta f = 20$ кГц, $\xi = 2\Delta f Q / f_0 = \pm 1,258$ $Z_{вх} = 32,14$ Ом. При $\Delta f = 100$ кГц, $\xi = \pm 6,29$ $Z_{вх} = 127,4$ Ом. Остальные промежуточные точки рекомендуется подсчитать учащимся самостоятельно.

В схеме, показанной на рис. 8.1, б, резистивное сопротивление цепи $R = r + R_{посл} = 20 + 100 = 120$ Ом, добротность цепи уменьшается до значения $Q = \sqrt{L/C} / R = 1000 / 120 = 8,33$. Следовательно, при $\Delta f = 0$, т. е. на частоте $f = 1590$ кГц, $\xi = 2\Delta f Q / f_0 = 0$, $Z_{вх} = R = 120$ Ом. При $\Delta f = 10$ кГц, т. е. на частотах 1600 и 1580 кГц, $\xi = 2 \cdot 10 \cdot 8,33 / 1590 = 0,105$, $Z_{вх} = 120,66$ Ом. При $\Delta f = 100$ кГц, т. е. на частотах 1690 и 1490 кГц, $\xi = 1,05$, $Z_{вх} = 174$ Ом. Остальные промежуточные значения рекомендуется подсчитать учащимся самостоятельно. Полученные результаты следует сводить в таблицы, аналогичные табл. 8.1.

Для определения входного сопротивления цепи, показанной на рис. 8.1, в, необходимо сопротивление, включенное параллельно конденсатору $R_{пар}$, заменить эквивалентным, включен-

Таблица 8.1

f , кГц	1590	1600 1580	1610 1570	...	1690 1490
$\Delta f / f_0$	0	$\pm 6,29 \cdot 10^{-3}$	$\pm 1,26 \cdot 10^{-2}$...	$\pm 6,29 \cdot 10^{-2}$
ξ	0	$\pm 0,623$	$\pm 1,258$...	$\pm 6,29$
$Z_{вх}$, Ом	20	23,63	32,14	...	127,4

ным последовательно с конденсатором $R_{\text{посл}}$, т. е. заменить схему рис. 8.1, в схемой 8.1, б. Если в схеме рис. 8.1, в выполняется соотношение $R_{\text{пар}} \gg X_C$ (как показано в задаче 7.12, в RX -цепях знаки \gg и \ll можно ставить в тех случаях, когда R и X отличаются друг от друга хотя бы в 3 раза), то пересчет можно производить по упрощенным формулам (8.12), приведенным на с. 216 в [1]. Так как характеристическим называется сопротивление каждого реактивного элемента на резонансной частоте, то $X_{C_0} = 1/\omega_0 C = \sqrt{L/C} = 1$ кОм, а сопротивление $R_{\text{пар}} = 5$ кОм, следовательно, условие $R_{\text{пар}} \gg X_{C_0}$ в данной задаче выполняется. В этом случае $C_{\text{пар}} \approx C_{\text{посл}}$, т. е. значение емкости остается практически неизменным, а $R_{\text{посл}} = \rho^2/R_{\text{пар}} = (1000)^2/5000 = 200$ Ом. Таким образом, схема рис. 8.1, в приобретает вид схемы рис. 8.1, б, причем L и C в обеих схемах остаются практически неизменными, а резистивное сопротивление R становится равным $20 + 200 = 220$ Ом, при этом $Q_{\text{ц}} = \rho/R = 1000/220 = 4,55$. Рассчитаем $Z_{\text{вх}}$ получившейся цепи при $\Delta f = 10$ кГц. В этом случае $\xi = 2\Delta f Q/f_0 = 2 \cdot 10 \cdot 4,55/1590 = 0,0572$, $Z_{\text{вх}} = R \sqrt{1 + \xi^2} = 220 \sqrt{1 + (0,0572)^2} = 220,36 \approx 220$ Ом. При $\Delta f = 100$ кГц $\xi = 0,572$, $Z_{\text{вх}} = 220 \sqrt{1 + (0,572)^2} = 253,44$ Ом. Промежуточные точки рекомендуется утачиваться рассчитать самостоятельно. Из полученных результатов видно, что чем больше добротность цепи, тем сильнее изменяется модуль входного сопротивления пассивного последовательного контура при одинаковых расстройках. Действительно, при одной и той же абсолютной расстройке в 100 кГц входное сопротивление контура при $Q = 50$ изменялось в $127,4/20 = 6,37$ раза, при $Q = 8,33$ — в $174/120 = 1,45$ раза, а при $Q = 4,55$ — в $253/220 = 1,15$ раза. Кривые $Z_{\text{вх}} = f(f)$ для разобранных случаев приведены на рис. 8.2, а.

8.5. Для схем, показанных на рис. 8.1, а—в, по исходным данным, имеющимся в задачах 8.1—8.3, рассчитать и постро-

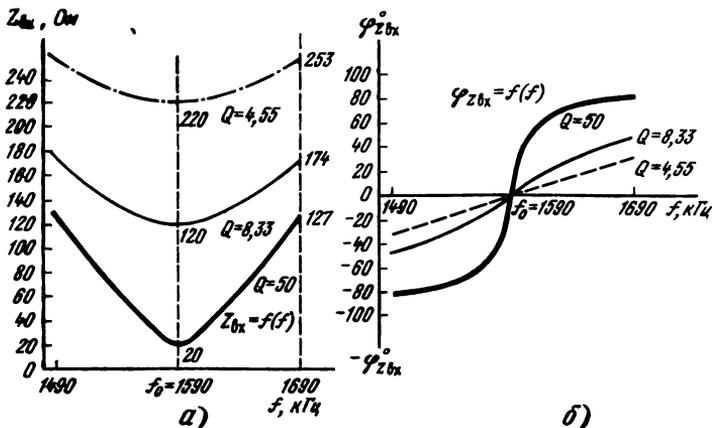


Рис. 8.2

ить кривые модулей входного тока в цепи $I=f(f)$, если входное напряжение $U_1=10$ В.

Указание: изучите сначала с. 219, 220 в [1]. Используйте результаты, полученные в задаче 8.4.

Решение. Модуль входного тока в пассивной последовательной колебательной цепи рассчитывается из выражения $I=I_0/\sqrt{1+\xi^2}$, где $I_0=U_1/R$, — ток в цепи на резонансной частоте (т. е. при нулевой расстройке). Значения обобщенных расстроек ξ для цепей, показанных на схемах 8.1, а—в, получены в задаче 8.4. Рассчитаем ток при резонансе в схеме рис. 8.1, а: $I_0=U_1/R=10/20=0,5$ А=500 мА. При расстройке на ± 10 кГц $\xi=0,623$, следовательно, $I=I_0/\sqrt{1+\xi^2}=500/\sqrt{1+(0,623)^2}=424,4$ мА. При $\Delta f=\pm 20$ кГц $\xi=1,258$, $I=311$ мА; при $\Delta f=\pm 100$ кГц $\xi=6,29$, $I=78,5$ мА.

Аналогично в схеме рис. 8.1, б $I_0=U_1/R=10/20=83,3$ мА. Так как добротность Q в этом случае меньше, чем в предыдущем (8,33 вместо 50), то при той же абсолютной расстройке $\Delta f=10$ кГц обобщенная расстройка уменьшается и становится равной только 0,105, а модуль тока $I=83,5/\sqrt{1+(0,105)^2}=83$ мА; при $\Delta f=100$ кГц $\xi=1,05$, $I=57,6$ мА.

В схеме рис. 8.1, в $I_0=U_1/R=10/220=45$ мА. При $\Delta f=10$ кГц $\xi=0,0572$, $I=83,25$ мА, при $\Delta f=100$ кГц $\xi=0,572$, $I=39,1$ мА. Все промежуточные точки, сводные таблицы результатов и кривые $I=f(f)$ при различных Q учащимся рекомендуется рассчитать самостоятельно.

8.6. Для схем, показанных на рис. 8.1, по результатам, полученным в задаче 8.4, рассчитать и построить кривые входных фазочастотных характеристик.

Указание: изучите сначала с. 219, 220 в [1] и разберите задачу 8.4.

Решение. В последовательном пассивном колебательном контуре входная фазочастотная характеристика (т. е. кривая, показывающая угол между входным напряжением и входным током при напряжении гармонической формы) рассчитывается по формуле $\varphi_{\text{вх}}=\arctg \xi$. Зная резонансную частоту f_0 , абсолютную расстройку Δf и добротность Q , можно рассчитать значения обобщенных расстроек ξ , а следовательно, и фазных углов $\varphi_{\text{вх}}$. При расчете ФЧХ следует иметь в виду, что если частота f меньше резонансной частоты f_0 , то абсолютная расстройка Δf , обобщенная расстройка ξ , а следовательно, и фазный угол $\varphi_{\text{вх}}$ оказываются отрицательными, а при $f > f_0$ — соответственно положительными.

В схеме рис. 8.1, а при $f=f_0$ $\Delta f=0$, $\xi=0$, $\varphi_{\text{вх}}=\arctg 0=0^\circ$; при $f=\pm 10$ кГц $\xi=\pm 0,623$, $\varphi_{\text{вх}}=\pm \arctg 0,623=\pm 31,9^\circ$; при $\Delta f=\pm 20$ кГц $\xi=\pm 1,258$, $\varphi_{\text{вх}}=\pm 51,5^\circ$; при $\Delta f=\pm 100$ кГц $\xi=\pm 6,29$, $\varphi_{\text{вх}}=\pm 81^\circ$.

В схеме рис. 8.1, б при $\Delta f = \pm 10$ кГц $\xi = \pm 0,105$, $\varphi_{z_{\text{вх}}} = \pm 6^\circ$; при $\Delta f = \pm 100$ кГц $\xi = \pm 1,05$, $\varphi_{z_{\text{вх}}} = \pm 46,4^\circ$.

В схеме рис. 8.1, в при $\Delta f = \pm 10$ кГц $\xi = \pm 0,0572$, $\varphi_{z_{\text{вх}}} = \pm 3,27^\circ$; при $\Delta f = \pm 100$ кГц $\xi = \pm 0,572$, $\varphi_{z_{\text{вх}}} = \pm 29,8^\circ$. Таким образом, чем больше добротность цепи, тем круче идут фазочастотные характеристики (рис. 8.2, б).

8.7. Для схем, показанных на рис. 8.1, а—в, и по исходным данным, приведенным в задачах 8.1—8.3, рассчитать граничные частоты $f_{\text{гр}}$.

Указание: изучите сначала с. 223—227 в [1].

Решение. Граничными называются частоты, на которых ток в контуре уменьшается в $\sqrt{2}$ по сравнению с током на резонансной частоте. Практически также в $\sqrt{2}$ раз уменьшается коэффициент передачи по напряжению. Часто граничные частоты определяют как частоты, ослабление напряжения или тока на которых составляет 3 дБ (читается «три децибела»). В одиночных контурах (в отличие от связанных, которые разбираются ниже, в гл. 9) входной фазовый угол $\varphi_{z_{\text{вх}}}$ составляет $\pm 45^\circ$, а обобщенная расстройка $\xi_{\text{гр}} = \pm 1$. Таким образом, из выражения $\xi_{\text{гр}} = 2\Delta f_{\text{гр}}Q/f_0$ можно найти $\Delta f_{\text{гр}}$, зная $\Delta f_{\text{гр}}$ и f_0 , найти граничную частоту $f_{\text{гр}}$. (Ниже в данном примере показывается еще один способ определения граничной частоты.) Для схемы рис. 8.1, а $\Delta f_{\text{гр}} = f_0 \xi_{\text{гр}} / 2Q = 1 \cdot 1590 / 2 \cdot 50 = 15,9$ кГц. Так как $\Delta f = f - f_0$, то $f_{\text{гр}} = f_0 \mp \Delta f_{\text{гр}} = 1590 \pm 15,9$ кГц, откуда $f_{\text{гр1}} = 1574,1$ кГц, а $f_{\text{гр2}} = 1605,9$ кГц. Частоту $f_{\text{гр1}}$ называют нижней граничной частотой и для краткости часто обозначают f_1 , а частоту $f_{\text{гр2}}$ — верхней граничной частотой f_2 .

Для схемы рис. 8.1, б $\Delta f_{\text{гр}} = 1590 \cdot 1/2 \cdot 8,33 = 95$ кГц, следовательно, $f_1 = 1590 - 95 = 1495$ кГц, а $f_2 = 1685$ кГц.

Для схемы рис. 8.1, в $\Delta f_{\text{гр}} = 1590 \cdot 1/2 \cdot 4,55 = 175$ кГц, $f_1 = 1590 - 175 = 1415$ кГц, $f_2 = 1590 + 175 = 1765$ кГц.

Диапазон между граничными частотами называется абсолютной полосой пропускания $\Pi = f_2 - f_1$. Чем выше добротность цепи, тем уже полоса пропускания. Действительно, в первой схеме $\Pi = f_2 - f_1 = 1605,9 - 1574,1 = 31,8$ кГц, во второй схеме $\Pi = 1685 - 1495 = 190$ кГц, а в третьей — $\Pi = 1765 - 1415 = 350$ кГц (рис. 8.3, а). Граничные частоты можно определять и по-другому: не из соображения, что $f_{\text{гр}} = \pm 1$, а из определения $\Pi = f_0/Q$. Так как $\Delta f_{\text{гр}} = \Pi/2$, то $f_1 = f_0 - f_0/2Q$, а $f_2 = f_0 + f_0/2Q$ (рис. 8.3, б).

Произведем проверку. В схеме рис. 8.1, а $f_1 = 1590 - 1590/2 \times 50 = 1590 - 15,9 = 1574,1$ кГц, $f_2 = 1590 + 1590/2 \cdot 50 = 1590 + 15,9 = 1605,9$ кГц. Расчеты для схем (рис. 8.1, б и в) рекомендуется учащимся выполнить самостоятельно.

8.8. Рассчитать и построить на одном графике различными цветами кривые модулей передаточных функций $H = f(f)$ цепей, показанных на рис. 8.1, а—в, в диапазоне частот 1490...1690 кГц

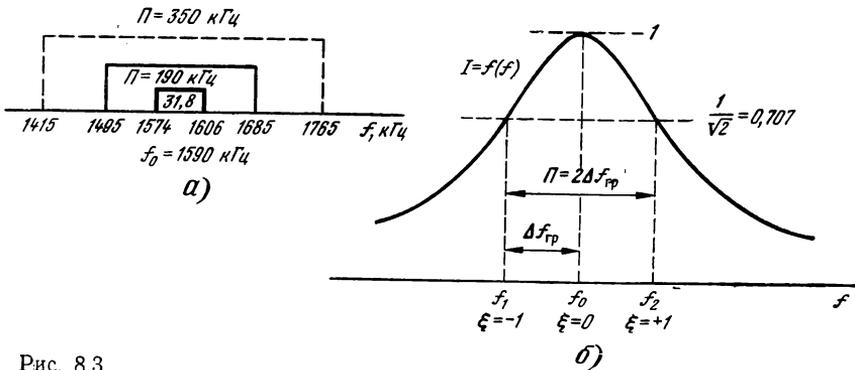


Рис. 8.3

по числовым данным, приведенным в задачах 8.1—8.3, и расчетам, произведенным в задаче 8.4.

Указание: изучите сначала с. 223—225 в [1] и разберите задачу 8.4.

Решение. Модуль передаточной функции последовательной пассивной цепи H при малых расстройках рассчитывается по приближенной формуле $H = Q / \sqrt{1 + \xi^2}$, где Q — добротность цепи, ξ — обобщенная расстройка. В схеме рис. 8.1, а на резонансной частоте (т. е. при $\xi = 0$) $H = H_0 = Q = 50$; при $\Delta f = \pm 10$ кГц (т. е. частотах 1580 и 1600 кГц) $\xi = \pm 0,623$, следовательно, $H = 50 / \sqrt{1 + (0,623)^2} = 42,44$; при $\Delta f = \pm 20$ кГц (т. е. на частотах 1570 и 1610 кГц) $\xi = 1,258$, $H = 31,1$; при $\Delta f = \pm 100$ кГц (т. е. на частотах 1490 и 1690 кГц) $\xi = \pm 6,29$, $H = 7,85$.

Аналогично в схеме рис. 8.1, б на резонансной частоте $H = Q = 8,33$ при $\Delta f = \pm 10$ кГц $\xi = \pm 0,105$, $H = \pm 8,28$; при $\Delta f = \pm 100$ кГц $\xi = \pm 1,65$, $H = 5,74$.

В схеме рис. 8.1, в при $\xi = 0$ $H = Q = 4,55$; при $\Delta f = \pm 10$ кГц $\xi = \pm 0,0572$, $H = 4,54$; при $\Delta f = \pm 100$ кГц $\xi = \pm 0,572$, $H = 3,95$.

Во всех случаях $U_2 = H U_1$ учащимся рекомендуется просчитать промежуточные точки для всех схем, свести результаты в таблицы, аналогичные табл. 8.1, и построить кривые $H = f(f)$ для различных значений Q .

8.9. Рассчитайте передаточные фазочастотные характеристики для цепей, рассмотренных в задаче 8.8.

Указание: изучите сначала с. 221, 222 в [1] и разберите задачи 8.4 и 8.8.

Решение. В последовательном пассивном колебательном контуре передаточная фазочастотная характеристика определяется из выражения $\varphi_H = -(\arctg \xi + 90^\circ)$. Рассчитаем значения φ_H при некоторых расстройках. В схеме 8.1, а на резонансной частоте (т. е. при $\xi = 0$) $\varphi_H = -90^\circ$. При $\Delta f = -10$ кГц $\xi = -0,623$, $\varphi_H = -(\arctg \xi + 90^\circ) = -(-\arctg 0,623 + 90^\circ) =$

$= -(-32^\circ + 90^\circ) = -58^\circ$; при $\Delta f = +10$ кГц $\varphi_H = -(32^\circ + 90^\circ) = -122^\circ$.

Аналогично при $\Delta f = -20$ кГц $\xi = -1,258$, $\varphi_H = -(-\arctg 1,258 + 90^\circ) = -(-51,5^\circ + 90^\circ) = -38,5^\circ$, при $\Delta f = +20$ кГц $\varphi_H = -141,5^\circ$; при $\Delta f = -100$ кГц $\xi = -6,29$, $\varphi_H = -(-\arctg 6,29 + 90^\circ) = -(-81^\circ + 90^\circ) = -9^\circ$; при $\Delta f = 100$ кГц $\varphi_H = -171^\circ$.

Для схемы 8.1, б при $\Delta f = 0$ $\varphi_H = -90^\circ$; при $\Delta f = -10$ кГц $\xi = -0,105$, $\varphi_H = -(-\arctg 0,105 + 90^\circ) = -84^\circ$; при $\Delta f = 10$ кГц $\varphi_H = -96^\circ$; при $\Delta f = -100$ кГц $\xi = -1,05$ $\varphi_H = -(-\arctg 1,05 + 90^\circ) = -(-46,4^\circ + 90^\circ) = -43,6^\circ$; при $\Delta f = 100$ кГц $\varphi_H = -136,4^\circ$.

Для схемы 8.1, в при $\Delta f = 0$ $\xi = 0$, $\varphi_H = -90^\circ$; при $\Delta f = -10$ кГц $\xi = -0,0572$, $\varphi_H = -(-\arctg 0,0572 + 90^\circ) = -(-3,3^\circ + 90^\circ) = -86,7^\circ$; при $\Delta f = 10$ кГц $\varphi_H = -93,3^\circ$; при $\Delta f = -100$ кГц $\xi = -0,572$, $\varphi_H = -(-30^\circ + 90^\circ) = -60^\circ$; при $\Delta f = 100$ кГц $\varphi_H = -120^\circ$.

Учащимся рекомендуется просчитать промежуточные точки для всех схем, свести результаты в таблицу, построить на одном графике различными цветами кривые $\varphi_H = f(f)$ и убедиться, что чем больше добротность контура, тем круче идут фазочастотные характеристики, а чем меньше — тем положе.

8.10. Рассчитать избирательность в децибелах для цепей, показанных на рис. 8.1, а и б, в диапазоне 1490...1690 кГц. Определить частоты, на которых для каждой схемы обеспечиваются избирательности: а) 14 дБ; б) 20 дБ.

Указание: изучите с. 225—227 в [1], задачи 8.4 и 8.8.

Решение. В общем случае избирательность B , выраженная в дБ, определяется из выражения B (дБ) $= 20 \lg(U_{c_0}/U_c)$, где U_{c_0} — напряжение на выходе цепи при резонансной частоте, U_c — напряжение на тех же зажимах при частоте, на которой избирательность контура определяется (часто говорят иначе: «напряжение на выходе при расстройке»). В последовательной пассивной цепи $U_{c_0}/U_c = \sqrt{1 + \xi^2}$, поэтому в этом случае B (дБ) $= 20 \lg \sqrt{1 + \xi^2}$. В пределах полосы пропускания $B \leq 3$ дБ, на границе полосы пропускания $B = 3$ дБ, а за ее пределами $B > 3$ дБ. Избирательность в децибелах можно определять также из выражения B (дБ) $= 20 \lg(H_0/H)$, где H_0 — коэффициент передачи цепи на резонансной частоте, а H — на данной частоте.

Рассчитаем избирательность цепи, показанной на рис. 8.1, а, на различных частотах. При $\Delta f = 10$ кГц, т. е. относительной расстройке $\Delta f/f_0 = 10/1590 = 6,29 \cdot 10^{-3}$, и $Q = 50$ обобщенная расстройка $\xi = 0,623$. Так как получившееся значение $\xi < 1$, то частоты $f = f_0 - \Delta f = 1590 - 10 = 1580$ кГц $f = f_0 + \Delta f = 1590 + 10 = 1600$ кГц находятся внутри полосы пропускания, следовательно, избирательность на этих частотах в данном случае

должна оказаться менее 3 дБ, $B=20\lg \sqrt{1+(0,623)^2} = 20\lg \sqrt{1,388} = 20\lg 1,178 = 20 \cdot 0,715 = 1,42$ дБ, что действительно менее 3 дБ. При $\Delta f=20$ кГц, т. е. при $\Delta f/f_0=1,258 \cdot 10^{-2}$, и $Q=50$ $\xi=1,258$. Очевидно, что частоты $f=(1590 \pm 20)$ кГц находятся за пределами полосы пропускания и избирательность на этих частотах должна оказаться более 3 дБ: $B=20\lg \sqrt{1+(1,258)^2} = 20\lg \sqrt{2,58} = 20\lg 1,6 = 20 \cdot 0,204 = 4,1$ дБ. При $\Delta f=100$ кГц, т. е. при $\Delta f/f_0=100/1590=0,0629$, и $Q=50$ $\xi=6,29$, $B=20\lg \sqrt{1+(6,29)^2} = 20\lg 6,37 = 20 \cdot 0,84 = 16$ дБ.

Определим частоты, на которых при добротности контура, равной 50, избирательность составляет 14 дБ и 20 дБ: $14 = 20\lg \sqrt{1+\xi^2} = 20\lg \sqrt{1+(2\Delta f Q/f_0)^2}$ или $\lg \sqrt{1+(2\Delta f Q/f_0)^2} = 14/20 = 0,7$. Потенцируя обе части равенства данного выражения, получим $\sqrt{1+(2\Delta f Q/f_0)^2} = 10^{0,7} = 5$. Возведем обе части равенства в квадрат и найдем значение Δf : $1+(2\Delta f Q/f_0)^2 = 25$ или $4(\Delta f)^2 Q^2/f_0^2 = 24$, т. е. $(\Delta f)^2 = 24 \cdot f_0^2/4Q^2$, откуда $\Delta f = (f_0 \sqrt{24}/2Q) = 1590 \cdot 4,9/2 \cdot 50 = 78$ кГц.

Аналогично при $B=20$ дБ $\lg \sqrt{1+\xi^2} = 20/20 = 1$, тогда $\sqrt{1+\xi^2} = 10^1 = 10$ или $1+\xi^2 = 100$, $\xi = \sqrt{99} = 9,95$, т. е. $2\Delta f Q/f_0 = 9,95$, откуда $\Delta f = 9,95 f_0/2Q = 9,95 \cdot 1590/2 \cdot 50 = 158$ кГц. Таким образом, чтобы контур с добротностью 50 обеспечил избирательность в 14 дБ (т. е. в 5 раз, поскольку $14 = 20\lg 5$), необходимо иметь относительную расстройку $\Delta f/f_0 = 78/1590 = 0,049$, т. е. абсолютную расстройку Δf в $1590/78 = 20,4$ раза меньше резонансной частоты. Для получения избирательности в 20 дБ при той же добротности абсолютная расстройка должна быть в $1590/158 = 10$ раз меньше резонансной частоты. Следовательно, если ко входу контура с $Q=50$, настроенным на частоту 1590 кГц, подводятся два сигнала с одинаковыми амплитудами, работающими на частотах 1590 и 1512 (или 1668) кГц, то напряжение на выходе контура от сигнала с частотой 1512 (или 1668) кГц на 14 дБ (т. е. в 5 раз) меньше, чем от сигнала с частотой 1590 кГц, на которую контур настроен. Чтобы ослабить сигнал на 20 дБ (т. е. в 10 раз, поскольку $20\lg 10 = 20$), необходимо сигнал второго источника отодвинуть на 158 кГц от сигнала первого источника, работающего на резонансной частоте контура. В схеме рис. 8.1, б добротность всего 8,33, резонансная кривая при такой добротности идет весьма полого и избирательность оказывается малой. Для получения заданных значений избирательности частоту второго источника следует существенно удалить от резонансной частоты. Избирательности для этого контура при абсолютных расстройках 10 и 100 кГц, т. е. при $\xi = 0,105$ и $1,05$; $B_1 = 20\lg \sqrt{1+(0,105)^2} = 0,0476$ дБ, $B_2 = 20\lg \sqrt{1+(1,05)^2} = 3,23$ дБ.

Полоса пропускания при такой добротности $2 \Delta f_{гр} = 200$ кГц. Определим Δf для получения избирательности 14 дБ: $\sqrt{1+\xi^2} = 10^{0,7} = 5$, откуда $\xi = \sqrt{24} = 4,9$ или $\Delta f = 4,9 f_0 / 2Q = 4,9 \cdot 1590 / 2 \cdot 8,33 = 468$ кГц, т. е. граничная частота оказывается всего в 3,4 раза меньше резонансной.

Для получения $B = 20$ дБ необходимо найти Δf из выражения $\sqrt{1+\xi^2} = 10$ или $\xi = \sqrt{99} = 9,95$, откуда $\Delta f = 9,95 \times 1590 / 2 \cdot 8,33 = 950$ кГц. Из сравнения полученных результатов видно, что одиночные контуры обеспечивают сравнительно невысокую избирательность, поэтому в реальных устройствах для получения лучших избирательностей широко используются связанные системы, которые разбираются в следующей главе.

8.11. Определить добротность, которую должен иметь контур, показанный на рис. 8.1, а, чтобы при расстройке на 79 кГц избирательность составила 20 дБ.

Указание: разберите сначала задачу 8.10.

8.12. Передатчик работает на волне $\lambda = 1500$ м. Определить избирательность по соседнему каналу (т. е. при расстройке на 10 кГц), если добротность контура равна 80.

Указание: изучите сначала с. 219, 220 в [1].

8.13. В схеме рис. 8.1, а на некоторой частоте $X = X_L - X_C = 2R$ определить $\underline{Z}_{вх}$, $\Phi_{вх}$, $I_{вх}$ цепи, если напряжение на входе контура U .

Указание: изучите сначала с. 219, 220 в [1].

8.14. Каким должно быть в схеме 8.1, а отношение $\Delta f / \Pi$, при котором $I = 0,5 I_0$.

Указание: изучите сначала с. 220 и 223 — 225 в [1].

Решение. Так как $I = I_0 / \sqrt{1+\xi^2}$, то $0,5 I_0 = I_0 / \sqrt{1+\xi^2}$, откуда $\sqrt{1+\xi^2} = 1/0,5 = 2$ или $1+\xi^2 = 4$, т. е. $\xi = \sqrt{3} = 1,73$; $\xi = 2\Delta f Q / f_0 = 2\Delta f / \Pi$, следовательно, $\Delta f / \Pi = \xi / 2 = 1,73 / 2 = 0,865$.

8.15. В схеме рис. 8.1, а определить отношение I/I_0 при $\Delta f = 1,5 \Pi$.

Указание: разберите сначала задачу 8.14 и учтите, что абсолютная полоса пропускания $\Pi = f_0 / Q$.

8.16. Запишите выражения мгновенных значений тока и напряжений на конденсаторе в схеме рис. 8.1, а на резонансной и граничной частотах, если действующее значение входного напряжения U , а форма напряжения — синусоидальная.

Решение. Поскольку напряжение на входе контура имеет синусоидальную форму, мгновенные значения приложенного ко входу напряжения $u = U_m \sin \omega t$, где $U_m = 1,41 U$ — максимальное значение входного напряжения; ω — угловая частота, равная $2\pi/T$, причем T — период приложенного гармонического напряжения. По условию задачи цепь состоит из линейных элементов, поэтому никаких иных частот, кроме частоты ω , в

контуре не образуется, а это означает, что все отклики (т. е. ток в цепи и напряжения на любых элементах цепи) имеют также гармоническую форму и соответственно описываются выражениями вида $u = U_m \sin(\omega t \pm \varphi_U)$ или $i = I_m \sin(\omega t \pm \varphi_I)$, где φ_U и φ_I — фазовые углы между входным напряжением и данным напряжением или током. На резонансной частоте входное сопротивление цепи чисто резистивное, поэтому ток в цепи совпадает по фазе с приложенным напряжением. Таким образом, $i = I_m \sin \omega t = (U_m/R) \sin \omega t$. Но при резонансе частота приложенного напряжения ω равна резонансной частоте контура $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Следовательно, $i = (U_m/R) \sin(t/\sqrt{LC})$.

Напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока на 90° и определяется из выражения $u_C = U_{mC} \sin(\omega t - 90^\circ) = (I_m/\omega C) \sin(\omega t - 90^\circ) = (U_m \sqrt{LC}/RC) \sin(\omega t - 90^\circ) = (U_m/R) \times (\sqrt{L/C}) \sin(\omega t - 90^\circ) = (U_m \rho/R) \sin(\omega t - 90^\circ) = U_m Q \sin(\omega t - 90^\circ)$. Заметим, что последнее выражение можно было записать сразу, учитывая, что сопротивление емкости на резонансной частоте (а практически и вблизи ее) есть характеристическое сопротивление контура ρ . На граничных частотах ω_1 и ω_2 , равных $\omega_0 \mp \omega_0/2Q$, модули тока и напряжения на конденсаторе уменьшаются в $\sqrt{2}$ по сравнению с аналогичными значениями на резонансной частоте, фаза тока сдвигается на $\pm 45^\circ$ относительно фазы входного напряжения, фаза напряжения на емкости отстает на 90° от фазы тока: $i = (U_m/R\sqrt{2}) \times \sin(\omega t \mp 45^\circ)$, $u_C = (U_m \rho/R\sqrt{2}) \sin(\omega_{гр} t \mp 45^\circ - 90^\circ) = 0,707 U_m Q \sin(\omega_{гр} t \mp 45^\circ - 90^\circ)$. Частоту $\omega_{гр}$ можно выразить через параметры контура: $\omega_{гр}$ (или $\omega_{1,2}$ — это одно и то же) $= \omega_0 (1 \pm 1/2Q) = (1/\sqrt{LC}) (1 \pm 0,5R\sqrt{C/L})$.

8.17. Изменится ли и если да, то во сколько раз, абсолютная полоса пропускания контура П, если уменьшить в 2 раза: а) индуктивность контура L ; б) емкость C ; в) резистивное сопротивление R ?

Указание: изучите сначала с. 223—225 в [1].

8.18. Во сколько раз мощность, выделяемая в контуре на граничной частоте, отличается от мощности на резонансной частоте?

Указание: разберите сначала задачу 8.16.

8.19. В схеме 8.1, а выберите значения R , L и C так, чтобы $f_0 = 5$ кГц, а $Q = 50$.

Решение. Так как для расчета резонансной частоты f_0 и добротности Q используются две формулы:

$$f_0 = 1/2\pi \sqrt{LC}, \quad (8.1)$$

$$Q = \sqrt{L/C}/R, \quad (8.2)$$

а элементов в цепи три (R , L и C), то значением одного параметра следует задаваться, исходя из конструктивных или каких-либо иных соображений. На практике чаще всего задаются значением резистивного сопротивления R , выбирая его в разумных пределах, например 20...50 Ом. Выберем $R=20$ Ом. Значения L и C после этого определяются однозначно. В соответствии с (8.2) $Q^2=L/R^2C$, откуда

$$C=L/Q^2R^2. \quad (8.3)$$

Подставив полученное выражение в (8.1), получим $f_0=1/(2\pi\sqrt{L^2/Q^2R^2})=QR/2\pi L$ или $L=QR/2\pi f_0$. Подставим значение L в (8.3), тогда $C=QR/Q^2R^22\pi f_0=1/2\pi f_0QR$. При заданных числовых значениях $L=50\cdot 20/6,28\cdot 5\cdot 10^3=31,85$ мГн; $C=1/(6,28\cdot 5\cdot 10^3\cdot 5\cdot 20)=31,85$ нФ.

Произведем проверку:

$$f_0=1/2\pi\sqrt{LC}=1/(6,28\sqrt{31,85\cdot 10^{-3}\cdot 31,85\cdot 10^{-9}})=5\text{ кГц};$$

$$Q=\sqrt{L/C}/R=\sqrt{31,85\cdot 10^{-3}/31,85\cdot 10^{-9}}/20=50.$$

Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

8.20. В схеме рис. 8.1, а определить параметры всех элементов, если $f_0=100$ кГц, $Q=20$.

Указание: разберите сначала задачу 8.19.

8.21. Найти резонансную частоту контура f_0 , если при изменении емкости $C=100$ пФ на $\Delta C=10$ пФ контур расстраивается на $\Delta f=55$ кГц.

Решение. Оказываются два условия: при индуктивности L и емкости $C=100$ пФ получается некоторая резонансная частота f_0 , а при той же индуктивности, но увеличении емкости на 10 пФ резонансная частота уменьшается на 55 кГц. Получаются уравнения

$$f_0=1/2\pi\sqrt{L\cdot 100\cdot 10^{-12}}; \quad (8.4)$$

$$f_0-55\cdot 10^3=1/\sqrt{L\cdot 110\cdot 10^{-12}}. \quad (8.5)$$

Выражение для $\sqrt{L}=15,9\cdot 10^3/f_0$, полученное из (8.4), подставим в (8.5): $f_0-55\cdot 10^3=10^6\cdot f_0/(2\pi\cdot 10,49\cdot 15,9\cdot 10^3)=f_0/1,049$, т. е. $1,049f_0-57,68\cdot 10^3=f_0$ или $0,049f_0=57,68\cdot 10^3$, откуда $f_0=1177$ кГц. Найдем $L=(15,9\cdot 10^3)^2/f_0^2=252,8\cdot 10^6/(1,177)^2\cdot 10^{12}=183$ мкГн.

Произведем проверки: $f_0=1/2\pi\sqrt{LC}=1/6,28\sqrt{183\cdot 10^{-6}\cdot 100\cdot 10^{-12}}=1155$ кГц. При $C=100+10=110$ пФ $f_0=1/2\pi\sqrt{183\cdot 10^{-6}\cdot 110\cdot 10^{-12}}=1100$ кГц. Проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

8.22. Найти резонансную частоту контура, если при изменении значения индуктивности на $\Delta L = 44$ мкГн резонансная частота изменяется на $\Delta f = 263$ кГц.

Указание: разберите сначала задачу 8.21.

8.23. Определите коэффициент перекрытия контура (т. е. найти $f_{0 \max}/f_{0 \min}$), если емкость контура изменяется от значения $C_1 = 25$ пФ до значения $C_2 = 400$ нФ.

Указание: изучите сначала с. 213, 214 в [1].

АКТИВНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

8.24. Нарисуйте схему цепи, определите ее резонансную частоту f_0 и добротность Q_f , если передаточная функция описывается выражениями

$$а) \underline{H} = \frac{j2 \cdot 10^4 \omega}{-\omega^2 + j2 \cdot 10^4 \omega + 10^{12}}; \quad б) \underline{H} = \frac{10^{12}}{-\omega^2 + j2 \cdot 10^4 \omega + 10^{12}}.$$

Указание: изучите сначала с. 231—233 в [1].

8.25. Нарисуйте электрическую схему активной цепи (ARC-цепи), обладающей избирательными свойствами, и ее эквивалентную схему. Каким образом определяются резонансная частота f_0 , добротность Q и абсолютная полоса пропускания Π такой цепи?

Указание: изучите сначала с. 233—236 в [1].

8.26. Запишите в общем виде выражение передаточной амплитудно-частотной характеристики активного контура ($H = f(\omega)$). Каково значение коэффициента передачи этой цепи на резонансной частоте?

Указание: изучите сначала с. 233—236 в [1].

8.27. Запишите в общем виде выражение передаточной фазочастотной характеристики ($\varphi_H = f(\omega)$) для активного контура. Каково значение φ_H на резонансной частоте?

Указание: изучите сначала с. 233—236 в [1].

8.28. Чему равно практически входное сопротивление активного контура?

Указание: изучите сначала с. 233—236 в [1].

8.29. Определите значения сопротивлений R_2 и R_3 активного контура, в котором резонансная частота $f_0 = 31,8$ кГц, $Q = 10$, если $C = 1$ нФ.

Указание: изучите сначала с. 233—236 в [1].

Решение. В активном контуре, показанном на рис. 8.18 в [1],

$$f_0 = 1/(2\pi C \sqrt{R_2 R_3}); \tag{8.6}$$

$$Q = 0,5 \sqrt{R_2/R_3}. \tag{8.7}$$

Возведем обе части равенства (8.7) в квадрат, получим выражение для R_3 и подставим его в (8.6), т. е. $Q^2 = 0,25R_2/R_3$ или $R_3 = 0,25R_2/Q^2$, $f_0 = 1/(2\pi C\sqrt{0,25R_2^2/Q^2})$, откуда $R_2 = Q/\pi f_0 C = 10/(3,14 \cdot 31,8 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-9}) = 10^5 \text{ Ом} = 100 \text{ кОм}$, $R_3 = 0,25R_2/Q^2 = 0,25 \cdot 10^5/10^2 = 250 \text{ Ом} = 0,25 \text{ кОм}$.

Произведем проверки: $f_0 = 1/2\pi C\sqrt{R_2R_3} = 1/6,28 \times 10^{-9}\sqrt{250 \cdot 10^9} = 1/(6,28 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^3) = 31,8 \text{ кГц}$; $Q = 0,5 \times \sqrt{R_2/R_3} = 0,5\sqrt{10^5/250} = 10$. Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПАССИВНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

8.30. В схеме, показанной на рис. 8.4, а, выразить ток I_0 через токи в ветвях I_{10} и I_{20} , если $f = f_0$.

Указание: изучите сначала с. 243, 244 в [1].

Решение. На резонансной частоте $I_0 = U/Z_{\text{вх}(0)} = U/Q\rho$; $I_{20} = U/X_{C0} = U/\rho$, $I_{20}/I_0 = UQ\rho/\rho U = Q$; $I_{10} = I_0\sqrt{Q^2+1}$. При $Q \gg 1$ $I_{10} = I_{20} = I_0Q$. Таким образом, на резонансной частоте ток I_1 в ветви в Q раз больше тока в неразветвленной части цепи.

8.31. На какой частоте в схеме (рис. 8.4, а): а) $\varphi_{z_{\text{вх}}} = +45^\circ$, б) $\varphi_{z_{\text{вх}}} = -45^\circ$.

Указание: изучите сначала с. 238—240 в [1].

8.32. При какой расстройке в схеме рис. 8.4, а $I = \sqrt{1,64}I_0$, если $Q = 20$.

Указание: изучите сначала с. 243, 244 в [1].

Решение. В схемах, аналогичных показанной на рис. 8.4, а, $I = I_0\sqrt{1+\xi^2}$, следовательно, в данной задаче $1+\xi^2 = 1,64$, т. е. $\xi^2 = 0,64$ или $\xi = 0,8$. Но $\xi = 2\Delta f Q/f_0$, откуда $\Delta f = \xi f_0/2Q = 0,8f_0/2 \cdot 20 = 0,02f_0$; $f = f_0 \pm \Delta f = f_0 \pm 0,02f_0$; $f = 0,98f_0$ или $f = 1,02f_0$.

8.33. В схеме рис. 8.4, а рассчитать отношение I_2/I , если $f = f_0 + \Pi$.

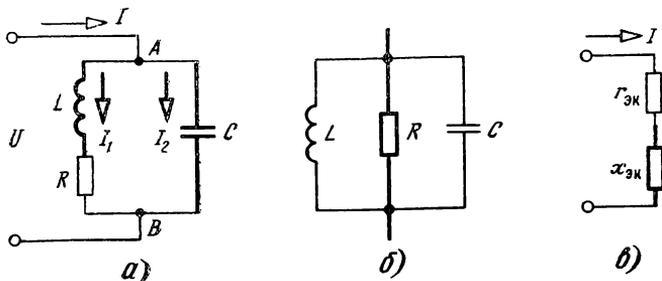


Рис. 8.4

Указание: изучите сначала с. 239—241 и 243, 244 в [1].

Решение. Определим ξ на частоте $f = f_0 + \Pi$. Так как $\Pi = f_0/Q$, то $\xi = 2\Delta f Q/f_0 = 2\Delta f/\Pi$. Поскольку по условию задачи абсолютная расстройка Δf равна полосе пропускания Π , $\xi = 2\Pi/\Pi = 2$. Определим модуль входного сопротивления данной цепи при $\xi = 2$: $Z_{\text{вх}} = Z_{\text{вх}(0)}/\sqrt{1 + \xi^2} = Z_{\text{вх}(0)}/\sqrt{1 + 2^2} = Z_{\text{вх}(0)}/2,24 = 0,447 Z_{\text{вх}(0)} = 0,447 Q\rho$. Входной ток при данной расстройке $I = U/Z_{\text{вх}} = U/0,447 Q\rho = 2,24U/Q\rho$. Рассчитаем модуль емкостного сопротивления при указанной расстройке. Поскольку $f = f_0 + \Pi = f_0 + f_0/Q = f_0(1 + 1/Q)$, $\omega = \omega_0(1 + 1/Q) = [\omega_0(Q + 1)]/Q$, то $X_C = 1/\omega C = Q/[\omega_0(Q + 1)C]$. Но $1/\omega_0 C = \rho$, поэтому $X_C = \rho Q/(Q + 1)$. В этом случае ток емкостной ветви $I_2 = U/X_C = U(Q + 1)/\rho Q$, откуда $I_2/I = \frac{U(Q + 1)Q\rho}{\rho Q \cdot 2,24U} = 0,447(Q + 1)$. Если $Q \gg 1$, то $I_2/I \approx 0,447Q$.

8.34. По условию предыдущей задачи определить входной фазный угол.

Указание: изучите сначала с. 238—240 в [1].

Решение. Как было показано в задаче 8.33, при $f = f_0 + \Pi$ $\xi = +2$. Но в параллельном пассивном колебательном контуре $\varphi_{Z_{\text{вх}}} = -\text{arctg } \xi$, следовательно, при $\xi = 2$ $\varphi_{Z_{\text{вх}}} = -\text{arctg } 2 = -63,4^\circ$.

8.35. Что изменится в схеме 8.4, а, если значение емкости C увеличить в 2 раза?

Указание: изучите сначала с. 237—245 в [1].

8.36. В схеме, показанной на рис. 8.4, б, рассчитать резонансную частоту ω_0 , добротность и входное сопротивление на резонансной частоте, если $L = 100$ мкГн, $C = 100$ пФ, $R = 50$ Ом.

Указание: изучите сначала с. 241—243 в [1].

Решение. Резонансной называется частота, при которой напряжение и ток во входной ветви цепи, содержащей реактивные элементы, совпадают по фазе. Такое совпадение может иметь место в двух случаях: если равна нулю или мнимая часть входного комплексного сопротивления цепи, или мнимая часть входной комплексной проводимости. При последовательном соединении элементов резонансную частоту легче находить из условия $\text{Im}[Z_{\text{вх}}] = 0$, а при параллельном (как, например, в схеме рис. 8.4, б) — из условия $\text{Im}[Y_{\text{вх}}] = 0$. (Напомним, что сочетание «Im» означает — «мнимая часть комплексного числа.») Комплексная входная проводимость цепи (рис. 8.4, б) $Y_{\text{вх}} = (1/R) + (1/j\omega L) + j\omega C = 1/R + j(\omega C - 1/\omega L)$, откуда на резонансной частоте $\omega_0 C - 1/\omega_0 L = 0$ или $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $Y_{\text{вх}} = G_{\text{вх}} = 1/R$ и, следовательно, $R_{\text{вх}(0)} = 1/G = R$. Таким образом, резонансная частота параллельного колебательного контура практически равна резонансной частоте последовательного контура, собранного из тех же элементов. Так как $Z_{\text{вх}(0)}$ идеального па-

параллельного контура равно бесконечности, то входное сопротивление цепи рис. 8.4, б равно сопротивлению R , что и получилось по расчету.

Рассчитаем добротность параллельной цепи. Если резистивное сопротивление соединено последовательно с индуктивностью (или емкостью), то $Q = \rho/r$. Поскольку в цепи (рис. 8.4, б) L и R соединены параллельно, то формула $Q = \rho/r$ для этого случая является несправедливой. Чтобы рассчитать добротность цепи в схеме рис. 8.4, б, необходимо L и R , соединенные параллельно, заменить эквивалентными элементами L и r , соединенными последовательно, т. е. схему рис. 8.4, б заменить схемой рис. 8.4, а. Если $R \gg \rho$, то $r = \rho^2/R = L/RC$, а индуктивность L остается практически неизменной. Тогда $Q = \rho/r = (RC \sqrt{L}) / (L \sqrt{C}) = R\sqrt{C}/\sqrt{L} = R/\rho$. Таким образом, если резистивное сопротивление r и индуктивность L соединены последовательно, то добротность цепи $Q = \rho/r$, а если сопротивление R и индуктивность L соединены параллельно, то $Q = R/\rho$.

Произведем проверку. Заметим, что $\rho = \sqrt{L/C}$ при любом способе соединения этих элементов. В данной цепи $\rho = \sqrt{100 \cdot 10^{-6} / 100 \cdot 10^{-12}} = 1000$ Ом. В цепи рис. 8.4, б $Q = R/\rho = 50 \cdot 10^3 / 10^3 = 50$. При пересчете в цепь рис. 8.4, а $r = L/RC = 100 \cdot 10^{-6} / 50 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-12} = 1000/50 = 20$, $Q = \rho/r = 1000/20 = 50$. Входное сопротивление цепи 8.4, а на резонансной частоте $Z_{вх(0)} = Q^2 r = 50^2 \cdot 20 = 50$ кОм, т. е. равно входному сопротивлению параллельного контура на этой же частоте. Все проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

8.37. В схеме, показанной на рис. 8.4, а, рассчитать I/I_0 и I_2/I_0 , если $r_{эк} = |X_{эк}|$.

Указание: изучите сначала с. 238—241 и 243, 244 в [1].

Решение. При расстройке цепь, показанная на рис. 8.4, а, оказывается эквивалентной цепи на рис. 8.4, в. Так как $\xi = X/r$, то при $|X| = r$ $\xi = 1$. В этом случае $r_{эк} = Z_{вх(0)} / (1 + \xi^2) = 0,5 Z_{вх(0)}$; $X_{эк} = \pm \xi Z_{вх(0)} / (1 + \xi^2) = 0,5 Z_{вх(0)}$; $Z_{вх} = \sqrt{r_{эк}^2 + X_{эк}^2} = Z_{вх(0)} \times \sqrt{(0,5)^2 + (0,5)^2} = 0,707 Z_{вх(0)}$; $I = U/Z_{вх} = U/0,707 Z_{вх(0)}$; $I_0 = U/Z_{вх(0)}$ $U = 1/0,707 = 1,41$. При $r_{эк} = |X_{эк}|$ $f = f_{гр}$, следовательно, как показано в задаче 8.33, $X_c = Q\rho / (Q + 1) = Z_{вх(0)} / (Q + 1)$; $I_2 = U/X_c = U(Q + 1) / Z_{вх(0)}$, откуда $I_2/I_0 = U(Q + 1) Z_{вх(0)} / Z_{вх(0)} U = Q + 1$. При $Q \gg 1$ $I_2/I_0 \approx Q$.

8.38. В схеме рис. 8.4, а рассчитайте $r_{эк}$ и $X_{эк}$ на частоте $f = f_0 \pm f_0/2Q$.

Указание: изучите сначала с. 238—241 в [1].

8.39. Рассчитайте модуль коэффициента передачи цепи в схеме, показанной на рис. 8.5, а, если $R_2 = 9Z_{вх(0)}$.

Указание: изучите сначала с. 244—247 в [1].

Решение. Чтобы параллельный колебательный контур обладал избирательностью по напряжению, его следует питать

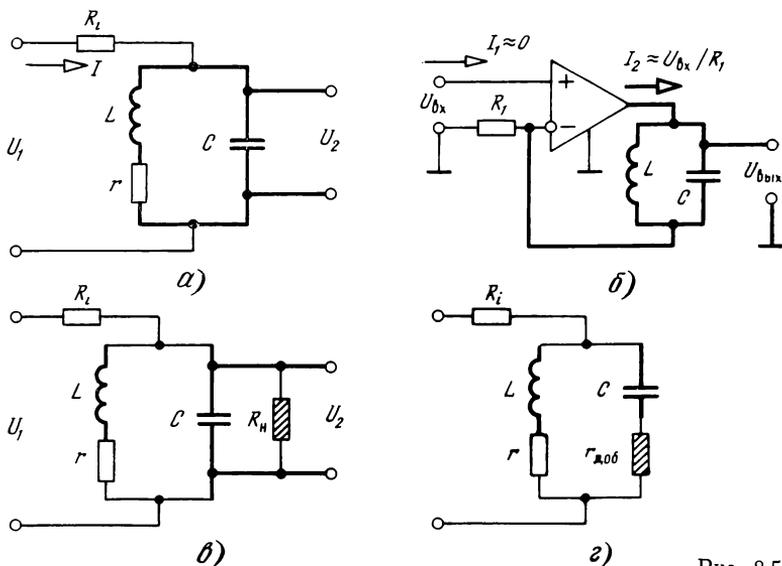


Рис. 8.5

от источника тока, а для этого последовательно с контуром включают сопротивление R_i , значение которого значительно превышает сопротивление контура при резонансе. При изменении эквивалентного сопротивления контура общее сопротивление всей цепи и ток в ней остаются близкими к неизменным. Произведение практически частотно-независимого тока на частотно-зависимое сопротивление контура дает напряжение, зависящее от частоты, т. е. частотно-зависимую передаточную АЧХ. Модуль передаточной функции $H = (Z_{\text{вх}(0)}/R_i) (1/\sqrt{1+\xi_c^2})$, где $Z_{\text{вх}(0)}$ — сопротивление параллельного контура на резонансной частоте. Однако для того, чтобы ток во входной ветви контура при изменении частоты оставался практически неизменным, необходимо выполнение условия $R_i \gg Z_{\text{вх}(0)}$. Но при таком соотношении сопротивлений модуль передаточной функции H падает, поскольку множитель $Z_{\text{вх}(0)}/R_i$ при этом оказывается много меньше единицы. Таким образом, в пассивных цепях режим источника тока достигается ценой значительного уменьшения коэффициента передачи, что является существенным недостатком контуров такого типа. Например, при $R_i = 9Z_{\text{вх}(0)}$ напряжение на выходе контура при резонансной частоте меньше входного напряжения примерно на порядок.

Источник тока с операционным усилителем, включенным по схеме, показанной на рис. 8.5, б, значительно совершеннее источника тока, реализованного с помощью пассивной цепи (см. рис. 8.5, а). Поскольку ОУ в этой схеме (рис. 8.5, б) включен на неинвертирующий (положительный) вход, входное сопротивление всей цепи весьма велико, при этом $I_1 \approx 0$ и предыду-

ший каскад работает в режиме холостого хода. Выходной ток ОУ I_2 в широких пределах практически не зависит от сопротивления нагрузки и определяется из выражения $I_2 = U_1/R_{\text{оу}}$, где $R_{\text{оу}}$ — сопротивление, включенное последовательно с инвертирующим (отрицательным) входом ОУ. Так как сопротивление R_1 может быть много меньше сопротивления R_i , то ток в контуре, а следовательно, и коэффициент передачи при наличии активного элемента в R_i/R_1 раз больше, чем в пассивном контуре. Модуль передаточной функции $H_{\text{акт}}$ в этом случае определяется из выражения $H_{\text{акт}} = H_{\text{пас}}(R_i/R_1) = (R_i/R_1) (Z_{\text{вх}(0)}/R_i) \times \times (1/\sqrt{1+\xi^2}) = (Z_{\text{вх}(0)}/R_1) (1/\sqrt{1+\xi^2})$, причем в активном контуре входное напряжение U_1 может быть таким, при котором напряжение на контуре $U_2 = I_2 Z_{\text{вх}(0)}$ не превышает напряжения питания операционного усилителя.

8.40. В схеме рис. 8.5, а при резонансе $U_{20} = 3,36$ В, а при расстройке $U_2 = 0,04$ В. Выразите избирательность, обеспечиваемую контуром на данной частоте, в децибелах.

Указание: изучите сначала с. 244—247 в [1].

Решение. Избирательность B (дБ) $= 20 \lg(U_{20}/U_2) = 20 \lg(3,36/0,04) = 20 \lg 84 = 20 \cdot 1,924 = 38,5$ дБ.

8.41. В схеме рис. 8.5, а $R_i = Z_{\text{вх}(0)}$. Во сколько раз изменится $Q_{\text{ц}}$, если сопротивление R_i увеличить в 2 раза?

Указание: изучите сначала с. 244—247 в [1].

8.42. В схеме рис. 8.5, а $\rho = 100$ Ом, $R_i = 200$ кОм. Рассчитать отношение $Q_{\text{ц}}/Q$ для случаев: а) $r = 20$ Ом; б) $r = 40$ Ом; в) $r = 10$ Ом.

Указание: изучите сначала с. 238—241 и 244—247 в [1].

8.43. В схеме рис. 8.5, а рассчитать модуль коэффициента передачи K на частоте $f = f_0 \pm \Pi$, где: а) Π — полоса пропускания собственного контура (т. е. цепи при $R_i = \infty$); б) полоса пропускания цепи при заданном R_i , если $L = 100$ мкГн, $C = 100$ пФ, $r = 20$ Ом, $R_i = 50$ кОм.

Указание: изучите сначала с. 244—247 в [1].

Решение. Зная значения L и C , рассчитаем резонансную частоту цепи: $f_0 = 1/2\pi \sqrt{LC} = 1/(6,28 \sqrt{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12}}) = 1590$ кГц. Добротность собственно контура $Q = \rho/R = (\sqrt{L/C})/R = (\sqrt{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12}}/20) = 1000/20 = 50$. Добротность цепи $Q_{\text{ц}} = Q/(1 + Z_{\text{вх}(0)}/R_i) = Q/(1 + Q\rho/R_i) = 50/(1 + 50 \cdot 1000/5 \cdot 10^4) = 25$. Полоса пропускания собственно контура $\Pi = f_0/Q = 1590/50 = 31,8$ кГц ≈ 32 кГц. Полоса пропускания цепи $\Pi_{\text{ц}} = f_0/Q_{\text{ц}} = 1590/25 = 63,6 \approx 64$ кГц. Таким образом, задача сводится к определению коэффициента передачи при расстройках $\Delta f_1 = 32$ кГц и $\Delta f_2 = 64$ кГц.

Рассчитаем обобщенную расстройку и коэффициент передачи K для обоих случаев: $\xi_1 = 2\Delta f_1 Q_{\text{ц}}/f_0 = 2 \cdot 31,8 \cdot 25/1590 = 1$; $\xi_2 = 2\Delta f_2 Q_{\text{ц}}/f_0 = 2 \cdot 63,6 \cdot 25/1590 = 2$; $K_1 = (Z_{\text{вх}(0)}/R_i) \times$

$$\times (1/\sqrt{1+\xi_{н1}^2}) = (Q_{ц}\rho/R_i)(1/\sqrt{1+\xi_{н1}^2}) = (25 \cdot 10^3/50 \cdot 10^3)(1+\sqrt{1+1}) = 0,35; K_2 = (Q_{н}\rho/R_i)(1/\sqrt{1+\xi_{н2}^2}) = 0,5(1/\sqrt{5}) = 0,224.$$

8.44. В цепи, показанной на рис. 8.5, в, $L=5$ мГн, $C=1$ нФ, $r=20$ Ом, $R_i=600$ кОм, $R_n=0,4$ МОм. Определить избирательность, обеспечиваемую контуром при расстройке на $\Delta f=10$ кГц. Как изменится избирательность при той же расстройке, если R_n увеличить до бесконечности, т. е. отключить это сопротивление?

Указание: изучите сначала с. 244—247 в [1] и задачи 8.10, 8.40.

Решение. Рассчитаем резонансную частоту, характеристическое сопротивление и добротность собственно контура:

$$f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC} = 1/(6,28\sqrt{4 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-9}}) = 79,6 \text{ кГц} \approx 80 \text{ кГц};$$

$$\rho = \sqrt{L/C} = \sqrt{4 \cdot 10^{-3}/10^{-9}} = 2 \text{ кОм}; \quad Q = \rho/r = 2000/20 = 100.$$

Поскольку параллельно контуру включено резистивное сопротивление R_n , в этом сопротивлении рассеивается мощность, что приводит к уменьшению добротности цепи. Рассчитаем добротность контура Q_k , оказывающуюся с учетом потерь в сопротивлениях катушки контура r и сопротивлении нагрузки R_n (но без учета потерь в сопротивлении R_i). Для этого заменим цепочку соединенных параллельно C и R_n эквивалентной цепочкой $Cr_{доб}$ (подробнее см. с. 216 в [1] и задачу 8.4). После данного преобразования схема приобретает вид, приведенный на рис. 8.5, з. В данной цепи $R_n \gg \rho$, поэтому $r_{доб} = \rho^2/R_n = 4 \cdot 10^6/4 \cdot 10^5 = 10$ Ом. Так как при $Q \gg 1$ в индуктивной и емкостной ветвях течет практически один и тот же ток, то $Q_k = \rho/(r+r_{доб}) = 2 \cdot 10^3/(20+10) = 66,6$. Эквивалентное сопротивление контура на резонансной частоте $Z_{к(0)} = Q_k \rho = 66,6 \cdot 2 \cdot 10^3 = 133$ кОм. Передаточная АЧХ цепи определяется из приближенного выражения $H = (Z_{к(0)}/R_i)(1/\sqrt{1+\xi_{ц}^2})$, где $\xi_{ц} = 2\Delta f Q_{ц}/f_0$, а $Q_{ц}$ — эквивалентная добротность, получающаяся с учетом любых потерь, в том числе и в сопротивлении R_i : $Q_{ц} = Q_k/(1+Z_{к(0)}/R_i) = 66,6/(1+133/600) = 66,6/1,22 = 54,5$.

Коэффициент передачи на резонансной частоте (т. е. при $\xi=0$) $H_0 = Z_{к(0)}/R_i$. При заданной расстройке $\Delta f=10$ кГц $\xi_{ц} = 2 \cdot 10 \cdot 54,5/80 = 13,6$, тогда $H = (Z_{к(0)}/R_i)(1/\sqrt{1+\xi_{ц}^2})$; B (дБ) $= 20\lg(H_0/H) = 20\lg\sqrt{1+\xi_{ц}^2} = 20\lg\sqrt{1+(13,6)^2} = 20\lg 13,6 = 20 \cdot 1,1356 = 22,7$ дБ. Коэффициент передачи и избирательность при $R_n = \infty$ предлагается рассчитать учащимся самостоятельно.

8.45. В цепи, показанной на схеме рис. 8.5, а, $L=100$ мкГн, $C=100$ пФ, $r=20$ Ом, $R_i=10Z_{вх(0)}$, а частота генератора отли-

чается от 5% от резонансной частоты контура. Определить, на сколько децибел уменьшится избирательность, обеспечиваемая на этой частоте контуром при подключении к выходным зажимам цепи сопротивления $R_n=100$ кОм (т. е. при превращении схемы 8.5, а в схему 8.5, в).

Указание: разберите сначала задачи 8.40, 8.43, 8.44.

Решение. Резонансная частота контура $f_0=1/2\pi \sqrt{LC}=1/6,28 \sqrt{10^{-4} \cdot 10^{-14}}=1590$ кГц и добротность $Q=\sqrt{L/C}/r=\sqrt{100 \cdot 10^{-6}/100 \cdot 10^{-12}}/20=50$; $Q_{ц1}=Q/(1+\frac{Z_{вх(0)}}{R_i})=50/(1+0,1)=45,5$. Частота генератора $f_{ген}=1590 \pm 0,05 \cdot 1590=1590 \pm 80=1670$ (или 1510) кГц. Абсолютная и обобщенная расстройка: $\Delta f=f_{ген}-f_0=\pm 80$ кГц, $\xi_{ц1}=2\Delta f Q_{ц1}/f_0=2 \cdot 80 \times 45/1590=\pm 4,53$. Избирательность цепи при отключенном сопротивлении R_n в дБ $=20 \lg \sqrt{1+\xi_{ц1}^2}=20 \lg \sqrt{1+(4,53)^2}=20 \lg 4,63=20 \cdot 0,666=13,3$ дБ. При подключении сопротивления R_n потери в контуре возрастают: $r_{доб}=\rho^2/R_n=L/CR_n=100 \cdot 10^{-6}/(100 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot 10^3)=10$ Ом (рис. 8.5, в). Добротность контура, нагруженного на сопротивление $R_n=100$ кОм, $Q_{ц1}=\rho/(r+r_{доб})=1000/(20+10)=33,3$. Сопротивление $R_i=10$, $Z_{вх(0)}=10Q\rho=10 \cdot 50 \cdot 1000=500$ кОм. Добротность цепи с учетом потерь в сопротивлениях r , R_n и R_i $Q_{ц2}=Q_{ц1}/(1+Z_{к(0)}/R_i)=Q_{ц1}/(1+Q_{к\rho}/R_i)=33,3/(1+33,3 \cdot 1000/500 \cdot 10^3)=33,3/1,0666=31,2$.

Обобщенная расстройка $\xi_{ц2}=2\Delta f Q_{ц2}/f_0=2 \cdot 80 \cdot 31,2/1590=\pm 3,14$.

Избирательность, обеспечиваемая контуром с подключенным сопротивлением R_n при расстройке на 5%, т. е. на 80 кГц, в дБ $=20 \lg \sqrt{1+\xi_{ц2}^2}=20 \lg \sqrt{1+(3,14)^2}=20 \lg 3,3=20 \times 0,518=10,3$ дБ. Таким образом, при подключении к выходу контура сопротивления $R_n=100$ кОм избирательность, даваемая контуром при расстройке на 5%, уменьшается с 13,3 до 10,3 дБ, т. е. на 3 дБ.

РЕАКТИВНЫЕ ДВУХПОЛЮСНИКИ

8.46. В схеме цепи, показанной на рис. 8.6, а, рассчитать нулевую ω_0 и полюсную ω_∞ частоты, если $L_1=2,5$ мГн, $L_2=4,9$ мГн, $C=2,5$ нФ.

Указание: разберите сначала с. 250—254 в [1].

Решение. Поскольку в данной цепи три реактивных элемента, резонансных частот будет две: одна нулевая ω_0 и одна полюсная ω_∞ . Приведем комплексное входное сопротивление цепи к нормальному виду:

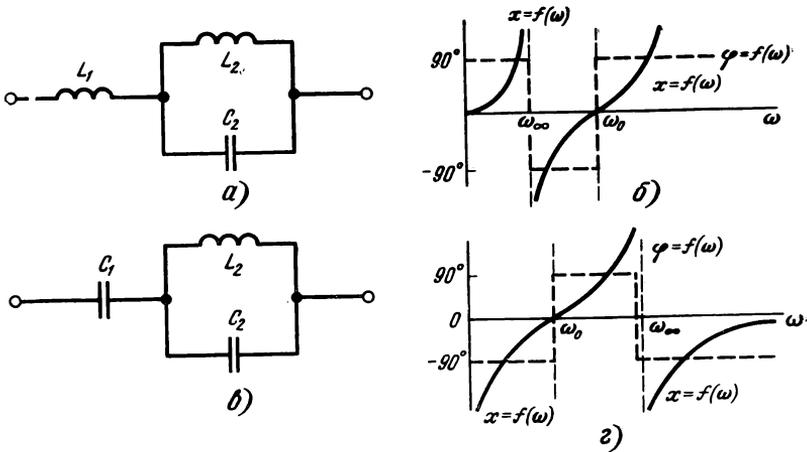


Рис. 8.6

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}} &= j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 (1/j\omega C_2)}{j(\omega L_2 - 1/\omega C_2)} = j \left[\omega L_1 - \frac{L_2 \omega C_2}{\omega^2 L_2 C_2 - 1} \right] = \\ &= j \left[\frac{\omega (\omega^2 L_1 L_2 C_2 - L_1 - L_2)}{\omega^2 L_2 C_2 - 1} \right]. \end{aligned}$$

Для определения нулевой частоты (или частот) необходимо числитель получившегося выражения приравнять нулю. Так как нулевые и полюсные частоты не могут быть равными нулю, то нулю равно выражение, находящееся в скобках, т. е. $\omega_0^2 L_1 L_2 C_2 - L_1 - L_2 = 0$, откуда,

$$\omega_0 = 1/\sqrt{[L_1 L_2 / (L_1 + L_2)] C_2}. \quad (8.8)$$

Для определения полюсной частоты приравняем нулю знаменатель комплексного входного сопротивления, т. е. $\omega_\infty^2 L_2 C_2 - 1 = 0$, откуда

$$\omega_\infty = 1/\sqrt{L_2 C_2}. \quad (8.9)$$

Так как $L_1 L_2 / (L_1 + L_2) < L_2$, то $\omega_0 > \omega_\infty$. Качественный вид входной АЧХ цепи (рис. 8.6, а) показан на рис. 8.6, б. Напомним, что если на частоте $\omega = 0$ цепь представляет короткое замыкание, то входная АЧХ начинается с нуля и уходит к бесконечности. Если при $\omega = 0$ цепь представляет разрыв (как, например, в цепи, показанной на рис. 8.6, в), то характеристика $Z_{\text{вх}} = f(\omega)$ начинается с минус бесконечности и идет так, как показано на рис. 8.6, г (подробнее см. с. 253—256 в [1]).

Фазочастотная характеристика показана на рис. 8.6, б штриховой линией. В интервале от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_\infty$ характер цепи чисто индуктивный (что видно из

АЧХ) и $\varphi_{Z_{вх}} = +90^\circ$, в интервале от $\omega = \omega_\infty$ до $\omega = \omega_0$ характер цепи емкостный, $\varphi_{Z_{вх}} = -90^\circ$, в интервале от $\omega = \omega_0$ до $\omega = \infty$ $\varphi_{Z_{вх}} = +90^\circ$. Обратите внимание, что в LC-цепях (в которых $R=0$) фазный угол может принимать только два значения: $+90^\circ$ и -90° , что вытекает из формулы $\varphi_{Z_{вх}} = -\text{arctg}(X_{эк}/R_{эк})$. Если $R=0$, то $X/R = \infty$, $|\varphi| = 90^\circ$, а знак определяется знаком реактивной составляющей входного сопротивления или проводимости.

8.47. В схеме, показанной на рис. 8.6, в, рассчитайте нулевые и полюсные частоты, если $L_1=10$ мГн, $L_2=16$ мГн, $C_2=25$ нФ, и нарисуйте качественные входные АЧХ и ФЧХ.

Указание: разберите сначала задачу 8.46.

8.48. В схеме, показанной на рис. 8.6, в, определите число резонансных частот, рассчитайте их и постройте кривые входных АЧХ и ФЧХ.

Указание: разберите сначала задачу 8.46.

8.49. В схеме, показанной на рис. 8.6, а, рассчитать значения L , L_2 и C_2 , чтобы $\omega_0=2 \cdot 10^4$ 1/с, $\omega_\infty=10^4$ 1/с.

Указание: изучите сначала с. 250—252 в [1].

Решение. Если необходимо рассчитать только резонансные частоты ω_0 и ω_∞ , но не требуется определять крутизну амплитудно-частотной характеристики в различных точках, т. е. отсутствует условие, что на данной частоте $Z_{вх}$ имеет наперед заданное значение, то следует рассчитывать три элемента (L_1 , L_2 , C_2) по двум зависимостям (формулы для ω_0 и ω_∞). Если при этом никакое дополнительное условие не накладывается, то надо одним параметром задаться, а два остальных определяются при этом однозначно. Пусть $C_2=100$ нФ, тогда из (8.1) (см. задачу 8.46) $L_2=1/\omega_\infty^2$ $C_2=1/10^8 \cdot 100 \cdot 10^{-5}=0,1$ Гн. Из (8.2) $L_1=L_2/(\omega_0^2 L_2 C_2 - 1)=0,1/(4 \cdot 10^8 \cdot 0,1 \cdot 100 \cdot 10^{-9} - 1)=0,1/3=33,3$ мГн. Подобная задача может иметь неограниченное число решений. Например, если задаться $C_2=200$ нФ, то $L_2=50$ мГн, а $L_1=16,6$ мГн и т. д. Задаваться, разумеется, можно не только значением емкости C_2 , но и значением одного любого элемента, входящего в цепь.

8.50. В схеме, показанной на рис. 8.6, в, определить значения C_1 , C_2 , L_2 , при которых $\omega_0=225 \cdot 10^5$ 1/с, $\omega_\infty=650 \cdot 10^5$ 1/с.

Указание: разберите сначала задачу 8.49.

8.51. В схеме, показанной на рис. 8.6, а, определить значения L_1 , L_2 и C_2 , при которых $\omega_0=20 \cdot 10^3$ 1/с, $\omega_\infty=10 \cdot 10^3$ 1/с, а комплексное входное сопротивление на частоте $\omega=5 \cdot 10^3$ 1/с равно $j \cdot 1000$ Ом.

Указание: изучите сначала с. 250—256 в [1] и разберите задачи 8.46 и 8.49.

Решение. В данной задаче задаются три значения: резонансных частот (ω_0 и ω_∞) и входного сопротивления цепи на определенной частоте. Следовательно, кроме соотношений

(8.8) и (8.9) необходимо иметь формулу для расчета входного сопротивления $Z_{вх}$ исследуемого реактивного двухполюсника. Такой формулой для схемы 8.6, а является выражение

$$Z_{вх} = j\omega L_1 [(\omega^2 - \omega_0^2) / (\omega^2 - \omega_\infty^2)], \quad (8.10)$$

где ω — частота, на которой определяется сопротивление $Z_{вх}$, а множитель перед скобкой представляет собой сопротивление цепи на весьма большой частоте. (В цепи на рис. 8.6, а на большой частоте сопротивление емкости C_2 мало, индуктивность L_2 оказывается практически закороченной и входное сопротивление цепи определяется элементом L_1 .) Из (8.10) находим

$$\begin{aligned} L_1 &= [Z_{вх}(\omega^2 - \omega_\infty^2)] / j\omega(\omega^2 - \omega_0^2) = \\ &= [j10^3(25 \cdot 10^6 - 100 \cdot 10^6)] / [j5 \cdot 10^3(25 \cdot 10^6 - 400 \cdot 10^6)] = \\ &= (-75) / 5(-375) = 0,04 \text{ Гн}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Из (8.9)

$$\omega_0^2 L_1 L_2 C_2 = L_1 + L_2, \quad (8.12)$$

а из (8.8)

$$C_2 = 1 / \omega_\infty^2 L_2. \quad (8.13)$$

Подставив C_2 из (8.13) в (8.12), получим $(\omega_0^2 L_1 L_2) / (\omega_\infty^2 L_2) = L_1 + L_2$, откуда

$$L_2 = L_1 [(\omega_0^2 / \omega_\infty^2) - 1]. \quad (8.14)$$

Тогда $L_2 = 0,04[(400 \cdot 10^6) / (100 \cdot 10^6 - 1)] = 0,12$ Гн. Из (8.6) $C_2 = 1 / \omega_\infty^2 L_2 = 1 / 100 \cdot 10^6 \cdot 0,12 = 83,3$ нФ. Общие закономерности при этом таковы: чем больше необходимая крутизна амплитудно-частотной характеристики или чем меньше заданный интервал между нулевой и полюсной частотами, тем большими оказываются значения индуктивностей и меньшими емкостей, что однозначно следует из (8.11), (8.13) и (8.14). Например, если при частоте $\omega = 5 \cdot 10^3$ 1/с входное сопротивление должно быть не 1 кОм, как в рассматриваемом примере, а 10 кОм, то $L_1 = 0,4$ Гн (вместо 0,04 Гн), $L_2 = 1,2$ Гн (вместо 0,12 Гн), а $C_2 = 8,33$ нФ (вместо 83,3 нФ). Если интервал между нулевой ω_0 и полюсной ω_∞ частотами уменьшить, то индуктивность возрастет еще более. Например, при $\omega = 5 \cdot 10^3$ 1/с $Z_{вх} = j10$ кОм; $\omega_\infty = 10 \cdot 10^3$ 1/с; ω_0 равна не $20 \cdot 10^3$ 1/с, а $15 \cdot 10^3$ 1/с; $L_1 = 0,75$ Гн; $L_2 = 0,9375$ Гн; $C_2 = 10,67$ нФ.

8.52. Рассчитайте в схеме 8.6, а значения L_1 , L_2 , C_2 , чтобы $f_\infty = 20$ кГц, $f_0 = 100$ кГц, а при $f = 50$ кГц $Z_{вх} = -j1000$ Ом.

Указание: разберите сначала задачу 8.51.

8.53. Рассчитать в схеме 8.6, в значения C_1, C_2, L_2 , при которых $\omega_0 = 10^4$ 1/с, $\omega_\infty = 2 \cdot 10^4$ 1/с, а при $\omega = 5 \cdot 10^3$ 1/с $\underline{Z}_{\text{вх}} = -j10^4$ Ом.

Указание: разберите сначала задачу 8.51.

Пояснения. Входная АЧХ цепи 8.6, в показана на рис. 8.6, з. Очевидно, что в данной схеме $\omega_\infty > \omega_0$. Из выражения $\underline{Z}_{\text{вх}} = 1/j\omega C_1 + \frac{j\omega L_2 (1/j\omega C_2)}{j(\omega L_2 - 1/\omega C_2)} = -j \left[\frac{\omega^2 C_1 L_2 + \omega^2 L_2 C_2 - 1}{\omega C_1 (\omega^2 L_2 C_2 - 1)} \right]$ следует, что $\omega_0 = 1/\sqrt{L_2(C_1 + C_2)}$, $\omega_\infty = 1/\sqrt{L_2 C_2}$.

Из схемы рис. 8.6, в видно, что $\underline{Z}_{\text{вх}} = -j(1/\omega C_1)[(\omega^2 - \omega_0^2)/(\omega^2 - \omega_\infty^2)]$. Зная $\omega_0, \omega_\infty, \omega$ и $\underline{Z}_{\text{вх}}$, по приведенным формулам находят C_1, C_2, L_2 .

Рекомендация: все приведенные формулы получите самостоятельно, используя рис. 8.6, в и решение задачи 8.51.

8.54. Для схемы, приведенной на рис. 8.6, а, рассчитать и построить кривые входных АЧХ и ФЧХ по числовым данным, полученным при решении первого варианта задачи 8.49 в диапазоне $(0,5 \dots 2)\omega_0$.

Указание: изучите сначала с. 250—254 в [1].

8.55. Для схемы, приведенной на рис. 8.6, а, рассчитать и построить кривые входных АЧХ и ФЧХ по числовым данным, полученным при решении первого варианта задачи 8.51 в диапазоне $(0,5 \dots 2)f_0$.

Указание: изучите сначала с. 250—254 в [1].

8.56. Для схемы, приведенной на рис. 8.6, в, рассчитать и построить кривые входных АЧХ и ФЧХ по числовым данным, полученным в задаче 8.53.

Указание: изучите сначала с. 250—254 в [1].

8.57. Построить качественно кривые АЧХ и ФЧХ для цепей, показанных на рис. 8.7, а и б.

Указание: изучите сначала с. 250—254 в [1].

8.58. Записать выражения комплексных входных сопротивлений цепей, показанных на рис. 8.7, а и б.

Указание: изучите сначала с. 254—256 в [1].

Решение. Схема (рис. 8.7, а) содержит четыре реактивных элемента, поэтому резонансных частот три. Так как нулевые и полюсные частоты чередуются, возможны два варианта:

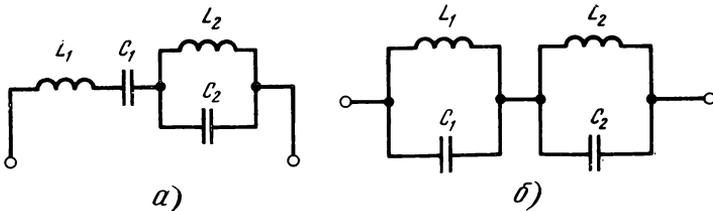


Рис. 8.7

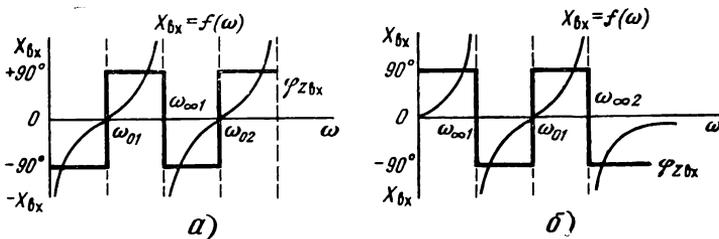


Рис. 8.8

одна нулевая частота и две полюсные или две нулевые и одна полюсная. Чтобы определить число нулевых и полюсных частот, следует качественно по виду цепи построить входные АЧХ. Напомним, что если по постоянному току цепь представляет бесконечно большое сопротивление (говорят «разрыв цепи»), то АЧХ начинается с минус бесконечного сопротивления, а если цепь по постоянному току замкнута — то с нулевого. В схеме из-за емкости C_1 цепь на постоянном токе разомкнута, поэтому первой резонансной частотой является нулевая ω_{01} , затем полюсная $\omega_{\infty 1}$ и нулевая ω_{02} (рис. 8.8, а).

Формула входного сопротивления цепи представляет собой произведение множителя, показывающего входное сопротивление цепи на большой частоте, и дроби, числитель которой содержит столько множителей вида $(\omega^2 - \omega_{ок}^2)$, сколько нулевых частот получается при расчете цепи, а в знаменателе число множителей вида $(\omega^2 - \omega_{\infty к}^2)$ соответствует количеству полюсных частот. На больших частотах емкостные сопротивления малы, а индуктивные велики. На этом основании в цепи на рис. 8.7, а

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = j\omega L_1 \left[\frac{(\omega^2 - \omega_{01}^2)(\omega^2 - \omega_{02}^2)}{(\omega^2 - 0)(\omega^2 - \omega_{\infty}^2)} \right] = jL_1 \left[\frac{(\omega^2 - \omega_{01}^2)(\omega^2 - \omega_{02}^2)}{\omega(\omega^2 - \omega_{\infty}^2)} \right].$$

Аналогично АЧХ цепи на рис. 8.7, б имеет вид, показанный на рис. 8.8, б. На больших частотах можно пренебречь малой проводимостью элементов L_1 и L_2 по сравнению с большими проводимостями элементов C_1 и C_2 , поэтому комплексное входное сопротивление имеет вид

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{вх}} &= \left(\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} \right) \left[\frac{(\omega^2 - 0)(\omega^2 - \omega_{01}^2)}{(\omega^2 - \omega_{\infty 1}^2)(\omega^2 - \omega_{\infty 2}^2)} \right] = \\ &= \frac{1}{j} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \left[\frac{\omega(\omega^2 - \omega_{01}^2)}{(\omega^2 - \omega_{\infty 1}^2)(\omega^2 - \omega_{\infty 2}^2)} \right]. \end{aligned}$$

9.1. В схеме, показанной на рис. 9.1, а, $L_1=40$ мкГн, $L_2=64$ мкГн, $M=20$ мкГн, $C=173,6$ нФ. Определить резонансные частоты при согласном и встречном включении катушки.

Указание: изучите сначала с. 263—265 в [1].

9.2. В схеме, показанной на рис. 9.1, б, определить резонансные частоты при согласном и встречном включении катушек. Исходные данные те же, что и в задаче 9.1.

Указание: изучите сначала с. 266—268 в [1].

9.3. Рассчитать резонансные частоты в схеме, показанной на рис. 9.1, в, если $L_1=40$ мГн, $L_2=60$ мГн, $M=30$ мГн, $C=2,66$ нФ.

Указание: изучите сначала с. 250—254 и 266—268 в [1].

Решение. Чтобы рассчитать резонансные частоты цепи, необходимо получить выражение входного комплексного сопротивления и выделить из него мнимую часть, затем приравнять нулю числитель получившегося выражения и решить уравнение относительно частоты (или частот), которая (или которые) будет нулевой. Приравняв нулю знаменатель и решив это уравнение относительно частоты, получим полюсные частоты $\omega_{\infty 1}$, $\omega_{\infty 2}$. Из-за наличия взаимной индуктивности не представляется возможным написать выражение для входного сопротивления непосредственно по виду цепи. Цепи со взаимными индуктивностями являются цепями с зависимыми источниками, а в таких случаях для расчета входного сопротивления необходимо составить уравнение электрического равновесия цепи, например, по законам Кирхгофа, решить систему относительно тока во входной ветви и получить отношение входного напряжения к входному току, которое и будет входным сопротивлением цепи.

Зададимся входным напряжением \dot{U}_1 и обозначим токи во всех ветвях через \dot{I} , \dot{I}_1 , \dot{I}_2 (рис. 9.1, в). Запишем одно уравнение по первому закону Кирхгофа и два — по второму. Примем значение M за положительное. Тогда справедливы уравнения

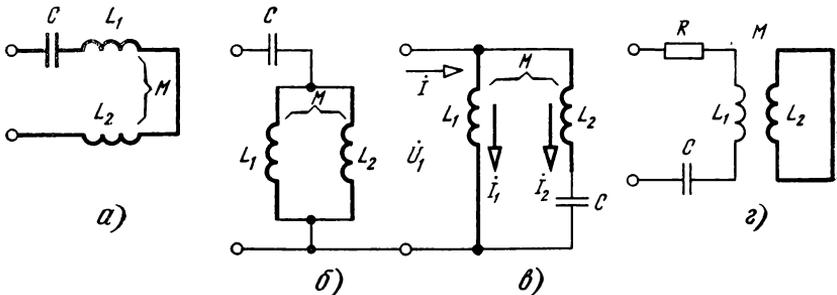


Рис. 9.1

$$\begin{cases} \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \\ \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{I}_1 \underline{Z}_1 + \dot{I}_2 \underline{Z}_M; \\ \dot{U}_1 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 - j(1/\omega C) \dot{I}_2 = \dot{I}_1 \underline{Z}_M + \dot{I}_2 \underline{Z}_2, \end{cases}$$

где $\underline{Z}_1 = j\omega L_1$; $\underline{Z}_2 = j(\omega L_2 - 1/\omega C)$; $\underline{Z}_M = j\omega M$.

Перемножив все члены первой строки на \underline{Z}_2 , а второй — на $-\underline{Z}_M$ и сложив их, получим $\dot{U}_1(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) = \dot{I}_1(\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2)$ или $\dot{I}_1 = \dot{U}_1(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) / (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2)$. Аналогично $\dot{I}_2 = \dot{U}_1(\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M) / (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2)$. Ток во входной ветви $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{U}_1(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M) / (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2)$, откуда $\underline{Z}_{\text{вх}} = \dot{U}_1 / \dot{I} = (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2) / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M)$. Знак «плюс» соответствует случаю $M < 0$ при встречном включении катушек.

Приравняем числитель нулю и решим получившееся выражение относительно частоты: $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2 = j\omega L_1 j(\omega L_2 - 1/\omega C) - (j\omega M)^2 = 0$, тогда $-\omega_0^2 L_1 L_2 + (\omega_0 L_1 / \omega_0 C) + \omega_0^2 M^2 = 0$, т. е. $\omega_0^2 [C(L_1 L_2 - M^2)] = L_1$, откуда $\omega_0 = \sqrt{L_1 / [C(L_1 L_2 - M^2)]} = 1/\sqrt{C(L_2 - M^2/L_1)} = 1/\sqrt{2,66 \cdot 10^{-9} [60 \cdot 10^{-3} - (900 \cdot 10^{-6} / 40 \times \dots \times 10^{-3})]} = 100 \cdot 10^3 \text{ 1/c} = 100 \text{ кс}^{-1}$.

Найдем полюсные частоты $\omega_{\text{осогл}}$ и $\omega_{\text{овстр}}$ из выражения $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M = 0$, т. е. $j\omega L_1 + j(\omega L_2 - 1/\omega C) \mp j2\omega M = j[\omega^2 L_1 C + \omega^2 L_2 C - 1 \mp 2\omega^2 M C] = 0$, откуда $\omega_{\infty} = 1/\sqrt{C(L_1 + L_2 \mp 2M)}$:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{осогл}} &= 1/\sqrt{2,66 \cdot 10^{-9} (40 \cdot 10^{-3} + 60 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 30 \cdot 10^{-3})} = \\ &= 96,94 \cdot 10^3 \text{ 1/c} = 96,94 \text{ кс}^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{\text{овстр}} &= 1/\sqrt{2,66 \cdot 10^{-9} (40 \cdot 10^{-3} + 60 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 30 \cdot 10^{-3})} = \\ &= 48,47 \cdot 10^3 \text{ 1/c} = 48,47 \text{ кс}^{-1}. \end{aligned}$$

9.4. Рассчитать резонансную частоту цепи, показанной на рис. 9.1,г, если $L_1 = L_2 = L = 108 \text{ мГн}$, $C = 1,235 \text{ нФ}$, $M = 54 \text{ мГн}$.
Указание: изучите сначала с. 263—266 в [1].

Рассчитать резонансную частоту цепи, показанной на рис. 9.1,г, если $L_1 = L_2 = 71 \text{ мкГн}$, $C = 5,5 \text{ нФ}$, а коэффициент связи $K = 0,6$.

Указание: изучите сначала с. 268—272 в [1] и учтите, что $K = M/\sqrt{L_1 L_2}$, откуда $M = K\sqrt{L_1 L_2}$.

9.5. Рассчитать резонансную частоту цепи, показанной на рис. 9.2,а, при замкнутом ключе, если $L_1 = L_2 = L = 100 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$, $C = 10 \text{ нФ}$, $K = 0,5$.

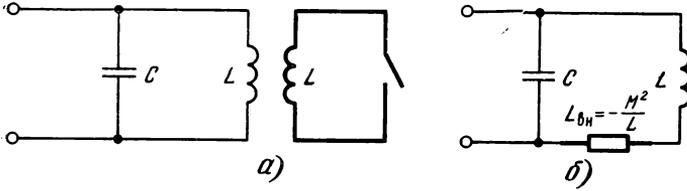


Рис. 9.2

Указание: изучите сначала с. 268—272 в [1].

Решение. Две индуктивно связанные катушки можно заменить одной катушкой, последовательно с которой включен элемент $L_{\text{вн}}$. Так как $X_{\text{вн}} = -X_{\text{св}}^2 X_2 / Z_2^2$, то $\omega L_{\text{вн}} = -\omega^2 M^2 \times \omega L / \omega^2 L^2$, откуда $L_{\text{вн}} = -M^2 / L$ (рис. 9.2, б). Поскольку $M = K \sqrt{L_1 L_2}$, а при $L_1 = L_2 = L$ $M = KL$, то $L_{\text{вн}} = -K^2 L^2 / L = -K^2 L$. В этом случае $\omega_0 = 1 / \sqrt{(L - K^2 L) C} = 1 / \sqrt{LC(1 - K^2)} = 1 / \sqrt{100 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^{-9} (1 - 0,5)^2} = 10^6 / \sqrt{0,75} = 1154,7 \cdot 10^3$ 1/с = 1154,7 кс⁻¹.

9.6. На сколько процентов изменится резонансная частота ω_0 в схеме рис. 9.2, а, если разомкнуть ключ во вторичном контуре.

Указание: разберите сначала задачу 9.5.

9.7. Рассчитать токи в ветвях цепи, показанной на рис. 9.3, а, с помощью: а) законов Кирхгофа; б) замены двухконтурной цепи эквивалентной одноконтурной; в) замены исходной цепи T-образной схемой замещения, если $U_1 = 60$ В, $R_1 = 5$ Ом, $X_M = 10$ Ом, $X_2 = 30$ Ом, $R_2 = 10$ Ом.

Указание: изучите сначала с. 268—274 в [1].

9.8. Заменить схему, показанную на рис. 9.3, б, эквивалентной одноконтурной с использованием $R_{\text{вн}}$ и $X_{\text{вн}}$.

Указание: изучите сначала с. 268—272 в [1].

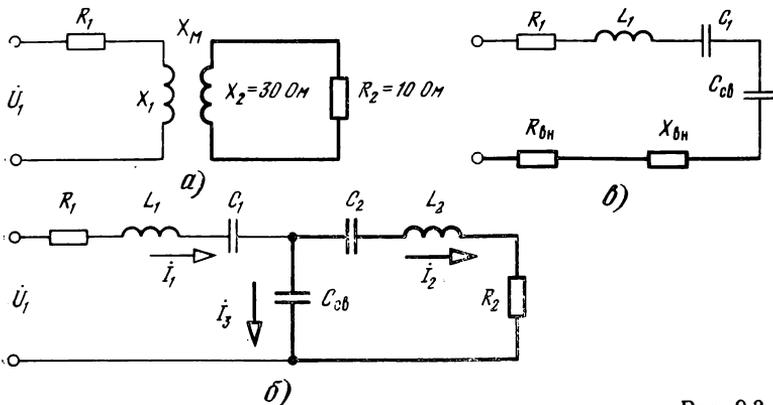


Рис. 9.3

Решение. Любую двухконтурную систему (а не только с трансформаторной связью) можно заменить эквивалентной одноконтурной. Для такой замены необходимо все элементы, входящие в первичный контур, оставить без изменений и последовательно с ними добавить два элемента — вносимое R и вносимое X , причем если элемент связи является общим для обоих контуров, то он входит как в первичный контур, так и во вносимые сопротивления (рис. 9.3, в):

$$R_{\text{вн}} = \frac{1/(\omega^2 C_{\text{св}}^2 R_1)}{R_2^2 + (\omega L_2 - 1/\omega C_2 - 1/\omega C_{\text{св}})^2};$$

$$X_{\text{вн}} = - \frac{(1/\omega^2 C_{\text{св}}^2) (\omega L_1 - 1/\omega C_1 - 1/\omega C_{\text{св}})}{R_2^2 + (\omega L_2 - 1/\omega C_2 - 1/\omega C_{\text{св}})^2}.$$

Тогда

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = (R_1 + R_{\text{вн}}) + j(\omega L_1 - 1/\omega C_1 - 1/\omega C_{\text{св}} + X_{\text{вн}}); \quad \dot{I}_1 = \dot{U}_1 / \underline{Z}_{\text{вх}};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 (1/j\omega C_{\text{св}}) / (1/jC_{\text{св}} + 1/j\omega C_2 + j\omega L_2 + R_2);$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 (R_2 + j\omega L_2 + 1/j\omega C_2) / [R_2 + j(\omega L_2 - 1/\omega C_2 - 1/\omega C_{\text{св}})].$$

9.9. В схеме рис. 9.3, б известны все элементы, кроме $C_{\text{св}}$. Какое значение должна иметь емкость $C_{\text{св}}$, чтобы коэффициент связи был равен 0,1, если $C_1 = C_2 = C$?

Указание: изучите сначала с. 275—277 в [1].

9.10. В схеме рис. 9.4, а рассчитать значение критической связи $K_{\text{кр}}$, если $L_1 = L_2 = L = 1$ мГн, $C_1 = C_2 = C = 1$ нФ, $R_1 = R_2 = R = 20$ Ом.

Указание: изучите сначала с. 279—281 в [1].

9.11. В схеме рис. 9.4, а по исходным данным, приведенным в задаче 9.10, рассчитать ток $I_{2\text{мм}}$, если $U_1 = 1$ В, и ток I_2 при $K = 2K_{\text{кр}}$.

Указание: изучите сначала с. 277—279 в [1].

9.12. Рассчитать коэффициент передачи на резонансной частоте и абсолютную полосу пропускания в цепи, приведенной в задаче 9.10, при критической связи.

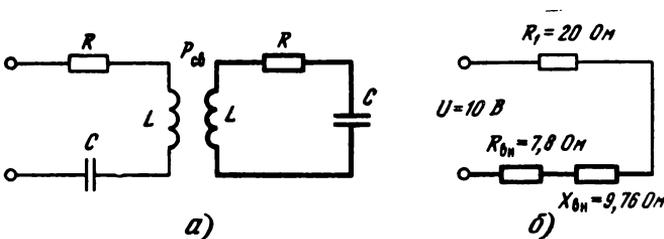


Рис. 9.4

Указание: изучите сначала с. 285—288 в [1].

9.13. Рассчитать и построить кривую коэффициента передачи на резонансной частоте в задаче 9.10 при изменении параметра связи $P_{св}$ от 0,5 до 2,41, если $Q=50$.

Указание: изучите сначала с. 285—289 в [1].

Решение: В связанных системах передаточная функция определяется из выражения $H = P_{св}Q / \sqrt{(1 + P_{св}^2)^2 - 2\xi^2(P_{св}^2 - 1) + \xi^4}$, где Q — добротность каждого контура; $P_{св}$ — параметр связи; ξ — обобщенная расстройка. На резонансной частоте $\xi=0$ и выражение передаточной функции принимает вид $H_0 = P_{св}Q / (1 + P_{св}^2)$. Подставляя различные значения $P_{св}$, получаем соответствующее значение H_0 .

9.14. В схеме рис. 9.4, а по условиям, приведенным в задаче 9.10, определить обобщенную граничную расстройку $\xi_{гр}$ и абсолютную полосу пропускания Π ; если $P_{св}=1,6$.

Указание: изучите сначала с. 290 в [1].

9.15. В схеме рис. 9.4, а по условиям, приведенным в задаче 9.10, определить взаимную индуктивность M , при которой полоса пропускания равна полосе пропускания одиночного контура с такими же параметрами.

Указание: изучите сначала с. 290, 291 в [1].

9.16. В схеме рис. 9.4, а рассчитать частоты, на которых коэффициент передачи максимален, если $L_1=L_2=L=200$ мкГн, $C_1=C_2=C=200$ пФ, $R=10$ Ом, а связь в 2 раза больше критической. Определить значение H_{max} .

Указание: изучите сначала с. 287 и 289 в [1].

9.17. Рассчитать абсолютную полосу пропускания цепи, приведенной в задаче 9.16. Во сколько раз данная полоса пропускания шире, чем при критической связи?

Указание: изучите сначала с. 290 в [1].

9.18. В схеме рис. 9.4, а $L=5$ мГн, $C=5$ нФ, $R=12,5$ Ом, связь критическая. Определить избирательность, обеспечиваемую контуром при расстройке на $\Delta f=5$ кГц.

Указание: изучите сначала с. 288, 289 в [1].

Решение. Избирательность цепи определяется из выражения B (дБ) $= 20 \lg(U_{с0}/U_c)$, где $U_{с0}$ — напряжение на выходе цепи при резонансной частоте; U_c — напряжение на этом же элементе при расстройке. В связанных системах при критической связи $H_{окр} = Q/2$, $H_{кр} = Q / \sqrt{4 + \xi^4}$, откуда B (дБ) $= 20 \lg \sqrt{4 + \xi^4/2}$. Рассчитаем f_0 , Q и ξ при $\Delta f = 5$ кГц: $f_0 = 1/2\pi \sqrt{LC} = 1/(6,28 \sqrt{5 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}) = 1000 \cdot 10^3 / 6,28 \cdot 5 = 31,85$ кГц ≈ 32 кГц; $Q = \sqrt{L/C}/R = \sqrt{5 \cdot 10^{-3}/5 \cdot 10^{-9}}/12,5 = 80$; $\xi = 2\Delta f Q / f_0 = 2,5 \cdot 80 / 32 = 25$; $B = 20 \lg(\sqrt{4 + (25^4)/2}) = 20 \lg 312,5 = 20 \cdot 2,5 = 50$ дБ. (В одиночном контуре $B = 20 \lg \sqrt{1 + \xi^2} = 20 \lg \sqrt{1 + (25)^2} = 20 \cdot \lg 25 = 20 \cdot 1,398 \approx 28$ дБ.)

9.19. По условию задачи 9.18 определить абсолютную расстройку Δf , при которой обеспечивается избирательность $B=32$ дБ.

Указание: разберите задачи 8.10 и 9.18.

Решение. Так как $B=20 \lg(\sqrt{4+\xi^4}/2)$, то $\lg(\sqrt{4+\xi^4}/2)=32/20=1,6$. Потенцируя обе части равенства, получим $\sqrt{4+\xi^4}/2=10^{1,6}=39,8$ или $4+\xi^4=6400$, откуда $\xi=8,94$, $\Delta f=\xi f_0/2Q=8,94 \cdot 32/2 \cdot 80=1,79$ кГц. (В одиночном контуре для получения такой же избирательности потребовалась бы значительно большая расстройка: $B_{\text{одн}}=20 \lg \sqrt{1+\xi^2}$, т. е. $32=20 \lg \sqrt{1+\xi^2}$, откуда $\sqrt{1+\xi^2}=39,8$, т. е. $\xi=40$ или $\Delta f=\xi f_0/2Q=40 \cdot 32/2 \cdot 80=8$ кГц. Для получения одинаковой избирательности в связанной системе при критической связи абсолютная расстройка потребовалась в $8/1,79 \approx 4,5$ раза меньшей, чем в одиночном контуре с такой же добротностью. Значительно лучшие избирательные свойства связанных систем, объясняются более крутыми склонами передаточной АЧХ, чем у АЧХ одиночных контуров.)

9.20. В задаче 8.10 было показано, что в одиночном контуре с резонансной частотой $f_0=1590$ кГц и добротностью $Q=50$ при абсолютной расстройке $\Delta f=100$ кГц обеспечивалась избирательность 16 дБ. Какую избирательность обеспечит связанная система с такой же добротностью при той же резонансной частоте и критической связи?

Указание: разберите сначала задачи 9.18 и 9.19.

9.21. В схеме, показанной на рис. 9.4, а, связь между контурами критическая, $L_1=L_2=L=100$ мкГн, $C=100$ пФ, $R_1=R_2=R=20$ Ом, при этом первичный контур настроен в резонанс на частоту генератора, а емкость вторичного контура C_2 такая, при которой резонансная частота вторичного контура равна граничной частоте всей связанной системы. Определить мощность в сопротивлении R_2 , если $U_1=10$ В.

Указание: изучите сначала с. 279—289 в [1].

Решение. Данную задачу можно решать двумя способами: электротехническим (т. е. через реактивное сопротивление X , взаимную индуктивность M) и радиотехническим (т. е. с использованием параметров Q , ξ , $P_{\text{св}}$). Решим данную задачу обоими способами и покажем, насколько второй способ предпочтительнее первого.

Электротехнический способ. Параметры первичного контура заданы и известно, что частота генератора равна резонансной частоте первичного контура. Можно определить частоту генератора: $f_{\Gamma}=1/2\pi \sqrt{LC}=1/(6,28 \sqrt{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12}})=1590$ кГц. Добротность контуров $Q_1 \approx Q_2=Q=\sqrt{L/C/R}=\sqrt{100 \cdot 10^{-6}/100 \cdot 10^{-12}/20}=50$. Если бы контур был одиночным, то полоса пропускания определялась бы из выражения

$P_{\text{од}} = f_0/Q$. Но так как система связанная, а связь критическая, полоса пропускания в $\sqrt{2}$ раз шире полосы пропускания одиночного контура при той же добротности, т. е. $P_{\text{св. кр}} = P_{\text{од}} \sqrt{2} = 1,41 f_0 \cdot Q = 1,41 \cdot 1590/50 = 44,84$ кГц.

Резонансная частота вторичного контура $f_{02} = f_r \pm P/2 = 1590 \pm 44,84/2 = 1612$ (или 1567,6) кГц. Произведем расчеты для частоты 1612 кГц. Определим значение емкости C_2 , при которой резонансная частота вторичного контура равна 1612 кГц. Так как $f_0 = 1/2\pi \sqrt{LC}$, то $C_2 = 1/(2\pi f_0)^2 L_2 = 1/(2\pi \times 1612 \cdot 10^3)^2 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 1/(1,0248 \cdot 10^{14} \cdot 100 \cdot 10^{-6}) = 97,58$ пФ. Таким образом, емкость C_1 первичного контура равна 100 пФ, а емкость вторичного 97,58 пФ при частоте генератора $f_r = 1590$ кГц, т. е. $\omega_r = 2\pi f_r = 6,28 \cdot 1590 \cdot 10^3 = 10^7$ 1/с. Определим сопротивления каждого из контуров на частоте, задаваемой генератором, т. е. 10^7 1/с. Так как первичный контур настроен при этом в резонанс, то его эквивалентное сопротивление равно резистивному сопротивлению контура $R_1 = 20$ Ом. Вторичный контур расстроен, следовательно, его сопротивление является комплексным и определяется из выражения $Z_2 = R_2 + j(\omega_r L_2 - 1/\omega_r C_2) = 20 + j[10^7 \cdot 100 \cdot 10^{-6} - 1/(10^7 \cdot 97,58 \cdot 10^{-12})] = 20 + j(1000 - 1025) = 20 - j25$ Ом.

Заменим двухконтурную схему эквивалентной одноконтурной (рис. 9.4, б). Для этого следует все сопротивления первого контура внести в схему без изменений, а вместо вторичного контура добавить в первичный два элемента: вносимое R и вносимое X , причем $R_{\text{вн}} = \omega^2 M^2 R_2 / Z_2^2$; $X_{\text{вн}} = -\omega^2 M^2 X_2 / Z_2^2$. Очевидно, что для использования данных выражений необходимо знать взаимную индуктивность M . Так как $K = M/\sqrt{L_1 L_2}$, а при одинаковых индуктивностях $K = M/L$, то $M = KL$. Поскольку связь по условию задачи критическая, $M = K_{\text{кр}} L$. Но критическая связь $K_{\text{кр}}$ численно равна $1/Q$, откуда $K_{\text{кр}} = 1/50 = 0,02$ и $M = 0,02 \times 100 \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 10^{-6}$ Гн = 2 мкГн.

Рассчитаем $R_{\text{вн}}$ и $X_{\text{вн}}$: $R_{\text{вн}} = (\omega M)^2 R_2 / (R_2^2 + X_2^2) = (10^7 \cdot 2 \times 10^{-6})^2 \cdot 20 / (20^2 + 25^2) = 400 \cdot 20 / 1025 = 6,8$ Ом; $X_{\text{вн}} = -(\omega M)^2 X_2 / (R_2^2 + X_2^2) = -400(-25) / 1025 = 9,76$ Ом. Комплексный ток в первичном контуре $I_1 = \dot{U}_1 / \underline{Z}_{\text{вх}} = U_1 / [(R_1 + R_{\text{вн}}) + jX_{\text{вн}}] = 10 / [(20 + 6,8) + j9,76] = 10 / (28,46 e^{j19,7^\circ}) = 0,3514 e^{-j19,7^\circ}$. Определим комплексный ток во вторичном контуре I_2 . По второму закону Кирхгофа для вторичного контура $0 = \dot{I}_2 \underline{Z}_2 - \dot{I}_1 \underline{Z}_M$, откуда $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \underline{Z}_M / \underline{Z}_2 = 0,3514 e^{-j19,35^\circ} 20 e^{j90^\circ} / 32 e^{-j51,34^\circ} = 0,22 e^{j122^\circ}$.

Мощность в сопротивлении R_2 $P_{R_2} = I_2^2 R_2 = (0,22)^2 20 = 0,968$ Вт ≈ 1 Вт.

Таблица 9.1

Первый знак шифра	Исходные данные					
	U_1 , В	X_{L1} , Ом	X_{C2} , Ом	R_1 , Ом	R_3 , Ом	X_{C4} , Ом
1	100	60	10	5	42	92
2	140	82	12	6	34	86
3	192	24	14	7	26	100
4	57	86	16	12	29	76
5	81	75	18	11	31	78
6	112	68	20	10	38	83
7	172	92	11	9	17	59
8	64	50	13	13	20	81
9	86	70	15	14	22	64
0	105	59	17	15	36	71

Таблица 9.2

Второй знак шифра	Исходные данные					
	X_{C1} , Ом	R_2 , Ом	X_{L2} , Ом	X_{L3} , Ом	R_4 , Ом	K
1	12	9	42	18	8	0,64
2	20	11	52	24	12	0,76
3	24	6	60	30	5	0,58
4	16	14	50	22	15	0,72
5	28	10	56	36	14	0,80
6	22	7	62	28	9	0,55
7	30	13	54	34	16	0,82
8	14	12	46	20	11	0,68
9	26	5	58	32	13	0,78
0	18	8	48	26	10	0,60

Радиотехнический способ. Поскольку связь между контурами критическая, $P_{св}=1$. Вторичный контур настроен на граничную частоту всей системы, поэтому $\xi_{2гр}=\sqrt{2}$. В этом случае $R_{вн}=P_{св}^2 R_1/(1+\xi_2^2)=1 \cdot 20/3=6,66$ Ом; $X_{вн}=- (\xi_2^2 P_{св}^2 R_1)/(1+\xi_2^2)=-(-1,41 \cdot 1 \cdot 20)/(1+2)=9,588$ Ом. Результат, полученный вторым способом, более точен, так как из-за незначительного различия в числовых значениях при расчете емкости C_2 и

эквивалентного сопротивления вторичного контура возникают некоторые погрешности. Найдя $R_{вн}$, можно рассчитать ток I_1 , а затем определить $P_{R_2} = I_1^2 R_{вн}$ (напомним, что на резистивном вносимом сопротивлении при токе I_1 рассеивается та же мощность, что на сопротивлении R_2 при токе I_2). В данном случае $P_{R_2} = (0,3514)^2 \cdot 6,8 \approx 0,9$ Вт.

9.22. Индивидуальные задания. По исходным данным, приведенным в табл. 9.1 и 9.2 и схеме, показанной на рис. 9.5: а) рассчитать токи во всех ветвях с помощью законов Кирхгофа; б) проверить баланс мощностей; в) заменить связанную систему эквивалентной одноконтурной (через $R_{вн}$ и $X_{вн}$) и рассчитать токи во всех ветвях; г) заменить связанную систему эквивалентной Т-образной и составить уравнения по законам Кирхгофа для получившейся цепи.

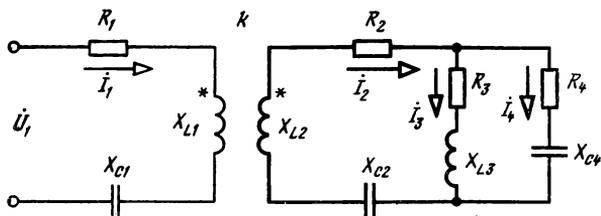


Рис. 9.5

Глава 10. ЦЕПИ ПРИ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

МГНОВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ

10.1. Построить кривую напряжения, мгновенные значения которого описываются выражением $u(t) = 25 + 10\sin(\omega_1 t - 30^\circ) + 30\sin(2\omega_1 t + 45^\circ) - 40\sin(3\omega_1 t + 45^\circ)$.

Указание: изучите сначала с. 292—297 в [1].

Решение. Как видно из заданного уравнения, данное негармоническое напряжение состоит из постоянной составляющей и трех гармонических составляющих с частотами ω_1 , $2\omega_1$ и $3\omega_1$. Построить результирующую кривую можно двумя способами: ручным либо с помощью ПМК, причем второй спо-

соб более точный и требует меньших затрат времени. Разберем эти способы.

Способ первый. Для построения кривых следует взять миллиметровую бумагу длиной 30×50 см (брать меньшие размеры не рекомендуется, поскольку кривая третьей гармоники в этом случае оказывается сжатой, что создает неудобства при построении и понижает точность результата). Затем необходимо определить возможные максимальные положительные и отрицательные значения. В худшем случае может оказаться, что в какие-то моменты напряжения всех гармоник оказываются максимальными при одинаковых знаках. В данном примере максимальное положительное значение $\dot{U}_m = 25 + 100 + 30 + 40 = 195$ В, но может оказаться равным $25 - 100 - 30 - 40 = -145$ В (знак у постоянной составляющей не меняется). Таким образом, размах данной кривой $\dot{U}_m = \dot{U}_m - \dot{U}_m = 195 - (-145) = 340$ В (об обозначениях см. с. 15, 16 в [11]).

При построении графиков удобно выбирать масштаб, при котором в каждой клетке содержится 10 В, поэтому ширина миллиметровой бумаги должна превышать 34 см. Горизонтальную линию оси времени, очевидно, следует провести так, чтобы выше ее было не менее $0,1 \dot{U}_m$ клеток, а ниже $0,1 \dot{U}_m$ клеток. (В данном примере — 20 и 15 сантиметровых клеток соответственно). Вертикальную ось следует провести, отступя от левой стороны миллиметровки на 10 клеток. Цену деления на горизонтальной оси по первой гармонике удобно выбрать равной 10° . Далее следует синим цветом нанести синусоиду первой гармоники, причем если начальная фаза напряжения отрицательная, то начало синусоиды должно быть сдвинуто правее начала координат, а если положительная — то соответственно левее. Если перед максимальным значением стоит знак «плюс», то кривая идет вверх, а если «минус» — то вниз (рис. 10.1). Очевидно, что синусоида первой гармоники займет по горизонтали 36 клеток, что соответствует 360° . При построении синусоидальных кривых следует учитывать, что $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 30^\circ = 0,5$, $\sin 45^\circ = 0,71$, $\sin 60^\circ = 0,87$, $\sin 90^\circ = 1$, и проводить кривую через соответствующие точки. В первом и втором квадрантах знаки у синуса положительные, в третьем и четвертом — отрицательные.

Построив синусоиду первой гармоники, следует нанести синусоиду второй гармоники. Так как частота второй гармоники в 2 раза больше частоты первой, то период второй гармоники в 2 раза меньше, чем первой, и период второй гармоники займет не 36 клеток, как у первой, а 18. В интервале, равном 36 клеткам, помещаются два периода кривой второй гармоники. Цена клетки по второй гармонике оказывается 20° . Значения углов по второй гармонике следует нанести красным цветом над горизонтальной осью. Кривая второй гармоники наносится

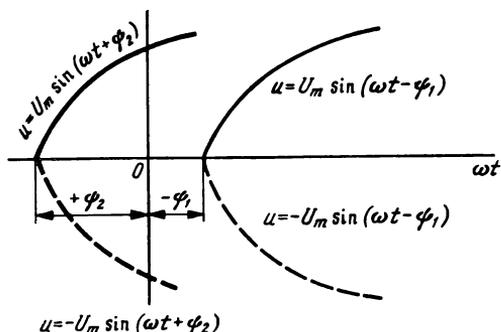


Рис. 10.1

также красным цветом. Аналогично период третьей гармоники в 3 раза меньше, чем первой, все обозначения, относящиеся к третьей гармонике, и синусоиду с утроенной частотой наносят зеленым цветом, цифры углов по третьей гармонике следует писать под осью, ниже цифр, относящихся к первой гармонике. Постоянную составляющую проводят карандашом. Нанеся кривые всех гармонических составляющих, строят результирующую кривую негармонического сигнала. Для этого при $\omega t = 0^\circ$ алгебраически складывают ординаты всех составляющих и наносят точку с получившимся значением. Затем аналогичным образом получают алгебраическую сумму при 10° (по первой гармонике), затем при 20° и т. д. Получившиеся точки соединяют плавной кривой, черным цветом. Очевидно, что значения ординат несинусоидальной кривой при 0 и 360° должны оказаться одинаковыми.

Способ второй. Значения точек, через которые проходят гармонические составляющие, и результирующую негармоническую кривую можно рассчитать с помощью ПМК по программе 3. 10.1. При этом необходимо иметь в виду следующее обстоятельство: прежде чем вводить в ПМК программу, следует задаться числом точек за период, которые будут рассчитываться на калькуляторе и через которые будет проведена каждая кривая. На практике используют 18, 24 или 36 точек. Если кривая строится по 18 точкам, то интервал между точками составляет 20° (все значения приводятся по первой гармонике). При 24 точках $\Delta\omega t = 15^\circ$, при 36 точках $\Delta\omega t = 10^\circ$. Значения $\Delta\omega t$ следует внести в программу на шагах 30 и 31. Если точек 18 и $\Delta\omega t = 20^\circ$, то на шаге 30 записывают 2, а на шаге 31 — 0. Если расчет должен производиться для 36 точек, то заносят — 30—1, 31—0 и т. д. Число точек, разумеется, может быть любым, для учебных целей допустимо ограничиться 18.

Для записи значений, получаемых на калькуляторе, требуется заготовить таблицу вида 10.1.

Программа 3. 10.1 для построения графиков несинусоидальных напряжений по заданным постоянной составляющей и трем гармоническим составляющим

Переключатель углов установить в положение «Г» (градусы)

F /-/ В/О F ВП

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	x-П4 44	Ох 0Г	x-П7 47	3 03	x-П0 40	П-х0 60	x-П↑ 4Е	9 09	+	x-ПD 4Г
1	П-х4 64	П-х0 60	× 12	КП-хD ГГ	+	F7 1С	КП-х↑ ГЕ	× 12	П-х0 60	С/П 50
2	П-х7 67	+	x-П7 47	FП-х 5Г	05 05	П-х9 69	+	П-х8 68	С/П 50	П-х4 64
3	2 02	0 00	+	x-П4 44	5П 51	01 01	F	/-/		

Ввод исходных данных: нажать клавишу Сх (на экране 0) ÷ (на экране ЕГГОГ) ВП (на экране Г. ГГОГ 00), еще раз набрать ВП (на экране по-прежнему Г.ГГОГ 00) x-П 8 (на экране Г). Затем ввести числовые значения контрольного примера $u = 25 + 100 \sin(\omega_1 t - 60^\circ) + 50 \sin(2\omega_1 t - 30^\circ) - 50 \sin(3\omega_1 t - 45^\circ)$ по схеме:

$$U_0 \rightarrow x \rightarrow \text{П } 9 \quad U_{m1} \rightarrow x \rightarrow \text{П } 1 \quad \psi_1 \rightarrow x \rightarrow \text{ПТА}$$

$$U_{m2} \rightarrow x \rightarrow \text{П } 2 \quad \psi_2 \rightarrow x \rightarrow \text{П } /- / U_{m3} \rightarrow x \rightarrow \text{П } 3$$

$$\psi_3 \rightarrow x \rightarrow \text{П ВП}$$

Далее следует набрать значение угла первой отсчетной точки в градусах (например, нуль градусов) и пустить программу на счет нажатием клавиш В/О С/П. На экране появится цифра 3, это означает, что следующее числовое значение, для вывода которого необходимо нажать клавишу \leftrightarrow , есть мгновенное значение третьей гармоники при $\omega t = 0^\circ$ (должно оказаться 35,355). Полученный на ПМК результат надо внести в табл. 10.1, после чего нажать клавишу С/П. По окончании счета на экране появится цифра 2, нажать клавишу \leftrightarrow , на экране появится значение второй гармоники при $\omega t = 0$ (должно быть -25), занести полученное значение в табл. 10.1 и нажать клавишу С/П. По окончании счета на экране появится цифра 1, нажать клавишу \leftrightarrow , появится значение первой гармоники (должно быть -86,6), занести его в табл. 10.1 и нажать клавишу С/П. По окончании счета на экране окажется буква Г, нажать клавишу \leftrightarrow , число на экране показывает мгновенное значение негармонической кривой при данном ωt , т. е. алгебраическую сумму

Таблица 10.1

$\omega t, ^\circ$	0	20	40		360
$u_3, В$	35,36	-12,94	-48,3	...	
$u_2, В$	-25	8,68	38,3		
$u_1, В$	-86,6	-64,28	-34,2		
$u, В$	-51,24	-43,54	-19,196		

$u(0) = U_0 + u_1(0) + u_2(0) + u_3(0)$. (В данном примере должно быть $-51,247204$). Все значения при $\omega t = 0^\circ$ получены (табл. 10.1).

Затем следует нажать С/П, калькулятор начинает считать значения мгновенных напряжений всех гармоник для угла $(\omega t)_1 = (\omega t)_0 + \Delta\varphi$, где $(\omega t)_0$ — аргументы из предыдущего расчета (в данном примере 0); $\Delta\varphi$ — приращение аргумента, внесенное в шаги 30 и 31 программы З. 10.1 (в нашем примере 20°). При этом опять появится цифра 3, затем нажать \leftrightarrow , записать u_3 , С/П, появится 2, \leftrightarrow , записать u_2 , С/П, появится 1, \leftrightarrow , записать u_1 , С/П, появится Г, \leftrightarrow , записать u . После С/П начнется счет при аргументе, еще на 20° большем (в нашем примере при 40°), и т. д. Если значения, полученные на экране калькулятора при 0, 20 и 40° , совпадают с данными табл. 10.1, значит, контрольный пример решается без ошибок, следовательно, программа набрана правильно. После этого необходимо ввести свои исходные данные, набрать значение угла для первой расчетной точки (как правило, 0°) и пустить программу на счет нажатием клавиш В/О С/П, а далее поступать так, как указано выше. Если необходимо повторить расчет при каком-то значении аргумента или перейти к аргументу, отличающемуся не на 20° от предыдущего, то следует набрать значение этого угла и пустить программу на счет нажатием клавиш В/О С/П.

Примечания. 1. Если в шаге 19 программы З. 10.1 вместо С/П набрать \leftrightarrow , то при выполнении счета на экране высвечивается символ Г, а после нажатия клавиши \leftrightarrow выводится результирующее значение ординаты несинусоидальной кривой. Значения ординат отдельных гармоник на экран при этом не выводятся. 2. При вводе исходных данных необходимо иметь в виду, что если в выражении ряда гармонического сигнала имеются косинусы, то их следует превратить в синусы в соответствии с выражением $\cos \alpha = \sin(\alpha + 90^\circ)$, например $\cos 60^\circ = \sin(60^\circ + 90^\circ) = \sin 150^\circ = 0,53$. После заполнения табл. 10.1 следует нанести на миллиметровку кривые: первую гармонику синим цветом, вторую — красным, третью — зеленым, постоянную составляющую — карандашом (или каким-либо иным цветом), результирующую — черным.

10.2. Построить кривую мгновенных значений, если $u = 10 \cos \omega_1 t + 5 \cos 2\omega_1 t$.

Указание: разберите задачу 10.1 и учтите, что если какая-то гармоника отсутствует, то в программу следует заносить $U_{mk} = 0$, $\psi_k = 0$. Аналогично и для U_0 . Сравните получившуюся кривую с рис. 10.1 в [1].

10.3. Построить кривую мгновенных значений напряжений, если $u = (U_m/\pi)[1 + (\pi/2)\cos\omega_1 t + (2/3)\cos 2\omega_1 t]$ при $U_m = 100$ мВ.

Указание: разберите сначала задачи 10.1 и 10.2. Запишем выражение $u(t)$ через синусоидальную функцию:

$$\begin{aligned} u &= (U_m/\pi)[1 + (\pi/2)\cos\omega_1 t + (2/3)\cos 2\omega_1 t] = U_m/\pi + \\ &+ (U_m/2)\sin(\omega_1 t + 90^\circ) + (2U_m/3\pi)\sin(2\omega_1 t + 90^\circ) = \\ &= 31,6 + 50\sin(\omega_1 t + 90^\circ) + 21,21\sin(2\omega_1 t + 90^\circ). \end{aligned}$$

Далее все делается так, как показано в задаче 10.1. Построенную кривую сравните с кривой $u(t)$, показанной на рис. 10.2 в [1].

10.4. Варианты индивидуальных заданий на построение графиков мгновенных напряжений негармонической формы приведены в табл. 10.2.

Указание: разберите сначала задачи 10.1 и 10.2.

10.5. С помощью ПМК разложить кривую негармонических напряжений на гармонические составляющие.

Указание: изучите сначала с. 297—301 в [1].

Решение. Разложить кривую негармонического сигнала на гармонические составляющие проще всего по программе 10.3 (см. с. 301 в [1]). Сначала рассчитывают постоянную состав-

Таблица 10.2

Первый знак шифра	Мгновенное значение $u(t)$
1	$20 - 100\sin(\omega_1 t + 60^\circ) + 40\sin(2\omega_1 t - 30^\circ) + 50\sin(3\omega_1 t - 60^\circ)$
2	$-20 + 100\sin(\omega_1 t - 45^\circ) - 30\sin(2\omega_1 t - 60^\circ) + 40\sin(3\omega_1 t - 30^\circ)$
3	$-20 + 100\sin(\omega_1 t - 45^\circ) + 30\sin(2\omega_1 t - 60^\circ) - 40\sin(3\omega_1 t + 30^\circ)$
4	$25 + 100\sin(\omega_1 t - 30^\circ) - 40\sin(2\omega_1 t + 45^\circ) - 30\sin(3\omega_1 t + 90^\circ)$
5	$-25 + 100\sin(\omega_1 t - 60^\circ) + 50\sin(2\omega_1 t - 30^\circ) - 50\sin(3\omega_1 t - 45^\circ)$
6	$20 - 100\sin(\omega_1 t + 45^\circ) + 20\sin(2\omega_1 t + 60^\circ) + 40\sin(3\omega_1 t + 60^\circ)$
7	$30 + 100\sin(\omega_1 t + 30^\circ) - 50\sin(2\omega_1 t + 30^\circ) - 40\sin(3\omega_1 t - 60^\circ)$
8	$-30 + 100\sin(\omega_1 t - 45^\circ) - 60\sin(2\omega_1 t - 45^\circ) + 50\sin(3\omega_1 t + 30^\circ)$
9	$20 + 100\sin(\omega_1 t + 90^\circ) - 50\sin(2\omega_1 t - 60^\circ) + 60\sin(3\omega_1 t + 45^\circ)$
0	$-25 - 100\sin(\omega_1 t - 90^\circ) + 40\sin(2\omega_1 t + 30^\circ) - 50\sin(3\omega_1 t + 60^\circ)$

ляющую A_0 , а также синусные и косинусные коэффициенты первой гармоники A_{m1}' и A_{m1}'' , затем коэффициенты второй гармоники A_{m2}' и A_{m2}'' и третьей A_{m3}' и A_{m3}'' . При расчете первой гармоники шаг $\Delta\omega t$ целесообразно выбрать равным 20° , при этом получится 18 отсчетных точек.

При расчете второй гармоники шаг следует уменьшить до 15° , отсчетных точек при этом становится 24. (Следует иметь в виду, что интервал 15° по первой гармонике соответствует 30° — по второй). При расчете коэффициентов A_{m3}' и A_{m3}'' число точек должно быть не менее 36. Для этого необходимо выбрать шаг $\Delta\omega t = 10^\circ$ первой гармоники (что соответствует 30° по третьей гармонике). Надо также учитывать, что при вводе в ПМК исходных данных все числовые значения указываются применительно к первой гармонике вне зависимости от того, для какой гармоники производится счет. Зная коэффициенты A_{mk}' и A_{mk}'' , определяют $A_{mk} = \sqrt{(A'_{mk})^2 + (A''_{mk})^2}$ и $\psi_k = \arctg(A''_{mk}/A'_{mk})$. Рассчитав амплитуды и аргументы каждой гармоники, записывают выражение мгновенных значений негармонического сигнала: $u = U_0 + U_{m1}\sin(\omega_1 t + \psi_1) + U_{m2}\sin(2\omega_1 t + \psi_2) + U_{m3}\sin(3\omega_1 t + \psi_3) + \dots$. Например, прямоугольный сигнал с максимальным значением $U_m = 100$ В при скважности 10 раскладывается в ряд $u(t) = 10 + 19,7\sin(\omega_1 t + 72^\circ) + 18,8\sin(2\omega_1 t + 54^\circ) + 17,15\sin(3\omega_1 t + 36^\circ) + 15,2\sin(4\omega_1 t + 18^\circ) + 12,7\sin(5\omega_1 t + 10\sin(6\omega_1 t - 18^\circ) + 7,3\sin(7\omega_1 t - 36^\circ) + 4,7\sin(8\omega_1 t - 54^\circ) + 2,16\sin(9\omega_1 t - 72^\circ) + \dots$ (см. табл. 10.1 на с. 305 в [1]).

10.6. Рассчитать мгновенные токи во всех ветвях (рис. 10.2, а) и мгновенные напряжения на выходе цепи (т. е. между точками а и б), если к входу приложено одно из негармонических напряжений, приведенных в задаче 10.4.

Указание: изучите сначала с. 219—221 в [1].

Решение. При негармонических воздействиях расчет следует производить для постоянной составляющей и каждой гармоники в отдельности, при этом удобно номер ветви или обозначения точек показывать нижним индексом, а номер гармоники, для которой производится расчет, — верхним, записанным в скобках. Например, запись $i_2^{(3)}$ означает мгновенные токи третьей гармоники во второй ветви. Аналогично $u_{ab}^{(0)}$ — мгновенные напряжения постоянной составляющей между точками а и б.

Примечание. В тех случаях, когда номер ветви указывать нет необходимости, например в неразветвленных цепях, номер гармоники записывают внизу в виде индекса. На этом основании запись $u_{MN} = u_0 + u_1 + u_2$ означает, что мгновенные напряжения между точками М и N состоят из постоянной составляющей, первой и второй гармоник.

При расчете каждой частной схемы следует помнить, что значения резистивных сопротивлений не зависят от частоты, мо-

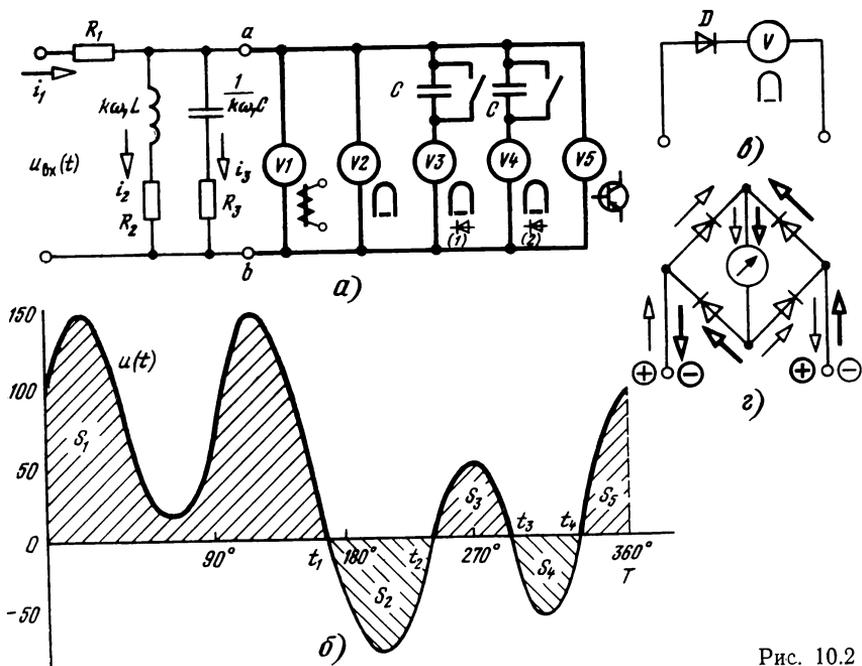


Рис. 10.2

дули индуктивных сопротивлений определяются из выражения $k\omega_1 L$, емкостных $1/k\omega_1 C$, где k — номер гармоники, а ω_1 — угловая частота первой гармоники. Следовательно, на рис. 10.2, $i_1^{(0)} = i_2^{(0)} = U_{вх}^0 / (R_1 + R_2)$, а $i_3^{(0)} = I_3^{(0)} = 0$.

Каждую гармоническую составляющую можно рассчитывать комплексным методом, например с помощью ПК, используя программу 6.1 (см. с. 181 в [1]). Получив комплексное значение напряжения или тока, следует сразу же записать соответствующие мгновенные значения. Например, если оказалось, что $I_3^{(2)} = 2,72e^{-j58^\circ}$, то $i_3^{(2)} = 2,72 \sqrt{2} \sin(2\omega_1 t - 58^\circ)$ и т. д. После того

Таблица 10.3

Второй знак шифра	Исходные данные					Второй знак шифра	Исходные данные				
	$R_1, \text{ Ом}$	$\omega_1 L, \text{ Ом}$	$R_2, \text{ Ом}$	$1/\omega_1 C, \text{ Ом}$	$R_3, \text{ Ом}$		$R_1, \text{ Ом}$	$\omega_1 L, \text{ Ом}$	$R_2, \text{ Ом}$	$1/\omega_1 C, \text{ Ом}$	$R_3, \text{ Ом}$
1	10	10	15	50	20	6	30	25	55	140	50
2	15	15	20	60	25	7	30	20	35	140	60
3	10	15	20	50	20	8	40	40	60	200	80
4	15	10	15	60	25	9	50	50	75	250	100
5	20	20	35	75	25	0	60	60	70	200	90

как все токи и напряжения по данной гармонике рассчитаны, необходимо выполнить все проверки (см. примеры 6.6 и 6.10 в [1], решения задач 6.1, 6.3, 6.6), после чего следует рассчитывать отклики для следующей гармоники и т. д.

Варианты индивидуальных заданий для расчета откликов в цепи (рис. 10.2, а) приведены в табл. 10.2 (первый знак шифра) и табл. 10.3 (второй знак шифра).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАНИЙ ПРИБОРОВ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ НЕГАРМОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

10.7. Определить показания вольтметров в схеме, рис. 10.2, а, если $u_{ab}(t) = 50 + 50 \sin \omega_1 t - 20 \sin (2\omega_1 t - 30^\circ) + 80 \sin (3\omega_1 t + 30^\circ)$.

Указание: разберите сначала задачи 10.1—10.3.

Решение. Как видно из обозначений, V_1 является вольтметром электромагнитной системы. Приборы электромагнитной, электродинамической, ферродинамической, термоэлектрической, электростатической систем реагируют на действующее значение приложенного к ним напряжения или протекающего через них тока (через приборы электростатической системы постоянный ток не проходит). Шкалы этих приборов градуируются также в действующих значениях напряжения или тока, т. е. в соответствии с выражением

$$U = \sqrt{U_0^2 + (U_{m1}^2/2) + (U_{m2}^2/2) + (U_{m3}^2/2)} = \\ = \sqrt{50^2 + (50^2/2) + (20^2/2) + (80^2/2)} = 84,56 \text{ В.}$$

Вольтметр магнитоэлектрической системы V_2 реагирует на среднее значение за период и градуируется в этих же значениях:

$$U_{\text{cp}} = (1/T) \left[\int_0^T u dt \right] = (1/T) \left\{ \int_0^T [U_0 + U_{m1} \sin \omega_1 t + \right. \\ \left. + U_{m2} \sin (2\omega_1 t + \psi_2) + U_{m3} \sin (3\omega_1 t + \psi_3)] dt \right\}.$$

Интеграл за период каждой гармонической составляющей равен нулю (подробнее см. с. 32 в [1]), поэтому среднее значение за период численно равно постоянной составляющей приложенного к прибору напряжения (или протекающего через него тока). На этом основании вольтметр V_2 покажет напряжение $U_{V_2} = U_2 = 50 \text{ В}$.

Вольтметры V_3 , V_4 и V_5 имеют нелинейные элементы, поэтому их показания рассчитывать удобнее графоаналитическим способом. Для этого следует начертить кривую напряжения между точками a и b , рассчитав ее так, как показано в задаче 10.3.

При напряжении u_{ab} , заданном в условии данной задачи, кривая имеет вид, показанный на рис. 10.2, б.

Рассмотрим работу прибора V_3 при замкнутом ключе K_1 . Этот вольтметр собран по схеме, показанной на рис. 10.2, в. Так как конденсатор C в этом случае замкнут, то получается схема с открытым входом (подробнее см. с. 317, 318 в [1]) и для положительных напряжений клапан D представляет пренебрежимо малое сопротивление, а для отрицательных — весьма большое. Можно сказать, что диод пропускает прямую (т. е. положительную) полуволну и не пропускает обратную (т. е. отрицательную). Так как измерительный механизм магнитоэлектрической системы реагирует на среднее за период значение, его показание пропорционально среднему однополупериодному значению измеряемого напряжения, т. е.

$$U_{V_3, \text{откр}(1)\text{пр}} \propto (1/T) \left[\int_0^{t_1} u dt + \int_{t_2}^{t_3} u dt + \int_{t_4}^T u dt \right].$$

Но каждый из интегралов численно равен площади, ограниченной участком кривой и осью абсцисс. Следовательно,

$$U_{V_3, \text{откр}(1)\text{пр}} \propto (|S_1| + |S_3| + |S_5|).$$

Таким образом, приборы выпрямительной системы с однополупериодным выпрямлением при прямом включении и открытом входе реагируют на среднее однополупериодное значение измеряемой величины, которое при переменном токе любой формы отличается от действующего. Чтобы показания таких приборов совпали (только совпали, обратите на это внимание!) с действующими значениями напряжений синусоидальной формы, цифры, нанесенные на шкалах таких приборов, преднамеренно завышают во столько раз, во сколько действующее значение напряжения синусоидальной формы больше среднего однополупериодного значения этого же напряжения, т. е. вводят градуировочный коэффициент $K_{гр} = (U_{\sim} / U_{\text{ср}(1)\sim})$.

Действующее значение напряжения синусоидальной формы равно $U_m / \sqrt{2}$, а среднее однополупериодное U_m / π (см. выражение (10.11) на с. 295 в [1]), при этом $K_{гр} = (U_m \pi / U_m \sqrt{2}) = 2,22$. Таким образом, приборы выпрямительной системы с однополупериодным выпрямлением при открытом входе показывают среднее однополупериодное значение измеряемого напряжения, увеличенное в 2,22 раза. Показания этих приборов численно совпадают с действующими значениями при напряжениях гармонической формы. Соответственно при прямом включении $U_{\text{выпр}(1)\text{откр.прям}} = 2,22[\Sigma S_{(+)} / T]$, где $\Sigma S_{(+)}$ — арифметическая сумма площадей кривой, находящихся над осью времени. Аналогично при обратном включении клапан пропускает напряжения с отрицательной полярностью и не пропускает — с

положительной, при этом $U_{\text{выпр}(1)\text{откр.обр}} = 2,22[\Sigma S_{(-)}/T]$, где $\Sigma S_{(-)}$ — арифметическая сумма площадей, находящихся под осью времени. Например, на рис. 10.2, б $\Sigma S_{(+)} = S_1 + S_3 + S_5$, а $\Sigma S_{(-)} = S_2 + S_4$.

Площади можно рассчитать графически, чаще всего — по клеткам. Например, при u_{ab} , указанном в условии задачи, $U_{\text{ср}(1)\text{прям}} = (S_1 + S_3 + S_5)/T \approx 18\,000 \text{ В} \cdot \text{град}/360^\circ = 50 \text{ В}$; $U_{\text{ср}(1)\text{обр}} = (S_2 + S_4)/T \approx 2700 \text{ В} \cdot \text{град}/360^\circ = 7,5 \text{ В}$, откуда $U_{V_3\text{откр}(1)\text{пр}} = 2,22 U_{\text{ср}(1)\text{пр}} = 2,22 \cdot 50 = 111 \text{ В}$; $U_{V_3\text{откр}(1)\text{обр}} = 2,22 U_{\text{ср}(1)\text{обр}} = 2,22 \cdot 7,5 = 16,65 \text{ В}$.

Очевидно, что в общем случае показания вольтметров выпрямительной системы с открытым входом при прямом и обратном включениях отличаются друг от друга и не являются ни действующими, ни максимальными, ни средними за период. При напряжениях негармонической формы показания данных приборов выражаются только в условных делениях, но никак не в вольтах. Можно подсчитать число делений, против которого установится стрелка указателя, или поделив показание прибора на 2,22, определить среднее однополупериодное значение измеряемого напряжения.

В вольтметрах с двухполупериодной схемой измеряемое напряжение измеряется чаще всего с помощью мостовой схемы (рис. 10.2, з). Тогда через прибор проходят обе полуволны измеряемого напряжения (тока), а в этом случае кривая, находящаяся под осью времени, как бы «переворачивается». Показания таких приборов при любой полярности одинаковы и пропорциональны среднему двухполупериодному значению, называемому также средним по модулю (не путайте со средним за период, это совершенно разные понятия!). Чтобы показания этих приборов совпадали с действующим значением напряжений гармонической формы, вводится градуировочный коэффициент 1,11, представляющий отношение действующего напряжения гармонической формы к среднему двухполупериодному значению этого же напряжения. Как следует из выражения (10.12) в [1], $U_{\text{ср}(2)\text{сн}} = 2U_m/\pi$, откуда $K_{\text{гр.выпр}(2)} = U_{\sim}/U_{\text{ср}(2)\text{сн}} = (U_m\pi/2\sqrt{2}U_m) = 1,11$.

Графически показания приборов выпрямительной системы с двухполупериодным выпрямлением при открытом входе определяются из выражения $U_{\text{выпр}(2)\text{откр}} = 1,11[\Sigma |S_+| + \Sigma |S_-|]/T$. Применительно к рис. 10.2, б $U_{\text{выпр}(2)\text{откр}} = 1,11[|S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| + |S_5|]/T = 1,11[(18\,000 + 2700) \text{ В} \cdot \text{град}/360^\circ] = 63,8 \text{ В}$. Данное напряжение имеет форму, отличную от синусоидальной, поэтому действующим значением показание прибора не является. Можно только утверждать, что среднее по модулю значение измеряемого напряжения в данном случае равно $63,8/1,11 = 57,5 \text{ В}$. Если разомкнуть ключи K у вольтметров V_3 и V_4 , то получатся выпрямительные приборы с закрытым входом.

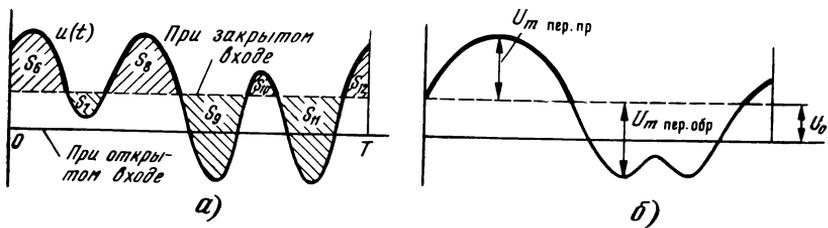


Рис. 10.3

Поскольку постоянная составляющая измеряемого напряжения через конденсатор не проходит (емкостное сопротивление для всех гармонических составляющих полагаем пренебрежимо малым), среднее значение за период напряжения на зажимах измерительного механизма равно нулю, а в этом случае площадь кривой над осью времени равна площади кривой под осью. Напомним, что графически $U_{cp} = (|S_+| - |S_{(-)}|) / T$ (подробнее см. с. 317, 318 в [1]). Ось времени при этом смещается на значение постоянной составляющей (рис. 10.3, а).

При напряжении, приведенном на рис. 10.3, а, показание прибора детекторной системы с однополупериодным выпрямлением при прямом включении определяется из выражения $U_{выпр(1)пр} = 2,22[(S_6 + S_8 + S_{10} + S_{12}) / T]$, а при обратном включении — из выражения $U_{выпр(1)обр} = 2,22[(S_7 + S_9 + S_{11}) / T]$. Так как площади над и под новой осью времени в схемах с закрытым входом одинаковые, то $U_{выпр(1)пр} = U_{выпр(1)обр}$. В приборах с двухполупериодным выпрямлением площадь над новой осью удваивается, но градуировочный коэффициент оказывается в 2 раза меньше (1,11 вместо 2,22), поэтому показания выпрямительных приборов с закрытым входом остаются без изменения вне зависимости от способов выпрямления и полярности включения прибора, т. е. $U_{выпр} = 2,22[\Sigma S' / T]$, где $\Sigma S'$ — суммарная площадь кривой над или под новой осью времени.

Показания прибора V_5 электронного типа пропорциональны максимальному значению переменной составляющей измеряемого напряжения $U_{m \text{ пер.пр}}$ или $U_{m \text{ пер.обр}}$ в зависимости от полярности включения прибора — рис. 10.3, б (подробнее см. с. 318, 319 в [1]). Чтобы показания этих приборов численно совпадали с действующим значением напряжения синусоидальной формы, введен градуировочный коэффициент, равный отношению действующего значения напряжения синусоидальной формы к его максимальному значению, т. е. $K_{гр} = U_{снн} / U_{m \text{ снн}} = U_m / U_m \sqrt{2} = 1 / \sqrt{2} = 0,707$. В общем случае $U_{V,пр} = 0,707 U_{m \text{ пер.пр}}$, $U_{V,обр} = 0,707 U_{m \text{ пер.обр}}$.

10.8. Определить показания приборов на рис. 10.2, а, если напряжение между точками а и б имеет форму, показанную на рис. 10.4, а.

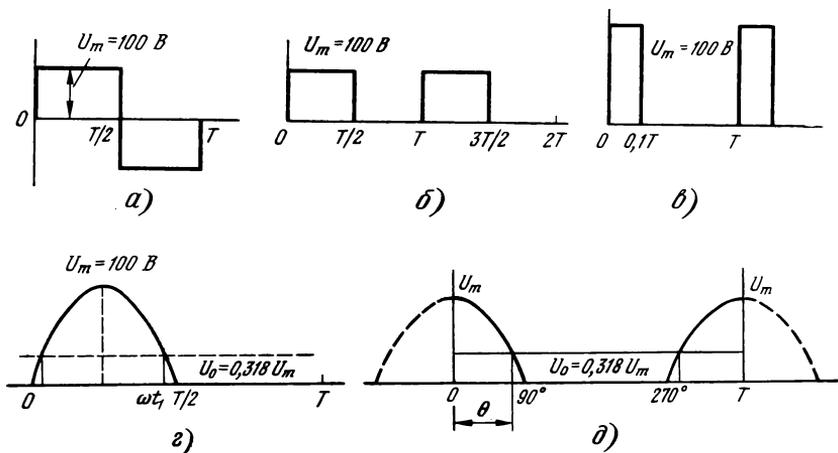


Рис. 10.4

Указание: разберите сначала задачу 10.7.

10.9. Решить задачу 10.8, если напряжение между точками *a* и *b* имеет форму, показанную на рис. 10.4, б.

Указание: разберите сначала задачу 10.7.

10.10. Решить задачу 10.7, если напряжение между точками *a* и *b* имеет форму, показанную на рис. 10.4, в.

Указание: разберите сначала задачу 10.7.

10.11. Решить задачу 10.7, если напряжение между точками *a* и *b* имеет форму, показанную на рис. 10.4, г.

Указание: разберите сначала задачу 10.7.

Решение. Так как мгновенные напряжения сигнала, показанного на рис. 10.4, г, $u(t) = (U_m/\pi) [1 + (\pi/2) \cos \omega_1 t + (2/3) \cos 2\omega_1 t - (2/15) \cos 4\omega_1 t + \dots]$ (см. выражение 10.11 на с. 295 в [1]), то

$$U = (U_m/\pi) \sqrt{1 + (3,14/2)^2 (1/2) + (2/3)^2 (1/2) + (2/15)^2 (1/2) + \dots} = (100/3,14) \cdot 1,571 = 50 \text{ В.}$$

Тогда $U_{V2} = U_0 = U_m/\pi = 31,8 \text{ В}$. Для расчета показаний прибора V_3 необходимо подсчитать площадь кривой, находящейся над осью времени. Так как данная кривая изменяется по косинусоидальному закону, то площадь кривой можно рассчитать аналитически:

$$S_+ = 2 \int_0^{T/4} U_m \cos \omega t dt = (2U_m / \omega) \sin \omega t \Big|_0^{T/4} = [2U_m / (2\pi/T)] (1 - 0) = U_m T / \pi,$$

тогда $U_{V3, \text{откр. пр}} = 2,22 S_+ / T = 2,22 U_m T / \pi T = 70,7 \text{ В}$, $U_{V3, \text{откр. обр}} = 0$.

В схемах с закрытым входом ось абсцисс следует перенести таким образом, чтобы она проходила через значение постоянной составляющей U_0 , которая при сигналах косинусоидальной формы $U_m/\pi = 100/3,14 = 31,8 \text{ В}$. Угол ωt , при котором мно-

венное значение косинусоидальной кривой равно значению постоянной составляющей, определяется из выражения $U_m \cos \omega t_1 = U_0$, откуда $\omega t_1 = \arccos (U_0/U_m)$ — рис. 10.4, д. Получившийся угол является половиной той части периода, в течение которого в цепи протекает ток, он называется углом отсечки и обозначается греческой буквой θ (читается «тэта»). Таким образом, $\cos \theta = U_0/U_m$ или $\theta = \arccos (U_0/U_m)$. Определим значение θ для косинусоидального сигнала:

$$\theta = \arccos (U_m/\pi U_m) = \arccos 0,318 = 71,43^\circ = 0,379\pi.$$

Показания приборов выпрямительной системы при закрытом входе определяются из выражения

$$\begin{aligned} U_{\text{выпр.закр}} &= 2,22 \cdot 2 \frac{1}{T} \int_0^{71,43^\circ} (U_m - U_0) \cos \omega t dt = \\ &= (2 \cdot 2,22/T \omega) (U_m - U_0) \sin \omega t \Big|_0^{71,43^\circ} = \\ &= (2 \cdot 2,22T/2\pi T) [U_m - (U_m/\pi)] \sin 71,43^\circ = \\ &= 2,22 (62,8/3,14) \cdot 0,95 = 42,2 \text{ В}. \end{aligned}$$

Показания прибора V_5 определяются из выражений $U_{V_5, \text{пр}} = 0,707 [U_m - (U_m/\pi)] = 44,4 \text{ В}$; $U_{V_5, \text{обр}} = 0,707 (U_m/\pi) = 22,5 \text{ В}$. Обратите внимание, что V_5 является прибором с закрытым входом, поэтому отсчеты ординат следует производить от горизонтальной оси, проведенной параллельно оси времени и отстоящей от нее на значение U_0 . Данный прибор не измеряет постоянную составляющую, просто в данной кривой значение U_m пер. обр численно совпало со значением U_0 .

СПЕКТРЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

10.12. Определить спектр сигналов косинусоидальной формы при различных углах отсечки.

Указание: разберите сначала с. 292—295, 301—310 в [1] и задачу 10.11.

Решение. Углом отсечки θ в импульсах косинусоидальной формы называется половина той части периода, в течение которой в цепи протекает ток (рис. 10.5, а). Если время протекания равно времени паузы, то $\theta = 90^\circ$, при времени импульса, меньшем, чем время паузы, $\theta < 90^\circ$.

Для определения амплитуды гармонических составляющих импульсов косинусоидальной формы удобно использовать специальные выражения: $U_0 = \alpha_0 U_m$, $U_{m1} = \alpha_1 U_m$, $U_{m2} = \alpha_2 U_m$, $U_{m3} = \alpha_3 U_m$, $U_{mk} = \alpha_k U_m$, где U_m — максимальное значение косинусоидального импульса; $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — коэффициенты Берга (по имени рассчитавшего их академика Акселя Ивановича

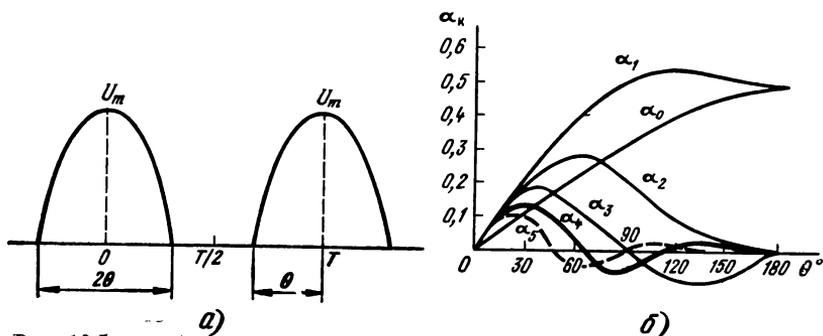


Рис. 10.5

Берга, 1893—1979). Коэффициенты Берга зависят только от угла отсечки импульса и определяются из выражений

$$\alpha_0 = (\sin \theta - \theta \cos \theta) / [\pi (1 - \cos \theta)];$$

$$\alpha_1 = (\theta - \sin \theta \cos \theta) / [\pi (1 - \cos \theta)];$$

$$\alpha_k = (2/\pi) \left[\frac{(\sin k\theta \cos \theta - k \cos k\theta \sin \theta)}{k(k^2 - 1)(1 - \cos \theta)} \right],$$

где k — номер гармоники, для которой рассчитывается коэффициент α . На практике коэффициенты α_0 — α_3 часто определяют по графикам (рис. 10.5, б) или по программе 3. 10.2.

Программа 3. 10.2 для определения значений коэффициентов Берга

Переключатель углов установить в положение «Р»

F /-/ B/O F BП

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	x-Π0 40	C/Π 50	F + 20	X 12	1 01	8 08	0 00	÷ 13	x-Π9 49	F8 1Г
1	x-Π7 47	1 01	- 11	F + 20	X 12	x-Π8 48	Π-x0 60	F x=0 5E	28 28	Π-x9 69
2	Π-x7 67	X 12	Π-x9 69	F7 1C	- 11	Π-x8 68	÷ 13	B/O 52	Π-x0 60	F X 22
3	1 01	- 11	x-Π5 45	F x=0 5E	44 44	Π-x9 69	F7 1C	Π-x7 67	X 12	Π-x9 69
4	- 11	Π-x8 68	÷ 13	B/O 52	Π-x0 60	Π-x9 69	X 12	F8 1Г	Π-x9 69	F7 1C
5	X 12	Π-x0 60	X 12	Π-x0 60	Π-x9 69	X 12	F7 1C	Π-x7 67	X 12	- 11
6	2 02	X 12	Π-x5 65	÷ 13	Π-x0 60	÷ 13	Π-x8 68	÷ 13	B/O 52	F /-/ 52

Ввод исходных данных: нажать В/О Номер гармоники С/П θ (в градусах) С/П. После счета на экране высветится значение α_n . Для ввода новых исходных данных нажать клавиши В/О k С/П θ С/П (где k — номер гармоники, для которой производится счет, θ — угол отсечки косинусоидального импульса в градусах).

Контрольные примеры. При $k=1, \theta=60^\circ$ α должно оказаться 0,3910022; при $k=2, \theta=90^\circ$ $\alpha=0,2122066$; при $k=3, \theta=45^\circ$ $\alpha=0,18112968$.

10.13. Рассчитать амплитудные значения первых пяти гармоник косинусоидального импульса с углом отсечки $\theta=60^\circ$, если $U_m=1$ В.

Указание: разберите сначала задачу 10.12.

10.14. Рассчитать амплитудные значения трех гармонических составляющих косинусоидального импульса с углом отсечки $\theta=30^\circ$, если $U_m=25$ В.

Указание: разберите сначала задачу 10.12.

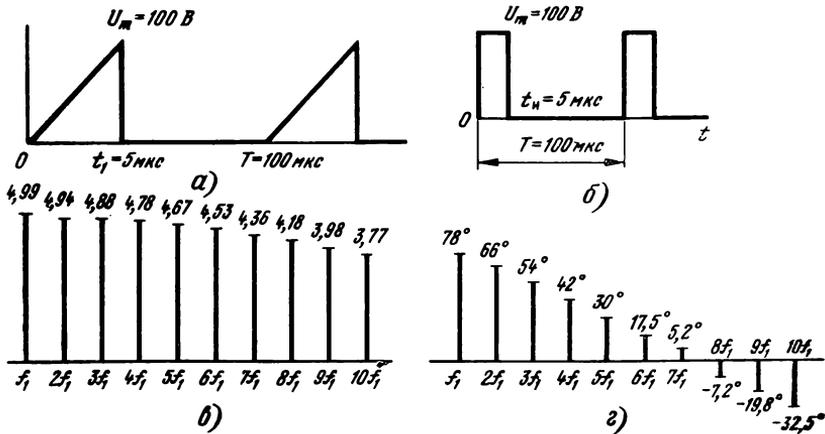


Рис. 10.6

10.15. Определить выражение мгновенных напряжений и построить амплитудный и фазный спектры периодического напряжения, показанного на рис. 10.6, а.

Указание: изучите сначала с. 292—295 в [1] и разберите задачу 2.41.

Решение. Как показано, например, в задаче 2.41, в интервале $0 \dots t_1$ $u_1(t) = (U_m/t_1)t$. В интервале $t_1 \dots T$ $u_2(t) = 0$. Рассчитаем постоянную составляющую:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^{t_1} u_1(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{t_1} \frac{U_m}{t_1} t dt = (U_m/T t_1) (t^2/2) \Big|_0^{t_1} = \\ = \frac{U_m t_1^2}{2T t_1} = \frac{U_m t_1}{2T} = 100 \cdot 5 / 2 \cdot 100 = 2,5 \text{ В.}$$

Синусные коэффициенты:

$$A'_{mk} = (2/T) \int_0^{T/2} u(t) \sin k \omega_1 t dt = (2/T) \int_0^{t_1} (U_m/t_1) t \sin k \omega_1 t dt = \\ = (2U_m/T t_1) \left[\int_0^{t_1} t \sin k \omega_1 t dt \right].$$

Интеграл, записанный в скобках, следует брать по частям. Напомним, что

$$\int_0^{t_1} u dv = uv \Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} v du.$$

Обозначим $u = t$, $dv = \sin k \omega_1 t dt$. В этом случае $du = dt$,

$$v = \int \underline{\sin} k \omega_1 t dt = (1/k \omega_1) (-\cos k \omega_1 t).$$

Тогда

$$\int_0^{t_1} \underbrace{t}_{u} \underbrace{\sin k \omega_1 t dt}_{dv} = \underbrace{t (1/k \omega_1) (-\cos k \omega_1 t)}_v \Big|_0^{t_1} - \\ - \int_0^{t_1} \underbrace{(1/k \omega_1) (-\cos k \omega_1 t)}_v \underbrace{dt}_{du} = (t_1/k \omega_1) \left[-\cos k 2\pi \left(\frac{t_1}{T} \right) \right] + \\ + (1/(k \omega_1 k \omega_1)) \sin k 2\pi (t_1/T) = (1/k \omega_1) \left[t_1 \left(-\cos k 2\pi \left(\frac{t_1}{T} \right) \right) + \right. \\ \left. + (1/k \omega_1) \sin k 2\pi (t_1/T) \right] = (T t_1 / k 2\pi) [(-\cos k 2\pi (t_1/T)) + \\ + (T/t_1 k 2\pi) \sin k 2\pi (t_1/T)]$$

и, следовательно, $A'_{mk} = (2U_m T t_1 / T t_1 k 2\pi) [-\cos k 2\pi (t_1/T) + \\ + (T / k t_1 2\pi) \sin k 2\pi (t_1/T)] = (U_m / k \pi) [T / (t_1 k 2\pi) \times \\ \times \sin k 2\pi (t_1/T) - \cos k 2\pi (t_1/T)]$. При $U_m = 100 \text{ В}$, $T = 100 \text{ мкс}$, $t_1 = 5 \text{ мкс}$ $A'_{mk} = (100/k \cdot 3,14) [(100/k 6,28 \cdot 5) \sin k 360^\circ (5/100) - \\ - \cos k 360^\circ (5/100)] = (31,8/k) [(3,18/k) \sin k 18^\circ - \cos k 18^\circ]$. Аналогичным образом получим выражение для определения косинусных коэффициентов A''_{mk} :

$$A''_{mk} = (2/T) \int_0^{t_1} (U_m/t_1) t \cos k\omega_1 t dt =$$

$$= (2U_m/T t_1) \left[\int_0^{t_1} \underbrace{t}_{u} \underbrace{\cos k\omega_1 t}_{dv} dt \right].$$

Обозначим $u = t$, $dv = \cos k\omega_1 t dt$, откуда $du = dt$,
 $v = \int \cos k\omega_1 t dt = (1/k\omega_1) \sin k\omega_1 t$.

Тогда

$$\int_0^{t_1} t \cos k\omega_1 t dt = t (1/k\omega_1) \sin k\omega_1 t \Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} (1/k\omega_1) \sin k\omega_1 t dt =$$

$$= (t_1/k\omega_1) \sin 2k\pi (t_1/T) - (1/k\omega_1 k\omega_1) (-\cos k\omega_1 t) \Big|_0^{t_1} =$$

$$= (t_1/k\omega_1) \left[\sin 2k\pi \left(\frac{t_1}{T} \right) \right] + (1/t_1 k\omega_1) (\cos k2\pi (t_1/T) - 1) =$$

$$= (t_1 T / k2\pi) [\sin 18^\circ + (100/k5 \cdot 6,28) (\cos (k \cdot 18^\circ) - 1)].$$

Тогда $A''_{mk} = (2U_m t_1 T / T t_1 k2\pi) [\sin k \cdot 18^\circ + (3,18/k) (-1 + \cos k \cdot 18^\circ)] = (31,8/k) [\sin k \cdot 18^\circ + (3,18/k) (\cos k \cdot 18^\circ - 1)]$. Как известно, $A_{mk} = \sqrt{(A'_{mk})^2 + (A''_{mk})^2}$, а $\psi_k = \arctg (A''_{mk}/A'_{mk})$.

Рассчитаем A'_{mk} и A''_{mk} для первых десяти гармоник, результаты сведем в табл. 10.4. Амплитудный спектр показан на рис. 10.6, в, а фазный — на рис. 10.6, г. Таким образом, мгновенные значения напряжения, показанного на рис. 10.6, в, оказались $u(t) = 2,5 + 4,99 \sin(\omega_1 t + 78^\circ) + 4,945 \sin(2\omega_1 t + 66^\circ) + 4,88 \sin(3\omega_1 t + 54^\circ) + 4,78 \sin(4\omega_1 t + 42^\circ) + 4,67 \sin(5\omega_1 t + 30^\circ) + 4,53 \sin(6\omega_1 t + 17,5^\circ) + 4,36 \sin(7\omega_1 t + 5,2^\circ) + 4,18 \sin(8\omega_1 t - 7,2^\circ) + 3,98 \sin(9\omega_1 t - 19,8^\circ) + 3,77 \sin(10\omega_1 t - 32,5^\circ) + \dots$, где $f_1 = 1/T = 1/100 \times$

Т а б л и ц а 10.4

k	U'_m , В	U''_m , В	U_{m^*} , В	ψ , град	k	U'_m , В	U''_m , В	U_{m^*} , В	ψ , град
1	1,037	4,877	4,986	78	6	4,316	1,36	4,526	17,5
2	2,013	4,517	4,945	66	7	4,346	0,3956	4,364	5,2
3	2,87	3,943	4,878	54	8	4,15	-0,525	4,183	-7,21
4	3,563	3,193	4,784	41,9	9	3,75	-1,35	3,984	-19,8
5	4,053	2,313	4,667	29,7	10	3,183	-2,026	3,77	-32,5

$\times 10^{-6} = 10^4$ Гц = 10 кГц; $\omega_1 = 2\pi f_1 = 6,28 \cdot 10^4$ 1/с = $62,8 \cdot 10^3$ 1/с = 62,8 к/с.

10.16. Определить выражение для мгновенного напряжения, построить амплитудный и фазный спектры периодического напряжения, показанного на рис. 10.6, б.

Указание: изучите сначала с. 303—306 в [1] и разберите задачу 10.15.

10.17. Определить спектры на входе и выходе цепи, показанной на рис. 10.7, а, если контуры одинаковые и настроены на частоту пятой гармоники входного сигнала. Связь между контурами критическая, добротность каждого контура 20, $T = 1$ мс, $t_n = 100$ мкс, $U_m = 1$ В.

Указание: изучите сначала с. 285—288, 293—295 в [1] и разберите задачу 10.15.

Решение. Определим частоту первой гармоники: $f_1 = 1/T = 1/10^{-3} = 1000$ Гц = 1 кГц; $\omega_1 = 2\pi f_1 = 6,28 \cdot 10^3$ 1/с. Как следует из выражения (10.18) и примера 10.1 в [1], периодический негармонический сигнал прямоугольной формы со скважностью $S = T/t_n = 1000/100 = 10$ и максимальным значением $U_m = 1$ В = 1000 мВ раскладывается в ряд: $u(t) = 100 + 197 \sin(\omega_1 t + 72^\circ) + 188 \sin(2\omega_1 t + 54^\circ) + 171,5 \sin(3\omega_1 t + 36^\circ) + 152 \sin(4\omega_1 t + 18^\circ) + 127 \sin 5\omega_1 t + 100 \sin(6\omega_1 t - 18^\circ) + 73 \sin(7\omega_1 t - 36^\circ) + 47 \sin(8\omega_1 t - 54^\circ) + 21,6 \sin(9\omega_1 t - 72^\circ) + \dots$ мВ.

Рассчитаем резонансную частоту контуров связанной системы. Так как в соответствии с условием контуры настроены на пятую гармонику, то $f_0 = 5f_1 = 5(1/T)$, где T — период негармонического сигнала, откуда $f_0 = 5/10^{-3} = 5$ кГц, $\omega_5 = 5\omega_1 = 5 \cdot 6,28 \cdot 10^3 = 31,4 \cdot 10^3$ 1/с. Модуль максимального значения выходного напряжения на резонансной частоте $H_{m \text{ вых}} = H_0 U_{m \text{ вх}(5)} = (Q/2) 127 = (20/2) 127 = 1270$ мВ. Определим обобщенные расстройки на частотах четвертой и шестой гармоник. Каждая из

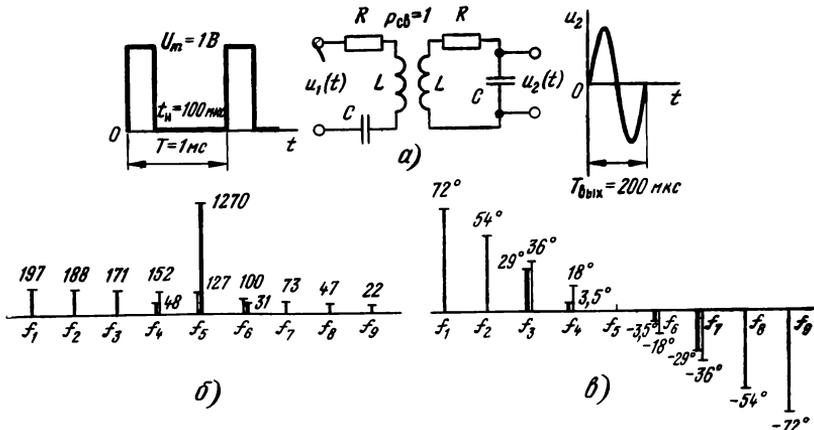


Рис. 10.7

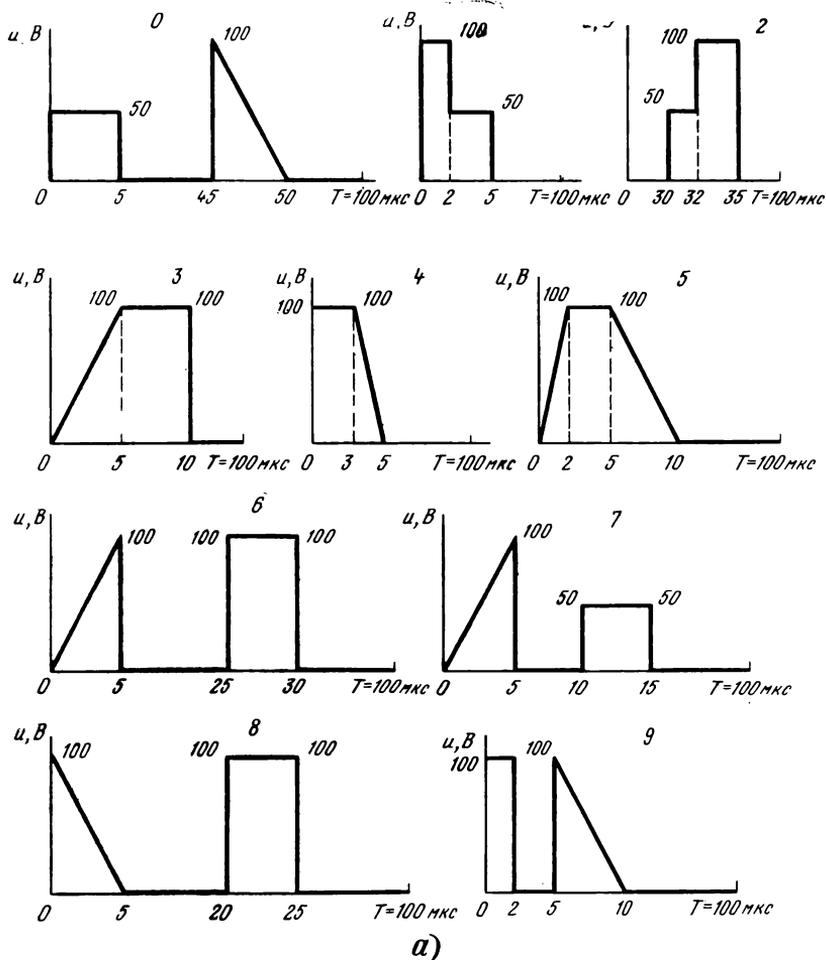
этих частот отстоит от резонансной на значение частоты первой гармоники, т. е. $\xi_{(4,6)} = \pm 2Q[f_{(1)}/f_{(5)}] = \pm 2 \cdot 20[f_{(1)}/5f_{(1)}] = \pm 8$, причем $\xi_4 = -8$, а $\xi_6 = 8$. Так как связь между контурами критическая, то $U_{m \text{ вых}(4)} = [U_{m \text{ вх}(4)} \cdot Q] / \sqrt{4 + \xi_{(4)}^2} = (152 \cdot 20) / \sqrt{4 + (8)^2} = 47,5$ мВ, $U_{m \text{ вых}(6)} = [U_{m \text{ вх}(6)} \cdot Q] / \sqrt{4 + \xi_{(6)}^2} = (100 \cdot 20) / \sqrt{4 + (8)^2} = 31,25$ мВ. Аналогично рассчитаем максимальные значения выходных напряжений на частоте третьей и седьмой гармоник; $\xi_{(3)} = [-2Q \cdot 2f_{(1)}/f_{(5)}] = [-2 \cdot 20 \cdot 2f_{(1)}/5f_{(1)}] = -16$; $\xi_{(7)} = +16$; $U_{m \text{ вых}(3)} = [U_{m \text{ вх}(3)} Q] / \sqrt{4 + \xi_{(3)}^2} = 73 \cdot 20 / 256 = 5,7$ мВ. Выходными напряжениями на остальных частотах пренебрегаем.

Оценим избирательность B , обеспечиваемую рассматриваемой цепью на частотах f_3, f_4, f_6, f_7 относительно напряжения на частоте f_5 : $B_{(5-4)} = 20 \lg (U_5/U_4) = 20 \lg (1270/47,5) = 20 \lg 26,8 = 28,5$ дБ; $B_{(5-6)} = 20 \lg (1270/31,25) = 32$ дБ; $B_{(5-3)} = 20 \lg (1270/13,4) = 39,5$ дБ; $B_{(5-7)} = 20 \lg (1270/5,7) = 47$ дБ.

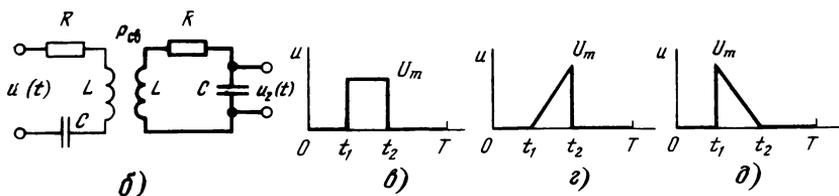
Рассчитаем фазные углы выходных напряжений. Так как $\varphi_{\text{н}} = \varphi_{\text{вых}} - \varphi_{\text{вх}}$, то $\varphi_{\text{вых}} = \varphi_{\text{вх}} + \varphi_{\text{н}}$. При критической связи $\varphi_{\text{н(кр)}} = \arctg [2\xi / (\xi^2 - 2)]$, откуда $\varphi_{\text{вых}} = \varphi_{\text{вх}} + \arctg [2\xi / (\xi^2 - 2)]$; $\varphi_{\text{вых}(3)} = 36^\circ + \arctg [-2 \cdot 16 / (16^2 - 2)] = 36^\circ - \arctg (32/254) = 36^\circ - \arctg 0,126 = 36^\circ - 7,2^\circ = 28,8^\circ$; $\varphi_{\text{вых}(4)} = 18^\circ + \arctg [-2 \cdot 8 / (8^2 - 2)] = 18^\circ - 14,5^\circ = -3,5^\circ$; $\varphi_{\text{вых}(6)} = -18^\circ + \arctg [2 \cdot 8 / (8^2 - 2)] = -18^\circ + 14,5^\circ = -3,5^\circ$; $\varphi_{\text{вых}(7)} = -36^\circ + \arctg [2 \cdot 16 / (16^2 - 2)] = -36^\circ + 7,2^\circ = -28,8^\circ$. Таким образом, мгновенные напряжения на выходе цепи $u_2(t) = 13,4 \sin(3\omega_1 t + 28,8^\circ) + 47,5 \sin(4\omega_1 t + 3,5^\circ) + 1270 \sin 5\omega_1 t + 31,25 \sin(6\omega_1 t - 3,5^\circ) + 5,7 \sin(7\omega_1 t - 28,8^\circ)$. Входной и выходной амплитудные спектры показаны на рис. 10.7, б, а фазные спектры — на рис. 10.7, в. Поскольку амплитуды всех гармоник составляют менее 5% амплитуды пятой гармоники, выходное напряжение можно считать состоящим из одной гармонической составляющей, имеющей частоту, в 5 раз большую, чем частота первой гармоники входного напряжения, т. е. $u_2(t) \approx 1270 \sin 5\omega_1 t$. Но всякий сигнал, состоящий только из одной частоты, имеет гармоническую форму. Следовательно, прямоугольное напряжение со скважностью 10 преобразуется в периодическое гармоническое с периодом 0,2 мс.

10.18. Варианты для индивидуальных заданий. Рассчитать и построить амплитудные и фазные спектры на входе и выходе цепи, если входное напряжение показано на рис. 10.8, а (первый знак шифра), а вид цепи — на рис. 10.8, б. Второй знак шифра указывает параметры цепи в соответствии с табл. 10.5.

Указание: изучите сначала с. 293—297, 303—306 в [1] и разберите задачи 10.15, 10.17. Для расчета выходного напряжения следует выбрать значения элементов связанной системы, при которой резонансная частота каждого контура равна частоте k -й гармоники входного сигнала при заданной добротности Q (значения $k, P_{\text{св}}, Q$ берутся из табл. 10.5, резистивные сопро-



а)



б)

в)

г)

д)

Рис. 10.8

тивления контура следует выбирать в пределах 20... 50 Ом).
 Дополнительные пояснения к расчету см. на с. 268—271.

10.19. В цепи, показанной на рис. 10.9, а, входное напряжение имеет форму прямоугольного двустороннего сигнала с раз-

Второй знак шифра	Параметры цепи			Второй знак шифра	Параметры цепи		
	k	Q	$\rho_{св}$		k	Q	$\rho_{св}$
1	5	20	1,00	6	8	30	1,25
2	6	22	1,05	7	7	32	1,30
3	7	24	1,10	8	6	34	1,35
4	8	26	1,15	9	5	36	1,40
5	9	28	1,20	0	6	38	1,45

махом $\check{U}=10$ В и периодом 10 мкс. Колебательный контур настроен на частоту третьей гармоники входного сигнала. Рассчитать и построить амплитудные спектры входных и выходных напряжений, если $Q=25$, $R_t=10 Z_{вх(0)}$, а также ослабление уровней выходных напряжений на первых пяти гармониках.

Указание: изучите с. 244—247, 295, 330—331 в [1] и разберите задачи 10.15 и 10.17.

Решение. Мгновенные значения двусторонних напряжений прямоугольной формы описываются рядом $u(t) = (4U_m/\pi)[\sin \omega_1 t + (1/3) \sin 3\omega_1 t + (1/5) \sin 5\omega_1 t + \dots + (1/k) \sin k\omega_1 t]$ (рис. 10.9, б).

Если размах этого напряжения равен 10 В, то $U_m=5$ В. Мгновенные значения $u(t)=6,37 \sin \omega_1 t + 2,12 \sin 3\omega_1 t + 1,28 \sin 5\omega_1 t + \dots$. Так как в цепи рис. 10.9, а $R_t \gg Z_{вх(0)}$, коэффициент передачи H определяется из выражения $H=Z_{вх(0)}/(R_t \sqrt{1+\xi_c^2})$ (см. формулу (8.59) в [1]). На резонансной частоте (в данном случае при $f=3/T$) $H_0=Z_{вх(0)}/R_t=Z_{вх(0)}/10Z_{вх(0)}=0,1$. Максимальное значение выходного напряжения на третьей гармонике $U_{m \text{ вых}(3)}=H_0 U_{m \text{ вх}(3)}=0,1 \cdot 2,12=0,212$ В=212 мВ. Выходные напряжения на второй и четвертой гармониках равны нулю, поскольку в спектре входного сигнала эти гармоники отсутствуют. Определим модули коэффициентов передачи на частотах первой и пятой гармоник. На данных частотах $\xi_c=2\Delta f Q_c/f_0$, где $Q_c=$

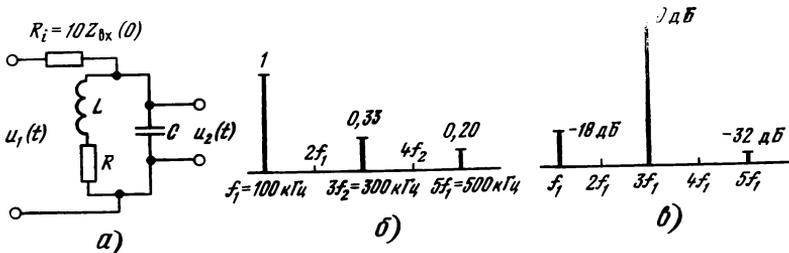


Рис. 10.9

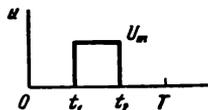
$= Q/(1+Z_{вх(0)}/R_i) = 20/1,1 = 18$; $\Delta f/f_0 = (1 \cdot f_1 - 3f_1)/3f_1 = -0,67$, тогда $\xi_{(1)} = -2 \cdot 0,67 \cdot 18 = -24$; $H_{(1)} = 0,1/\sqrt{1+(24)^2} = 4,13 \cdot 10^{-3}$; $U_{m \text{ вых}(1)} = 4,17 \cdot 10^{-3} \cdot 6,37 = 26,5 \cdot 10^{-3} \text{ В} = 26,5 \text{ мВ}$. Аналогично на пятой гармонике $\xi_{(5)} = 24$, $H_{(5)} = 4,17 \cdot 10^{-3}$, $U_{m \text{ вых}(5)} = 4,17 \cdot 10^{-3} \times 1,28 = 5,3 \text{ мВ}$. Рассчитаем ослабления в децибелах.

Примем выходное напряжение на третьей гармонике за нулевой уровень. В этом случае напряжение на первой гармонике будет ослаблено на $20 \lg (U_{m \text{ вых}(3)}/U_{m \text{ вых}(1)}) = 20 \lg (212/26,5) = 20 \lg 8 = 18 \text{ дБ}$. Ослабление на пятой гармонике $20 \lg (212/5,3) = 20 \lg 40 = 20 \cdot 1,6 = 32 \text{ дБ}$ (рис. 10.9, в).

10.20. Решить задачу 10.19, если входное напряжение имеет однополупериодную форму с $U_m = 10 \text{ В}$, а контур настроен на частоту второй гармоники.

Указание: изучите с. 244—247, 292—295, 330, 331 в [1] и задачу 10.19. Коэффициенты ряда Фурье периодических сигналов (рис. 10.8, в) определяют из выражений $A'_{mk} = (U_m/k\pi) [\cos k \cdot 360^\circ (t_1/T) - \cos k \cdot 360^\circ (t_2/T)]$; $A''_{mk} = (U_m/k\pi) [\sin k \cdot 360^\circ (t_2/T) - \sin k \cdot 360^\circ (t_1/T)]$. Расчеты числовых значений A'_{mk} , A''_{mk} , A_{mk} , ψ_k удобно производить с помощью ПМК по программе 3. 10.3.

Программа 3. 10.3 для расчета значений A'_{mk} , A''_{mk} , ψ_k периодических сигналов вида



F /-/ B/O F B/O

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$\pi-x2$ 62	3 03	6 06	0 00	x 12	$\pi-x5$ 65	\div 13	$x-\pi6$ 46	$\pi-x3$ 63	x 12
1	$x-\pi7$ 47	F8 1Г	\uparrow 0E	$\pi-x6$ 66	$\pi-x4$ 64	x 12	$x \pi8$ 48	F8 1Г	- 11	\uparrow 0E
2	$\pi-x1$ 61	x 12	$\pi-x2$ 62	\div 13	F + 20	\div 13	$x-\pi0$ 4C	BП 51	29 29	$\pi-x8$ 68
3	F7 1C	\uparrow 0E	$\pi-x7$ 67	F7 1C	- 11	$\pi-x1$ 61	x 12	$\pi-x2$ 62	\div 13	F + 20
4	\div 13	$x-\pi D$ 4Г	BП 51	44 44	$\pi-x D$ 6Г	$\pi-x C$ 6C	\div 13	F6 1L	$x-\pi B$ 4L	BП 51
5	51 51	$\pi-x C$ 6C	F x 22	\uparrow 0E	$\pi-x D$ 6Г	F x 22	+ 10	F - 21	$x-\pi A$ 4-	C/П 50
6	F	/-/								

Ввод исходных данных: $U_m \rightarrow P1$, k (номер гармоники) $\rightarrow P2$, $t_1 \rightarrow P3$, $t_2 \rightarrow P4$, $T \rightarrow P5$, В/О, С/П (время можно вводить в любых одинаковых единицах).

Вывод: $A_{mk} \rightarrow$ на дисплее и в РА, $\psi_k \rightarrow$ из РВ, $A'^{mk} \rightarrow$ из РС, $A''_{mk} \rightarrow$ из РД.

Контрольный пример. $U_m = 100$ В, $t_1 = 20$ мкс, $t_2 = 25$ мкс, $T = 100$ мкс.
Для первой гармоники

1 0 0 х—П 1 1 х—П 2 2 0 х—П
3 2 5 х—П 4 1 0 0 х—П 5 В/О С/П

После счета на дисплее и в регистре А должно высветиться значение $U_{m1} = 9,9589277$, после нажатия П \rightarrow х /—/ $\psi_1 = 9,0000022^\circ$, после П \rightarrow х ВП $U_{m1} = 9,8363167$, после П \rightarrow х C_x $U_{m1}'' = 1,55792$. Для изменения какого-то параметра следует набрать на клавиатуре новое число, ввести в соответствующий регистр и нажать клавиши В/О С/П. Например, для определения всех коэффициентов второй гармоники следует нажать

2 х—П 2 В/О С/П

Должно оказаться: $U_{m2} = 9,8363169$, $\psi_2 = -72^\circ$, $U_{m2}' = 3,0395889$, $U_{m2}'' = -9,3548934$.

Если контрольный пример выполняется, то можно вводить исходные данные своего варианта и производить расчеты для заданных гармоник. Коэффициенты ряда Фурье для периодических сигналов, показанных на рис. 10.8, г, определяют из выражений

$$A'_{mk} = (U_m / k\pi) \left[\frac{T}{k \cdot 2\pi (t_2 - t_1)} (\sin 360^\circ (t_2/T) - \sin 360^\circ (t_1/T) - \cos k \cdot 360^\circ (t_2/T)); \right]$$

$$A''_{mk} = (U_m / k\pi) \left[\frac{T}{k \cdot 2\pi (t_2 - t_1)} (\cos k \cdot 360^\circ (t_2/T) - \cos k \cdot 360^\circ (t_1/T) + \sin k \cdot 360^\circ (t_2/T)); \right]$$

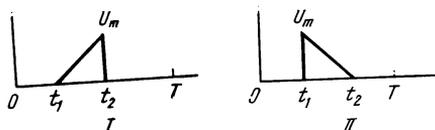
или рассчитывают на ПМК по программе 3. 10.4, а для сигналов вида рис. 10.8, д из выражений

$$U'_{mk} = (U_m / k\pi) [\cos 360^\circ (t_1/T) + \frac{T}{k \cdot 2\pi (t_2 - t_1)} (\sin 360^\circ (t_1/T) - \sin k \cdot 360^\circ (t_2/T))];$$

$$U''_{mk} = (U_m / k\pi) \frac{T}{k \cdot 2\pi (t_2 - t_1)} [\cos k \cdot 360^\circ (t_1/T) - \cos k \cdot 360^\circ (t_2/T) - \sin 360^\circ (t_1/T)],$$

или рассчитывают на ПМК по программе 3. 10.4.

Программы 3.10.4 для расчета A'_{mk} , A''_{mk} , A_{mk} , Ψ_k
 периодических сигналов видов



F /-/ B/O F 3П

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$\Pi-x2$ 62	3 03	6 06	0 00	X 12	$\Pi-x5$ 65	\div 13	$x-\Pi6$ 46	$\Pi-x4(64)$ $\Pi-x3(63)$	X 12
1	F7 1C	$x-\Pi7$ 47	\uparrow 0E	$\Pi-x6$ 66	$\Pi-x3(63)$ $\Pi-x4(64)$	X 12	F7 1C	- 11	\uparrow 0E	$\Pi-x5$ 65
2	$\Pi-x2$ 62	\div 13	2 02	\div 13	F+ 20	\div 13	$\Pi-x0$ 60	\div 13	$x-\Pi8$ 48	X 12
3	\uparrow 0E	$\Pi-x6$ 66	$\Pi-x4(64)$ $\Pi-x3(63)$	X 12	F8 1Г	$x-\Pi9$ 49	- (11) + (10)	\uparrow 0E	$\Pi-x1$ 61	$\Pi-x2$ 62
4	\div 13	F+ 20	\div 13	$x-\Pi$ \uparrow 4E	X 12	$x-\Pi0$ 4C	БП 51	48 48	$\Pi-x6$ 66	$\Pi-x3(63)$ $\Pi-x4(64)$
5	X 12	F8 1Г	/-/ 0L	\uparrow 0E	$\Pi-x9$ 69	+ 10	$\Pi-x8$ 68	X 12	\uparrow 0E	$\Pi-x7$ 67
6	+ (10) - (11)	$\Pi-x$ \uparrow 6E	X 12	$x-\Pi0$ 4Г	БП 51	66 66	$\Pi-xD$ 6Г	$\Pi-xC$ 6C	\div 13	F6 1L
7	$x-\PiB$ 4L	БП 51	73 73	$\Pi-xC$ 6C	FХ 22	\uparrow 0E	$\Pi-xD$ 6Г	F X 22	+ 10	F - 21
8	$x-\PiA$ 4-	C/П 50	F	/-/						

При наборе шагов 08, 14, 32, 36, 49, 60 для сигналов вида I следует пользоваться верхней записью, а для сигналов вида II — нижней. Программа, записанная в остальных шагах, справедлива для сигналов обоих видов.

Ввод исходных данных: $U_m \rightarrow P1$, $k \rightarrow P2$, $t_1 \rightarrow P3$, $t_2 \rightarrow P4$, $T \rightarrow P5$, $(t_2 - t_1) \rightarrow P0$, В/О, С/П (время можно вводить в любых одинаковых единицах).

Вывод. A_{mk} — на дисплее и в РА, ψ_k — из РВ, A'_{mk} — из РС, A''_{mk} — из РD.

Контрольный пример. Задано $U_m=100$ В, $t_1=20$ мкс, $t_2=25$ мкс, $T=100$ мкс, $t_2-t_1=25-20=5$ мкс (для первой гармоники

1 0 0 х—П 1 1 х—П 2 2 0 х—П

3 2 5 х—П 4 1 0 0 х—П 5 5 х—П 0 В/О

С/П).

Для сигналов вида I: на дисплее и в регистре А $U_{m1}=4,986309$, в регистре В $\psi_1=5,9978173^\circ$, в регистре С $U_{m1}'=4,9590134$, в регистре D $U_{m1}''=0,52102236$. Для расчета коэффициентов второй гармоники следует нажать клавиши 2 х—П 2 В/О С/П. На дисплее и в РА $U_{m2}=4,9454083$, нажать П—х /—/. На дисплее $\psi_2=-78,01763^\circ$, нажать П—х ВП. На экране $U'_{m2}=1,0267197$. Нажать П—х Сх. На экране $U''_{m2}=-4,8376555$ и т. д.

Для сигналов вида II: на дисплее и в регистре А $U_{m1}=4,9863154$, в регистре В $\psi_1=12,002162^\circ$, в регистре С $U'_{m1}=4,8773134$, в регистре D $U''_{m1}=1,0368973$. Для расчета коэффициентов второй гармоники следует нажать 2 х—П 2 В/О С/П. На дисплее и в РА $U'_{m2}=4,9454096$. Нажать П—х В. На экране $\psi_2=-65,982376^\circ$. Нажать П—х ВП. На экране $U'_{m2}=2,0128689$. Нажать П—х Сх. На экране $U''_{m2}=-4,5172376$.

Если контрольный пример выполняется, то можно вводить исходные данные своего варианта и производить расчеты для заданных гармоник.

Глава 11. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

11.1. Вольт-амперная характеристика цепи описывается выражением: а) $i=au^2$; б) $u=bi^2$. Определите размерность постоянных коэффициентов a и b .

Указание: изучите сначала с. 323—325 в [1].

11.2. Рассчитать и построить статические и динамические сопротивления, а также динамическую крутизну нелинейного элемента, вольт-амперная характеристика которого описывается выражением $i=au^2+bu^3$ ($a=0,002$ См/В, $b=0,001$ См/В²).

Решение. Статическим называют сопротивление нелинейного элемента постоянному току, рассчитываемое по формуле $R_{ст}=u/i=u/(au^2+bu^3)=1/(au+bu^2)$. Динамическим называется сопротивление нелинейного элемента изменению тока, рассчитываемое по формуле $R_d=du/di \approx \Delta u/\Delta i$. Весьма часто используется параметр — динамическая крутизна характеристики $S_d=1/R_d=di/du$. Рассчитаем статические и динамические сопротивления, а также динамическую крутизну: $R_{ст}=1/(0,002u+0,001u^2)$; $R_d=du/di=1/(di/du)=1/(2a+3bu^2)$; $S_d=1/R_d=2au+3bu^2$. Если вместо точного значения $R_d=$

Таблица 11.1

u, В	i, mA	R _{ст} , Ом	R _д , Ом			S _д , mA/В
			du/di	Δu/Δi при u=0,5 В	Δu/Δi при u=1В	
0	0	∞	∞	—	—	0
1	3	333	142	—	—	7
2	16	125	83,3	81	77	12
3	45	66,7	25,6	29	34,4	39
4	100	41,7	15,6	16,2	18	64
5	175	28,6	10,5	11,9	13,3	95,2

$=du/di$ взять приближенное выражение $R_d = \Delta u / \Delta i$, то полученный при этом результат будет несколько отличаться от точного, причем приближение окажется тем лучшим, чем меньше Δu и соответственно Δi . В табл. 11.1 приведены значения динамического сопротивления, полученные тремя различными способами: при $\Delta i \rightarrow 0$ (т. е. с помощью выражения $R_d = du/di$), при $\Delta u = 0,5$ В и $\Delta u = 1$ В. Очевидно, что теоретически результат получается тем точнее, чем меньше аргумент функции, однако при весьма малых Δu и Δi точность снова падает из-за погрешностей, неизбежно появляющихся при отсчете малых значений различных величин.

11.3. Вольт-амперная характеристика четырехполюсника, снятая экспериментально, приведена в табл. 11.2 и показана на рис. 11.1, а. Определить и построить спектр выходного напряжения, а также коэффициент искажений, если к входным зажимам четырехполюсника подведено напряжение гармонической формы.

Указание: изучите сначала с. 313, 323—327 в [1].

Решение. Если к входу цепи с нелинейной ВАХ приложено гармоническое напряжение с частотой f_1 , то на выходе цепи в общем случае кроме напряжения с частотой f_1 появляются частоты, в k раз превышающие частоты первой гармоники, где k — целое положительное число. Амплитуды высших гармонических составляющих определяются видом ВАХ цепи. Как показано на с. 122 в [9], амплитуды первых четырех гармоник можно рассчитать по формулам $I_{m1} = [(i_1 - i_5) + (i_2 - i_4)]/3$;

Таблица 11.2

Номер точки															
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
u, В	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
i, mA	0	1	2	3	4,5	8	18	45	80	96	102	107	110	111	112

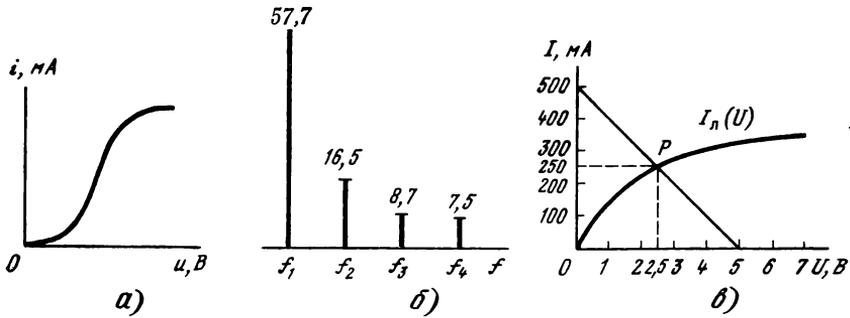


Рис. 11.1

$I_{m2} = [(i_1 + i_5) - 2i_3]/4$; $I_{m3} = [(i_1 - i_5) - 2(i_2 - i_4)]/6$; $I_{m4} = [(i_1 + i_5) - 4(i_2 + i_4) + 6i_3]/12$, где i_3 — ток в цепи, получающийся при среднем значении приложенного изменяющегося напряжения. Например, если синусоидальное напряжение на входе изменяется от $\dot{U}_m = 5$ В до $\dot{U}_{min} = 1$ В, то средним значением является 3 В, к которому прибавляется или отнимается амплитудное значение $U_m = 2$ В. (Действительно, $3 + 2 = 5$ В, а $3 - 2 = 1$ В, что соответствует условию задачи.) Среднее значение, т. е. напряжение, вокруг которого колеблются напряжения синусоидального сигнала, называется *рабочей точкой*. Следовательно, i_3 — ток в рабочей точке; i_1 — ток при напряжении $U_{раб} + U_m$; i_5 — ток при $U_{раб} - U_m$; i_2 — ток при $U_{раб} + (U_m/2)$; i_4 — ток при $U_{раб} - (U_m/2)$. Из табл. 11.2 видно, что $i_1 = 100$ мА; $i_2 = 80$ мА; $i_3 = 18$ мА; $i_4 = 5$ мА; $i_5 = 2$ мА. В этом случае $I_{m1} = [(100 - 2) + (80 - 5)]/3 = 57,7$ мА; $I_{m2} = [(100 + 2) - 2 \times 18]/4 = 16,5$ мА; $I_{m3} = [(100 - 2) - 2(80 - 5)]/6 = 8,7$ мА; $I_{m4} = [(100 + 2) - 4(80 - 5) + 6 \cdot 18]/12 = 7,5$ мА. Амплитудный спектр выходного напряжения показан на рис. 11.1, б. Коэффициент искажений (коэффициент гармоник)

$$\begin{aligned}
 K_{\text{и}} &= \left[\sqrt{U_{m2}^2 + U_{m3}^2 + U_{m4}^2} / U_{m1} \right] \cdot 100 = \\
 &= \left[\sqrt{(16,5)^2 + (8,7)^2 + (7,5)^2} / 57,7 \right] \cdot 100 = 36\%.
 \end{aligned}$$

11.4. Решить задачу 11.3, если $U_{m \text{ вх}} = 1$ В, а рабочая точка находится по-прежнему при напряжении $U_{раб} = 3$ В.

Указание: разберите задачу 11.3.

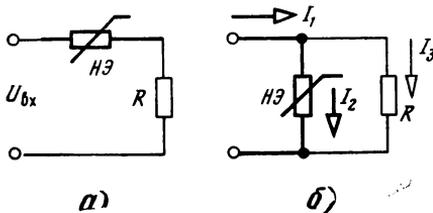


Рис. 11.2

Таблица 11.3

$U, \text{ В}$	0	10	20	30	40	50	60	70
$I, \text{ мА}$	0	16	26	32	35	37	38	39

11.5. Решить задачу 11.3, если $U_{m \text{ вх}}=1 \text{ В}$, а рабочая точка находится при напряжении $U_{\text{раб}}=3,5 \text{ В}$.

Указание: разберите задачу 11.3.

11.6. В схеме, показанной на рис. 11.2, а, сопротивление линейного элемента $R=1860 \text{ Ом}$, а ВАХ нелинейного элемента приведена в табл. 11.3. Рассчитать мощность, рассеиваемую на каждом из сопротивлений, если действующее значение входного напряжения $U_{\text{вх}}=65 \text{ В}$.

Указание: изучите с. 333 в [1], рассчитайте напряжения на каждом элементе, а затем мощности в них.

11.7. Решить задачу 11.6, если сопротивление R уменьшается вдвое.

Указание: изучите с. 333 в [1].

11.8. Для нелинейного элемента, ВАХ которого приведена в табл. 11.3, рассчитать и построить кривые статического и динамического сопротивлений.

Указание: разберите задачу 11.2.

11.9. Элементы, указанные в задаче 11.6, соединены параллельно (рис. 11.2, б). Определить токи во всех ветвях.

Решение. Как следует из табл. 11.3 (или кривой $I=f(U)$, построенной по числовым значениям этой таблицы), при $U=65 \text{ В}$ $I_2=38,5 \text{ мА}$. Ток I_3 в линейном сопротивлении R определяется из выражения $I_3=U/R=65/1860=35 \text{ мА}$. По первому закону Кирхгофа $I_1=38,5+35=73,5 \text{ мА}$.

11.10. Вольт-амперная характеристика лампы накаливания приведена в табл. 11.4. Какое резистивное линейное сопротивление R следует включить последовательно с лампой накаливания, чтобы напряжение на лампе было $U_{\text{л}}=2,5 \text{ В}$, если напряжение источника $U=5 \text{ В}$?

Указание: изучите сначала с. 333 в [1].

Решение. Для решения данной задачи необходимо построить ВАХ лампы. Из точки $U=U_{\text{л}}=2,5 \text{ В}$ (см. рис. 11.1, в) на оси абсцисс восстановить перпендикуляр до пересечения с

Таблица 11.4

$U, \text{ В}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$I, \text{ мА}$	0	150	230	270	300	320	335	350	360

ВАХ, обозначив точку пересечения буквой Р (рабочая точка). Провести прямую через точки Р и $U=5$ В на оси абсцисс до пересечения с вертикальной осью. Ток в точке Р в данной цепи будет 250 мА, а при $U=0$ $I=500$ мА. Линейное сопротивление $R=U_{(I=0)}/I_{(U=0)}=5/500 \cdot 10^{-3}=10$ Ом.

11.11. При каком добавочном линейном резистивном сопротивлении R напряжение на лампе, ВАХ которой приведена в задаче 11.10, оказалось $U_{л}=2$ В при напряжении источника $U=8$ В?

Указание: разберите сначала задачу 11.10.

11.12. Аппроксимировать вольт-амперную характеристику нелинейного элемента (см. задачу 11.3) полиномом четвертой степени вида $i=a_0+a_1u+a_2u^2+a_3u^3+a_4u^4$.

Указание: изучите сначала с. 323—327 в [1].

Решение. Аппроксимировать нелинейную характеристику полиномом n -й степени — значит определить коэффициенты $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ данного полинома. Для выполнения аппроксимации необходимо иметь ВАХ цепи, снятую, например, экспериментально (табл. 11.2). На характеристике следует выбрать пять точек, находящихся приблизительно на равных расстояниях друг от друга: $u_1=1,5$ В, $i_1=3$ мА; $u_2=2,5$ В, $i_2=8$ мА; $u_3=3,5$ В, $i_3=45$ мА; $u_4=4,5$ В, $i_4=96$ мА; $u_5=5,5$ В, $i_5=107$ мА. Для определения коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} i_1 = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2 + a_3 u_1^3 + a_4 u_1^4; \\ i_2 = a_0 + a_1 u_2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_2^3 + a_4 u_2^4; \\ i_3 = a_0 + a_1 u_3 + a_2 u_3^2 + a_3 u_3^3 + a_4 u_3^4; \\ i_4 = a_0 + a_1 u_4 + a_2 u_4^2 + a_3 u_4^3 + a_4 u_4^4; \\ i_5 = a_0 + a_1 u_5 + a_2 u_5^2 + a_3 u_5^3 + a_4 u_5^4. \end{cases}$$

Решение данной системы производится с помощью программы 3. 11.1* (см. стр. 276).

После набора программы на экране будет 0. Назовем собственно программу первым блоком. Теперь следует набрать знаки второго блока, для чего необходимо нажать клавиши

4 x—П 0 1 2 x—П 1 x—П 3 8 x—П 2

(на экране должно быть 8) и вводить знаки третьего блока, представляющие исходные данные $u_1 \rightarrow RGD, i_1 \rightarrow RGC, u_2 \rightarrow RG4, i_2 \rightarrow RG8, u_3 \rightarrow RG5, i_3 \rightarrow RG9, u_4 \rightarrow RG6, i_4 \rightarrow RGA, u_5 \rightarrow RG7, i_5 \rightarrow RGB, В/О, С/П$.

* Подробнее о данной программе см.: Зельманов С. С., Павлюк В. В. Сборник задач и примеры их решения на ЭВМ. — М.: МИС, 1987.

Программа 3.11.1 для расчета коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 (полиномов четвертого порядка) при аппроксимации ВАХ нелинейных элементов

F /-/ В/0 F ВП

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	КП-х1	П-хС	—	КП-х2	П-хД	—	÷	Кх-П3	F П-х	00
	Г1	БС	11	Г2	БГ	11	13	Л3	5Г	00
1	П-хВ	П-х8	—	П-х7	П-х4	—	÷	П-х9	П-х8	—
	БЛ	Б8	11	Б7	Б4	11	13	Б9	Б8	11
2	П-х5	П-х4	—	÷	х-П0	—	П-х7	П-х5	—	÷
	Б5	Б4	11	13	40	11	Б7	Б5	11	13
3	П-хА	П-х8	—	П-х6	П-х4	—	÷	П-х0	—	П-х6
	Б-	Б8	11	Б6	Б4	11	13	Б0	11	Б6
4	П-х5	—	÷	х-П1	—	П-х7	П-х6	—	÷	х-ПА
	Б5	11	13	41	11	Б7	Б6	11	13	4-
5	П-хД	П-х4	+	х-П9	П-х5	+	х-П2	П-х6	+	×
	БГ	Б4	10	49	Б5	10	42	Б6	10	12
6	/-/	П-х1	+	х-П3	П-х2	×	/-/	П-х0	+	П-хД
	0L	Б1	10	43	Б2	12	0L	Б0	10	БГ
7	F X	П-х4	F X	+	х-ПВ	П-хД	П-х4	×	+	х-П0
	22	Б4	22	10	4L	БГ	Б4	12	10	40
8	П-х5	П-х2	×	+	П-хА	×	—	х-П2	П-х9	×
	Б5	Б2	12	10	Б-	12	11	42	Б9	12
9	П-х3	П-х0	×	+	П-хА	П-х9	×	С/П	F	/-/
	Б3	Б0	12	10	Б-	Б9	12	50	F	/-/

После счета следует набрать знаки четвертого блока, для чего нажать клавиши

П-х /-/ х + /-/ П-х 8 + х-П 1 П-х ВП П-х 1
 П-х Сх × - П-х 2 П-х Сх F × × -
 П-х 3 П-х Сх F × П-х Сх × × -
 П-х ● П-х Сх F × F × х-х-П 0

После указанных манипуляций система уравнений оказывается решенной и можно выводить значения получившихся коэффициентов аппроксимации ВАХ: a_0 из RG0, a_1 из RG1, a_2 из RG2, a_3 из RG3, a_4 из RGA (т. е. П-х 0 П-х 1 П-х 2 П-х 3 П-х А).

Контрольный пример. Аппроксимируем вольт-амперную характеристику по исходным данным (табл. 11.5).

Поле набора первого и второго блоков на экране должно быть 8. Далее следует вводить исходные данные из табл. 11.5.

$u, \text{ В}$	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
$i, \text{ мА}$	3	8	45	96	107

1 · 5 x—П Сх 3 x—П ВП 2 · 5 x—П 4 8 x—П 8

3 · 5 x—П 5 4 5 x—П 9 4 · 5 x—П 6 9 6 x—П

· 5 · 5 x—П 7 1 0 7 x—П /—/ В/О С/П

Если после счета на экране появится —6, то следует продолжать ввод (в скобках приводятся числа, которые должны получаться на экране ПМК):

П—x /—/ × (—51) + (—22,25) /—/ П—x 8 (5) + (27,25)
 x—П 1 П—x ВП (3) П—x 1 (27,25) П—x Сх (1,5) ×
 (40,875) — (—37,875) П—x 2 (—38,75) П—x Сх (1,5) F
 × (2,25) × (—87,1875) — (49,3125) П—x 3 (15) П—x
 Сх (1,5) F × (2,25) П—x Сх (1,5) × (3,375) × (50,625)
 — (—1,3125) П—x · (—1,5) П—x Сх (1,5) F × (2,25) F
 × (5,0625) × (—7,59375) — x—П 0 (6,28125).

Система рассчитана, можно выводить получившиеся коэффициенты:

П—x 0 (6,28125) П—x 1 (27,25) П—x 2 (—38,75) П—x 3
 (15) П—x · (—1,5),

т. е. $a_0=6,28125 \text{ мА}$, $a_1=27,25 \text{ мА/В}$, $a_2=-38,75 \text{ мА/В}^2$, $a_3=15 \text{ мА/В}^3$, $a_4=-1,5 \text{ мА/В}^4$. Следовательно, данная ВАХ описывается полиномом $i=6,28125+27,25u-38,75u^2+15u^3-1,5u^4$ (мА).

Произведем проверки. При $u_1=1,5 \text{ В}$ ток $i_1=3 \text{ мА}$. Подставим числовые значения: $i_1=6,28+27,25 \cdot 1,5-38,75(1,5)^2+15(1,5)^3-1,5(1,5)^4=2,996 \text{ мА}$. При $u_3=3,5 \text{ В}$ $i_3=45 \text{ мА}$. Аналогично $i_3=6,28+27,25 \cdot 3,5-38,75(3,5)^2+15(3,5)^3-1,5(3,5)^4=45 \text{ мА}$. При $u_5=5,5 \text{ В}$ $i_5=107 \text{ мА}$. Соответственно $i_5=6,28+27,25 \cdot 5,5-38,75(5,5)^2+15(5,5)^3-1,5(5,5)^4=106,945 \text{ мА}$.

Как видно из приведенных результатов, погрешность полученного выражения по сравнению с кривой, которая аппроксимировалась, не превышает полей процента, что является весьма точным результатом. В ряде случаев ограничиваются полиномами меньших степеней (третьей, а иногда даже и второй). Программа для аппроксимации уравнением третьей степени 3. 11.2 приводится ниже. Если контрольный пример выполняется, то можно производить расчеты по иным исходным данным, при этом вводить заново следует знаки второго, третьего и четвертого блоков.

Таблица 11.6

$u, В$	0,36	0,44	0,48	0,52
$i, мА$	8	40	88	136

Таблица 11.7

$u, В$	1	2	3	4	2	4	6	8	2	3	4	5
$i, мА$	1	2	3	4	2	4	4,1	4,2	5	6	5	4

11.13. Аппроксимировать полиномом третьей степени, ВАХ которой приведена в табл. 11.6.

Указание: изучите с. 323—327 в [1] и разберите задачу 11.12.

Решение. При аппроксимации ВАХ полиномом третьей степени, т. е. выражением $i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3$, необходимо на ВАХ взять четыре точки, например, из табл. 11.6. Расчет коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 производится по программе З. 11.2.

Программа З. 11.2 для расчета коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 (полиномов третьего порядка) при аппроксимации ВАХ нелинейных элементов

F /-/ В/0 F ВП

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	КП-х1 Г1	П-х9 69	— 11	Кх-П2 Л2	ФП-х 5Г	00 00	3 03	х-П0 40	9 09	х-П1 41
1	х-П2 42	КП-х1 Г1	П-хА 6-	— 11	Кх-П2 Л2	ФП-х 5Г	11 11	П-х8 68	П-х5 65	÷ 13
2	П-х6 66	П-х3 63	÷ 13	— 11	П-х5 65	П-х3 63	— 11	÷ 13	П-х7 67	П-х4 64
3	÷ 13	П-х6 66	П-х3 63	÷ 13	— 11	П-х4 64	П-х3 63	— 11	÷ 13	х-П0 40
4	— 11	П-х5 65	П-х4 64	— 11	÷ 13	х-ПД 4Г	П-х0 60	П-хД 6Г	П-х9 69	П-хВ 6Л
5	+ 10	П-хС 6С	+ 10	Х 12	— 11	х-ПС 4С	П-х9 69	П-хВ 6Л	+ 10	Х 12
6	/-/ 0Л	П-х9 69	ФХ 22	х-П1 41	П-хВ 6Л	П-х9 69	+ 10	П-хВ 6Л	Х 12	+ 10
7	П-хД 6Г	Х 12	— 11	П-х6 66	П-х3 63	÷ 13	+ 10	х-ПВ 4Л	П-х9 69	Х 12
8	/-/ 0Л	П-хС 6С	П-х1 61	Х 12	— 11	П-хД 6Г	П-х9 69	П-х1 61	Х 12	Х 12
9	— 11	П-хА 6-	+ 10	х-ПА 4-	С/П 50	Ф	/-/ 0Л			

Введя программу, т. е. знаки первого блока (на экране 0), следует ввести знаки второго блока, для чего нажать клавиши 3 x—П 0, 6 x—П 1, x—П 2, (на экране 6).

Теперь можно вводить исходные данные (знаки третьего блока) $u_1 \rightarrow RG9$, $u_2 \rightarrow RG3$ и RGB , $u_3 \rightarrow RG4$ и RGC , $u_4 \rightarrow RG5$, $i_1 \rightarrow RGA$, $i_2 \rightarrow RG6$, $i_3 \rightarrow RG7$, $i_4 \rightarrow RG8$, В/О, С/П.

Вывод результатов: a_0 из RGA , a_1 из RGB , a_2 из RGC , a_3 из RGD . В результате расчетов $a_0 = 4088$ мА, $a_1 = -27533$ мА/В, $a_2 = 60\,000$ мА/В², $a_3 = -41\,667$ мА/В³ и, следовательно, аппроксимированное выражение имеет вид $i = 4,088 - 27,533 \cdot 10^3 u + 60 \times 10^3 u^2 - 41,667 \cdot 10^3 u^3$ мА. Из проверки следует, что погрешность не превышает 1%, что указывает на высокое качество аппроксимации.

Данный пример показывает, что для аппроксимации ВАХ третья степень полинома в большинстве случаев оказывается достаточной.

11.14. Аппроксимировать ВАХ (табл. 11.7) выражением третьей степени, произвести проверки и изобразить кривые нелинейных элементов.

11.15. Рассчитать спектр входного тока при гармоническом напряжении $u = 2 \sin \omega t$ для нелинейной цепи, ВАХ которой приведена в задачах 11.3 и 11.12.

Указание: изучите сначала с. 323—327 в [1] и задачу 11.12.

Решение. В задаче 11.12 было показано, что ВАХ данной цепи описывается уравнением $i = 6,28 + 27,25u - 38,75u^2 + 15u^3 - 1,5u^4$. Для расчета амплитуд спектральных составляющих тока следует использовать формулы (11.3) из [1]. На частоте $f = f_1$ $I_{m1} = a_1 U_m + (3/4)a_3 U_m^3 = 27,25 \cdot 2 + 0,75 \cdot 15(2)^3 = 144,5$ мА; на частоте $f = 2f_1$ $I_{m2} = (1/2)a_2 U_m^2 + (1/2)a_4 U_m^4 = 0,5 \cdot 38,75 \cdot 4 + 0,5 \cdot 1,5 \cdot 16 = 89,5$ мА; на $f = 3f_1$ $I_{m3} = (1/4)a_3 U_m^3 = 0,25 \cdot 15(2)^3 = 30$ мА; на $f = 4f_1$ $I_{m4} = (1/8)a_4 U_m^4 = 0,125 \cdot 1,5(2)^4 = 3$ мА.

Таким образом, напряжение с частотой f_1 вызывает в данной цепи ток с частотами f_1 , $2f_1$, $3f_1$, $4f_1$ и соответственно амплитудами $I_{m1} = 144,5$ мА, $I_{m2} = 89,5$ мА, $I_{m3} = 30$ мА, $I_{m4} = 3$ мА. Амплитуды остальных составляющих пренебрежимо малы. Постоянная составляющая определяется из выражения $I_0 = a_0 + 0,5 a_2 U^2 + 0,375 a_4 U^4 = 6,28 - 0,5 \cdot 38,75(1,41)^2 - 0,375 \cdot 1,5(1,41)^4 = -34,72$ мА, откуда $|I_0| = 34,72$ мА.

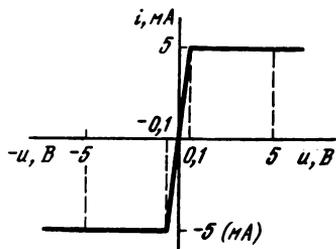


Рис. 11.3

11.16. Построить спектр входных напряжения и тока, если $u_{\text{вх}} = 2 \sin \omega t$, а ВАХ цепи показана на рис. 11.3.
 Указание: разберите задачи 11.13—11.15.

Глава 12. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

RL- И RC-ЦЕПИ В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

12.1. Последовательную RL -цепь с нулевыми начальными условиями (рис. 12.1, а) в момент $t=0$ подключают к источнику постоянного во времени напряжения $U=10$ В. По графику I , показанному на рис. 12.1, б, определить значения резистивного сопротивления R и индуктивности L .

Указание: изучите с. 344—352 в [1].

Решение. Как видно из кривой I , вынужденное значение тока в данной цепи составляет 40 мА, следовательно, $R = U/i_{\text{вын}} = 10/40 \cdot 10^{-3} = 250$ Ом. За время, равное постоянной времени цепи τ , при включении цепи с нулевыми начальными условиями ток достигает значения $0,63 i_{\text{вын}} = 0,63 \cdot 40 = 25,2$ мА через время $t = 1,5$ мс. Следовательно, в данной цепи $\tau = 1,5$ мс. Так как в RL -цепи $\tau = L/R$, то $L = \tau R = 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 250 = 375 \cdot 10^{-3}$ Гн = 375 мГн.

12.2. Определить время, через которое ток в цепи рис. 12.1, а достигает вынужденного значения: а) теоретически и б) практически, если $U=10$ В, $I_{\text{вын}}=40$ мА, а характеристика $i=f(t)$ показана на рис. 12.1, б (кривая 2).

Указание: разберите задачу 12.1.

12.3. В цепи, показанной на рис. 12.1, а, $U=10$ В, $R=250$ Ом, $L=0,75$ Гн. Определить напряжения на R и L через: а) 1 мс, б) 2 мс, в) 3 мс, г) 4 мс и д) 5 мс после замыкания ключа.

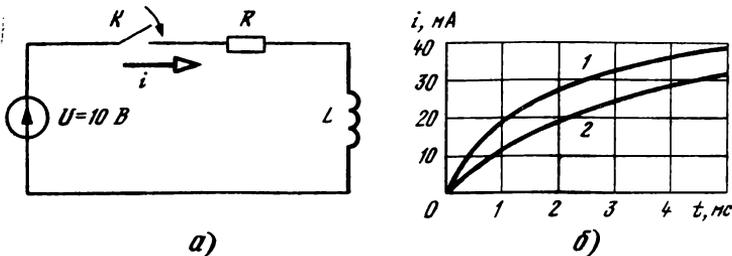


Рис. 12.1

Указание: изучите с. 344—352 в [1].

Решение. Мгновенные напряжения на резистивном элементе и индуктивности в цепи (рис. 12.1, а) рассчитываются по формулам $u_R = U(1 - e^{-t/\tau})$; $u_L = Ue^{-t/\tau}$ (см. формулы (12.7) и (12.8) в [1]). Так как $L = 0,75$ Гн, а $R = 250$ Ом, то $\tau = L/R = 0,75/250 = 3$ мс. В этом случае через время $t = 1$ мс $u_R = 10[1 - e^{-(1 \cdot 10^{-3})/(3 \cdot 10^{-3})}] = 10[1 - (1/e^{0,33})] = 10[1 - (1/1,39)] = 10(1 - 0,719) = 2,81$ В; $u_L = 10e^{-(10^{-3})/(3 \cdot 10^{-3})} = 10/(e^{0,33}) = 10/1,39 = 7,19$ В.

Произведем проверку. По второму закону Кирхгофа сумма $u_R + u_L$ должна равняться $U = 10$ В. Действительно, $2,81 + 7,19 = 10$ В. Проверка выполняется. Аналогично $t = 2$ мс $u_R = 10[1 - e^{-(2 \cdot 10^{-3})/(3 \cdot 10^{-3})}] = 10[1 - (1/e^{0,66})] = [1 - 1/1,93] = 4,83$ В; $u_L = 10e^{-(2 \cdot 10^{-3})/(3 \cdot 10^{-3})} = 10/e^{0,66} = 5,17$ В. Проверка: $4,83 + 5,17 = 10$ В. Расчеты u_R и u_L через $t = 3,4$ и 5 мс рекомендуется проделать самостоятельно.

12.4. Записать выражения постоянной времени цепи τ для цепей, показанных на рис. 12.2.

Указание: изучите с. 350, 351 и 354, 355 в [1].

12.5. Цепь, показанную на рис. 12.2, б, подключают к источнику постоянного напряжения $U = 100$ В. Через какое время напряжение на конденсаторе достигнет 50 В, если $R = 1$ МОм, $C = 1$ мкФ? Какое значение будет иметь ток в этот момент?

Указание: изучите с. 354, 355 в [1].

Решение. Как видно из формул (12.12) и (12.13) в [1], в данной цепи $u_C = U(1 - e^{-t/\tau})$, а $i = (U/R)e^{-t/\tau}$, где $\tau = RC = 10^6 \times 10^{-6} = 1$ с = 1000 мс. Зная u_C , U и τ , можно определить время t , через которое конденсатор заряжается до заданного напряжения. Тогда $50 = 100(1 - e^{-t/1})$ или $0,5 = 1 - e^{-t}$, т. е. $e^{-t} = 1 - 0,5 = 1/2$. Так как степень числа e отрицательная, то $e^{-t} = 1/e^t$ и, следовательно, $1/e^t = 1/2$. Поскольку числители у обеих

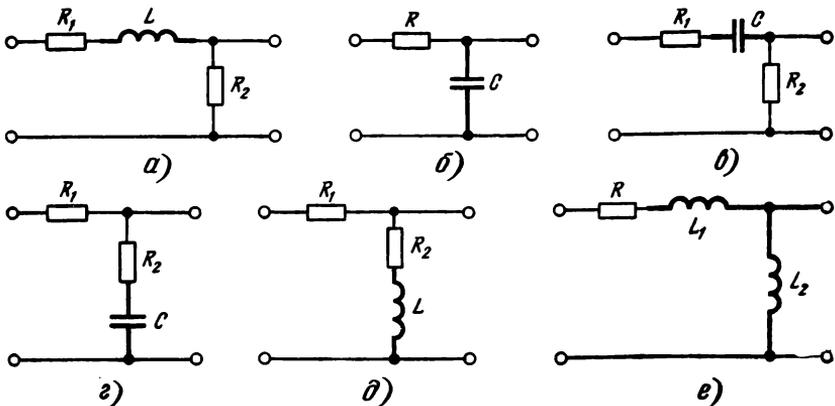


Рис. 12.2

частей равенства одинаковые, то одинаковыми будут и их знаменатели, откуда $e^t=2$. Возьмем логарифм натуральный от обеих частей равенства, тогда $\ln(e^t)=\ln 2$ или $t=\ln 2=2,3 \lg 2=2,3 \cdot 0,3=0,692$ с=692 мс. Определим ток в этот момент; $i=(100/10^6)e^{-0,692/1}=100 \cdot 10^{-6}/e^{0,692}=100 \cdot 10^{-6}/2=50 \cdot 10^{-6}$ А=50 мкА.

Произведем проверку: $u_R=R_i=10^6 \cdot 50 \cdot 10^{-6}=50$ В. Так как u_R и u_C — мгновенные напряжения, то их можно складывать: $50+50=100$ В. Проверка выполняется. Обратите внимание, что получившиеся напряжения будут только в момент через 692 мс после подключения цепи к источнику постоянного напряжения. В любой другой момент значения u_R , u_C и i будут иными. По мере увеличения времени напряжение на конденсаторе станет увеличиваться (но не по линейному, а по экспоненциальному закону!), а ток в цепи и напряжение на резистивном сопротивлении соответственно уменьшаться. Арифметическая сумма напряжений на резисторе и конденсаторе в любой момент равна приложенному к цепи напряжению U .

12.6. Решить задачу 12.5, если: а) $u_C=75$ В, б) $u_C=85$ В, в) $u_C=95$ В.

Указание: разберите сначала задачу 12.5.

12.7. Цепь, показанная на рис. 12.2, б, в которой конденсатор заряжен до напряжения $u_C(0)=30$ В, подключается к источнику постоянного напряжения $U=100$ В. Через какое время напряжение на конденсаторе увеличится до 80 В, если $R=5$ кОм, $C=10$ нФ?

Указание: разберите сначала задачу 12.5.

Решение. Составим уравнение электрического равновесия по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений $u_R+u_C=u_{вх}$ или $Ri+u_C=U$. Так как в C -цепи $i=C(du_C/dt)$, уравнение приобретает вид $RC(du_C/dt)+u_C=U$. Чтобы сделать уравнение приведенным, поделим все его члены на коэффициент при производной высшего порядка (в данном случае первого). Выражение, описывающее закон изменения напряжения на конденсаторе после коммутации, имеет вид $du_C/dt+(1/RC)u_C=U/RC$. Получилось дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого есть сумма двух составляющих — вынужденной $u_{C \text{ вын}}$ и свободной $u_{C \text{ св}}$.

Чтобы найти вынужденную составляющую, необходимо производную в дифференциальном уравнении положить равной нулю. Тогда $(1/RC)u_{C \text{ вын}}=U/RC$, откуда $u_{C \text{ вын}}=U$. Чтобы найти свободную составляющую, следует правую часть уравнения приравнять нулю и решить получившееся при этом уравнение $du_{C \text{ св}}/dt+(1/RC)u_{C \text{ св}}=0$. Как известно (см. с. 355 в [1]), решением такого уравнения является выражение $u_{C \text{ св}}=Ae^{-t/RC}$, где A — постоянная интегрирования, зависящая от начальных условий, а постоянная времени цепи $\tau=RC=5 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-9}=50 \times 10^{-6}$ с=50 мкс. Для любого момента $u_C=U+Ae^{-t/RC}$. Напря-

жение на емкости не может изменяться скачком (см. с 345, 346 в [1]), поэтому $u_C(t=+0) = u_C(t=-0)$.

В соответствии с условием задачи напряжение на конденсаторе до коммутации составляет 30 В. В первый момент после коммутации (т. е. при $t=+0$) напряжение на конденсаторе остается тем же. Следовательно, $u_C(-0) = U + Ae^{-0/Rc}$ или $30 = 100 + A \cdot 1$, т. е. $A = 30 - 100 = -70$ В, тогда $u_C(t) = 100 - 70e^{-t/50 \cdot 10^{-6}} = 100 - 70e^{-20 \cdot 10^3 t}$ В.

Определим время, через которое напряжение на емкости достигает 80 В: $80 = 100 - 70e^{-20 \cdot 10^3 t}$, тогда $70e^{-20 \cdot 10^3 t} = 20$ или $e^{20 \cdot 10^3 t} = 70 / 20 = 3,5$, откуда $20 \cdot 10^3 t = \ln 3,5 = 2,3 \lg 3,5 = 2,3 \cdot 0,544 = 1,25$ и, следовательно, $t = 1,25 / (20 \cdot 10^3) = 62,2 \cdot 10^{-6}$ с = 62,5 мкс.

Произведем проверку: $u_C = 100 - 70e^{(-20 \cdot 10^3 \cdot 62,5 \cdot 10^{-6})} = 100 - 70e^{-1,25} = 100 - (70/e^{1,25}) = 100 - 20 = 80$ В. Проверка выполняется. Определим ток в момент $t = 62,5$ мкс:

$$\begin{aligned} i &= C(du_C/dt) = 10 \cdot 10^{-9} [(d/dt)(100 - 70e^{-20 \cdot 10^3 t})] = \\ &= 10^{-8} [(-70)(-20 \cdot 10^3)e^{-20 \cdot 10^3 t}] = 14 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-20 \cdot 10^3 \cdot 62,5 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 14 \cdot 10^{-3} e^{-1,25} = (14/3,49) \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 4 \text{ мА}. \end{aligned}$$

12.8. По условию задачи 12.7 определить ток в цепи при t , равном: а) 0, б) τ , в) 2τ , г) 3τ , д) $4,7\tau$, е) ∞ .

Указание: разберите задачу 12.7.

12.9. Определить энергию, выделяющуюся в цепи, приведенной на рис. 12.2, б, за время, при котором напряжение на емкости увеличивается от 0 до 50 В.

Указание: изучите с. 361 в [1] и разберите задачу 12.5.

Решение. Как было показано в задаче 12.5, напряжение на емкости достигает 50 В за время 692 мс. Ток в цепи определяется из выражения $i = (U/R)e^{-t/\tau} = (100/10^6)e^{-t/1} = 10^{-4}e^{-t}$. Поскольку этот ток все время изменяется, рассчитывать энергию следует за бесконечно малое время dt , в течение которого ток не успевает измениться, а затем суммировать (т. е. интегрировать) все значения за время, в течение которого в цепи протекал ток и, следовательно, выделялась энергия (в нашем случае за 692 мс). Таким образом,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{0,692} i^2 R dt = \int_0^{0,692} (10^{-4}e^{-t})^2 dt = R \cdot 10^{-8} \int_0^{0,692} e^{-2t} dt = \\ &= 10^6 \cdot 10^{-8} (1/2) e^{-2t} \Big|_0^{0,692} = 0,5 \cdot 10^{-2} e^{-2t} \Big|_0^{0,692} = \\ &= 0,5 \cdot 10^{-2} (1 - e^{-1,384}) = 5 \cdot 10^{-3} (1 - 1/e^{1,384}) = \\ &= 5 \cdot 10^{-3} (1 - 0,25) = 3,75 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 3,75 \text{ мДж}. \end{aligned}$$

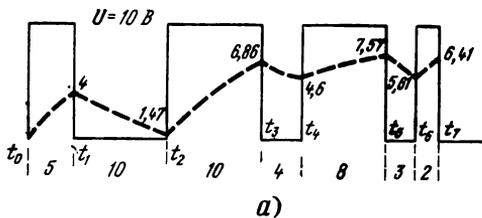
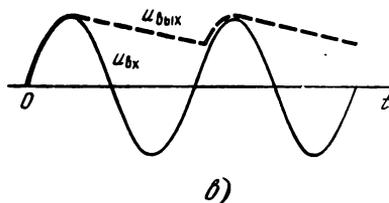
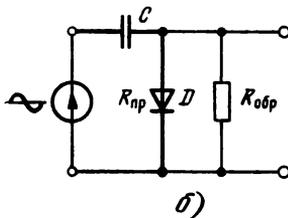


Рис. 12.3



12.10. По условию задачи 12.7 рассчитать энергию, выделившуюся в цепи при изменении напряжения на конденсаторе от 30 до 80 В.

Указание: разберите задачу 12.9.

12.11. Сигнал, показанный на рис. 12.3, а, подводится к входу RC-цепи. Определить напряжения на конденсаторе в моменты $t=t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7$ мс, если $U=10$ В, $R=10$ кОм, $C=1$ мкФ.

Указание: изучите сначала с. 356, 357 в [1] и разберите задачи 12.5 и 12.7.

Решение. В момент $t=0$ входное напряжение скачком увеличивается от 0 до 10 В. Напряжение на конденсаторе нарастает постепенно по экспоненциальному закону вида $u_c = U(1 - e^{-t/\tau})$, где τ — постоянная времени. В данной цепи $\tau = RC = 10 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 10 \text{ мс}$. В момент t_1 , т. е. через 5 мс после появления напряжения на входе, напряжение на конденсаторе $u_c = 10(1 - e^{-5/10}) = 10(1 - e^{-0,5}) = 10(1 - 1/e^{0,5}) = 4$ В, а входное напряжение скачком уменьшается до нуля. Напряжение на конденсаторе начинает уменьшаться в соответствии с выражением $u_c = u_c(t_1)e^{-t/\tau}$. За $t=10$ мс (до момента t_2) конденсатор разряжается до напряжения $u_c = 4e^{-10/10} = 4e^{-1} = 1,47$ В. В момент t_2 напряжение на входе снова увеличивается скачком до 10 В, а напряжение на конденсаторе начинает расти по закону $u_c = U - (U - u_0)e^{-t/\tau}$, где u_0 — напряжение на конденсаторе до появления напряжения на входе цепи, т. е. $u_0 = u(t=t_1) = 1,47$ В. В момент t_3 $u_c = 10 - (10 - 1,47)e^{-10/10} = 10 - 8,53 e^{-1} = 6,86$ В. В момент t_4 $u_c = 6,86 e^{-0,4} = 4,6$ В, в момент t_5 $u_c = 10 - (10 - 4,6)e^{-0,8} = 7,57$ В, в момент t_6 $u_c = 7,57 e^{-0,3} = 5,61$ В, в момент t_7 $u_c = 10 - (10 - 5,61)e^{0,2} = 6,41$ В.

12.12. Решить задачу 12.11, если $C=0,5$ мкФ. Остальные данные остаются без изменений.

Указание: разберите задачу 12.11.

12.13. В схеме рис. 10.3, б к входу цепи приложено напряжение синусоидальной формы. Какую форму имеет напряжение на выходе?

Решение. Вентиль D имеет малое сопротивление $R_{пр}$ для прямого тока и большое сопротивление $R_{обр}$ — для обратного. При увеличении входного напряжения постоянная времени цепи заряда $\tau_3=R_{пр}C$ мала и напряжение на конденсаторе увеличивается по закону входного напряжения до U_m . По мере уменьшения последнего напряжение на конденсаторе оказывается больше мгновенных значений входного, при этом конденсатор начинает разряжаться, но теперь уже через обратное сопротивление вентиль $R_{обр}$, которое на несколько порядков больше прямого сопротивления. Постоянная времени цепи разряда $\tau_p=R_{обр}C$ также много больше постоянной времени заряда, поэтому конденсатор разряжается весьма медленно (штриховая кривая на рис. 12.3, в).

Сопротивление $R_{обр}$ выбирают таким, при котором за время периода напряжение на конденсаторе уменьшается не более чем на несколько процентов. Выходное напряжение при этом близко к максимальному входному напряжению. На данном принципе работают электронные вольтметры, реагирующие на максимальное значение переменной составляющей измеряемого напряжения. В реальных электронных вольтметрах группы В-7 напряжение, снимаемое с выхода цепи (рис. 12.3, в), фильтруется, из него выделяется постоянная составляющая, которая усиливается усилителем постоянного тока, а затем индицируется прибором магнитоэлектрической системы. Именно так работает вольтметр $V5$ в схеме, приведенной на рис. 10.2, а.

12.14. Определить постоянную времени цепи, показанной на рис. 12.4, а.

Указание: изучите сначала с. 365—370 и 381—385 в [1].

Решение. Рассчитать постоянную времени цепи τ можно двумя способами: классическим и операторным. Для расчета

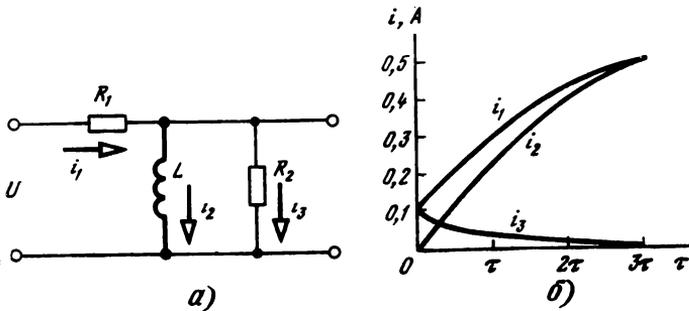


Рис. 12.4

классическим способом необходимо составить систему уравнений для мгновенных токов в одной из ветвей или напряжений на каком-то элементе (в RL -цепи лучше всего для тока в ветви с индуктивностью, а в RC -цепи — для напряжения на емкости) и сделать получившееся уравнение приведенным. Коэффициент при втором члене любого приведенного уравнения представляет величину, обратную постоянной времени цепи. Для цепи, показанной на рис. 12.4, а, справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3; \\ U = R_1 i_1 + u_L; \\ 0 = -L (di_2/dt) + R_2 i_3. \end{cases}$$

Учитывая, что $u_L = L (di_2/dt)$, из второй строки получаем $i_1 = [U - L (di_2/dt)]/R_1$, а из третьей — $i_3 = (L/R_2) (di_2/dt)$. Подставим получившиеся выражения в первое уравнение: $(U/R_1) - (L/R_1) (di_2/dt) = i_2 + (L/R_2) (di_2/dt)$ или $(di_2/dt)[(L/R_1 + L/R_2)] + i_2 = U/R_1$. Поделив все члены на коэффициент при высшей производной (в данном случае первой), получим уравнение в нормальном виде: $(di_2/dt) + [R_1 R_2 / L (R_1 + R_2)] i_2 = U R_1 R_2 / [R_1 L (R_1 + R_2)]$, откуда $\tau = L (R_1 + R_2) / R_1 R_2$.

Определять τ цепи гораздо проще операторным методом. Для этого следует записать операторное входное сопротивление цепи $Z_{вх}(p)$, приравнять его нулю и найти корень получившегося уравнения. Постоянная времени цепи τ есть величина, обратная модулю корня уравнения $Z_{вх}(p) = 0$. Напомним, что операторное сопротивление резистивного элемента $Z_R(p) = R$, индуктивного $Z_L(p) = pL$, емкостного $Z_C(p) = 1/pC$ (для перехода от комплексного сопротивления к операторному множитель $j\omega$ следует заменить множителем p , поскольку и $j\omega$, и p — изображение производной по времени d/dt). Таким образом, операторное входное сопротивление $Z_{вх}(p)$ не содержит производных или интегралов, а представляет собой алгебраическое выражение:

$$Z_{вх}(p) = R_1 + R_2 pL / (R_2 + pL) = (R_1 R_2 + pR_1 L + pR_2 L) / (R_2 + pL).$$

Выражение равно нулю, если нулю равен числитель, т. е. $R_1 R_2 + pL (R_1 + R_2) = 0$, откуда $p = -R_1 R_2 / L (R_1 + R_2)$ и, следовательно $\tau = 1/|p| = L (R_1 + R_2) / R_1 R_2$, что и было получено при определении τ классическим методом.

12.15. Рассчитать постоянные времени цепей, показанных на рис. 12.1, а и 12.2, операторным методом.

Указание: разберите задачу 12.14.

12.16. Рассчитать операторным методом мгновенные токи в ветвях цепи, показанной на рис. 12.4, а, при ее подключении к источнику постоянного напряжения, если $U = 10$ В, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 80$ Ом, $L = 2$ Гн.

Указание: изучите с. 381—387 в [1] и разберите задачу 12.14.

Решение. Как было показано в задаче 12.14, входное операторное сопротивление данной цепи определяется из выражения $Z(p) = (R_1 + R_2)[p + R_1 R_2 / L(R_1 + R_2)] / (p + R_2 / L) = (20 + 80)[p + 20 \cdot 80 / 2(20 + 80)] / (p + 80 / 2) = 100(p + 8) / (p + 40)$. Операторные токи ветвей

$$I_1(p) = U(p) / Z(p) = U(p + 40) / [p \cdot 100(p + 8)] = \\ = (10/100)[(p + 40) / p(p + 8)] = 0,1[(p + 40) / p(p + 8)];$$

$$I_2(p) = I_1(p) \frac{Z_3(p)}{Z_2(p) + Z_3(p)} = \frac{0,1(p + 40)}{p(p + 8)} \frac{R_2}{R_2 + pL} = \\ = \frac{0,1(p + 40) \cdot 80}{p(p + 8)L(p + R_2/L)} = \frac{8(p + 40)}{2p(p + 8)(p + 40)} = 4 \frac{1}{p(p + 8)};$$

$$I_3(p) = I_1(p) \frac{pL}{R_2 + pL} = \frac{0,1(p + 40) \cdot 2p}{p(p + 8) \cdot 2(p + 40)} = 0,1 \left[\frac{p}{p + 8} \right].$$

Зная операторные изображения токов, следует найти их временные оригиналы $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$. Перейти от изображений к оригиналам можно двумя способами: по формуле разложения или с помощью переводных таблиц. Как правило, если числитель операторного выражения содержит несколько слагаемых, то проще всего использовать формулу разложения, а если в числителе одночлен, то переводные таблицы. Так как $I_1(p) = 0,1[(p + 40) / p(p + 8)]$, то $i_1(t)$ найдем по формуле разложения (см. с 385 в [1]):

$$f(t) = \sum \frac{F_1(p)_{p=p_k}}{F_2'(p)_{p=p_k}} e^{p_k t},$$

для чего приравняем знаменатель операторного тока $I_1(p)$ нулю и найдем корни этого уравнения: $F_2(p) = p(p + 8) = 0$. Отсюда $p_1 = 0$, $p_2 + 8 = 0$, т. е. $p_2 = -8$. Найдем производную знаменателя операторного тока. Поскольку $F_2(p) = p(p + 8)$, то $F_2'(p) = 2p + 8$. Выражение для временного тока $i_1(t)$ представляет собой сумму двух слагаемых (по числу корней в знаменателе), причем в первое слагаемое вместо оператора p подставляется первый корень (в данном случае $p_1 = 0$), а во втором — второй корень ($p_2 = -8$): $i_1(t) = 0,1 \left(\frac{0 + 40}{0 + 8} e^{0 \cdot t} + \frac{-8 + 40}{2(-8) + 8} e^{-8t} \right) = 0,5 - 0,4 e^{-8t}$.

Проверим выполнение граничных условий. В первый момент после включения цепи (т. е. при $t = +0$) сопротивление индуктивного элемента бесконечно велико, при этом $i_1(+0) = i_3(+0) = U / (R_1 + R_2) = 10 / (20 + 80) = 0,1$ А. Подставим в выражение для первого тока $t = 0$, при этом $i_1(t) = 0,5 - 0,4 e^{-8 \cdot 0} = 0,5 - 0,4 = 0,1$ А. По окончании переходного процесса (т. е. при $t \rightarrow \infty$) сопротивление индуктивности постоянному току становится равным нулю, при этом $i_1(\infty) = U / R_1 = 10 / 20 = 0,5$ А.

Этот же результат получается при подстановке $t = \infty$. Действительно, $i_1(t) = 0,5 - 0,4 e^{-8 \cdot \infty} = 0,5 - 0 = 0,5$ А. Определим $i_2(t)$ по операторному изображению тока $I_2(p) = 4[1/p(p+8)]$. Так как $1/p(p+a) \rightarrow (1/a)(1 - e^{-at})$ (см. строку 4 табл. 12.1 на с. 383 в [1]), то $i_2(t) = 4(1/8)(1 - e^{-8 \cdot t}) = 0,5(1 - e^{-8 \cdot t})$. Проверим граничные условия. При $t = +0$ $Z_L(t) = \infty$, $i_2(+0) = 0$. Это же получается и из выражения для $i_2(t)$. Действительно, $i_2(+0) = 0,5(1 - e^{-8 \cdot 0}) = 0,5(1 - 1) = 0$. Найдем $i_3(t)$ из уравнения $I_3(p) = 0,1[1/(p+8)]$. С учетом того, что $1/(p+a) \rightarrow e^{-at}$, $i_3(t) = 0,1e^{-8t}$.

Произведем проверку. При $t = +0$ $i_3(+0) = i_1(+0) = U/(R_1 + R_2) = 0,1$ А. По окончании переходного процесса сопротивление индуктивного элемента уменьшается до нуля, следовательно, R_2 оказывается замкнутым накоротку и ток через него не протекает (равен нулю). Это же получается и в случае $i_3(t)$ при $t = \infty$. Действительно, $i_3 = 0,1e^{-8 \cdot \infty} = 0$. Граничные условия выполняются. Построим графики токов i_1, i_2, i_3 (рис. 12.4, б). Переходный процесс теоретически происходит бесконечно долго, а практически в течение (3...5) τ . Так как коэффициент при множителе t у числа e есть величина, обратная постоянной времени цепи τ , то $\tau = 1/8 = 0,125$ с = 125 мс. Следовательно, в данной цепи переходный процесс происходит практически за 375...625 мс, т. е. округленно за 0,5 с. Кривые токов в зависимости от времени показаны на рис. 12.4, б.

12.17. Рассчитать и построить кривые мгновенных токов во всех ветвях и напряжений на всех элементах при подключении цепи (рис. 12.5, а) к источнику постоянного напряжения $U = 25$ В, если $R_1 = 10$ кОм, $R_2 = 40$ кОм, $C = 1$ мкФ.

Указание: разберите задачу 12.16.

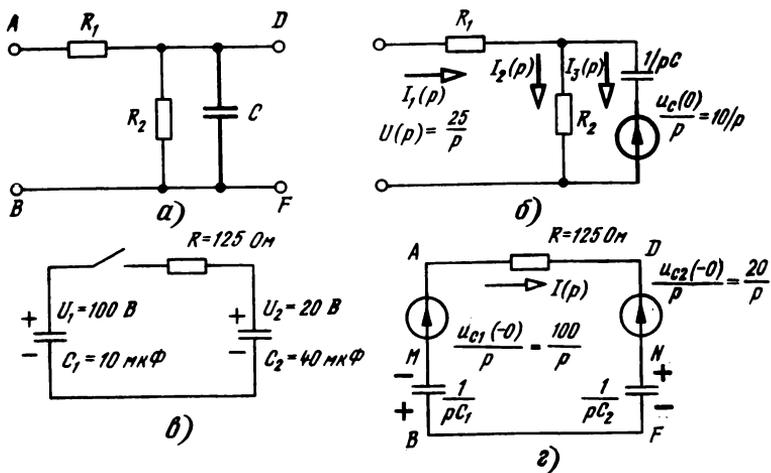


Рис. 12.5

12.18. Найти мгновенные токи во всех ветвях и напряжения на конденсаторе после подключения цепи, показанной на рис. 12.5, а, к источнику постоянного напряжения $U=25$ В, если конденсатор до коммутации был заряжен до напряжения $u_C(0)=10$ В с плюсом на точке D ; $R_1=10$ кОм, $R_2=40$ кОм, $C=1$ мкФ.

Указание: разберите задачу 12.16.

Решение. Нарисуем операторную схему цепи (рис. 12.5, б). Вместо временного напряжения $u(t)=25$ В следует записать операторное напряжение $U(p)=U/p=25/p$, резистивные сопротивления R_1 и R_2 остаются без изменений, емкостное операторное сопротивление $Z_C(p)=1/pC$. Вместо заряженного до напряжения $u_C(0)$ конденсатора изображают незаряженный конденсатор с операторным сопротивлением $1/pC$, последовательно с которым включен источник напряжения с операторной ЭДС $u_C(0)/p=10/p$. Стрелка этой ЭДС указывает направление, по которому протекал бы ток от данной ЭДС при разряде конденсатора (подробнее см. с. 387—389 в [1]).

Поскольку в данной цепи начальные условия не нулевые, нельзя записывать выражение для входного сопротивления непосредственно по виду цепи (аналогично тому, как это нельзя было делать в цепях с зависимыми источниками). Можно только составлять уравнения по различным законам электротехники (например, по законам Кирхгофа) и решать получившуюся систему уравнений. Поскольку в данной цепи три ветви и в них соответственно протекают три различных тока, для расчета этих токов необходимо составить систему из трех уравнений с тремя неизвестными. Запишем одно уравнение по первому и два — по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_1(p) = I_2(p) + I_3(p); \\ U/p = R_1 I_1(p) + R_2 I_2(p); \\ -u_C(0)/p = -R_2 I_2(p) + (1/pC) I_3(p). \end{cases}$$

Подставим выражение для $I_1(p)$ из первой строки во второе уравнение, тогда

$$\begin{cases} U/p = R_1 I_2(p) + R_1 I_3(p) + R_2 I_2(p); \\ 10/p = R_2 I_2(p) - (1/pC) I_3(p). \end{cases}$$

После подстановки $I_3(p)$ из первого уравнения во второе получим уравнение с одним неизвестным $I_2(p)$:

$$I_3(p) = \frac{(U/p) - [R_1 + R_2] I_2(p)}{R_1};$$

$$\frac{10}{p} = R_2 I_2(p) - \left(\frac{1}{pC}\right) \left[\frac{U/p - (R_1 + R_2) I_2(p)}{R_1} \right].$$

Приведем выражение к общему знаменателю и отбросим его, тогда $10R_1C = pR_1R_2CI_2(p) - (U/p) + (R_1+R_2)I_2(p)$ или $I_2(p) \times [pR_1R_2C + R_1 + R_2] = U/p + 10R_1C$, откуда

$$\begin{aligned} I_2(p) &= \frac{[U + p \cdot 10R_1C]}{pR_1R_2C [p + (R_1 + R_2)/R_1R_2C]} = \\ &= \frac{10R_1C [p + (U/10R_1C)]}{R_1R_2Cp [p + (R_1 + R_2)/R_1R_2C]} = (10/R_2) \left[\frac{p + (U/10R_1C)}{p [p + (R_1 + R_2)/R_1R_2]} \right] = \\ &= (10/40 \cdot 10^3) \left[\frac{p + (25/10 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6})}{p [p + 50 \cdot 10^3 / 10 \cdot 40 \cdot 10^{-6}]} \right] = \\ &= 0,25 \cdot 10^{-3} [(p+250)/p(p+125)]. \end{aligned}$$

Рассчитаем временной оригинал $i_2(t)$ по получившемуся операторному изображению $I_2(p)$. В соответствии с формулой разложения

$$i_2(t) = 0,25 \cdot 10^{-3} \sum \frac{F_1(p=p_k)}{F_2'(p=p_k)} e^{p_k t}.$$

Приравняем нулю знаменатель выражения $I_2(p)$ и найдем корни этого уравнения. Тогда $p(p+125)=0$, откуда очевидно, что $p_1=0$, $p_2=-125$. Запишем производную знаменателя $F_2' = 2p+125$. Тогда

$$\begin{aligned} i_2(t) &= 0,25 \cdot 10^{-3} \left[\frac{250}{125} + \frac{-125+250}{2(-125)+125} e^{-125t} \right] = \\ &= 0,25 \cdot 10^{-3} [2 - e^{-125t}] \quad A = 0,25 (2 - e^{-125t}) \text{ мА}. \end{aligned}$$

Определим операторный ток $I_3(p)$. Для этого в выражение для $I_3(p)$ подставим операторное выражение тока $I_2(p)$. Тогда $I_3(p) = U/pR_1 - I_2(p)[1 + R_2/R_1] = 25/p \cdot 10 \cdot 10^3 - 0,25 \cdot 5 \cdot 10^{-3} (p + 250)/p(p+125)$. Проведя элементарные преобразования, получим $I_3(p) = 1,25 \cdot 10^{-3} [1/(p+125)]$. Так как $1/(p+a) \rightarrow e^{-at}$, то $i_3(t) = 1,25 \cdot 10^{-3} e^{-125t} \text{ А} = 1,25 e^{-125t} \text{ мА}$.

Выражение для мгновенного тока в первой ветви проще найти сразу во временной форме $i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$ (хотя вполне возможно найти $I_1(p) = I_2(p) + I_3(p)$), после чего по $I_1(p)$ определить соответствующий ему $i_1(t) = 0,5 - 0,25 e^{-125t} + 1,25 e^{-125t} = 0,5 + 1 \cdot e^{-125t} \text{ мА}$.

Произведем проверки. Так как до коммутации заряд конденсатора был отличен от нулевого, сопротивление конденсатора в первый момент не равно нулю. Проверка для момента $t=0$ состоит в том, что напряжение на резисторе R_2 в этот момент должно равняться напряжению на конденсаторе до коммутации, т. е. $R_2 i_2(0) = 40 \cdot 10^3 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} (2-1) = 10 \text{ В}$. Проверим второй закон Кирхгофа в первом контуре: $U = R_1 i_1(0) + R_2 i_2(0) = 10 \times 10^3 (0,5+1) \cdot 10^{-3} + 10 = 25 \text{ В}$. При $t=\infty$ $i_3=0$, следовательно, ток $i_1(\infty)$ должен равняться $i_2(\infty)$. Действительно, $0,5=0,5$. Также выполняется равенство $U = R_1 i_1(\infty) + R_2 i_2(\infty) = 25 = 10 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \times$

$\times 10^{-3} + 40 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 25$. Проверки выполняются, значит задача решена правильно.

12.19. Рассчитать зависимости $i=f(t)$, $u_{C_1}=f(t)$, $u_{C_2}=f(t)$, построить соответствующие кривые после замыкания ключа для цепи (рис. 12.5, в). Определить энергию в конденсаторах до коммутации (т. е. при $t=-0$) и по окончании переходного процесса ($t=\infty$), если до коммутации конденсатор $C_1=10$ мкФ был заряжен до напряжения $u_{C_1}(-0)=100$ В, а $C_2=40$ мкФ — до $u_{C_2}(-0)=20$ В. Полярность напряжений указана на чертеже, $R=125$ Ом. Определить указанные характеристики, если полярность начального напряжения на конденсаторе C_1 изменена на обратную.

Указание: разберите задачу 12.17.

Решение. Покажем на рис. 12.5, з операторную схему замещения цепи (рис. 12.5 в) и определим операторный ток $I(p)$. Так как $u_{C_1}(0) > u_{C_2}(0)$, ток $I(p)$ протекает по часовой стрелке:

$$I(p) = \frac{u_{C_1}(-0)/p - u_{C_2}(-0)/p}{R + 1/pC_1 + 1/pC_2} = \\ = \frac{100/p - 20/p}{125 + (1/p \cdot 10 \cdot 10^{-6}) + (1/p \cdot 40 \cdot 10^{-6})} = 0,64 / [1/(p + 1000)].$$

Так как $1/(p+a) \rightarrow e^{-at}$ (см. строку 3 табл. 12.1 в [1]), то $i = 0,64e^{-1000t}$. Определим операторное напряжение на конденсаторе C_1 , т. е. между точками A и B . Как видно из рис. 12.5, з, это напряжение складывается из операторного напряжения источника (т. е. между точками A и M) и напряжения на незаряженном конденсаторе C_1 (т. е. между точками M и B). Таким образом, $U_{C_1}(p) = U_{AM}(p) + U_{MB}(p)$. Так как ток $I(p)$ течет по часовой стрелке, то «плюс» напряжения конденсатора C_1 окажется в точке B , а «минус» — соответственно в точке M . Полярности напряжений $U_{AM}(p)$ и $U_{MB}(p)$ оказываются противоположными, поэтому

$$U_{AB}(p) = \frac{u_{C_1}(-0)}{p} - \frac{1}{pC_1} I(p) = \frac{100}{p} - \\ - \frac{1}{p \cdot 10 \cdot 10^{-6}} \frac{0,64}{(p + 1000)} = \frac{100}{p} - \frac{64 \cdot 10^3}{p(p + 1000)}.$$

Так как сумма изображений соответственно равна сумме оригиналов, $a \frac{1}{p(p+a)} \rightarrow \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$ (см. там же, строка 4), то $u_{C_1}(t) = 100 - \frac{64 \cdot 10^3}{1000} (1 - e^{-1000t}) = 36 + 64e^{-1000t}$. Аналогично

$$U_{DF}(p) = U_{DN}(p) + U_{NF}(p) = \frac{u_{C_2}(-0)}{p} + \frac{1}{pC_2} I(p) = \\ = \frac{20}{p} + \frac{1}{p \cdot 40 \cdot 10^{-6}} \frac{0,64}{(p + 1000)} = \frac{20}{p} + \frac{16 \cdot 10^3}{p(p + 1000)},$$

откуда $u_{C2}(t) = 20 + \frac{16 \cdot 10^3}{1000} (1 - e^{-1000t}) = 36 - 16e^{-1000t}$.

Произведем проверку. При $t=0$ $u_{C1} = 36 + 64 = 100$ В, $u_{C2} = 36 - 16 = 20$ В. При $t = \infty$ $u_{C1} = 36$ В, $u_{C2} = 36$ В. Проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

Определим энергию, запасенную в конденсаторах до и после коммутации. Так как $W_C = CU^2/2$, то $W_C(-0) = [C_1 u_{C1}^2(-0)/2] + [C_2 u_{C2}^2(-0)/2] = [(10 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2)/2] + [(40 \cdot 10^{-6} \cdot 20^2)/2] = 58$ мДж; $W_C(\infty) = [C_1 u_{C1}^2(\infty)/2] + [C_2 u_{C2}^2(\infty)/2] = [(10 \cdot 10^{-6} \cdot 36^2)/2] + [(40 \cdot 10^{-6} \cdot 36^2)/2] = 6,48 + 25,92 = 32,4$ мДж. Очевидно, что $\Delta W_C = W_C(-0) - W_C(\infty) = 58 - 32,4 = 25,6$ мДж представляет собой энергию, переходящую за время переходного процесса в резистивном сопротивлении R из электрической в тепловую. Определим эту энергию:

$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^{\infty} i^2 R dt = \int_0^{\infty} (0,64e^{-1000t})^2 125 dt = \\ &= \frac{0,64^2 \cdot 125}{-2 \cdot 1000} (e^{-2000t}) \Big|_0^{\infty} = -25,6 \cdot 10^{-3} (0 - 1) = 25,6 \text{ мДж.} \end{aligned}$$

Результаты совпадают. При изменении полярности начального напряжения на конденсаторе C_1 получается $i = -0,96e^{-1000t}$; $u_{C1} = -4 - 96e^{-1000t}$; $u_{C2} = -4 + 24e^{-1000t}$. Подробные выкладки рекомендуется произвести учащимся самостоятельно.

12.20. Определить токи во всех ветвях и напряжения на всех элементах в моменты $t=+0$ и $t=\infty$ для цепи, показанной на рис. 12.6, а.

Указание: изучите с. 370, 371 в [1].

Решение. В первый момент после коммутации (т. е. при $t=+0$) сопротивление индуктивного элемента равно бесконечности, а емкостного — нулю. При этом схема принимает вид,

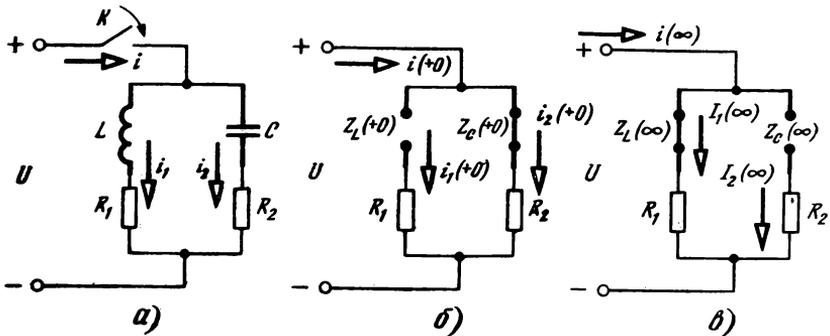


Рис. 12.6

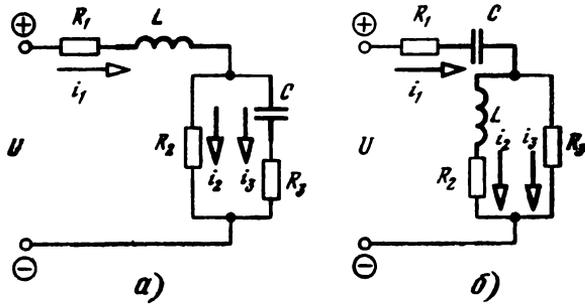


Рис. 12.7

показанный на рис. 12.6, б. Из схемы видно, что $i_1(+0) = 0$, $i_2(+0) = U/R_2$, $i(+0) = i_1(+0) + i_2(+0) = U/R_2$, $u_{R_1} (+0) = 0$, $u_{R_2} (+0) = U$, $u_C (+0) = 0$, $u_L (+0) = U$. В вынужденном режиме (т. е. при $t = \infty$) $i_1(\infty) = U/R_1$, $i_2(\infty) = 0$, $i(\infty) = i_1(\infty) = U/R_1$, $u_{R_1}(\infty) = U$, $u_L(\infty) = 0$, $u_C(\infty) = U$, $u_{R_2}(\infty) = 0$ (рис. 12.6, в).

12.21. Определить значения токов во всех ветвях и напряжений на всех элементах в моменты $t = +0$ и $t = \infty$ для цепей, показанных на рис. 12.7, а и б.

Указание: изучите с. 370, 371 в [1] и разберите задачу 12.20.

12.22. Рассчитать операторную переходную характеристику цепи $K(p)$, операторное, выходное напряжение $U_2(p)$ и временное выходное напряжение $U_2(t)$, если цепь, показанная на рис. 12.8, а, подключается к источнику постоянного напряжения со значением U .

Указание: изучите с. 381—385 и 392—395 в [1].

Решение. Запишем операторную переходную характеристику цепи $K(p)$. Для этого следует выражение для комплексного коэффициента передачи, в котором множитель $j\omega$ заменен оператором (т. е. множителем) p , представить в виде

$$K(p) = \frac{R_2(1/pC)}{R_2 + (1/pC)} \cdot \frac{R_2(1/pC)}{R_1 + \frac{R_2(1/pC)}{R_2 + 1/pC}}$$

После элементарных преобразований получаем

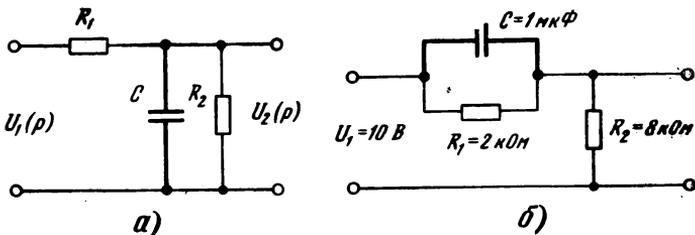


Рис. 12.8

$$K(p) = \frac{R_2}{(R_1 + R_2 + pR_1R_2C)} = \frac{R_2}{R_1R_2C[p + (R_1 + R_2)/R_1R_2C]}$$

Операторное выходное напряжение $U_2(p) = U_1(p) \cdot K(p) = (U/p)(1/R_1C) \cdot 1/[p + (R_1 + R_2)/R_1R_2C]$. Так как $1/[p(p+a)] \rightarrow (1/a)(1 - e^{-at})$, то $u_2(t) = [UR_1R_2C / R_1C(R_1 + R_2)] \times \times [1 - e^{-1/(R_1+R_2)/R_1R_2C t}] = [UR_2 / (R_1 + R_2)] [1 - e^{-1/(R_1+R_2)/R_1R_2C t}]$.

Выполним проверку. При $t=0$ сопротивление конденсатора равно нулю и, следовательно, $u_2(0)$ также должно равняться нулю. Действительно, $u_2(0) = [UR_2 / (R_1 + R_2)](1 - 1) = 0$. При $t = \infty$ сопротивление конденсатора постоянному напряжению равно бесконечности, следовательно, $u_2(\infty) = UR_2 / (R_1 + R_2)$, что и получается, поскольку $e^{-\infty} = 0$. Проверки выполняются, значит задача решена правильно.

12.23. Решить задачу 12.22 для цепи, показанной на рис. 12.8, б.

Указание: разберите задачу 12.22.

12.24. Ключ цепи, показанной на рис. 12.9, а, находился в разомкнутом состоянии (положение 1), затем был переведен в положение 2, а через 5 минут — в положение 3. Определить наибольшие значения токов в цепи заряда (т. е. R_1C) и цепи разряда (R_2C), если $U=100$ В, $R_1=1$ МОм, $R_2=10$ кОм, $C=50$ мкФ. За какое время конденсатор в данной цепи практически заряжается и за какое — разряжается?

Указание: изучите с. 364, 365 в [1].

12.25. Двужильный кабель отключается от источника постоянного напряжения $U=100$ В и разряжается через сопротивление изоляции $R=50$ МОм. Определить емкость кабеля, если через 50 с после отключения кабеля напряжение между жилами становится равным 20 В.

Указание: изучите с. 359—361 в [1].

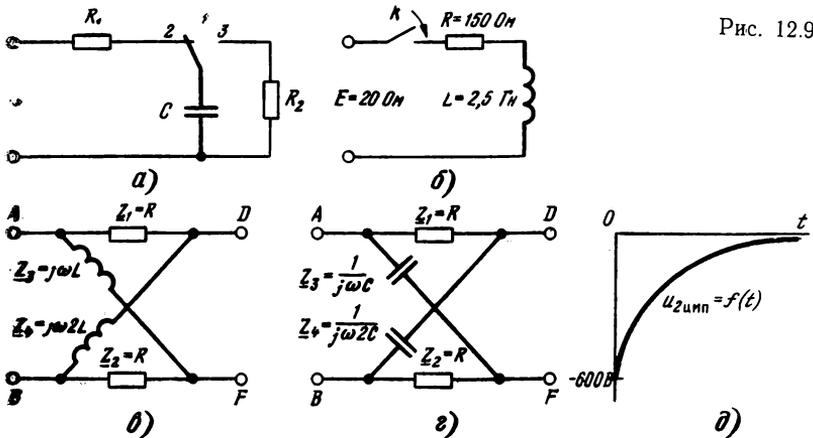


Рис. 12.9

12.26. Конденсатор емкостью $C=20$ мкФ отключается от источника постоянного напряжения и разряжается через резистор $R=2$ кОм. Определить напряжения источника и энергию, которая выделяется на резисторе R : а) через $t=20,4$ мс и б) по окончании разряда конденсатора, если через $t=20,4$ мс ток в цепи был 3 мА.

Указание: изучите с. 359—361 в [1].

12.27. Через какое время после включения источника $E=20$ В притянется якорь электромагнитного реле, если сопротивление обмотки $R=150$ Ом, индуктивность $L=2,5$ Гн (рис. 12.9, б), а ток срабатывания реле 100 мА, задачу решить классическим и операторным методами.

Указание: изучите с. 346—351 и 381, 382 в [1].

ПЕРЕХОДНАЯ И ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПЕЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

12.28. Рассчитать выражение операторного коэффициента передачи в схеме, показанной на рис. 12.9, в, если $R=100$ Ом, $L=0,25$ Гн.

Указание: изучите с. 88, 89, 381, 382, 385—387 в [1] и разберите задачу 12.16.

Решение. Как показано в формуле (3.26) [1], в мостовой схеме (рис. 12.9, в) коэффициент передачи в комплексном виде определяется выражением $K = (Z_3 Z_4 - Z_1 Z_2) / [(Z_2 + Z_3)(Z_1 + Z_4)] = (j\omega L \cdot j\omega 2L - R \cdot R) / [(R + j\omega L)(R + j\omega 2L)]$. Перейдем от комплексного выражения к операторному, для чего заменим $j\omega$ оператором p :

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{(p^2 \cdot 2L^2 - R^2)}{(R^2 + pRL + p2RL + p^2 2L^2)} = \frac{p^2 \cdot 2L^2 - R^2}{p^2 \cdot 2L^2 + p(RL + 2RL) + R^2} = \\ &= \frac{2L^2 [p^2 - (R^2/2L^2)]}{2L^2 [p^2 + p(3RL/2L^2) + (R^2/2L^2)]} = \\ &= \frac{p^2 - (R^2/2L^2)}{p^2 + p \cdot 1,5(100/0,25) + 0,5(100/0,25)^2} = \frac{(p^2 - 8 \cdot 10^4)}{(p^2 + 6 \cdot 10^2 p + 8 \cdot 10^4)}. \end{aligned}$$

12.29. Рассчитать операторное $U_2(p)$ и временное $u_2(t)$ напряжения на выходе цепи, показанной на рис. 12.9, в, если к входу цепи подключается источник напряжения вида единичной функции, т. е. $u_1(t) = 1(t)$.

Указание: изучите с. 385—387, 391, 392 в [1] и разберите задачу 12.28.

Решение. Операторное выходное напряжение $U_2(p)$ определяется из выражения $U_2(p) = K(p) U_1(p)$. Так как $u_1(t) = 1(t)$, то $U_1(p) = 1/p$, тогда $U_2(p) = 1(p^2 - 8 \cdot 10^4) / [p(p^2 + 6/10^2 p + 8/10^4)]$. Числитель получившегося операционного выражения содержит несколько слагаемых, поэтому переход от операторного изобра-

жения к временному оригиналу легче всего произвести по формуле разложения (см. с. 385—387 в [1]). Приравняем нулю знаменатель $F_2(p)$ и найдем корни полученного уравнения: $p(p^2 - 6 \cdot 10^2 p + 8 \cdot 10^4) = 0$, откуда $p_1 = 0$, $p_{2,3} = -3 \cdot 10^2 \pm \sqrt{9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 10^4} = -3 \cdot 10^2 \pm 1 \cdot 10^2$, т. е. $p_2 = -200$ 1/с, $p_3 = -400$ 1/с. Так как $F_2(p) = p^3 + 6 \cdot 10^2 p^2 + 8 \cdot 10^4 p$, то $F_2'(p) = 3p^2 + 12 \cdot 10^2 p + 8 \cdot 10^4$. Поскольку

$$f(t) = \sum \frac{F_1(p)_{p=p_k}}{F_2'(p)_{p=p_k}} e^{p_k t},$$

$$u_2(t) = \frac{-8 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^4} + \frac{[(-200)^2 - 8 \cdot 10^4]}{3(-200)^2 + 12 \cdot 10^2(-200) + 8 \cdot 10^4} e^{-200t} +$$

$$+ \frac{[(-400)^2 - 8 \cdot 10^4]}{3(-400)^2 + 12 \cdot 10^2(-400) + 8 \cdot 10^4} e^{-400t} = -1 +$$

$$+ \left[\frac{-4 \cdot 10^4}{(12 \cdot 10^4 - 24 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^4)} \right] e^{-200t} + \left[\frac{8 \cdot 10^4}{(48 \cdot 10^4 - 48 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^4)} \right] \times$$

$$\times e^{-400t} = -1 + 1e^{-200t} + 1e^{-400t}.$$

Произведем проверку. При $t=0$ сопротивления индуктивных элементов бесконечно велики, токи в ветвях при этом равны нулю, напряжение на выходе повторяет напряжение на входе, $K=1$. Это же получается и из выражения для $u_2(t)$ при $t=0$. Действительно, $u_2(0) = -1 + 1 + 1 = 1$. При $t=\infty$ сопротивления индуктивных элементов равны нулю, при этом $\varphi_B = \varphi_A$, а $\varphi_D = \varphi_B$, т. е. выходное напряжение U_2 равно входному напряжению, но с обратной полярностью, коэффициент передачи должен равняться -1 . Действительно, из выражения для $u_2(t)$ при $t=\infty$ $u_2(\infty) = -1 + 0 + 0 = -1$. Граничные условия выполняются, следовательно, задача решена правильно. Так как за время переходного процесса $u_2(t)$ изменяется от $-u_1$ до $+u_1$, существует время, через которое после коммутации выходное напряжение равно нулю. В этом случае $-1 + e^{-200t_0} + e^{-400t_0} = 0$, т. е. $e^{-200t_0} + e^{-400t_0} = 1$, откуда $t_0 = 2,4$ мс.

Произведем проверку: $e^{-200 \cdot 2,4 \cdot 10^{-3}} + e^{-400 \cdot 2,4 \cdot 10^{-3}} = e^{-0,48} + e^{-0,96} = 0,62 + 0,38 = 1$. Расчет показывает, что при $t=15$ мс $u_2(t) = -0,95$ В. Таким образом, в интервале $0 \dots 2,4$ мс выходное напряжение и коэффициент передачи в данной цепи положительные, при $t=t_0=2,4$ мс — равны нулю, в интервале $2,4 \dots 15$ мс выходное напряжение изменяется от 0 до $-0,95$ В, через $t=15$ мс переходный процесс практически заканчивается и в цепи устанавливается вынужденный режим с $u_2(t) = -1$ В = const, т. е. с коэффициентом передачи, равным -1 .

12.30. Найти выражение для операторного коэффициента передачи в схеме, показанной на рис. 12.9, г, если $R=1$ кОм, $C=1$ мкФ.

Указание: изучите с. 88, 89, 381, 382, 385—387 в [1] и разберите задачи 12.16, 12.29.

12.31. Рассчитать операторное $U_2(p)$ и временное $u_2(t)$ напряжения на выходе цепи, показанной на рис. 12.9, *г*, при подключении к цепи напряжения вида единичной функции, если $R=1$ кОм, $C=1$ мкФ.

Указание: разберите задачи 12.28 и 12.29. Используйте результаты, полученные в задаче 12.30.

12.32. Цепь, показанная на рис. 12.9, *в*, подключается к напряжению вида импульсной функции $\delta(t)$. Определить операторное $U_2(p)$ и временное $u_2(t)$ выражения на выходе цепи.

Указание: изучите с. 392—394 в [1], используйте результаты, полученные в задаче 12.28.

Решение. Данную задачу можно решить двумя способами: либо с помощью выражения $U_2(p) = U_1(p) \cdot K(p)$, откуда $u_2(t) \doteq U_2(p)$, либо взяв производную от выходного напряжения $u_2(t)$, полученного при подключении цепи к источнику с единичным напряжением. Произведем расчеты обоими способами. Так как $\delta(p) = 1$ (см. формулу (12.41) в [1]), а как показано в задаче 12.28, в данной цепи $K(p) = (p^2 - 8 \cdot 10^4) / (p^2 + 6 \cdot 10^2 p + 8 \cdot 10^4)$, то $U_2(p) = \delta(p) \cdot K(p) = (p^2 - 8 \cdot 10^4) / (p^2 + 6 \cdot 10^2 p + 8 \cdot 10^4)$. Определим $u_2(t)$ по формуле разложения. Для этого приравняем нулю знаменатель и найдем корни полученного уравнения: $p_1 = -200$ 1/с, $p_2 = -400$ 1/с (см. решение задачи 12.29). Так как корня $p=0$ в данном решении нет, то не будет и вынужденной составляющей. Выходное напряжение в данном случае состоит только из свободных составляющих:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \frac{(-200)^2 - 8 \cdot 10^4}{2(-200) + 6 \cdot 10^2} e^{-200t} + \frac{(-400)^2 - 8 \cdot 10^4}{2(-400) + 6 \cdot 10^2} e^{-400t} = \\ &= -200e^{-200t} - 400e^{-400t}. \end{aligned}$$

Проверим данный результат вторым способом. Так как импульсная функция $\delta(t)$ есть производная по времени от единичной функции $\sigma(t)$, т. е. $\delta(t) = (d/dt)\sigma(t)$, а цепь линейная, можно получить выходное напряжение $u_2(t)$ от воздействия единичного входного напряжения, а затем взять от нее производную по времени. Тогда $u_{2 \text{ имп}}(t) = (d/dt)u_{2 \text{ един}}$. Но, как показано в задаче 12.29, в данной цепи $u_{2 \text{ един}} = -1 + 1e^{-200t} + 1e^{-400t}$, откуда $u_{2 \text{ имп}} = (d/dt)(-1 + 1e^{-200t} + 1e^{-400t}) = -200e^{-200t} - 400e^{-400t}$.

Проанализируем полученное выражение. При $t=0$ (т. е. при отключенном источнике) $u_{2 \text{ имп}} = 0$, при $t=+0$ $u_{2 \text{ имп}} = -200 - 400 = -600$, при $t=\infty$ $u_{2 \text{ имп}} = 0$. Таким образом, при импульсном воздействии на входе напряжение на выходе скачком изменяется до -600 В, а затем плавно, по закону, определяемому разностью двух экспонент, — до нуля (рис. 12.9, *д*). Переходный процесс происходит за время $t_{\text{пер}} = (3 \dots 5) 1/a$, где a — абсолютное значение меньшего коэффициента при степенях экспонент. В данном случае $t_{\text{пер}} = (3 \dots 5) (1/200) = 15 \dots 25$ мс.

Обратимся к кривой выходного напряжения в этой же цепи при единичном входном напряжении $u_{2 \text{ ед}}$. Из выражения $u_{2 \text{ ед}} = -1 + 1e^{-200t} + 1e^{-400t}$ видно, что при $t=0$ $u_{2 \text{ ед}}=0$, при $t=+\infty$ $u_{2 \text{ ед}}=1$, при $t=-\infty$ $u_{2 \text{ ед}}=-1$. Таким образом, при подключении данной цепи к единичному напряжению наибольшее выходное напряжение не превышает (по модулю) 1 В, а при подключении этой же цепи к импульсному напряжению — в 600 раз больше. Если не учитывать этого обстоятельства, то могут происходить пробой различных деталей (конденсаторов, микросхем, изоляции и пр.).

12.33. Найти операторное $U_2(p)$ и временное $u_2(t)$ выражения при подключении цепи, показанной на рис. 12.9, г, к напряжению вида импульсной функции $\delta(t)$. Построить кривую $u_{2 \text{ имп}}(t)$ и сравнить ее с кривой $u_{2 \text{ ед}}(t)$.

Указание: разберите задачу 12.32.

СПЕКТРЫ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

12.34. Записать временное $u(t)$ и операторное $U(p)$ выражения для непериодического напряжения, показанного на рис. 12.10, а.

Указание: изучите с. 381—383 в [1].

Решение. Запишем выражение для мгновенных напряжений данного сигнала в виде $u(t)$. Так как в интервале $0 \dots \infty$ закон, по которому изменяются мгновенные значения, претерпевает изменения (от 0 до $u(t) = U_m$, а от t_n до ∞ $u(t) = 0$), то достаточно сложно найти одно математическое выражение, которое позволяет определить $u(t)$ в любой момент. Во всех слу-

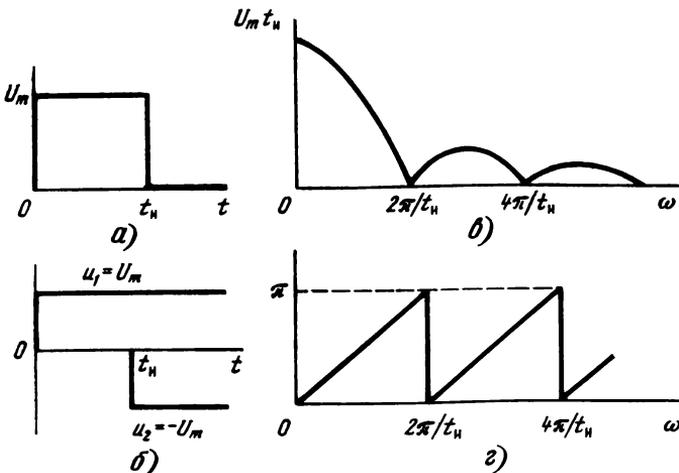


Рис. 12.10

чаях, когда воздействующий сигнал является «составным», приходится для разных интервалов времени пользоваться различными расчетными формулами. При этом следует иметь в виду, что математические операции становятся более удобными, если сложный сигнал представить совокупностью нескольких более простых сигналов. Именно таким методом исследовались периодические сигналы негармонической формы, которые заменялись несколькими простейшими, в данном случае гармоническими сигналами, причем так, чтобы сумма мгновенных значений всех составляющих была равна значению исходного негармонического сигнала в каждый момент времени.

Аналогичным образом поступают и при расчете цепей в переходных режимах. Следует только помнить, что при разложении непериодических сигналов простейшими сигналами являются не синусоиды, а прямые, проведенные под соответствующими углами. Например сигнал, показанный на рис. 12.10, а, удобно заменить двумя сигналами: первым — скачкообразным увеличивающимся от 0 до U_m в момент $t=0$, а затем остающимся неизменным в интервале от 0 до ∞ , и вторым, который в момент $t=t_n$ скачкообразно изменяется от 0 до $-U_m$, а затем остается неизменным до $t=\infty$ (рис. 12.10, б). Алгебраическая сумма мгновенных значений обоих сигналов в любой момент должна равняться значениям исходного сигнала, показанного на рис. 12.10, а. Такой способ описания сигналов представляет большие удобства, поскольку в этом случае каждая составляющая существует неограниченно долго.

Найдем выражение для мгновенных значений каждой составляющей. В интервале $0 \dots t_n$ $u(t) = U_m 1(t)$, а в интервале $t_n \dots \infty$ $u(t) = U_m 1(t) - U_m 1(t - t_n)$. Запишем это напряжение в операторном виде, учитывая, что множитель U_m переходит из временного выражения в операторное без изменений как всякая постоянная величина, множитель $1(t)$, означающий скачок напряжения от 0 до 1, изображается как $1/p$, а множитель $1(t - t_n)$, означающий скачок напряжения от 1 до 0, но происходящий позже предыдущего скачка (т. е. по существу начала координат) на время t_n , изображается как операторный член $(1/p)e^{-pt_n}$. Тогда $U(p) = (U_m/p) - (U_m/p)e^{-pt_n} = (U_m/p)(1 - e^{-pt_n})$.

12.35. Записать выражения для амплитудной $U(\omega)$ и фазной $\varphi(\omega)$ спектральных плотностей напряжения, показанного на рис. 12.10, а.

Указание: изучите с. 395—397 в [1] и разберите задачу 12.34.

Решение. Как было показано в задаче 12.34, для напряжения (рис. 12.10, а) $U(p) = (U_m/p)(1 - e^{-pt_n})$. Чтобы определить комплексную спектральную плотность данного напряжения, следует множитель p заменить множителем $j\omega$, после чего записать получившееся комплексное выражение в показательной форме. Модуль этого выражения будет амплитудной

спектральной плотностью $U(\omega)$ (иногда слово «амплитудная» опускают и говорят короче — «спектральная плотность»), а аргумент — фазной плотностью. Проведем указанные операции: $U(j\omega) = (U_m/j\omega)[1 - e^{-j\omega t_n}] = (U_m/j\omega)(1 - \cos \omega t_n + j \sin \omega t_n)$, откуда

$$\begin{aligned} U(\omega) &= (U_m/\omega) \sqrt{1 - 2 \cos \omega t_n + \underbrace{\cos^2 \omega t_n + \sin^2 \omega t_n}_1} = \\ &= (U_m/\omega) \sqrt{2 - 2 \cos \omega t_n} = (U_m/\omega) \sqrt{2 \cdot 2 [(1 - \cos \omega t_n)/2]} = \\ &= (U_m/\omega) \cdot 2 \sqrt{\sin^2(\omega t_n/2)} = (2U_m/\omega) [\sin(\omega t_n/2)]. \end{aligned}$$

Определим характер кривой получившейся амплитудной спектральной плотности. При $\omega=0$ оказывается неопределенность вида $0/0$, которую можно раскрыть по правилу Лопиталья. Для этого следует взять производные по частоте ω от числителя и от знаменателя, что приводит к выражению $(t_n/2)[2U_m \cos(\omega t_n/2)]$, откуда $U(0) = U_m t_n$. Рассчитаем ω_0 , при которых спектральная плотность равна нулю. Очевидно, что множитель $\sin(\omega t_n/2)$ равен нулю во всех случаях, когда аргумент $\omega t_n/2$ кратен значению π (т. е. 180°). Тогда $\omega_0 t_n = k \cdot 2\pi$ или $\omega_0 = k \cdot 2\pi/t_n$, где k — любое целое положительное число. График амплитудной плотности $U(\omega)$ показан на рис. 12.10, в. Определим выражение фазной плотности $\varphi(\omega)$. Как известно, $\varphi(\omega) = \varphi_{\text{ч}}(\omega) - \varphi_{\text{зн}}(\omega)$. Рассчитаем $\varphi(\omega)$ числителя комплексной спектральной плотности:

$$\begin{aligned} \text{tg } \varphi_{\text{ч}} &= \sin \omega t_n / (1 - \cos \omega t_n) = \frac{\sin 2(\omega t_n/2)}{2[1 - \cos(\omega t_n/2)]} = \\ &= \frac{\sin(\omega t_n/2) \cos(\omega t_n/2)}{\sin^2(\omega t_n/2)} = \frac{\cos(\omega t_n/2)}{\sin(\omega t_n/2)} = \text{ctg}(\omega t_n/2) = \\ &= \text{tg}(90^\circ - \omega t_n/2), \text{ откуда } \varphi_{\text{ч}}(\omega) = 90^\circ - (\omega t_n/2). \end{aligned}$$

Так как знаменатель выражения $U(j\omega)$ есть $j\omega$, то $\varphi_{\text{зн}}(\omega) = 90^\circ$, и тогда $\varphi(\omega) = \varphi_{\text{ч}}(\omega) - \varphi_{\text{зн}}(\omega) = 90^\circ - \omega t_n/2 - 90^\circ = -\omega t_n/2$. Таким образом, выражение комплексной спектральной плотности прямоугольного напряжения с максимальным значением U_m и длительностью t_n описывается комплексным выражением

$$\begin{aligned} U(j\omega) &= (2U_m/\omega) [\sin(\omega t_n/2)] e^{-j(\omega t_n/2)} = \\ &= U_m t_n \left[\frac{\sin(\omega t_n/2)}{(\omega t_n/2)} \right] e^{-j(\omega t_n/2)}. \end{aligned}$$

Поскольку через каждые 180° (в радианном исчислении через π) углы повторяются, то график $\varphi(\omega)$ данного сигнала имеет вид, показанный на рис. 12.10, г.

12.36. Определить спектральную плотность непериодического напряжения треугольной формы, показанного на рис. 12.11, а.

Указание: разберите задачи 12.34 и 12.35.

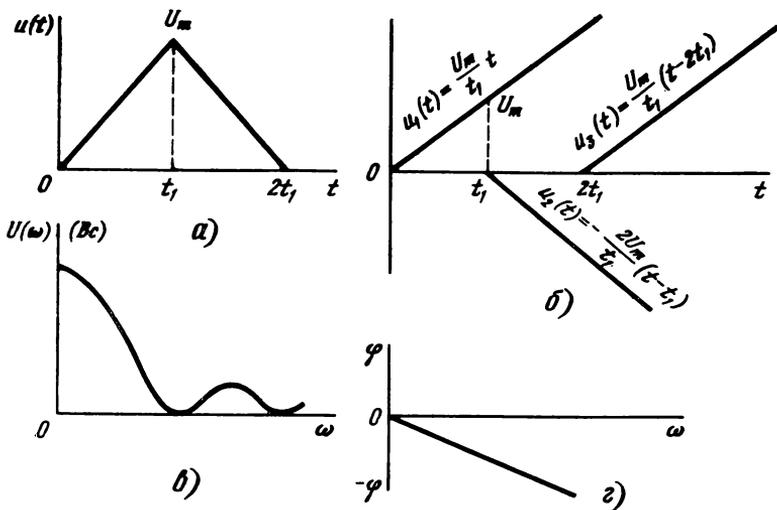


Рис. 12.11

Решение. Кривую, показанную на рис. 12.11, а, удобно заменить тремя прямыми линиями. Первая и третья из них имеют одинаковую крутизну (т. е. тангенсы углов наклона), а вторая — в 2 раза большую (рис. 12.11, б). Тогда сумма мгновенных значений всех составляющих в любой момент равна мгновенному значению исходного сигнала. Очевидно, что в интервале $0 \dots t_1$ мгновенные напряжения заданного сигнала $u(t)$ описываются выражением $u_1(t) = (U_m/t_1)t$, в интервале от $t_1 \dots 2t_1$ $u(t) = u_1(t) + u_2(t) = (U_m/t_1)t - (2U_m/t_1)(t - t_1)$, в интервале $2t_1 \dots \infty$ $u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) = (U_m/t_1)t - (2U_m/t_1)(t - t_1) + (U_m/t_1)(t - 2t_1)$. Запишем получившиеся выражения в операторной форме. Множитель (U_m/t_1) не зависит от времени, поэтому он переходит из временного в операторное выражение без изменений. Переменная t изображается как $1/p^2$, аналогично $(t - t_1) \doteq (1/p^2)e^{-pt_1}$, $(t - 2t_1) \doteq (1/p^2)e^{-2pt_1}$. Тогда в интервале $0 \dots t_1$ $U(p) = U_1(p) = U_m/t_1 p^2$, а $U(j\omega) = U_1(j\omega) = U_m/(t_1 \cdot j\omega \cdot j\omega) = -U_m/t_1 \omega^2$. В интервале $t_1 \dots 2t_1$ $U(p) = U_1(p) + U_2(p) = U_m/t_1 p^2 - (2U_m/t_1 p^2)e^{-pt_1}$ или $U(j\omega) = -\frac{U_m}{t_1 \omega^2} - \left(\frac{2U_m}{t_1 \cdot j\omega \cdot j\omega}\right)e^{-j\omega t_1} = (U_m/t_1 \omega^2) + (2U_m/t_1 \omega^2)e^{-j\omega t_1}$. В интервале $2t_1 \dots \infty$ $U(p) = U_1(p) + U_2(p) + U_3(p) = (U_m/t_1 p^2) - (2U_m/t_1 p^2)e^{-pt_1} + (U_m/t_1 p^2)e^{-2pt_1} = (U_m/t_1 p^2)(1 - 2e^{-pt_1} + e^{-2pt_1})$.

Заменив оператор p множителем $j\omega$, получим выражение для комплексной спектральной плотности: $U(j\omega) = (U_m/t_1 j\omega j\omega)[1 - 2e^{-j\omega t_1} + e^{-j2\omega t_1}] = (U_m/t_1 \omega^2)[2e^{-j\omega t_1} - (1 + \cos 2\omega t_1 - j \sin 2\omega t_1)]$. Так как $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2(\alpha/2)$, а $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, то

$$\begin{aligned}
U(j\omega) &= (U_m/t_1\omega^2)[2e^{-j\omega t_1} - (2\cos^2\omega t_1 - j2\sin\omega t_1 \cdot \cos\omega t_1)] = \\
&= (2U_m/t_1\omega^2)e^{-j\omega t_1}[1 - \cos\omega t_1(\cos\omega t_1 - j\sin\omega t_1)/e^{-j\omega t_1}] = \\
&= (2U_m/t_1\omega^2)e^{-j\omega t_1}[1 - \cos\omega t_1(e^{-j\omega t_1}/e^{-j\omega t_1})] = \\
&= (2U_m t_1/t_1^2\omega^2)2[(1 - \cos\omega t_1)/2]e^{-j\omega t_1} = \\
&= [U_m t_1/(t_1\omega/2)^2]\sin^2(\omega t_1/2)e^{-j\omega t_1} = \\
&= U_m t_1 \left[\frac{\sin(\omega t_1/2)}{(\omega t_1/2)} \right]^2 e^{-j\omega t_1} = U_m t_1 \left[\frac{\sin^2(2\pi f t_1/2)}{(2\pi f t_1/2)^2} \right] e^{-j2\pi t_1 f} = \\
&= U_m t_1 \left[\frac{\sin^2(180^\circ t_1 f)}{9,86(t_1 f)^2} \right] e^{-j(360^\circ t_1 f)},
\end{aligned}$$

откуда амплитудная спектральная плотность определяется модулем полученного выражения, т. е.

$$U(\omega) = U_m t_1 \frac{\sin^2(180^\circ t_1 f)}{9,86(t_1 f)^2} \approx U_m t_1 \frac{\sin^2(180^\circ t_1 f)}{10(t_1 f)^2}.$$

При $\omega=0$, как и в задаче 12.35, необходимо раскрыть неопределенность вида $0/0$. Для этого от числителя и знаменателя следует взять производную по ω . Тогда $[(t_1/2)\cos(\omega t_1/2)]/(t_1/2)$ и при $\omega=0$ $U(0) = U_m t_1$. Начальное значение спектральной функции численно равно площади, ограниченной графиком временной функции. Значения плотности оказываются нулевыми при $(\omega t_1/2) = k \cdot 180^\circ$, т. е. при $f = k/t_1$, где k — любое целое положительное число. График кривой $U(\omega)$ показан на рис. 12.11, *в*. Фазная плотность определяется из выражения $\varphi(\omega) = -\omega t_1 = -360^\circ t_1 f$ (рис. 12.11, *з*).

12.37. Рассчитать числовые значения спектральных плотностей в пределах двух лепестков для напряжения, показанного на рис. 12.11, *а*, если $U_m = 50$ В, $t_1 = 500$ мкс.

Указание. Разберите задачу 12.36.

Решение. Как было показано в задаче 12.36, амплитудная спектральная плотность $U(\omega) = U_m t_1 \frac{\sin^2(180^\circ t_1 f)}{10(t_1 f)^2}$. При $U_m = 50$ В, $t_1 = 500$ мкс $= 0,5 \cdot 10^{-3}$ с

$$U(\omega) = 50 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \frac{\sin^2(180^\circ \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} f)}{10(0,5 \cdot 10^{-3} f)^2}.$$

Если время выражено в миллисекундах, то частоту следует выражать в килогерцах. Результаты расчетов сведены в табл. 12.1. Обратим внимание, что единицей измерения спектральной плотности напряжения является В/Гц $= \text{В} \cdot \text{с} = \text{Вб}$ (вебер), а спектральной плотности тока — А·с, т. е. кулон.

12.38. Определить спектральную плотность непериодического сигнала, показанного на рис. 12.12, *а*.

Указание: разберите задачи 12.34—12.36. Данный сигнал следует заменить двумя прямыми (рис. 12.12, *б*).

f , кГц	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$U(\omega)$, В/Гц	25	5	5	1,67	0	1	1,67	0,714	0
$\varphi(\omega)$, град	0	-90	-180	-270	-360 0	-450 -90	-540 -180	-630 -270	-720 -360

12.39. Рассчитать числовые значения амплитудных и фазных спектральных плотностей в пределах двух лепестков для напряжения, показанного на рис. 12.12, а, если $U_m=100$ В, $t_1=200$ мкс.

Указание: разберите задачи 12.36—12.38.

12.40. Определить комплексную спектральную плотность полуволны непериодической синусоиды напряжения, показанной на рис. 12.12, в.

Указание: разберите задачи 12.36, 12.37.

Решение. Отрезок синусоиды длительностью t_1 можно представить как алгебраическую сумму двух периодических синусоид: одна начинается в момент $t=0$, вторая с такой же амплитудой, но начинается в момент t_1 (рис. 12.12, з). При этом в интервале $0 \dots t_1$ $u(t) = U_m \sin \omega t = U_m \sin(2\pi/2t_1)t = U_m \sin(\pi/t_1)t = U_m \sin 180^\circ(t/t_1)$, а в интервале $t_1 \dots \infty$ $u(t) = u_1(t) + u_2(t) = U_m \sin \omega t + U_m \sin 180^\circ(t/t_1)$.

Запишем выражение заданного напряжения в операторной форме. Так как $U_m \sin \omega_0 t \doteq U_m \omega_0 / (\omega_0^2 + p^2)$, то $U(p) = U_m [(\omega_0 / (\omega_0^2 + p^2)) + (\omega_0 / (\omega_0^2 + p^2)) e^{-p t_1}]$. Переходя от операторного изображения к спектральному, получаем

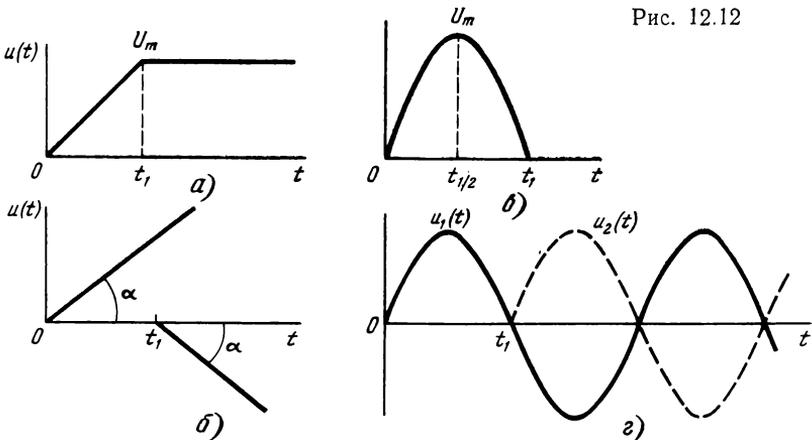


Рис. 12.12

$$\begin{aligned}
U(j\omega) &= \frac{U_m \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} [1 + e^{-j\omega t_1}] = \left[\frac{U_m \omega_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right] e^{-j\omega t_1} (1 + e^{j\omega t_1}) = \\
&= \left[\frac{U_m \omega_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right] e^{-j\omega t_1} \underbrace{[1 + \cos \omega t_1 + j \sin (2\omega t_1/2)]}_{2\cos^2(\omega t_1/2)} = \\
&= \left[\frac{U_m \omega_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right] e^{-j\omega t_1} [2\cos^2(\omega t_1/2) + j2 \sin(\omega t_1/2) \cos(\omega t_1/2)] = \\
&= \left[\frac{2U_m \omega_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{-j(\omega t_1/2)} e^{-j(\omega t_1/2)} \cos(\omega t_1/2) \right] \times \\
&\times \underbrace{[\cos(\omega t_1/2) + j \sin(\omega t_1/2)]}_{e^{j(\omega t_1/2)}} = \frac{2U_m \omega_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t_1/2) e^{-j(\omega t_1/2)}.
\end{aligned}$$

Так как время половины периода синусоиды в данной задаче равно t_1 , то $\omega_0 = 2\pi/2t_1 = \pi/t_1$, тогда

$$U(\omega) = \frac{2\pi U_m \cos(\omega t_1/2)}{t_1 [(\pi^2/t_1^2) - \omega^2]} \approx \frac{0,628 U_m t_1 \cos(180^\circ t_1 f)}{1 - (2t_1 f)^2}.$$

12.41. По условию задачи 12.40 рассчитать числовые значения амплитудного и фазного спектров в пределах двух лепестков, если $U_m = 10$ В, $t_1 = 1$ мс.

Указание: разберите задачу 12.40.

Решение. Рассчитаем значение $U(\omega)$ при $f = 0$:

$$U(0) = [(0,628 \cdot 10 \cdot 10^{-3})/1] \cos 0^\circ = 6,28 \cdot 10^{-3} \text{ В/Гц} = 6,28 \text{ мВ/Гц}.$$

Проверим получившееся значение. Напомним, что $U(0)$ численно равно площади, ограниченной графиком временной функции, т. е. U_0 :

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{t_1} U_m \sin \omega_0 t dt = (U_m / \omega_0) (-\cos \omega_0 t \Big|_0^{t_1}) = \\
&= (U_m / \omega_0) (1 - \cos \omega_0 t_1).
\end{aligned}$$

Так как в данной задаче $\omega_0 = \pi/t_1$, то $S = (U_m t_1 / \pi) [1 - \cos(\pi t_1 / t_1)] = (10 \cdot 1/3,14) [1 - (1)] = 6,28$ мВ/Гц, т. е. оба результата совпадают.

Определим частоту f_0 , при которой $U(\omega)$ первый раз обращается в нуль, что, очевидно, произойдет на частоте, где аргумент косинуса становится равным нулю, т. е. выполняется условие $180^\circ \cdot t_1 \cdot f_0 = 90^\circ$, откуда $f_0 = 90^\circ / 180^\circ t_1 = 1/2t_1$. Так как $t_1 = 1$ мс, то $f_0 = 1/2 = 0,5$ кГц. Однако при $f = 0,5$ кГц знаменатель выражения $[0,628 U_m t_1 \cos(180^\circ t_1 f)] [1 - (2t_1 f)^2]$ также обращается в нуль, что приводит к неопределенности вида $0/0$. Чтобы определить $U(\omega)$ при $f = 0,5$ кГц, следует раскрыть получившуюся неопределенность, т. е. брать производные по частоте от числителя и знаменателя до тех пор, пока при подстановке $f = 0,5$ кГц не получится конечное значение

f , кГц	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$U(\omega)$, В/Гц	0	6,22	6,05	5,77	5,39	0	4,41	3,85	3,2	2,67	0
$\varphi(\omega)$, град	0	18	36	54	72	90	108	126	144	172	180

$0,628U_m t_1 \pi t_1 [-\sin(180^\circ t_1 f)] / -4t_1^2 f = 0,628U_m \pi [\sin(180^\circ t_1 f)] / 8f$.
 В числителе и в знаменателе остается множитель f , поэтому производные следует взять еще раз, после чего получается $0,628U_m \pi \cdot \pi t_1 [\cos(180^\circ t_1 f)] / 8$. При $t_1 = 1$ мс и $f = 0,5$ кГц $U(\omega) = 0,628U_m \pi^2 t_1 [\cos 180^\circ \cdot 0,5] / 8 = 0$. Фазная плотность определяется из выражения $\varphi(\omega) = -\omega t_1 / 2 = -2\pi f t_1 / 2 = -180^\circ t_1 f$. Значения $U(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ для различных частот сведены в табл. 12.2.

ПРОСТЕЙШИЕ ЦЕПИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

12.42. Решить задачу 12.41, если $U_m = 50$ В, $t_1 = 250$ мкс.
Указание: разберите задачи 12.41.

12.43. Определить критическое сопротивление в цепи, показанной на рис. 12.13, а, если $L = 50$ мГн, $C = 12,5$ нФ.

Указание: изучите с. 372—375 в [1].

Решение. В последовательной неразветвленной цепи критическое сопротивление $R_{кр}$ определяется из выражения $R_{кр} = 2\sqrt{L/C} = 2\sqrt{50 \cdot 10^{-3} / 12,5 \times 10^{-9}} = 4$ кОм. Таким образом, если в данной цепи $R < 4$ кОм, то свободные составляющие откликов в цепи будут иметь колебательный характер, а при $R > 4$ кОм — апериодический.

12.44. Рассчитать мгновенные значения напряжений на каждом элементе цепи, показанной на рис. 12.13, а, если $U = 5$ В, $R = 500$ Ом, $L = 50$ мГн, $C = 12,5$ нФ.

Указание: изучите сначала с. 373—380 в [1] и разберите задачу 12.43.

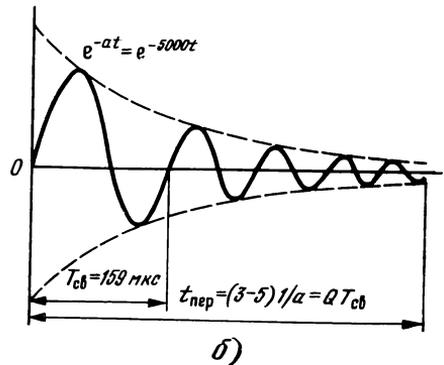
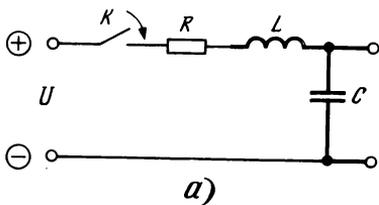


Рис. 12.13

Решение. Данные расчеты можно выполнять классическим или операторным методом. Под классическим методом понимается расчет с помощью дифференциальных уравнений, описывающих мгновенные напряжения и токи в цепи. Поскольку данная цепь неразветвленная, то для ее расчета достаточно составить одно уравнение по второму закону Кирхгофа, т. е. $u_{вх} = u_R + u_L + u_C$. Так как $u_{вх} = U$, $u_R = Ri$, $i = C(du_C/dt)$, $u_L = L(di/dt) = LC(d^2u_C/dt^2)$, то уравнение приобретает вид $U = RC(du_C/dt) + LC(d^2u_C/dt^2) + u_C$, откуда $(d^2u_C/dt^2) + (R/L) \times (du_C/dt) + (1/LC)u_C = U/LC$ или $d^2u_C/dt^2 + 10^4(du_C/dt) + 16 \times 10^8 u_C = 5/(625 \cdot 10^{-12})$.

Обратим внимание, что при расчете переходных процессов в RLC -цепях определять следует прежде всего выражение для мгновенных напряжений на емкости $u_C(t)$, затем ток в цепи $i(t)$ и только после этого напряжения на индуктивности $u_L(t)$. В этом случае удается выполнить все расчеты с помощью производных, не прибегая к интегральным выражениям. Поскольку получилось дифференциальное уравнение с правой частью, решение этого уравнения есть сумма двух составляющих — вынужденной и свободной, т. е. $u_C = u_{C \text{ вын}} + u_{C \text{ св}}$.

Чтобы определить вынужденную составляющую напряжения на емкости, следует решить получившееся уравнение для состояния цепи по окончании переходного процесса, т. е. теоретически через бесконечно большое время. Так как в этом случае $d^2u_C/dt^2 = du_C/dt = 0$, уравнение принимает вид $(1/LC)u_{C \text{ вын}} = (1/LC)U$, откуда $U_{C \text{ вын}} = 5 \text{ В}$.

Чтобы найти свободную составляющую напряжения на емкости, необходимо исключить внешнее воздействие на цепь, т. е. положить правую часть уравнения равной нулю. При этом получается выражение $d^2u_{C \text{ св}}/dt^2 + 10 \cdot 10^3 du_{C \text{ св}}/dt + 1600 \times 10^6 u_{C \text{ св}} = 0$. Из курса высшей математики известно, что подобное дифференциальное уравнение имеет вид $u_{C \text{ св}} = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t}$, где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования, зависящие от граничных условий, а k_1 и k_2 — корни характеристического уравнения, составленного на основании данного дифференциального уравнения, т. е. $k^2 + 10 \cdot 10^3 k + 1600 \cdot 10^6 = 0$, откуда $k_{1,2} = -R/2L \pm \sqrt{R^2/4L^2 - 1/LC}$. При $R^2/4L^2 < 1/LC$ корни получаются комплексными, в данном случае $k_{1,2} = -5 \cdot 10^3 \pm \pm \sqrt{25 \cdot 10^6 - 1 \cdot 00 \cdot 10^6} = -5 \cdot 10^3 \pm j 39,69 \cdot 10^3 = -a \pm j \omega_{св} \approx -5 \cdot 10^3 \pm j 40 \cdot 10^3 \text{ 1/с}$.

Определим физический смысл данных корней. Наличие комплексных сопряженных корней указывает на колебательный характер свободной составляющей при $\omega_{св} = 40 \cdot 10^3 \text{ 1/с}$ и добротности цепи $Q = \omega_{св} L/R = 40 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-3} / 500 = 4$. Добротность также можно определить из выражения $Q = \omega_{св} / 2a = 40 \cdot 10^3 / 2 \times 5 \cdot 10^3 = 4$. Результат получается одинаковым и означает, что за время переходного процесса свободные составляющие всех

откликов (т. е. $u_c(t)$, $u_R(t)$, $u_L(t)$, $i(t)$) совершают практически по четыре полных колебания. Определим период колебания и время переходного процесса: $T_{св} = 2\pi/\omega_{св} = 6,28/40 \cdot 10^3 = 0,159 \times 10^{-3}$ с = 0,159 мс = 159 мкс; $t_{пер} = QT_{св} = 4 \cdot 159 = 628$ мкс.

Проверим полученный результат. Каждая экспонента практически существует в течение 3...5(1/a), в данном случае 3...5(1/5000) = 600...1000 мкс, что подтверждает предыдущий результат. Время переходного процесса $t_{пер}$ можно определить также из выражения $t_{пер} = T_{св}Q = T_{св}\omega_{св}/2a = T_{св}2\pi \times (T_{св}2a) = \pi/a = 3,14/5 \cdot 10^3 = 0,628$ мс = 628 мкс. Результат оказывается прежним. Таким образом, вещественная часть корня характеристического уравнения определяет скорость уменьшения амплитуд свободных колебаний, а его мнимая часть — частоту свободных колебаний. В данной задаче оказалось, что $a = 5 \cdot 10^3$ 1/с, $\omega_{св} = 40 \cdot 10^3$ 1/с. Продолжим расчет мгновенных напряжений на емкости:

$$\begin{aligned} u_c &= u_{c \text{ вын}} + u_{c \text{ св}} = 5 + A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t} = \\ &= 5 + A_1 e^{(-a + j\omega_{св})t} + A_2 e^{(-a - j\omega_{св})t} = \\ &= 5 + e^{-at} (A_1 e^{j\omega_{св}t} + A_2 e^{-j\omega_{св}t}) = 5 + e^{-at} (A_1 \cos \omega_{св}t + \\ &+ jA_1 \sin \omega_{св}t + A_2 \cos \omega_{св}t - jA_2 \sin \omega_{св}t) = \\ &= 5 + e^{-at} [(A_1 + A_2) \cos \omega_{св}t + (jA_1 - jA_2) \sin \omega_{св}t]. \end{aligned}$$

Обозначим $A_3 = A_1 + A_2$, а $A_4 = (jA_1 - jA_2)$, тогда $u_c(t) = 5 + e^{-at} (A_3 \cos \omega_{св}t + A_4 \sin \omega_{св}t)$. В данном выражении — две постоянные A_3 и A_4 , которые определяются из граничных условий. В данной цепи граничных условий тоже два — неизменность напряжений на емкости и неизменность тока в индуктивности в первый момент после коммутации. Если в выражение для $u_c(t)$ подставить $t=0$, то u_c будет равняться тому напряжению, которое было на емкости в последний момент перед коммутацией, т. е. при $t=-0$. Так как до коммутации режим в цепи был установившимся, определить значение $u_c(-0)$ можно либо непосредственно по виду схемы (например, при отключенном источнике напряжения на всех элементах равны нулю), либо с помощью достаточно несложных расчетов. Следует помнить, что для неизменного во времени воздействия сопротивление индуктивности равно нулю, а емкости — бесконечности.

В данной задаче, как видно из рис. 12.13, а, $u_c(-0) = 0$. Поскольку в емкостных элементах $u_c(+0) = u_c(-0)$, то $0 = 5 + e^{-a \cdot 0} (A_3 \cos \omega_{св} \cdot 0 + A_4 \sin \omega_{св} \cdot 0) = 5 + A_3$, откуда $A_3 = -5$ В и $u_c = 5 + e^{-at} (A_4 \sin \omega_{св}t - 5 \cos \omega_{св}t)$. Для определения второй постоянной необходимо получить выражение для мгновенных токов в индуктивности, подставить в него u_c и, используя граничные условия, определить вторую постоянную (в данной задаче A_4):

$$\begin{aligned}
 i &= C(du_c/dt) = C(d/dt)[5 + e^{-at}(A_4 \sin \omega_{CB}t - 5 \cos \omega_{CB}t)] = \\
 &= C[-ae^{-at}(A_4 \sin \omega_{CB}t - 5 \cos \omega_{CB}t) + e^{-at}(\omega_{CB}A_4 \cos \omega_{CB}t + \\
 &+ 5\omega_{CB} \sin \omega_{CB}t)] = Ce^{-at}[aA_4 \sin \omega_{CB}t - 5a \cos \omega_{CB}t - \omega_{CB}A_4 \times \\
 &\times \cos \omega_{CB}t - 5\omega_{CB} \sin \omega_{CB}t] = -Ce^{-at}[(aA_4 - 5\omega_{CB}) \sin \omega_{CB}t - \\
 &- (5a + \omega_{CB}A_4) \cos \omega_{CB}t].
 \end{aligned}$$

В цепи с индуктивностью $i(+0) = i(-0)$, а из рис. 12.13, а видно, что $i(-0) = 0$, поэтому справедливым будет равенство $0 = -C[-(5a + \omega_{CB}A_4)]$. Поскольку $C \neq 0$, то $\omega_{CB}A_4 + 5a = 0$, откуда $A_4 = -5a/\omega_{CB}$. Тогда $u_c = 5 + e^{-at}[-(5a/\omega_{CB}) \sin \omega_{CB}t - 5 \cos \omega_{CB}t] = 5 - 5e^{-at}[(a/\omega_{CB}) \sin \omega_{CB}t + \cos \omega_{CB}t]$.

Поскольку $M \sin \alpha + N \cos \alpha = \sqrt{M^2 + N^2} \sin[\alpha + \arctg(N/M)]$, то $u_c = 5 - 5e^{-at} \left[\sqrt{a^2/\omega_{CB}^2 + 1} \sin(\omega_{CB}t + \arctg \frac{1}{a/\omega_{CB}}) \right] = 5 - (5/\omega_{CB}) e^{-at} \sqrt{a^2 + \omega_{CB}^2} \sin[\omega_{CB}t + \arctg(\omega_{CB}/a)]$. Так как $\alpha = R/2L$, а $\omega_{CB} = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}$, то $\sqrt{a^2 + \omega_{CB}^2} = \sqrt{1/LC} = \omega_0$, т. е. резонансной частоте. Тогда $u_c = u_{c \text{ вын}} [1 - (\omega_0/\omega_{CB}) e^{-at} \times \sin(\omega_{CB}t + \xi)]$, где $\xi = \arctg(\omega_{CB}/a)$. При $Q \geq 3$ $\omega_{CB} \approx \omega_0$, тогда $u_c = u_{c \text{ вын}} [1 - e^{-at} \sin(\omega_0t + \xi)] = 5[1 - e^{-5000t} \sin(40 \cdot 10^3t + 82,87^\circ)]$.

Произведем проверку. При $t=0$ $u_c(0) = 5[1 - (40 \cdot 10^3/39,68 \times 10^3) \sin 82,87^\circ] = 5[1 - 1,008 \cdot 0,992] = 5(1-1) = 0$. При $t=\infty$ $u_c(\infty) = 5$ В. Граничные условия напряжения на емкости выполняются. Мгновенные значения тока

$$\begin{aligned}
 i &= -Ce^{-at}[(aA_4 - 5\omega_{CB}) \sin \omega_{CB}t - (5a + \omega_{CB}A_4) \cos \omega_{CB}t] = \\
 &= -Ce^{-at}\{[a(-5a/\omega_{CB}) - 5\omega_{CB}] \sin \omega_{CB}t - [5a - (5a\omega_{CB}/\omega_{CB})] \times \\
 &\times \cos \omega_{CB}t\} = [Ce^{-at}5(a^2/\omega_{CB}) - \omega_{CB}] \sin \omega_{CB}t = (5C/\omega_{CB})(a^2 - \\
 &- \omega_{CB}^2) e^{-at} \sin \omega_{CB}t = (5C/\omega_{CB})(1/LC) e^{-at} \sin \omega_{CB}t = \\
 &= (u_{c \text{ вын}}/\omega_{CB}L) e^{-at} \sin \omega_{CB}t = \\
 &= (5/40 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-3}) e^{-5000t} \sin \omega_{CB}t = \\
 &= 2,5 \cdot 10^{-3} e^{-5000t} \sin 40 \cdot 10^3 t \text{ А.}
 \end{aligned}$$

Мгновенные напряжения на резистивном сопротивлении R определяются из выражения $u_R(t) = Ri = 0,5 \cdot 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \times e^{-5000t} \sin 40 \cdot 10^3t = 1,25 e^{-5000t} \sin 40 \cdot 10^3t$ В (рис. 12.13, б).

Произведем проверки. При $t=0$ $i=0$, при $t=\infty$ $i=0$. Граничные условия выполняются. Мгновенные напряжения на индуктивности $u_L(t)$ определяются из выражения $u_L = L(di/dt)$. Если в данное выражение подставить $i = 2,5 \cdot 10^{-3} e^{-5000t} \sin 40 \times 10^3t$ и проделать преобразования, аналогичные проделанным при определении $u_c(t)$, получается

$$\begin{aligned}
 u_L &= 5,0385 e^{-at} \sin(\omega_{CB}t + 97,18^\circ) = \\
 &= e^{-at} \sin(40 \cdot 10^3t - 82,82^\circ).
 \end{aligned}$$

Проверим выполнение граничных условий. При $t=0$ $u_C(0) = 5 - 5,0385 \sin 82,82^\circ = 5 - 5,04 \cdot 0,992267 = 5 - 5 = 0$; $u_R(0) = 0$; $u_L(0) = -5,0385 \sin(-82,87^\circ) = 5$ В. Полученные результаты соответствуют граничным условиям, поскольку в первый момент после коммутации сопротивление емкостного элемента равно нулю (короткое замыкание), а индуктивного — бесконечности (разрыв цепи). Вследствие $Z_L(0) = \infty$ $i(0) = u_R(0) = 0$, из-за $Z_C(0) = 0$ $u_C(0) = 0$ и все входное напряжение $U = 5$ В падает на $Z_L(0) = \infty$. Второй закон Кирхгофа для момента $t = 0$ выполняется. При $t = \infty$ в соответствии с полученными уравнениями $u_R(\infty) = 0$ и $u_L(\infty) = 0$ (из-за члена e^{-at}) свободная составляющая $u_C_{св}(\infty)$ также равна нулю и алгебраическая сумма мгновенных значений на всех элементах цепи равна вынужденной составляющей напряжения на емкости, равной значению входного напряжения. По второму закону Кирхгофа $u_R(\infty) + u_L(\infty) + u_C(\infty) = u_C_{вын} = U = 5$ В. Граничные условия выполняются, следовательно, задача решена правильно.

12.45. Решить задачу 12.44 операторным методом.

Указание: изучите с. 381—384 в [1], задачу 12.44 и материал на с. 317—323.

Решение. В цепи, показанной на рис. 12.13, а, операторный ток

$$I(p) = U(p)/Z(p) = \frac{U}{p(R + pL + 1/pC)} = \frac{UpC}{p(p^2LC + pRC + 1)} = \\ = \frac{UC}{LC[p^2 + (RC/LC)p + (1/LC)]}$$

Операторное напряжение на емкости

$$U_C(p) = I(p)Z_C(p) = \frac{U}{L[p^2 + (R/L)p + (1/LC)]pC} = \\ = \frac{U}{LC} \frac{1}{p[p^2 + (R/L)p + (1/LC)]} = \frac{5}{50 \cdot 10^{-3} \cdot 12,5 \cdot 10^{-9}} \times \\ \times \frac{1}{p[p^2 + (500/50 \cdot 10^{-3})p + (1/50 \cdot 10^{-3} \cdot 12,5 \cdot 10^{-9})]} = \\ = \frac{80 \cdot 10^8}{p(p^2 + 10 \cdot 10^3 p + 1600 \cdot 10^6)}$$

В числителе данного выражения имеется только одно слагаемое, поэтому определять временной оригинал $u_C(t)$ удобно по таблицам переходов от операторных изображений $F(p)$ к временным оригиналам $f(t)$. Для этого приравняем нулю знаменатель операторного изображения и найдем корни получившегося уравнения: $p(p^2 + 10 \cdot 10^3 p + 1600 \cdot 10^6) = 0$, откуда $p_1 = 0$, $p_{2,3} = -5 \cdot 10^3 \pm \sqrt{25 \cdot 10^6 - 1600 \cdot 10^6} = -5 \cdot 10^3 \pm j39,69 \cdot 10^3 \approx -5 \cdot 10^3 \pm j40 \cdot 10^3 = -a \pm j\omega_{св}$.

Корни операторного уравнения оказались такими же, как и при решении характеристического уравнения для той же цепи (см. задачу 12.44). Операторное напряжение на емкости

$$U_C(p) = \frac{U}{LC} \frac{1}{p[p + (a - j\omega_{CB})][p + (a + j\omega_{CB})]}.$$

Так как $\frac{1}{p(p+d)(p+f)} \doteq \frac{1}{df} + \frac{1}{f-d} \left(\frac{1}{f} e^{-ft} - \frac{1}{d} e^{-dt} \right)$ (см. строку 7 табл. 12.1 в [1]), где

$$d = a - j\omega_{CB} = 5 \cdot 10^3 - j40 \cdot 10^3; \quad f = a + j\omega_{CB} = 5 \cdot 10^3 + j40 \cdot 10^3,$$

то

$$\begin{aligned} u_C(t) = & \frac{U}{LC} \left\{ \frac{1}{(5 \cdot 10^3 - j40 \cdot 10^3)(5 \cdot 10^3 + j40 \cdot 10^3)} + \right. \\ & + \frac{1}{5 \cdot 10^3 + j40 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3 + j40 \cdot 10^3} \left[\left(\frac{1}{5 \cdot 10^3 + j40 \cdot 10^3} \right) e^{-(5 \cdot 10^3 + j40 \cdot 10^3)t} - \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{1}{5 \cdot 10^3 - j40 \cdot 10^3} \right) e^{-(5 \cdot 10^3 - j40 \cdot 10^3)t} \right] \right\} = (5 / (50 \cdot 10^{-3} \cdot 12,5 \cdot 10^{-9})) \times \\ & \times \left\{ \left[\frac{1}{(25 \cdot 10^6 + 1600 \cdot 10^6)} \right] + \left(\frac{e^{-5000t}}{j80 \cdot 10^3} \right) \left[\frac{1}{20,15 \cdot 10^3 e^{j82,87^\circ}} e^{j40 \cdot 10^3 t} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{20,15 \cdot 10^3 e^{-j82,87^\circ}} e^{-j40 \cdot 10^3 t} \right] \right\} = 8000 \cdot 10^6 \left(\frac{1}{1625 \cdot 10^6} + \right. \\ & \left. + \frac{e^{-5000t}}{80 \cdot 10^3 \cdot 20,15 \cdot 10^3} \frac{e^{j(40 \cdot 10^3 t - 82,87^\circ)} - e^{-j(40 \cdot 10^3 t - 82,87^\circ)}}{2j} \right). \end{aligned}$$

Так как $\left(\frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \right) = \sin \alpha$, то $u_C = 5 - 5,0385 e^{-5000t} \sin(40 \cdot 10^3 t + 82,87^\circ)$.

Результат получился такой же, как и при расчете классическим методом. Аналогично, поскольку

$$\frac{1}{(p+d)(p+f)} \doteq \frac{1}{d-f} [e^{-ft} - e^{-dt}]$$

(см. строку 5 там же), то

$$\begin{aligned} i(t) = & \frac{1}{(5 \cdot 10^3 - j40 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3 - j40 \cdot 10^3)} [e^{-(5 \cdot 10^3 + j40 \cdot 10^3)t} - \\ & - e^{-(5 \cdot 10^3 - j40 \cdot 10^3)t}] = \frac{1}{40 \cdot 10^3} e^{-5000t} \frac{e^{j40 \cdot 10^3 t} - e^{-j40 \cdot 10^3 t}}{2j} = \\ & = 2,5 \cdot 10^{-3} e^{-5000t} \sin 40 \cdot 10^3 t; \\ u_R = Ri = & 0,5 \cdot 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} e^{-5000t} \sin 40 \cdot 10^3 t = \\ & = 1,25 e^{-5000t} \sin 40 \cdot 10^3 t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_L(p) &= pL \cdot I(p) = \frac{UpL}{L[p^2 + (R/L)p + (1/LC)]} \\
 &= U \frac{p}{p^2 + 10 \cdot 10^3 p + 1600 \cdot 10^6} \\
 &= 5 \frac{p}{(p + 5 \cdot 10^3 - j40 \cdot 10^3)(p + 5 \cdot 10^3 + j40 \cdot 10^3)}.
 \end{aligned}$$

Переход от $U_L(p)$ к $u_L(t)$ производится на основании соотношения

$$\frac{p}{(p+d)(p+f)} \doteq \frac{1}{d-f} (de^{-dt} - fe^{-ft})$$

(см. строку 6 там же), тогда

$$\begin{aligned}
 u_L(t) &= U \left[\frac{1}{5 \cdot 10^3 - j40 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3 - j40 \cdot 10^3} (5 \cdot 10^3 - \right. \\
 &\quad \left. - j40 \cdot 10^3) e^{-(5 \cdot 10^3 - j40 \cdot 10^3)t} - (5 \cdot 10^3 + j40 \cdot 10^3) e^{-(5 \cdot 10^3 + j40 \cdot 10^3)t} \right].
 \end{aligned}$$

После преобразований $u_L(t) = -5,0385 e^{-5000t} \sin(40 \cdot 10^3 t - 82,82^\circ)$ В. Результаты расчетов операторным методом совпадают с результатами расчета классическим методом.

12.46. В цепи, показанной на схеме рис. 12.14, а, определить значения L , при которых режим будет: а) критическим и б) колебательным при добротности цепи $Q=4$, если $R=500$ Ом, $C=12,5$ нФ.

Указание: изучите с. 372—377 в [1] и разберите задачи 12.44 и 12.45.

Пояснение. В общем случае при составлении уравнений равновесия цепи, т. е. уравнений по законам Кирхгофа, не имеющей источников тока, классическим методом число этих уравнений должно соответствовать сумме ветвей и емкостей. Последние уравнения связывают мгновенные токи с мгновенными напряжениями на емкости, т. е. представляют собой уравнения вида $i=C(du_C/dt)$.

В данном случае

$$i_1 = i_2 + i_3; \quad (12.1)$$

$$U = Ri_1 + u_C; \quad (12.2)$$

$$u_C = L(di_2/dt); \quad (12.3)$$

$$i_3 = C(du_C/dt). \quad (12.4)$$

Получившуюся систему следует решить относительно u_C . Для этого i_3 из (12.4) следует подставить в (12.1), получается

$$i = i_2 + C(du_C/dt). \quad (12.1')$$

Из (12.2) выразим

$$i_1 = (U - u_C)/R \quad (12.2')$$

и подставим в (12.1')

$$(U - u_c)/R = i_2 + C(du_c/dt). \quad (12.1'')$$

Отсюда

$$i_2 = (U/R) - (1/R)u_c - C(du_c/dt). \quad (12.2'')$$

Подставим (12.2'') в (12.3). Мгновенные напряжения на конденсаторе $u_c = L(d/dt)[(U/R) - (1/R)u_c - C(du_c/dt)]$, т. е. $u_c = (-L/R)(du_c/dt) - LC(d^2u_c/dt^2)$, тогда $LC(d^2u_c/dt^2) + (L/R)(du_c/dt) + u_c = 0$. Приведа выражение к нормальному виду, получим $d^2u_c/dt^2 + (1/RC)(du_c/dt) + 1/LC = 0$. Тогда характеристическое уравнение $k^2 + (1/RC)k + 1/LC = 0$, откуда $k_{1,2} = -1/2RC \pm \sqrt{1/4R^2C^2 - 1/LC}$.

Режим будет критическим в том случае, если корни характеристического (или операторного) уравнения вещественные и равные, т. е. когда подкоренное выражение равно нулю и, следовательно, $1/4R^2C^2 = 1/LC$, откуда $L_{кр} = 4R^2C = 4 \cdot 500^2 \cdot 12,5 \cdot 10^{-9} = 12,5 \cdot 10^{-3}$ Гн = 12,5 мГн.

Определим значение L , при котором режим оказывается колебательным с $Q = 4$. Так как $Q = \omega_{св}/2a$, в данной цепи

$$Q = \frac{\sqrt{1/LC - 1/4R^2C^2}}{2(1/2RC)} \quad \text{или} \quad Q^2 = \frac{(4R^2C - L)R^2C^2}{4R^2C^2L},$$

откуда $L = 4R^2C/(4Q^2 + 1) = R^2C/Q^2 = 500^2 \cdot 12,5 \cdot 10^{-9}/4^2 = 195 \times 10^{-6}$ Гн = 195 мкГн.

Произведем проверку. Вычислим отношение $\omega_{св}/2a$:

$$\begin{aligned} \omega_{св} &= \sqrt{1/LC - 1/2RC^2} = \\ &= \sqrt{1/(195 \cdot 10^{-6} \cdot 12,5 \cdot 10^{-9}) - 1/(2 \cdot 500 \cdot 12,5 \cdot 10^{-9})^2} = \\ &= 637 \cdot 10^3 \text{ 1/с}; \quad a = 1/2RC = 1/(2 \cdot 500 \cdot 12,5 \cdot 10^{-9}) = \\ &= 80 \cdot 10^3 \text{ 1/с}; \quad \omega_{св}/2a = 637/2 \cdot 80 = 4. \end{aligned}$$

Проверка выполняется, значит задача решена правильно.

Получить характеристическое сопротивление, а следовательно, и корни гораздо проще операторным способом. Для этого необходимо записать входное сопротивление цепи в операторном виде и сделать числитель получившегося выражения приведенным, т. е. вынести за скобку множитель перед оператором p в наибольшей степени. Получившееся при этом выражение будет таким же, как и характеристическое уравнение, составленное по дифференциальному уравнению. Произведем указанные расчеты. Для цепи на рис. 12.14, а

$$\begin{aligned} Z(p) &= R + \frac{pL(1/pC)}{pL + 1/pC} = R + \frac{L \cdot pC}{C(p^2LC + 1)} = \frac{p^2RLC + pL + R}{p^2LC + 1} = \\ &= \frac{RLC[p^2 + (1/RC)p + (1/LC)]}{LC[p^2 + (1/LC)]} = R \frac{p^2 + (1/RC)p + 1/LC}{p^2 + 1/LC}. \end{aligned}$$

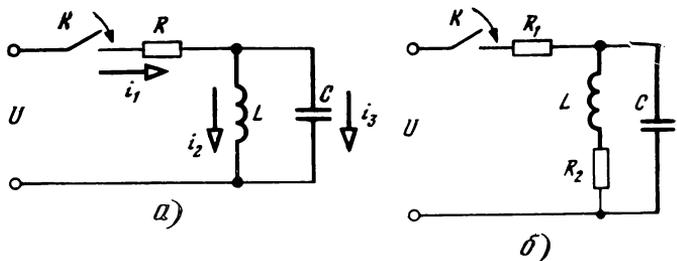


Рис. 12.14

В полученном выражении числитель повторяет характеристическое уравнение, следовательно, корни выражения $F_1(p) = 0$ будут теми же, что и при решении характеристического уравнения.

12.47. Определить число свободных колебаний за время переходного процесса в цепи, показанной на рис. 12.14, б, если $R_1 = 500$ Ом, $R_2 = 100$ Ом, $L = 100$ мкГн, $C = 12,5 \cdot 10^{-9}$ нФ.

Указание. Запишите операторное входное сопротивление цепи $Z_{вх}(p)$, приведите к нормальному виду, подставьте числовые значения, приравняйте получившееся выражение нулю, найдите корни получившегося уравнения и проанализируйте их.

ЦЕПИ С НЕКОРРЕКТНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Пояснение. В цепях с некорректными начальными условиями скачкообразное изменение напряжений на емкостях или токов на индуктивностях не приводит к изменению энергии в этих элементах, т. е. зарядов в конденсаторах и потокосцеплений в индуктивностях. В цепях с одиночными индуктивностями и емкостями таких скачков быть не может, поскольку они привели бы к скачкообразному изменению энергии, но в цепях с несколькими L или C подобные скачки могут иметь место.

12.48. Рассчитать $i = f(t)$, $u_{C_1} = f(t)$, $u_{C_2} = f(t)$ и постоянную времени цепи τ для схемы, показанной на рис. 12.15, а, после замыкания ключа, если до его замыкания в цепи существовал установившийся режим, а конденсатор C_2 был разряжен.

Решение. В цепях с емкостями неизменным остается суммарный заряд Q , имеющийся в емкостях до коммутации, т. е. выполняется условие непрерывности зарядов $Q(-0) = Q(+0)$. Определим этот заряд. Так как цепь до коммутации находится в установившемся режиме, напряжение на конденсаторе C_1 равно напряжению источника, т. е. $U_{C_1}(-0) = u_{C_1}(-0) = 100$ В. Тогда $Q_1 = C_1 U_1 = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 5 \cdot 10^{-3}$ Кл; $Q_2 = C_2 U_2 = 0$; $Q_{эк} = Q_1 + Q_2 = C_1 U_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ Кл. После коммутации $C_{эк} = C_1 + C_2 = 50$ мкФ и $U_{C_1, C_2} = Q_{эк} / C_{эк} = C_1 U_1 / (C_1 + C_2) = 100 \cdot 20 / 50 = 40$ В. Таким образом, напряжение на C_1 при замыкании ключа скачком понижается от $U_1 = 100$ В до $U_1 C_1 / (C_1 + C_2) = 40$ В,

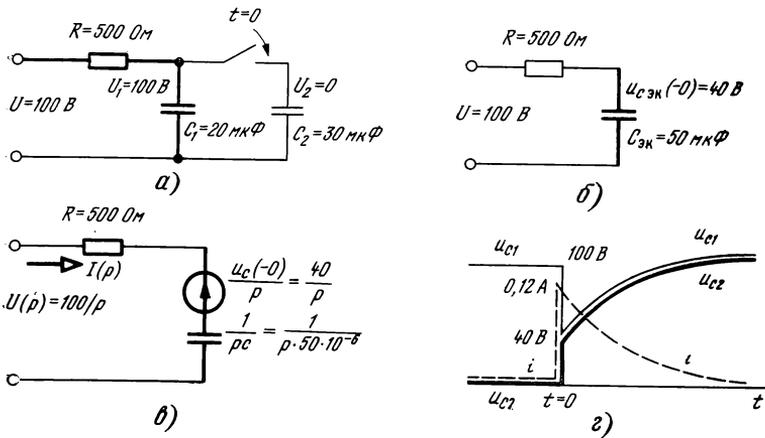


Рис. 12.15

а напряжение на C_2 повышается от 0 до 40 В. Следовательно, получается цепь $RC_{эк}$, в которой конденсатор $C_{эк} = C_1 + C_2 = 50$ мкФ заряжен до напряжения $u_{с эк}(-0) = 40$ В (рис. 12.15, б). Рассчитать напряжение $u_{с эк} = f(t)$ можно либо классическим, либо операторным методом: $U = u_R + u_C = Ri + u_C = RC(du_C/dt) + u_C$ или $du_C/dt + (1/RC_{эк})u_C = U/RC_{эк}$, т. е. $du_C/dt + u_C/(500 \cdot 50 \cdot 10^{-6}) = 100/(500 \cdot 50 \cdot 10^{-6})$. Очевидно, что $u_C = u_{с вын} + u_{с св}$, где $u_{с вын} = 100$ В, $du_{с св}/dt + 40u_{с св} = 0$, откуда $u_{с св} = Ae^{-40t}$ и, следовательно, $u_C = 100 + Ae^{-40t}$, где A — постоянная интегрирования. При $t = -0$ $u_C = 40$ В, т. е. $40 = 100 + A$ или $A = 40 - 100 = -60$ В, тогда $u_C = 100 - 60e^{-40t}$.

Произведем проверки. При $t = 0$ $u_C = 100 - 60 = 40$ В, при $t = \infty$ $u_C = 100$ В. Проверки выполняются, следовательно, решение задачи можно продолжить.

Определим ток $i = f(t)$. До момента $t = -0$ в цепи был установившийся режим и ток в ней не протекал. С момента $t = +0$ значения тока определяются из выражения $i = C(du_C/dt) = (C_1 + C_2)d[100 - 60e^{-40t}]/dt = 50 \cdot 10^{-6}(-60) \times (-40)e^{-40t} = 0,12e^{-40t}$. Действительно, при $t = 0$ $i(0) = (U - u_C(-0))/R = (100 - 40)/500 = 0,12$ А. Результаты совпадают.

Определим практическое время переходного процесса в данной цепи. Как известно, $t_{пер} = (3 \dots 5)\tau = (3 \dots 5)(1/400) = (120 \dots 150)$ мс. Прделаем те же расчеты операторным методом. Заменим схему рис. 12.15, б эквивалентной операторной (рис. 12.15, в). В данной схеме

$$I(p) = \frac{(U/p) - u_C(-0)/p}{R + 1/pC} = \frac{100/p - 40/p}{500 + 1/(p \cdot 50 \cdot 10^{-6})} = \frac{0,12}{p + 40},$$

откуда $i(t) = 0,12e^{-40t}$; $U_R(p) = RI(p) = 500 \cdot 0,12 / (p+40) = 60 / (p+40)$ или $u_R(t) = 60e^{-40t}$; $u_C = (1/pC_{\text{эк}})I(p) + u_C(-0) / p = 0,12 / [p \cdot 50 \cdot 10^{-6}(p+40)] = 2400 / [p(p+40)] + 40/p$, т. е. $u_C = (2400 / (40)(1 - e^{-40t}) + 40 = 100 - 60e^{-40t}$.

Все результаты совпадают, задача решена правильно. Кривые $u_{C1} = f(t)$, $u_{C2} = f(t)$, $i = f(t)$ показаны на рис. 12.15, з.

12.49. Определить ток в цепи рис. 12.16, а после размыкания ключа. До коммутации режим был установившимся.

Указание: разберите задачу 12.48.

Решение. До коммутации ток в индуктивности L_1 был $i(-0) = U/R = 20/10 = 2$ А. Так как катушка индуктивности L_2 до коммутации была замкнута, то ток в ней равнялся нулю. После размыкания ключа ток в обеих индуктивностях оказывается одинаковым и, следовательно, изменяется скачком. Сам по себе факт скачкообразного изменения тока в индуктивности не противоречит закону коммутации, поскольку неизменным при коммутации должен быть ток, а суммарное потокосцепление $\psi = Li$. В данной цепи $\psi_{\text{эк}} = \psi_1 + \psi_2 = L_1 i(-0) + L_2 i(-0) = = L_1 U/R = (20 \cdot 40 \cdot 10^{-3}) / 10 = 80 \cdot 10^{-3}$ Вб = 80 мВб. После коммутации выполняется условие $\psi(-0) = \psi(+0)$, т. е. $L_1 U/R = (L_1 + L_2) i(+0)$ или $i(0) = L_1 U / [R(L_1 + L_2)] = 40 \cdot 20 / [10(40 + 60)] = = 0,8$ А.

Таким образом, после коммутации в первой катушке ток скачком уменьшается с 2 до 0,8 А, а в катушке L_2 — увеличивается от 0 до 0,8 А. Рассчитаем уравнение тока операторным методом, составив операторную схему замещения (рис. 12.16 б):

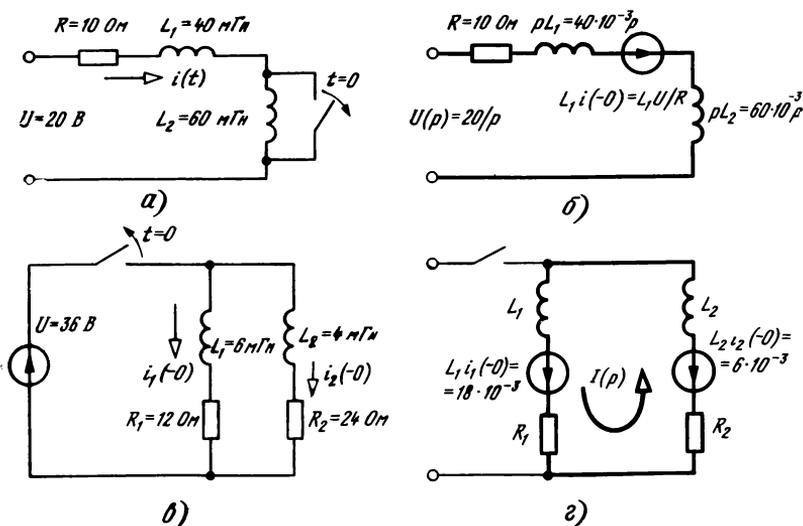


Рис. 12.16

$$I(p) = \frac{(U/p) + L_1 i(-0)}{R + pL_1 + pL_2} = \frac{(20/p) + 2 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{10 + p \cdot 100 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= \frac{20 + 80 \cdot 10^{-3} p}{0,1 p (p + 100)} = \frac{200}{p(p + 100)} + \frac{0,8}{(p + 100)}.$$

Так как $1/[p(p+a)] \doteq (1/a)(1 - e^{-at})$, а $1/(p+a) \doteq e^{-at}$, то $i(t) = \frac{200}{100}(1 - e^{-100t}) + 0,8e^{-100t} = 2 - 1,2e^{-100t}$.

Сделаем проверку. При $t=0$ $i(0) = 2 - 1,2 = 0,8$ А, при $t=\infty$ $i(\infty) = 2$ А. Проверка выполняется, следовательно, задача решена правильно.

12.50. Определить токи в индуктивностях после размыкания ключа (рис. 12.16, в), если $U=36$ В, $R_1=12$ Ом, $L_1=6$ мГн, $R_2=24$ Ом, $L_2=4$ мГн.

Указание: разберите задачи 12.48 и 12.49.

Решение. Определим токи в ветвях до коммутации. Так как цепь до коммутации находилась в установившемся режиме, то $i_1(-0) = U/R_1 = 36/12 = 3$ А, $i_2(-0) = U/R_2 = 36/24 = 1,5$ А. Потокосцепление в катушках $\psi_1 = L_1 i_1(-0) = 6 \cdot 10^{-3} \cdot 3 = 18 \cdot 10^{-3}$ Вб = 18 мВб; $\psi_2 = L_2 i_2(-0) = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 = 6 \cdot 10^{-3}$ Вб = 6 мВб.

После размыкания ключа через катушки L_1 и L_2 протекает один и тот же ток $i(+0)$, отличный от $i_1(-0)$ и $i_2(-0)$. Так как $\psi_1 > \psi_2$, направление тока в первой индуктивности останется прежним (против часовой стрелки), а во второй изменится на противоположное. На этом основании при определении суммарного потокосцепления ψ_{Σ} потокосцепление первой катушки в данной цепи — величина положительная, а второй катушки — отрицательная: $\psi_{\Sigma} = L_1 i_1(-0) - L_2 i_2(-0) = 6 \cdot 10^{-3} \cdot 3 - 4 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 = 12 \cdot 10^{-3}$ Вб = 12 мВб. Ток $i(0) = \psi_{\Sigma} / (L_1 + L_2) = 12 \cdot 10^{-3} / (6 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-3}) = 1,2$ А.

Таким образом, после коммутации ток в катушке L_1 скачком изменяется от 3 до 1,2 А, а в L_2 — от 1,5 до 1,2 А. Определим ток в любой момент, составив операторную схему цепи, получающейся после коммутации (рис. 12.16, з):

$$I(p) = \frac{L_1 i_1(-0) - L_2 i_2(-0)}{(R_1 + R_2) + pL_1 + pL_2} = \frac{18 \cdot 10^{-3} - 6 \cdot 10^{-3}}{(12 + 24) + p(6 + 4) \cdot 10^{-3}} =$$

$$\frac{12 \cdot 10^{-3}}{36 + 10 \cdot 10^{-3} p} = \frac{12 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3} [p + 36/(10 \cdot 10^{-3})]} = \frac{1,2}{(p + 3600)},$$

откуда $i = 1,2e^{-3600t}$.

Произведем проверки: $i(0) = 1,2$ А, при $t=\infty$ $i(\infty) = 0$. Проверки выполняются.

ЧИСЛОВЫЕ РАСЧЕТЫ ВРЕМЕННЫХ ОРИГИНАЛОВ ПО ОПЕРАТОРНЫМ ИЗОБРАЖЕНИЯМ ПРИ НАЛИЧИИ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ С ПОМОЩЬЮ ПМК

Определять временные оригиналы $f(t)$ по операторным изображениям $F(p)$ можно с помощью переводных таблиц, по формуле разложения или с помощью ПМК.

Если корни знаменателя операторного выражения — комплексно-сопряженные, то свободная составляющая в общем случае имеет вид затухающей синусоиды, а мгновенные значения напряжений или токов описываются выражениями вида $f(t) = A_0 + Ae^{-at} \sin(\omega_{св}t + \xi)$, где A_0 — постоянная составляющая; A — максимальное значение свободной составляющей; a — вещественная часть корня знаменателя; $\omega_{св}$ — мнимая часть того же корня; ξ — начальная фаза. Таким образом, для определения выражения мгновенных значений напряжений или токов $f(t)$ необходимо определять максимальное значение A и начальную фазу ξ . Для такого расчета в ПМК следует ввести программу 3.12.1.

Замечание. При переводе операторных выражений в соответствующие им временные знаменатели операторных выражений, как правило, приходится раскладывать на простые множители. Напомним, что если имеется выражение вида $F = aX^2 + bX + c$, то его прежде всего следует привести, т. е. вынести за скобку множитель a : $F = a[X^2 + (b/a)X + c/a]$. Выражение часто записывают в виде $a(X^2 + mX + q)$. Для разложения на множители данный квадратный трехчлен следует приравнять нулю и найти корни: $X_{1,2} = -m/2 \pm \sqrt{(m/2)^2 - q}$. Тогда $X^2 + mX + q = (X - X_1)(X - X_2)$.

Пример. Пусть $X^2 + 4X + 13 = 0$; $X_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm j3$. Следовательно, $X^2 + 4X + 13 = [X - (-2 + j3)][X - (-2 - j3)] = (X + 2 - j3)(X + 2 + j3)$.

**Расчет мгновенных значений по операторным
изображениям вида** $F(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p(p^2 + a_1 p + a_0)} =$
 $= \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p_3(p - p_1)(p - p_2)}$, где $p_{1,2} = -a \pm j\omega_{св}$ — **комп-**
лексные сопряженные корни; $p_3 = 0$

Корень $p=0$ указывает на наличие постоянной составляющей A_0 , которая определяется из выражения $A_0 = b_0/a_0$. Свободная составляющая находится по программе 3.12.1.

Программа 3.12.1 для расчета временных оригиналов по операторным изображениям при наличии комплексных корней:

Переключатель углов установить в положение «Г».

F /-/ B/O F BП

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$\Pi-x2$ 62	1 01	$x-\Pi D$ 4Г	+	$x-\Pi O$ 40	$\Pi\Pi$ 53	80 80	1 01	-	C/Π 50
1	$\Pi-x8$ 68	+	$x-\Pi 6$ 46	$\Pi-x9$ 69	$x-\Pi 7$ 47	$F\Pi-x$ 5Г	05 05	$\Pi-x1$ 61	2 02	-
2	$x-\Pi O$ 40	$F C/\Pi$ 57	56 56	$\Pi-xD$ 6Г	C/Π 50	$x-\Pi 8$ 48	$\Pi-x4$ 64	↔	-	$x-\Pi A$ 4-
3	$\Pi-x8$ 68	C/Π 50	$\Pi-x5$ 65	-	$x-\Pi B$ 4L	$\Pi-xD$ 6Г	1 01	+	$x-\Pi D$ 4Г	$\Pi\Pi$ 53
4	80 80	$\Pi-x8$ 68	$\Pi-xA$ 6-	$F X$ 22	$\Pi-xB$ 6L	$F X$ 22	+	$x-\Pi 8$ 48	\div 13	$x-\Pi 6$ 46
5	$\Pi-x9$ 69	$\Pi-x8$ 68	\div 13	$x-\Pi 7$ 47	$F \Pi-x$ 5Г	23 23	$\Pi-x6$ 66	↑	$F X$ 22	$\Pi-x7$ 67
6	$F X$ 22	+	$F -$ 21	$x-\Pi 8$ 48	\div 13	$F 5$ 1-	$x-\Pi 9$ 49	$\Pi-x7$ 67	$F x<0$ 5C	73 73
7	$\Pi-x9$ 69	/-/ 0L	$x-\Pi 9$ 49	$\Pi-x8$ 68	$\Pi-x5$ 65	\div 13	C/Π 50	$\Pi-x9$ 69	C/Π 50	0 00
8	$\Pi-x6$ 66	$\Pi-x8$ 6L	X 12	$\Pi-x7$ 67	$\Pi-xA$ 6-	X 12	+	$x-\Pi 9$ 49	$\Pi-x6$ 66	$\Pi-xA$ 6-
9	X 12	$\Pi-x7$ 67	$\Pi-x8$ 6L	X 12	-	$x-\Pi 8$ 48	$\Pi-x0$ 60	B/O 52	F	/-/ 11

Ввод исходных данных x: в память 1 вводится число, равное наибольшей степени знаменателя, т. е. числу простых множителей, на которые раскладывается знаменатель. В рассматриваемом случае знаменатель представляет собой три простых множителя: $(p+a-j\omega_{св})$, $(p+a+j\omega_{св})$ и $(p+0+j0)$. Поэтому в память 1 вводится число 3 (нажать 3 x-П 1), в память 2 — число x, равное наибольшей степени числителя оператора $p(x \text{ x-П } 2)$, в память 3 — число, равное числу пар сопряженных корней, в нашем случае 1 (1 x-П 3), в память 4 и память A — вещественная часть комплексного корня ($a \text{ x-П } 4 \text{ x-П } \cdot$), в память 5 и B — мнимая часть первого корня ($\omega_{св} \text{ x-П } 5 \text{ x-П } /-/$), в память 6 и 7 — нуль (0 x-П 6 x-П 7), затем нажать клавиши B/O C/П. На экране появляется цифра, равная наибольшей степени оператора p числителя. На клавиатуре

следует набрать число, равное коэффициенту оператора p числителя в наибольшей степени (b_1 или b_2) в зависимости от степени числителя, и нажать клавишу С/П. На экране появляется цифра, на единицу меньшая, чем в предыдущем случае, затем набрать коэффициент указанного члена числителя, С/П и т. д. После того как на экране окажется 0, необходимо набрать значение свободного члена числителя и С/П, на экране появляется цифра 1, далее набрать 0 С/П и еще раз 0 С/П, причем, если в знаменателе операторного выражения нет корня $p=0$, то набирать последние 0 С/П 0 С/П не требуется. После счета примерно через 12 с на экране появляется амплитудное значение свободной составляющей A , а после нажатия клавиши С/П — значение фазного угла.

Контрольный пример 12.1. Определить $f(t)$, если $F(p) = \frac{p+10}{p(p^2+4p+13)}$. Приравняв знаменатель нулю, определим корни этого уравнения: $p_1=0$, $p_{2,3} = -2 \pm j3$. Тогда $F(p) = \frac{p+10}{p(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{p+10}{p(p+2-j3)(p+2+j3)}$.

Корень $p_1=0$ указывает на наличие вынужденной составляющей, которую определяют из выражения $A_0 = b_0/a_0 = 10/13 = 0,76923076$. Свободная составляющая $Ae^{-at} \sin(\omega_{св}t + \xi) = Ae^{-2t} \sin(3t + \xi)$. Для расчета значений A и ξ используем ПМК. Набрав программу 3.12.1, введем исходные данные:

3 x—П 1 1 x—П 2 1 x—П 3 2 Вх—П 4 x—П А

3 x—П 5 x—П В 0 x—П 6 x—П 7 В/О С/П

На экране 1. Нажать 1 С/П На экране 0. После нажатия 1 0 С/П на экране 1. Нажать 0 С/П. На экране 0. После нажатия С/П на экране появится амплитудное значение свободной составляющей, в данном примере 7,898934—0,1, т. е. 0,7898934 \approx 0,79, а после нажатия С/П — фазный угол, в данном примере —103,13402°. Таким образом, операторное выражение

$F(p) = \frac{p+10}{p(p^2+4p+13)}$ изображает временное выражение $f(t) = 0,769 + 0,78989e^{-2t} \sin(3t - 103,134^\circ) = 0,769 - 0,79e^{-2t} \sin(3t + 76,87^\circ)$.

Контрольный пример 12.2. Рассчитаем $f(t)$, если $F(p) = \frac{p^2+10p+50}{p(p^2+4p+13)}$. Проделав необходимые манипуляции, получим $f(t) = 3,8461538 + 2,8480012e^{-2t}(3t - 87,93618^\circ)$.

Расчет мгновенных значений для выражений вида $F(p) = \frac{b_2p^2 + b_1p + b_0}{p^2 + a_1p + a_0}$ при комплексных корнях $p_{1,2} = -a \pm j\omega_{св}$, т. е. операторного выражения $F(p) = \frac{b_2p^2 + b_1p + b_0}{(p+a-j\omega_{св})(p+a+j\omega_{св})}$

В данном случае вынужденная составляющая равна нулю и в знаменателе оказывается два корня, поэтому в память 1 сле-

дует вводить число 2 (а не 3, как в предыдущем случае). Все остальные операции остаются прежними до конца ввода значений коэффициентов числителя. После нажатия клавиши С/П на экране появляется значение амплитуды свободной составляющей A . После нажатия клавиши С/П на экране высвечивается фазный угол ξ .

Контрольный пример 12.3. Определим $f(t)$, если $F(p) = \frac{p^2 + 10p + 50}{p^2 + 4p + 13}$. Приравняем знаменатель нулю и найдем корни: $p_{1,2} = -a \pm j\omega_{св} = -2 + j3$, т. е. $a = -2$, $\omega_{св} = 3$, следовательно,

$$F(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{p^2 + 10p + 50}{p^2 + 4p + 13} = \frac{p^2 + 10p + 50}{(p + 2 - j3)(p + 2 + j3)}.$$

Последовательность ввода исходных данных в ПМК:

2 x—П 1 2 x—П 2 1 x—П 3 2 В x—П 4 x—П А 3
x—П 5 x—П В 0 x—П 6 x—П 7 В/О С/П

На экране цифра 2. Нажать 1 С/П На экране 1. После нажатия 1 0 С/П на экране 0. Нажать 5 0 С/П. После счета примерно через 12 с на экране появляется значение амплитуды 10,268614, нажать С/П, на экране высвечивается значение начальной фазы 35,753887°. Таким образом, операторное выражение $F(p) = (p^2 + 10p + 50)/(p^2 + 4p + 13)$ изображает временное выражение $f(t) = 10,27e^{-2t} \sin(3t + 35,75^\circ)$.

Контрольный пример 12.4. Дано $F(p) = \frac{p + 10}{p^2 + 4p + 13} = \frac{p + 10}{(p + 2 - j3)(p + 2 + j3)}$, т. е. $a = -2$, $\omega_{св} = 3$. Найти $f(t)$.

Ввод исходных данных:

2 x—П 1 1 x—П 2 1 x—П 3 2 В x—П 4 x—П А 3
x—П 5 x—П В 0 x—П 6 x—П 7 В/О С/П

На экране 1. Нажать 1 С/П. На экране 0. Нажать 1 0 С/П.

Исходные данные введены, после счета на экране появляется значение амплитуды свободной составляющей 2,8480012. Нажать С/П, на экране высвечивается значение фазного угла 20,556048°. Таким образом, операторное выражение $F(p) = (p + 10)/(p^2 + 4p + 13)$ изображает временное выражение $f(t) = 2,848e^{-2t} \sin(3t + 20,556^\circ)$.

Расчет числовых значений функций вида $f(t) = Ue^{-at} \sin(\omega t + \psi)$

Если при расчете переходных процессов корни характеристического или операторного уравнения оказываются комплексными сопряженными, т. е. вида $k_{1,2} = -a \pm j\omega$, то свободная составляющая напряжения или тока описывается выражением $f(t) = Ue^{-at} \sin(\omega t + \psi)$. Числовые значения данной функции удобно рассчитывать с помощью ПМК. Прежде чем вводить в ПМК исходные данные, следует задаться числом точек, подле-

жащих расчёту, и определить шаг Δt , для которого следует производить расчёт. Для этого необходимо определить число периодов свободных колебаний N , которое, как известно, близко к добротности цепи: $N=Q=\omega_{св}/2a$. Практическое время переходного процесса можно определить из выражения $t_{пер} = T_{св}Q = (2\pi/\omega_{св})(\omega_{св}/2a) = \pi(1/a)$, что обычно выглядит как $t_{пер} \approx 3(1/a)$. Задавшись числом точек ($n=12 \dots 20$), определяют шаг $\Delta t = t_{пер}/n = 3/an$. Получившееся значение Δt округляют до ближайшего удобного значения. Например, $u = 10 e^{-2000t} \sin(10^4 t + 30^\circ)$, тогда $N = 10^4 / (2 \cdot 2 \cdot 10^3) = 2,5$. Следовательно, за время переходного процесса свободная составляющая напряжения $u_{св}$ совершает менее трех полных колебаний, которые происходят за время $t_{пер} = 3(1/a) = 3/(2 \cdot 10^3) = 1,5$ мс. Зададимся 16 точками за период, т. е. 40 точками за время $t_{пер} = 2,5 T_{св}$. В этом случае шаг $\Delta t = t_{пер}/n = 1,5 \cdot 10^{-3} / 40 = 37,5 \approx 40$ мкс. Если за время $t_{пер}$ совершается менее одного колебания, то $n = 20 \dots 30$. После этого на ПМК можно набирать программу 3.12.2.

Программа 3.12.2 для расчёта значений функций вида $f(t) = U e^{-at} \sin(\omega t + \psi)$

Переключатель углов установить в положение «Г».

F /-/ В/О F ВП

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$\pi-x1$ 61	$\pi-x2$ 62	X 12	1 01	8 08	0 00	X 12	F + 20	÷ 13	$\pi-x3$ 63
1	+ 10	F7 1Г	$\pi-x4$ 64	X 12	$\pi-x1$ 61	$\pi-x5$ 65	X 12	F1 16	X 12	С/П 50
2	$\pi-x1$ 61	$\pi-x6$ 66	+ 10	$x-\pi1$ 41	БП 51	00 00	F 12	/-/ 13		

Ввод исходных данных: момент, с которого начинается отсчет (например, 0), вводится в регистр 1 (нажать клавиши $t_{нач} x-\pi 1$), частота свободных колебаний ω (точнее, конечно, $\omega_{св}$) — в регистр 2 (нажать $\omega x-\pi 2$), фазный угол в градусной мере — в регистр 3 ($\psi^\circ x-\pi 3$), значение U — в регистр 4 ($U x-\pi 4$), степень числа e — в регистр 5 ($a /-/ x-\pi 5$), шаг Δt — в регистр 6 ($\Delta t x-\pi 6$). Затем следует нажать клавиши В/О С/П. После выполнения счета на экране высвечивается значение функции для момента $t=t_{нач}$ (например, $t=0$). Нажать С/П, на экране — значение функции для момента $t_{нач} + \Delta t$, снова нажать С/П, на экране — значение функции для $t=t_{нач} + 2\Delta t$ и т. д.

Таблица 15.2

t , мкс	0	50	100	150	200	250
u , В	5,0	7,727	8,178	6,6616	3,8838	0,7140

Контрольный пример 12.5. Пусть $u = 10e^{-2000t} \sin(10^4 t + 30^\circ)$. Практическое время переходного процесса $t_{\text{пер}} = 3(1/a) = 3(1/2000) = 1500$ мкс = $1500 \cdot 10^{-6}$ с. Зададимся $n = 30$ точек, тогда $\Delta t = t_{\text{пер}}/n = 1500 \cdot 10^{-6}/30 = 50 \cdot 10^{-6}$ с = $5 \cdot 10^{-5}$ с. Расчет начнем с начального момента (т. е. с $t = 0$):

0 x—П 1 ВП 4 x—П 2 3 0 x—П 3 1 0 x—П 4 2 0

0 0 В x—П 5 5 ВП 5 В x—П 6 В/О С/П

После счета на экране должно оказаться 5,0000002, нажать С/П, на экране 7,7271849 С/П 8,1781902, нажать С/П 6,6616198 и т. д. Если необходимо изменить начальное время отсчета или шаг, то в память 1 или соответственно в память 6 следует ввести новые значения, нажать клавиши В/О С/П и продолжить счет. Аналогичным образом можно изменить значение любого параметра, вводимого в память калькулятора. Результаты расчетов удобно свести в табл. 12.3. По полученным результатам строят кривую $u = f(t)$. Если $f(t)$ имеет постоянную составляющую U_0 , то ось времени следует переместить на значение U_0 .

Расчет числовых значений функций вида

$$f(t) = A_0 + A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{-a_2 t}$$

Если при расчете переходных процессов корни характеристического или операторного уравнения оказываются вещественными, отрицательными и разными, то свободная составляющая $u_{\text{св}}$ представляет собой разность двух экспоненциальных кривых. Расчет числовых значений данной функции удобно производить с помощью ПМК. Прежде чем вводить в ПМК исходные данные, следует определить практическое время переходного процесса $t_{\text{пер}}$, задаться количеством точек n и рассчитать шаг Δt . Время $t_{\text{пер}}$ определяется из выражения $t_{\text{пер}} = 3/K_1$, где K_1 — модуль корня с меньшим значением. Например, если $K_1 = -100$ 1/с, $K_2 = -200$ 1/с, то $t_{\text{пер}} = 3/100 = 3 \cdot 10^{-2} = 30 \cdot 10^{-3}$ с. Если выбрать $n = 15$, то $\Delta t = t_{\text{пер}}/n = 30 \cdot 10^{-3}/15 = 2 \cdot 10^{-3}$ с. На практике при аperiodическом режиме выбирают $n = 10 \dots 30$. Затем следует набрать программу 3.12.3.

Программа 3.12.3 для расчета значений функций вида
 $f(t) = A_0 + A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{-a_2 t}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	П-х1 61	П-х2 62	× 12	F1 16	П-х4 64	× 12	П-х1 61	П-х3 63	× 12	F1 16
1	П-х5 65	× 12	+ 10	П-х6 66	+ 10	С/П 50	П-х1 61	П-х7 67	+ 10	х-П1 41
2	В/П 51	00 00	F	/-/ 12						

Ввод исходных данных: момент, с которого начинается отсчет (например, 0), вводится в регистр 1 (клавиши $t_{\text{нач}}$ х—П 1), степень у первого члена e (т. е. K_1) — в регистр 2 (K_1 /—/ х—П 2), степень у второго члена e (т. е. K_2) — в регистр 3 (K_2 /—/ х—П 3), коэффициент A_1 — в регистр 4 (A_1 х—П 4), коэффициент A_2 — в регистр 5 (A_2 х—П 5), постоянная составляющая A_0 — в регистр 6 (A_0 х—П 6), шаг Δt — в регистр 7 (Δt х—П 7). Затем следует нажать клавиши В/О С/П. После выполнения счета на экране высветится значение функции для момента $t = t_{\text{нач}}$ (например, $t = 0$). Нажать С/П, на экране будет значение функции для $t = t_{\text{нач}} + \Delta t$, снова нажать С/П, на экране высветится значение функции для $t = t_{\text{нач}} + 2\Delta t$ и т. д.

Контрольный пример 12.6. Пусть $u = 5 + 2e^{-100t} - 3e^{-200t}$. Рассчитаем Δt .
 Время $t_{\text{пер}} = 3/100 = 30 \cdot 10^{-3}$ с. При $n = 10$ $\Delta t = (30 \cdot 10^{-3})/10 = 3 \cdot 10^{-3}$ с.
 Введем исходные данные:

0 х—П 1 1 0 0 В х—П 2 2 0 0 В х—П 3 2
 х—П 4 3 В х—П 5 5 х—П 6 3 В/П 3 В х—П 7

В/О С/П

После счета на экране 4, нажать С/П, должно быть 4,8352015; С/П 5,1940406, С/П, 5,3172426, С/П, 5,3302346 и т. д. Если необходимо изменить какой-то параметр, то новое значение (или значения) следует ввести в соответствующий регистр (регистры), нажать В/О С/П и производить счет. Результаты расчетов сводят в таблицу и строят кривую $u = f(t)$. Выражения вида $f(t) = A_0 + A_1 e^{-K_1 t}$ можно рассчитывать по той же программе, положив $A_2 = 0$.

Глава 13. ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ И ИНТЕГРИРУЮЩИЕ ЦЕПИ

13.1. Рассчитать емкость конденсатора C , при которой цепь, показанная на рис. 13.1, *а*, оказывается дифференцирующей, если $R=1$ кОм, а входной сигнал — периодический, имеет форму: а) равнобедренного треугольника с периодом $T=50$ мкс и б) прямоугольную с тем же периодом при скважности $S=2$.
Указание: изучите с. 295 и 400—403 в [1].

Решение. Для того чтобы рассчитать параметры дифференцирующей цепи, необходимо определить практическую ширину спектра входного сигнала. Будем считать, что можно пренебрегать гармоническими составляющими, амплитуды которых меньше амплитуды с наибольшим значением хотя бы на порядок. Поскольку мгновенные значения напряжений треугольной формы описываются рядом $u(t)=0,811U_m[\sin \omega_1 t - (1/9)\sin 3\omega_1 t + (1/25)\sin 5\omega_1 t + \dots]$, спектр данного сигнала практически можно считать состоящим из трех гармоник. Так как период сигнала $T=50$ мкс, частота первой гармоники $f_1=1/T=1/50 \cdot 10^{-6}=20$ кГц. Чтобы цепь была дифференцирующей, постоянная времени цепи τ должна быть много меньше периода высшей гармоники спектра, т. е. в данном случае $T_{(3)}=T_{(1)}/3=50/3$ мкс, что соответствует частоте 60 кГц. Для этого должно выполняться условие $\tau_{(\text{мкс})} \leq 15,9/f_{\text{высш}}(\text{кГц})$, где $f_{\text{высш}}$ — высшая частота спектра (см. формулу (13.2) в [1]). Тогда $\tau=15,9/60=0,265$ мкс $=265$ нс $=265 \cdot 10^{-9}$ с. В цепи на рис. 13.1, *а* $\tau=RC$, поэтому $C=\tau/R=265/1000=0,265$ нФ $=265$ пФ.

Как известно (см. с. 146 в [1]), производная от сигнала треугольной формы есть сигнал прямоугольной формы. Докажем, что при выбранных параметрах цепи выходное напряжение оказывается прямоугольным. Напомним, что у сигналов треугольной формы амплитуды гармонических составляющих убывают по квадратичному закону, а у сигналов прямоугольной формы со скважностью 2 — по линейному (см. с. 295 в [1]). Мгновенные выходные напряжения в пассивной дифференцирующей цепи определяются из выражения $u_2(t)=\tau[(d/dt)u_1(t)]$ (см. формулу (13.1) в [1]).

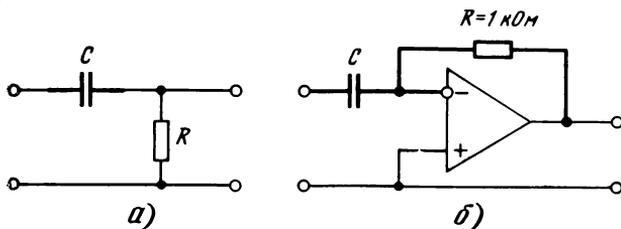


Рис. 13.1

Выходное напряжение $u_2(t) = 265 \cdot 10^{-9} \{ (d/dt) [0,811 U_m \times (\sin \omega_1 t - 1/9 \sin 3\omega_1 t + \dots)] \} = 265 \cdot 10^{-9} \cdot 0,811 U_m [\omega_1 \cos \omega_1 t - (3\omega_1/9) \cos 3\omega_1 t + \dots] = 265 \cdot 10^{-9} \cdot 0,811 U_m \cdot 6,28 \cdot 20 \cdot 10^3 [\cos \omega_1 t - (1/3) \cos 3\omega_1 t + \dots] = 27 \cdot 10^{-3} U_m [\cos \omega_1 t - (1/3) \cos 3\omega_1 t + \dots]$. Как видно из полученного выражения, амплитуды гармонических составляющих убывают по линейному закону, следовательно, напряжение на выходе действительно имеет прямоугольную форму со скважностью 2, что и должно было получиться.

Определим модуль коэффициента передачи цепи. Максимальное значение входного напряжения U_m , а выходного $27 \cdot 10^{-3} U_m$, откуда $K = U_{m2}/U_{m1} = 27 \cdot 10^{-3} U_m/U_m = 27 \cdot 10^{-3}$, т. е. максимальное значение выходного напряжения примерно в 37 раз меньше максимального значения входного. Как известно, эффект дифференцирования в пассивной цепи возможен только за счет значительного уменьшения модуля коэффициента передачи цепи.

Рассмотрим случай б). У напряжения прямоугольной формы со скважностью 2 амплитуды гармоник уменьшаются по линейному закону, поэтому спектр такого сигнала, отсчитываемый по уровню 0,1, состоит из 10 гармоник. Таким образом, высшая частота спектра $f_{\text{высш}} = 10f_{(1)} = 10 \cdot 20 = 200$ кГц, откуда $\tau_{(\text{мкс})} = 15,9/f_{\text{высш(кГц)}} = 15,9/200 = 0,0795$ мкс ≈ 80 нс, а $C = \tau/R = 80/1000 = 0,080$ нФ = 80 пФ. Докажем, что производная от сигналов прямоугольной формы есть импульсы с одинаковыми максимальными значениями. Мгновенные напряжения $u_2(t) = \tau(d/dt)u_1(t) = \tau(d/dt) = 1,27 U_m [\sin \omega_1 t + (1/3) \sin 3\omega_1 t + (1/5) \sin 5\omega_1 t + \dots + (1/k) \sin k\omega_1 t] = 80 \cdot 10^{-9} \cdot 1,27 U_m \cdot 6,28 \cdot 20 \cdot 10^3 [\cos \omega_1 t + \cos 3\omega_1 t + \cos 5\omega_1 t + \dots + \cos k\omega_1 t] = 12,8 \cdot 10^{-3} U_m \times [\Sigma \cos k\omega_1 t]$. Из полученного результата видно, что $u_2 = 12,8 \cdot 10^{-3}$, т. е. максимальное значение выходного напряжения меньше максимального значения входного напряжения почти в 80 раз.

13.2. Решить задачу 13.1, если напряжение на входе цепи имеет вид однополупериодной кривой (см. рис. 10.2, г в [1]).

Указание: разберите задачу 13.1.

13.3. Определить значение емкости C в активной дифференцирующей цепи (рис. 13.1, б), коэффициент передачи в которой равняется единице при входных напряжениях: а) треугольной и б) прямоугольной формы со скважностью $S=2$, если $R=1$ кОм.

Указание: изучите с. 406 в [1] и разберите задачу 13.1.

Решение. В цепи $K = Z_2/Z_1 = R/(1/j\omega C) = j\omega RC$, а $K = \omega RC$, поэтому при $K=1$ $C = 1/\omega R$, где ω — угловая частота высшей гармоники входного сигнала. При сигналах треугольной формы $f_{\text{высш}} = 3f_1 = 3(1/T) = 3/(50 \cdot 10^{-6}) = 60$ кГц, тогда $C = 1/(6,28 \cdot 60 \cdot 10^3 \cdot 10^3) = 2,65$ нФ.

При сигналах прямоугольной формы $f_{\text{высш}} = 10f_1 = 200$ кГц, в этом случае $C = 1 / (6,28 \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 10^3) = 795$ пФ.

13.4. Решить задачу 13.3, если входное напряжение имеет вид однополупериодной кривой.

Указание: разберите задачу 13.3.

13.5. Рассчитать сопротивление R (рис. 13.1, а), которое обеспечивает практически хорошее дифференцирование, если $C = 1000$ пФ, а мгновенные значения входного сигнала описываются рядами: а) $u_1 = 50[\sin \omega_1 t + (1/2) \sin 2\omega_1 t + (1/3) \sin 3\omega_1 t + \dots + (1/k) \sin k\omega_1 t]$;

б) $u_1 = 100[\sin \omega_1 t + (1/2^2) \sin 2\omega_1 t + (1/3^2) \sin 3\omega_1 t + \dots + (1/k^2) \sin k\omega_1 t]$, если $\omega_1 = 10^5$ 1/с.

Указание: разберите задачу 13.1.

13.6. Определите значение R (рис. 13.1, б), чтобы коэффициент передачи $K = 2$ при $C = 1$ нФ, если к входу цепи подведены сигналы, приведенные в задаче 13.5.

Указание: разберите задачу 13.3.

13.7. Нарисуйте семейство кривых выходного напряжения в схеме рис. 13.1, а, если к входу цепи приложено напряжение прямоугольной формы, а R увеличивается от малого значения до бесконечно большого. Какие при этом получаются соотношения между постоянной времени цепи τ и периодом сигнала T ?

Указание: разберите рис. 13.5 в [1].

13.8. Напряжения на выходе дифференцирующей цепи показаны на рис. 13.2. Нарисуйте кривые выходных напряжений.

Указание: изучите с. 404 в [1].

13.9. К входу RC -цепи подключен генератор прямоугольных импульсов длительностью $t_1 = 50$ мкс и ЭДС E . Определить R и C цепи, чтобы на выходе оказался дифференцирующий им-

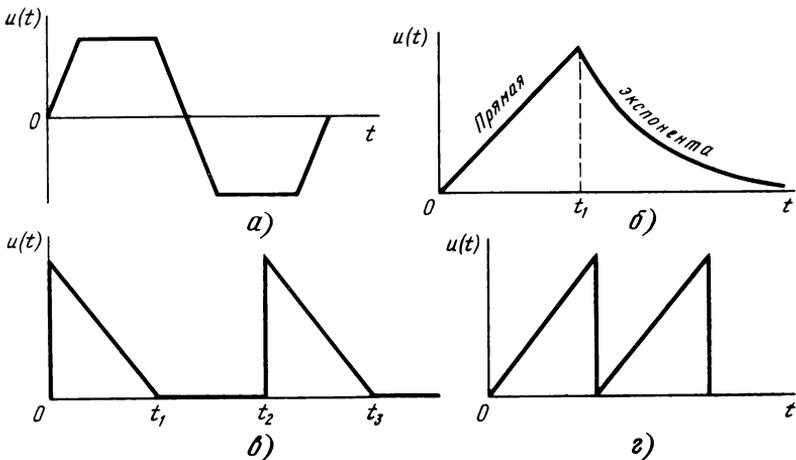


Рис. 13.2

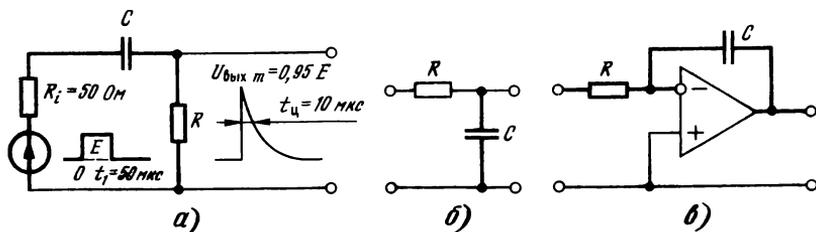


Рис. 13.3

пульс с максимальным значением $u_{\text{ВЫХ max}}$ при длительности, отсчитываемой на уровне $0,5u_{\text{ВЫХ max}}$, $t_{\text{и}}=10$ мкс (рис. 13.3, а).

Указание: изучите с. 404 в [1].

Решение. В момент включения цепи (т. е. при изменении входного напряжения от 0 до E) сопротивление емкостного элемента равно нулю, при этом образуется резистивный делитель напряжения, коэффициент передачи которого $K=R/(R+R_i)=0,95$, откуда $R=0,95R+47,5$, т. е. $R=47,5/0,05=950$ Ом. По мере увеличения времени сопротивление емкостного элемента возрастает, ток в цепи, а следовательно, и напряжение на R_1 падают, напряжение $u_2(t)$ при этом определяется из выражения $u_R = u_{\text{ВХ max}} e^{-t/(R_i+R)C}$.

В соответствии с условием задачи через $t=10$ мкс выходное напряжение должно уменьшиться до $0,5u_{\text{ВЫХ max}}$, что приводит к выражению $0,5u_{\text{ВЫХ max}} = u_{\text{ВЫХ max}} e^{-[10 \cdot 10^{-8}]/(50+950)C}$ или $1/2 = 1/e^{(10^{-8}/C)}$, т. е. $\ln 2 = 10^{-8}/C$, откуда $C = 10^{-8}/\ln 2 = 10^{-8}/0,693 = 14,4$ нФ.

13.10. Определить постоянную времени τ , чтобы цепь, показанная на рис. 13.3, б, была интегрирующей для периодического сигнала прямоугольной формы с периодом $T=1$ мс.

Указание: изучите с. 407 в [1].

Решение. В интегрирующей цепи постоянная времени цепи τ должна быть значительно больше периода самой низкочастотной составляющей сигнала (высшие гармонические составляющие при этом тем более будут интегрироваться). Кроме того, в пассивной цепи должно выполняться условие $\tau \geq 1,6 T_n$, где T_n — период сигнала. В данной цепи $\tau = 1,6 \cdot 1 = 1,6$ мс. Значения сопротивлений и емкостей могут быть различными, но с τ не менее 1,6 мс. Например, при $R=1$ кОм $C = 1,6 \cdot 10^{-3}/10^3 = 1,6$ мкФ и т. д.

13.11. Рассчитать емкость C в активной интегрирующей цепи, в которой модуль коэффициента передачи равен единице, если $R=5$ кОм, а период входного сигнала $T=10$ мс (рис. 13.3, в).

Указание: изучите с. 407, 408 в [1].

Глава 14. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

14.1. Рассчитать сопротивления Т-образного симметричного четырехполюсника (рис. 14.1, а), если коэффициент $B=800 \text{ Ом}$, а $C=0,01 \text{ См}$.

Указание: изучите с. 410, 411 в [1].

14.2. Методом холостого хода и короткого замыкания рассчитать параметры четырехполюсника, если $\underline{Z}_{1T}=200 \text{ Ом}$, а $\underline{Z}_{2T}=100 \text{ Ом}$.

Указание: изучите с. 410, 411 в [1].

14.3. Параметры симметричного четырехполюсника $A=-j1$, $B=400-j400=400\sqrt{2}e^{-j45^\circ}$. Рассчитать сопротивления Т-образной и мостовой схем замещения.

Указание. изучите с. 410, 411 в [1].

Решение. В симметричном четырехполюснике $A^2 - BC = 1$, откуда коэффициент $C = (A^2 - 1)/B = [(-j)^2 - 1]/(400\sqrt{2}e^{-j45^\circ}) = 1/(200\sqrt{2}e^{j135^\circ})$. Сопротивления Т-образной схемы замещения $\underline{Z}_{1T} = (A - 1)/C = (-j - 1) \cdot 200\sqrt{2} \times e^{j135^\circ} = \sqrt{2}e^{-j135^\circ} \cdot 200\sqrt{2}e^{j135^\circ} = 400 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{2T} = 1/C = 200\sqrt{2} \times e^{-j135^\circ} = (-200 + j200) \text{ Ом}$.

Вещественная часть комплексного сопротивления \underline{Z}_{2T} оказалась отрицательной, что указывает на отрицательное резистивное сопротивление, которое с помощью пассивных элементов реализовано быть не может. Реализовать цепь с заданными параметрами четырехполюсника без активных элементов можно с помощью мостовой схемы, показанной на рис. 14.1, б. Так как в мостовой схеме $A = (\underline{Z}_{1M} + \underline{Z}_{2M})/(\underline{Z}_{2M} - \underline{Z}_{1M})$; $B = 2\underline{Z}_{1M}\underline{Z}_{2M}/(\underline{Z}_{2M} - \underline{Z}_{1M})$; $C = 2/(\underline{Z}_{2M} - \underline{Z}_{1M})$, то $\underline{Z}_{1M} = (A - 1)/C$, $\underline{Z}_{2M} = B/(A - 1)$. Из полученных результатов видно, что сопротивление \underline{Z}_{1M} равно сопротивлению \underline{Z}_{1T} в Т-образной схеме и, следовательно, в данном случае $\underline{Z}_{1M} = 400 \text{ Ом}$. Сопротивление $\underline{Z}_{2M} = B/(A - 1) =$

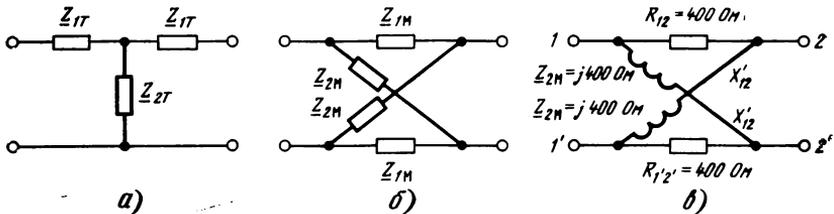


Рис. 14.1

$= 400\sqrt{2} e^{-j45^\circ} / (-j - 1) = 400\sqrt{2} e^{-j45^\circ} / (\sqrt{2} \cdot e^{-j135^\circ}) = 400 e^{j90^\circ} = j400$ Ом. Таким образом, четырехполюсник с параметрами $\underline{A} = -j$, $\underline{B} = (400 - j400)$ Ом не может быть реализован с помощью Т-образной (легко доказать, что и П-образной) схемы замещения, но реализуется с помощью мостовой схемы (рис. 14.1, в).

Произведем проверку. Рассчитаем сопротивления холостого хода и короткого замыкания, с помощью которых определим коэффициенты \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} . Как видно из схемы, ветви $R_{12} + jX_{21'}$ и $jX_{12'} + R_{2'1'}$ соединены параллельно и, следовательно, $\underline{Z}_x = [(R_{12} + jX_{21'}) (R_{2'1'} + jX_{12'})] / [R_{12} + R_{2'1'} + j(X_{21'} + X_{12'})] = (400 + j400)(400 + j400) / (800 + j800) = 200\sqrt{2} e^{j45^\circ} = 200 + j200$ Ом. При замкнутых зажимах 2-2'

$$\underline{Z}_k = \left(\frac{R_{12} \cdot jX_{12'}}{R_{12} + jX_{12'}} \right) + \left(\frac{R_{1'2'} \cdot jX_{1'2'}}{R_{1'2'} + jX_{1'2'}} \right) = 2(400 \cdot j400) / (400 + j400) = 400 + j400.$$

Параметры

$$\underline{A} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_x}{\underline{Z}_x - \underline{Z}_k}} = \sqrt{\frac{200\sqrt{2}e^{j45^\circ}}{200 + j200 - 400 - j400}} = \sqrt{\frac{200\sqrt{2}e^{j45^\circ}}{200\sqrt{2}e^{j225^\circ}}} = \sqrt{e^{-j180^\circ}} = e^{-j90^\circ} = -j;$$

$$\underline{B} = \underline{A} \cdot \underline{Z}_k = e^{-j90^\circ} \cdot 400\sqrt{2}e^{j45^\circ} = 400\sqrt{2}e^{-j45^\circ} = 400 - j400.$$

Проверки выполняются. Мостовой четырехполюсник с $\underline{Z}_{1м} = 400$ Ом и $\underline{Z}_{2м} = 400$ Ом действительно обеспечивает параметры $\underline{A} = -j$, $\underline{B} = 400 - j400$ Ом.

14.4. Рассчитать характеристическое сопротивление четырехполюсника, показанного на рис. 14.1, если $\underline{Z}_{1т} = 100$ Ом, $\underline{Z}_{2т} = 300$ Ом.

Указание: изучите с. 410, 411 в [1].

14.5. Рассчитать характеристическое сопротивление четырехполюсника, показанного на рис. 14.2, а, если $\underline{Z}_1 = 1000$ Ом, $\underline{Z}_2 = -j500$ Ом, и выполнить проверку.

Указание: изучите сначала с. 410, 411 в [1].

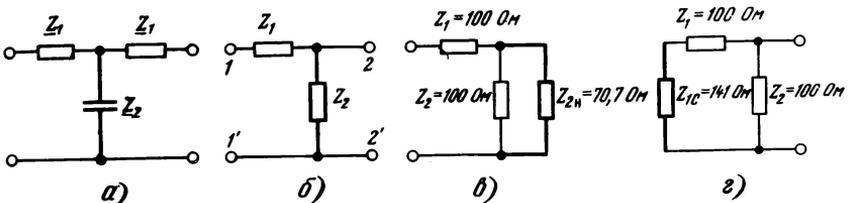


Рис. 14.2

14.6. Рассчитать характеристические сопротивления \underline{Z}_{c1} и \underline{Z}_{c2} для несимметричного Г-образного четырехполюсника, показанного на рис. 14.2, б, если $Z_1=100$ Ом, $Z_2=100$ Ом.

Указание: изучите с. 410, 411 в [1].

Решение. Рассчитаем Z_{x1} и $Z_{к1}$. Как видно из схемы рис. 12.2, б, $Z_{x1}=Z_1+Z_2=100+100=200$ Ом, $Z_{к1}=Z_1=100$ Ом, тогда

$$\underline{Z}_{c1} = \sqrt{Z_{x1}Z_{к1}} = \sqrt{200 \cdot 100} = 141 \text{ Ом.}$$

Аналогично $\underline{Z}_{x2}=R_2=100$ Ом, $\underline{Z}_{к2}=R_1R_2/(R_1+R_2)=50$ Ом и $\underline{Z}_{c2} = \sqrt{Z_{x2}Z_{к2}} = \sqrt{100 \cdot 50} = 70,7$ Ом. Таким образом, если к зажимам 2—2' подключить сопротивление 70,7 Ом, то входное сопротивление четырехполюсника, т. е. сопротивление между зажимами 1—1', должно равняться \underline{Z}_{c1} , в данном случае 141 Ом. Если к зажимам 1—1' подключить $\underline{Z}_{c1}=141$ Ом, то сопротивление между зажимами 2—2' должно быть $\underline{Z}_{c2}=70,7$ Ом.

Выполним проверку в соответствии со схемами 14.2, в и г:

$$\begin{aligned} Z_{вх(1-1')} &= R_1 + (R_2 Z_{н2}) / (R_2 + Z_{н2}) = 100 + \\ &+ (100 \cdot 70,7) / (100 + 70,7) = 141 \text{ Ом}; \quad Z_{вх(2-2')} = \\ &= \frac{R_2 (R_1 + Z_{с1})}{R_2 + R_1 + Z_{с1}} = \frac{100 (100 + 141)}{100 + 100 + 141} = 70,7 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Проверки выполняются, следовательно, задача решена правильно.

14.7. Решить задачу 14.6, если $Z_1=250$ Ом, $Z_2=500$ Ом.

Указание: разберите задачу 14.6.

14.8. Определить ослабление A_p и фазовую постоянную B_p четырехполюсника, показанного на рис. 14.2, а, если $\underline{Z}_1=1000$ Ом, $\underline{Z}_2=-j500$ Ом.

Указание: изучите с. 412, 413 в [1].

Решение. Рассчитаем комплексные входные сопротивления холостого хода \underline{Z}_x и короткого замыкания $\underline{Z}_к$. Как видно из рис. 14.2, а,

$$\begin{aligned} \underline{Z}_x &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 1000 - j500 = 1118e^{-j26^\circ 34'} \quad \underline{Z}_к = \underline{Z}_1 + \\ &+ \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = 1200 - j400 = 1264e^{-j18^\circ 25'}, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\underline{Z}_x / (\underline{Z}_x - \underline{Z}_к)} = \\ &= \sqrt{1118e^{-j26^\circ 34'} / (1000 - j500 - 1200 + j400)} = \\ &= \sqrt{(1118e^{-j26^\circ 34'}) / (224e^{-j153^\circ 30'})} = 22,3e^{j63^\circ 30'}; \end{aligned}$$

$$\underline{B} = \underline{A} \underline{Z}_k = 22,3e^{j63^\circ 30'} \cdot 1264e^{-j18^\circ 25'} = 28\,238e^{j45^\circ};$$

$$\underline{C} = \underline{A} / \underline{Z}_x = 22,3e^{j63^\circ 30'} / 1118e^{-j26^\circ 34'} = 0,02e^{j37^\circ};$$

$$\underline{e}_r = \underline{A} + \sqrt{\underline{B}\underline{C}} = 22,3e^{j63^\circ 30'} + \sqrt{28,2 \cdot 10^3 e^{j45^\circ} \cdot 20 \cdot 10^{-3} e^{j37^\circ}} =$$

$$= 42,6e^{j52^\circ 35'},$$

откуда

$$A_p = \ln 42,6 = 2,3 \cdot \lg 42,6 = 3,75 \text{ Нп} = 8,68 \cdot 3,75 = 32,55 \text{ дБ};$$

$$B_p = \psi^\circ = 52^\circ 35' = \psi^\circ / 57,3 = 52,58^\circ / 57,3 = 0,9176 \text{ рад.}$$

14.9. Определить ослабление A_p и фазовую постоянную B_p четырехполюсника, показанного на рис. 14.1, а, если $\underline{Z}_1 = 500 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_2 = j1000 \text{ Ом}$.

Указание: разберите задачу 14.8.

14.10. Рассчитать элементы схем удлинителей для ослабления на 20 дБ, если характеристическое сопротивление линии равно 600 Ом.

Решение. Удлинителями называются четырехполюсники, состоящие из резистивных элементов и предназначенные для ослабления сигналов на заданное значение без изменения характеристического сопротивления цепи. Удлинители можно собирать по Т-образной (рис. 14.3, а), П-образной (рис. 14.3, б) или мостовой схеме (рис. 14.3, в). Переведем ослабление из децибел в неперы: $A_p (\text{Нп}) = 0,115 A_p (\text{дБ}) = 0,115 \cdot 20 = 2,3 \text{ Нп}$. Для удлинителя, собранного по Т-образной схеме, $R_1 = 2Z_T \cdot \text{th}(A_p/2) = 2 \cdot 600 \cdot \text{th}(2,3/2) = 1200 \cdot 0,818 = 981,3 \text{ Ом}$; $R_2 = Z_T / \text{sh}A_p = 600 / \text{sh}2,3 = 600 / 4,937 = 121,5 \text{ Ом}$. Для П-образного удлинителя $R_1 = Z_n \text{sh}A_p = 600 \cdot \text{sh}2,3 = 600 \cdot 4,937 = 2962 \text{ Ом}$; $R_2 = Z_n / [2\text{th}(A_p/2)] = 600 / (2 \cdot 0,818) = 366,7 \text{ Ом}$. Для ТМ-образного удлинителя $R_1 = Z_{TM} = 600 \text{ Ом}$; $R_2 = (R_1/2)[\text{cth}(A_p/2) - 1] = 300(\text{cth } 1,15 - 1) = 300[(1/\text{th } 1,15) - 1] = 300[(1/0,818) - 1] =$

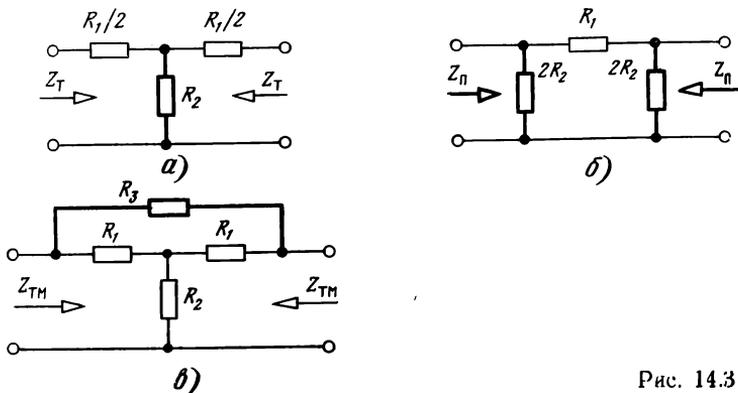


Рис. 14.3

$=66,7 \text{ Ом}$; $R_3=R_1^2/R_2=5397 \text{ Ом}$. При выполнении расчетов следует иметь в виду, что числовые значения гиперболических функций находят или по таблицам этих функций, или из выражений $\text{sh}\alpha=(e^\alpha-e^{-\alpha})/2$; $\text{ch}\alpha=(e^\alpha+e^{-\alpha})/2$; $\text{th}\alpha=\text{sh}\alpha/\text{ch}\alpha=[(e^\alpha-e^{-\alpha})/(e^\alpha+e^{-\alpha})]=(e^{2\alpha}-1)/(e^{2\alpha}+1)$, например $\text{th}1,15=(e^{2,3}-1)/(e^{2,3}+1)=(9,974-1)/(9,974+1)=0,818$.

14.11. Рассчитать элементы схем удлинителей Т-, П- и ТМ-видов для схем рис. 14.3, имеющих характеристическое сопротивление $Z_c=500 \text{ Ом}$ при ослаблении 1 Нп.

Указание: разберите задачу 14.10.

14.12. Генератор с внутренним сопротивлением $R_i=25 \text{ Ом}$ и действующим значением ЭДС 10 В подключен через четырехполюсник с ослаблением 26 дБ к нагрузочному сопротивлению R_n . Определить действующие значения напряжения и тока, а также мощность в нагрузке, если цепь работает в согласованном режиме.

Указание: изучите с. 412, 413 в [1].

Решение. Определим напряжение U и ток I в нагрузке, если ослабление четырехполюсника равно нулю, т. е. нагрузочное сопротивление подключено непосредственно к зажимам генератора. Очевидно, что $U_0=E/2=5 \text{ В}$. Так как режим работы согласованный, то $R_n=R_i=25 \text{ Ом}$, при этом $I_0=E/(R_i+R_n)=5/(25+25)=10 \text{ мА}$. При ослаблении на A_p перер напряжение или ток в нагрузке уменьшаются в $e^{A_p(\text{Нп})}$ раз, а при ослаблении на A_p децибел — в $10^{0,05A_p(\text{дБ})}$ раз. Таким образом, напряжение и ток в нагрузочном сопротивлении при включенном четырехполюснике уменьшаются в $10^{0,05 \cdot 26}=10^{1,3}=20$ раз и составляют $U_{2н}=U_0/A_{(\text{рас})}=5/20=0,25 \text{ В}$, а ток $I_{2н}=I_0/A_{(\text{рас})}=10/20=0,5 \text{ мА}$. Мощность, выделяемая в нагрузке, в A_p^2 раз меньше максимальной, получающейся при нулевом ослаблении четырехполюсника: $P_0=E^2/4R_i=10^2/(4 \cdot 25)=1 \text{ Вт}$ при наличии четырехполюсника $P_2=P_0/A_p^2=1/20^2=0,0025 \text{ Вт}=2,5 \text{ мВт}$.

14.13. Рассчитать рабочее ослабление цепи, показанной на рис. 14.4, если $R_i=R_n=R$, а $R_1=2R$.

Указание: разберите задачу 14.12.

Решение. Рассчитаем напряжение U_2 . Как видно из схемы рис. 14.4, $U_2=ER_n/(R_i+R_1+R_n)=ER/(R+2R+R)=E/4$; $A_p=20\lg(E/2U_2)=20\lg(E \cdot 4/2 \cdot E)=20\lg 2=20 \cdot 0,3=6 \text{ дБ}=6 \cdot 0,115=0,69 \text{ Нп}$.

Проведем проверку. Рассчитаем ослабление в неперях по формуле $A_p=\ln(E/2U_2)$ или в децибелах по формуле $A_p=$

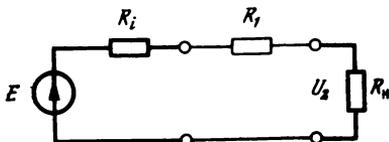


Рис. 14.4

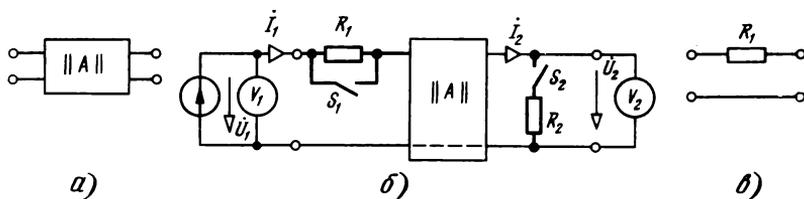


Рис. 14.5

$= 20 \lg(E/2U_2)$, откуда $A_p = \ln 2 = 0,69$ Нп. Результат получился таким же, проверка выполняется, следовательно, задача решена правильно.

14.14. Рассчитать \underline{A} -параметры для активного четырехполюсника, показанного на рис. 14.5, а.

Указание: изучите с. 410—413 в [1].

Решение. Параметры четырехполюсников часто определяют по опытам холостого хода (ХХ) и короткого замыкания (КЗ). Однако производить опыт КЗ не всегда возможно. Например, замыкание выходных зажимов транзистора или операционного усилителя ведет к перегрузкам. В реальных устройствах корпусные точки ряда элементов постоянно припаяны к общему проводу, что не позволяет включить шунтовое сопротивление, с помощью которого измеряется входной ток. Но без знания тока нельзя определять входное сопротивление цепи.

Определять параметры четырехполюсников в подобных случаях удобно с помощью схемы, изображенной на рис. 14.5, б. Если четырехполюсник заведомо чисто резистивный (например, транзисторный усилитель на средних частотах), то фазометр можно не использовать. Желательно контролировать форму выходного напряжения с помощью осциллографа. Входное напряжение, очевидно, может иметь такие значения, при которых форма выходного напряжения повторяет форму входного, т. е. цепь работает в линейном режиме и не создает искажений. Аргумент входного комплексного напряжения примем равным нулю, т. е. $\dot{U}_1 = U_1 e^{j0^\circ} = U_1$. Для экспериментального определения \underline{A} -параметров в схеме рис. 14.5, б следует произвести четыре измерения при разомкнутых и замкнутых ключах S_1 и S_2 . Зная получившиеся при этом коэффициенты передачи, легко рассчитать \underline{A} -параметры цепи.

Как известно, в линейных четырехполюсниках система уравнений в \underline{A} -форме имеет вид

$$\dot{U}_1 = \underline{A}_{11} \dot{U}_2 + \underline{A}_{12} \dot{I}_2; \quad (14.1)$$

$$\dot{I}_1 = \underline{A}_{21} \dot{U}_2 + \underline{A}_{22} \dot{I}_2 \quad (14.2)$$

(положительные направления токов показаны на рис. 14.5, б).

Введем обозначения: при замкнутом ключе S_1 и разомкну-

том ключе $S_2 \dot{U}_2/\dot{U}_1 = K_1$; при замкнутых ключах $\dot{U}_2/\dot{U}_1 = K_3$; при разомкнутых $\dot{U}_2/\dot{U}_1 = K_2$; при разомкнутом ключе S_1 и замкнутом $S_2 \dot{U}_2/\dot{U}_1 = K_4$. При $R_n = \infty I_2 = 0$, тогда из (14.1) $\dot{U}_1 = \underline{A}_{11}\dot{U}_2$, откуда $\underline{A}_{11} = \dot{U}_1/\dot{U}_2 = 1/\underline{K}_1$, а из (14.2) $\underline{A}_{12} = (\dot{U}_1 - \underline{A}_{11}\dot{U}_2)/\dot{I}_2 = (\dot{U}_1 - \underline{A}_{11}\dot{U}_2)/(\dot{U}_2/R_2) = R_2(\dot{U}_1 - \underline{A}_{11}\dot{U}_2)/\dot{U}_2 = R_2(1/\underline{K}_3 - \underline{A}_{11}) = R_2(1/\underline{K}_3 - 1/\underline{K}_1)$.

Для определения параметров \underline{A}_{21} и \underline{A}_{22} представим цепь в виде сложного четырехполюсника, образованного каскадным соединением четырехполюсников $\|R_1\|$ и $\|A\|$. Тогда матрица всей цепи выглядит следующим образом:

$$\|A_{\text{ц}}\| = \|A_{R_1}\| \times \|A\| = \begin{vmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{vmatrix}.$$

Определим матрицу цепи R_1 (рис. 14.5, в). Так как в пассивной симметричной цепи $A_{11} = A_{22} = \sqrt{Z_x/(Z_x - Z_k)} = \sqrt{\infty/(\infty - R_1)} = 1$, $A_{12} = Z_k A_{11} = R_1$, $A_{21} = A_{11}/Z_x = 1/\infty = 0$, матрица

$$\|R_1\| = \begin{vmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

тогда

$$\|A_{\text{ц}}\| = \begin{vmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{vmatrix}.$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} M & N \\ P & S \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (AM+BP) & (AN+BS) \\ (CM+DP) & (CN+DS) \end{vmatrix},$$

то

$$\|A_{\text{ц}}\| = \begin{vmatrix} (A_{11} + R_1 A_{21}) & (A_{12} + R_1 A_{22}) \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{vmatrix}.$$

Коэффициент передачи при включенном R_1 в режиме холостого хода $K_2 = 1/A_{11}^* = 1/(A_{11} + R_1 A_{21})$, откуда $\underline{A}_{21} = (1 - K_2 A_{11})/K_2 R_1 = (1/\underline{R}_1)(1/\underline{K}_2 - \underline{A}_{11}) = (1/R_1)(1/K_2 - 1/K_1)$.

Поскольку $A_{12}^* = A_{12} + R_1 A_{22}$, то $\underline{A}_{22} = (A_{12}^* - A_{12})/R_1$. Но $A_{12} = R_2(1/K_3 - 1/K_1)$, следовательно, $\underline{A}_{12}^* = R_2(1/\underline{K}_4 - 1/\underline{K}_2)$ и тогда $\underline{A}_{22} = (1/R_1)(\underline{A}_{12}^* - \underline{A}_{12}) = (R_2/R_1)(1/\underline{K}_4 - 1/\underline{K}_2 - 1/\underline{K}_3 + 1/\underline{K}_1)$.

Пусть в резистивном активном четырехполюснике $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 0,5$ кОм, $U_1 = 2$ В; при $R_1 = 0$, $R_2 = \infty$ $U_2 = 1$ В; при $R_1 = 0$, $R_2 = 0,5$ кОм $U_2 = 0,8$ В; при $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = \infty$ $U_2 = 0,5$ В; при $R_1 = 1$ кОм, $U_2 = 0,5$ кОм $U_2 = 0,4$ В. В этом случае $K_1 = 1/2 = 0,5$, $K_2 = 0,5/2 = 0,25$, $K_3 = 0,8/2 = 0,4$, $K_4 = 0,4/2 = 0,2$. Тогда $A_{11} = 1/K_1 = 1/0,5 = 2$; $A_{12} = R_2(1/K_3 - 1/K_1) = 500(1/0,4 - 1/0,5) = 500 \times$

$\times (0,25 - 0,20) = 500 \cdot 0,05 = 25 \text{ Ом}; \quad A_{21} = (1/R_1) (1/K_2 - 1/K_1) = (1/10^3) (1/0,25 - 1/0,5) = 10^{-3} (4 - 2) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ См}; \quad A_{22} = (R_2/R_1) (1/K_4 - 1/K_2 - 1/K_3 + 1/K_1) = (0,5/1) (1/0,2 - 1/0,25 - 1/0,4 + 1/0,5) = 0,5 (5 - 4 - 2,5 + 2) = 0,25.$

В данном примере $A_{11} \cdot A_{22} - A_{12} \cdot A_{21} = 2 \cdot 0,25 - 25 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0,5 - 50 \cdot 10^{-3} = 0,45 \neq 1$, следовательно, данный четырехполюсник действительно активный (в пассивных $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$).

Глава 15. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

15.1. Спроектировать фильтр нижних частот с характеристикой Баттерворта, у которого на частоте $f_1 = 3400 \text{ Гц}$ ослабление составляет 1,5 дБ, а на частоте f_s — не менее 25 дБ, если $R_r = R_n = 1 \text{ кОм}$.

Указание: изучите с. 423—425 в [1].

Решение. Для составления схемы фильтра прежде всего следует определить порядок фильтра n , т. е. число индуктивных и емкостных элементов в фильтре. Порядок фильтра Баттерворта можно определить по приближенной форме $n \geq A_s / 20 \lg(f_s / f_{cp}) = A_s / 20 \lg f_s$, где f_{cp} — частота, на которой ослабление составляет 3 дБ. Поскольку в условии данной задачи дается не частота среза f_{cp} , а некоторая f_1 , меньшая, чем частота среза, то для определения значения n можно использовать упрощенное напряжение $n = A_s / 20 \lg(f_s / f_1)$. Такое приближение допустимо, поскольку число индуктивностей и емкостей в фильтре может быть только целым, следовательно, все равно приходится округлять получившееся по расчету число n : $n \geq 25 / 20 \lg(6,8/3,4) = 25 / 20 \lg 2 = 25 / 20 \cdot 0,3 = 4,17$.

Выбираем $n = 5$. Имея порядок фильтра, можно определить частоту среза $f_{cp} = f_1 / \sqrt[2n]{10^{0,1\Delta A} - 1}$. Знаменатель данного выражения

$$\begin{aligned} \sqrt[10]{10^{0,1 \cdot 1,5} - 1} &= \sqrt[10]{10^{0,15} - 1} = \sqrt[10]{1,4125 - 1} = \\ &= 0,4125^{0,1} = 0,915 \end{aligned}$$

(возведение в степень производится с помощью микрокалькулятора), отсюда $f_{cp} = 3400 / 0,915 = 3716 \text{ Гц}$.

Проверим, какое получилось бы значение n , если бы частота среза была известна по условию $n \geq 25 / 20 \lg(6,8/3,716) = 25 / 20 \lg 1,83 = 25 / 20 \cdot 0,262 = 4,76$. Разумеется, и в этом случае было бы выбрано $n = 5$.

Фильтр пятого порядка можно получить из трех индуктивностей и двух емкостей или из двух индуктивностей и трех емкостей. По конструктивным соображениям второй вариант предпочтительнее. Очевидно, что фильтр в этом случае следует собрать по схеме, приведенной на рис. 15.1, а. Из табл. 15.1 в [1] выписываем приведенные значения индуктивностей и емкостей: при $n=5$ $K_{C_1}=0,618$; $K_{L_2}=1,618$; $K_{C_3}=2,0$; $K_{L_4}=1,618$; $K_{C_5}=0,618$ (напомним, что приведенными называются значения индуктивностей и емкостей, которые получились бы, если бы $R_r=R_n=1$ Ом при $\omega_{cp}=1$ 1/с). Рассчитаем коэффициенты преобразования: $L^*=R_n/(2\pi f_{cp})=1000/(6,28\cdot 3,5\cdot 10^3)=45,43$ мГн; $C^*=1/(2\pi f_{cp}R)=1/(6,28\cdot 3,5\cdot 10^3\cdot 10^3)=45,43$ нФ. Тогда $C_1=C_5=K_{C_1}C^*=0,618\cdot 45,43=280$ нФ; $L_2=L_4=K_{L_2}\cdot L^*=1,618\cdot 45,43=73,5$ мГн; $C_3=K_{C_3}\cdot C^*=2\cdot 45,43=90,86$ нФ.

Рабочие ослабления, даваемые данным фильтром на различных частотах, $A_p=10\lg(1+f^{2n})$. При $f=0$ $\hat{f}=0$, $A_p=0$; при $f=3,4$ кГц $\hat{f}=3,4/3,716=0,915$, $A_p=10\lg(1+0,915^{10})=10\lg(1+0,411)=3,716=10\lg 1,411\approx 1,5$ дБ; при $f=6,8$ кГц $A_p=10\lg[1+(6,8/3,716)^{10}]=10\lg(1+1,83^{10})=10\lg 421=26,2$ дБ. Поставленные в условия задачи требования выполняются, следовательно, задача решена правильно.

15.2. Рассчитать ФНЧ с характеристикой Баттерворта, если на частоте $f_1=3400$ Гц ослабление не должно превышать $\Delta A=2$ дБ, а на частотах $f_s>8500$ Гц — быть не менее $A_s=20$ дБ, если $R_r=R_n=600$ Ом. Определить ослабление на частотах f_1 , f_{cp} , f_s , $2f_s$.

Указание: изучите с. 423—425 в [1] и разберите задачу 15.1.

15.3. Рассчитать ФНЧ с характеристикой Баттерворта, если частота среза $f_{cp}=6,5$ МГц, а ослабление на частоте $f=11,5$ МГц должно быть не менее 14 дБ при $R_r=R_n=75$ Ом.

Указание: изучите с. 423—425 в [1] и разберите задачу 15.1.

15.4. Рассчитать ФНЧ с характеристикой Чебышева, если частота среза $f_{cp}=400$ кГц, ослабление в полосе пропускания не должно превышать $\Delta A=0,5$ дБ, а на частоте $f_s=600$ кГц $A_s\geq 40$ дБ при $R_n=R_r=600$ Ом.

Указание: изучите с. 430—433 в [1].

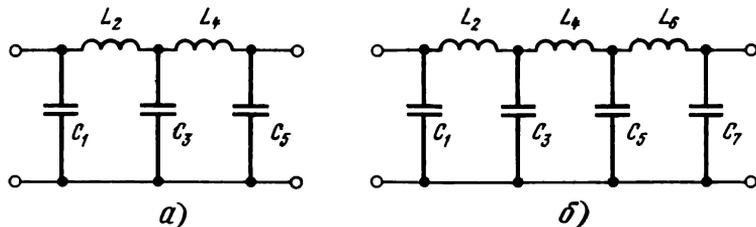


Рис. 15.1

Решение. Рассчитаем порядок фильтра:

$$n \geq \frac{A_S + 6 - 10 \lg(10^{0,1\Delta A} - 1)}{20 \lg(\hat{f} + \sqrt{\hat{f}^2 - 1})} =$$

$$= \frac{40 + 6 - 10 \lg(10^{0,1 \cdot 0,5} - 1)}{20 \lg(600/400 + \sqrt{1,5^2 - 1})} = \frac{46 - 10 \lg(1,12 - 1)}{20 \lg(1,5 + 1,12)} =$$

$$= 55,2/8,37 = 6,6.$$

Выберем $n=7$. Определить порядок Чебышева можно по программе 3.15.1 (см. [2], с. 527)

Программа 3.15.1 для определения порядка фильтров с характеристикой Чебышева

F /-| В/О F ВП

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	F0 15	1 01	— 11	F2 17	1 01	0 00	× 12	П-х1 61	↔ 14	— 11
1	6 06	+ 10	П-х2 62	↑ 0E	F × 22	1 01	— 11	F — 21	+ 10	F2 17
2	2 02	0 00	× 12	÷ 13	С/П 50	F	/-			

Ввод исходных данных: $A_S \rightarrow x - \text{П } 1 \hat{f} \rightarrow x - \text{П } 2$, на клавиатуре набрать значение 0,1 ΔA В/О С/П. Результат расчета высветится на индикаторе.

Контрольный пример. Пусть $A_S=40$ дБ, $\hat{f}=1,5$, $0,1\Delta A=0,05$. На индикаторе должно высветиться 6,595575. Следовательно, фильтр должен быть седьмого порядка. Составим схему фильтра из четырех емкостей и трех индуктивностей (рис. 15.1, б). Из табл. 15.3 на с. 431 в [1] выпишем нормированные коэффициенты $K_{C_1}=K_{C_7}=1,737$; $K_{L_2}=K_{L_6}=1,258$; $K_{C_3}=K_{C_5}=2,638$; $K_{L_4}=1,344$. Рассчитаем коэффициенты преобразования: $L^*=R_H/(2\pi f_{cp})=600/(6,28 \cdot 400 \cdot 10^3)=239$ мкГн; $C^*=1/(2\pi f_{cp} R_H)=1/(6,28 \cdot 400 \cdot 10^3 \cdot 600)=663$ пФ. Индуктивности и емкости фильтра $C_1=C_7=1,737 \cdot 663=1,162$ нФ; $C_3=C_5=2,638 \cdot 663=1,75$ нФ; $L_2=L_6=1,258 \cdot 239=300$ мкГн; $L_4=1,344 \cdot 239=321$ мкГн.

Рассчитаем ослабление на частоте $f_S=600$ кГц. Из табл. 15.2 на с. 430 в [1] выпишем значения квадрата коэффициента сжатия ϵ^2 . При $\Delta A=0,5$ дБ $\epsilon_2=0,122$. Рабочее ослабление в полосе пропускания $A_{p,пр}=10 \lg[1 + \epsilon^2 \cos^2(n \arccos \hat{f})]$ и в полосе задерживания $A_{p,з}=10 \lg[1 + \epsilon^2 \text{ch}^2(n \text{ar ch } \hat{f})]$.

Произведем проверки. Порядок данного фильтра — седьмой, поэтому в полосе прозрачности существует семь частот, на которых ослабление имеет экстремальные значения. На четырех частотах ослабление должно равняться

нулю, а еще на трех — не должно превышать максимально допустимого значения для полосы пропускания $\Delta A = 0,5$ дБ. Экстремальные частоты находят из выражения $f_s = f_{cp}(90/n)(m-1)$, где n — порядок фильтра; m — целые числа, показывающие номер экстремальной частоты. При $f_{cp} = 400$ кГц и $n = 7$ экстремальные значения оказываются на следующих частотах: $f_{m1} = 0$, $f_{m2} = 89$ кГц, $f_{m3} = 174$ кГц, $f_{m4} = 250$ кГц, $f_{m5} = 313$ кГц, $f_{m6} = 360$ кГц, $f_{m7} = 390$ кГц. Если подставить в формулу $A_{p,np} = 10 \lg[1 + \epsilon^2 \cos^2(n \times \text{Arccos } \hat{f})]$ вместо \hat{f} значения f_{m1}/f_{cp} , f_{m3}/f_{cp} , f_{m5}/f_{cp} , f_{m7}/f_{cp} , то оказывается $A_p \approx 0$, а при $\hat{f} = f_{m2}/f_{cp}$, f_{m4}/f_{cp} и f_{m6}/f_{cp} $A_p = 0,49$ дБ, что меньше обусловленных 0,5 дБ. На частоте среза также $A_p = 0,49$ дБ. В полосе задерживания ослабление $A_{p,z} = 10 \lg[1 + \epsilon^2 \text{ch}^2(n \cdot \text{ar ch } \hat{f})]$.

При выполнении расчетов следует иметь в виду, что значения гиперболического арка-косинуса можно рассчитать по формуле $\text{Ar ch } \hat{f} = \ln(\hat{f} + \sqrt{\hat{f}^2 - 1})$, а $\text{ch } \hat{f} = (e^{\hat{f}} + e^{-\hat{f}})/2$.

Характеристику $A_p = f(\hat{f})$ в полосе задерживания легче всего рассчитывать с помощью ПМК по программе 3.15.2 (см. [2], с. 528)

Программа 3.15.2 для определения ослаблений в фильтрах Чебышева при $\hat{f} \geq 1$

F /-/ В/О F ВП

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$\Pi-x1$ 61	$F \times$ 22	1 01	— 11	$F -$ 21	$\Pi-x1$ 61	+	$F3$ 10	$\Pi-x2$ 18	\times 12
1	$F1$ 16	\uparrow 0E	$F \div$ 23	+	2 02	\div 13	$F \times$ 22	$x-\Pi4$ 44	$\Pi-x3$ 63	$F0$ 15
2	1 01	— 11	$\Pi-x4$ 64	\times 12	1 01	+	$F2$ 17	1 01	0 00	\times 12
3	C/Π 50	F	$1-1$							

Ввод исходных данных: $\hat{f} \rightarrow x - \Pi 1$ $n \rightarrow x - \Pi 2$ $0,1 \Delta A \rightarrow x - \Pi 3$ В/О С/П. Результат расчета высвечивается на индикаторе.

Контрольный пример. Пусть $\hat{f} = 1,5$; $n = 7$; $0,1 \Delta A = 0,05$, при этом должно оказаться ослабление 43,360405 дБ. Результаты расчетов сведены в табл. 15.1.

15.5. Решить задачу 15.4, если $\Delta A = 1$ дБ, а $A_s = 26$ дБ.

Указание: разберите задачу 15.4.

15.6. Получить выражение для комплексной передаточной функции фильтра АРС, ослабление в полосе пропускания кото-

Таблица 15.1

f	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
f , кГц	400	440	480	520	560	600	640	680	720	760	800
A , дБ	0,5	12,1	22,7	30,8	37,6	43,4	48,5	53,1	57,4	61,3	64,9

рого не превышает 1 дБ, а на частоте $f_s=60$ кГц обеспечивает ослабление не менее 26 дБ при частоте среза $f_{ср}=40$ кГц.

Указание: изучите с. 442—449 в [1].

Решение. Поскольку в полосе пропускания задано ослабление менее 3 дБ, фильтр должен иметь характеристику Чебышева. По программе 15.1 или по номограмме на рис. 15.38 в [1] определяем порядок фильтра. Получается $n < 5$. Выбираем $n=5$. Следовательно, обеспечить заданную характеристику ослабления можно с помощью фильтра пятого порядка. В активных фильтрах используются звенья первого или второго порядка, причем звеньев первого порядка может быть не более одного. Соответственно проектируемый АРС-фильтр состоит из одного звена первого порядка и двух звеньев второго порядка. При этом комплексная передаточная функция

$$H(j\omega) = \frac{1}{(1 + ja_1\hat{f})[(1 - b_2\hat{f}^2) + ja_2\hat{f}][(1 - b_3\hat{f}^2) + ja_3\hat{f}]}$$

(см. формулу (15.30) на с. 446 в [1]), где a_i и b_i — коэффициенты, которые для фильтров с характеристикой Чебышева берутся из табл. 15.5 на с. 447 в [1]. Выпишем значения a и b фильтра пятого порядка с заданной неравномерностью 1,0 дБ: $a_1=3,571$, $b_1=0$, $a_2=1,128$, $b_2=2,49$, $a_3=0,187$, $b_3=1,081$. Тогда передаточная функция $H(j\omega) = 1/(1 + j3,571\hat{f})(1 - 2,49\hat{f}^2 + j1,128\hat{f})(1 - 1,081\hat{f}^2 + j0,187\hat{f})$. Таким образом, электрическая цепь, передаточная функция которой описывается данным выражением, обеспечивает ослабления, заданные по условию.

Произведем проверки. Ослабления, обеспечиваемые звеном первого порядка, $A_{п1} = 20 \lg \sqrt{1 + (a_1\hat{f})^2} = 20 \lg \sqrt{1 + (3,571\hat{f})^2}$. Ослабление, даваемое вторым звеном (т. е. первым звеном второго порядка),

$$\begin{aligned} A_{п2} &= 20 \lg \sqrt{(1 - b_2\hat{f}^2)^2 + (a_2\hat{f})^2} = \\ &= 20 \lg \sqrt{1 + (a_2^2 - 2b_2)\hat{f}^2 + b_2^2\hat{f}^4} = \\ &= 20 \lg \sqrt{1 + (1,128^2 - 2 \cdot 2,29)\hat{f}^2 + 2,49^2\hat{f}^4} = \\ &= 20 \lg \sqrt{1 - 3,7076\hat{f}^2 + 6,2\hat{f}^4}. \end{aligned}$$

Аналогично ослабление, даваемое третьим звеном (т. е. вторым звеном второго порядка),

Таблица 12.3

f , кГц	60	70	80	100	
\hat{f}	1,25	1,5	1,75	2,0	2,5
A_{p1} , дБ	13,0	14,4	15,9	17,0	19,0
A_{p2} , дБ	10,2	13,8	16,8	19,3	23,5
A_{p3} , дБ	-6,7	1,6	5,9	9,6	14,5
A_p , дБ	16,5	29,8	38,6	45,9	57,0

$$\begin{aligned}
 A_{p3} &= 20 \lg \sqrt{1 + (a_3^2 - 2b_3) \hat{f}^2 + b_3^2 \hat{f}^4} = \\
 &= 20 \lg \sqrt{1 + (0,187^2 - 2 \cdot 1,081) \hat{f}^2 + 1,081^2 \hat{f}^4} = \\
 &= 20 \lg \sqrt{1 - 2,127 \hat{f}^2 + 1,037 \hat{f}^4}.
 \end{aligned}$$

Результаты расчетов сведены в табл. 15.2. Из приведенных расчетов видно, что поставленные в условии требования выполняются, следовательно, задача решена правильно.

15.7. Получите выражение комплексной передаточной функции АРС-фильтра нижних частот с допустимой неравномерностью в полосе пропускания $\Delta A = 2$ дБ, если $f_{cp} = 10$ кГц, а ослабление на частоте $f_s = 20$ кГц должно быть не менее 32 дБ.

Указание: изучите с. 442—449 в [1] и разберите задачу 15.6.

15.8. Постройте характеристику $A_p = f(\hat{f})$ фильтра, рассчитанного в задаче 15.7, в диапазоне $\hat{f} = 1 \dots 2,5$.

Указание: разберите задачу 15.5.

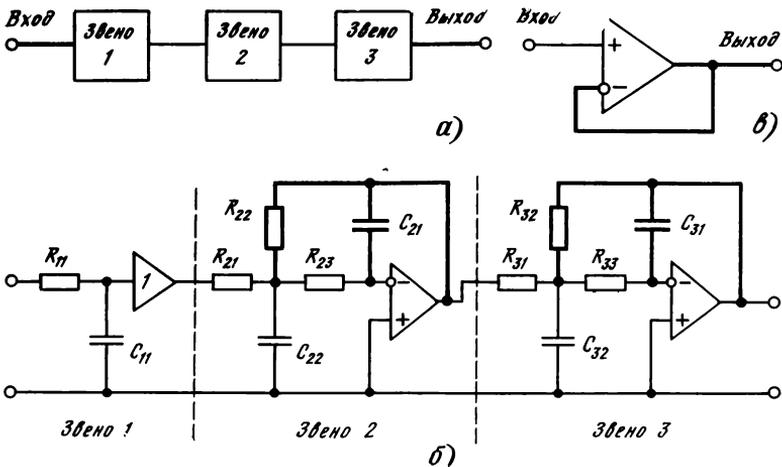


Рис. 15.2

15.9. Рассчитайте элементы АРС-фильтра по условию задачи 15.6.

Указание: изучите с. 450—452 в [1].

Решение. Как было показано в задаче 15.6, для обеспечения фильтрации в диапазоне 0...40 кГц с ослаблением не более 1 дБ, а на частоте $f_s=60$ кГц не менее 26 дБ необходимо иметь фильтр пятого порядка, передаточная функция которого $H(j\omega) = 1/(1+j3,571f)(1-2,49f^2+j1,128f)[(1-1,081f)^2+j0,187f]$.

Там же было показано, что конструктивно фильтр должен состоять из трех звеньев — одного первого порядка и двух второго порядка (рис. 15.2, а). Электрическая схема фильтра показана на рис. 15.2, б. Первое звено представляет собой пассивный RC-фильтр первого порядка, разделенный со вторым звеном повторителем, собранным на операционном усилителе (см. с. 442 в [1] и с. 192—196 в [11]). Напомним, что повторителем называется цепь (а фактически операционный усилитель) с весьма большим входным, малым выходным сопротивлениями и коэффициентом передачи $K=1$ в широком диапазоне частот. Повторители используются для развязки между каскадами, т. е. исключения влияния входного сопротивления последующего каскада на выходное сопротивление предыдущего. Схема повторителя показана на рис. 15.2, в. Второе и третье звенья представляют собой звенья второго порядка, схема которых показана на рис. 15.37, а в [1], а расчет элементов — на с. 450—452 в [1]. Сопротивлением R_{11} задаются, а емкость C_{11} рассчитывают из выражения $\tau_1=R_{11}C_{11}=1/\omega_{cp}$, откуда $C_{11}=1/2\pi f_{cp}R_{11}$.

Поскольку R_{11} определяет входное сопротивление для всего фильтра, его целесообразно иметь достаточно большим, например десятки килоом. Выберем $R_{11}=50$ кОм, тогда $C_{11}=1/6,28 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^3=800$ пФ. Разумеется, сопротивление R_{11} могло быть и иным, но его порядок должен соответствовать указанному. В звеньях второго порядка следует определять пять элементов: сопротивления R_{21}, R_{22}, R_{23} (или R_{31}, R_{32}, R_{33}) и емкости C_{21}, C_{22} (или C_{31}, C_{32}), причем, как и в пассивных фильтрах, расчет производят сначала для приведенных значений $R_1, \hat{R}_2, \hat{R}_3, \hat{C}_1, \hat{C}_2$, т. е. таких значений, которые оказались бы при $\omega_{cp}=1$ 1/с. Как известно, приведенные значения различных физических величин являются значениями безразмерными. Коэффициенты a_i и b_i , которые берутся из таблиц, также безразмерные, причем по физическому смыслу коэффициент b — величина, обратная значению приведенной резонансной частоты (заметьте, что, поскольку в фильтрах первого порядка резонансные явления отсутствуют, в этих звеньях $b=0$, а $a=\omega_0/Q$).

Таким образом, коэффициенты a и b характеризуют резонансную частоту и добротность цепи. Очевидно, что чем меньше при прочих равных условиях коэффициент a , тем больше

добротность цепи. Для расчета элементов цепи коэффициенты a и b удобнее, чем Q и ω_0 , поэтому ими и пользуются. Чтобы все элементы цепи второго порядка оказались значениями положительными, должно выполняться условие $\hat{C}_1 \leq (a/R_2)$. Из выражений (15.36) — (15.38) в [1] следует, что $\hat{R}_3 = [\hat{R}_1(a - \hat{R}_2\hat{C}_1)]/C_1 \times [\hat{R}_1 + \hat{R}_2]$, а $\hat{C}_2 = b/(\hat{R}_2\hat{R}_3\hat{C}_1)$. Таким образом, значениями трех элементов в звене фильтра второго порядка следует задаваться, а значения двух остальных получать на основании приведенных соотношений. (На практике три первые величины также имеют определенные ограничения или определяются на основании некоторых взаимозависимостей, но эти соотношения вытекают из конструктивных соображений, поэтому в данных задачах не учитываются). Поскольку тремя величинами задаются произвольно, первый вариант решения в ряде случаев может оказаться не вполне удачным, но, произведя по нему расчет остальных величин, можно выполнить коррекцию исходных данных и улучшить окончательные результаты. Из табл. 15.5 на с. 447 в [1] выпишем коэффициенты $a_2 = 1,128$; $b_2 = 2,49$; $a_3 = 0,187$; $b_3 = 1,081$. Рассчитаем значения элементов второго звена. Зададимся $\hat{R}_1 = 1$, $\hat{R}_2 = 1$, $C_1 = 1$. Так как $a_2 = 1,128$, то условие $\hat{C}_1 \leq a/\hat{R}_2 = 1,128/1 = 1,128$ при этом выполняется. Тогда

$$\hat{R}_3 = \frac{\hat{R}_1(a_2 - R_2\hat{C}_1)}{\hat{C}_1(\hat{R}_1 + \hat{R}_2)} = \frac{1(1,128 - 1 \cdot 1)}{1(1 + 1)} = 0,064,$$

$$\hat{C}_2 = b_2/(\hat{R}_2\hat{R}_3\hat{C}_1) = 2,49(1 \cdot 0,064 \cdot 1) = 38,9.$$

Произведем проверку. Произведение $\hat{R}_2\hat{R}_3\hat{C}_1(1/\hat{R}_1 + 1/\hat{R}_2 + 1/\hat{R}_3)$ должно равняться коэффициенту a , а $\hat{R}_2\hat{R}_3\hat{C}_1\hat{C}_2$ — коэффициенту b . Подставим числовые значения $1 \cdot 0,064 \cdot 1(1/1 + 1/1 + 1/0,064) = 0,064 \cdot 17,625 = 1,128 = a_2 \cdot 1 \cdot 0,064 \cdot 1 \cdot 38,9 = 2,49 = b_2$. Проверки выполняются. Физические сопротивления в фильтре определяют из выражения $R = \hat{R}f_{cp}$, откуда $R_{21} = \hat{R}_1 f_{cp} = 1 \cdot 40 \cdot 10^3 = 40$ кОм; $R_{22} = \hat{R}_2 f_{cp} = 1 \cdot 40 \cdot 10^3 = 40$ кОм; $R_{23} = \hat{R}_3 f_{cp} = 0,064 \cdot 40 \cdot 10^3 = 2,56$ кОм, а $C = \hat{C}/(2\pi f_{cp} R_1)$, т. е. $C_{21} = 1/(6,28 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 10^3) = 100$ пф; $C_{22} = 38,9/(6,28 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 10^3) = 3890$ пф.

Проанализируем полученные результаты. Все резистивные сопротивления оказались вполне приемлемыми, а значения емкостей отличаются друг от друга почти в 40 раз, что способствует уменьшению устойчивости работы активной цепи. Постараемся улучшить результаты. Самым слабым местом в данном варианте является малое значение емкости \hat{C}_{21} . Так как \hat{C}_{21} должно быть менее a_2/\hat{R}_{22} , то для увеличения \hat{C}_{21} необходимо уменьшить \hat{R}_{22} . Выберем $\hat{R}_{21} = 1$, $\hat{R}_{22} = 0,2$, $\hat{C}_{21} = 5$. В этом случае

$\hat{R}_{23}=2,133 \cdot 10^{-2}$, $\hat{C}_{22}=117$, откуда $R_{21}=40$ кОм, $R_{22}=8$ кОм, $R_{23}=0,853$ кОм, $C_{21}=0,5$ нФ, $C_{22}=11,73$ нФ. При $\hat{R}_{21}=1$, $\hat{R}_{22}=0,1$, $\hat{C}_{21}=10$ получается $\hat{R}_{23}=1,1637 \cdot 10^{-2}$, $\hat{C}_{22}=213$ или $R_{21}=40$ кОм, $R_{22}=4$ кОм, $R_{23}=0,465$ кОм, $\hat{C}_{21}=1$ нФ, $C_{22}=0,213$ мкФ. На последнем варианте можно окончательно остановиться. Аналогичным образом рассчитывают элементы последнего звена. Поскольку $a_3 < a_2$ ($0,187 < 1,128$), добротность третьего звена больше добротности второго звена, что делает выбор элементов более критичным. Действительно, так как $a_3=0,187$, то для получения $\hat{C}_{31} \gg 1$ \hat{R}_{32} приходится выбирать малым. Выберем $\hat{R}_{32}=0,1$, тогда \hat{C}_{31} может иметь значение $0,187/0,1=1,87$, но в этом случае сопротивление \hat{R}_{33} оказывается равным нулю, чего быть не может. Следовательно, сопротивление \hat{R}_{32} приходится брать еще меньше, например $0,05$. Получается $\hat{R}_{33}=4,76 \cdot 10^{-2}$, $\hat{C}_{32}=15,2$, т. е. $R_{31}=40$ кОм, $R_{32}=2$ кОм, $R_{33}=1,9$ кОм, $C_{31}=1,87$ нФ, $C_{32}=15,2$ нФ. Все элементы фильтра рассчитаны.

15.10. Рассчитать элементы АРС-фильтра Баттерворта и ослабления в диапазоне $\hat{f}_{\text{ср}} \dots 2\hat{f}_{\text{ср}}$, если передаточная характеристика этого фильтра

$$H(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\hat{f}) [(1 - \hat{f}^2) + j1,618\hat{f}] [(1 - \hat{f}^2) + j0,618]}$$

а частота среза $\hat{f}_{\text{ср}}=10$ кГц.

Указание: разберите задачу 15.9.

15.11. Рассчитайте элементы фильтра Чебышева и ослабления в диапазоне от $\hat{f}_{\text{ср}}=25$ кГц до $\hat{f}=50$ кГц, если передаточная характеристика фильтра

$$H(j\omega) = \frac{1}{(1 + j5,633) (1 - 2,653\hat{f}^2 + j0,762\hat{f}) (1 - 1,069\hat{f}^2 + j0,117\hat{f})}$$

Указание: разберите задачу 15.9.

15.12. Рассчитать и сравнить между собой фазочастотные характеристики активных ФНЧ пятого порядка Чебышева с ослаблением в полосе пропускания до 3 дБ и фильтра Бесселя того же порядка.

Указание. Изучите сначала с. 448, 449 в [1].

Решение. Передаточная характеристика АРС-фильтра Бесселя пятого порядка

$$H(j\omega) = \frac{1}{(1 + j0,666\hat{f}) [(1 - 0,413\hat{f}^2) + j1,14\hat{f}] [(1 - 0,325\hat{f}^2) + j0,622\hat{f}]}$$

(см. табл. 15.4 на с. 446 в [1]). Очевидно, что данный фильтр состоит из одного звена первого и двух звеньев второго порядков. Рассчитаем фазочастотную характеристику каждого звена и сложим аргументы фазных углов. Результаты расчетов

Таблица 15.3

\hat{f}	B_1		B_2		B_3		ΣB	
	Бес	Чеб	Бес	Чеб	Бес	Чеб	Бес	Чеб
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,25	9,5	54,6	16,3	12,9	9	1,7	34,8	69,2
0,5	18,4	70,4	32,5	48,5	18,7	4,6	69,6	123
0,75	26,5	76,7	48,0	124	29,7	12,4	104	213
1,0	33,7	79,9	62,7	155	42,7	120	138	355
1,25	39,8	81,8	76,0	163	57,8	167	173,6	412
1,5	45	83,2	88,4	167	79,0	173	212	423
1,75	49,4	84,2	97,6	169	89,9	175	237	428
2,0	53,1	85,0	144	171	156	176	353	432

сведены в табл. 15.3. Для первого звена $B_{1(\text{Бес})} = \text{arctg } 0,666 = \hat{f}$, для второго $B_{2(\text{Бес})} = \text{arctg} \left[\frac{1,14\hat{f}}{1-0,413\hat{f}^2} \right]$, для третьего $B_{3(\text{Бес})} = \text{arctg} \left[\frac{0,622\hat{f}^2}{1-0,325\hat{f}^2} \right]$. Аналогично фазочастотные характеристики звеньев фильтра Чебышева определяются из выражений: $B_{1(\text{Чеб})} = \text{arctg } 0,666\hat{f}$; $B_{2(\text{Чеб})} = \text{arctg} \left[\frac{0,762\hat{f}}{1-2,653\hat{f}^2} \right]$; $B_{3(\text{Чеб})} = \text{arctg} \left[\frac{0,117\hat{f}}{1-1,069\hat{f}^2} \right]$. Кривые $B = f(\hat{f})$ для данных фильтров показаны на рис. 15.3.

15.13. Рассчитать и построить фазочастотные характеристики активных фильтров нижних частот третьего порядка с характеристикой Баттерворта и характеристикой Чебышева при ослаблении в полосе пропускания не более 3 дБ.

Указание: изучите с. 444—449 в [1] и разберите задачу 15.12.

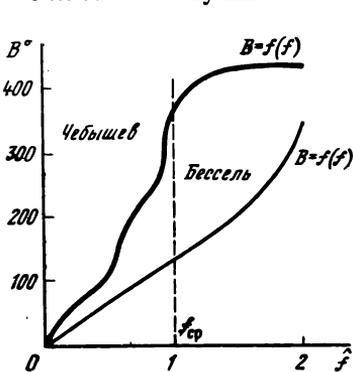


Рис. 15.3

15.14. Варианты индивидуальных заданий. Спроектировать и рассчитать все элементы пассивного LC-фильтра, исходные данные которого приведены в табл. 15.4. Запись «Бат» означает, что фильтр должен иметь характеристику Баттерворта, «Ч-3» — характеристику Чебышева с максимально допустимым ослаблением в полосе пропускания не свыше 3 дБ, «Ч-2» — с максимальным ослаблением 2 дБ и т. д. Ослабление на октаву показывает в ФНЧ ослабление на

Таблица 15.4

Номер вари- анта	Тип филь- тра	Харак- терис- тика филь- тра	Ослаб- ление на ок- таву, дБ	$f_{\text{ср}},$ кГц	$R_{\Gamma} =$ $=R_{\text{н}},$ Ом	Номер вари- анта	Тип филь- тра	Харак- терис- тика филь- тра	Ослаб- ление на ок- таву, дБ	$f_{\text{ср}},$ кГц	$R_{\Gamma} =$ $=R_{\text{н}},$ Ом
01	НЧ	Бат	37	100	400	51	НЧ	Бат	37	100	850
02	ВЧ	Ч-0,5	40	200	450	52	ВЧ	Ч-0,5	34	200	800
03	НЧ	Ч-1	35	300	500	53	НЧ	Ч-1	41	300	750
04	ВЧ	Ч-2	38	400	550	54	ВЧ	Ч-2	46	400	700
05	НЧ	Ч-3	40	500	600	55	НЧ	Ч-3	50	500	650
06	ВЧ	Бат	38	100	650	56	ВЧ	Бат	38	100	600
07	НЧ	Ч-0,5	39	200	700	57	НЧ	Ч-0,5	35	200	550
08	ВЧ	Ч-1	36	300	750	58	ВЧ	Ч-1	40	300	500
09	НЧ	Ч-2	39	400	800	59	НЧ	Ч-2	45	400	450
10	ВЧ	Ч-3	41	500	850	60	ВЧ	Ч-3	49	500	400
11	НЧ	Бат	39	100	850	61	НЧ	Бат	39	100	400
12	ВЧ	Ч-0,5	38	200	800	62	ВЧ	Ч-0,5	36	200	450
13	НЧ	Ч-1	37	300	750	63	НЧ	Ч-1	39	300	500
14	ВЧ	Ч-2	40	400	700	64	ВЧ	Ч-2	44	400	550
15	НЧ	Ч-3	42	500	650	65	НЧ	Ч-3	48	500	600
16	ВЧ	Бат	40	100	600	66	ВЧ	Бат	40	100	650
17	НЧ	Ч-0,5	37	200	550	67	НЧ	Ч-0,5	37	200	700
18	ВЧ	Ч-1	38	300	500	68	ВЧ	Ч-1	38	300	750
19	НЧ	Ч-2	41	400	450	69	НЧ	Ч-2	43	400	800
20	ВЧ	Ч-3	43	500	400	70	ВЧ	Ч-3	47	500	850
21	НЧ	Бат	41	100	400	71	НЧ	Бат	41	100	850
22	ВЧ	Ч-0,5	36	200	450	72	ВЧ	Ч-0,5	38	200	800
23	НЧ	Ч-1	39	300	500	73	НЧ	Ч-1	37	300	750
24	ВЧ	Ч-2	42	400	550	74	ВЧ	Ч-2	42	400	700
25	НЧ	Ч-3	44	500	600	75	НЧ	Ч-3	46	500	650
26	ВЧ	Бат	37	100	650	76	ВЧ	Бат	37	100	600
27	НЧ	Ч-0,5	35	200	700	77	НЧ	Ч-0,5	39	200	550
28	ВЧ	Ч-1	40	300	750	78	ВЧ	Ч-1	36	300	500
29	НЧ	Ч-2	43	400	800	79	НЧ	Ч-2	41	400	450
30	ВЧ	Ч-3	45	500	850	80	ВЧ	Ч-3	45	500	400
31	НЧ	Бат	38	100	850	81	НЧ	Бат	38	100	400
32	ВЧ	Ч-0,5	34	200	800	82	ВЧ	Ч-0,5	40	200	450
33	НЧ	Ч-1	41	300	750	83	НЧ	Ч-1	35	300	500
34	ВЧ	Ч-2	44	400	700	84	ВЧ	Ч-2	40	400	550
35	НЧ	Ч-3	46	500	650	85	НЧ	Ч-3	44	500	600
36	ВЧ	Бат	39	100	600	86	ВЧ	Бат	39	100	650
37	НЧ	Ч-0,5	33	200	550	87	НЧ	Ч-0,5	34	200	700
38	ВЧ	Ч-1	42	300	500	88	ВЧ	Ч-1	36	300	750
39	НЧ	Ч-2	45	400	450	89	НЧ	Ч-2	39	400	800
40	ВЧ	Ч-3	47	500	400	90	ВЧ	Ч-3	43	500	850
41	НЧ	Бат	40	100	400	91	НЧ	Бат	40	100	850
42	ВЧ	Ч-0,5	32	200	450	92	ВЧ	Ч-0,5	36	200	800
43	НЧ	Ч-1	43	300	500	93	НЧ	Ч-1	37	300	750
44	ВЧ	Ч-2	46	400	550	94	ВЧ	Ч-2	38	400	700
45	НЧ	Ч-3	48	500	600	95	НЧ	Ч-3	42	500	650
46	ВЧ	Бат	41	100	650	96	ВЧ	Бат	41	100	600
47	НЧ	Ч-0,5	33	200	700	97	НЧ	Ч-0,5	38	200	550
48	ВЧ	Ч-1	42	300	750	98	ВЧ	Ч-1	38	300	500
49	НЧ	Ч-2	47	400	800	99	НЧ	Ч-2	37	400	450
50	ВЧ	Ч-3	49	500	850	100	ВЧ	Ч-3	41	500	400

Таблица 15.5

Номер варианта	Характеристика фильтра	Ослабле- ние на октаву, дБ	$f_{\text{ср}}$, кГц	Номер варианта	Характеристика фильтра	Ослабле- ние на октаву, дБ	$f_{\text{ср}}$, кГц
01	Ч-3	26	50	51	Ч-3	22	50
02	Ч-2	15	40	52	Ч-2	25	40
03	Ч-1	13	30	53	Ч-1	17	30
04	Ч-0,5	18	20	54	Ч-0,5	12	20
05	Бат	26	10	55	Бат	28	10
06	Ч-3	25	20	56	Ч-3	23	20
07	Ч-2	16	30	57	Ч-2	15	30
08	Ч-1	14	40	58	Ч-1	16	40
09	Ч-0,5	17	50	59	Ч-0,5	13	50
10	Бат	27	60	60	Бат	27	60
11	Ч-3	24	50	61	Ч-3	24	50
12	Ч-2	17	40	62	Ч-2	16	40
13	Ч-1	15	30	63	Ч-1	15	30
14	Ч-0,5	16	20	64	Ч-0,5	14	20
15	Бат	28	10	65	Бат	26	10
16	Ч-3	23	20	66	Ч-3	25	20
17	Ч-2	18	30	67	Ч-2	17	30
18	Ч-1	16	40	68	Ч-1	14	40
19	Ч-0,5	15	50	69	Ч-0,5	15	50
20	Бат	29	60	70	Бат	27	60
21	Ч-3	22	50	71	Ч-3	24	50
22	Ч-2	19	40	72	Ч-2	18	40
23	Ч-1	17	30	73	Ч-1	15	30
24	Ч-0,5	14	20	74	Ч-0,5	16	20
25	Бат	28	10	75	Бат	28	10
26	Ч-3	21	20	76	Ч-3	23	20
27	Ч-2	20	30	77	Ч-2	19	30
28	Ч-1	18	40	78	Ч-1	16	40
29	Ч-0,5	13	50	79	Ч-0,5	17	50
30	Бат	27	60	80	Бат	29	60
31	Ч-3	20	50	81	Ч-3	22	50
32	Ч-2	21	40	82	Ч-2	20	40
33	Ч-1	19	30	83	Ч-1	17	30
34	Ч-0,5	12	20	84	Ч-0,5	10	20
35	Бат	26	10	85	Бат	28	10
36	Ч-3	19	20	86	Ч-3	21	20
37	Ч-2	22	30	87	Ч-2	21	30
38	Ч-1	20	40	88	Ч-1	18	40
39	Ч-0,5	11	50	89	Ч-0,5	11	50
40	Бат	27	60	90	Бат	27	60
41	Ч-3	20	50	91	Ч-3	20	50
42	Ч-2	23	40	92	Ч-2	22	40
43	Ч-1	19	30	93	Ч-1	19	30
44	Ч-0,5	10	20	94	Ч-0,5	12	20
45	Бат	28	10	95	Бат	26	10
46	Ч-3	21	20	96	Ч-3	19	20
47	Ч-2	24	30	97	Ч-2	23	30
48	Ч-1	18	40	98	Ч-1	20	40
49	Ч-0,5	11	50	99	Ч-0,5	13	50
50	Бат	29	60	100	Бат	27	60

частоте $2f_{\text{ср}}$, а в ФВЧ — на частоте $0,5f_{\text{ср}}$.

Указание: изучите с. 423—426, 430—433 в [1] и разберите задачи 15.1, 15.4.

15.15. Составить схему и рассчитать элементы активного фильтра нижних частот по исходным данным, представленным в табл. 15.5.

Указание: изучите с. 440—448, 451, 452 в [1] и разберите задачи 15.6, 15.9, 15.12.

15.16. Рассчитать фазочастотные характеристики фильтров, рассчитанных в задаче 15.15.

Указание: изучите с. 448, 449 в [1] и разберите задачу 15.12.

Приложение 1.

РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КОМПЛЕКСНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ ВДОЛЬ ДЛИННОЙ ЛИНИИ

В схеме, показанной на рис. П.1.1, дано: волновое сопротивление линии $\bar{Z}_в$, сопротивление нагрузки $\bar{Z}_н$, длина линии l , напряжение на нагрузке \hat{U}_2 , постоянная ослабления линии α , фазовая постоянная β , причем α должна выражаться в 1/м (точнее, Нп/м, но непер — величина безразмерная, поэтому размерность оказывается 1/м). В линиях без потерь $\alpha=0$. Аналогично фазовая постоянная β измеряется в 1/м, хотя физически — это радиан/м (радиан — величина также безразмерная). Сопротивление нагрузки $\bar{Z}_н$ и волновое сопротивление $\bar{Z}_в$ должны выражаться в одинаковых единицах (в омах или килоомах), в общем случае это величины комплексные. Единицы измерения длины линии l должны соответствовать единицам измерения α и β (чаще всего метры). Для работы с ПМК следует прежде всего рассчитать комплексный коэффициент отражения по формуле $K_{\text{отр}} = (\bar{Z}_н - \bar{Z}_в) / (\bar{Z}_н + \bar{Z}_в) = K'_{\text{отр}} + jK''_{\text{отр}}$. Расчет напряжений и токов вдоль линии удобно производить с помощью программы З.П.1.

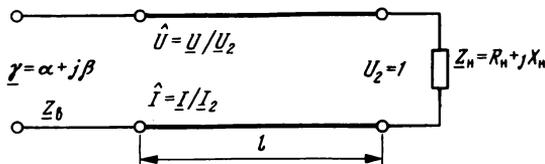


Рис. П.1.1

Программа 3. П. 1 для расчета распределения комплексных напряжений и токов в длинной линии

F |—| В/О F ВП

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	x-ΠO 40	Π-xB 6L	X 12	x-ΠD 4Г	F8 1Г	x-ΠC 4C	Π-xD 6Г	F7 1C	x-ΠD 4Г	Π-xA 6-
1	Π-xO 60	X 12	F1 16	x-ΠO 40	Π-x9 69	← 14	÷ 13	↑ 0E	Π-xD 6Г	↔ 14
2	Π-xC 6C	X 12	x-Π7 47	FA 25	X 12	Π-x8 68	Π-xO 60	÷ 13	↑ 0E	Π-xC 6C
3	X 12	↔ 14	Π-xD 6Г	X 12	Π-x7 67	- 11	x-Π7 47	FA 25	+ 10	Π-xO 60
4	Π-xC 6C	X 12	+ 10	x-Π6 46	Π-xO 60	Π-xD 6Г	X 12	Π-x7 67	- 11	x-Π7 47
5	ΠΠ 53	77 77	Π-xO 60	C/Π 50	Π-xD 6Г	F+ 20	÷ 13	1 01	8 08	0 00
6	X 12	C/Π 50	BΠ 51	00 00	KO 54	KO 54	KO 54	KO 54	KO 54	KO 54
7	KO 54	Π-x6 66	↑ 0E	F X 22						
8	Π-x7 67	F X 22	+ 10	F- 21	x-ΠO 40	÷ 13	F5 1-	x-ΠD 4Г	Π-x7 67	F x < 0 5C
9	94 94	Π-xD 6Г	— 0L	Π-xD 6Г	В/О 52	F	—			

Ввод исходных данных: переключатель углов установить в положение «Р». В память А занести значение α (α x—Π.), в память В — значение β (в радианах на метр) (β x—ΠВ), в память 8 — вещественную часть коэффициента отражения ($K'_{отр}$ x—Π 8), в память 9 — мнимую часть коэффициента отражения ($K''_{отр}$ x—Π 9), после чего нажать клавишу В/О. Ввод постоянных параметров, не зависящих от длины линии, закончен. Чтобы определить приведенное комплексное напряжение на расстоянии l от нагрузки, следует на клавиатуре набрать длину линии и нажать на клавишу С/Π. После окончания счета (примерно через 15 с) на экране высвечивается модуль приведенного напряжения в точке линии, находящейся на расстоянии l от нагрузки. (Напомним, что приведенным называется значение напряжения, которое оказалось бы в данной точке, если бы напряжение на нагрузке U_2 равнялось 1 В). Если U_2 отлично от единичного, то U_l равно модулю напряжения в данной точке от единичного напряжения (т. е. числу, считываемому с калькулятора), умноженному на модуль напряжения на нагрузке U_2 . Затем снова следует нажать клавишу С/Π, на экране появляется фазный

угол, причем в градусах, а не в радианах (несмотря на то, что переключатель углов установлен в положение «Р»).

Чтобы получить модуль и аргумент напряжения при новой длине линии, следует нажать клавишу В/О, набрать на клавиатуре новое значение длины линии, нажать С/П, списать с экрана модуль напряжения в данной точке, нажать С/П, списать аргумент, после чего следует нажать клавишу В/О и вводить следующую длину линии и т. д.

Контрольный пример. Линия без потерь ($\alpha=0$), $\beta=1$ рад/м, $Z_{\text{н}}=200+j100$ Ом, $Z_{\text{в}}=400$ Ом. Рассчитать комплексные напряжения в линии.

Решение. Рассчитаем комплексный коэффициент отражения:

$$\begin{aligned} \underline{K}_{\text{отр}} &= \frac{\underline{Z}_{\text{н}} - \underline{Z}_{\text{в}}}{\underline{Z}_{\text{н}} + \underline{Z}_{\text{в}}} = \frac{200 + j100 - 400}{200 + j100 + 400} = \frac{-200 + j100}{600 + j100} = \\ &= \frac{224e^{j153,43^\circ}}{608e^{j9,96^\circ}} = 0,365e^{j143,9^\circ} = -0,2949 + j0,215. \end{aligned}$$

Введем исходные данные в калькулятор (переключатель углов — в положение «Р»):

0 x—П · 1 x—П /—/ 0 · 2 9 4 9 /—/ x—П 8 0
· 2 1 5 x—П 9 В/О

Определим \dot{U}_2 при $l=0,5; 1; 3; 6$ м. Для этого наберем на клавиатуре 0 · 5 С/П. На экране должно оказаться 1,0845982, нажать С/П, 48,275064°, нажать В/О 1 С/П, 1,3302752, С/П, 65,01497°. Далее аналогично В/О 3 С/П, 0,66838157, С/П, 177,41782°, В/О 6 С/П, 0,63620719, С/П, 14,136104°. Если контрольный пример выполняется, то можно вводить свои исходные данные и производить вычисления. Если аргумент напряжения на нагрузке отличен от нуля, то для определения аргумента в данной точке линии к значению угла, считываемого с калькулятора, следует прибавить значение аргумента напряжения на нагрузке.

Например, $\dot{U}_2 = 16,7e^{j31,8^\circ}$ В. Определим \dot{U} на расстоянии 0,5 м от нагрузки.

Очевидно, $\dot{U}_{(\text{при } l=0,5 \text{ м})} = 1,0845982 \cdot 16,7e^{j(48,275^\circ + 31,8^\circ)} = 18,112789e^{j80,075^\circ}$.

Часто бывает необходимо связать геометрическую длину линии с длиной волны. Из выражения $\lambda = 2\pi/\beta$ можно определить длину линии, на которой укладывается одна волна. Например, при $\beta = 1$ рад/м $l = \lambda = 2\pi/\beta = 6,28/1 = 6,28$ м. Следовательно, в такой линии четверть длины волны окажется на расстоянии 1,57 м от нагрузки, полуволны — на расстоянии 3,14 м, три четверти — на расстоянии 4,71 м и т. д. Так как при расчетах распределений напряжений вдоль линии чаще всего используют соотношение $l/\lambda = 0,1; 0,2; 0,25; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,75; 0,8; 0,9; 1,0$ (после чего все значения повторяются), в данном примере для получения заданных l/λ следует брать $l = 0,628; 1,256; 1,57$ и т. д.

Параметр линии	Результат расчета при l , равном, м			
	0,5	1,0	3,0	6,0
\hat{O}	1,0845982	1,3302752	0,66838157	0,63620719
$\varphi_U, ^\circ$	48,275064	65,01497	177,41782	14,136104
\hat{I}	1,0440444	0,70480474	1,3489433	1,3644128
$\varphi_I, ^\circ$	8,2250217	42,61003	166,61148	17,199325

Комплексные приведенные значения токов находят по той же программе, но значения $K'_{отр}$ и $K''_{отр}$ вводят с противоположными знаками (по сравнению с расчетом напряжений). В данном примере для расчета комплексных приведенных токов следует ввести исходные данные:

$$0 \text{ х—П} \cdot 1 \text{ х—П} / \text{—} / 0,2949 \text{ х—П} \ 8 \ 0,215 \ / \text{—} / \text{ х—П} \ 9$$

В/О I C/П модуль тока C/П аргумент и т. д.

Результаты расчетов сведены в табл. П.1.

Значение комплексного тока в нагрузке \hat{I}_2 определяется из выражения $\hat{I}_2 = \hat{U}_2 / Z_H$. Например, если $\hat{U}_2 = 16,7e^{j31,8^\circ}$, $Z_H = 200 + j100$, то $\hat{I}_2 = 16,7e^{j31,8^\circ} / 224e^{j26,6^\circ} = 0,07455e^{j5,2^\circ} \text{ А} = 74,55e^{j5,2^\circ} \text{ мА}$.

На расстоянии 1 м $\hat{I} = 0,7048 \cdot 74,55e^{j(42,61^\circ + 5,2^\circ)} = 52,55e^{j47,3^\circ} \text{ мА}$ и т. д.

(Подробнее см.: Витков М. Г. Методические указания по ТЭЦ.— М.: МИС, 1991.— 84 с.)

Приложение 2.

ПЕРЕМНОЖИТЕЛИ ЧАСТОТ

На рис. П.2.1 приведена структурная схема перемножителя частот, т. е. многополюсника с двумя входами и одним выходом, в котором мгновенные напряжения $u_{\text{вых}}(t)$ пропорциональны произведению мгновенных значений входных напряжений $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Перемножители выпускаются промышленностью в виде готовых микросхем и широко используются в современной схемотехнике. Напомним, что схема инвертора, входящего в перемножитель, разбирается в [1] на с. 111—114, сумматора — на с. 115, квадратора — на с. 325—327.

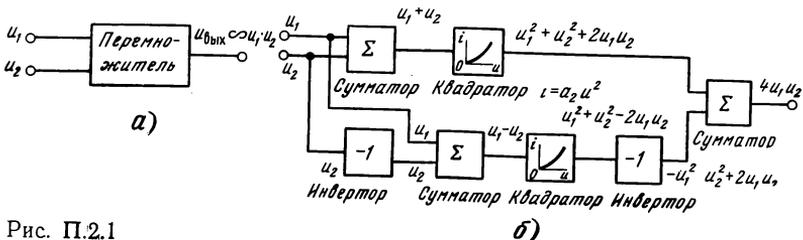


Рис. П.2.1

УДЕЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ
И ТЕМПЕРАТУРНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ
НЕКОТОРЫХ МЕТАЛЛОВ

Материал	Удельное сопротивление		Температурный коэффициент, 1/град
	Ом·м·10 ⁻⁶	Ом·мм ² /м	
Серебро	0,016	0,016	0,0036
Медь	0,0175	0,0175	0,0039
Алюминий	0,028	0,028	0,0049
Сталь	0,10	0,10	0,0062
Манганин	0,42	0,42	0,000030
Константан	0,48	0,48	-0,000020
Нихром	1,1	1,1	0,00020
Вольфрам	0,055	0,055	0,0045

НОМИНАЛЬНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ
И ЕМКОСТИ

Номинальное сопротивление (R_n) и номинальная емкость (C_n) параметры, значения которых обозначены на детали или указаны в нормативной документации и являются исходным для отсчета отклонений от этих значений.

Номинальные значения сопротивления и емкости стандартизованы. Для постоянных резисторов установлено шесть рядов E6, E12, E24, E48, E96, E192, а для переменных резисторов ряд E6. Цифра после буквы E указывает число номинальных значений в каждом десятичном интервале.

E6: 1; 1,5; 2,2; 3,3; 4,7; 6,8;

E12: 1; 1,2; 1,5; 1,8; 2,2; 2,7; 3,3; 3,9; 4,7; 5,6; 6,8; 8,2;

E24: 1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,5; 1,6; 1,8; 2; 2,2; 2,4; 2,7; 3; 3,3; 3,6; 3,9; 4,3; 4,7; 5,1; 5,6; 6,2; 6,8; 7,5; 8,2; 9,1

Номинальные сопротивления (емкости) в каждой декаде соответствуют указанным числам или числам, полученным умножением либо делением их на 10^n , где n — целое положительное или отрицательное число.

Действительные значения сопротивлений резисторов или емкостей конденсаторов из-за погрешностей изготовления могут отличаться от номинальных. Разница между номинальным и действительным значениями, выраженная в процентах по отношению к номинальному, называется допусковым

отклонением от номинального или кратко допуском. Согласно ГОСТ 9664—74 установлен ряд допусков: $\pm 0,001$; $\pm 0,002$; $\pm 0,005$; $\pm 0,01$; $\pm 0,02$; $\pm 0,05$; $\pm 0,1$; $\pm 0,25$; $\pm 0,5$; ± 1 ; ± 2 ; ± 5 ; ± 10 ; $\pm 30\%$.

ОТВЕТЫ

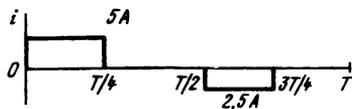
1.1. $F=188$ кН. 1.2. 3,16 см. 1.3. Сила взаимодействия уменьшится в 10 раз. 1.4. $Q_1=26,36 \cdot 10^{-9}$ Кл= $26,36$ нКл; $Q_2=52,72 \cdot 10^{-9}$ Кл= $52,72$ нКл. 1.5. В 9 раз. 1.6. $\varphi=50$ В. 1.9. Увеличится в 3 раза. 1.11. 32,5 пФ. 1.12. 5,259 пФ. 1.14. $a=50d$. 1.15. Увеличится в $\epsilon_r=80$ раз. 1.17. 444,6 пФ. 1.18. Уменьшится в 1,3 раза. 1.19. а) $D_2=260 D_1$; б) $D_2=16 D_1$; в) $D_2=6,39 D_1$; г) $D_2=4 D_1$; д) $D_2=3 D_1$. 1.20. б) $U_{C_1}=56,7$ В; $U_{C_2}=U_{C_3}=38,6$ В; $Q_1=2,304$ мКл; $Q_2=0,576$ мКл; $Q_3=1,728$ мКл; $W_1=66$ мДж; $W_2 \approx 11$ мДж; $W_3=33,2$ мДж; в) $U_1=26$ В; $U_2=U_3=28,9$ В; $U_4=17,1$ В; $Q_1=Q_4=104$ мКл; $Q_2=75,1$ мКл; $W_1=1,352$ мДж; $W_2=0,418$ мДж; $W_3=1,086$ мДж; $W_4=0,877$ мДж; д) $U_1=U_2=18$ В; $U_3=14,4$ В; $U_4=9,6$ В; $U_5=24$ В; $Q_1=Q_2=0,72$ мКл; $Q_3=Q_4=0,288$ мКл; $Q_5=0,432$ мКл; $W_1=W_2=6,48$ мДж; $W_3=2,07$ мДж; $W_4=1,38$ мДж; $W_5=5,184$ мДж.

2.4. $0,15$ с= $0,15 \cdot 10^3$ мс= 150 мс= $0,15 \cdot 10^6$ мкс= $1,5 \cdot 10^5$ мкс= 15×10^4 мкс= $150 \cdot 10^3$ мкс. 2.5. 40 кГц= $40\,000$ Гц= $40 \cdot 10^3$ Гц= $40 \cdot 10^{-3}$ МГц= $0,04$ МГц. 2.6. $0,35$ А= 350 мА= $0,35 \cdot 10^6$ мкА. 2.7. 75 мА= $75 \cdot 10^{-3}$ А; 75 мкА= $75 \cdot 10^{-6}$ А. 2.10. $-9,66$; $-8,6$; $-7,07$; $5,0$; $7,07$; $8,6$. 2.11. 0 ; $6,43$; $9,85$; $8,66$; $3,42$; $-3,42$; $-8,66$; $-9,85$; $-6,43$; 0 . 2.14. 200 мс; 40 с; 10^4 с. 2.16. Знаки q и i будут обратными по сравнению со знаками, полученными в задаче. 2.15. 2.17. Заряд q равен нулю при $t=0$ и $t=1$ с, ток i равен нулю через $t=0,5$ с. 2.20. $111,4$ Ом. 2.22. В 1,6 раза. 2.23. В 1,265 раз. 2.24. $7,85$ м. 2.26. $0,1$ См. 2.27. Уменьшится в 4 раза. 2.29. В 10 раз. 2.34. $I=2$ мА. 2.37. $U=0,707 U_m$. 2.38. $I=0,5 I_m$. 2.39. $U=U_m$. 2.42. $I=0,57 I_m$. 2.44. В 2 раза. 2.45. $I=0,913 I_m$. 2.50. $U=0,35 U_m$. 2.52. $U=0,707 U_m$. 2.53. $U=0,612 U_m$.

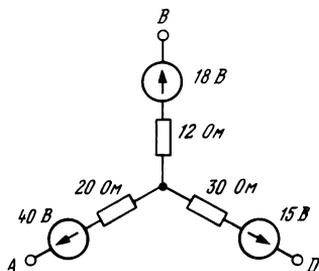
3.3. $U=50$ В; $U_{R1}=5$ В; $U_{R2}=15$ В; $U_{R3}=30$ В, мощности: $5=0,5+1,5+3$. 3.4. $U=70,7$ В; $U_{R1}=7,07$ В; $U_{R2}=21,2$ В; $U_{R3}=42,4$ В, мощности: $10=1+3+6$. 3.5. Действующие напряжения: $1,445+4,335+8,67=14,45$ В, мощности: $4,176=0,418+1,253+2,51$ Вт. 3.6. Действующие напряжения: $100=10+30+60$ В, мощности: $20=2+6+12$ Вт. 3.7. Действующие напряжения: $4,5+13,5+27=45$ В, мощности: $40,5=4,05+12,15+24,3$ Вт. 3.8. Действующие напряжения: $2,04+6,12+12,24=20,4$ В, мощности: $0,832+2,497+4,99=8,32$ Вт. 3.10. $r=20$ Ом; $\eta=90\%$. 3.11. $r=25$ Ом; $U=37,5$ В. 3.13. $R_{д1}=156,25$ Ом на 16 Вт; $R_{д2}=417$ Ом на 24 Вт; $\Delta R_{д2}=260$ Ом на 15 Вт; $R_{д3}=937,5$ Ом на 24 Вт; $\Delta R_{д3}=520,5$ Ом на 13,3 Вт; $R_{д4}=2500$ Ом на 16 Вт; $\Delta R_{д4}=1562,5$ Ом на 10 Вт. 3.14. $R_{д1}=2$ кОм; $R_{д2}=9$ кОм; $R_{д3}=29$ кОм; $R_{д4}=99$ кОм; $\Delta R_{д2}=7$ кОм; $\Delta R_{д3}=20$ кОм; $\Delta R_{д4}=70$ кОм. Мощность рассеяния в каждом сопротивлении не превышает $0,1$ Вт, поэтому в качестве добавочных могут быть использованы масляные сопротивления типа МЛТ на стандартную мощность рассеяния $0,125$ Вт.

3.16. а) 50 кОм; б) $12,5$ кОм; в) $5,55$ кОм; г) $2,63$ кОм. 3.17. $U_0=25$ В. 3.19. $E=100$ В; $r=100$ Ом. 3.20. $R_1=250$ Ом; $R_2=750$ Ом. 3.22. $62,5$ мВт. 3.24. КПД: $0,4$; $0,7$; $0,9$. 3.25. Одинаковый. 3.27. При замкнутом ключе $\varphi_N=$

$=0$, тогда $\varphi_A=66$ В, $\varphi_B=58$ В, $\varphi_D=106$ В, $\varphi_F=92$ В, $\varphi_G=86$ В, $\varphi_H=$
 $=46$ В, $\varphi_M=4$ В, $U_{DG}=20$ В, $U_{DM}=102$ В, $U_{MN}=4$ В. При разомкнутом
 ключе $\varphi_A=0$, $U_{DG}=-10$ В, $U_{DM}=30$ В, $U_{MN}=0$. **3.28.** $U_{AB}=-1/3$ В.
3.29. а) 0; б) 0; в) $-1,5$ В; г) $-4/3$ А. **3.30.** $E_2=8$ В; $U_{AB}=18,2$ В. **3.32.**
 $I/I_m=r/(r+R)$; $U/U_m=r/(r+R)$; $P/P_m=4rR/(r+R)^2$; $\eta/\eta_m=R/(r+R)$. **3.33.**
 $R_1=4$ Ом; $R_2=64$ Ом; $\eta_1=20\%$, $\eta_2=80\%$. **3.35.** 10 Вт. **3.36.** $9 \dots 7,5$ В. **3.37.**
 $4 \dots 8$ В. **3.42.** $I=1,5$ А (от В к А). **3.43.** См. ниже. **3.46.** $U_1=5$ В. **3.47.** 20 В;
 1,8; 3,0; 9,6; 10,4 В. **3.49.** а) напряжения: 100, 60, 40 В, токи: 200, 80, 100,
 20 мА. б) токи: 40, 16, 20, 4 мА. **3.52.** $R_2=1600$ Ом. **3.56.** При $R_2=0 \dots \infty$
 коэффициент передачи будет изменяться от $R_3/(R_1+R_3)$ до 1. **3.58.** $R_2=$
 $=250$ Ом. **3.60.** 0,822...0,5. **3.61.** $R_1=200$ Ом; $R_4=5000$ Ом. **3.63.** 0,75...0,3.
3.64. 0,36...0,3. **3.65.** $R_3=2400$ Ом. **3.69.** 0,8...-0,2; при $R_1=4$ кОм $K=0$. **3.70.**
 0,75...0. **3.71.** $-0,75 \dots 0,25$; при $R_2=1500$ Ом $K=0$. **3.74.** 110 Ом. **3.75.** При
 замкнутом ключе $K=0$; 0,10; 0,18; 0,25; 0,33; 0,43; 0,55; 0,88; 1. При разомк-
 нутым ключе $K=0,33$; 0,36; 0,40; 0,44; 0,50; 0,57; 0,67; 0,80; 1. **3.77.** $I_1=$
 $=0,25$ А; $I_2=1$ А; $I_3=0$; $I_4=1$ А; $I_5=1,25$ А; $I_6=0,25$ А. **3.78.** $I_1=2$ А;
 $I_2=1$ А; $I_3=0,1$ А; $I_4=1,1$ А; $I_5=0,9$ А; $I_6=1$ А. **3.79.** $I_1=0,67$ А; $I_2=$
 $=0,33$ А; $I_3=0,3$ А; $I_4=0,7$ А; $I_5=0,03$ А; $I_6=1$ А. **3.81.** $U_1=15$ В; $U_2=$
 $=35$ В; $P_x=P_y=25$ Вт. **3.82.** $I_1=0,5$ А; $I_2=0,5$ А; $P_x=P_y=50$ Вт. **3.84.**
 $U_{R1}=U_{R2}=U_I=70$ В; $I_2=0,7$ В; $P_x=P_y=70$ Вт. **3.85.** $I_1=100$ мА; $I_2=$
 $=60$ мА; $I_3=40$ мА; $I_4=48$ мА; $I_5=12$ мА; $P_x=P_y=50$ Вт. **3.87.** $I_1=0,5$ А;
 $I_2=0,5$ А; $I_3=0,1$ А; $I_4=0,4$ А; $I_5=0,6$ А; $P_x=P_y=28$ Вт. **3.92.** См. ниже.
3.93. $I_1=1,8$ А; $I_2=0,2$ А; $P=98$ Вт. **3.94.** $I_1=0,2$ А; $I_2=2,2$ А; $P=98$ Вт.
3.96. $I_1=0,2$ А (от В к А); $I_2=2,2$ А; $P=98$ Вт. **3.98.** $I_1=0,2$ мА (от Д к
 А); $I_2=0,3$ мА (от А к М); $I_3=0,1$ мА (от В к А); $P=0,7$ мВт. **3.101.**
 $I_1=420$ мА; $I_2=450$ мА; $I_3=30$ мА; $I_4=180$ мА; $I_5=150$ мА; $P=30,24$ Вт.
3.106. $R_{вх(2)}=60$ Ом; $G_{вх(2)}=1,67 \cdot 10^{-2}$ См; $R_{вх(3)}=74,4$ Ом; $G_{вх(3)}=1,34 \times$
 $\times 10^{-2}$ См. **3.107.** $R_{вх(4)} \approx 79$ Ом; $G_{вх(4)}=5,29 \cdot 10^{-3}$ См. **3.112.** $R_{(2-6)}=60$ Ом;
 $G_{(2-6)}=16 \cdot 10^{-3}$ См; $R_{(3-5)}=60$ Ом; $G_{(3-5)}=16 \cdot 10^{-3}$ См. **3.114.** $I_2=0,75$ А;
 $I_3=2$ А. **3.115.** $I_4=1,55$ А; $I_5=2,75$ А. **3.117.** $I_5=5$ А; $I_6=15$ А. **3.121.**
 $U_{AB}=20$ В; $P_m=2$ Вт. **3.123.** $I_1=10$ А (от В к А); $I_2=1,5$ А (от А к В);
 $I_3=10$ А (от А к В); $I_{B,A}=0,5$ А. Токи во всех сопротивлениях нагрузки
 уменьшаются в 2 раза и текут в противоположном направлении. **3.124.**



Ответ к задаче 3.43



Ответ к задаче 3.92

0...21,5 В. 3.131. $I_1=2,6$ А; $I_2=1,6$ А; $I_3=-0,1$ А; $I_4=0,9$ А; $I_5=2,5$ А; $J=-1$ А. 3.133. $I_3=2$ мА; $R_{эк}=250$ Ом; $E_{эк}=600$ мВ; $P=1,2$ мВт. 3.136. $I_2=-20$ мА; $I_3=-19$ мА; $I_4=2$ мА; $I_5=39$ мА; $P=346,14$ мВт. 3.137. $P=347,67$ мВт. 3.140. $I_1=4$ мА; $I_2=5$ мА; $I_3=1$ мА; $I_4=5$ мА; $I_5=6$ мА. 3.141. $I_1=7,485$ мА; $I_2=0,3531$ мА; $I_3=7,1319$ мА; $I_4=3,248$ мА; $I_5=-10,38$ мА; 3.144. $I_1=0,2$ А; $I_2=2,2$ А; $I_3=2$ А. 3.148. $I_1=0,8$ А; $I_2=-0,75$ А; $I_3=2$ А; $I_4=1,55$ А; $I_5=2,75$ А; $I_6=1,2$ А. 3.149. $I_1=12$ А; $I_2=-2$ А; $I_3=3$ А; $I_4=10$ А; $I_5=5$ А; $I_6=15$ А. 3.153. $I_1=5$ мА; $I_2=8$ мА; $I_3=1$ мА; $I_4=-6$ мА; $I_5=2$ мА. 3.154. $I_1=1$ мА; $I_2=5$ мА; $I_3=10$ мА; $I_4=-3$ мА; $I_5=4$ мА; $I_6=2$ мА.

3.156.

β , Ом	0	1	2	5	7	10
I , А	2	1,67	1,43	1	0,83	0,66
E_2 , В	0	1,67	2,86	5	5,83	6,66

3.157.

β , Ом	0	1	2	3	5	7
I , А	2	2,5	3,33	5	∞	-5
E_2 , В	0	2,5	6,66	15	∞	-35
						-2,5
						-22,5

3.158.

I , А	2	1	0,5	0,1
β , Ом	0	5	15	95
E_2 , В	0	5	7,5	9,5

3.161. $I_1=1,5$ А; $I_2=-2$ А; $I_3=-0,5$ А; 3.162. $I_1=0$; $I_2=2$ А; $I_3=-2$ А. 3.164. При $\alpha=1$ $R_{вх}=\infty$. 3.165. $R_{вх}=R/(1+\alpha)$. 3.169. При $S=0,1$ А/В $I_1=0,294$ А; $I_2=1,47$ А; $J=1,176$ А; при $S=0,2$ А/В $I_1=0,172$ А; $I_2=1,55$ А; $J=1,38$ А; при $S=0,3$ А/В $I_1=0,122$ А; $I_2=-1,585$ А; $J=1,46$ А. 3.172. $I=0,5$ А; $E_3=10$ А. 3.173. $I=0,3$ А; $E_3=36$ В; $P=7,2$ Вт. 3.175. $I_1=141$ мА; $E=71,9$ В; $I_2=41$ мА. 3.176. $U_{ВН}=35,1$ В; $I_1=59$ мА; $E_2=30,1$ В; $I_2=159$ мА.

4.1. 10^{-4} Гн/м. 4.2. $\mu_r=1000$. 4.3. $R_{м. магн}=2 \cdot 10^6$ 1/Гн, $R_{м. в} \approx 16 \cdot 10^6$ 1/Гн. 4.4. $U_{м. магн} \approx 56$ А; $U_{м. в} \approx 444$ А. 4.5. В 8,93 ≈ 9 раз. 4.9. 707 витков. 4.10. 1800 мкГн=1,8 мГн. 4.11. При $H=1000$ А/м индукция должна равняться $0,95B_m$. 4.13. Уменьшится в 3 раза. 4.14. 3,18 Н. 4.15. Возрастет в 2 раза. 4.16. 250 В. 4.19. $L=41,79$ нГн $\approx 41,8$ нГн. 4.21. $\omega=104$ витка. 4.24. $\omega=187$ витков. 4.26. $\omega=46$ витков.

4.28.

L , нГн	200	300	400	500
ω , витков	6,57	8,38	10	11,38

4.29.

L , нГн	200	300	400	500
ω , витков	2,11	2,7	3,2	3,66

5.1. Кривые будут одинаковыми, $i=2act$. 5.2. $i=50e^{-500t}$ мА. 5.3. Форма тока будет прямоугольной. 5.7. В интервале от $t=T/4$ до $t=3T/4$ ток имеет синусоидальную форму, а uc/i — котангенциальную. 5.8. Треугольная. 5.9. Импульсная. 5.10. 1 мкс. 5.11. а) 8,75 раз, б) 17,6 раза. в) 26,8 раза, г) 36,4 раза.

6.2. $i = 2\sqrt{2}\sin(\omega t - 53,13^\circ)$; $u_R = 6\sqrt{2}\sin(\omega t - 53,13^\circ)$, $u_L = 8\sqrt{2}\sin(\omega t + 36,87^\circ)$. 6.5. а) 2,6 нФ; б) 1,5 нФ; в) 0,577 нФ. 6.7. $C = 7,175$ нФ. 6.8. $i_1 = 2\sqrt{2}\sin(\omega t - 45^\circ)$; $i_2 = 1,2\sqrt{2}\sin(\omega t + 8,13^\circ)$; $i_3 = 1,6\sqrt{2}\sin(\omega t - 81,87^\circ)$. 6.11. $K = 0 \dots 0,447$; $\psi_K = 0 \dots -63,5^\circ$. 6.12. $R_2 = 120$ Ом. $\psi \approx 37^\circ$. 6.13. $K = 0,329 \dots 0,769$; $\psi_K = 9,44 \dots 22,63^\circ$. 6.18. $X_C = 25,9$ Ом, 37,18 Ом, 47,76 Ом, 58,34 Ом, 69,6 Ом. 6.21. $Z_{вх} = 16 + j12$ Ом. 6.26. $\dot{I}_1 = 0,693e^{j13,83^\circ}$; $\dot{I}_2 = 0,452e^{-j85,33^\circ}$; $\dot{I}_3 = 0,77e^{-j21,83^\circ}$. 6.31. $\dot{I}_1 = \dot{I}_3 = 0,5e^{j0^\circ}$; $I_2 = 0$; $E_2 = 5 + j5$ В. 6.32. $\dot{I}_1 = 0,709e^{j8^\circ}$; $\dot{I}_2 = -0,4489e^{j26,57^\circ}$; $\dot{I}_3 = 0,3165e^{-j18,43^\circ}$; $\dot{E}_2 = 2 - j4$. 6.33. $\dot{I}_1 = 0,62e^{-j7,43^\circ}$; $\dot{I}_2 = -0,278e^{-j34^\circ}$; $\dot{I}_3 = 0,392e^{j11^\circ}$; $\dot{E}_2 = -3,92e^{j79^\circ}$. 6.34. $\dot{I}_1 = 0,726e^{j3,17^\circ}$; $\dot{I}_2 = -0,447e^{j10,27^\circ}$; $\dot{I}_3 = 0,283e^{-j8,13^\circ}$; $\dot{E}_2 = 2,83e^{-j98,13^\circ} = -0,4 - j2,8$ В. 6.38. $\dot{I}_1 = -6,21e^{j18,1^\circ}$ мА; $\dot{I}_2 = -4,38e^{-j27,1^\circ}$ мА; $\dot{I}_3 = -4,39e^{j63,1^\circ}$ мА; $\dot{E}_{зав} = 1,861e^{j18^\circ}$; $\underline{K} = 0,4393e^{j116,9^\circ}$. 6.39. $\dot{I}_1 = -33,3$ мА; $\dot{I}_2 = 23,5e^{j135^\circ}$ мА; $\dot{I}_3 = 23,5e^{-j135^\circ}$ мА; $E_{зав} = 10$ В; $\underline{K} = 0,235e^{-j135^\circ}$. 6.48. При замкнутом ключе $I = 167$ мА: при разомкнутом: а) 200 мА; б) 250 мА; в) 182 мА. 6.50. а) 500 ... 20 Ом; б) 50 ... 1,25 кОм. 6.53. $f = 400$ Гц. 6.56. 50 кГц.

7.6. В схеме 6.2, в $f = 1,95$ кГц; $\varphi_{z \text{ вх } m} \approx 11,5^\circ$; в схеме 6.2, г $f = 1,37$ кГц; $\varphi_{z \text{ вх } m} = 30^\circ$. 7.13. В диапазоне от $f = 0$ до $f_1 = 0,5$ кГц цепь практически емкостная, в диапазоне от 0,5 ... 5 кГц — RC-цепь, в диапазоне от $f_2 = 5$ кГц до $f = \infty$ — практически резистивная. 7.14. $\frac{L\text{-цепь} \mid RL\text{-цепь} \mid R\text{-цепь}}{f=0 \quad f_1=5 \text{ кГц} \quad f_2=50 \text{ кГц} \quad f=\infty}$ 7.15. $\frac{R\text{-цепь} \mid RC\text{-цепь} \mid C\text{-цепь}}{f=0 \quad f_1=50 \text{ кГц} \quad f_2=0,5 \text{ МГц} \quad f=\infty}$.

8.1. $f_0 = 1590$ кГц; $\rho = 1$ кОм; $Q = 50$; $S_0 = 0,02$; $\Pi = 31,8$ кГц. 8.2. $f_0 = 1590$ кГц; $\rho = 1$ кОм; $Q = 8,33$; $S_0 = 0,12$; $\Pi = 191$ кГц; 8.3. $f_0 = 1558$ кГц; $\rho = 1$ кОм; $Q_{\Pi} = 4,55$; $S_0 = 0,22$; $\Pi = 343$ кГц. 8.11. $Q = 100$. 8.12. $B = 18$ дБ. 8.13. $Z_{вх} = 2,24R$; $\varphi_{z \text{ вх}} = 63,4^\circ$; $I = 0,446(U/R)$. 8.15. $I = 0,316 I_0$. 8.17. а) увеличится в 2 раза; б) не изменится; в) уменьшится в 2 раза. 8.18. В 2 раза. 8.20. Любое число вариантов, например при $R = 50$ Ом, $L = 1,59$ мГн, $C = 1,59$ нФ. 8.22. При $L = 100$ мкГн $f_0 = 1590$ кГц; при $L = 144$ мкГн $f_0 = 1327$ кГц. 8.23. 4 раза. 8.24. RLC-цепь; $\omega_0 = 10^6$ 1/с; $Q = 50$. Выходное напряжение снимается: а) с резистора, б) с конденсатора. 8.25. $f_0 = 1/(2\pi C \sqrt{R_2 R_3})$; $Q = 0,5 \sqrt{R_2/R_3}$; $\Pi = 1/(\pi RC)$. 8.26. $H_0 = 0,5R_2/R_1$. 8.27. Нуль градусов. 8.28. Спротивлению R_1 . 8.31. На граничной частоте $f_{1,2} = f_0 \mp (f_0/Q)$. 8.35. Резонансная частота и добротность уменьшаются, а относительная полоса пропускания по току увеличится в 1,41 раз. Абсолютная полоса пропускания по току останется неизменной. Модуль входного сопротивления на резонансной частоте уменьшится, а модуль входного тока увеличится в 2 раза. Модуль коэффициента передачи по напряжению останется неизменным, равным 1. Входной фазный угол на резонансной частоте останется равным нулю. 8.43. При $R_{\Pi} = \infty$ $B = 25,5$ дБ. 8.47. $\omega_0 = 80,6 \cdot 10^3$ 1/с; $\omega_{\infty} = 50 \cdot 10^3$ 1/с. 8.52. $L_1 = 0,028$ Гн; $L_2 = 0,672$ Гн; $C = 93$ пФ.

9.1. $\omega_{\text{согл}} = 2 \cdot 10^5$ 1/с; $\omega_{\text{встр}} = 3 \cdot 10^5$ 1/с. 9.2. $\omega_{\text{согл}} = 4,13 \cdot 10^5$ 1/с; $\omega_{\text{встр}} = 6,197 \cdot 10^5$ 1/с. 9.3. $\omega_{\text{согл}} = 50$ кс⁻¹; $\omega_{\text{встр}} = 86,58$ кс⁻¹. 9.4. а)

$\omega_0 = 100 \text{ кс}^{-1}$; б) $\omega_0 = 2 \text{ М} \cdot \text{с}^{-1}$. 9.6. На 15,4%. 9.7. $I_1 = 3,16e^{-j71^\circ 31'}$ А; $I_2 = 1 \cdot e^{-j53^\circ 10'}$. 9.9. $C_{CB} = 9C$. 9.10. $K_{кр} = 0,02 = 2\%$. 9.11. $I_{2mm} = 25 \text{ МА}$, при $K = 2K_{кр}$ $I_2 = 20 \text{ МА}$, 9.12. $H_0 = 25$; $\Pi = 4,48 \text{ кГц}$. 9.15. $M = 13,4 \text{ МКГн}$. 9.16. При $\xi = \sqrt{P_{CB}^2 - 1} = \sqrt{2^2 - 1} = 1,73$ $H = H_m = Q/2 = 100/2 = 50$. 9.17. $\Pi = 27,68 \text{ кГц}$. B 1,227 раз. 9.20. $B \approx 26 \text{ дБ}$.

10.8. $U_{V_1} = 100 \text{ В}$; $U_{V_2} = 0 \text{ В}$; U_{V_3} откp. пp = U_{V_3} откp. обp = U_{V_3} закр = $= 111 \text{ В}$; $U_{V_4} = 111 \text{ В}$; U_{V_5} пp = U_{V_5} обp = $70,7 \text{ В}$. 10.9. $U_{V_1} = 50 \text{ В}$; $U_{V_2} = 50 \text{ В}$; U_{V_3} откp. пp = 111 В , U_{V_3} откp. обp = 0 ; U_{V_3} закр = $55,5 \text{ В}$; $U_{V_4} = 55,5$; U_{V_5} пp = U_{V_5} обp = 35 В . 10.10. $U_{V_1} = 30 \text{ В}$; $U_{V_2} = 10 \text{ В}$; U_{V_3} откp. пp = $22,2 \text{ В}$; U_{V_3} откp. обp = 0 ; U_{V_3} закр = $11,1 \text{ В}$; $U_{V_4} = 11,1 \text{ В}$; U_{V_5} пp = U_{V_5} обp = $35,3 \text{ В}$. 10.11. $U_{V_1} = 50 \text{ В}$; $U_{V_2} = 31,6 \text{ В}$; U_{V_3} откp. пp = $70,2 \text{ В}$; U_{V_3} откp. обp = 0 . 10.13. $U_0 = 230 \text{ МВ}$; $U_{m1} = 400 \text{ МВ}$; $U_{m2} = 280 \text{ МВ}$; $U_{m3} = 130 \text{ МВ}$; $U_{m4} = 27,7 \text{ МВ}$; $U_{m5} = -27,7 \text{ МВ}$. 10.14. $U_{m1} = 5,625 \text{ В}$; $U_{m2} = 5 \text{ В}$; $U_{m3} = 4,25 \text{ В}$. 10.16. См. задачу 10.15. 10.20. $U_{m \text{ вых}(1)}$ меньше $U_{m \text{ вых}(3)}$ на 14,1 дБ.

11.1. [a] — Ом/А; [b] — См/В. 11.4. $I_{m1} = 37,3 \text{ МА}$; $I_{m2} = 12,25 \text{ МА}$; $I_{m3} = 0$; $I_{m4} = 2 \text{ МА}$; $K_{нск} = 32,6\%$. 11.5. $I_{m1} = 50 \text{ МА}$; $I_{m2} = 3,25 \text{ МА}$; $I_{m3} = 2,25 \text{ МА}$; $I_{m4} = 1,5 \text{ МА}$; $K_{нск} = 8,43\%$. 11.6. $U_{нел} = 18 \text{ В}$; $P_{нел} = 0,456 \text{ Вт}$; $U_{лин} = 47 \text{ В}$; $P_{лин} = 1,19 \text{ Вт}$. 11.7. $U_{нел} = 35 \text{ В}$; $P_{нел} = 1,16 \text{ Вт}$; $U_{лин} = 30 \text{ В}$; $P_{лин} \approx 1 \text{ Вт}$. 11.11. $R = 250 \text{ Ом}$. 11.14. а) $i = 0 + 1 \cdot u + 0 \cdot u^2 + 0 \cdot u^3 = 1 \cdot u \text{ МА}$; б) $i = -3,8 + 4,167u - 0,7125u^2 + 0,03959u^3 \text{ МА}$; в) $i = -11 + 11,67u - 4u^2 + 0,333u^3 \text{ МА}$. 11.16. $i = 50u - 11,9u^3$. При $U_m = 2 \text{ В}$ $I_{m1} = 171,4 \text{ МА}$; $I_{m2} = 0$, $I_{m3} = 23,8 \text{ МА}$, $I_{m4} = 0$.

12.2. $R = 250 \text{ Ом}$; $L = 0,75 \text{ Гн}$. 12.3. в) $u_R = 6,32 \text{ В}$; $u_L = 3,68 \text{ В}$; г) $u_R = 7,36 \text{ В}$; $u_L = 2,64 \text{ В}$; д) $u_R = 8,1 \text{ В}$; $u_L = 1,9 \text{ В}$. 12.6. а) 1,386 с; б) 1,9 с; в) 3 с. 12.8. а) 14 МА; б) 5,17 МА; в) 1,9 МА; г) 0,703 МА; д) 0,14 МА; е) 0. 12.10. $2,25 \cdot 10^{-9} \text{ Дж} = 2,25 \text{ нДж}$.

12.12.

t	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
$u_C, \text{ В}$	0	6,32	0,855	8,7	3,91	8,77	4,81	6,52

12.15. На рис. 12,5, а $i_1(0) = i_2(0) = i_3(0) = 0$; $u_{R1}(0) = u_{R2}(0) = u_{R3}(0) = u_C(0) = 0$; $u_L(0) = U$; $i_1(\infty) = i_2(\infty) = U/(R_1 + R_2)$; $i_3(\infty) = 0$; $u_{R1} = UR_1/(R_1 + R_2)$; $u_{R2} = UR_2/(R_1 + R_2)$; $u_L(\infty) = 0$; $u_C(\infty) = UR_2/(R_1 + R_2)$. На рис. 12,5, б $i_1(0) = i_3(0) = U/(R_1 + R_3)$; $i_2(0) = 0$; $u_{R1}(0) = UR_1/(R_1 + R_3)$; $u_{R2}(0) = 0$; $u_{R3} = UR_3/(R_1 + R_3)$; $u_L(0) = UR_3/(R_1 + R_3)$; $i_1(\infty) = i_2(\infty) = i_3(\infty) = 0$; $u_{R1}(\infty) = u_{R2}(\infty) = u_{R3}(\infty) = u_L(\infty) = 0$; $u_C(\infty) = U$. 12.17. $\tau = 8 \text{ мс}$. 12.18. $i_1 = 10^{-3}(0,5 + 2e^{-125t})$; $i_2 = 0,5 \cdot 10^{-3}(1 - e^{-125t})$; $i_3 = 2,5 \cdot 10^{-3}e^{-125t}$; $u_C = 20(1 - e^{-125t})$. 12.23. $U_2(p) = \frac{U_1(p + 1/R_1 C)}{p[p + (R_1 + R_2)/R_1 R_2 C]}$; $u_2(t) = 8 + 2e^{+625t}$. 12.24. $i_{зар м} = U/R_1 = 100 \text{ мкА}$; $i_{разр м} = U/R_2 = 10 \text{ А}$; $i_{разр м}/i_{зар м} = 10^5$; $t_{зар} \approx 150 \text{ с}$; $t_{разр} \approx 1,5 \text{ мс}$. 12.25. $C_{каб} = 0,62 \text{ мкФ}$. 12.26. За 20,4 мс выделяется энергия 0,64 мДж, за бесконечно большое время — 1 мДж.

12.27. 17,3 мс 12.30. $K(p) = -\frac{p^2 - 0,5 \cdot 10^6}{p^2 + 1,5 \cdot 10^3 p + 0,5 \cdot 10^6}$.

12.31. $u_2(t) = 1 - 1e^{-500t} - 1e^{-1000t}$. 12.33. $u_{2нпн} = 500e^{-500t} + 2000e^{-1000t}$.

$$12.38. U(j\omega) = 0,5U_m t_1 \left[\frac{\sin(\omega t_1/2)}{(\omega t_1/2)^2} \right] e^{-j[90^\circ + (\omega t_1/2)]}$$

12.39. При $\omega=0$ $U(\omega)=0$; при $f=5, 10 \dots (k \cdot 10)$ кГц $U(\omega)=0$.

12.42.

f , кГц	0	0,25	0,50	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
$U(\omega)$, мВ/Гц	7,85	7,82	7,736	7,6	7,4	7,15	6,85	4,21	0

12.47. Около 3 колебаний. 13.2. $C=200$ пФ. 13.4. $C=2$ нФ. 13.5. а) $R=100$ Ом; б) 333 Ом. 13.6. а) $R=1$ кОм; б) $R=3,3$ кОм. 13.11. $C=318$ нФ.

14.1. $Z_{1T}=200$ Ом; $Z_{2T}=100$ Ом. 14.2. $A=3$; $B=800$ Ом; $C=0,01$ См.

14.3. $Z_{1T}=400$ Ом; $Z_{2T}=-200+j200=200\sqrt{2}e^{-j135^\circ}$. 14.4. $Z_C=264,6$ Ом.

14.5. $Z_C=1189e^{-j22^\circ 30'}=1098-j455$ Ом. 14.7. $Z_{1c}=433$ Ом; $Z_{2c}=288,7$ Ом.

14.9. $A=3,03$ Нп= $26,3$ дБ; $B=-38,66^\circ=-0,675$ рад. 14.11. Для Т-цепи $R_1=462$ Ом, $R_2=425$ Ом; для П-цепи $R_1=587,5$ Ом, $R_2=540$ Ом; для ТМ-цепи $R_1=500$ Ом, $R_2=291$ Ом, $R_3=860$ Ом.

15.2. $n=3$; $C_1=C_3=71,344$ нФ; $L_2=51,370$ мГн

f , кГц	3,4	3,718	8,5	17
A_p , дБ	2	3	21,6	40

15.3. $n=3$; $C_1=C_3=327$ пФ; $L_2=3,68$ мкГн; при $f=11,5$ МГц $A_p=14,9$ дБ.

15.5. $n=5$; $C_1=C_5=1416$ пФ; $C_3=1990$ пФ; $L_2=L_4=261,5$ мкГн;

\hat{f} , кГц	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
A , дБ	1,0	8,19	15,3	21	25,8	29,9	33,6	36,9	39,9	42,7	45,3

$$15.7. H(j\omega) = \frac{1}{[(1-4,986\hat{f}^2) + j2,403\hat{f}][1-1,19\hat{f}^2 + j0,237\hat{f}]}$$

15.8

\hat{f} , кГц	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,75	2,0	2,5
A , дБ	2	8	13,5	18	21,8	25,1	31,9	37,4	46

15.10.

f , кГц	10	15	20
A_p , дБ	3	18,4	30,1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Добротворский И. Н.** Теория электрических цепей. Учебник для техникумов.— М.: Радио и связь, 1989.— 465 с.
2. **Шебес М. Р., Каблукова М. В.** Задачник по теории линейных электрических цепей.— М.: Высшая школа, 1990.— 544 с.
3. **Лосев А. К., Зиemelis Ю. М.** Задачник по теории линейных электрических цепей.— М.: Высшая школа, 1989.— 267 с.
4. **Воробиевко П. П.** Теория линейных электрических цепей. Сборник задач и упражнений.— М.: Радио и связь, 1989.— 323 с.
5. **Бирюков В. Н., Попов В. П., Семенов В. И.** Сборник задач по теории электрических цепей.— М.: Высшая школа, 1990.— 238 с.
6. **Ачкасова Г. А., Разумовская Е. К.** Сборник задач по теории электрических цепей.— М.: Радио и связь, 1984.— 144 с.
7. **Зайчик М. Ю.** Сборник задач и упражнений по теоретической электротехнике.— М.: Энергоатомиздат, 1988.— 294 с.
8. **Баскаков С. И.** Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач.— М.: Высшая школа, 1987.— 205 с.
9. **Дьяконов В. П.** Справочник по расчетам на микрокалькуляторах.— М.: Наука, 1986.— 226 с.
10. **Трохименко Я. К., Любич Ф. Д.** Радиотехнические расчеты на микрокалькуляторах.— М.: Радио и связь, 1983.— 255 с.
11. **Добротворский И. Н.** Теория электрических цепей. Лабораторный практикум.— М.: Радио и связь, 1990.— 216 с.
12. **Витков М. Г.** Методические указания по ТЭЦ.— М.: МИС, 1991.— 84 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Основы электростатики	5
Глава 2. Основные понятия	10
Глава 3. Резистивные цепи	26
Общие сведения	26
Неразветвленные цепи	28
Цепи с последовательным и параллельным соединением сопротивлений	48
Коэффициент передачи	60
Разветвленные цепи с одним источником напряжения	75
Цепи с одним источником тока	79
Цепи с несколькими источниками тока	83
Метод наложения	87
Преобразование источников тока в эквивалентный источник напряжения	89
Цепи с источниками напряжения и тока	93
Входные и взаимные сопротивления (проводимости)	94
Метод эквивалентного генератора (метод XX—КЗ)	99
Метод двух узлов	102
Общие методы расчета резистивных цепей	108
Глава 4. Электромагнетизм и электромагнитная индукция	144
Глава 5. Цепи с накопителями энергии при произвольных воздействиях	150
Глава 6. Цепи при гармонических воздействиях	155
Общие замечания	155
Простейшие RL - и RC -цепи при гармонических воздействиях	160
RLC -цепи при гармонических воздействиях	170
RLC -цепи с зависимыми источниками	179
Цепи с операционными усилителями	198
Глава 7. RL - и RC -цепи при гармоническом воздействии на переменной частоте	205
Глава 8. Резонансные явления в одиночных колебательных контурах	214
Последовательный пассивный колебательный контур	214
Активный колебательный контур	225
Параллельный пассивный колебательный контур	226
Реактивные двухполюсники	232
Глава 9. Связанные системы	238
Глава 10. Цепи при негармонических воздействиях	246
Мгновенные значения периодических напряжений и токов	246

Определение показаний приборов различных систем при напряжениях негармонической формы	254
Спектры периодических сигналов	259
Глава 11. Нелинейные цепи	271
Глава 12. Переходные процессы	280
<i>RL</i> - и <i>RC</i> -цепи в переходном режиме	280
Переходная и импульсная характеристики цепей первого порядка	295
Спектры непериодических сигналов	298
Простейшие цепи второго порядка в переходном режиме	305
Цепи с некорректными начальными условиями	313
Числовые расчеты временных оригиналов по операторным изображениям при наличии комплексных корней с помощью ПМК	317
Глава 13. Дифференцирующие и интегрирующие цепи	324
Глава 14. Четырехполюсники	328
Глава 15. Электрические фильтры	335
<i>Приложение 1.</i> Расчет распределений комплексных напря- жений и токов вдоль длинной линии	347
<i>Приложение 2.</i> Перемножители частот	350
<i>Приложение 3.</i> Удельное сопротивление и температурный коэффициент некоторых металлов	351
<i>Приложение 4.</i> Номинальные сопротивления и емкости	351
Ответы	352
Список литературы	358

