А.В. ПАНТЕЛЕЕВ

# ОПТИМАЛЬНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

## СИНТЕЗ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

*Рекомендовано в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений*

Москва
«Вузовская книга»
2008

УДК 517.977.5 : 519.21
ББК 32.965.9
П16

*Рекомендовано Редакционным советом факультета прикладной математики и физики МАИ в качестве учебного пособия*

Рецензенты:
д-р техн. наук, проф. *И.А. Богуславский*
д-р физ.-мат. наук, проф. *А.А. Меликян*

**Пантелеев А.В.**
П16 Оптимальные нелинейные системы управления: синтез при неполной информации / А.В. Пантелеев. — М.: Вузовская книга, 2008. — 192 с.: ил.

ISBN 978-5-9502-0338-1

Описан новый подход к синтезу оптимального управления непрерывными детерминированными и стохастическими системами при неполной непрерывной и дискретной мгновенной информации о состоянии на основе достаточных условий оптимальности. Изложена методология, позволяющая с единых позиций рассматривать решение трех задач: оптимального управления стохастическими системами, оптимального управления ансамблем траекторий детерминированных систем и оптимального управления детерминированными системами.

Для научных работников, инженеров-проектировщиков, студентов старших курсов и аспирантов вузов.

Предыдущее издание выходило под названием «Синтез оптимальных систем управления при неполной информации» в 1992 г.

**УДК 517.977.5 : 519.21**
**ББК 32.965.9**

ISBN 978-5-9502-0338-1

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена актуальной проблеме синтеза нелинейных систем управления, часто встречающейся в задачах проектирования подвижных объектов.

Предлагается единая схема исследования непрерывных стохастических и детерминированных систем при неполной непрерывной и дискретной информации на основе достаточных условий оптимальности. Как частный случай схема содержит процедуры нахождения оптимального программного управления и управления с полной обратной связью. Полученные результаты доведены до соотношений, которые можно использовать при синтезе.

Применение методик определения оптимального управления демонстрируется на примерах, допускающих аналитическое решение, и на ряде прикладных задач управления торможением космических летательных аппаратов (КЛА).

Материал книги обобщает результаты научных исследований, выполненных авторами на кафедре "Математическая кибернетика" факультета "Прикладная математика" Московского авиационного института.

Разд. 1 посвящен оптимальному управлению стохастическими системами при неполной непрерывной информации.

В разд. 2 рассмотрены проблемы оптимального управления ансамблем (пучком) траекторий детерминированных систем.

В разд. 3 содержатся результаты исследования проблемы синтеза оптимальных детерминированных систем при неполной непрерывной информации.

Разд. 4 посвящен оптимальному управлению стохастическими и детерминированными системами при неполной дискретной информации.

В разд. 5 приведены результаты решения ряда прикладных задач управления торможением летательного аппарата в атмосфере при неполной информации. Сформулированы методики синтеза оптимального управления и описаны алгоритмы численного решения уравнений, полученных в работе.

Авторы считают своим приятным долгом выразить признательность редактору Е.В.Лисовец за квалифицированную работу по улучшению текста рукописи, а также коллегам, сделавшим ряд ценных замечаний.

# ВВЕДЕНИЕ

При управлении движением космических летательных аппаратов (КЛА) различных типов актуальной является проблема наилучшего достижения цели управления, которая, как правило, формулируется с точки зрения достижения минимума некоторого критерия качества. При этом необходимо учитывать разнообразные факторы, влияющие на поведение управляемого объекта, например: атмосферные возмущения, ошибки измерений, неточность знания параметров объекта и внешней среды, неопределенность задания начальных условий движения и т.д. Аналогичные проблемы встречаются почти во всех задачах управления подвижными объектами.

Большинство известных подходов [17, 23, 38, 40, 52, 59, 64, 67, 77, 78, 84, 102, 137, 146, 156, 170] к решению проблем управления КЛА при наличии неопределенностей связаны с использованием различных эвристических принципов, а также с построением оптимальных по различным критериям программных управлений и стратегий с полной обратной связью.

Анализ этих подходов применительно к проблеме управления КЛА обусловил необходимость построения общей теории синтеза оптимальных алгоритмов управления, которые используют неполную информацию о поведении объекта, поступающую с измерительной системы. Кроме того, требование реализации алгоритмов управления и обработки информации на ЦВМ ставит проблему определения оптимального управления непрерывными объектами как при непрерывном, так и при дискретном получении информации.

В данной работе рассматривается проблема оптимального управления при *неполной мгновенной информации*, т.е. текущая информация сразу же используется для выработки управления и не накапливается.

Более общая проблема, задача с накоплением получаемой информации [17, 24, 87, 89, 113, 148, 158, 172, 183–185, 191, 194, 196, 197, 200], для непрерывных систем сводится к решению уравнения Мортенсена в вариационных производных второго порядка [213], а в качестве модели системы используется уравнение нелинейной фильтрации. Метод достаточных координат [77, 146, 148] позволяет получить приближенное решение задачи. Применение оптимальных алгоритмов управления с накоплением информации ограничено необходимостью решения в реальном масштабе времени уравнения нелинейной фильтрации или системы уравнений, определяющей изменение достаточных координат.

Оптимальное управление, использующее мгновенную информацию, относительно проще определить и реализовать на практике.



Развиваемый в работе подход позволяет учесть наличие возмущений, неточность и неполноту информации, содержащейся в измерениях, неопределенность задания начальных условий движения, неточность задания параметров модели объекта.

Авторами предложены пути решения *двух проблем*.

*Первая проблема* – синтез оптимального управления непрерывными стохастическими и детерминированными системами при неполной непрерывной мгновенной информации о состоянии.

Здесь управляемый объект и поступающие измерения считаются непрерывными.

*Вторая проблема* – синтез оптимального управления непрерывными стохастическими и детерминированными системами при неполной дискретной мгновенной информации о состоянии.

Объект управления считается непрерывным, а измерения поступают в дискретные моменты времени. Исследуется непрерывно-дискретная система, а методы исследования не связаны с предварительной дискретизацией математической модели объекта и применением аппарата синтеза оптимальных дискретных систем.

Предполагается, что в момент получения информации по результатам измерений вырабатывается кусочно-непрерывное программное управление, зависящее от времени. Управление прилагается к системе вплоть до следующего измерения. Случай постоянного управления между измерениями рассмотрен, например, в [216].

Приведем обзор состояния *первой проблемы*, теоретическому исследованию которой посвящены разд. 1–3, не претендуя на полноту.

Для краткости изложения ограничения, накладываемые на элементы постановок задач, здесь и далее во введении опущены.

Пусть поведение моделей объекта управления и измерений описывается системой стохастических дифференциальных уравнений Ито [34, 35, 44, 80, 121, 160, 224]:

$$dX = f(t,X(t),u(t))\,dt + \sigma(t,X(t),u(t))\,dW\ , \quad X(t_0) = X_0\ ,$$
$$dY = c(t,X(t),u(t))\,dt + \gamma(t,X(t),u(t))\,dV\ , \quad Y(t_0) = Y_0\ , \qquad (B.1)$$

где $X$ – вектор состояния объекта управления, $Y$ – вектор измерения, $f(t,x,u)$, $\sigma(t,x,u)$, $c(t,x,u)$, $\gamma(t,x,u)$ – заданные функции; $W(t)$, $V(t)$ – стандартные винеровские независимые случайные процессы; $u$ – вектор управления, $t$ – время, $t_0$ – момент начала процесса управления; $X_0$, $Y_0$ – начальные условия.

Будем считать, что при управлении используется информация только о текущей величине вектора измерения, т.е. $u(t) = u(t,Y(t))$.

На рис. В.1 изображена схема рассматриваемой системы управления.

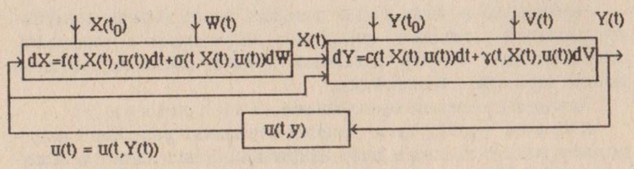


Рис. В.1

Для упрощения обозначений введем расширенный вектор состояния $X = (Y,X) = (X^1, X^2)$ и функции

$$f(t,x,u) = \begin{bmatrix} c(t,x,u) \\ f(t,x,u) \end{bmatrix}, \quad \sigma(t,x,u) = \begin{bmatrix} \gamma(t,x,u) & 0 \\ 0 & \sigma(t,x,u) \end{bmatrix}, \quad W(t) = \begin{bmatrix} V(t) \\ W(t) \end{bmatrix}.$$

Вектор $X^1$ является выходом измерительной системы, который используется далее при управлении, а вектор $X^2$ описывает состояние объекта управления, точная информация о котором отсутствует. Таким образом, вектор состояния объекта управления $X^2$ и вектор измерения $X^1$ образуют некоторый расширенный вектор, называемый вектором состояния системы.

Тогда поведение модели системы управления описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX = f(t,X(t),u(t))\,dt + \sigma(t,X(t),u(t))\,dW\ , \quad X(t_0) = X_0\ , \qquad (В.2)$$

где $X$ – вектор состояния системы, $X = (X^1, X^2) \in E^n$, $X^1 = (X_1,\dots,X_m)^T$, $X^2 = (X_{m+1},\dots,X_n)^T$, $0 \le m \le n$; $u$ – вектор управления, $u \in U \subset E^q$, $U$ – некоторое заданное множество возможных значений управления; $t \in T' = [t_0,t_1] = T \cup \{t_0\} \cup \{t_1\}$, $T'$ – интервал времени функционирования системы, моменты времени $t_0$ и $t_1$ заданы; $W(t)$ – $k$-мерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от $X_0$; $f(t,x,u)$: $T' \times E^n \times U \to E^n$, $\sigma(t,x,u)$ – матричная функция размера $n \times k$, $E^n = B$ – $n$-мерное евклидово пространство. Предполагается, что о компонентах вектора $X^1 \in E^m$ известна текущая информация, а о компонентах вектора $X^2 \in E^{n-m}$ она отсутствует.

Начальное условие $X_0$ определяется плотностью вероятности

$$p(t_0,x) = p_0(x) \in P \qquad \forall\, x \in B\ , \qquad (В.3)$$

где множество $P = \{\, p(x) \mid p(x) \in C^2(B)\ , \int_B p(x)\,dx = 1,\ p(x) \ge 0 \quad \forall\, x \in B \,\}$.

Предполагается, что при управлении используется информация только о времени и о текущей величине вектора $X^1$, т.е. управление $u(t)$, применяемое в каждый момент времени $t \in T'$, имеет вид управления с обратной связью по неполному вектору состояния: $u(t) = u(t,X^1(t))$ (рис. В.2).



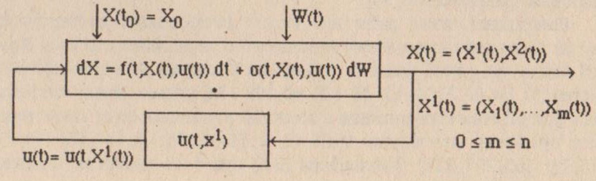


Рис. В.2

Число $m$, $0 \le m \le n$, определяется условиями информированности. При $m = n$ имеется информация о всех координатах вектора $X$: система, представленная на рис.(В.2), будет системой с полной обратной связью, а при $m = 0$ система является разомкнутой по состоянию и применяется так называемое программное управление $u(t)$.

В данной работе используется концепция описания поведения модели системы с помощью уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК) [7, 33–35, 65, 154, 160, 161, 220] для плотности вероятности $p(t,x)$:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\,[\, f_i(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x)] +$$

$$+ (1/2) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\,[\, a_{ij}(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x)]\ , \qquad (В.4)$$

где $a_{ij}(t,x,u) = \sum_{l=1}^{k} \sigma_{il}(t,x,u)\,\sigma_{jl}(t,x,u)$, с начальным условием (В.3).

Требуется найти управление $u^*(t,x^1)$, минимизирующее функционал качества управления

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \int_B f^0(t,\, p(t,x),\, u(t,x^1))\, dx\, dt + F(p(t_1,x))\ , \qquad (В.5)$$

где $f^0(t,p,u)$, $F(p(x))$ – заданные функция и функционал. Заметим, что функционал (В.5) нелинеен относительно плотности вероятности.

Изложение ведется по двум связанным между собой направлениям: решаются з а д а ч а 1 непосредственного определения искомого оптимального управления $u^*(t,x^1)$, обеспечивающего минимум (В.5) для заданной начальной плотности вероятности (В.3), и з а д а ч а 2 определения так называемых оптимальных синтезирующих функций, порождающих для различных начальных плотностей вероятности оптимальные управления в требуемом классе. Взаимосвязь обоих направлений аналогична известной связи принципа максимума и уравнения Беллмана для детерминированных систем.

Основной методологией исследования является применение принципа расширения В.Ф.Кротова [36, 67, 68, 90], являющегося одной из форм принципа сравнения [86, 94].

Наибольшее число работ по синтезу оптимальных стохастических систем посвящено определению оптимального управления с полной обратной связью на основе решения уравнения Беллмана для стохастических систем [10, 54, 61, 70, 71, 82, 89, 113, 160, 169, 198] и нахождению оптимального программного управления с помощью различных форм стохастического принципа максимума [9, 13, 18, 41, 55, 72, 93, 113, 144, 153, 171, 157, 193, 201, 205, 207, 232]. Функционал (В.5) при этом линеен по плотности вероятности.

В [68, 119, 129, 130] предложены формы применения принципа расширения В.Ф.Кротова к стохастическим системам (рассматривались предельные случаи информированности: $m = 0$ и $m = n$ ). В работах [ 166, 167] разработан общий подход к синтезу оптимального управления при неполной информации, который связан с формализацией информационных ограничений в виде дополнительных дифференциальных связей. Для задач, рассмотренных в монографии, использование этого подхода приводит к необходимости поиска дополнительных функций типа Лагранжа, число которых возрастает с ухудшением информированности. Достаточные условия оптимальности, предложенные в [166, 167], совпадают с изложенными в разд.1 при наличии полной информации о векторе состояния.

Для решения задач поиска субоптимального управления линейными системами с неполной информацией применяются различные подходы [114, 163, 199, 215], в частности, метод построения управления с учетом информации наблюдающих устройств и метод параметрического синтеза матрицы обратных связей по доступным измерениям. В данной работе подход является строго оптимальным, а реализация алгоритмов управления не требует постановки наблюдающих устройств.

Проблеме оптимального управления нелинейными стохастическими системами с неполной информацией посвящены также работы [42, 131, 136, 175–180, 195, 229–231], в которых установлены различные необходимые условия оптимальности для некоторых классов систем и линейного по плотности вероятности функционала (В.5).

Для синтеза оптимальных и субоптимальных стохастических систем с различными типами неопределенностей и сложностью критериев качества управления в задачах, которые в основном отличаются от классических, применяются методы, изложенные в [6, 8, 45, 46, 53, 59, 64, 84, 146, 173].

Так как при синтезе оптимального управления стохастическими системами задача сводится к детерминированной проблеме управления решением дифференциального уравнения с частными производными, то полученные в работе результаты могут рассматриваться также как методы управления системами с распределенными параметрами [26, 27, 38, 56, 81, 118, 142, 180].



В разд. 1 сформулированы и доказаны достаточные условия оптимальности управления непрерывными стохастическими системами с неполной непрерывной мгновенной информацией о состоянии. Рассматриваются задачи как с фиксированным, так и с незаданным временем окончания процесса управления. Получены соотношения для определения оптимального управления и оптимальных синтезирующих функций, порождающих оптимальные управления в требуемом классе, определяемом степенью информированности о векторе состояния. Предложены методики нахождения оптимального управления, применение которых продемонстрировано на примерах и в задаче синтеза линейных стохастических регуляторов.

Если при наличии неопределенности задания начальных условий движения некоторым множеством возмущения на объект отсутствуют, изучаемая проблема становится задачей управления а н с а м б л е м (пучком) траекторий, исходящим из заданного множества начальных условий $\Omega$ [74], исследованию которой посвящен разд.2.

Различным формам описания и синтеза оптимального управления ансамблем траекторий посвящены работы [5, 15, 20–21, 25, 31, 48, 50, 62, 73, 91, 95–99, 103, 141, 151, 159, 165, 182], связанные с построением программных и замкнутых управлений или субоптимальных управлений с неполной информацией при заранее заданной структуре управления с неопределенными элементами, подлежащими нахождению.

Поведение модели объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \qquad (В.6)$$

следующим из (В.2) при $\sigma(t,x,u) \equiv 0$.

Начальные условия $x(t_0)$ заданы компактным множеством $\Omega$ положительной меры с кусочно-гладкой границей

$$x(t_0) = x_0 \in \Omega \subset E^n \qquad (В.7)$$

Предполагается, что при управлении используется информация только о времени и о текущей величине вектора $x^1$, т.е. управление $u(t)$, применяемое в каждый момент времени $t \in T'$, имеет вид управления с обратной связью по неполному вектору состояния: $u(t) = u(t, x^1(t))$ (рис. В.3).

Число $m$, $0 \le m \le n$, определяется условиями информированности.

Каждому допустимому управлению $u(t,x^1)$ и множеству $\Omega$ поставим в соответствие ансамбль (пучок) траекторий уравнения (В.6) $X(t; u(t,x^1))$, $t \in T'$ – объединение решений уравнения (В.6) по всем возможным начальным условиям (В.7):

$$X(t; u(t,x^1)) = \cup \{ x(t; u(t,x^1), x(t_0)) \mid x(t_0) \in \Omega \}, \ t \in T'$$

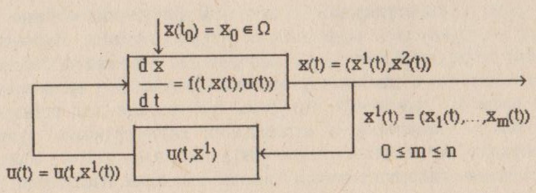


Рис. В.3

В разд.2 используется вероятностный подход к описанию поведения ансамбля траекторий с помощью уравнения Лиувилля [33, 48, 50, 97–99]:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [\, f_i(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x)\, ] = A^{u(\cdot)}[p(t,x)] \qquad (В.8)$$

с начальным условием

$$p(t_0,x) = p_0(x) \in P^0 , \qquad (В.9)$$

где $A^{u(\cdot)}[\cdot]$ – дифференциальный оператор первого порядка,

$$P^0 = \{ p(x) \mid p(x) \in C^1(B) ,\ \int_B p(x)\, dx = 1,\ p(x) \ge 0 \quad \forall x \in B ,\ p(x) = 0 \quad \forall x \notin \Omega \} .$$

Уравнение (В.8) является частным случаем уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (В.4), когда в уравнении (В.2) $\sigma(t,x,u) \equiv 0$ .

В разд.2 с помощью доказанных достаточных условий оптимальности для стохастических систем решена задача оптимального управления ансамблем траекторий детерминированных систем при неопределенности задания начальных условий и неполной информации о векторе состояния.

Для случая линейного по плотности вероятности функционала качества

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \int_B f^0(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x)\, dx\, dt + \int_B F(x)\, p(t_1,x)\, dx = \int_\Omega I(x_0,d)\, p_0(x_0)\, dx_0 , \qquad (В.10)$$

где $d$ – пары функций $(x(t), u(t) = u(t,x^1(t)))$ ,

$$I(x_0,d) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),u(t,x^1(t)))\, dt + F(x(t_1)) , \qquad (В.11)$$

поставлена и решена задача поиска о п т и м а л ь н о г о в с р е д н е м управления ансамблем траекторий, так как функционал (В.10) характеризует среднее значение функционалов (В.11) на множестве $\Omega$ .

Также решена задача об оптимальной транспортировке ансамбля траекторий, когда оптимальное в среднем управление ансамблем обеспечивает одновременно оптимальное управление каждой отдельной образующей его траекторией.

В случае отсутствия внешних возмущений и задания начальной



плотности вероятности вырожденным распределением изучаемая проблема становится задачей оптимального управления детерминированными системами при задании начальных условий с помощью некоторого многообразия размерности от 0 до n , рассматриваемой в разд.3.

Математической моделью системы управления здесь является дифференциальное уравнение (В.6), а функционалом качества – (В.11).

При $m = 0$ оптимальное программное управление $u^*(t)$ находится с помощью принципа максимума [85]. Среди огромного числа работ по обобщению и развитию этого принципа, а также разработке численных процедур решения следует выделить [3, 10, 11, 19, 28, 32, 43, 78, 92, 100, 123, 130, 155, 168, 174]. В общем случае программное управление является оптимальным только для заданного начального условия $x(t_0) = x_0$ .

При $m = n$ оптимальное управление с полной обратной связью $u^*(t,x)$ ищется с помощью решения уравнения Беллмана [4, 14, 19, 29, 51, 68, 125, 134, 150, 160, 164 ]. Оно порождает оптимальные программные управления для всех начальных условий из пространства состояний.

Задачи с неполной информацией менее исследованы. Так в [37] получены необходимые условия оптимальности в форме "нового принципа максимума", а в [12] для случая линейных систем предложен метод синтеза оптимального управления по выходу, где структура искомого управления определяется только в ходе численного решения.

Второе направление заключается в параметрическом синтезе заданной структуры регулятора по наблюдаемым переменным [49, 63, 69, 95, 112, 115, 124, 189, 190, 204, 206, 208, 210, 223, 225] , что приводит к нахождению субоптимального управления. Для нелинейных систем, оптимизируемых по критерию обобщенной работы, метод субоптимального синтеза в условиях неполной степени наблюдаемости изложен в [64].

Третье направление связано с идеей управления линейными системами по полному восстановленному вектору состояния с применением наблюдателей [2, 57, 79, 214, 217, 221, 222, 226]. В данной работе использования наблюдателей состояния не требуется.

Четвертое направление представлено работой [68], где сформулирована задача поиска оптимального "по наихудшему случаю" управления при наличии неполной информации о правых частях уравнений и состояния системы. Полученные условия оптимальности определяют управление, обеспечивающее гарантированное при данных условиях информированности значение функционала качества, как правило, завышенное.

В разд.3 сформулированы и доказаны достаточные условия оптимальности управления непрерывными детерминированными системами при неполной непрерывной мгновенной информации о векторе состояния. Получены соотношения для определения оптимальных синтезирующих функций, порождающих оптимальные программные управления для всех начальных условий из заданного множества.

Рассмотрена задача с подвижным правым концом траектории, где получены две различные формы записи аналога условий трансверсальности.

Сформированы методики нахождения оптимального управления, применение которых продемонстрировано на примерах и в задаче синтеза линейных детерминированных регуляторов.

Приведем обзор состояния в т о р о й п р о б л е м ы, теоретическому исследованию которой посвящен разд. 4.

Рассматривается задача оптимального управления непрерывными динамическими системами, описываемыми стохастическими дифференциальными уравнениями. В отличие от постановки задачи, изучаемой в разд. 1, предполагается, что на траекториях системы в дискретные моменты времени производятся измерения, по результатам которых принимается решение об управлении. Оптимальное управление ищется в классе функций, порождающих для всех траекторий соответствующие кусочно-непрерывные программные управления, зависящие от времени, на каждом интервале, следующем за точкой получения информации. Полученные результаты могут быть использованы при синтезе оптимальных систем с ЦВМ в контуре управления.

Вторая проблема значительно менее изучена, чем первая. Имеется ряд подходов к синтезу оптимальных алгоритмов управления стохастическими системами, использующих идею накопления информации. В основном исследования ограничены классом линейных систем.

В разд. 4 исследуется только задача оптимального управления по мгновенной информации.

Задачи синтеза локально-оптимальных управлений и поиска гарантирующих стратегий [170] представляются альтернативными направлениями исследований.

В разд. 4 предполагается, что поведение модели объекта управления описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито:

$$dX = f(t,X(t),u_k(t))\,dt + \sigma(t,X(t),u_k(t))\,dW, \quad X(t_0) = X_0, \quad t \in T_k, \qquad (В.12)$$

где $X$ – вектор состояния, $X \in E^n$; $u_k$ – вектор управления, $k = 0,1,\dots,N-1$, $u_k \in U \subseteq E^l$, $U$ – некоторое заданное множество; $t$ – время, $t \in T = [t_0, t_N) = \bigcup_{k=0}^{N-1} T_k$, моменты времени $t_0$ и $t_N$ и разбиение интервала $T$ на непересекающиеся подынтервалы $T_k$ заданы; $W(t)$ – $\alpha$-мерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от $X_0$, $f(t,x,u_k)$: $T \times E^n \times U \to E^n$; $\sigma(t,x,u_k)$ – матричная функция размера $n \times \alpha$. Начальное условие $X_0$ определяется плотностью вероятности (В.3).

Предполагается, что на траекториях системы (В.12) производятся измерения вида

$$Z(t_k) = h(t_k, X(t_k)) + \eta(t_k)\,V(t_k), \quad k = 0,1,\dots,N-1, \qquad (В.13)$$



где $Z$ – вектор измерений, $Z \in E^m$; $\{V(t_k)\}_{k=0}^{N-1} \subset E^\beta$ – $\beta$-мерная последовательность стандартных гауссовских случайных величин; $h(t,x)$: $T \times E^n \to E^m$ – непрерывная ограниченная функция; $\eta(t_k)$ – матрица размера $m \times \beta$.

Множество допустимых управлений образуют функции $u_k(t,z)$: $T_k \times E^m \to U$ которые на траекториях системы (В.12), (В.13) для различных начальных условий порождают управления $\{u_k(t) = u_k(t, Z(t_k))\}_{k=0}^{N-1}$ из рассматриваемого класса.

Для описания поведения непрерывно-дискретной системы управления (В.12)–(В.13) используется уравнение типа ФПК. Функционал качества управления определяется на его решениях, порожденных допустимыми управлениями. Как и в разд. 1, изложение ведется по двум связанным между собой направлениям: решается з а д а ч а 1' непосредственного определения искомого оптимального дискретного управления $u_k^*(t,z)$ и з а д а ч а 2' определения так называемой оптимальной синтезирующей функции, порождающей для различных начальных плотностей вероятности оптимальные управления в требуемом классе.

Получены достаточные условия оптимальности искомого управления и соотношения для его определения. Как частный случай рассматривается задача управления ансамблем траекторий детерминированных систем.

Во всех разделах рассматриваются частные и предельные случаи информированности о векторе состояния, в которых устанавливаются связи с известными в теории управления результатами, такими как уравнение Мортенсена, условия Флеминга, принцип максимума и уравнение Беллмана для детерминированных и стохастических систем.

В разд. 5 демонстрируется применение изложенных теоретических результатов к решению прикладных задач оптимального управления КЛА при неполной информации. В качестве объекта исследования выбрана проблема осуществления мягкой посадки в атмосфере планеты. Одна из схем спуска состоит из двух участков: участка аэродинамического торможения и участка реактивного торможения [52, 137]. В работе поставлен и решен ряд задач синтеза оптимального управления при различных условиях информированности о поведении КЛА. Предложены методики синтеза оптимального управления, эффективность которых подтверждают результаты выполненных расчетов.

Материал книги составляет основу теоретического обобщения и развития методов синтеза оптимальных динамических систем в условиях неопределенности и дополняет имеющиеся подходы к решению этой проблемы.

# 1. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ ПРИ НЕПОЛНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Рассмотрена задача оптимального управления системами, описываемыми стохастическими дифференциальными уравнениями. Для случая нелинейного по плотности вероятности функционала сформулированы и на основе принципа расширения доказаны достаточные условия оптимальности управления непрерывными стохастическими системами при неполной непрерывной мгновенной информации о состоянии. Выведены соотношения, позволяющие находить как непосредственно искомое оптимальное управление, так и оптимальные синтезирующие функции, порождающие оптимальные управления в требуемом классе функций, определяемом степенью информированности. Подробно исследованы предельные случаи информированности о векторе состояния, когда либо имеется информация о всех координатах вектора состояния, либо она полностью отсутствует.

Приведено решение примеров, в которых оптимальные синтезирующие функции и управления могут быть найдены аналитически.

Рассмотрены задачи как с фиксированным, так и с нефиксированным моментом окончания процесса управления, который может определяться временем попадания на заданную поверхность или выбираться наилучшим.

Получено решение задачи синтеза оптимального линейного стохастического регулятора при неполной информации о состоянии.

## 1.1. Постановка задачи

Пусть поведение модели системы управления описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито [41, 55, 57, 215, 276, 350]:

$$dX = f(t,X(t),u(t))\,dt + \sigma(t,X(t),u(t))\,dW\ , \qquad X(t_0) = X_0\ , \tag{1.1}$$

где $X$ – вектор состояния системы, $X = (X^1, X^2) \in E^n$, $X^1 = (X_1,\dots,X_m)^T$, $X^2 = (X_{m+1},\dots,X_n)^T$, $0 \le m \le n$ (предположим, что о компонентах вектора $X^1 \in E^m$ известна текущая информация, а о компонентах вектора $X^2 \in E^{n-m}$ она отсутствует); $u$ – вектор управления, $u \in U \subset E^q$, $U$ – некоторое заданное множество; $t$ – время, $t \in T' = [t_0, t_1] = T \cup \{t_0\} \cup \{t_1\}$, $T'$ – интервал времени функционирования системы, моменты времени $t_0$ и $t_1$ заданы; $W(t)$ – $k$-мерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от $X_0$; $f(t,x,u)$: $T' \times E^n \times U \to E^n$, $\sigma(t,x,u)$ – матричная функция размера $n \times k$; $E^n$ – $n$-мерное евклидово пространство.

Обозначим: $B = E^n$, $B_1 = E^m$, $B_2 = E^{n-m}$, $Q = (t_0, t_1) \times E^n$, $Q' = [t_0, t_1] \times E^n$.



Начальное условие $X_0$ определяется плотностью вероятности

$$p(t_0,x) = p_0(x) \in P \qquad \forall x \in B, \tag{1.2}$$

где $P = \{ p(x) \mid p(x) \in C^2(B)\ ,\ \int_B p(x)\,dx = 1\ ,\ p(x) \ge 0 \quad \forall x \in B \}$, $C^k(B)$ – множество $k$ раз непрерывно дифференцируемых функций.

Предполагается, что при управлении используется информация только о времени и о текущей величине вектора $X^1$, т.е. управление $u(t)$, применяемое в каждый момент времени $t \in T'$, имеет вид управления с обратной связью по неполному вектору состояния: $u(t) = u(t, X^1(t))$.

Число $m$, $0 \le m \le n$, определяется условиями информированности. При $m = n$ имеется информация о всех координатах вектора $X$ и система, представленная на рис. 1.1, будет системой с полной обратной связью, а при $m = 0$ – системой, разомкнутой по состоянию, где применяется так называемое программное управление $u(t)$.

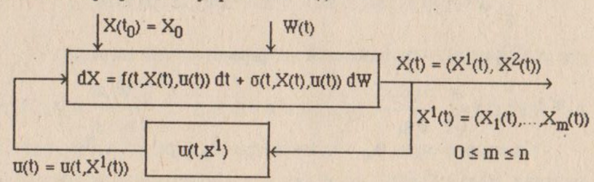


Рис. 1.1

Множество допустимых управлений $\gamma_m$ состоит из функций $u(t, x^1)$: $T' \times B_1 \to U$ таких, что для всех $i = 1,\dots,n$ ; $j = 1,\dots,k$ выполняются следующие условия [160, 224]:

1. Функции $f_i^{u(\cdot)}(t,x) = f_i(t,x,u(t,x^1))$ , $\sigma_{ij}^{u(\cdot)}(t,x) = \sigma_{ij}(t,x,u(t,x^1))$ определены на $Q'$, кусочно-непрерывны по $t$ на $T$ $\forall x \in B'$, $\forall t \in T'$ $f_i^{u(\cdot)}(t,.) \in C^1(B)$ и имеют ограниченные первые производные по $x$; функции $\sigma_{ij}^{u(\cdot)}(t,.) \in C^2(B)$ и имеют ограниченные первые и вторые производные по $x$.

2. Существует $c_1 = \mathrm{const} > 0$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{u(\cdot)}(t,x)\, z_i z_j \ge c_1 |z|^2 \qquad \forall (t,x) \in Q'\ ,\ \forall z \in B\ ,$$

где $a_{ij}^{u(\cdot)}(t,x) = a_{ij}(t,x,u(t,x^1))$ , $\quad a_{ij}(t,x,u) = \sum_{l=1}^{k} \sigma_{il}(t,x,u)\,\sigma_{jl}(t,x,u)$ .

Тогда решение уравнения (1.1) существует, единственно и является непрерывным марковским процессом. Если плотность вероятности этого процесса $p(t,x) \in C^{1,2}(Q)$, где $C^{1,2}(Q)$ – пространство непрерывных на $Q$ функций вместе с частными производными $\partial p/\partial t$, $\partial p/\partial x_i$, $\partial^2 p/\partial x_i \partial x_j$, $(i,j=1,\ldots,n)$, то она удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК) [33, 44, 53, 54, 65, 220]:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[f_i(t,x,u(t,x^1))p(t,x)] + (1/2)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[a_{ij}(t,x,u(t,x^1))p(t,x)] =$$

$$= A^{u(\cdot)}[p(t,x)] \quad \forall (t,x) \in Q, \tag{1.3}$$

с начальным условием (1.2). Здесь: $A^{u(\cdot)}[.]$ – дифференциальный оператор.

Заметим, что для каждого управления $u(t,x^1) \in \gamma_m$ и соответствующего решения $p(t,x)$ уравнения (1.3) $\forall \varphi(t,x) \in C^{1,2}(Q)$ выполняется соотношение [34, 113]

$$\int_B A^{u(\cdot)}[p(t,x)]\,\varphi(t,x)\,dx = \int_B A_*^{u(\cdot)}[\varphi(t,x)]\,p(t,x)\,dx, \tag{1.4}$$

где $A_*^{u(\cdot)}[\varphi(t,x)]$ – сопряженный дифференциальный оператор,

$$A_*^{u(\cdot)}[\varphi(t,x)] = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u(t,x^1)) + (1/2)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t,x,u(t,x^1)).$$

Обозначим через $D_m$ множество пар $d_m = (p(t,x),u(t,x^1))$, где функции $p(t,x) \in C^{1,2}(Q)$, $u(t,x^1) \in \gamma_m$ и удовлетворяют уравнению (1.3) с начальным условием (1.2).

Определим на множестве $D_m$ функционал качества управления

$$J(p_0(x), d_m) = \int_{t_0}^{t_1}\int_B f^0(t,p(t,x),u(t,x^1))\,dx\,dt + F(p(t_1,x)), \tag{1.5}$$

где $f^0(t,p,u)$, $F(p(x))$ – заданные непрерывная функция и непрерывный функционал, $f^0(t,p,u)$: $T' \times E^1_+ \times U \to E^1$, $F(p(x))$: $P \to E^1$, $E^1_+ = [0,\infty)$; $p(x) = p(t,x)$ при фиксированном $t$. Дополнительные ограничения на функции, входящие в (1.1), (1.5), накладываются далее по мере необходимости.

Примеры функционала (1.5):

1) если $f^0(t,p(t,x),u(t,x^1)) = [p(t,x) - p_{оп}(t,x)]^2$,

$$F(p(t_1,x)) = \int_B [p(t_1,x) - p_{оп}(t_1,x)]^2\,dx,$$

то функционал описывает отклонение текущей плотности вероятности от опорной $p_{оп}(t,x)$;

2) если $f^0(t,p(t,x),u(t,x^1)) = f^0(t,x,u(t,x^1))\,p(t,x)$, $F(p(t_1,x)) = \int_B F(x)\,p(t_1,x)\,dx$, то функционал (1.5) характеризует среднее значение функционала $I = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t,X(t),u(t))\,dt + F(X(t_1))$, определенного на траекториях системы (1.1);



3) если $f^0(t,p(t,x),u(t,x^1)) \equiv 0$, $F(p(t_1,x)) = [\int_B x\,p(t_1,x)dx - \hat{x}_{оп}]^2$,

то функционал (1.5) характеризует степень отклонения конечного значения математического ожидания от опорного $\hat{x}_{оп}$.

Далее рассматриваются две задачи. В первой задаче начальная плотность вероятности считается заданной. Во второй – решение ищется сразу для всех допустимых начальных плотностей.

**Задача 1.** Требуется найти такой элемент $d_m^* = (p^*(t,x),u^*(t,x^1)) \in D_m$, что

$$J(p_0(x), d_m^*) = \min_{d_m \in D_m} J(p_0(x), d_m). \;\blacksquare \tag{1.6}$$

Одновременно рассмотрим более общую задачу нахождения так называемых оптимальных синтезирующих функций вида $u^*(t,x^1; p(x))$: $T' \times B_1 \times P \to U$, являющихся функциями времени, вектора $x^1$ координат, информация о которых известна, и функционалами от плотности вероятности $p(x)$. Предполагается, что каждая из оптимальных синтезирующих функций (при фиксированном $m$) для заданной начальной плотности вероятности порождает оптимальное управление $u^*(t,x^1) \in \gamma_m$, т.е. если имеется решение $p^*(t,x)$ уравнения (1.3) совместно с $u = u^*(t,x^1; p(x))$ для произвольной начальной плотности вероятности $p(t_0,x) \in P$, то $u^*(t,x^1; p^*(t,x)) = u^*(t,x^1) \in \gamma_m$.

**Задача 2.** Требуется найти такую синтезирующую функцию $u^*(t,x^1; p(x))$, что

$$J(p(t_0,x), p^*(t,x), u^*(t,x^1; p^*(t,x))) = \min_{d_m \in D_m} J(p(t_0,x),d_m) \quad \forall p(t_0,x) \in P. \;\blacksquare \tag{1.7}$$

З а м е ч а н и я. **1.** В задаче 2 считается, что множество $D_m$ зависит от начальной плотности вероятности. Эта зависимость с целью уменьшения громоздкости обозначений явно не указана, но везде далее предполагается.

**2.** Задача 2 охватывает проблему поиска $n+1$ оптимальной синтезирующей функции, каждая из которых порождает оптимальные управления в соответствующем классе функций, определяемом числом $m$ $(0 \le m \le n)$, т.е. числом используемых в управлении компонент вектора состояния.

**3.** Предполагается, что минимум в (1.6), (1.7) и оптимальные синтезирующие функции вида $u^*(t,x^1; p(x))$ существуют. При невыполнении этого предположения постановка задачи может быть сформулирована в терминах минимизирующих последовательностей [28, 36, 67, 68].

**4.** При менее жестких ограничениях на правые части уравнения (1.1) следует использовать понятие слабого решения [35, 45, 80, 172], а решение уравнения (1.3) понимать в обобщенном смысле [76, 113, 154, 149, 161, 195].

**5.** Условия, накладываемые на правую часть уравнения (1.1), соответствуют ситуации, когда случайному воздействию подвержены все компоненты вектора состояния. Во многих системах, представляющих практический интерес, члены, описывающие случайные воздействия, входят лишь в некоторые уравнения. Тогда решение уравнения (1.3) и сопряженного к нему также следует понимать в обобщенном смысле [30, 160].

Таким образом, проведена редукция исходной стохастической задачи к детерминированной проблеме управления решением уравнения в частных производных (1.3), что отражено на рис. 1.2.

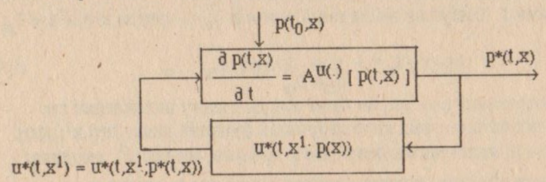


Рис. 1.2

Здесь роль новой модели объекта управления играет уравнение (1.3), а состояние описывается функцией $p(t,x)$. При решении задачи 2 следует иметь в виду наличие двух уровней определения управления системой (1.1). Управление, представленное на рис. 1.2, для каждой начальной плотности вероятности $p(t_0,x)$ порождает оптимальное управление $u^*(t,x^1)$ в задаче 1, которое затем используется в схеме, изображенной на рис 1.1, для управления траекториями исходной системы.

Теперь сформулируем и докажем достаточные условия оптимальности в задаче 1, а затем с использованием полученного результата условия оптимальности в задаче 2.

## 1.2. Достаточные условия оптимальности

### 1.2.1. Достаточные условия оптимальности в задаче 1

Введем в рассмотрение множество $\Pi$ функций $S(t,p(x)) : T'\times P \to E^1$, непрерывных на $T'\times P$, непрерывно дифференцируемых по $t$ и имеющих непрерывную вариационную (функциональную) производную по аргументу $p(x)$, причем $\dfrac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)} \in C^{1,2}(Q)$ и непрерывна на $Q'$, а также конструкции

$$R(t,p(x),u) = \frac{\partial S(t,p(x))}{\partial t} + \int_{B} \{A_*^{u}[\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}]\, p(x) - f^0(t,p(x),u)\}\, dx\,, \quad (1.8)$$

$$G(t_1,p(x)) = S(t_1,p(x)) + F(p(x))\,, \quad (1.9)$$

где $\forall\, \varphi(t,x) \in C^{1,2}(Q)$



$$A_*^{u}[\varphi(t,x)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + (1/2)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x_i\, \partial x_j} a_{ij}(t,x,u)$$

и $A_*^{u(.)}[\varphi(t,x)] = A_*^{u}[\varphi(t,x)]$ при $u = u(t,x^1)$.

Предположим, что при фиксированном $m$ $(0 \le m \le n)$ функции $R(t,p(x),u)$, $G(t_1,p(x))$ в (1.8), (1.9) достигают экстремальных значений:

$$r_m(t) = \max_{p(x)\in P}\{\frac{\partial S(t,p(x))}{\partial t} + \int_{B_1}[\max_{u\in U}\int_{B_2}\{A_*^{u}[\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}]\, p(x) - f^0(t,p(x),u)\}\, dx^2]\, dx^1\}\,, \quad (1.10)$$

$$g = \min_{p(x)\in P} G(t_1,p(x))\,, \quad (1.11)$$

где функция $r_m(t)$ – кусочно-непрерывна на $T$.

Пусть имеется пара $d_m^* = (p^*(t,x),u^*(t,x^1)) \in D_m$.

**Теорема 1.1** (достаточные условия оптимальности в задаче 1). Если существует такая функция $S(t,p(x)) \in \Pi$, что пара $d_m^* \in D_m$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $R(t, p^*(t,x),u^*(t,x^1)) = r_m(t)$ почти всюду на $T$;

2) $G(t_1, p^*(t_1,x)) = g$,

то справедливо условие (1.6). ■

З а м е ч а н и е. Функцию $r_m(t)$ и величину $g$ можно без ограничения общности положить равными нулю. При этом можно вычислить минимальное значение функционала (1.5) по формуле

$$\min_{d_m\in D_m} J(p_0(x),d_m) = -S(t_0,p_0(x))\,. \quad (1.12)$$

**Доказательство.** Применим принцип расширения В.Ф.Кротова [36, 67, 68]. Определим множество $V$ пар $d_m = (p(t,x),u(t,x^1))$, где выполняются условия: элементы пар по сравнению с входящими в $D_m$ необязательно связаны уравнением (1.3); $p(t_0,x) = p_0(x) \in P$; допускаются разрывы первого рода функций $p(t,x)$, $u(t,x^1)$ по $t$ $\forall\, x \in B$.

Таким образом, множество $D_m \subset V$ и расширение построено. Доопределение функционала $J$ на множестве $V$ производится с помощью задания функции $S(t,p(x)) \in \Pi$.

На множестве $V$ определим функционал

$$L(p_0(x),d_m) = G(t_1, p(t_1,x)) - \int_{t_0}^{t_1} R(t,p(t,x),u(t,x^1))\, dt - S(t_0,p_0(x))\,. \quad (1.13)$$

Рассмотрим функционал (1.13) на множестве $D_m \subset V$, где между функциями $p(t,x)$, $u(t,x^1)$ существует дифференциальная связь (1.3).

Подставляя (1.8),(1.9) в (1.13) с учетом (1.3), (1.4), имеем

$$L(p_0(x),d_m) = S(t_1,p(t_1,x)) + F(p(t_1,x)) - \int_{t_0}^{t_1}\{ \frac{\partial S(t,p(t,x))}{\partial t} + \int_B [ \frac{\delta S(t,p(t,x))}{\delta p(x)} \times$$

$$\times \frac{\partial p(t,x)}{\partial t} - f^0(t,p(t,x),u(t,x^1))]\, dx\}\, dt - S(t_0,p_0(x)) .$$

Используя формулу (П.1) вычисления полной производной функции $S(t,p(t,x))$ по аргументу $t$:

$$\frac{d\, S(t,p(t,x))}{d\, t} = \frac{\partial S(t,p(t,x))}{\partial t} + \int_B \frac{\delta S(t,p(t,x))}{\delta p(x)} \frac{\partial p(t,x)}{\partial t}\, dx$$

и интегрируя по времени с учетом равенства $p(t_0,x) = p_0(x)$, получаем

$$L(p_0(x),d_m) = S(t_1,p(t_1,x)) + F(p(t_1,x)) - \int_{t_0}^{t_1}\{ \frac{d\, S(t,p(t,x))}{d\, t} -$$

$$- \int_B f^0(t,p(t,x),u(t,x^1))\, dx\}\, dt - S(t_0,p_0(x)) = S(t_1,p(t_1,x)) + F(p(t_1,x)) -$$

$$- S(t_1,p(t_1,x)) + S(t_0,p_0(x)) + \int_{t_0}^{t_1}\int_B f^0(t,p(t,x),u(t,x^1))\, dx\, dt - S(t_0,p_0(x)) \equiv$$

$$\equiv J(p_0(x),d_m) .$$

Таким образом, на множестве $D_m$ функционалы $L$ и $J$ совпадают. Поведение функционала $L$ на множестве $V \setminus D_m$ полностью определяется видом функции $S(t,p(x))$, т.е. задача удачного доопределения функционала $J$ зависит от ее выбора.

Пусть имеется функция $S(t,p(x)) \in \Pi$. Рассмотрим задачу поиска минимума функционала (1.13) на множестве V. Третье слагаемое при имеющихся $p_0(x)$ и $S(t,p(x)) \in \Pi$ может быть вычислено. Экстремум первых двух слагаемых с учетом свойств функций, образующих пары $d_m \in V$, может определяться по отдельности. Минимум первого слагаемого определяется выражением (1.11). С учетом свойств пар $d_m \in V$ имеем

$$\max_{d_m \in V} \int_{t_0}^{t_1} R(t,p(t,x),u(t,x^1))\, dt \le \int_{t_0}^{t_1} r_m(t)\, dt .$$

Отсюда и из (1.11),(1.13) находим

$$\min_{d_m \in V} L(p_0(x),d_m) \ge g - \int_{t_0}^{t_1} r_m(t)\, dt - S(t_0,p_0(x)) . \qquad (1.14)$$

Если имеется пара $d_m{}^* = (p^*(t,x),u^*(t,x^1)) \in D_m$, удовлетворяющая условиям 1,2 теоремы 1.1, то с учетом (1.10), (1.11), (1.13), (1.14) $L(p_0(x),d_m{}^*) \le$



$\le L(p_0(x),d_m)$ $\forall d_m \in V$. Так как $d_m{}^* \in D_m \subset V$, то $L(p_0(x),d_m{}^*) \le L(p_0(x),d_m)$ $\forall d_m \in D_m$. Как доказано выше, $L(p_0(x),d_m) \equiv J(p_0(x),d_m)$ $\forall d_m \in D_m$ при имеющейся функции $S(t,p(x)) \in \Pi$. Поэтому $J(p_0(x),d_m{}^*) \le J(p_0(x),d_m)$ $\forall d_m \in D_m$, что соответствует определению экстремума функционала (1.5). При этом $L(p_0(x),d_m{}^*) = \min_{d_m \in D_m} J(p_0(x),d_m) = J(p_0(x),d_m{}^*)$. Теорема доказана. ■

Поясним замечание к теореме 1.1. Если существует функция $S(t,p(x)) \in \Pi$, удовлетворяющая условиям 1,2 теоремы 1.1 при $r_m(t) \ne 0$, $g \ne 0$, то, применяя прямую подстановку в (1.10), (1.11), можно найти, что функция

$$S'(t,p(x)) = S(t,p(x)) + \int_t^{t_1} r_m(\tau)\, d\tau - g$$

также им удовлетворяет при $r'_m(t) \equiv 0$, $g' = 0$. В этом случае с учетом (1.14) минимальное значение функционала (1.5) определяется по формуле

$$\min_{d_m \in D_m} J(p_0(x),d_m) = - S'(t_0,p_0(x)) .$$

Теорема 1.1 дает алгоритм проверки элементов $d_m \in D_m$, "подозрительных на оптимальность". Если имеется такой элемент $d^*_m$, то следует задаться какой-либо функцией $S(t,p(x))$. Затем найти $r_m(t)$ и $g$ согласно (1.10), (1.11). Фактически, как следует из доказательства теоремы 1.1, при этом находится минимум функционала L на множестве V. Эта проблема легче исходной вариационной задачи, так как сводится к нахождению экстремума функций (1.8), (1.9). После этого следует проверить справедливость условий теоремы 1.1 на элементе $d^*_m$. Таким образом проверяется, достигается ли минимум функционала L на множестве V на элементе $d^*_m \in D_m$. Если ответ положительный, то "подозрительный" элемент является оптимальным, если отрицательный, то следует перейти к выбору другой функции $S(t,p(x))$.

### 1.2.2. Достаточные условия оптимальности в задаче 2

Рассмотрим задачу нахождения оптимальных синтезирующих функций, сформулированную в разд. 1.1. Пусть в условиях (1.10), (1.11) $r_m(t) \equiv 0$, $g = 0$ и отсутствуют операции максимизации и минимизации по $p(x)$, а также имеется такая функция $S(t,p(x))$, при которой правые части в (1.10), (1.11) при этих предположениях не зависят от $p(x) \in P$. Тогда из (1.10), (1.11) следуют уравнение и краевое условие:

$$\frac{\partial S(t,p(x))}{\partial t} + \int_{B_1} [ \max_{u \in U} \int_{B_2} \{ A_* u [ \frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)} ] p(x) - f^0(t,p(x),u)\}\, dx^2 ]\, dx^1 = 0 \qquad (1.15)$$

$$\forall (t,p(x)) \in T \times P ,$$

$$S(t_1,p(x)) = - F(p(x)) \qquad \forall p(x) \in P. \qquad (1.16)$$

Соотношения (1.15), (1.16) дают первый способ нахождения оптимального управления в задаче 1.

**Теорема 1.2** (достаточные условия оптимальности в задаче 2). Если существуют функция $S(t,p(x)) \in \Pi$ и управление $u^*(t,x^1;p(x))$, удовлетворяющие (1.15),(1.16), то выполняется условие (1.7):

$$J(p(t_0,x),\ p^*(t,x),\ u^*(t,x^1;\ p^*(t,x))) = \min_{d_m \in D_m} J(p(t_0,x),d_m) \quad \forall\ p(t_0,x) \in P\ .$$

**Доказательство.** Пусть удовлетворяются условия теоремы 1.2 и имеется произвольная начальная плотность вероятности $p(t_0,x) \in P$. Решив уравнение (1.3) с данной начальной плотностью вероятности $p(t_0,x)$ и полученной синтезирующей функцией $u^*(t,x^1;p(x))$, можно найти пару $d_m^* = (p^*(t,x),u^*(t,x^1) = u^*(t,x^1;p^*(t,x))) \in D_m$. Для произвольной пары $d'_m \in D_m$, где плотность вероятности $p'(t,x)$ удовлетворяет тому же начальному условию, с учетом (1.13) и тождества $L(p(t_0,x),d_m) \equiv J(p(t_0,x),d_m)$ на множестве $D_m$ имеем

$$\Delta J = J(p(t_0,x),d'_m) - J(p(t_0,x),d_m^*) = G(t_1,p'(t_1,x)) - G(t_1,p^*(t_1,x)) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} [\,R(t,p^*(t,x),u^*(t,x^1)) - R(t,p'(t,x),u'(t,x^1))\,]\,dt\ .$$

Из (1.16) и (1.9) следует, что $G(t_1,p(x)) = 0\ \ \forall\ p(x) \in P$. Поэтому $G(t_1,p'(t_1,x)) = G(t_1,p^*(t_1,x)) = 0$. Из (1.15) имеем $R(t,p^*(t,x),u^*(t,x^1)) = 0$, а, так как (1.15) является частным случаем условия (1.10), то $R(t,p'(t,x),u'(t,x^1)) \le 0$. Следовательно, $\Delta J \ge 0$. Доказательство теоремы вытекает из произвольности пары $d'_m$ и функции $p(t_0,x)$. ■

<u>М е т о д и к а</u> определения оптимального управления стохастической системой с применением оптимальных синтезирующих функций состоит из двух этапов.

П е р в ы й э т а п. Нахождение оптимального управления в задаче 1.

1. Решить уравнение (1.15) с краевым условием (1.16). В результате получаем функцию $S(t,p(x))$ и оптимальную синтезирующую функцию $u^*(t,x^1;p(x))$ – решение задачи 2.

2. Задать начальную плотность вероятности $p(t_0,x) \in P$.

3. Решить уравнение (1.3) с начальной плотностью вероятности $p(t_0,x)$ совместно с оптимальной синтезирующей функцией $u^*(t,x^1;p(x))$, найденной в п.1. В результате определяется пара $d_m^* = (p^*(t,x),u^*(t,x^1) = u^*(t,x^1;p^*(t,x)))$ – решение задачи 1 для фиксированной начальной плотности вероятности (см. рис. 1.2).

4. Для получения решения другой задачи 1 перейти к п.2 и задать новую начальную плотность вероятности. Если этого не требуется, перейти



к этапу использования синтезированного оптимального управления $u^*(t,x^1)$ при управлении исходной системой (1.1).

В т о р о й э т а п. Применение оптимального управления $u^*(t,x^1)$ для нахождения траекторий системы, описываемой уравнением (1.1).

1. Получить реализацию начального условия $X(t_0) = X_0$ в соответствии с заданной в п.2 первого этапа плотностью вероятности $p(t_0,x)$.

2. Решить уравнение (1.1) с начальным условием $X(t_0)$ совместно с оптимальным управлением $u^*(t,x^1)$ для конкретной реализации стандартного винеровского процесса $W(t)$. В результате получим пару $(X(t),u(t))$, где $X(t)$ – траектория, а $u(t) = u^*(t,X^1(t))$ – управление(см.рис.1.1).

3. Для получения семейства пар $(X(t),u(t))$ проинтегрировать уравнение (1.1) для других реализаций случайного процесса $W(t)$ и начального условия $X(t_0)$, т.е. перейти либо к п.1, либо к п.2 данного этапа.

Второй этап методики описывает процедуру моделирования системы (1.1) совместно с найденным управлением. Он иллюстрирует применимость результатов решения редуцированной задачи 1 к исходной стохастической проблеме.

Таким образом, оптимальная синтезирующая функция $u^*(t,x^1;p(x))$ порождает для каждой начальной плотности вероятности $p(t_0,x)$ соответствующее оптимальное на множестве $D_m$ управление $u^*(t,x^1)$, которое, в свою очередь, служит для получения траекторий исходной управляемой системы (1.1), так что применяемое в текущий момент времени управление имеет вид $u(t) = u^*(t,X^1(t))$.

Рассмотрим <u>п р е д е л ь н ы е с л у ч а и и н ф о р м и р о в а н н о с т и о в е к т о р е с о с т о я н и я</u>.

**1.** $m = 0$ (информация о векторе состояния отсутствует). Как следует из теоремы 1.2, решается задача поиска оптимальной синтезирующей функции $u^*(t;p(x))$: $T' \times P \to U$, порождающей на решениях уравнения (1.3) оптимальные программные управления $u^*(t)$ для каждой начальной плотности вероятности $p(t_0,x) \in P$. Из (1.15), (1.16) следует уравнение для ее определения

$$\frac{\partial S(t,p(x))}{\partial t} + \max_{u \in U} \int_B \{A_*^u\,[\,\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}\,]\,p(x) - f^0(t,p(x),u)\,\}\,dx = 0 \quad \forall\ (t,p(x)) \in T \times P,$$

$$S(t_1,p(x)) = -F(p(x)) \quad \forall\ p(x) \in P\ . \qquad (1.17)$$

Применяя (1.4), можно получить эквивалентную форму записи (1.17):

$$\frac{\partial S(t,p(x))}{\partial t} + \max_{u \in U} \int_B \{\,\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}\,A^u[p(x)] - f^0(t,p(x),u)\}\,dx = 0 \quad \forall\ (t,p(x)) \in T \times P,$$

$$S(t_1,p(x)) = -F(p(x)) \quad \forall\ p(x) \in P\ . \qquad (1.18)$$

Аналогичный результат впервые был получен в [212] с помощью метода динамического программирования.

**2.** $m = n$ (имеется полная информация о векторе состояния). В этом случае уравнения (1.15), (1.16) записываются в виде

$$\frac{\partial S(t,p(x))}{\partial t} + \int_B \max_{u \in U} \{ A_*^u [\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}] p(x) - f^0(t,p(x),u)\} dx = 0 \quad (1.19)$$

$$\forall (t,p(x)) \in T \times P,$$

$$S(t_1,p(x)) = -F(p(x)) \quad \forall p(x) \in P. \quad (1.20)$$

Решение данной задачи определяет оптимальную синтезирующую функцию $u^*(t,x;p(x))$: $T' \times E^n \times P \to U$, порождающую для каждой начальной плотности вероятности $p(t_0,x)$ соответствующее оптимальное управление $u^*(t,x)$ с полной обратной связью.

Аналогичный результат получен также в [166, 167] для одного из частных случаев.

Примеры нахождения оптимальных синтезирующих функций для стохастических систем приведены в разд. 1.5.

З а м е ч а н и я. 1. Проблема решения уравнений в вариационных производных является весьма трудной и сводится к интегрированию в функциональных пространствах [1, 81, 152, 192, 202]. Поэтому в разд. 1.3 предлагается другой способ решения задачи 1.

2. В [47] изучаются задачи управления системами с распределенными параметрами, к которым может быть отнесена задача управления решением уравнения (1.3). Для случаев $m = 0$ и $m = n$ там получены уравнения в производных Фреше, по смыслу аналогичные (1.17), (1.19).

Рассмотрим ч а с т н ы й  с л у ч а й, когда функционал (1.5) имеет вид

$$J(p_0(x), d_m) = \int_{t_0}^{t_1}\int_B f^0(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x)\, dx\, dt + \int_B F(x)\, p(t_1,x)\, dx =$$

$$= M\,[\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,X(t),u(t,X^1(t)))\, dt + F(X(t_1))\,], \quad (1.21)$$

где непрерывные функции $f^0(t,x,u)$, $F(x)$ удовлетворяют условиям [160]: $\exists\, c_2,c_3 = \mathrm{const}$ такие, что $\forall (t,x,u) \in (T \times B \times U)$ $|f^0(t,x,u)| \le c_2(1+|x|+|u|)^{c_3}$, $|F(x)| \le c_2(1+|x|)^{c_3}$, которые гарантируют конечность величины (1.21) $\forall u(t,x^1) \in \gamma_m$; $M$ – знак математического ожидания, $m = n$.

В этом случае решение $S(t,p(x))$ уравнения (1.19) можно искать в форме

$$S(t,p(x)) = \int_B \varphi(t,x)\, p(x)\, dx,$$

где неизвестная функция $\varphi(t,x) \in C^{1,2}(Q)$.



Подставляя это выражение в уравнение и краевое условие, применяя правило (П.2) вычисления вариационных производных и основную лемму вариационного исчисления, имеем

$$\max_{u \in U} \{ \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + (1/2) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t,x,u) -$$

$$- f^0(t,x,u)\} = 0 \quad \forall (t,x) \in Q, \quad (1.22)$$

$$\varphi(t_1,x) = -F(x) \quad \forall x \in B. \quad (1.23)$$

Согласно теореме 1.2 оптимальное управление $u^*(t,x)$, определяемое при решении у р а в н е н и я  Б е л л м а н а (1.22), (1.23) д л я  с т о х а с т и ч е с к и х  с и с т е м [10, 54, 61, 70, 71, 82, 89, 113, 160, 169, 198], обеспечивает минимум функционала (1.21) для любых $p(t_0,x) \in P$, который согласно (1.12) равен

$$\min_{d_n \in D_n} J(p(t_0,x),d_n) = -S(t_0,p(t_0,x)) = -\int_B \varphi(t_0,x)\, p(t_0,x)\, dx \quad \forall p(t_0,x) \in P.$$

Если начальная плотность вероятности $p(t_0,x)$ дельта-образная, т.е. $p(t_0,x) = p_0(x) = \delta(x-x_0)$, где $x_0$ – начальное условие, то сформулированный вывод также справедлив: управление $u^*(t,x)$ обеспечивает минимум функционала (1.21), т.е.

$$\min_{d_n \in D_n} J(p(t_0,x),d_n) = -\int_B \varphi(t_0,x)\, \delta(x-x_0)\, dx = -\varphi(t_0,x_0) \quad \forall x_0 \in B.$$

Последнее соотношение придает функции $\varphi(t_0,x)$ смысл, заключающийся в ее связи с величиной минимума функционала качества управления для различных начальных условий.

С учетом равенства

$$p(t,x) = \int_B p(t,x\,|\,t_0,y)\, p(t_0,y)\, dy = \int_B p(t,x\,|\,t_0,y)\, \delta(y-x_0)\, dy = p(t,x\,|\,t_0,x_0)$$

функционал (1.21) можно переписать в виде условного математического ожидания

$$J = M_{t_0,x_0}\,[\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,X(t),u(t,X(t)))\, dt + F(X(t_1))\,].$$

Если обозначить $W(t,x) = -\varphi(t,x)$, то уравнение Беллмана (1.22), (1.23) с учетом равенства $\max f(x) = -\min[-f(x)]$ можно переписать в эквивалентной форме:

$$\min_{u \in U} \{ \frac{\partial W(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + (1/2) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 W(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t,x,u) +$$

$$+ f^0(t,x,u)\} = 0 \quad \forall (t,x) \in Q, \quad W(t_1,x) = F(x) \quad \forall x \in B. \quad (1.24)$$

## 1.3. Соотношения для определения оптимального управления

### 1.3.1. Общий случай минимизируемого функционала

Задача поиска оптимальных синтезирующих функций весьма привлекательна, так как ее решение связано с решением множества задач типа задачи 1. В то же время эта проблема обусловлена необходимостью решения уравнений в вариационных производных, что вызывает большие трудности. Поэтому актуальным является непосредственное определение оптимального управления в задаче 1. Для этого воспользуемся условиями теоремы 1.1.

Функцию $S(t,p(x))$ будем искать в виде

$$S(t,p(x)) = \int_B \varphi(t,x)\, p(x)\, dx + W(t) \ , \qquad (1.25)$$

где неизвестная функция $\varphi(t,x) \in C^{1,2}(Q)$ и непрерывна на $Q'$, а $W(t)$ – непрерывно дифференцируемая неизвестная функция.

Подставляя (1.25) в (1.8), (1.9), применяя правило (П.2) вычисления вариационных производных, имеем $\dfrac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)} = \varphi(t,x)$ и, следовательно,

$$R(t,p(x),u) = \int_B \{ [\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + (1/2) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t,x,u)] \times$$

$$\times p(x) - f^0(t,p(x),u)\}\, dx + \frac{d\,W(t)}{d\,t} = H(t,p(x),u) + \frac{d\,W(t)}{d\,t} + \int_B \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} p(x)\, dx \ , \qquad (1.26)$$

$$G(t_1,p(x)) = \int_B \varphi(t_1,x)\, p(x)\, dx + W(t_1) + F(p(x)) \ .$$

Из условия 1 теоремы 1.1 и из (1.10) следует, что структура оптимального управления $u^*(t,x^1)$ определяется соотношением

$$u^*(t,x^1) = \arg\max_{u \in U} \int_{B_2} \{[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + (1/2) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x_i\, \partial x_j} \times$$

$$\times a_{ij}(t,x,u)]\, p^*(t,x) - f^0(t,p^*(t,x),u)\}\, dx^2 \ . \qquad (1.27)$$

Здесь считается, что операция максимизации по управлению для любых $t$, $x^1$ однозначно разрешима.

Предполагая, что функции $R(t,p(x),u)$, $G(t_1,p(x))$ в (1.26) имеют непрерывную вариационную производную по $p(x)$, и используя необходимое условие экстремума в (1.10), (1.11) и условия теоремы 1.1, получаем

$$\frac{\delta R(t, p^*(t,x),u^*(t,x^1))}{\delta p(x)} = 0 \quad \forall\, (t,x) \in Q \ , \qquad \frac{\delta G(t_1, p^*(t_1,x))}{\delta p(x)} = 0 \quad \forall\, x \in B \ .$$

Отсюда



$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = - \frac{\delta H(t, p^*(t,x),u^*(t,x^1))}{\delta p(x)} \quad \forall\, (t,x) \in Q \ , \qquad (1.28)$$

$$\varphi(t_1,x) = - \frac{\delta F(p^*(t_1,x))}{\delta p(x)} \quad \forall\, x \in B \ . \qquad (1.29)$$

Здесь $p^*(t,x)$ – решение уравнения (1.3) с начальным условием (1.2)

$$\frac{\partial p^*(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t,x,u^*(t,x^1))\, p^*(t,x)] + (1/2) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} [a_{ij}(t,x,u^*(t,x^1)) \times$$

$$\times p^*(t,x)] \quad \forall\, (t,x) \in Q \ , \qquad p^*(t_0,x) = p_0(x) \quad \forall\, x \in B$$

и управлением $u^*(t,x^1)$, удовлетворяющим (1.27).

Таким образом, чтобы найти решение задачи 1, требуется решить краевую задачу для системы уравнений с частными производными (1.3), (1.28) с краевыми условиями (1.2), (1.29) и условием (1.27):

$$\frac{\partial p^*(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t,x,u^*(t,x^1))\, p^*(t,x)] + (1/2) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} [a_{ij}(t,x,u^*(t,x^1)) \times$$

$$\times p^*(t,x)] \quad \forall\, (t,x) \in Q \ , \qquad p^*(t_0,x) = p_0(x) \quad \forall\, x \in B \ ,$$

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = - \frac{\delta H(t, p^*(t,x),u^*(t,x^1))}{\delta p(x)} \quad \forall\, (t,x) \in Q \ ,$$

$$\varphi(t_1,x) = - \frac{\delta F(p^*(t_1,x))}{\delta p(x)} \quad \forall\, x \in B \ ,$$

$$u^*(t,x^1) = \arg\max_{u \in U} \int_{B_2} \{ [\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + (1/2) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x_i\, \partial x_j} \times$$

$$\times a_{ij}(t,x,u)]\, p^*(t,x) - f^0(t,p^*(t,x),u)\}\, dx^2 \ ,$$

где

$$H(t, p^*(t,x),u^*(t,x^1)) = \int_B \{ [\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u^*(t,x^1)) + (1/2) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x_i\, \partial x_j} \times$$

$$\times a_{ij}(t,x,u^*(t,x^1))]\, p^*(t,x) - f^0(t, p^*(t,x),u^*(t,x^1)) \}\, dx \ .$$

С учетом равенства $r_m(t) \equiv 0$, $g = 0$ из системы (1.8)–(1.11), (1.26), (1.28), (1.29) и из условий 1, 2 теоремы 1.1 следует уравнение для определения функции $W(t)$, решаемое на найденной экстремали $(p^*(t,x),u^*(t,x^1))$:

$$\frac{d\,W(t)}{d\,t} = - H(t, p^*(t,x),u^*(t,x^1)) - \int_B \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t}\, p^*(t,x)\, dx \ ,$$

$$W(t_1) = - \int_B \varphi(t_1,x)\, p^*(t_1,x)\, dx - F(p^*(t_1,x)) \ .$$

В результате можно подсчитать минимум функционала (1.5) по формуле (1.12):

$$\min_{d_m \in D_m} J(p_0(x), d_m) = -\int_B \varphi(t_0,x)\, p_0(x)\, dx - W(t_0) .$$

З а м е ч а н и я. 1. Следует отметить, что соотношения (1.28), (1.29) получены с помощью необходимых условий экстремума. Поэтому если найдено решение выведенной системы, то это еще не означает, что пара $(p^*(t,x), u^*(t,x^1))$ удовлетворяет условию (1.6). С другой стороны, конструкция (1.25) не задает до конца функции $S(t,p(x))$, существование которой требуется условиями теоремы 1.1, определяя лишь ее первую вариационную производную по $p(x)$ и оставляя некоторый произвол для ее доопределения. Одним из путей решения этой проблемы может быть задание конструкций, определяющих функцию $S(t,p(x))$ в окрестности экстремали $p^*(t,x)$, аналогичных используемым в [36, 67, 68, 90].

2. Если начальная плотность вероятности $p(t_0,x)$ дельта-образная, т.е. $p(t_0,x) = p_0(x) = \delta(x-x_0)$, где $x_0$ – начальное условие, то с учетом равенства

$$p(t,x) = \int_B p(t,x \mid t_0,y)\, p(t_0,y)\, dy = \int_B p(t,x \mid t_0,y)\, \delta(y-x_0)\, dy = p(t,x \mid t_0,x_0)$$

вместо (1.2), (1.3) в системе уравнений для определения оптимального управления будут присутствовать уравнение для условной плотности вероятности и соответствующее начальное условие:

$$\frac{\partial p(t,x \mid t_0,x_0)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x \mid t_0,x_0)] +$$

$$+ (1/2) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [a_{ij}(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x \mid t_0,x_0)] = A^{u(\cdot)}[\, p(t,x \mid t_0,x_0)\, ] \quad \forall (t,x) \in Q ,$$

$$p(t_0,x_0 \mid t_0,x_0) = \delta(x-x_0) .$$

Рассмотрим <u>п р е д е л ь н ы е  с л у ч а и  и н ф о р м и р о в а н н о с т и  о  в е к т о р е  с о с т о я н и я</u>.

**1.** $m = 0$ (информация о векторе состояния отсутствует). В этом случае соответствующим образом изменяются условия теоремы 1.1, уравнения метода состоят из (1.2), (1.3), (1.28), (1.29), а структура оптимального программного управления определяется из соотношения, следующего из (1.27):

$$u^*(t) = \arg\max_{u \in U} \int_B \{ [\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + (1/2) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x_i\, \partial x_j} \times$$

$$\times a_{ij}(t,x,u)]\, p^*(t,x) - f^0(t,p^*(t,x),u) \}\, dx . \qquad (1.30)$$

**2.** $m = n$ ( имеется полная информация о векторе состояния). Для определения оптимального управления $u^*(t,x)$ с полной обратной связью



по вектору состояния требуется решить систему (1.2), (1.3), (1.28), (1.29), где структура искомого управления также следует из (1.27):

$$u^*(t,x) = \arg\max_{u \in U} \{ [\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + (1/2) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x_i\, \partial x_j} \times$$

$$\times a_{ij}(t,x,u)]\, p^*(t,x) - f^0(t,p^*(t,x),u) \} . \qquad (1.31)$$

### 1.3.2. Случай линейного по плотности вероятности функционала

Если функционал (1.5) линеен по плотности вероятности, т.е. имеет вид (1.21)

$$J(p_0(x), d_m) = \int_{t_0}^{t_1} \int_B f^0(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x)\, dx\, dt + \int_B F(x)\, p(t_1,x)\, dx ,$$

соотношения (1.26) принимают следующую форму:

$$R(t,p(x),u) = \int_B \{ [\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + (1/2) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t,x,u) -$$

$$- f^0(t,x,u)]\, p(x) \}\, dx + \frac{d\, W(t)}{d\, t} = H(t,p(x),u) + \frac{d\, W(t)}{d\, t} + \int_B \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} p(x)\, dx,$$

$$G(t_1,p(x)) = \int_B [\, \varphi(t_1,x) + F(x)]\, p(x)\, dx + W(t_1) .$$

Так как согласно правилу (П.2)

$$\frac{\delta H(t,p(x),u)}{\delta p(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + (1/2) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t,x,u) - f^0(t,x,u) ,$$

$$\frac{\delta F(p(x))}{\delta p(x)} = \frac{\delta [\int_B F(x)\, p(x)\, dx\, ]}{\delta p(x)} = F(x) ,$$

соотношения (1.28), (1.29) упрощаются:

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u^*(t,x^1)) - (1/2) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t,x,u^*(t,x^1)) +$$

$$+ f^0(t,x,u^*(t,x^1)) = -A_*^{u(\cdot)}[\, \varphi(t,x)\, ] + f^0(t,x,u^*(t,x^1)) \quad \forall (t,x) \in Q, \qquad (1.32)$$

$$\varphi(t_1,x) = -F(x) \quad \forall x \in B \qquad (1.33)$$

Учитывая, что

$$p(t,x^1) = \int_{B_2} p(t,x)\, dx^2 ; \quad p(t,x^2 \mid x^1) = \frac{p(t,x)}{\int_{B_2} p(t,x)\, dx^2} , \qquad (1.34)$$

где $p(t,x^1)$ – маргинальная плотность вероятности, $p(t,x^2 \mid x^1)$ – условная плотность вероятности, имеем

$$u^*(t,x^1) = \arg\max_{u \in U} \int_{B_2} [\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + (1/2) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t,x,u) - f^0(t,x,u)] \; p^*(t,x^2 \mid x^1)\, dx^2 . \qquad (1.35)$$

Таким образом, искомое **о п т и м а л ь н о е в с р е д н е м** управление $u^*(t,x^1)$, можно найти в результате решения системы уравнений

$$\frac{\partial p^*(t,x)}{\partial t} = A^{u(\cdot)}[\,p^*(t,x)\,] , \qquad p^*(t_0,x) = p_0(x) ,$$

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = -A_*^{u(\cdot)}[\,\varphi(t,x)\,] + f^0(t,x,u^*(t,x^1)) , \qquad \varphi(t_1,x) = -F(x)$$

совместно с (1.34), (1.35). При этом функция $W(t) \equiv 0$, а минимум функционала (1.21) можно подсчитать по формуле (1.12):

$$\min_{d_m \in D_m} J(\,p_0(x), d_m) = -\int_B \varphi(t_0,x)\, p_0(x)\, dx .$$

Рассмотрим <u>п р е д е л ь н ы е  с л у ч а и  и н ф о р м и р о в а н н о с т и  о  в е к т о р е  с о с т о я н и я</u>.

1. $m = 0$ (информация о векторе состояния отсутствует). Соотношения для общего случая принимают форму **с т о х а с т и ч е с к о г о  п р и н ц и п а  м а к с и м у м а** [9, 13, 18, 41, 55, 72, 93, 113, 144, 153, 157, 171, 193, 201, 205, 207, 232]:

$$\frac{\partial p^*(t,x)}{\partial t} = A^{u(\cdot)}[\,p^*(t,x)\,] , \qquad p^*(t_0,x) = p_0(x) ,$$

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = -A_*^{u(\cdot)}[\,\varphi(t,x)\,] + f^0(t,x,u^*(t)) , \qquad \varphi(t_1,x) = -F(x) , \qquad (1.36)$$

$$u^*(t) = \arg\max_{u \in U} \int_B [\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + (1/2) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t,x,u) - f^0(t,x,u)] \; p^*(t,x)\, dx .$$

В результате решения системы (1.36) можно найти оптимальное программное управление $u^*(t)$.

2. $m = n$ (имеется полная информация о векторе состояния). Соотношения для общего случая преобразуются **в  у р а в н е н и е  Б е л л м а н а** (1.22), (1.23) **д л я  с т о х а с т и ч е с к и х  систем** для определения оптимального управления $u^*(t,x)$ с полной обратной связью:



$$\max_{u \in U} \{ \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + (1/2) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t,x,u) - f^0(t,x,u)\} = 0 \quad \forall\, (t,x) \in Q , \qquad \varphi(t_1,x) = -F(x) \quad \forall\, x \in B . \qquad (1.37)$$

З а м е ч а н и я. 1. Для определения оптимального управления в общем случае можно использовать метод обобщенной характеристической функции [135, 136], позволяющий сводить проблему к решению двухточечной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, и градиентный метод [181, 227]. Для случая $m = 0$ разработаны различные варианты градиентных методов [18, 126, 127, 129] и применяется метод Дородницына [72], а для случая $m = n$–методы, основанные на разложении по малому параметру [60, 61].

Метод обобщенной характеристической функции получил свое развитие в [144, 145]. Для решения уравнения ФПК и соответствующего сопряженного уравнения могут применяться классические методы [33, 154, 220], методы моментов, квазимоментов, кумулянтов, характеристической функции [113], разложения в степенные и функциональные ряды [65, 122] и другие [17, 75, 83, 143, 187, 188].

2. В [176, 195] получены условия существования оптимального управления с неполной информацией о векторе состояния, а в [160] – условия существования оптимального управления с полной обратной связью.

3. В [105, 106] полученные соотношения применялись в задаче синтеза субоптимального нелинейного фильтра минимальной размерности.

## 1.4. Оптимальное управление с незаданным временем окончания процесса

### 1.4.1. Задача поиска наилучшего момента окончания процесса

<u>Постановка задачи</u>. Предположим, что момент $t_1$ окончания процесса управления заранее не задан и подлежит выбору.

Тогда обозначим $D_m$ – множество, состоящее из троек $d_m = (t_1, p(t,x), u(t,x^1))$, где $t_0 \le t_1 < \infty$, функции $p(t,x) \in C^{1,2}(Q)$, $u(t,x^1) \in \gamma_m$ удовлетворяют тем же условиям, что и в разд. 1.1.

На введенном множестве $D_m$ определим функционал

$$J(\,p_0(x), d_m) = \int_{t_0}^{t_1}\int_B f^0(t,p(t,x),u(t,x^1))\, dx\, dt + F(t_1, p(t_1,x)) , \qquad (1.38)$$

Сформулируем аналог задачи 1.

**Задача 1***. Требуется найти такой элемент $d_m^* = (t_1^*, p^*(t,x), u^*(t,x^1)) \in D_m$, что

$$J(p_0(x), d_m^*) = \min_{d_m \in D_m} J(\,p_0(x), d_m) . \quad \blacksquare \qquad (1.39)$$

Предполагается, что такой элемент $d_m^*$ существует.

Достаточные условия оптимальности. Для решения задачи введем изменения в конструкции (1.9), (1.11):

$$G(t_1, p(x)) = S(t_1, p(x)) + F(t_1, p(x)) \ ,$$

$$g = \min_{\substack{t_1 \in [t_0, \infty) \\ p(x) \in P}} G(t_1, p(x)) \ . \qquad (1.40)$$

Далее сформулируем достаточные условия оптимальности в поставленной задаче, аналогичные теореме 1.1.

Пусть имеется тройка $d_m^* = (t_1^*, p^*(t,x), u^*(t,x^1)) \in D_m$.

**Утверждение 1.1.** (достаточные условия оптимальности в задаче 1*). Если существует такая функция $S(t,p(x)) \in \Pi$, что тройка $d_m^* \in D_m$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $R(t, p^*(t,x), u^*(t,x^1)) = r_m(t)$ почти всюду на $T^* = (t_0, t_1^*)$ ;

2) $G(t_1^*, p^*(t_1^*,x)) = g$ ,

то справедливо условие (1.39). Функцию $r_m(t)$ и величину $g$ можно без ограничения общности положить равными нулю. ■

Доказательство утверждения 1.1 повторяет доказательство теоремы 1.1, где вместо пары $d_m$ используется соответствующая тройка, а вместо (1.9), (1.10) – соотношения (1.40).

Соотношения для определения оптимального управления. Для получения уравнений, которые необходимо решить с целью нахождения оптимального управления используем тот же подход, что и в разд. 1.3, где применим также необходимое условие минимума функции $G(t_1, p(x))$ по $t_1$ и условия утверждения 1.1:

$$\frac{\partial G(t_1, p(x))}{\partial t_1} = \frac{\partial S(t_1, p(x))}{\partial t_1} + \frac{\partial F(t_1, p(x))}{\partial t_1}\Bigg|_{t_1^*,\, p^*(t_1^*,x)} = 0 \ .$$

С учетом (1.25), (1.26) и уравнения, определяющего функцию $W(t)$ из разд. 1.3.1 имеем

$$\frac{\partial S(t, p^*(t,x))}{\partial t} = -H(t, p^*(t,x), u^*(t,x^1)) \ .$$

Отсюда следует условие

$$H(t_1^*, p^*(t_1^*,x), u^*(t_1^*,x^1)) = \frac{\partial F(t_1^*, p^*(t_1^*,x))}{\partial t_1} \ , \qquad (1.41)$$

которое служит для определения момента $t_1^*$ при совместном решении с системой (1.2), (1.3), (1.27)–(1.29).



## 1.4.2. Задача со случайным моментом окончания процесса

Постановка задачи. Пусть поведение модели системы управления описывается стохастическим дифференциальным уравнением (1.1) с начальным условием, определяемым (1.2), и задано открытое множество $B \subset E^n$ с компактным замыканием $B' = B \cup \partial B$, где $\partial B$ – кусочно-гладкая граница.

Обозначим: $Q = (t_0, T_1) \times B$, где момент времени $T_1 > t_0$ задан,

$\Gamma = ([t_0, T_1] \times \partial B) \cup (\{T_1\} \times B)$; $B_1, B_2$ – проекции множества $B$ соответственно на $E^m, E^{n-m}$.

Моментом окончания процесса управления будем считать первый момент $t \in [t_0, T_1]$, когда точка $(t, X(t))$ достигает множества $\Gamma$.

Определим функционал качества управления в форме

$$J = M\left[\int_{t_0}^{t_1} f^0(t, X(t), u(t, X^1(t)))\, dt + F(t_1, X(t_1))\right] \ , \qquad (1.42)$$

где $M$ – знак математического ожидания и $\forall\, u(t,x^1) \in \gamma_m$ величина (1.42) конечна, $F(t_1,x)\colon \Gamma \to E^1$.

Для решения задачи сформулируем эквивалентную проблему, изменив форму записи функционала (1.42).

**Лемма**. Пусть имеется функция $\varphi(t,x) \in C^{1,2}(Q)$, удовлетворяющая уравнению

$$-\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = A_*^{u(\cdot)}[\varphi(t,x)] - f^0(t,x,u(t,x^1)) \quad \forall\,(t,x) \in Q \qquad (1.43)$$

с граничным условием

$$\varphi(t_1,x) = -F(t_1,x) \quad \forall\,(t_1,x) \in \Gamma \ . \qquad (1.44)$$

Тогда

$$J = -\int_B \varphi(t_0,x)\, p_0(x)\, dx = J(p_0(x), z_m) \ , \qquad (1.45)$$

где $z_m \in Z_m$ – пары функций $(\varphi(t,x), u(t,x^1))$, удовлетворяющих (1.43), (1.44), и $\varphi(t,x) \in C^{1,2}(Q)$, $u(t,x^1) \in \gamma_m$. ■

Утверждение леммы аналогично результатам, полученным в [13, 35, 177].

**Доказательство** производится по схеме, предложенной в [177], с незначительными изменениями.

Для $t \le t_1$ определим функцию

$$\varphi(t,x) = -M\left[\int_t^{t_1} f^0(\theta, X(\theta), u(\theta, X^1(\theta)))\, d\theta + F(t_1, X(t_1)) \mid X(t) = x\right] \ .$$

Используя формулу Ито стохастического дифференцирования [34, 44, 121, 160]:

$$d\,\varphi(t,X(t)) = \left\{\frac{\partial \varphi(t,X(t))}{\partial t} + A_*^{u(\cdot)}[\varphi(t,X(t))]\right\} dt + \varphi_x(t,X(t))^T \sigma(t,X(t),u(t,X^1(t)))\, dW,$$

получаем

$$M\left[\int_{t_0}^{t_1} d\varphi\right] = M\left[\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{\partial \varphi(t,X(t))}{\partial t} + A_*^{u(\cdot)}[\varphi(t,X(t))]\right\} dt\right] +$$

$$+ M\left[\int_{t_0}^{t_1} \varphi_x(t,X(t))^T \sigma(t,X(t),u(t,X^1(t))\, dW\right].$$

Второй член в правой части равен нулю по свойствам стохастических интегралов [35, 44]. Тогда с учетом (1.43) получим

$$M\left[\int_{t_0}^{t_1} d\varphi\right] = M\left[\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,X(t),u(t,X^1(t)))\, dt\right] \quad \text{и}$$

$$M[\varphi(t_0,X(t_0))] = -M\left[\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,X(t),u(t,X^1(t)))\, dt\right] + M[\varphi(t_1,X(t_1))].$$

По определению функция $\varphi(t_1,x) = -M[F(t_1,X(t_1)) \mid X(t_1) = x] =$ $= -F(t_1,x)$, что соответствует условию (1.44). Поэтому

$$M[\varphi(t_0,X(t_0))] = \int_B \varphi(t_0,x)\, p_0(x)\, dx = -M\left[\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,X(t),u(t,X^1(t)))\, dt + F(t_1,X(t_1))\right].$$

Отсюда с учетом (1.42) следует (1.45). ■

На основании данной леммы можно сформулировать аналог задачи 1.

**Задача 1****. Требуется найти такой элемент $z_m^* = (\varphi^*(t,x),u^*(t,x^1)) \in$ $\in Z_m$, что

$$J(p_0(x), z_m^*) = \min_{z_m \in Z_m} J(p_0(x), z_m). \quad ■ \tag{1.46}$$

<u>Достаточные условия оптимальности</u>. Введем в рассмотрение множество П функций $S(t,\varphi(x)): [t_0,T_1] \times C^2(B) \to E^1$, непрерывно дифференцируемых по $t$ и имеющих непрерывную вариационную производную по аргументу $\varphi(x)$, причем $\dfrac{\delta S(t,\varphi(\xi))}{\delta \varphi(x)} \in C^{1,2}(Q)$ и непрерывна на $Q'$, где $\varphi(x) = \varphi(t,x)$ при $t = const$, а также конструкции

$$R(t,\varphi(x),u) = -\frac{\partial S(t,\varphi(x))}{\partial t} + \int_B \frac{\delta S(t,\varphi(\xi))}{\delta \varphi(x)} \{A_*^u[\varphi(x)] - f^0(t,x,u)\}\, dx, \tag{1.47}$$

$$G(t_0,\varphi(x)) = S(t_0,\varphi(x)) - \int_B \varphi(x)\, p_0(x)\, dx.$$

Предположим, что при фиксированном $m$ $(0 \le m \le n)$ функции в (1.47) достигают экстремальных значений:

$$r_m(t) = \max_{\varphi(x)\in C^2(B)} \left\{-\frac{\partial S(t,\varphi(x))}{\partial t} + \int_{B_1}\left[\max_{u\in U} \int_{B_2} \frac{\delta S(t,\varphi(\xi))}{\delta \varphi(x)} \{A_*^u[\varphi(x)] - f^0(t,x,u)\}\, dx^2\right] dx^1\right\}, \tag{1.48}$$

$$g = \min_{\varphi(x)\in C^2(B)} G(t_0,\varphi(x)),$$



где функция $r_m(t)$ кусочно-непрерывна на $[t_0,T_1]$.

Пусть имеется пара $z_m^* = (\varphi^*(t,x),u^*(t,x^1)) \in Z_m$.

**Утверждение 1.2.** (достаточные условия оптимальности в задаче 1**). Если существует такая функция $S(t,\varphi(x)) \in$ П, что пара $z_m^* \in Z_m$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $R(t, \varphi^*(t,x),u^*(t,x^1)) = r_m(t)$ почти всюду на $[t_0,T_1]$;

2) $G(t_0, \varphi^*(t_0,x)) = g$,

то справедливо условие (1.46). ■

**Доказательство.** Как и при доказательстве теоремы 1.1., применим принцип расширения [36, 67, 68].

Определим множество $V$ пар $z_m = (\varphi(t,x),u(t,x^1))$, где элементы пар по сравнению с входящими в $Z_m$ необязательно связаны уравнением (1.43); выполняется условие (1.44); допускаются разрывы первого рода функций $\varphi(t,x)$, $u(t,x^1)$ по $t$ $\forall x \in B$.

Таким образом, множество $Z_m \subset V$ и расширение построено. Доопределение функционала $J$ на множестве $V$ производится с помощью задания функции $S(t,\varphi(x)) \in$ П.

На множестве $V$ определим функционал

$$L(p_0(x),z_m) = G(t_0, \varphi(t_0,x)) - \int_{t_0}^{T_1} R(t,\varphi(t,x),u(t,x^1))\, dt - S(T_1,\varphi(T_1,x)). \tag{1.49}$$

Рассмотрим функционал (1.49) на множестве $Z_m \subset V$, где между функциями $\varphi(t,x)$, $u(t,x^1)$ существует дифференциальная связь (1.43).

Подставляя (1.47) в (1.49), с учетом (1.43) получаем

$$L(p_0(x),z_m) = S(t_0,\varphi(t_0,x)) - \int_B \varphi(t_0,x)\, p_0(x)\, dx + \int_{t_0}^{T_1}\left\{\frac{\partial S(t,\varphi(t,x))}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \int_B \left[\frac{\delta S(t,\varphi(t,x))}{\delta \varphi(x)} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t}\right] dx\right\} dt - S(T_1,\varphi(T_1,x)).$$

Используя формулу (П.1) вычисления полной производной функции $S(t,\varphi(t,x))$ по аргументу $t$:

$$\frac{d S(t,\varphi(t,x))}{d t} = \frac{\partial S(t,\varphi(t,x))}{\partial t} + \int_B \frac{\delta S(t,\varphi(t,x))}{\delta \varphi(x)} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t}\, dx$$

и интегрируя по времени, получаем

$$L(p_0(x),z_m) = S(t_0,\varphi(t_0,x)) - \int_B \varphi(t_0,x)\, p_0(x)\, dx + \int_{t_0}^{T_1} \frac{d S(t,\varphi(t,x))}{d t}\, dt -$$

$$- S(T_1,\varphi(T_1,x)) = -\int_B \varphi(t_0,x)\, p_0(x)\, dx \equiv J(p_0(x),z_m).$$

Таким образом, на множестве $Z_m$ функционалы L и J совпадают. Поведение функционала L на множестве $V \setminus Z_m$ полностью определяется видом функции $S(t,\varphi(x))$.

Пусть имеется функция $S(t,\varphi(x)) \in \Pi$. Рассмотрим задачу поиска минимума функционала (1.49) на множестве V. Третье слагаемое при имеющейся функции $S(t,\varphi(x)) \in \Pi$ и выполнении условия (1.44) вычисляется. С учетом свойств пар $z_m \in V$ и (1.48) имеем

$$\min_{z_m \in V} L(p_0(x),z_m) \ge g - \int_{t_0}^{T_1} r_m(t)\,dt - S(T_1,\varphi(T_1,x)) . \qquad (1.50)$$

Если имеется пара $z_m^* = (\varphi^*(t,x),u^*(t,x^1)) \in Z_m$, удовлетворяющая условиям 1,2 утверждения 1.2, то с учетом (1.47) – (1.50) $L(p_0(x),z_m^*) \le \le L(p_0(x),z_m)$ $\forall z_m \in V$. Так как $z_m^* \in Z_m \subset V$, то $L(p_0(x),z_m^*) \le L(p_0(x),z_m)$ $\forall z_m \in Z_m$. Как доказано выше, $L(p_0(x),z_m) \equiv J(p_0(x),z_m)$ $\forall z_m \in Z_m$ при имеющейся $S(t,\varphi(x)) \in \Pi$. Поэтому $J(p_0(x),z_m^*) \le J(p_0(x),z_m)$ $\forall z_m \in Z_m$, что соответствует определению экстремума функционала (1.45). При этом

$$L(p_0(x),z_m^*) = \min_{z_m \in Z_m} J(p_0(x),z_m) = J(p_0(x),z_m^*) .$$

Утверждение доказано. ■

<u>Соотношения для определения оптимального управления.</u> Для определения оптимального управления в задаче 1** функцию $S(t,\varphi(x))$ будем искать в виде

$$S(t,\varphi(x)) = \int_B p(t,x)\,\varphi(x)\,dx , \qquad (1.51)$$

где неизвестная функция $p(t,x) \in C^{1,2}(Q)$ и непрерывна на $Q'$.

Подставляя (1.51) в (1.47), применяя правило (П.2) вычисления вариационных производных, имеем $\dfrac{\delta S(t,\varphi(\xi))}{\delta \varphi(x)} = p(t,x)$ и, сравнивая с (1.26), получаем

$$R(t,\varphi(x),u) = \int_B \{ -\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}\varphi(x) + p(t,x)\,[\,A_*^u[\varphi(x)] - f^0(t,x,u)]\,\}\,dx ,$$
$$G(t_0,\varphi(x)) = \int_B [\,p(t_0,x) - p_0(x)]\,\varphi(x)\,dx \qquad (1.52)$$

Из условия 1 утверждения 1.2 и из (1.48) следует, что структура оптимального управления $u^*(t,x^1)$ определяется соотношением

$$u^*(t,x^1) = \arg\max_{u \in U} \int_{B_2} [\,\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi^*(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + (1/2)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi^*(t,x)}{\partial x_i\,\partial x_j} a_{ij}(t,x,u) - f^0(t,x,u)\,]\,p(t,x)\,dx^2 .$$



Здесь считается, что операция максимизации по управлению $\forall t, x^1$ однозначно разрешима.

Учитывая, что

$$p(t,x^1) = \int_{B_2} p(t,x)\,dx^2 ; \quad p(t,x^2 \mid x^1) = \frac{p(t,x)}{\int_{B_2} p(t,x)\,dx^2} , \qquad (1.53)$$

где $p(t,x^1) \ge 0$ – маргинальная плотность вероятности, а $p(t,x^2 \mid x^1)$ – условная плотность вероятности, имеем

$$u^*(t,x^1) = \arg\max_{u \in U} \int_{B_2} [\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi^*(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + (1/2)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi^*(t,x)}{\partial x_i\,\partial x_j} a_{ij}(t,x,u) - f^0(t,x,u)]\; p(t,x^2 \mid x^1)\,dx^2 . \qquad (1.54)$$

Применяя в первом равенстве соотношений (1.52) условие (1.4) сопряженности операторов, перепишем (1.52) в виде

$$R(t,\varphi(x),u) = \int_B [\,\{-\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + A^u[p(t,x)]\,\}\,\varphi(x) - f^0(t,x,u)\,p(t,x)]\,dx ,$$
$$G(t_0,\varphi(x)) = \int_B [\,p(t_0,x) - p_0(x)]\,\varphi(x)\,dx .$$

Предполагая, что функции $R(t,\varphi(x),u)$, $G(t_0,\varphi(x))$ имеют непрерывную вариационную производную по $\varphi(x)$, используя необходимое условие экстремума в (1.48) и условия утверждения 1.2, получаем

$$\frac{\delta R(t,\varphi^*(t,x),u^*(t,x^1))}{\delta \varphi(x)} = 0 \quad \forall (t,x) \in Q , \qquad \frac{\delta G(t_0,\varphi^*(t_0,x))}{\delta \varphi(x)} = 0 \quad \forall x \in B .$$

Отсюда

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = A^{u(\cdot)}[\,p(t,x)\,] = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[\,f_i(t,x,u^*(t,x^1))\,p(t,x)] + (1/2)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}[a_{ij}(t,x,u^*(t,x^1))\,p(t,x)] \quad \forall (t,x) \in Q , \qquad (1.55)$$

$$p(t_0,x) = p_0(x) \qquad \forall x \in B , \qquad (1.56)$$

где управление $u^*(t,x^1)$ удовлетворяет условию (1.54).

Таким образом, искомое оптимальное управление $u^*(t,x^1)$, удовлетворяющее условию (1.46), можно найти в результате решения системы (1.43), (1.44), (1.53)–(1.56).

Выведенная система совпадает с необходимыми условиями экстремума, полученными в [177] при $F(t_1,x) \equiv 0$ и в [195]. Существование оптимального управления в рассматриваемой задаче доказано в [176, 177].

З а м е ч а н и е. Как следует из [160], граничное условие в (1.44) можно задавать на некотором замкнутом подмножестве $\Gamma^* \subset \Gamma$, для которого $(t_1, X(t_1)) \in \Gamma^*$ с вероятностью 1 при любом начальном состоянии и допустимом управлении.

## 1.5. Примеры нахождения оптимальных синтезирующих функций

П р и м е р 1.1 (линейная система, линейный по плотности вероятности функционал, $n = 1$). Пусть элементы постановки задачи (1.1)–(1.3), (1.5) имеют вид

$$dX = u(t)\,dt + dW \ , \quad X(0) = X_0 \ ,$$

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[u(t)\,p(t,x)] + (1/2)\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} \ , \quad p(0,x) = p_0(x) \ , \qquad (1.57)$$

$$J = (1/2)\int_0^1 \int_{E^1} u^2(t)\,p(t,x)\,dx\,dt + (1/2)\int_{E^1} x^2 p(1,x)\,dx \ ,$$

где $x \in E^1$, $t \in [0,1]$, $u \in E^1$, $B = B_1 = E^1$, $m = 0$.

Т р е б у е т с я найти оптимальное программное управление $u^*(t)$ для различных начальных плотностей вероятности $p_0(x)$.

Воспользуемся методикой, изложенной в разд. 1.2.

1. Найдем оптимальную синтезирующую функцию $u^*(t;p(x))$.

Соотношения (1.17) для данной задачи имеют вид

$$-\frac{\partial S(t,p(x))}{\partial t} = \max_u \int_{E^1} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}\right\} u + (1/2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}\right\} - \right.$$

$$\left. - (1/2)\,u^2\right] p(x)\,dx \ , \qquad S(1,p(x)) = -(1/2)\int_{E^1} x^2 p(x)\,dx \ . \qquad (1.58)$$

Так как ограничения на управление отсутствуют, то используя необходимые условия экстремума, можно найти структуру оптимального управления :

$$u^*(t;p(x)) = \int_{E^1} \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}\right\} p(x)\,dx \ . \qquad (1.59)$$

Будем искать решение в форме

$$S(t,p(x)) = \int_{E^1} [(1/2)K_2(t)\,x^2 + K_1(t)\,x + K_0(t)]\,p(x)\,dx +$$

$$+ (1/2)\,N(t)\left[\int_{E^1} x\,p(x)\,dx\right]^2 \ , \qquad (1.60)$$

где $K_2(t)$, $K_1(t)$, $K_0(t)$, $N(t)$ – неизвестные функции.

Введем обозначения: $m = \int_{E^1} x\,p(x)\,dx$ , $D = \int_{E^1} x^2 p(x)\,dx$ .

Тогда по формуле (П.2) имеем



$$\delta S(t,p(\xi)) / \delta p(x) = (1/2)K_2(t)\,x^2 + K_1(t)\,x + K_0(t) + N(t)\,x\,m \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}\right\} = K_2(t)\,x + K_1(t) + N(t)\,m \ , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}\right\} = K_2(t) \ . \qquad (1.61)$$

Подставляя (1.60), (1.61) в (1.58) и приравнивая члены при одинаковых степенях переменных $m$, $D$, получаем систему:

$$\dot K_2 = 0 \ , \quad K_2(1) = -1 \ ; \qquad \dot K_1 + K_1 K_2 + N K_1 = 0 \ , \quad K_1(1) = 0 \ ,$$

$$2\dot K_0 + K_1^2 + K_2 = 0 \ , \quad K_0(1) = 0 \ ; \qquad \dot N + K_2^2 + N^2 + 2NK_2 = 0 \ , \quad N(1) = 0 \ .$$

Здесь аргументы неизвестных функций для краткости опущены.

Решение : $K_2(t) = -1$, $K_1(t) \equiv 0$ , $K_0(t) = (t-1)/2$, $N(t) = (1-t)/(2-t)$ .

Следовательно, оптимальная синтезирующая функция имеет вид

$$u^*(t;p(x)) = K_2(t)\,m + K_1(t) + N(t)\,m = m/(t-2) = \int_{E^1} x\,p(x)\,dx/(t-2). \qquad (1.62)$$

2. Предположим, что начальной плотности вероятности $p(0,x)$ соответствует математическое ожидание $m_0$. Тогда из уравнения модели объекта и (1.62) следует уравнение $dm/dt = m(t)/(t-2)$ , $m(0) = m_0$ .

Таким образом, для различных $m_0$ оптимальная синтезирующая функция (1.62) порождает соответствующие пары функций (решения задачи 1): $m(t) = m_0(1-t/2)$, $u(t) = u^*(t;m(t)) = -m_0/2$ .

3. Найдем решение задачи 1 вторым способом. Для этого используем систему (1.2), (1.3), (1.28), (1.29), (1.30), которая для данного примера имеет вид

$$\dot m = K_2 m + K_1 \ , \quad m(0) = m_0 \ ; \qquad u^*(t) = K_2(t)\,m(t) + K_1(t) \ ;$$

$$\dot K_2 = 0 \ , \quad K_2(1) = -1 \ ; \qquad \dot K_1 = -K_1 K_2 - K_2^2 m \ , \quad K_1(1) = 0 \ , \qquad (1.63)$$

$$\dot K_0 = [K_2(t)^2 m^2(t) - K_1(t)^2 - K_2(t)]/2 \ , \quad K_0(1) = 0 \ .$$

Отсюда

$K_2(t) = -1$, $K_1(t) = m_0(1-t)/2$ , $K_0(t) = m_0^2[-t^2/8 + 3t/8 - 1/4] + (t-1)/2$ ,

и, следовательно, $m^*(t) = m_0[1 - t/2]$ – оптимальный закон изменения математического ожидания, а $u^*(t) = -m_0/2$ – оптимальное программное управление.

Полученный результат подтверждает свойство оптимальной синтезирующей функции $u^*(t;p(x))$ порождать соответствующие оптимальные программные управления $u^*(t)$ для каждой начальной плотности вероятности.

П р и м е р 1.2. (линейная система, нелинейный по плотности функционал, $n = 1$)

Пусть элементы постановки задачи (1.1)–(1.3), (1.5) имеют вид

$$d X = [-X(t) + u(t)]\, dt + dW , \quad X(0) = X_0 , \tag{1.64}$$

$$J = (1/2) \int_0^1 \int_{E^1} u^2(t)\, p(t,x)\, dx\, dt + \left[ \int_{E^1} x\, p(1,x)\, dx - 1 \right]^2 \to \min ,$$

где $x \in E^1$, $t \in [0,1]$, $u \in E^1$, $m = 0$.

Т р е б у е т с я найти оптимальное программное управление.

Найдем оптимальную синтезирующую функцию $u^*(t; p(x))$. Соотношения (1.17) для данной задачи имеют вид

$$-\frac{\partial S(t,p(x))}{\partial t} = \max_u \int_{E^1} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)} \right\} (-x + u) + (1/2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)} \right\} - (1/2)\, u^2 \right] p(x)\, dx , \tag{1.65}$$

$$S(1,p(x)) = -\left[ \int_{E^1} x\, p(x)\, dx - 1 \right]^2 = -\left[ \int_{E^1} x\, p(x)\, dx \right]^2 + 2 \int_{E^1} x\, p(x)\, dx - 1 .$$

Так как ограничения на управление отсутствуют, используя необходимые условия экстремума, получаем структуру оптимального управления:

$$u^*(t; p(x)) = \int_{E^1} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)} \right\} p(x)\, dx . \tag{1.66}$$

Будем искать решение в форме

$$S(t,p(x)) = (1/2) K_2(t) \left[ \int_{E^1} x\, p(x)\, dx \right]^2 + K_1(t) \int_{E^1} x\, p(x)\, dx + K_0(t) =$$

$$= (1/2) K_2(t)\, m^2 + K_1(t)\, m + K_0(t) , \tag{1.67}$$

где $K_2(t), K_1(t), K_0(t)$ – неизвестные функции.

Сравнивая (1.65) и (1.67), получаем, что при $t = t_1 = 1$

$$K_2(1) = -2 , \; K_1(1) = 2 , \; K_0(1) = -1 . \tag{1.68}$$

Тогда

$$\partial S(t,p(x)) / \partial t = (1/2) \dot K_2(t)\, m^2 + \dot K_1(t)\, m + \dot K_0(t) ,$$

$$\delta S(t,p(\xi)) / \delta p(x) = K_2(t)\, m\, x + K_1(t)\, x , \tag{1.69}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)} \right\} = K_2(t)\, m + K_1(t) , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)} \right\} = 0 .$$

Подставляя (1.69), (1.68) в (1.65) и приравнивая члены при одинаковых степенях переменных $m$ нулю, получаем систему уравнений:

$$\dot K_2 - 2K_2 + K_2^2 = 0 , \; K_2(1) = -2 ; \quad \dot K_1 + K_1 K_2 - K_1 = 0 , \; K_1(1) = 2 ,$$
$$2 \dot K_0 + K_1^2 = 0 , \quad K_0(1) = -1 . \tag{1.70}$$

Ее решение: $K_2(t) = 2/[1 - \exp(2t - 2)]$, $K_1(t) = -2 \exp(1-t) / [1 - 2\exp(2 - 2t)]$.

Поэтому оптимальная синтезирующая функция имеет вид



$$u^*(t;p(x)) = K_2(t)\, m + K_1(t) = 2m/[1 - \exp(2t - 2)] - 2\exp(1-t) / [1 - 2\exp(2-2t)] . \tag{1.71}$$

Предположим, что начальной плотности вероятности $p(0,x)$ соответствует математическое ожидание $m_0$. Тогда, учитывая полученный результат, можно получить уравнение, описывающее изменение математического ожидания

$$\dot m = m(t) [1 + 2\exp(2t - 2)] / [1 - 2\exp(2t-2)] - 2\exp(t-1) / [1 - 2\exp(2-2t)] ,$$
$$m(0) = m_0 . \tag{1.72}$$

Отсюда $m(t) = \{(1 - 2e^2) + [1 - 2\exp(2-2t)] (2e\, m_0 - 1)\} / \{2\exp(1-t) [1 - 2e^2]\}$.

Подставляя последнее равенство в оптимальную синтезирующую функцию, для каждого начального математического ожидания можно найти соответствующее оптимальное программное управление $u^*(t)$.

В табл. 1.1 приведено несколько вариантов конечных значений математического ожидания, обеспечиваемых оптимальным управлением.

Таблица 1.1

| $m_0$ | 0 | 1 | 2 | e |
|---|---|---|---|---|
| m(1) | 0,4637 | 0,661 | 0,858 | 1 |

П р и м е р 1.3. (линейная система, линейный по плотности вероятности функционал, $n = 2$).

Пусть элементы постановки задачи (1.1) – (1.5) имеют вид

$$dX = [Z + u(t)]\, dt + dW , \quad X(0) = X_0 ,$$
$$dZ = 0 , \tag{1.73}$$

функции $p(0,x) = p_0(x)$, $p(z)$ заданы,

$$\frac{\partial p(t,x,z)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [(z + u(t))\, p(t,x,z)] + (1/2) \frac{\partial^2 p(t,x,z)}{\partial x^2} ,$$

$$J = (1/2) \int_0^1 \int_{E^2} u^2(t)\, p(t,x,z)\, dx\, dz\, dt + (1/2) \int_{E^2} x^2\, p(1,x,z)\, dx dz ,$$

где $x \in E^1$, $z \in E^1$, $t \in [0,1]$, $u \in E^1$, $m = 0$.

Т р е б у е т с я найти оптимальное программное управление.

Рассмотрим з а д а ч у 2 нахождения оптимальной синтезирующей функции. Так как $m = 0$, записываем соотношения (1.18):

$$-\frac{\partial S(t,p(x,z))}{\partial t} = \max_u \int_{E^2} \left\{ \frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x,z)} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} [(z + u)\, p(x,z)] + (1/2) \frac{\partial^2 p(x,z)}{\partial x^2} \right] - (1/2)\, u^2\, p(x,z) \right\} dx\, dz , \tag{1.74}$$

$$S(1,p(x,z)) = -(1/2)\int_{E^2} x^2\, p(x,z)\, dx\, dz\ .$$

Интегрируя в (1.74) по частям, имеем

$$-\frac{\partial S(t,p(x,z))}{\partial t} = \max_{u}\int_{E^2}\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x,z)}\Big](z+u)\,p(x,z) + (1/2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x,z)}\Big]p(x,z) -$$

$$-(1/2)\,u^2\, p(x,z)\Big\}\, dx\, dz\ . \qquad (1.75)$$

Отсюда следует структура оптимальной синтезирующей функции:

$$u^*(t;\, p(x,z)) = \int_{E^2}\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x,z)}\Big\}\, p(x,z)\, dx\, dz\ . \qquad (1.76)$$

Обозначим: $x' = (x,z)$, $\hat{x} = \int_{E^2} x\, p(x')\, dx'$, $D_1 = \int_{E^2} x^2\, p(x')\, dx'$,

$\hat{z} = \int_{E^2} z\, p(x')\, dx'$, $D_2 = \int_{E^2} z^2\, p(x')\, dx'$, $R = \int_{E^2} x\, z\, p(x')\, dx'$.

Будем искать решение уравнения (1.75) в виде

$$S(t,p(x,z)) = (1/2)\,K_2(t)\,D_1 + K_1(t)\,\hat{x} + K_0(t) + (1/2)\,N(t)\,\hat{x}^2 + \Psi_1(t)\,\hat{z} +$$

$$+ (1/2)\,\Psi_2(t)\,\hat{z}^2 + \Psi_3(t)\,D_2 + M(t)\,\hat{x}\,\hat{z} + L(t)\,R\ , \qquad (1.77)$$

где $K_2(t)$, $K_1(t)$, $K_0(t)$, $N(t)$, $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$, $\Psi_3(t)$, $M(t)$, $L(t)$ – неизвестные функции.

Тогда

$$\delta S(t,p(\xi))\,/\,\delta p(x,z) = (1/2)\,K_2(t)\,x^2 + K_1(t)\,x + N(t)\,\hat{x}\,x + \Psi_1(t)\,z +$$

$$+ \Psi_2(t)\,\hat{z}\,z + \Psi_3(t)\,z^2 + M(t)\,\hat{x}\,z + M(t)\,x\,\hat{z} + L(t)\,x\,z\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x,z)} = K_2(t)\,x + K_1(t) + N(t)\,\hat{x} + M(t)\,\hat{z} + L(t)\,z\ ,\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x,z)} = K_2(t)\ ,$$

а оптимальная синтезирующая функция имеет вид

$$u^*(t;\, p(x,z)) = K_2(t)\,\hat{x} + K_1(t) + N(t)\,\hat{x} + M(t)\,\hat{z} + L(t)\,\hat{z}\ . \qquad (1.78)$$

Подставляя (1.78) в (1.74), (1.75) и приравнивая нулю члены при одинаковых степенях $\hat{x}$, $\hat{z}$, $R$, $D_1$, $D_2$, получаем систему уравнений:

$$\dot{K}_2 = 0\ ,\quad \dot{K}_1 + K_1 K_2 + K_1 N = 0\ ,\quad 2\dot{K}_0 + K_1^2 + K_2 = 0\ ,$$

$$K_2(1) = -1\ ,\quad K_1(1) = 0\ ,\quad K_0(1) = 0\ ,$$

$$\dot{\Psi}_1 + K_1 + K_1 M + K_1 L = 0\ ,\ \dot{\Psi}_2 + M^2 + 2M + ML + L^2 = 0\ ,\ \dot{\Psi}_3 + L = 0\ ,$$

$$\Psi_1(1) = 0\ ,\quad \Psi_2(1) = 0\ ,\quad \Psi_3(1) = 0\ ,$$

$$\dot{M} + K_2 L + K_2 M + N + NL + NM = 0\ ,\ \dot{N} + K_2^2 + 2K_2 N + N^2 = 0\ ,\ \dot{L} + K_2 = 0\ ,$$

$$M(1) = 0\ ,\quad N(1) = 0\ ,\quad L(1) = 0\ .$$



Ее решение имеет вид: $K_2(t) = -1$, $K_1(t) \equiv 0$, $L(t) = t - 1$,

$$N(t) = (t-1)/(t-2)\ ,\ M(t) = -(t-1)^2/(t-2)\ .$$

Поэтому из (1.78) получаем оптимальную синтезирующую функцию

$$u^*(t;\, p(x,z)) = [\,\hat{x} + (1-t)\,\hat{z}\,]\,/\,(t-2)\ . \qquad (1.79)$$

Из уравнения, которое описывает поведение функции $p(t,x,z)$, и из (1.79) можно получить уравнения для математических ожиданий компонент вектора состояния:

$$d\hat{x}/dt = (\hat{x} - \hat{z})\,/\,(t-2)\ ,\quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0\ ;\qquad d\hat{z}/dt = 0\ ,\quad \hat{z}(0) = \hat{z}\ .$$

Решение имеет вид: $\hat{z}(t) = \hat{z}$, $\hat{x}(t) = [\,2\,\hat{x}_0 + (\hat{z} - \hat{x}_0)\,t\,]/2$.

Оптимальная синтезирующая функция принимает форму

$$u^*(t;\, p(x,z)) = -(\hat{x}_0 + \hat{z})\,/\,2\ . \qquad (1.80)$$

Для различных начальных плотностей вероятности оптимальная синтезирующая функция (1.70) порождает соответствующие программные управления:

1. Для $\hat{x}_0 = 0$, $\hat{z} = 1$, решение: $\hat{x}_1(t) = t/2$, $u^*_1(t) = -1/2$.
2. Для $\hat{x}_0 = 0$, $\hat{z} = 0$, решение: $\hat{x}_2(t) = 0$, $u^*_2(t) = 0$.
3. Для $\hat{x}_0 = 0$, $\hat{z} = -1$, решение: $\hat{x}_3(t) = -t/2$, $u^*_3(t) = 1/2$

и т.д.

Таким образом, решение семейства задач 1 получено через решение задачи 2.

Рассмотрим алгоритм непосредственного решения з а д а ч и 1. Для этого воспользуемся системой (1.2), (1.3), (1.28), (1.29), (1.30), которая для данного примера имеет вид

$$\frac{\partial p^*(t,x,z)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\big[(z+u^*(t))\,p^*(t,x,z)\big] + (1/2)\frac{\partial^2 p^*(t,x,z)}{\partial x^2}\ ,$$

$$\frac{\partial \varphi(t,x,z)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t,x,z)}{\partial x}(z+u^*(t)) + (1/2)\frac{\partial^2 \varphi(t,x,z)}{\partial x^2} - (1/2)\,u^*(t)^2 = 0\ ,$$

$$p^*(0,x,z) = p_0(x)\,p(z)\ ,\qquad \varphi(1,x,z) = -(1/2)\,x^2\ , \qquad (1.81)$$

$$u^*(t) = \arg\max_{u}\int_{E^2}\Big[\frac{\partial \varphi(t,x,z)}{\partial x}\,u - (1/2)\,u^2\Big]\,p^*(t,x,z)\,dx\,dz\ .$$

Отсюда получим структуру оптимального управления:

$$u^*(t) = \int_{E^2} \frac{\partial \varphi(t,x,z)}{\partial x} p^*(t,x,z)\, dx\, dz . \qquad (1.82)$$

Будем искать функцию $\varphi(t,x,z)$ в виде

$$\varphi(t,x,z) = (1/2)\, K_2(t)\, x^2 + K_1(t)\, x + K_0(t) + N(t)\, x\, z + \Psi_1(t)\, z + \Psi_2(t)\, z^2 , \qquad (1.83)$$

где $K_2(t), K_1(t), K_0(t), N(t), \Psi_1(t), \Psi_2(t)$ – неизвестные функции.

Подставляя (1.83) в (1.82), имеем

$$u^*(t) = K_2(t)\, \hat{x}(t) + K_1(t) + N(t)\, \hat{z}(t) \qquad (1.84)$$

Подставим (1.83), (1.84) в (1.81) и приравняем нулю члены при одинаковых степенях $x, z$. Используя уравнения для математических ожиданий векторов $x$ и $z$, получаем

$$d\hat{x}/dt = \hat{z} + K_2\hat{x} + K_1 + N\hat{z} , \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 ; \quad d\hat{z}/dt = 0 , \quad \hat{z}(0) = \hat{z} ,$$

$$\dot{K}_2 = 0 , \quad \dot{K}_1 + K_1 K_2 + K_2^2 \hat{x} + K_2 N \hat{z} = 0 , \quad \dot{N} + K_2 = 0 , \qquad (1.85)$$

$$K_2(1) = -1 , \quad K_1(1) = 0 , \quad N(1) = 0 .$$

Решение системы (1.85): $K_2(t) = -1$ , $N(t) = t-1$, $\hat{z}(t) = \hat{z}$ .

Рассмотрим частные случаи.

1. Для $\hat{x}_0 = 0$ , $\hat{z} = 1$ из системы (1.85) следует:

$$d\hat{x}/dt = -\hat{x} + K_1 + t , \quad \hat{x}(0) = 0 ,$$

$$\dot{K}_1 = K_1 - \hat{x} + t - 1 , \quad K_1(1) = 0 .$$

Решение системы: $\hat{x}_1(t) = t/2$ , $K_1(t) = (1-t)/2$ , а оптимальное программное управление (1.84) : $u^*_1(t) = -1/2$ .

2. Для $\hat{x}_0 = 0$ , $\hat{z} = 0$ решение: $\hat{x}_2(t) = 0$, $K_1(t) \equiv 0$ , $u^*_2(t) = 0$ .

3. Для $\hat{x}_0 = 0$ , $\hat{z} = -1$ из (1.85) следует:

$$d\hat{x}/dt = -\hat{x} + K_1 - t , \quad \hat{x}(0) = 0 ,$$

$$\dot{K}_1 = K_1 - \hat{x} + 1 - t , \quad K_1(1) = 0 .$$

Решение системы: $\hat{x}_3(t) = -t/2$ , $K_1(t) = (t-1)/2$ . Оптимальное программное управление (1.84) : $u^*_3(t) = 1/2$ .

Полученный результат подтверждает свойство оптимальной синтезирующей функции порождать оптимальные управления в требуемом классе.

Данный пример демонстрирует возможность применения разработанного подхода к синтезу оптимальных систем в условиях неопределенности параметров и неполной информации о состоянии.



## 1.6. Синтез оптимальных линейных регуляторов

### 1.6.1. Постановка задачи

Рассмотрим частный случай задачи, поставленной в разд. 1.1. Пусть модель системы управления (1.1) линейна:

$$dX(t) = [\, A(t)\, X(t) + B(t)\, u(t)\, ]\, dt + C(t)\, dW(t) , \quad X(t_0) = X_0 , \qquad (1.86)$$

где $A(t)$ , $B(t)$ , $C(t)$ – матрицы размера $n\times n$ , $n\times q$, $n\times k$ соответственно. Остальные обозначения совпадают с используемыми в разд. 1.1.

Будем считать начальную плотность вероятности $p_0(x)$ гауссовской с математическим ожиданием $m_0$ и ковариацией $V_0$ .

Уравнение (1.3) можно записать в форме

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \{ [\, \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(t)\, x_j + \sum_{j=1}^{q} B_{ij}(t)\, u_j(t,x^1)\, ]\, p(t,x) \} +$$

$$+ (1/2) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x_i\, \partial x_j} Z_{ij}(t) , \quad p(t_0,x) = p_0(x) , \qquad (1.87)$$

где $Z(t) = C(t)\, C(t)^T$ – матрица размера $n \times n$ .

Функционал (1.5) имеет вид

$$J = M\, \{ (1/2) \int_{t_0}^{t_1} [\, X^T(t)\, S(t)\, X(t) + u^T(t,X^1(t))\, Q(t)\, u(t,X^1(t))\, ]\, dt +$$

$$+ (1/2)\, [\, X^T(t_1)\, \Lambda\, X(t_1)\, ]\, \} , \qquad (1.88)$$

где $S(t)$ , $\Lambda$ – неотрицательно определенные симметрические матрицы размера $n\times n$ , а $Q(t)$ – положительно определенная симметрическая матрица размера $q\times q$ , $M$ – знак математического ожидания.

Сравнивая с (1.1), (1.3), имеем: $f(t,x,u) = A(t)\, x + B(t)\, u$ , $\sigma(t,x,u) = C(t)$ , $f^0(t,x,u) = (1/2)\, [\, x^T S(t) x + u^T Q(t) u\, ]$ ; $F(x) = (1/2)\, x^T \Lambda\, x$ .

Предполагается, что элементы матриц $A(t)$ , $B(t)$ , $C(t)$ , $S(t)$, $Q(t)$ непрерывно дифференцируемы, а на управление ограничений не наложено.

Пусть управление зависит только от времени и вектора $x^1 = (x^1, \dots, x^m)$, $0 \le m \le n$ .

Требуется найти пару $d_m^* = (p^*(t,x), u^*(t,x^1)) \in D_m$ , на которой достигается минимум функционала (1.88).

### 1.6.2. Соотношения для определения оптимального управления

Как следует из разд. 1.3, для нахождения искомого управления требуется решить систему (1.2), (1.3), (1.32)–(1.35).

Обозначим в матрице $A$ и в остальных матрицах соответствующие блоки:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \hat{A} & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \\ a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ & \overset{*}{A} & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} \\ & {}^{\oplus}A & & & A^{\oplus} & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} \\ a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ & {}_{\oplus}A & & & A_{\oplus} & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \bar{A} & & & \overset{o}{A} & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Здесь матрицы имеют следующие размеры:

$$\hat{A} - m\times n\ ,\ \overset{*}{A} - (n-m)\times n\ ,\ \bar{A} - n\times m\ ,\ \overset{o}{A} - n\times(n-m),$$

$${}^{\oplus}A\ - m\times m\ ,\ A^{\oplus} - m\times(n-m)\ ,\ {}_{\oplus}A\ \ - (n-m)\times m\ ,\ A_{\oplus}\ - (n-m)\times(n-m)\ .$$

Приведем некоторые правила, часто используемые при дальнейшем изложении:

1. $$\frac{\partial\,[x^T A x]}{\partial\, x^2} = \overset{*}{A}\, x + [\,\overset{o}{A}\,]^T x\ ;$$

2. Если $A$ – симметрическая матрица, то правило 1 имеет вид

$$\frac{\partial\,[x^T A x]}{\partial\, x^2} = 2\,\overset{*}{A}\, x\ .$$

3. $$\frac{d\,[A^T x]}{d\, x} = A\ ;\ \frac{d[x^T A]}{d\, x} = A\ ;\ \frac{d\, x^T}{d\, x} = E\ .$$

4. $$\frac{d\,[x^T A x]}{d\, x} = A\, x + A^T x\ .$$

5. $$x^T G = (1/2)\, x^T G + (1/2)\, G^T x\ .$$

6. $$x^T A x = 0\ ,\ \text{если}\quad A + A^T = 0\ ,$$

где $A$, $G$ – матрицы размера $n\times n$ , $n\times 1$ соответственно ; $E$ – единичная матрица.

Будем искать неизвестную функцию $\varphi(t,x)$ в виде

$$\varphi(t,x) = K_0(t) + K_1{}^T(t)\, x^1 + (1/2)\, x^{1T} K_2(t)\, x^1 + \Psi_1(t)^T x^2 + $$
$$+ (1/2)\, x^{2T}\, \Psi_2(t)\, x^2 + x^{1T} N(t)\, x^2\ , \qquad (1.89)$$

где $K_0(t)$ – функция , $K_1(t) - m\times 1$, $K_2(t) - m\times m$, $\Psi_1(t) - (n-m)\times 1$, $\Psi_2(t) - (n-m)\times(n-m)$ , $N(t) - m\times(n-m)$ – неизвестные матрицы соответствующего размера.

Далее с целью сокращения записи зависимость всех матриц, кроме



Λ, от времени там, где это не вызывает недоразумений, опущена.

Выпишем уравнение (1.32) с учетом (1.89) и введенных обозначений:

$$\frac{\partial\,\varphi(t,x)}{\partial\, t} = -\left(\frac{\partial\,\varphi(t,x)}{\partial\, x}\right)^T (A\, x + B\, u) - (1/2)\,\mathrm{sp}\{\,Z\ \frac{\partial^2\,\varphi(t,x)}{\partial\, x\,\partial\, x^T}\,\} +$$
$$+ (1/2)\, x^T S x + (1/2)\, u^T Q u =$$
$$= -(\partial\varphi/\partial x^1)^T (\hat{A}\, x + \hat{B}\, u) - (\partial\varphi/\partial x^2)^T (\overset{*}{A}\, x + \overset{*}{B}\, u) -$$
$$- (1/2)\,\mathrm{sp}\{\,Z\ \frac{\partial^2\,\varphi(t,x)}{\partial\, x\,\partial\, x^T}\,\} + (1/2)\, x^T S x + (1/2)\, u^T Q u =$$
$$= -(\,K_1 + K_2\, x^1 + N\, x^2)^T\ (\hat{A}\, x + \hat{B}\, u\,) - (\Psi_1 + \Psi_2\, x^2 + N^T x^1)^T \times$$
$$\times (\overset{*}{A}\, x + \overset{*}{B}\, u) - (1/2)\,\mathrm{sp}\{\,Z\ \begin{vmatrix} K_2 & N \\ N^T & \Psi_2 \end{vmatrix}\,\} + (1/2)\, x^T S x + (1/2)\, u^T Q u\ . \qquad (1.90)$$

Выделяя члены, зависящие от управления, выпишем аналог условия (1.35):

$$u^*(t,x^1) = \arg\max_{u} \int_{B_2} \{\,(\,K_1 + K_2\, x^1 + N\, x^2)^T \hat{B}\, u\ + (\Psi_1 + \Psi_2\, x^2 + N^T x^1)^T \times$$
$$\times\ \overset{*}{B}\, u - (1/2)\, u^T Q u\,\}\ p^*(t, x^2\,|\, x^1)\, dx^2 =$$
$$= \arg\max_{u}\ \{[\,K_1 + K_2\, x^1 + N\,\mu(t,x^1)]^T\, \hat{B}\, u + [\Psi_1 + \Psi_2\,\mu(t,x^1) + N^T x^1]^T \times$$
$$\times\ \overset{*}{B}\, u - (1/2)\, u^T Q u\,\} = \arg\max_{u}\ \Phi(u)\ , \qquad (1.91)$$

где $\mu(t,x^1)$ – условное математическое ожидание вектора $X^2$ при фиксированном значении $X^1 = x^1$ : $\mu(t,x^1) = \int_{B_2} x^2\, p^*(t, x^2\,|\,x^1)\, dx^2$ .

Так как на управление ограничений не наложено, структура оптимального управления находится из (1.91) с помощью необходимых условий безусловного экстремума: $\partial\,\Phi(u)\,/\partial\, u = 0$ .

Отсюда с учетом правил 3, 4 имеем

$$\hat{B}^T\,[\,K_1 + K_2\, x^1 + N\,\mu(t,x^1)] + \overset{*}{B}{}^T\,[\Psi_1 + \Psi_2\,\mu(t,x^1) + N^T x^1]\ - Q\, u = 0\ ,$$

а так как матрица $Q(t)$ невырожденная, то

$$u^*(t,x^1) = Q^{-1}\,\hat{B}^T\,[\,K_1 + K_2\, x^1 + N\,\mu(t,x^1)] + Q^{-1}\,\overset{*}{B}{}^T\,[\Psi_1 + \Psi_2\,\mu(t,x^1) + N^T x^1] =$$
$$= Q^{-1}\, B^T \begin{vmatrix} K_1 + K_2\, x^1 + N\,\mu(t,x^1) \\ \Psi_1 + \Psi_2\,\mu(t,x^1) + N^T x^1 \end{vmatrix} . \qquad (1.92)$$

Вычисляя матрицу вторых производных функции $\Phi(u)$, получаем

$$\frac{\partial^2 \Phi(u)}{\partial u^2} = - Q^T < 0 .$$

Так как матрица $Q(t)$ положительно определенная, то на управлении (1.92) достигается максимум функции $\Phi(u)$ в (1.91) по управлению вследствие выполнения достаточных условий экстремума.

Предположим, что уравнению (1.87) удовлетворяет гауссовская плотность вероятности

$$p(t,x) = \frac{1}{[(2\pi)^n \det V(t)]^{1/2}} \exp\{ -(1/2)\,[x - m(t)]^T V^{-1}(t)\,[x - m(t)] \} ,$$

где $m(t)$ – безусловное математическое ожидание, $m = (m^1, m^2)^T$, $m^1 = M\{X^1\}$, $m^2 = M\{X^2\}$, $V(t)$ – ковариационная матрица ,

$$V = \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12}^T & V_{22} \end{vmatrix} .$$

Согласно [211] условное математическое ожидание определяется по формуле

$$\mu(t, x^1) = m^2(t) + V_{12}(t)^T V_{11}^{-1}(t)\,[x^1 - m^1(t)] . \qquad (1.93)$$

Окончательно с учетом (1.92), (1.93) находим

$$u^*(t, x^1) = Q^{-1} B^T \begin{vmatrix} K_1 + N m^2 - N V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 + (K_2 + N V_{12}^T V_{11}^{-1})\, x^1 \\ \Psi_1 + \Psi_2 m^2 - \Psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 + (N^T + \Psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1})\, x^1 \end{vmatrix} . \qquad (1.94)$$

Для получения уравнений, описывающих изменение математического ожидания и ковариации, подставим (1.94) в (1.86). Пользуясь известными соотношениями для линейных систем [57, 113, 211] и свойством $M[\mu(t, x^1)] = m^2(t)$, получаем

$$\dot{m} = A m + B Q^{-1} B^T \begin{vmatrix} K_1 + N m^2 + K_2 m^1 \\ \Psi_1 + \Psi_2 m^2 + N^T m^1 \end{vmatrix} , \quad m(t_0) = m_0 , \qquad (1.95)$$

$$\dot{V} = \{ A + B Q^{-1} B^T \begin{vmatrix} (K_2 + N V_{12}^T V_{11}^{-1}) & 0 \\ (N^T + \Psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1}) & 0 \end{vmatrix} \} V +$$

$$+ V \{ A^T + \begin{vmatrix} (K_2 + V_{11}^{-1} V_{12} N^T) & (N + V_{11}^{-1} V_{12} \Psi_2) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} B Q^{-1} B^T \} + C C^T , \qquad (1.96)$$

$$V(t_0) = V_0 .$$

Подставляя (1.93) и (1.89) в (1.90) с учетом правила 5, имеем



$$\dot{K}_0(t) + (1/2)\,\dot{K}_1^T(t)\, x^1 + (1/2)\, x^{1T} \dot{K}_1(t) + (1/2)\, x^{1T} \dot{K}_2(t)\, x^1 + (1/2)\dot{\Psi}_1(t)^T x^2 +$$

$$+ (1/2)\, x^{2T} \dot{\Psi}_1(t) + (1/2)\, x^{2T} \dot{\Psi}_2(t)\, x^2 + (1/2)\, x^{1T} \dot{N}(t)\, x^2 + (1/2)\, x^{2T} \dot{N}(t)^T x^1 =$$

$$= -( x^{2T} N^T + x^{1T} K_2 + K_1^T ) \{ {}^{\oplus}\!A\, x^1 + A^{\oplus} x^2 + \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T [ K_1 + N m^2 -$$

$$- N V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 + (K_2 + N V_{12}^T V_{11}^{-1})\, x^1 ] + \hat{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T [ \Psi_1 + \Psi_2 m^2 -$$

$$- \Psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 + ( N^T + \Psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1})\, x^1 ] \} - ( x^{1T} N + x^{2T} \Psi_2 +$$

$$+ \Psi_1^T ) \{ {}_{\oplus}A\, x^1 + A_{\oplus} x^2 + \overset{*}{B} Q^{-1} \hat{B}^T [ K_1 + N m^2 - N V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 +$$

$$+ (K_2 + N V_{12}^T V_{11}^{-1})\, x^1 ] + \overset{*}{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T [ \Psi_1 + \Psi_2 m^2 - \Psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 +$$

$$+ ( N^T + \Psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1})\, x^1 ] \} + (1/2)\, x^{1T}\, {}^{\oplus}\!S\, x^1 + (1/2)\, x^{2T} S_{\oplus} x^2 +$$

$$+ (1/2)\, x^{1T} S^{\oplus} x^2 + (1/2)\, x^{2T}\, {}_{\oplus}S\, x^1 - (1/2)\, \mathrm{sp}\{ Z \begin{vmatrix} K_2 & N \\ N^T & \Psi_2 \end{vmatrix} \} + \qquad (1.97)$$

$$+ (1/2) \begin{vmatrix} K_1^T + m^{2T} N^T - m^{1T} V_{11}^{-1} V_{12} N^T + x^{1T} (K_2 + V_{11}^{-1} V_{12} N^T) \\ \Psi_1^T + m^{2T} \Psi_2 - m^{1T} V_{11}^{-1} V_{12} \Psi_2 + x^{1T} (N + V_{11}^{-1} V_{12} \Psi_2) \end{vmatrix} \times$$

$$\times\ B Q^{-1} B^T \begin{vmatrix} K_1 + N m^2 - N V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 + (K_2 + N V_{12}^T V_{11}^{-1})\, x^1 \\ \Psi_1 + \Psi_2 m^2 - \Psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 + ( N^T + \Psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1})\, x^1 \end{vmatrix} .$$

Отсюда, применяя правило 6 и приравнивая коэффициенты при $x^1$ и свободный член нулю, находим

$$\dot{K}_2 = - K_2\, {}^{\oplus}\!A - K_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T K_2 - K_2 \hat{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T N^T - N\, {}_{\oplus}A - {}^{\oplus}\!A^T K_2 - {}_{\oplus}A^T N^T -$$

$$- N \overset{*}{B} Q^{-1} \hat{B}^T K_2 + {}^{\oplus}\!S - N \overset{*}{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T N^T + V_{11}^{-1} V_{12} N^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T N V_{12}^T V_{11}^{-1} +$$

$$+ V_{11}^{-1} V_{12} \Psi_2 \overset{*}{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T \Psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1} + V_{11}^{-1} V_{12} N^T \hat{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T \Psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1} +$$

$$+ V_{11}^{-1} V_{12} \Psi_2 \overset{*}{B} Q^{-1} \hat{B}^T N V_{12}^T V_{11}^{-1} ,$$

$$\dot{K}_1 = - {}^{\oplus}\!A^T K_1 - K_2 \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T K_1 - K_2 \hat{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T \Psi_1 -$$

$$- {}_{\oplus}A^T \Psi_1 - N \overset{*}{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T \Psi_1 - N \overset{*}{B} Q^{-1} \hat{B}^T K_1 +$$

$$+ V_{11}^{-1} V_{12} N^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T N m^2 - V_{11}^{-1} V_{12} N^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T N V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 +$$

$$+ V_{11}^{-1} V_{12}\Psi_2 \overset{*}{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T \Psi_2 m^2 - V_{11}^{-1} V_{12}\Psi_2 \overset{*}{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T \Psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 +$$

$$+ V_{11}^{-1} V_{12} N^T \hat{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T \Psi_2 m^2 - V_{11}^{-1} V_{12} N^T \hat{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T \Psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 +$$

$$+ V_{11}^{-1} V_{12}\Psi_2 \overset{*}{B} Q^{-1} \hat{B}^T N m^2 - V_{11}^{-1} V_{12}\Psi_2 \overset{*}{B} Q^{-1} \hat{B}^T N V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 ,$$

$$\dot{K}_0 = -(1/2) K_1^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T K_1 - (1/2) K_1^T \hat{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T \Psi_1 -$$

$$-(1/2) \Psi_1^T \overset{*}{B} Q^{-1} \hat{B}^T K_1 - (1/2) \Psi_1^T \overset{*}{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T \Psi_1 - (1/2)\,\mathrm{sp}\, Z \begin{vmatrix} K_2 & N \\ N^T & \Psi_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (1/2)[\, m^{2T} - m^{1T} V_{11}^{-1} V_{12} \,] N^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T N [\, m^2 - V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 ] +$$

$$+ (1/2)[\, m^{2T} - m^{1T} V_{11}^{-1} V_{12} \,] N^T \hat{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T \Psi_2 [\, m^2 - V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 ] +$$

$$+ (1/2)[\, m^{2T} - m^{1T} V_{11}^{-1} V_{12} \,] \Psi_2 \overset{*}{B} Q^{-1} \hat{B}^T N [\, m^2 - V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 ] +$$

$$+ (1/2)[\, m^{2T} - m^{1T} V_{11}^{-1} V_{12} \,] \Psi_2 \overset{*}{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T \Psi_2 [\, m^2 - V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 ] .$$

$$\dot{N} = -\overset{\oplus}{A}{}^T N - [\, V_{11}^{-1} V_{12} N^T + K_2 \,] \hat{B} Q^{-1} \hat{B} N - K_2 \overset{\oplus}{A} -$$

$$- [\, V_{11}^{-1} V_{12} N^T + K_2 \,] \hat{B} Q^{-1} \overset{*}{B} \Psi_2 - [\, V_{11}^{-1} V_{12} \Psi_2 + N \,] \overset{*}{B} Q^{-1} \hat{B} N -$$

$$- [\, V_{11}^{-1} V_{12} \Psi_2 + N \,] \overset{*}{B} Q^{-1} \overset{*}{B} \Psi_2 -$$

$$- N A_\oplus - {}_\oplus A^T \Psi_2 + \overset{\oplus}{S} \qquad (1.98)$$

$$\dot{\Psi}_2 = S_\oplus - A_\oplus^T \Psi_2 - \Psi_2 A_\oplus - N^T \overset{\oplus}{A} - \overset{\oplus}{A}{}^T N ,$$

$$\dot{\Psi}_1 = - \overset{\oplus}{A}{}^T K_1 - A_\oplus^T \Psi_1 -$$

$$- N^T \hat{B} Q^{-1} \hat{B}^T [\, K_1 + N m^2 - N V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 ] -$$

$$- N^T \hat{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T [\, \Psi_1 + \Psi_2 m^2 - \Psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 ] -$$

$$- \Psi_2 \overset{*}{B} Q^{-1} \hat{B}^T [\, K_1 + N m^2 - N V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 ] -$$

$$- \Psi_2 \overset{*}{B} Q^{-1} \overset{*}{B}{}^T [\, \Psi_1 + \Psi_2 m^2 - \Psi_2 V_{12}^T V_{11}^{-1} m^1 ] .$$

Краевое условие имеет вид



$$\varphi(t_1, x) = (1/2)\, x^{1T} K_2(t_1)\, x^1 + K_1^T(t_1)\, x^1 + K_0(t_1) + \Psi_1(t_1)^T x^2 +$$

$$+ (1/2)\, x^{2T} \Psi_2(t_1)\, x^2 + x^{1T} N(t_1)\, x^2 +$$

$$+ (1/2)\, x^{1T} \overset{\oplus}{\Lambda}\, x^1 + x^{1T} \overset{\oplus}{\Lambda}\, x^2 + (1/2)\, x^{2T} \Lambda_\oplus x^2 = 0 ,$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях $x^1$ и используя правила 5, 6, имеем

$$K_2(t_1) = - \overset{\oplus}{\Lambda} , \; K_1(t_1) = 0 , \; K_0(t_1) = 0 ,$$
$$\Psi_2(t_1) = - \Lambda_\oplus , \; \Psi_1(t_1) = 0 , \; N(t_1) = - \overset{\oplus}{\Lambda} . \qquad (1.99)$$

Решая систему (1.95), (1.96), (1.98), (1.99) совместно с (1.92), можно определить искомое оптимальное управление с неполной информацией.

Минимальное значение функционала вычисляется по формуле (1.12) с учетом (1.89)

$$\min_{D_m} J = -(1/2)\, m^1(t_0)^T K_2(t_0)\, m^1(t_0) - (1/2)\,\mathrm{sp}\, K_2(t_0)\, V_{11}(t_0) - K_1^T(t_0)\, m^1(t_0) -$$
$$- K_0(t_0) - \Psi_1^T(t_0)\, m^2(t_0) - (1/2)\, m^2(t_0)^T \Psi_2(t_0)\, m^2(t_0) -$$
$$- (1/2)\,\mathrm{sp}\, \Psi_2(t_0)\, V_{22}(t_0) - m^1(t_0)^T N(t_0)\, m^2(t_0) - \mathrm{sp}\, N(t_0) V_{12}(t_0)^T . \qquad (1.100)$$

1.6.3. Предельные случаи информированности о векторе состояния

1. $m = 0$ (информация о векторе состояния отсутствует).

Структура оптимального управления следует из (1.92):

$$u^*(t) = Q^{-1}(t)\, B^T(t)\, [\, \Psi_1(t) + \Psi_2(t)\, m(t) \,] . \qquad (1.101)$$

Система (1.95), (1.98) преобразуется к виду

$$\dot{\Psi}_2 = - \Psi_2 A - A^T \Psi_2 + S , \qquad \Psi_2(t_1) = - \Lambda ,$$
$$\dot{\Psi}_1 = - A^T \Psi_1 - \Psi_2^T B Q^{-1} B^T \Psi_1 - \Psi_2^T B Q^{-1} B^T \Psi_2 m , \; \Psi_1(t_1) = 0 ,$$
$$\dot{K}_0 = -(1/2) \Psi_1^T B Q^{-1} B^T \Psi_1 - (1/2)\,\mathrm{sp}\, Z \Psi_2 + \qquad (1.102)$$
$$+ (1/2) m^T \Psi_2^T B Q^{-1} B^T \Psi_2 m , \quad K_0(t_1) = 0 ,$$
$$\dot{m} = [A + B Q^{-1} B^T \Psi_2]\, m + B Q^{-1} B^T \Psi_1 , \qquad m(t_0) = m_0 .$$

Решая систему (1.102) совместно с (1.101), можно найти искомое оптимальное управление. Уравнения системы (1.96) для нахождения оптимального управления не используются.

Минимальное значение функционала находится по формуле, следующей из (1.100):

$$\min_{D_0} J = -(1/2)\, m_0^T \Psi_2(t_0)\, m_0 - (1/2)\,\mathrm{sp}\, \Psi_2(t_0)\, V_0 - \Psi_1(t_0)^T m_0 - K_0(t_0) .$$

Полагая $p(t) = \Psi_2(t)\, m(t) + \Psi_1(t)$ , получаем систему, имеющую привычную форму принципа максимума [113]:

$$\dot m = A\, m + B\, Q^{-1} B^T p\ , \quad m(t_0) = m_0\ ,$$

$$\dot p = S\, m - A^T p\ , \qquad p(t_1) = -\Lambda\, m(t_1)\ ,$$

$$u^*(t) = Q^{-1}(t)\, B^T(t)\, p(t)\ .$$

2. $m = n$ (имеется полная информация о векторе состояния). Система (1.98) преобразуется к виду:

$$\dot K_2 = -K_2 A - A^T K_2 - K_2 B\, Q^{-1} B^T K_2 + S\ , \qquad K_2(t_1) = -\Lambda\ ,$$

$$\dot K_1 = -\ A^T K_1 - K_2 B\, Q^{-1} B^T K_1\ , \qquad K_1(t_1) = 0\ ,$$

$$\dot K_0 = -(1/2)\, K_1^T B\, Q^{-1} B^T K_1 - (1/2)\, \mathrm{sp}\, CC^T K_2\ , \qquad K_0(t_1) = 0\ ,$$

а оптимальный линейный регулятор с полной обратной связью определяется формулой

$$u^*(t,x) = Q^{-1}(t)\, B^T(t)\, [\, K_2(t)\, x + K_1(t)\, ]\ .$$

Так как в полученной системе $K_1(t) \equiv 0$ , то она упрощается:

$$\dot K_2 = -K_2 A - A^T K_2 - K_2 B\, Q^{-1} B^T K_2 + S\ , \qquad K_2(t_1) = -\Lambda\ ,$$

$$\dot K_0 = -(1/2)\, K_1^T B\, Q^{-1} B^T K_1 - (1/2)\, \mathrm{sp}\, CC^T K_2\ , \qquad K_0(t_1) = 0\ , \qquad (1.103)$$

$$u^*(t,x) = Q^{-1}(t)\, B^T(t)\ K_2(t)\, x$$

и совпадает с известными результатами [8, 23, 57, 88, 160, 198].

Минимальное значение функционала вычисляется по формуле, следующей из (1.100).

$$\min_{D_n} J = -(1/2)\, m_0^T K_2(t_0)\, m_0 - (1/2)\, \mathrm{sp}\, \{\, K_2(t_0)\, V_0\, \} - K_0(t_0)\ .$$

П р и м е р 1.4. Пусть система (1.86) имеет вид

$$dX = [\, Z + u(t,X(t))\,]\, dt + dW\ ,$$

$$dZ = 0\ .$$

Начальная плотность вероятности гауссовская с $m_0 = (0,0)^T$,

$$V_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\ .$$

Функционал (1.88) задан в форме

$$J = M\, [\, (1/2) \int_0^1 u^2(t,X(t))\, dt + (1/2)\, X(1)^2\, ]\ .$$

Т р е б у е т с я найти оптимальное управление $u^*(t,x)$, считая, что $Z$ не измеряется.



Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\ ,\ B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}\ ,\ C = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}\ ,\ S = 0\ ,\ Q = 1\ ,\ \Lambda = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\ ,\ t_0 = 0\ ,\ t_1 = 1\ ,$$

$$BQ^{-1}B^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\ ,\ CC^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\ ,\ X^1 = X\ ,\ X^2 = Z\ ,\ m = 1\ ,\ n = 2\ .$$

Тогда из (1.95) следует:

$$\dot m_1 = m_2 + K_1 + N\, m_2 + K_2\, m_1\ , \quad m(0) = m_0 = (0,0)^T\ ,$$

$$\dot m_2 = 0\ ,$$

а из (1.96):

$$\dot V_{11} = 2\, V_{11} K_2 + 2\, N\, V_{12} + 2\, V_{12} + 1\ ,\ V_{11}(0) = 1\ ,$$

$$\dot V_{12} = V_{12} K_2 + N\, V_{12}^2 / V_{11} + V_{22}\ ,\ V_{12}(0) = 0\ ,$$

$$\dot V_{22} = 0\ , \quad V_{22}(0) = 1\ .$$

Из (1.94) получаем структуру оптимального регулятора:

$$u^*(t,x) = K_1 + N\, m_2 - N\, V_{12}\, m_1 / V_{11} + (\, K_2 + N\, V_{12} / V_{11}\, )\, x\ .$$

Из системы (1.98) находим:

$$\dot K_2 = -K_2^2 + V_{12}^2 N^2 / V_{11}^2\ , \qquad K_2(1) = -1\ ,$$

$$\dot K_1 = -K_2\, K_1 + V_{12}^2 N^2 m_2 / V_{11} - V_{12}^2 N^2 m_1 / V_{11}^2\ , \qquad K_1(1) = 0\ ,$$

$$\dot K_0 = -(1/2)\, K_1^2 - (1/2)\, K_2 + (1/2)\, [\, m_2 - m_1 V_{12} / V_{11}\, ]^2 N^2\ ,\ K_0(1) = 0\ ,$$

$$\dot N = -K_2 - V_{12} N^2 / V_{11} - K_2 N\ , \quad N(1) = 0\ ,$$

$$\dot\Psi_2 = -2\, N\ , \quad \Psi_2(1) = 0\ ,$$

$$\dot\Psi_1 = -K_1 - N\, K_1 - N^2 m_2 - N^2 V_{12}\, m_1 / V_{11}\ , \quad \Psi_1(1) = 0\ .$$

Отсюда $m_1(t) = m_2(t) = K_1(t) = 0$ , $V_{12}(t) = 1$ и оптимальное управление может быть найдено в результате решения двухточечной краевой задачи:

$$\dot V_{11} = 2\, V_{11} K_2 + 2\, N\, V_{12} + 2\, V_{12} + 1\ , \qquad V_{11}(0) = 1\ ,$$

$$\dot V_{12} = V_{12} K_2 + N\, V_{12}^2 / V_{11} + 1\ , \qquad V_{12}(0) = 0\ ,$$

$$\dot K_2 = -K_2^2 + V_{12}^2 N^2 / V_{11}^2\ , \qquad K_2(1) = -1\ ,$$

$$\dot N = -K_2 - V_{12} N^2 / V_{11} - K_2 N\ , \qquad N(1) = 0\ .$$

Оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t,x) = (\, K_2(t) + N(t)\, V_{12}(t) / V_{11}(t)\, )\, x = K(t)\, x$$

Двухточечная краевая задача решалась методом Ньютона. Осуществлялся поиск начальных условий $K_2(0), N(0)$ по формуле

$$K_2(0)^{k+1} = K_2(0)^k + \Delta K_2^k(0), \qquad N(0)^{k+1} = N(0)^k + \Delta N^k(0), \quad k = 0,1,\ldots,$$

где $K_2(0)^0$, $N(0)^0$ – начальные значения, а $\Delta K_2^k(0)$, $\Delta N^k(0)$ определяются на каждой итерации в результате решения системы двух линейных уравнений

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial K_2(0)} & \dfrac{\partial F_1}{\partial N(0)} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial K_2(0)} & \dfrac{\partial F_2}{\partial N(0)} \end{matrix}\right|_k \left|\begin{matrix} \Delta K_2^k(0) \\ \Delta N^k(0) \end{matrix}\right| = - \left|\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix}\right|_k = - \left|\begin{matrix} K_2(1) + 1 \\ N(1) \end{matrix}\right|_k .$$

Значения правой части получаются на к-й итерации путем интегрирования четырех дифференциальных уравнений системы при $K_2(0) = K_2^k(0)$, $N(0) = N^k(0)$. Для нахождения производных в матрице Якоби применялись центральные аппроксимации, т.е., например, для вычисления $\partial F_1 / \partial K_2(0)$, $\partial F_2 / \partial K_2(0)$ требуется дважды проинтегрировать систему при $N(0) = N^k(0)$, $K_2(0) = K_2^k(0) - \Delta_1$ и $K_2(0) = K_2^k(0) + \Delta_1$, вычислить соответствующие значения $F_1^+$, $F_1^-$, $F_2^+$, $F_2^-$ функций $F_1$, $F_2$ а затем найти приближенные значения производных по формуле

$$\frac{\partial F_1}{\partial K_2(0)} = \frac{F_1^+ - F_1^-}{2\Delta_1}, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial K_2(0)} = \frac{F_2^+ - F_2^-}{2\Delta_1}.$$

Интегрирование производилось методом Рунге – Кутты с шагом $h = 0{,}1$ с., а $\Delta_1 = 10^{-6} \times K_2^k(0)$, $\Delta_2 = 10^{-6} \times N^k(0)$. Система линейных уравнений решалась методом Гаусса с выбором главного элемента.

При начальных значениях $K_2^0(0) = -0{,}1$; $N^0(0) = -0{,}1$ было проделано 6 итераций, давших приемлемую точность

$$\varepsilon = |K_2^k(1) + 1| + |N^k(1)| = 1{,}026 \times 10^{-4}.$$

Результаты расчетов приведены в табл.1.2.

Таблица 1.2

| t | $V_{11}$ | $V_{12}$ | $K_2$ | N | K |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | −0.505583 | −0.4811067 | −0.505583 |
| 0.1 | 1.001478 | $9.728283 \times 10^{-2}$ | −0.5324355 | −0.4545502 | −0.5765902 |
| 0.2 | 1.007704 | 0.1884886 | −0.5619515 | −0.4267127 | −0.6417671 |
| 0.3 | 1.017913 | 0.2729096 | −0.5944509 | −0.3965742 | −0.7007751 |
| 0.4 | 1.031233 | 0.3501589 | −0.6305299 | −0.3630078 | −0.7537904 |
| 0.5 | 1.046723 | 0.4201192 | −0.671085 | −0.324743 | −0.8014258 |
| 0.6 | 1.063402 | 0.4828736 | −0.7173505 | −0.2803158 | −0.8446374 |
| 0.7 | 1.080257 | 0.5386330 | −0.770954 | −0.227997 | −0.8846368 |
| 0.8 | 1.096250 | 0.5876693 | −0.8339983 | −0.1656942 | −0.9228224 |
| 0.9 | 1.110303 | 0.6302581 | −0.9091813 | −0.0908149 | −0.9607319 |
| 1.0 | 1.121291 | 0.6666364 | −0.9999723 | $-7.488 \times 10^{-5}$ | −1.0000170 |



Величина функционала с учетом того, что $m(t) = 0$, определяется по формуле

$$J_1 = (1/2) \{ \int_0^1 K^2(t)\, V_{11}(t)\, dt + V_{11}(1) \}.$$

Вычисления по формуле трапеций с учетом результатов, имеющихся в табл.1.2, дают $J_1 = 0{,}9265$.

Сравним полученный результат со случаями отсутствия информации о состоянии и полной информации.

При $m = 0$, как следует из примера 1.3, оптимальное управление $u^*(t) = 0$, а система уравнений для ковариаций имеет вид

$$\dot V_{11} = 2V_{12} + 1, \qquad V_{11}(0) = 1,$$
$$\dot V_{12} = V_{22}, \qquad V_{12}(0) = 0,$$
$$\dot V_{22} = 0, \qquad V_{22}(0) = 1.$$

Ее решение $V_{11}(t) = t^2 + t + 1$, $V_{12}(t) = t$, $V_{22}(t) = 1$.

Величина функционала с учетом того, что $m(t) = 0$, $u^*(t) = 0$, определяется по формуле $J_0 = (1/2)\, V_{11}(1) = 1{,}5$.

При $m = 2$ оптимальный регулятор имеет вид

$$u^*(t,x,z) = (1\ 0)\, K_2(t) \begin{vmatrix} x \\ z \end{vmatrix} = K_{11}\, x + K_{12}\, z,$$

где элементы матрицы $K_2(t) = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix}$ удовлетворяют уравнению (1.103):

$$\dot K_{11} = -K_{11}^2, \qquad K_{11}(1) = -1,$$
$$\dot K_{12} = -K_{11} - K_{11} K_{12}, \qquad K_{12}(1) = 0,$$
$$\dot K_{22} = -2K_{12} - K_{12}^2, \qquad K_{22}(1) = 0,$$

$$\dot K_0 = -(1/2)\, \mathrm{sp} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} = -(1/2)\, K_{11}, \quad K_0(1) = 0,$$

Решение системы:

$$K_{11}(t) = \frac{1}{t-2}, \quad K_{12}(t) = \frac{1-t}{t-2}, \quad K_{22}(t) = t + \frac{1}{t-2}, \quad K_0(t) = -(1/2) \ln(2-t)$$

$$u^*(t,x,z) = \frac{x}{t-2} + \frac{1-t}{t-2}\, z.$$

Минимальное значение функционала с учетом $m(0) = 0$ будет

$$J_2 = -(1/2)\, \mathrm{sp}\, K_2(0)\, V_0 - K_0(0) = (1/2)\,[\,1 + \ln 2\,] = 0{,}8465.$$

Отсюда следует неравенство $J_2 < J_1 < J_0$.

## 2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АНСАМБЛЕМ ТРАЕКТОРИЙ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ ПРИ НЕПОЛНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Рассмотрена проблема оптимального управления системами при наличии неопределенности задания начальных условий, характеризуемой некоторым множеством возможных начальных состояний. Изложен вероятностный подход к описанию поведения а н с а м б л я (пучка) траекторий, исходящего из заданного множества, с помощью уравнения Лиувилля.

С применением достаточных условий оптимальности для стохастических систем получены соотношения, определяющие оптимальное управление ансамблем при неполной информации о векторе состояния.

Для случая линейного по плотности вероятности функционала поставлена и решена задача поиска оптимального в среднем управления ансамблем траекторий. Применение полученных соотношений при решении прикладных задач оптимального управления летательными аппаратами описано в разд.5.

Приведено решение задачи об оптимальной транспортировке ансамбля траекторий, когда оптимальное в среднем управление ансамблем одновременно обеспечивает оптимальность каждой образующей его траектории.

### 2.1. Постановка задачи

Пусть поведение модели объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x(t),u(t)), \qquad x(t_0) = x_0 , \tag{2.1}$$

где $x$ – вектор состояния системы, $x = (x^1, x^2) \in E^n$, $x^1 = (x_1,\dots,x_m)^T$, $x^2 = (x_{m+1},\dots,x_n)^T$, $0 \le m \le n$ ( предположим, что о компонентах вектора $x^1 \in E^m$ известна текущая информация, а о компонентах вектора $x^2 \in E^{n-m}$ она отсутствует); $u$ – вектор управления, $u \in U \subseteq E^q$, $U$ – некоторое заданное множество; $t$ – время, $t \in T' = [t_0, t_1] = T \cup \{t_0\} \cup \{t_1\}$, $T'$ – интервал времени функционирования системы, моменты времени $t_0$ и $t_1$ заданы; внешние воздействия на объект управления отсутствуют; функция $f(t,x,u)$: $T' \times E^n \times U \to E^n$ .

Здесь и далее основные обозначения совпадают с введенными в разд.1.

Начальные условия $x(t_0)$ заданы компактным множеством $\Omega$ положительной меры с кусочно-гладкой границей



$$x(t_0) = x_0 \in \Omega \subset E^n . \tag{2.2}$$

Множество $\Omega$ характеризует неопределенность задания начальных условий. Множество, состоящее из всех множеств $\Omega$ с описанными выше свойствами, обозначим $\omega$.

Предполагается, что при управлении используется информация только о времени и о текущей величине вектора $x^1$, т.е. управление $u(t)$, применяемое в каждый момент времени $t \in T'$, имеет вид управления с обратной связью по неполному вектору состояния: $u(t) = u(t,x^1(t))$ (рис.2.1).

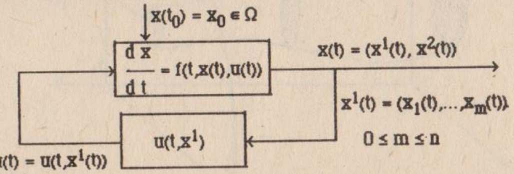


Рис.2.1

Как и в разд. 1, число $m$ $(0 \le m \le n)$ определяется условиями информированности. При $m = n$ имеется информация о всех координатах вектора $x$ : система, изображенная на рис.2.1, будет системой с полной обратной связью, а при $m = 0$ – системой, разомкнутой по состоянию, где применяется программное управление $u(t)$ .

Множество допустимых управлений $\gamma_m$ состоит из функций $u(t,x^1)$: $T' \times B_1 \to U$ таких, что для всех $i = 1,\dots,n$ функции $f_i^{u(\cdot)}(t,x) = f_i(t,x,u(t,x^1))$ , определены и непрерывны на множестве $Q'$ , непрерывно дифференцируемы по $x$ и имеют ограниченные производные по $x$, кусочно-непрерывны по $t$, что гарантирует существование и единственность решения уравнения (2.1), а управление $u(.) = u(.,x^1(.))$ кусочно-непрерывно.

Определим множество допустимых процессов $D$ : множество пар $d = (x(.),u(.))$, определенных на $T'$ , удовлетворяющих уравнению (2.1) с начальным условием (2.2), где решение $x(.)$ непрерывно и кусочно-дифференцируемо, а управление $u(.)$ кусочно-непрерывно, причем $\forall\, t \in T'$ $x(t) \in E^n$, $u(t) \in U$ . Далее везде подразумевается, что множество $D$ зависит от начального условия $x_0$ , но эта зависимость явно не указана.

Каждому допустимому управлению $u(t,x^1) \in \gamma_m$ и множеству $\Omega$ поставим в соответствие а н с а м б л ь (пучок) траекторий уравнения (2.1) $X(t; u(t,x^1))$, $t \in T'$ – объединение решений уравнения (2.1) по всем возможным начальным условиям (2.2) [ 74 ]:

$$X(t; u(t, x^1)) = \cup \{ x(t; u(t,x^1), x(t_0)) \mid x(t_0) \in \Omega \} , \ t \in T' .$$

Ансамбль траекторий (рис. 2.2) порождается множеством $\Omega$ и управлением $u(t,x^1)$. Здесь $\Omega_{\tau,u}$ – образ множества $\Omega$ в момент $\tau \in T'$ при фиксированном управлении $u(t,x^1)$.

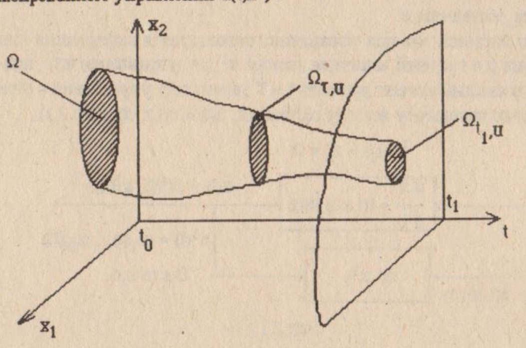


Рис. 2.2

Для описания положения ансамбля траекторий в пространстве используем вероятностный подход.

Положение ансамбля в текущий момент времени будем описывать функцией $p(t,x)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [\, f_i(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x)\,] = A^{u(\cdot)}[\, p(t,x)\,] \quad \forall\, (t,x) \in Q\,, \qquad (2.3)$$

с начальным условием

$$p(t_0,x) = p_0(x) \in P^0\,, \qquad (2.4)$$

где $A^{u(\cdot)}[.]$ – дифференциальный оператор первого порядка,

$$P^0 = \{\, p(x) \mid p(x) \in C^1(B)\,, \int_B p(x)\, dx = 1\,,\ p(x) \ge 0 \ \ \forall\, x \in B\,,\ p(x) = 0 \ \ \forall\, x \notin \Omega \,\}.$$

Уравнение (2.3) называется уравнением переноса, или уравнением Лиувилля [33, 48, 50, 97–99]. Его решение определяется решением системы уравнений для характеристик:

$$\frac{d x_i}{f_i(t,x,u)} = \frac{d p}{- p \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_i(t,x,u)}{\partial x_i}} = d\,t\,; \quad x(t_0) = x_0 \in \Omega\,,\ p(t_0) = p_0\,. \qquad (2.5)$$

Уравнение (2.3) является частным случаем уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (1.3), когда в системе (1.1) $\sigma(t,x,u) \equiv 0$, что соответствует отсутствию случайных воздействий в модели объекта управления.



Поэтому далее функция $p(t,x)$ трактуется как плотность вероятности. Начальные условия для системы (2.1) могут лежать произвольно в множестве $\Omega$. При использовании данного подхода они полагаются случайными и распределенными согласно закону $p_0(x)$, что отражено в (2.4). Величина функции $p(t,x)$ при фиксированном $t$ характеризует плотность следов траекторий ансамбля, а носитель функции $p(t,x)$, т.е. множество тех $x$, где $p(t,x) \ne 0$, совпадает в силу (2.5) с множеством $\Omega_{t,u}$ – образом множества $\Omega$ в момент $t$.

Обозначим через $D_m$ множество пар $d_m = (p(t,x), u(t,x^1))$, где функции $p(t,x)$, $u(t,x^1) \in \gamma_m$ удовлетворяют уравнению (2.3) с начальным условием (2.4).

В общем случае в качестве критерия оптимальности управления ансамблем можно использовать функционал (1.5), заданный на множестве $D_m$:

$$J(p_0(x), d_m) = \int_{t_0}^{t_1} \int_B f^0(t, p(t,x), u(t,x^1))\, dx\, dt + F(p(t_1,x))\,,$$

где $f^0(t,p,u)\colon T' \times E^1{}_+ \times U \to E^1$, $F(p(x))\colon P \to E^1$ – заданные непрерывная функция и непрерывный функционал, $E^1{}_+ = [0,\infty)$, $P = \{\, p(x) \mid p(x) \in C^1(B)\,;$

$$\int_B p(x)\, dx = 1\,;\ p(x) \ge 0 \ \ \forall\, x \in B\,;\ p(x) = 0 \ \ \forall\, x \notin \Omega,\ \Omega \subset \omega \,\}.$$

Тогда справедливы две постановки проблемы определения оптимального управления ансамблем, аналогичные рассмотренным в разд.1: з а д а ч а 1 нахождения оптимальной пары $d_m = (p^*(t,x), u^*(t,x^1))$ для заданного множества $\Omega$ неопределенности начального состояния системы (2.1) и з а д а ч а 2 определения оптимальной синтезирующей функции $u^*(t,x^1; p(x))$, порождающей для любого множества $\Omega \subset \omega$ соответствующее оптимальное управление $u^*(t,x^1)$.

З а м е ч а н и е. В некоторых практических задачах информация о законе распределения начальных условий отсутствует. В таких случаях удобно считать начальную плотность равномерной:

$$p(t_0,x) = p_0(x) = \begin{cases} 1/\operatorname{mes}\Omega & \forall\, x \in \Omega\,, \\ 0 & \forall\, x \notin \Omega\,, \end{cases}$$

а решение уравнения Лиувилля понимать в обобщенном смысле.

## 2.2. Соотношения для определения оптимального управления

### 2.2.1. Нахождение оптимальных синтезирующих функций

Так как постановки задач 1 и 2 при применении вероятностного подхода к определению оптимального управления ансамблем траекторий совпадают с изложенными в разд. 1.1, то справедливы аналоги теорем 1.1 и 1.2 при $\sigma(t,x,u) \equiv 0$, а также соотношения, полученные в разд. 1.3.

Для определения оптимальной синтезирующей функции $u^*(t,x^1; p(x))$ в задаче 2 требуется решить уравнение, следующее из (1.15):

$$\frac{\partial S(t,p(x))}{\partial t} + \int_{B_1} [\max_{u\in U} \int_{B_2} \{ A_*^u [\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}] p(x) - f^0(t,p(x),u)\} dx^2 ] dx^1 = 0 \quad \forall (t,p(x)) \in T\times P, \tag{2.6}$$

$$S(t_1,p(x)) = -F(p(x)) \qquad \forall p(x) \in P, \tag{2.7}$$

где $\forall \varphi(t,x) \in C^1(B)$ $\quad A_*^u[\varphi(t,x)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u)$.

Рассмотрим <u>предельные случаи информированности о векторе состояния</u>.

**1.** $m = 0$ (информация о векторе состояния отсутствует). Как следует из теоремы 1.2, решается задача поиска оптимальной синтезирующей функции $u^*(t; p(x))$: $T'\times P \to U$, порождающей на решениях уравнения (2.3) оптимальные программные управления $u^*(t)$ для каждой начальной плотности вероятности $p(t_0,x) \in P$, связанной с соответствующим множеством начальных условий. Из (2.6), (2.7) следует уравнение для ее определения, аналогичное (1.18):

$$\frac{\partial S(t,p(x))}{\partial t} + \max_{u\in U} \int_{B} \{ \frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)} A^u[p(x)] - f^0(t,p(x),u)\} dx = 0 \quad \forall (t,p(x)) \in T\times P, \tag{2.8}$$

$$S(t_1,p(x)) = -F(p(x)) \quad \forall p(x) \in P, \tag{2.9}$$

где $A^{u(\cdot)}[p(t,x)] = A^u[p(t,x)]$ при $u = u^*(t,x^1)$.

**2.** $m = n$ (имеется полная информация о векторе состояния). Уравнения (2.6), (2.7) имеют вид

$$\frac{\partial S(t,p(x))}{\partial t} + \int_{B} \max_{u\in U} \{ A_*^u [\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}] p(x) - f^0(t,p(x),u)\} dx = 0 \quad \forall (t,p(x)) \in T\times P, \tag{2.10}$$

$$S(t_1,p(x)) = -F(p(x)) \quad \forall p(x) \in P. \tag{2.11}$$

Решение данной задачи определяет оптимальную синтезирующую функцию $u^*(t,x; p(x))$: $T'\times E^n\times P \to U$, порождающую для любого начального множества и соответствующей плотности вероятности $p(t_0,x)$ оптимальное управление $u^*(t,x)$ с полной обратной связью.



### 2.2.2. Определение оптимального управления

Непосредственное решение задачи 1 дает система, аналогичная (1.2), (1.3), (1.27)–(1.29):

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = -\frac{\delta H(t, p^*(t,x), u^*(t,x^1))}{\delta p(x)} \quad \forall (t,x) \in Q,$$

$$\varphi(t_1,x) = -\frac{\delta F(p^*(t_1,x))}{\delta p(x)} \quad \forall x \in B, \quad p^*(t_0,x) = p_0(x) \in P^0,$$

$$\frac{\partial p^*(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [ f_i(t,x,u^*(t,x^1)) p^*(t,x) ] \quad \forall (t,x) \in Q, \tag{2.12}$$

$$u^*(t,x^1) = \arg\max_{u\in U} \int_{B_2} \{ [ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u)] p^*(t,x) - f^0(t,p^*(t,x),u)\} dx^2,$$

где $\quad H(t,p(x),u) = \int_B \{ [ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u)] p(x) - f^0(t,p(x),u)\} dx$.

Рассмотрим <u>предельные случаи информированности о векторе состояния</u>.

1. $m = 0$ (информация о векторе состояния отсутствует). В системе (2.12) структура оптимального управления определяется из соотношения

$$u^*(t) = \arg\max_{u\in U} \int_B \{ [ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u)] p^*(t,x) - f^0(t,p^*(t,x),u)\} dx.$$

**2.** $m = n$ (имеется полная информация о векторе состояния). В системе (2.12) структура оптимального управления определяется по формуле

$$u^*(t,x) = \arg\max_{u\in U} \{[ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u)] p^*(t,x) - f^0(t,p^*(t,x),u)\}.$$

## 2.3. Оптимальное в среднем управление ансамблем траекторий

### 2.3.1. Постановка задачи

Рассмотрим важный частный случай задач управления ансамблем траекторий. Качество управления отдельной траекторией ансамбля будем описывать величиной функционала, определенного на множестве допустимых процессов $D$:

$$I(x_0,d) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),u(t))\, dt + F(x(t_1)), \tag{2.13}$$

где $f^0(t,x,u)$, $F(x)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Качество управления ансамблем траекторий предлагается оценивать величиной функционала

$$J = \int_\Omega I(x_0,d)\, p_0(x_0)\, dx_0 . \qquad (2.14)$$

Функционал (2.14) характеризует среднее значение функционала $I(x_0,d)$ на множестве $\Omega$.

Требуется найти управление $u^*(t,x^1) \in \gamma_m$, минимизирующее функционал (2.14).

Искомое управление $u^*(t,x^1)$ называется **о п т и м а л ь н ы м в с р е д н е м.**

Пусть $q(t,x) = x(t_0)$ – полная совокупность первых интегралов уравнения (2.1) при фиксированном управлении $u(t,x^1)$, определенных на множестве $Q'$, а функции $q_i(t,x)$ непрерывно дифференцируемы по всем аргументам почти при всех $t \in T'$.

Тогда можно определить обратную функцию

$$x = x(t, t_0, x(t_0)); \quad x(t_0, t_0, x(t_0)) = x(t_0) = x_0 , \qquad (2.15)$$

являющуюся общим решением уравнения (2.1).

Преобразуем функционал (2.14) с учетом (2.13):

$$J = \int_\Omega p_0(x_0) \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),u(t,x^1(t)))\, dt + F(x(t_1)) \right\} dx_0 =$$

$$= \int_\Omega \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t,t_0,x_0), u(t,x^1(t)))\, p_0(x_0)\, dt\, dx_0 + \int_\Omega F(x(t_1,t_0,x_0))\, p_0(x_0)\, dx_0 .$$

Меняя порядок интегрирования в первом члене и производя замену переменных в интеграле по $x_0$, имеем

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega_{t,u}} f^0(t, x(t, t_0, q(t,x)), u(t,x^1(t)))\, p_0(q(t,x)) \left| \det \frac{\partial x_0}{\partial x} \right| dx\, dt +$$

$$+ \int_{\Omega_{t_1,u}} F(x(t_1, t_0, q(t_1,x)))\, p_0(q(t_1,x)) \left| \det \frac{\partial x_0}{\partial x} \right| dx .$$

По формуле Лиувилля [ 97, 98 ]

$$\det \frac{\partial x_0}{\partial x} = \exp\left( - \int_{t_0}^{t} \operatorname{sp} \frac{\partial f(\tau,x(\tau),u(\tau,x^1(\tau)))}{\partial x} d\tau \right).$$

Функция $\quad p(t,x(t)) = p_0(q(t,x(t))) \exp\left( - \int_{t_0}^{t} \operatorname{sp} \dfrac{\partial f(\tau,x(\tau),u(\tau))}{\partial x} d\tau \right)$

удовлетворяет уравнению (2.3), что можно проверить непосредственно прямой подстановкой. Окончательно получим



$$J(p_0(x), d_m) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega_{t,u}} f^0(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x)\, dx\, dt + \int_{\Omega_{t_1,u}} F(x)\, p(t_1,x)\, dx =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_B f^0(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x)\, dx\, dt + \int_B F(x)\, p(t_1,x)\, dx . \qquad (2.16)$$

Здесь учтено, что функция $p(t,x)$ имеет компактный носитель, т.е. $p(t,x) = 0 \quad \forall x \notin \Omega_{t,u}$.

Функционал (2.16) определен на множестве $D_m$ допустимых пар $d_m = (p(t,x), u(t,x^1))$, где элементы пар удовлетворяют уравнению (2.3) с начальным условием (2.4).

Задача оптимального в среднем управления ансамблем траекторий теперь может быть сформулирована аналогично задаче 1 из разд. 1.1.

Требуется найти пару $d_m^* = (p^*(t,x), u^*(t,x^1)) \in D_m$, на которой достигается минимум функционала (2.16) на множестве $D_m$.

### 2.3.2. Соотношения для определения оптимального в среднем управления

Так как поставленная задача является частным случаем проблемы, рассмотренной в разд. 2.1, она может быть решена с помощью полученных ранее соотношений (2.12) с соответствующими изменениями.

Для определения оптимального управления $u^*(t,x^1)$ в **з а д а ч е 1** требуется решить систему уравнений

$$\frac{\partial p^*(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t,x,u^*(t,x^1))\, p^*(t,x)] = A^{u(\cdot)}[p^*(t,x)] \quad \forall (t,x) \in Q ,$$

$$p^*(t_0,x) = p_0(x) \in P^0 , \quad \varphi(t_1,x) = -F(x) \quad \forall x \in B , \qquad (2.17)$$

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u^*(t,x^1)) + f^0(t,x,u^*(t,x^1)) \quad \forall (t,x) \in Q ,$$

$$u^*(t,x^1) = \arg \max_{u \in U} \int_{B_2} \left[ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) - f^0(t,x,u) \right] p^*(t,x^2 | x^1)\, dx^2 ,$$

где $p^*(t,x^2 | x^1)$ – условная плотность вероятности,

$$p^*(t,x^2 | x^1) = \frac{p^*(t,x)}{\int_{B_2} p^*(t,x)\, dx^2} .$$

Система (2.17) аналогична системе уравнений (1.2), (1.3), (1.32)–(1.35).

Минимальное значение функционала можно подсчитать по формуле

$$\min_{d_m \in D_m} J(p_0(x), d_m) = -\int_\Omega \varphi(t_0,x)\, p_0(x)\, dx .$$

Соотношения (2.17) используются далее в разд. 5.1 и 5.2 для определения оптимального управления торможением космического аппарата в атмосфере.

Рассмотрим <u>предельные случаи информированности о векторе состояния</u>.

1. $m = 0$ (информация о векторе состояния отсутствует). Соотношения для общего случая принимают форму системы

$$\frac{\partial p^*(t,x)}{\partial t} = A^{u(\cdot)}[\,p^*(t,x)\,], \qquad p^*(t_0,x) = p_0(x) \in P^0,$$

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = -A_*^{u(\cdot)}[\,\varphi(t,x)\,] + f^0(t,x,u^*(t)), \quad \varphi(t_1,x) = -F(x), \tag{2.18}$$

$$u^*(t) = \arg\max_{u\in U} \int_B \Big[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) - f^0(t,x,u)\Big]\, p^*(t,x)\, dx,$$

которую требуется решить для определения оптимального в среднем программного управления. Синтезированное оптимальное управление $u^*(t)$ применяется для всех начальных условий из множества $\Omega$. Схема на рис. 2.1 при этом разомкнута по состоянию.

2. $m = n$ (имеется полная информация о векторе состояния). Соотношения для общего случая преобразуются в уравнение Беллмана для определения оптимального управления $u^*(t,x)$ с полной обратной связью:

$$\max_{u\in U} \Big\{\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) - f^0(t,x,u)\Big\} = 0 \qquad \forall\,(t,x) \in Q,$$

$$\varphi(t_1,x) = -F(x) \qquad \forall\, x \in B. \tag{2.19}$$

В отличие от оптимального в среднем программного управления управление $u^*(t,x)$ в общем случае для каждого начального условия из множества $\Omega$ порождает соответствующее управление $u(t) = u^*(t,x(t))$.

З а м е ч а н и е. Задача с нефиксированным временем окончания процесса может быть решена в двух постановках, как в разд.1.4.

<u>Первый случай</u>. Момент $t_1$ заранее не задан и подлежит выбору. Аналог функционала качества (2.16) имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1}\int_B f^0(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x)\, dx\, dt + \int_B F(t_1,x)\, p(t_1,x)\, dx.$$

Тогда к системе (2.17) следует добавить условие, получающееся из (1.41):

$$H(t_1, p^*(t_1,x), u^*(t_1,x^1)) = -\int_B \frac{\partial F(t_1,x)}{\partial t_1} p^*(t_1,x)\, dx,$$

где

$$H(t,p(t,x),u) = \int_B \Big[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) - f^0(t,x,u)\Big]\, p(t,x)\, dx.$$



<u>Второй случай</u>. Пусть поведение модели системы управления описывается уравнением (2.1) с начальным условием, определяемым (2.2), и задано открытое множество $B \subset E^n$ с компактным замыканием $B' = B \cup \partial B$, где $\partial B$ – кусочно-гладкая граница.

Обозначим: $Q = (t_0,T_1) \times B$, где момент времени $T_1 > t_0$ задан, $\Gamma = ([\,t_0,T_1] \times \partial B) \cup (\{T_1\} \times B)'$.

Моментом окончания процесса управления будем считать первый момент $t \in [\,t_0,T_1]$, когда точка $(t, x(t))$ достигает множества $\Gamma$.

Определим функционал качества управления в форме

$$J = \int_\Omega I(x_0,d)\, p_0(x_0)\, dx_0 = M\Big[\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,X(t),u(t,X^1(t)))\, dt + F(t_1,X(t_1))\Big],$$

где $M$ – знак математического ожидания; $F(t,x)\colon \Gamma \to E^1$; $X(t)$ – случайный процесс, удовлетворяющий уравнению (2.1) со случайным начальным условием $X_0 \in \Omega$.

Для решения задачи оптимального управления с нефиксированным временем окончания процесса следует сформулировать эквивалентную проблему, изменив форму записи функционала (см. разд. 1.4.2).

Система уравнений для определения оптимального управления ансамблем следует из (1.43), (1.44), (1.53)–(1.56) с соответствующими изменениями: (1.56) заменяется на (2.4) и полагается, что в операторах $A^{u(\cdot)}[.]$, $A_*^{u(\cdot)}[.]$ $a_{ij}(t,x,u) \equiv 0$. В результате имеем

$$\frac{\partial p^*(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\,[f_i(t,x,u^*(t,x^1))\, p^*(t,x)] = A^{u(\cdot)}[\,p^*(t,x)\,] \quad \forall\,(t,x) \in Q,$$

$$-\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = A_*^{u(\cdot)}[\,\varphi(t,x)\,] - f^0(t,x,u^*(t,x^1)) \quad \forall\,(t,x) \in Q, \tag{2.20}$$

$$p(t_0,x) = p_0(x) \in P^0, \quad \varphi(t,x) = -F(t,x) \quad \forall\,(t,x) \in \Gamma,$$

$$u^*(t,x^1) = \arg\max_{u\in U} \int_{B_2} \Big[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) - f^0(t,x,u)\Big]\, p^*(t,x^2\,|\,x^1)\, dx^2,$$

$$p^*(t,x^2\,|\,x^1) = \frac{p^*(t,x)}{\int_{B_2} p^*(t,x)\, dx^2},$$

где $p^*(t,x^2\,|\,x^1)$ – условная плотность вероятности.

Соотношения (2.20) используются далее в разд. 5.3 для определения оптимального управления торможением космического летательного аппарата в атмосфере.

### 2.3.3. Примеры нахождения оптимального в среднем управления

П р и м е р 2.1. Для задачи

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = x_0 \in \Omega = [0,2],$$

$$I(x_0,d) = (1/2) \int_0^1 u^2(t)\, dt + (1/2)\, x^2(1),$$

$$J = \int_\Omega I(x_0,d)\, p_0(x_0)\, dx_0 \to \min$$

т р е б у е т с я найти оптимальное в среднем программное управление.

В поставленной задаче $x \in E^1$; $u \in E^1$; $f(t,x,u) = u$; $f^0(t,x,u) = (1/2)u^2$; $F(x) = (1/2)\, x^2$; $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $\text{mes}\,\Omega = 2$, начальная плотность вероятности $p_0(x)$ равномерная.

Выпишем систему уравнений (2.18) для данной задачи:

$$\frac{\partial p^*(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial p^*(t,x)}{\partial x} u^*(t), \quad p^*(0,x) = p_0(x) = \begin{cases} 1/2 & \forall x \in \Omega = [0,2], \\ 0 & \forall x \notin \Omega = [0,2], \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} u^*(t) + (1/2)\, u^*(t)^2, \qquad \varphi(1,x) = -(1/2)\, x^2,$$

$$u^*(t) = \arg\max_u \int_{E^1} \left[ \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} u - (1/2)\, u^2 \right] p^*(t,x)\, dx .$$

Так как на управление ограничений не наложено, то, применяя необходимые условия экстремума, из последнего соотношения получаем

$$u^*(t) = \int_{E^1} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} p^*(t,x)\, dx .$$

Будем искать функцию $\varphi(t,x)$ в форме

$$\varphi(t,x) = (1/2)\, K_2(t)\, x^2 + K_1(t)\, x + K_0(t),$$

где $K_2(t), K_1(t), K_0(t)$ – неизвестные функции.

Отсюда следует структура оптимального управления:

$$u^*(t) = K_2(t)\, m(t) + K_1(t),$$

где $m(t)$ – математическое ожидание, $m(t) = \int_{E^1} x\, p^*(t,x)\, dx$.

Подставляя найденную структуру оптимального управления в первое уравнение системы, умножая на $x$ и интегрируя по множеству $E^1$, имеем $\dot{m} = K_2(t)\, m(t) + K_1(t)$, $m(0) = 1$.

Подставляя функцию $\varphi(t,x)$ во второе уравнение системы и конечное условие, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ нулю, получаем



$$\dot{K}_2 = 0, \quad \dot{K}_1 = -K_2(t)^2\, m(t) - K_1(t)\, K_2(t), \quad \dot{K}_0 = [\, K_2(t)^2\, m^2(t) - K_1(t)^2 ]/2,$$

$$K_2(1) = -1, \quad K_1(1) = 0, \quad K_0(1) = 0 .$$

Решая двухточечную краевую задачу, образованную уравнениями для функций $m(t), K_2(t), K_1(t), K_0(t)$ и соответствующими условиями, имеем: $K_2(t) = -1$, $K_1(t) = (1-t)/2$, $K_0(t) = -t^2/8 + 3t/8 - 1/4$, $m(t) = 1 - t/2$.

В результате получаем оптимальное в среднем программное управление $u^*(t) = -1/2$.

Таким образом, системе (2.18) для данного примера удовлетворяют функции: $\varphi(t,x) = -x^2/2 + (1-t)\, x/2 - t^2/8 + 3t/8 - 1/4$, $u^*(t) = -1/2$,

$$p^*(t,x) = \begin{cases} 1/2 & \forall x \in [-t/2,\, 2-t/2], \\ 0 & \forall x \notin [-t/2,\, 2-t/2] . \end{cases}$$

Минимальное значение функционала определяется по формуле

$$\min_{d_0 \in D_0} J = -\int_0^2 \varphi(0,x)\, (1/2)\, dx = -(1/2) \int_0^2 [-x^2/2 + x/2 - 1/4]\, dx = 5/12.$$

П р и м е р 2.2. Модель объекта управления описывается системой:

$$\dot{x}(t) = z(t) + u(t),$$

$$\dot{z}(t) = 0$$

где $x \in E^1$; $u \in E^1$; $t \in [0,1]$. Начальные условия заданы множеством $\Omega$:

$$(x(0), z(0)) \in \Omega = \begin{cases} -(1/2) \le x \le (1/2), \\ 0 \le z \le 1 . \end{cases}$$

На траекториях системы задан функционал

$$I(x_0,d) = (1/2) \int_0^1 u^2(t)\, dt + (1/2)\, x^2(1) .$$

Критерий качества управления ансамблем имеет вид

$$J = (1/2) \int_0^1 \int_{E^2} u^2(t)\, p(t,x,z)\, dx\, dz\, dt + (1/2) \int_{E^2} x^2\, p(1,x,z)\, dx\, dz,$$

где функция $p(t,x,z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p(t,x,z)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\, (z+u(t))\, p(t,x,z) ], \quad p(0,x,z) = p_0(x,z) = \begin{cases} 1 & \forall (x,z) \in \Omega, \\ 0 & \forall (x,z) \notin \Omega . \end{cases}$$

Рассмотрим три <u>ч а с т н ы х  с л у ч а я  и н ф о р м и р о в а н н о с т и  о  в е к т о р е  с о с т о я н и я.</u>

1. $m = 0$. Т р е б у е т с я найти оптимальное в среднем программное управление $u^*(t)$, минимизирующее функционал $J$.

Система уравнений (2.18) для данного примера имеет вид

$$\frac{\partial p^*(t,x,z)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[(z+u^*(t))\, p^*(t,x,z)], \quad p^*(0,x,z) = p_0(x,z) = \begin{cases} 1 & \forall (x,z) \in \Omega, \\ 0 & \forall (x,z) \notin \Omega, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi(t,x,z)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t,x,z)}{\partial x}(z+u^*(t)) - (1/2)\, u^*(t)^2 = 0, \quad \varphi(1,x,z) = -(1/2)\, x^2,$$

$$u^*(t) = \arg\max_u \int_{E^2} \left[\frac{\partial \varphi(t,x,z)}{\partial x} u - (1/2)\, u^2\right] p^*(t,x,z)\, dx\, dz.$$

Отсюда получим структуру оптимального управления:

$$u^*(t) = \int_{E^2} \frac{\partial \varphi(t,x,z)}{\partial x} p^*(t,x,z)\, dx\, dz.$$

Будем искать функцию $\varphi(t,x,z)$ в виде

$$\varphi(t,x,z) = (1/2)\, K_2(t)\, x^2 + K_1(t)\, x + K_0(t) + N(t)\, x z + \Psi_1(t)\, z + \Psi_2(t)\, z^2,$$

где $K_2(t), K_1(t), K_0(t), N(t), \Psi_1(t), \Psi_2(t)$ – неизвестные функции.

Подставляя $\varphi(t,x,z)$ в структуру оптимального управления, имеем

$$u^*(t) = K_2(t)\, \hat{x}(t) + K_1(t) + N(t)\, \hat{z}(t).$$

Тогда из выписанной системы, приравнивая нулю члены при одинаковых степенях $x$, $z$ и используя уравнения для математических ожиданий векторов $x$ и $z$, получаем

$$d\hat{x}/dt = \hat{z} + K_2\hat{x} + K_1 + N\hat{z}, \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 = 0,$$

$$d\hat{z}/dt = 0, \qquad \hat{z}(0) = \hat{z} = 1/2,$$

$$\dot{K}_2 = 0, \quad K_2(1) = -1; \quad \dot{K}_1 + K_1 K_2 + K_2^2 \hat{x} + K_2 N \hat{z} = 0, \quad K_1(1) = 0,$$

$$2\dot{K}_0 + K_1^2 - K_2^2 \hat{x}^2 - N^2 \hat{z}^2 - 2 K_2 N \hat{x}\hat{z} = 0, \quad K_0(1) = 0,$$

$$\dot{N} + K_2 = 0, \quad N(1) = 0; \qquad \dot{\Psi}_2 + N = 0, \quad \Psi_2(1) = 0,$$

$$\dot{\Psi}_1 + N K_2 \hat{x} + N^2 \hat{z} + K_1 N + K_1 = 0, \qquad \Psi_1(1) = 0.$$

Решение системы уравнений имеет вид

$$K_2(t) = -1; \; K_1(t) = (1-t)/4; \; K_0(t) = -t^2/32 + 3t/32 - 1/16; \; N(t) = t-1;$$

$$\hat{z}(t) = 1/2; \; \hat{x}(t) = t/4; \; \Psi_1(t) = t^2/4 - t/2 + 1/4; \; \Psi_2(t) = -t^2/2 + t - (1/2).$$

Поэтому оптимальное в среднем программное управление: $u^*(t) = -1/4$.

Минимальное значение функционала определяется по формуле

$$\min_{D_0} J = -\int_\Omega \varphi(0,x,z)\, p_0(x,z)\, dx\, dz = -\int_{-1/2}^{1/2}\int_0^1 [-(1/2)\, x^2 + (1/4)\, x - (1/16) -$$

$$- x z + z/4 - (1/2)\, z^2]\, dx\, dz = 10/48 = 0{,}2083.$$



2. $m = 1$. Т р е б у е т с я найти оптимальное в среднем управление $u^*(t,x)$, минимизирующее функционал $J$.

Система уравнений (2.17) для данного примера имеет вид

$$\frac{\partial p^*(t,x,z)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[(z+u^*(t,x))\, p^*(t,x,z)], \quad p^*(0,x,z) = p_0(x,z) = \begin{cases} 1 & \forall (x,z) \in \Omega, \\ 0 & \forall (x,z) \notin \Omega, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi(t,x,z)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t,x,z)}{\partial x}(z+u^*(t,x)) - (1/2)\, u^*(t,x)^2 = 0, \quad \varphi(1,x,z) = -(1/2)\, x^2,$$

$$u^*(t,x) = \arg\max_u \int_{E^1} \left[\frac{\partial \varphi(t,x,z)}{\partial x} u - (1/2)\, u^2\right] p^*(t,z \mid x)\, dz.$$

Отсюда получим структуру оптимального управления:

$$u^*(t,x) = \int_{E^1} \frac{\partial \varphi(t,x,z)}{\partial x} p^*(t,z \mid x)\, dz.$$

Будем искать функцию $\varphi(t,x,z)$ в виде

$$\varphi(t,x,z) = (1/2)\, K_2(t)\, x^2 + K_1(t)\, x + K_0(t) + N(t)\, x z + \Psi_1(t)\, z + \Psi_2(t)\, z^2,$$

где $K_2(t), K_1(t), K_0(t), N(t), \Psi_1(t), \Psi_2(t)$ – неизвестные функции.

Подставляя $\varphi(t,x,z)$ в структуру оптимального управления, находим

$$u^*(t,x) = K_2(t)\, x + K_1(t) + N(t)\, \hat{z}(t,x),$$

где $\hat{z}(t,x)$ – условное математическое ожидание, $\hat{z}(t,x) = \int_0^1 z\, p^*(t,z \mid x)\, dz$.

Получим уравнение, описывающее изменение условной плотности вероятности $p(t,z \mid x)$. Для этого перепишем уравнение (2.3) в форме:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}[f_i(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x)] - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}[f_j(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x)]$$

Проинтегрировав обе части уравнения по множеству $B_2$ с учетом свойств плотностей вероятности [113, 154], получаем

$$\frac{\partial p(t,x^1)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left[\int_{B_2} f_i(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x^2 \mid x^1)\, dx^2\right] p(t,x^1)\right\}.$$

Запишем уравнение (2.3) в виде

$$\frac{\partial p(t,x^2 \mid x^1)}{\partial t} p(t,x^1) + \frac{\partial p(t,x^1)}{\partial t} p(t,x^2 \mid x^1) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\{[f_i(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x^2 \mid x^1)] \times$$

$$\times\, p(t,x^1)\} - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}[f_j(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x^2 \mid x^1)]\, p(t,x^1).$$

Из двух последних соотношений имеем

$$\frac{\partial p(t,x^2|x^1)}{\partial t} p(t,x^1) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \{ [\int_{B_2} f_i(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x^2|x^1)\, dx^2]\, p(t,x^1)\}\, p(t,x^2|x^1) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \{[f_i(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x^2|x^1)]\, p(t,x^1)\} + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} [\, f_j(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x^2|x^1)] \times$$

$$\times p(t,x^1) = \frac{\partial p(t,x^2|x^1)}{\partial t} p(t,x^1) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \{ [\int_{B_2} f_i(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x^2|x^1)\, dx^2]\, p(t,x^1) \times$$

$$\times p(t,x^2|x^1)\} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial p(t,x^2|x^1)}{\partial x_i} \int_{B_2} f_i(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x^2|x^1)\, dx^2\, p(t,x^1) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \{[f_i(t,x,u(t,x^1)) p(t,x^2|x^1)] p(t,x^1)\} + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} [f_j(t,x,u(t,x^1)) p(t,x^2|x^1)] p(t,x^1) = 0.$$

Проинтегрируем по множеству $B_1$ с учетом свойств плотности вероятности $p(t,x^1)$:

$$\int_{B_1} \{ \frac{\partial p(t,x^2\,|\,x^1)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial p(t,x^2\,|\,x^1)}{\partial x_i} \int_{B_2} f_i(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x^2|x^1)\, dx^2 +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} [\, f_j(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x^2\,|\,x^1)] \}\, p(t,x^1)\, dx^1 = 0 .$$

Так как это равенство должно выполняться для любых $p(t,x^1)$, то, применяя основную лемму вариационного исчисления [142], получаем уравнение для условной плотности вероятности:

$$\frac{\partial p(t,x^2\,|\,x^1)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial p(t,x^2\,|\,x^1)}{\partial x_i} \int_{B_2} f_i(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x^2\,|\,x^1)\, dx^2 -$$

$$- \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} [\, f_j(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x^2\,|\,x^1)] .$$

В данном примере $x^1 = x$, $x^2 = z$, $f_1(t,x,u) = z + u$, $f_2(t,x,u) = 0$, $m = 1$.

Поэтому

$$\frac{\partial p^*(t,z\,|\,x)}{\partial t} = - \frac{\partial p^*(t,z\,|\,x)}{\partial x} \int_0^1 (z + u^*)\, p^*(t,z\,|\,x)\, dz ,\quad p^*(0,z\,|\,x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2, \end{cases}$$

Отсюда $p^*(t,z\,|\,x) = 1$, а $\hat{z}(t,x) = \int_0^1 z\, p^*(t,z\,|\,x)\, dz = 1/2$;

$$u^*(t,x) = K_2(t)\, x + K_1(t) + N(t)/2 .$$



Подставляя $u^*(t,x)$, $\varphi(t,x)$ в систему уравнений для определения искомого управления и приравнивая члены при одинаковых степенях $x$ и $z$, получаем

$$\dot K_2 + K_2^2 = 0 ,\quad \dot K_1 + K_1 K_2 = 0 ,\quad \dot K_0 + (1/2)\, K_1^2 - (1/8)\, N^2 = 0 ,$$

$$K_2(1) = -1 ,\quad K_1(1) = 0 ,\quad K_0(1) = 0 ,$$

$$\dot N + K_2 + N K_2 = 0 ,\ \dot\Psi_1 + (1/2)\, N^2 + K_1 N + K_1 = 0 ,\quad \dot\Psi_2 + N = 0 ,$$

$$N(1) = 0 ,\quad \Psi_1(1) = 0 ,\quad \Psi_2(1) = 0 .$$

Решение имеет вид $K_2(t) = 1/(t-2)$; $K_1(t) = 0$;

$K_0(t) = t/8 - 1/4 + (1/4)\ln(2-t) - 1/[8(t-2)]$; $N(t) = (1-t)/(t-2)$;

$\Psi_1(t) = 1 - t/2 - \ln(2-t) + 1/[2(t-2)]$; $\Psi_2(t) = t - 1 + \ln(2-t)$.

Следовательно, искомое оптимальное в среднем управление

$$u^*(t,x) = \frac{x}{(t-2)} + \frac{(1-t)}{2\,(t-2)} ,$$

а минимальное значение функционала определяется по формуле

$$\min_{D_1} J = -\int_\Omega \varphi(0,x,z)\, p_0(x,z)\, dx\, dz = -\int_{-1/2}^{1/2} \int_0^1 [\, -(1/4)\, x^2 - (1/4) + (1/4)\ln 2 +$$

$$+ (1/16) - (1/2)\, x z + (1 - \ln 2 - (1/4))\, z + (-1 + \ln 2)\, z^2 ]\, dx\, dz = (11 - 4\ln 2)/48 =$$

$$= 8{,}2274/48 = 0{,}1714 .$$

**3.** $m = 2$. Т р е б у е т с я найти оптимальное управление $u^*(t,x,z)$ с полной обратной связью.

Оно определяется решением уравнения Беллмана (2.19):

$$\max_u \{ \frac{\partial \varphi(t,x,z)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t,x,z)}{\partial x} (z+u) - (1/2)\, u^2 \} = 0 ,\quad \varphi(1,x,z) = -(1/2)\, x^2 .$$

Отсюда получим структуру оптимального управления:

$$u^*(t,x,z) = \partial \varphi(t,x,z) / \partial x .$$

Будем искать функцию $\varphi(t,x,z)$ в виде

$$\varphi(t,x,z) = (1/2)\, K_2(t)\, x^2 + N(t)\, x z + \Psi_2(t)\, z^2 ,$$

где $K_2(t)$, $N(t)$, $\Psi_2(t)$ – неизвестные функции.

Подставляя $\varphi(t,x,z)$ в структуру оптимального управления, имеем

$$u^*(t,x,z) = K_2(t)\, x + N(t)\, z$$

Приравнивая в уравнении Беллмана члены при одинаковых степенях $x$, $z$ нулю, получаем

$$\dot K_2 + K_2^2 = 0\ ,\ \dot N + K_2 + N K_2 = 0\ ,\ \dot\Psi_2 + N + (1/2)\, N^2 = 0\ ,$$

$$K_2(1) = -1\ ,\ N(1) = 0\ ,\ \Psi_2(1) = 0\ .$$

Решение системы имеет вид

$$K_2(t) = 1/(t-2)\ ;\ N(t) = (1-t)/(t-2)\ ;\ \Psi_2(t) = 1/2 + 1/[2(t-2)]\ .$$

Поэтому искомое оптимальное в среднем управление с полной обратной связью

$$u^*(t,x,z) = \frac{x}{(t-2)} + \frac{(1-t)}{(t-2)}\, z\ .$$

Минимальное значение функционала определяется по формуле

$$\min_{D_2} J = -\int_\Omega \varphi(0,x,z)\, p_0(x,z)\, dx\, dz = -\int_{-1/2}^{1/2}\int_0^1 [\,-(1/4)\, x^2 - (1/2)\, x\, z - (1/4)\, z^2\,]\, dx\, dz = 8/48 = 0{,}1666\ .$$

### 2.3.4. Нахождение оптимальных синтезирующих функций

Рассмотрим задачу 2 поиска оптимальных синтезирующих функций. Для функционала (2.16) соотношения (2.6), (2.7) имеют вид

$$\frac{\partial S(t,p(x))}{\partial t} + \int_{B_1} [\max_{u\in U} \int_{B_2} \{ A_*^{u}[\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}]\, p(x) - f^0(t,x,u)\, p(x)\}\, dx^2]\, dx^1 = 0 \quad \forall\, (t,p(x)) \in T\times P\ ,$$

$$S(t_1,p(x)) = -\int_B F(x)\, p(x)\, dx \qquad \forall\ p(x) \in P \tag{2.21}$$

Решение будем искать в форме

$$S(t,p(x)) = \int_B \varphi(t,x)\, p(x)\, dx\ .$$

Подставляя эту конструкцию в (2.21), вычисляя вариационную производную по правилу (П.2), с учетом (1.34), имеем

$$\int_{B_1} p(x^1)\, [\max_{u\in U} \int_{B_2} \{\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i}\, f_i(t,x,u) - f^0(t,x,u)\}\, p(x^2\,|\,x^1)\, dx^2\,]\, dx^1 = 0 \quad \forall\, (t,p(x)) \in T\times P, \tag{2.22}$$

$$\int_{B_1} p(x^1) \int_{B_2} [\varphi(t_1,x) + F(x)]\, p(x^2\,|\,x^1)\, dx^2\, dx^1 = 0 \qquad \forall\ p(x) \in P\ .$$

Решая уравнение (2.22), можно получить оптимальную синтезирующую функцию $u^*(t,x^1,p(x)) = u^*(t,x^1,p(x^2\,|\,x^1))$.

В *частном случае* при $m = n$ уравнение (2.22) имеет вид



$$\int_B [\max_{u\in U} \{\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i}\, f_i(t,x,u) - f^0(t,x,u)\}]\, p(x)\, dx = 0 \quad \forall (t,p(x))\in T\times P,$$

$$\int_B [\varphi(t_1,x) + F(x)]\, p(x)\, dx = 0 \qquad \forall\ p(x) \in P\ .$$

Отсюда по основной лемме вариационного исчисления следует уравнение Беллмана (2.19) для детерминированных систем.

Следовательно, оптимальная синтезирующая функция $u^*(t,x;\, p(x))$ в задаче 2 совпадает с управлением $u^*(t,x)$, определяемым решением уравнения Беллмана. Это управление оптимально для любых начальных плотностей вероятности $p(t_0,x)$ и соответствующих множеств $\Omega$.

## 2.4. Задача об оптимальной транспортировке ансамбля траекторий

### 2.4.1. Постановка задачи

Рассмотрим проблему управления ансамблем совместно с поведением отдельных образующих его траекторий. Выясним условия, при которых оптимальное управление ансамблем одновременно обеспечивает оптимальность каждой траектории.

Рассмотрим две задачи оптимального управления детерминированной системой, описываемой уравнением (2.1), с точки зрения минимума функционала (2.13).

Пусть поведение модели объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot x = f(t,x(t);u(t))\ , \qquad x(t_0) = x_0 \in \Omega\ . \tag{2.23}$$

На множестве допустимых процессов $D = \{d \mid d = (x(.),u(.))\}$ определим функционал

$$I(x(t_0),d) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),u(t))\, dt + F(x(t_1))\ , \tag{2.24}$$

где $f^0(t,x,u)$, $F(x)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

**Задача 3.** Требуется найти такой элемент $d^* \in D$, что

$$I(x_0,d^*) = \min_{d\in D} I\,(x_0,d)\ . \tag{2.25}$$

**Задача 4.** Требуется найти такую функцию $u^*(t,x^1) \in \gamma_m$, что

$$I(x(t_0),x^*(.),u^*(.,x^{1*}(.))) = \min_{d\in D} I(x(t_0),d) \qquad \forall\ x(t_0) \in \Omega\ , \tag{2.26}$$

где $x^*(.)$ – траектория, получаемая для начального условия $x(t_0)$ с помощью решения уравнения (2.23) совместно с управлением $u^*(t,x^1)$, т.е. $u^*(t) = u^*(t,x^{1*}(t)) \quad \forall\ t \in T$. ■

Функция $u^*(t,x^1)$, удовлетворяющая (2.26), называется **оптимальной синтезирующей функцией** на множестве $\Omega$.

Оптимальная синтезирующая функция, определяемая решением задачи 4, порождает для каждого начального условия из множества $\Omega$ решение задачи 3, т.е. оптимальную пару $d^* = (x^*(.),u^*(.)) \in D$. Эта синтезирующая функция в отличие от используемой в задаче 2 применяется к другому классу математических моделей.

Рассмотрим задачу поиска оптимального в среднем управления $u^*(t,x^1)$, решаемую в разд. 2.3.

Функционал (2.14) имеет вид

$$J = \int_{\Omega} I(x_0,d)\, p_0(x_0)\, dx_0 =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_B f^0(t,x,u(t,x^1))\, p(t,x)\, dx\, dt + \int_B F(x)\, p(t_1,x)\, dx \;. \qquad (2.27)$$

Пусть задано множество $\Omega$.

Если оптимальное в среднем управление $u^*(t,x^1)$ (решение задачи 1) удовлетворяет условию (2.26), т.е. является одновременно решением задачи 4, управление $u^*(t,x^1)$ будем называть решением проблемы **оптимальной транспортировки** ансамбля траекторий.

При этом оптимальное в среднем управление ансамблем на каждой траектории, исходящей из множества $\Omega$, порождает оптимальное программное управление $u^*(.)$, минимизирующее функционал (2.24).

### 2.4.2. Нахождение оптимальных синтезирующих функций

Найдем условия, при которых может быть решена проблема оптимальной транспортировки ансамбля и соотношения для нахождения оптимального управления, обладающего данным свойством.

Пусть: множество $\Omega$ имеет размерность $m$, $0 \le m \le n$; число используемых в управлении координат вектора состояния совпадает с размерностью множества $\Omega$, т.е.: $\Omega = \{ x_0 \mid x^1_0 \in \Omega^1 \subset B_1,\ x^2_0 = y_0(x^1_0)\ \ \forall x^1_0 \in \Omega^1 \}$, где $\Omega^1$ – компактное множество положительной меры на $B_1$, $x_0 = (x^1_0, x^2_0)$, $y_0(x^1)$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция,

$$y_0(x^1) = \begin{vmatrix} y_{m+1}(x_1,\dots,x_m) \\ \dots \\ y_n(x_1,\dots,x_m) \end{vmatrix}, \quad 0 \le m \le n \,.$$

Множество, состоящее из всех множеств $\Omega$, имеющих описанную здесь структуру, обозначим $\omega'$.

Тогда множеству $\Omega$ соответствует плотность вероятности вида

$$p(t_0,x) = p_0(x^1)\, \delta(x^2 - y_0(x^1)) \in P \,, \qquad (2.28)$$

где $\delta(x^2 - y_0(x^1))$ – вырожденное распределение [120],



$$p_0(x^1) \in P^{01} = \{ p(x^1) \mid p(x^1) \in C^1(B_1),\ \int_{B_1} p(x^1)\, dx^1 = 1,\ p(x^1) \ge 0\ \ \forall x^1 \in B_1 ,$$

$$p(x^1) = 0\ \ \forall x^1 \notin \Omega^1 \ \} \,.$$

Так как в уравнении (2.23) нет так называемого диффузионного члена, его решение следует искать в форме

$$p(t,x) = p(t,x^1)\, p(t,x^2 \mid x^1) = p(t,x^1)\, \delta(x^2 - y(t,x^1)) \,, \qquad (2.29)$$

где $\delta(x^2 - y(t,x^1)) = \delta(x_{m+1} - y_{m+1}(t,x^1)) \dots \delta(x_n - y_n(t,x^1))$,

$y(t,x^1)$ – неизвестная непрерывно дифференцируемая функция,

$$y(t,x^1) = \begin{vmatrix} y_{m+1}(t,x_1,\dots,x_m) \\ \dots \\ y_n(t,x_1,\dots,x_m) \end{vmatrix}, \quad 0 \le m \le n \,.$$

Действительно, подставляя (2.29) в уравнение Лиувилля (2.3) и интегрируя по множеству $B_2$, имеем

$$\frac{\partial p(t,x^1)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} [\, f_i(t,x^1,y(t,x^1),u(t,x^1))\, p(t,x^1)] \,. \qquad (2.30)$$

Воспользуемся (2.30) в уравнении (2.3). Умножим его на $x^2$ и проинтегрируем по $B_2$. Поделив затем обе его части на $p(t,x^1)$, получим

$$\frac{\partial y(t,x^1)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y(t,x^1)}{\partial x_i} \cdot f_i(t,x^1,y(t,x^1),u(t,x^1)) + f^2(t,x^1,y(t,x^1),u(t,x^1)) \,, \quad (2.31)$$

где функция $y(t,x^1)$ устанавливает связь векторов $x^1$ и $x^2$: $x^2 = y(t,x^1)$,

а вектор-функция $f^2(t,x,u) = \begin{vmatrix} f_{m+1}(t,x,u) \\ \dots \\ f_n(t,x,u) \end{vmatrix}$.

Таким образом, уравнение (2.3) с начальным условием (2.4) в данном случае может быть решено с помощью эквивалентной системы:

$$\frac{\partial y(t,x^1)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y(t,x^1)}{\partial x_i} f_i(t,x^1,y(t,x^1),u(t,x^1)) + f^2(t,x^1,y(t,x^1),u(t,x^1)) \,,$$

$$\frac{\partial p(t,x^1)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} [\, f_i(t,x^1,y(t,x^1),u(t,x^1))\, p(t,x^1)] \,, \qquad (2.32)$$

$$p(t_0,x^1) = p_0(x^1) \,, \qquad y(t_0,x^1) = y_0(x^1) \,.$$

Функционал (2.27) с учетом (2.28) следует записать в виде

$$J = \int_{\Omega^1} I(x^1_0,\, y_0(x^1_0),d)\, p_0(x^1_0)\, dx^1_0 \,. \qquad (2.33)$$

Задачи 1 и 2 формулируются без изменений.

Для получения оптимальной синтезирующей функции (решения задачи 2) выпишем уравнение (2.22) с учетом сделанных здесь замечаний.

$$\int_{B_1} p(x^1)\,[\max_{u\in U} \int_{B_2} \{ \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) -$$

$$- f^0(t,x,u)\}\ \delta(x^2 - y(x^1))\,dx^2\,]\,dx^1 = 0 \qquad \forall\ (t,p(x)) \in T\times P \ ,$$

$$\int_{B_1} p(x^1) \int_{B_2} [\varphi(t_1,x) + F(x)]\ \delta(x^2 - y(x^1))\,dx^2\,dx^1 = 0 \qquad \forall\ p(x) \in P \ ,$$

где $y(x^1) = y(t,x^1)$ при фиксированном $t$.

Применяя основную лемму вариационного исчисления и вычисляя интеграл по $B_2$, имеем

$$\max_{u\in U} \{ \frac{\partial \varphi(t,x^1,y(x^1))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x^1,y(x^1))}{\partial x_i} f_i(t,x^1,y(x^1),u) -$$

$$- f^0(t,x^1,y(x^1),u)\} = 0 \qquad \forall\ (t,x^1) \in T\times B_1 \ ,\ \forall\ y(x^1) \in Y \ , \qquad (2.34)$$

$$\varphi(t_1,x^1,y(x^1)) = -\,F(x^1,y(x^1)) \qquad \forall\ x^1 \in B_1 \ ,\ \forall\ y(x^1) \in Y \ ,$$

где $Y \subset C^1(B_1)$ – множество носителей вырожденного распределения $\delta(x^2 - y(x^1))$.

Из теоремы 1.2 следует, что если существует решение уравнения (2.34) и удовлетворяющая ему оптимальная синтезирующая функция $u^*(t,x^1;\,y(x^1))$, то для любого множества $\Omega \in \omega'$ обеспечивается минимум функционала (2.27) на множестве $D_m$.

М е т о д и к а применения оптимальной синтезирующей функции $u^*(t,x^1,y(x^1))$ для управления траекториями системы (2.23) состоит из двух этапов.

П е р в ы й э т а п. Нахождение оптимального в среднем управления $u^*(t,x^1)$.

1. Найти решение уравнения (2.34). В результате определяется оптимальная синтезирующая функция $u^*(t,x^1;\,y(x^1))$ – решение задачи 2.

2. Задать множество $\Omega$ : множество $\Omega^1$ и функцию $y_0(x^1)$.

3. Решить систему (2.32) совместно с оптимальной синтезирующей функцией $u^*(t,x^1;\,y(x^1))$, полученной в п. 1. В результате имеем решение задачи 1: определяются $p^*(t,x^1)$, $y^*(t,x^1)$, $u^*(t,x^1) = u^*(t,x^1;\,y^*(t,x^1))$.

В т о р о й э т а п. Применение оптимального в среднем управления $u^*(t,x^1)$ при управлении системой (2.23).

1. Задать начальное условие $x^1_0 \in \Omega^1$.

2. Решить уравнение

$$d\,x^1/d\,t = f^1(t,x^1(t),y^*(t,x^1),u^*(t,x^1(t))) \ , \qquad x^1(t_0) = x^1_0 \ .$$

В результате находится траектория $x(t) = (x^1(t),\,x^2(t) = y^*(t,x^1(t))$ и управление $u(t) = u^*(t,x^1(t)) \quad \forall\ t \in T'$.

3. Если требуется получить другую траекторию, образующую пучок, перейти к п.1 данного этапа.



## 2.4.3. Достаточные условия оптимальности

Пусть фиксировано множество $\Omega \in \omega'$, т.е. задано множество $\Omega^1$ и функция $y_0(x^1)$.

**Утверждение 2.1.** Если существует оптимальная синтезирующая функция $u^*(t,x^1;y(x^1))$, удовлетворяющая уравнению (2.34), то она порождает в силу (2.32) оптимальное в среднем управление $u^*(t,x^1)$, обеспечивающее оптимальную транспортировку ансамбля траекторий, исходящего из множества $\Omega$.

**Доказательство.** Обозначим [67, 68]

$$R(t,x,u) = \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) - f^0(t,x,u) \ ,$$

$$G(t_1,x) = \varphi(t_1,x) + F(x) \ .$$

Тогда уравнение (2.34), которому удовлетворяет оптимальная синтезирующая функция $u^*(t,x^1;\,y(x^1))$, можно записать в форме

$$\max_{u\in U} R(t,x^1,y(x^1),u) = 0 \qquad \forall\ (t,x^1,\,y(x^1)) \in T\times B_1\times Y \ ,$$

$$G(t_1,x^1,y(x^1)) = 0 \qquad \forall\ (x^1,\,y(x^1)) \in B_1\times Y \qquad (2.35)$$

или

$$R(t,x^1,y(x^1),\,u^*(t,x^1,y(x^1))) = 0 \quad \forall\ (t,x^1,\,y(x^1)) \in T\times B_1\times Y \ ,$$

$$G(t_1,x^1,y(x^1)) = 0 \qquad \forall\ (x^1,\,y(x^1)) \in B_1\times Y \ . \qquad (2.36)$$

Согласно теореме 1.2 на решении системы (2.32), соответствующем множеству $\Omega$, оптимальная синтезирующая функция $u^*(t,x^1;\,y(x^1))$ порождает оптимальное в среднем управление $u^*(t,x^1)$, т.е. $u^*(t,x^1) = u^*(t,x^1;\,y^*(t,x^1))$ (см.разд. 2.4.2, п.3 первого этапа методики). Так как уравнения(2.36) справедливы $\forall\ y(x^1) \in Y$, то они выполняются и на решении системы (2.32): $y^*(t,x^1)$, $p^*(t,x^1)$. Имеем

$$R(t,x^1,y^*(t,x^1),\,u^*(t,x^1)) = 0 \quad \forall\ (t,x^1) \in T\times B_1,$$

$$G(t_1,x^1,y^*(t_1,x^1)) = 0 \qquad \forall\ x^1 \in B_1 \ . \qquad (2.37)$$

Выберем произвольное начальное условие $x_0 \in \Omega$ (фактически задается $x^1_0 \in \Omega^1$, а $x^2_0$ определяется из соотношения $x^2_0 = y_0(x^1_0)$)

Согласно п.2 второго этапа методики получим траекторию $x^*(t) = (x^{1*}(t),\,x^{2*}(t) = y^*(t,x^{1*}(t)))$ и управление $u^*(t) = u^*(t,x^{1*}(t)) \quad \forall\ t \in T'$. В результате имеем пару $d^* = (x^*(.),u(.)) \in D$. Тогда (2.37) перепишется в виде

$$R(t,x^*(t),u^*(t)) = 0 \quad \forall\ t \in T \ , \quad G(t_1,x^*(t_1)) = 0 \ . \qquad (2.38)$$

Так как $\forall x^1$ при фиксированном $t \in T$ справедлива связь $x^2 = y(x^1) \in B_2$, соотношения (2.35) имеют вид

$$\max_{u \in U} R(t,x,u) = 0 \quad \forall (t,x) \in T \times B, \qquad G(t_1,x) = 0 \quad \forall x \in B. \tag{2.39}$$

С помощью функции $\varphi(t,x)$, являющейся решением уравнения (2.34), представим функционал (2.24) в форме

$$I(x_0,d) = -\varphi(t_0,x_0) + G(t_1,x(t_1)) - \int_{t_0}^{t_1} R(t,x(t),u(t))\,dt. \tag{2.40}$$

Действительно, учитывая обозначения функций $G(t_1,x)$, $R(t,x,u)$ и то, что $x(t_0) = x_0$, получаем

$$I(x_0,d) = -\varphi(t_0,x_0) + \varphi(t_1,x(t_1)) + F(x(t_1)) - \int_{t_0}^{t_1} [\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x(t))}{\partial x_i} \frac{d x_i(t)}{d t} -$$

$$- f^0(t,x(t),u(t))]\,dt = -\varphi(t_0,x_0) + \varphi(t_1,x(t_1)) + F(x(t_1)) -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} [\frac{d \varphi(t,x(t))}{d t} - f^0(t,x(t),u(t))]\,dt.$$

Пусть имеется произвольная пара $d = (x(.),u(.)) \in D$, соответствующая выбранному начальному условию $x_0 \in \Omega$. Тогда с учетом (2.38)–(2.40) получим

$$\Delta I = I(x_0,d) - I(x_0,d^*) = G(t_1,x(t_1)) - G(t_1,x^*(t_1)) - \int_{t_0}^{t_1} [R(t,x^*(t),u^*(t)) -$$

$$- R(t,x(t),u(t))]\,dt \ge 0.$$

В силу произвольности $d \in D$ отсюда следует, что пара $d^*$ является решением задачи 3. Так как начальное условие $x_0 \in \Omega$ также произвольно, управление $u^*(t,x^1)$ является решением задачи 4. ■

Таким образом, доказано, что оптимальное в среднем управление $u^*(t,x^1)$ ансамблем на каждой траектории, исходящей из множества $\Omega$, порождает оптимальное программное управление $u^*(t)$ с точки зрения минимума функционала (2.24).

Доказанное утверждение 2.1 обосновывает методику определения управления, обеспечивающего оптимальную транспортировку ансамбля, с помощью нахождения оптимальной синтезирующей функции и ее последующего применения. В разд. 3 будет получен более простой алгоритм непосредственного определения искомого управления.

#### 2.4.4. Предельные случаи информированности о векторе состояния

**1.** $m = 0$ (информация о векторе состояния отсутствует). Уравнение (2.34) имеет вид



$$\max_{u \in U} \{ \frac{\partial \varphi(t,y)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,y)}{\partial x_i} f_i(t,y,u) - f^0(t,y,u)\} = 0 \quad \forall (t,y) \in T \times B, \tag{2.41}$$

$$\varphi(t_1,y) = -F(y) \qquad \forall y \in B.$$

Его решение определяет управление $u^*(t,y)$. Множество $\Omega$ в данном случае представлено точкой $x(t_0) = y_0$, так как имеет нулевую размерность. Из (2.31) следует уравнение

$$\frac{d y}{d t} = f(t,y(t),u(t)), \qquad y(t_0) = y_0,$$

описывающее траекторию ансамбля, исходящую из точки $y_0$.

Согласно утверждению 2.1 управление $u(t,y)$, определяемое решением уравнения Беллмана (2.41), порождает для любого заданного $y_0$ соответствующее оптимальное программное управление в задаче 3.

**2.** $m = n$ (имеется полная информация о векторе состояния). Уравнение (2.34) преобразуется в уравнение Беллмана (2.19), определяющее управление $u^*(t,x)$, обеспечивающее минимум функционала (2.27) $\forall \Omega \in \omega'$, в том числе и для заданного множества $\Omega$. Управление $u^*(t,x)$ одновременно обеспечивает оптимальную транспортировку ансамбля траекторий для любых множеств $\Omega \in \omega'$.

## 2.5. Оптимальное управление с неполной обратной связью

### 2.5.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу управления ансамблем траекторий при наличии информации о значениях нелинейных функций состояния, описывающих процесс измерения.

Пусть модель объекта управления описывается уравнением (2.23)

$$\frac{d x}{d t} = f(t,x(t),u(t)), \qquad x(t_0) = x_0 \in \Omega,$$

а модель измерительных средств соотношением $z(t) = h(t,x(t))$, где $z$ – вектор измерений, $z \in E^m$, $h(t,x) \in C^{1,2}(T \times B)$ – заданная функция.

Требуется найти наилучшее в смысле минимума функционала (2.14) управление $u^*(t,z)$ ансамблем траекторий, исходящим из множества $\Omega$.

### 2.5.2. Соотношения для определения оптимального управления

Преобразуем задачу к рассмотренной в разд. 2.1. Для этого запишем уравнение измерений в форме дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x(t),u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \in \Omega ,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial h(t,x(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h(t,x(t))}{\partial x_i} f_i(t,x(t),u(t)) = f'(t,x(t),u(t)), \quad z(t_0) = h(t_0,x(t_0)) .$$

Вводя расширенный вектор $x' = (z,x)$, можно записать аналог уравнения Лиувилля (2.3):

$$\frac{\partial p(t,x')}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial z_i} [f_i'(t,x,u(t,z))\, p(t,x')] - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i'(t,x,u(t,z))\, p(t,x')] ,$$

Начальное условие имеет вид

$$p(t_0,x') = p_0(x)\, p_0(z \mid x) = p_0(x)\ \delta(z - h(t_0,x)) .$$

С помощью прямой подстановки можно показать, что решение уравнения имеет вид $p(t,x') = p(t,x)\,\delta(z - h(t,x))$, где функция $p(t,x)$ удовлетворяет уравнению (2.3) и условию (2.4).

Тогда

$$p(t,x \mid z) = \frac{p(t,x)\,\delta(z - h(t,x))}{\int_B p(t,x)\,\delta(z - h(t,x))\,dx}$$

Если качество управления отдельной траекторией оценивается величиной функционала (2.13), а ансамблем траекторий – величиной функционала (2.16), то, чтобы получить уравнения для определения оптимального управления $u^*(t,z)$, структуру (1.25) в общем случае следует записать в форме

$$S(t,p(x')) = \int_{E^{n+m}} \varphi(t,x,z)\, p(x)\, \delta(z - h(t,x))\, dx\, dz + W(t) =$$

$$= \int_B \varphi(t,x,h(t,x))\, p(x)\, dx + W(t) = \int_B \varphi'(t,x)\, p(x)\, dx + W(t) .$$

Тогда имеем аналог системы уравнений (2.17):

$$\frac{\partial p^*(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [\, f_i(t,x,u^*(t,h(t,x)))\, p^*(t,x)] \qquad \forall\, (t,x) \in Q ,$$

$$p^*(t_0,x) = p_0(x) \in P^0 , \qquad \varphi'(t_1,x) = -F(x) \qquad \forall\, x \in B , \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial \varphi'(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi'(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u^*(t,h(t,x))) + f^0(t,x,u^*(t,h(t,x))) \qquad \forall\, (t,x) \in Q ,$$



$$u^*(t,z) = \arg\max_{u \in U} \int_B [\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi'(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) - f^0(t,x,u)] \times$$

$$\times \frac{p^*(t,x)\,\delta(z - h(t,x))}{\int_B p^*(t,x)\,\delta(z - h(t,x))\,dx}\, dx = \arg\max_{u \in U} \int_{B_z} [\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi'(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) - f^0(t,x,u)] \times$$

$$\times \frac{p^*(t,x)}{\int_{B_z} p^*(t,x)\,dx}\, dx ,$$

где $B_z = \{\, x \mid z = h(t,x) \,\}$, $z \in E^m$, $t \in T'$.

Синтезируемая система управления изображена на рис. 2.3.

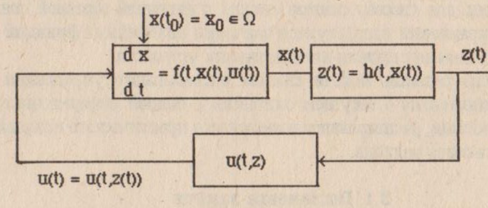


Рис.2.3

В разделе 3.5 будут изложены два подхода к синтезу оптимального управления с неполной обратной связью в случае задания множества начальных условий некоторым многообразием, размерность которого связана с размерностью вектора измерений.

# 3. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ СИСТЕМАМИ ПРИ НЕПОЛНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Получены достаточные условия оптимальности управления детерминированными системами при неполной информации о векторе состояния. Выведены соотношения для нахождения оптимальных синтезирующих функций, из которых в предельных случаях информированности вытекают соответствующее уравнение Беллмана и принцип максимума.

Рассмотрена задача оптимального управления с подвижным правым концом траектории, где получены условия, выполняющие функцию условий трансверсальности.

Изложены два способа синтеза систем с неполной обратной связью, когда при управлении используются значения нелинейных функций состояния, описывающих модели измерительных устройств.

Приведено решение задачи синтеза оптимального управления при неполной информации о текущем состоянии и полной информации о начальном состоянии, расширяющее возможности практического использования предлагаемого подхода.

## 3.1. Постановка задачи

Рассматриваются задачи 3 и 4, поставленные в разд. 2.4. Для удобства изложения приведем еще раз их формулировки.

Поведение модели объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x(t),u(t)), \qquad x(t_0) = x_0 \in \Omega. \tag{3.1}$$

Начальные условия $x(t_0)$ заданы многообразием $\Omega \subseteq E^n$, размерность которого равна $m$, т.е.

$$x(t_0) \in \Omega = \{ x \mid x^2 = y_0(x^1),\ x^1 \in E^m = B_1 \}, \tag{3.2}$$

где $y_0(x^1) = \{ y_{0j}(x^1),\ j = m+1,\dots,n \}$ – заданная вектор-функция, элементы которой $y_{0j}(x^1)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Условия на вектор состояния на правом конце интервала времени $T'$ не заданы.

Предполагается, что при управлении используется информация только о времени и о текущей величине вектора $x^1$, т.е. управление $u(t)$, применяемое в каждый момент времени $t \in T'$, имеет вид управления с обратной связью по неполному вектору состояния: $u(t) = u(t,x^1(t))$ (см. рис. 2.1).

Множество допустимых управлений $\gamma_m$ состоит из функций $u(t,x^1)$:



$T' \times B_1 \to U$ таких, что для всех $i = 1,\dots,n$ функции $f_i^{u(\cdot)}(t,x) = f_i(t,x,u(t,x^1))$ определены и непрерывны на $Q'$, непрерывно дифференцируемы по $x$ и локально липшицевы, кусочно-непрерывны по $t$, что гарантирует существование и единственность решений уравнения (3.1), а управление $u(t) = u(t,x^1(t))$ кусочно-непрерывно по $t$. В точках $\tau$ разрыва функции $u(t)$ значение управления определяется как предел справа: $u(\tau) = u(\tau+0)$.

Множество допустимых процессов $D$ – множество пар $d = (x(.),u(.))$, где $\forall t \in T$ $x(t) \in E^n$, $u(t) \in U$, функции $x(.)$ непрерывны и кусочно дифференцируемы, а $u(.)$ кусочно-непрерывны, удовлетворяющих уравнению (3.1) с начальным условием (3.2) почти всюду на $T'$.

На множестве $D$ определим функционал качества управления

$$I(x_0, d) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),u(t))\,dt + F(x(t_1)), \tag{3.3}$$

где $f^0(t,x,u)$, $F(x)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Для удобства изложения повторим формулировки задач, рассмотренных в разд. 2.4.1.

З а д а ч а 3. Требуется найти такую пару $d^* = (x^*(.),u^*(.)) \in D$, что

$$I(x_0,d^*) = \min_{d \in D} I(x_0,d). \ ■ \tag{3.4}$$

З а д а ч а 4. Требуется найти такую функцию $u^*(t,x^1) \in \gamma_m$, что

$$I(x(t_0),x^*(.),u^*(.,x^{1*}(.))) = \min_{d \in D} I(x(t_0),d) \qquad \forall\, x(t_0) \in \Omega, \tag{3.5}$$

где $x^*(.)$ – траектория, получаемая для начального условия $x(t_0)$ с помощью решения уравнения (3.1) совместно с управлением $u^*(t,x^1)$, т.е. $u^*(t) = u^*(t,x^{1*}(t))$ $\forall t \in T'$. ■

Функция $u^*(t,x^1)$, удовлетворяющая (3.4), называется оптимальной синтезирующей функцией на множестве $\Omega$.

Оптимальная синтезирующая функция, определяемая решением задачи 4, порождает для каждого начального условия из множества $\Omega$ решение задачи 3, т.е. оптимальную пару $d^* = (x^*(.),u^*(.)) \in D$, где $u^*(.)$ – так называемое оптимальное программное управление.

З а м е ч а н и я. 1. В общем случае множество $D$ зависит от начальных условий $x_0$. С целью сокращения обозначений этот факт явно не указан, но везде далее предполагается.

2. Предполагается, что минимум в (3.4), (3.5) и функция $u^*(t,x^1)$ существуют.

3. Подчеркнем, что число используемых в управлении координат вектора $x$ совпадает с размерностью множества начальных условий $\Omega$. При $m = 0$ множество $\Omega$ совпадает с точкой $x_0$, для которой ищется оптимальное программное управление $u^*(t)$, а при $m = n$ множество $\Omega$ совпадает с $n$-мерным евклидовым пространством и ищется оптимальное

управление с полной обратной связью по вектору состояния $u^*(t,x)$.

**4.** Управление $u^*(t,x^1)$ в задаче 4 решает проблему оптимальной транспортировки ансамбля траекторий, исходящего из множества $\Omega$.

В разд. 2.4 дан один способ решения задачи 4 с помощью нахождения оптимальной синтезирующей функции вида $u^*(t,x^1;\ y(x))$. Так как проблема решения уравнения (2.34) является весьма сложной, здесь предлагается более простой подход, связанный с непосредственным определением управления $u^*(t,x^1) \in \gamma_m$.

## 3.2. Достаточные условия оптимальности

Поведение траекторий уравнения (3.1), исходящих из множества $\Omega$, будем описывать с помощью вектор-функции $y(t,x^1)$: $T'\times B_1 \to B_2$, удовлетворяющей системе уравнений (2.31):

$$\frac{\partial y_j(t,x^1)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y_j(t,x^1)}{\partial x_i} f_i(t,x^1,y(t,x^1),u(t,x^1)) + f_j(t,x^1,y(t,x^1),u(t,x^1)),\quad j = m+1,\dots,n,\ \forall (t,x^1) \in T\times B_1, \tag{3.6}$$

$$y_j(t_0,x^1) = y_{0j}(x^1),\quad j = m+1,\dots,n,\ \forall x^1 \in B_1. \tag{3.7}$$

Решение системы уравнений (3.6), (3.7) устанавливает связь: $x^2 = y(t,x^1)$ $\forall (t,x^1) \in T\times B_1$. Предполагается, что размерность множества, описываемого соотношением $x^2 = y(t,x^1)$, равна $m$ $\forall t \in T'$.

Для получения траекторий, исходящих из множества $\Omega$, требуется решить систему уравнений (3.6), (3.7) при известном управлении $u(t,x^1)$, а затем – систему

$$\dot{x}_i = f_i(t,x^1(t), y(t,x^1(t)),u(t,x^1(t))),\quad i = 1,\dots,m,\quad \forall x^1(t_0) \in B_1.$$

Если значение вектора $x^1(t)$ известно, то можно найти текущее значение вектора состояния $x$: $x(t) = (x^1(t), y(t,x^1(t)))$ $\forall t \in T'$.

Введем в рассмотрение множество функций $\varphi(t,x)$: $T'\times B \to E^1$, непрерывно дифференцируемых всюду, за исключением конечного числа сечений $T'\times B$ при фиксированных $t$, и конструкции [67, 68]:

$$R(t,x,u) = \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) - f^0(t,x,u),$$
$$G(t_1,x) = \varphi(t_1,x) + F(x). \tag{3.8}$$

Предположим, что существует множество $\Phi$ функций $\varphi(t,x)$, для которых конструкции (3.8) достигают экстремальных значений:



$$r(t) = \max_{x^2\in B_2} \max_{u\in U} R(t,x,u)\quad \forall (t,x^1) \in T\times B_1, \tag{3.9}$$

$$g = \min_{x^2\in B_2} G(t_1,x)\quad \forall x^1 \in B_1, \tag{3.10}$$

где $r(t)$ – кусочно-непрерывная функция на $T$.

Пусть имеется управление $u^*(t,x^1)$ и соответствующее решение $y^*(t,x^1)$ системы (3.6), (3.7).

**Теорема 3.1** (достаточные условия оптимальности в задаче 4). Если существует такая функция $\varphi(t,x) \in \Phi$, что

1) $R(t,x^1,y^*(t,x^1),u^*(t,x^1)) = r(t)$ почти всюду на $T$, $\forall x^1 \in B_1$;

2) $G(t_1, x^1, y^*(t_1,x^1)) = g$ $\forall x^1 \in B_1$,

то управление $u^*(t,x^1)$ является оптимальной синтезирующей функцией на множестве $\Omega$. ■

З а м е ч а н и е. Функцию $r(t)$ и величину $g$ можно без ограничения общности положить равными нулю. Тогда минимальное значение функционала определяется формулой

$$\min_{d\in D} I(x_0,d) = -\varphi(t_0, x_0)\quad \forall x_0 \in \Omega. \tag{3.11}$$

**Доказательство.** Применим принцип расширения [36, 67, 68].

Определим множество $V$ пар $d = (x(.),u(.))$, где элементы пар по сравнению с входящими в множество $D$ необязательно связаны дифференциальным уравнением (3.1); $x(t_0) = x_0 \in \Omega$; допускаются разрывы первого рода функций $x(.)$ на $T'$.

Таким образом, множество $D \subset V$ и расширение построено. Доопределение функционала $I$ на множестве $V$ производится с помощью задания функции $\varphi(t,x)$.

На множестве $V$ определим функционал

$$L(x_0,d) = G(t_1,x(t_1)) - \int_{t_0}^{t_1} R(t,x(t),u(t))\,dt - \varphi(t_0,x_0). \tag{3.12}$$

На множестве $D \subset V$, где между функциями $x(.)$, $u(.)$ существует дифференциальная связь, с учетом (3.1), (3.8), равенства $x(t_0) = x_0$ справедливо

$$R(t,x(t),u(t)) = \frac{\partial \varphi(t,x(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t,x(t))}{\partial x_i} f_i(t,x(t),u(t)) - f^0(t,x(t),u(t)) = \frac{d\varphi(t,x(t))}{dt} - f^0(t,x(t),u(t))$$

и поэтому

$$L(x_0,d) = \varphi(t_1,x(t_1)) + F(x(t_1)) - \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{d\varphi(t,x(t))}{dt} - f^0(t,x(t),u(t)) \right] dt - \varphi(t_0, x_0) \equiv I(x_0,d).$$

Таким образом, на множестве $V$ функционалы $I(x_0,d)$ и $L(x_0,d)$ совпадают.

Поведение функционала $L(x(t_0),d)$ на множестве $V \setminus D$ полностью определяется выбором функции $\varphi(t,x)$.

Пусть имеется функция $\varphi(t,x) \in \Phi$. Найдем минимум функционала (3.12) на множестве $V$. Третий член при заданной функции $\varphi(t,x)$ и известном начальном условии $x_0$ вычисляется и в плане минимизации не рассматривается. Операции нахождения экстремума в первых двух слагаемых могут быть выполнены по отдельности в силу свойств функций $x(.)$, $u(.)$, образующих пары $d \in V$.

Для функции $\varphi(t,x) \in \Phi$ выполняются равенства (3.9), (3.10). Поэтому их можно переписать в виде

$$r(t) = \max_{x \in B} \max_{u \in U} R(t,x,u), \qquad g = \min_{x \in B} G(t_1,x),$$

так как правые части в (3.9), (3.10) не зависят от $x^1$. Тогда

$$\min_{d \in V} L(x_0,d) = g - \int_{t_0}^{t_1} r(t)\,dt - \varphi(t_0,x_0). \tag{3.13}$$

Рассмотрим произвольное начальное условие $x_0^* \in \Omega$. Решая уравнение (3.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0^*$ и управлением $u^*(t,x^1)$, можно получить пару $d^* = (x^*(.), u^*(.) = u^*(.,x^{1*}(.))) \in D$. Та же пара может быть получена по имеющимся функциям $y^*(t,x^1)$, $u^*(t,x^1)$:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t,x^1(t),y^*(t,x^1(t)),u^*(t,x^1(t))), \quad x_i(t_0) = x_{0i}^*, \quad i = 1,\dots,m.$$

В результате имеем $x^{1*}(.)$ и пару $d^* = (x^*(.) = (x^{1*}(.), x^{2*}(.) = y^*(., x^{1*}(.))), u^*(.) = u^*(., x^{1*}(.))) \in D$. Так как условия 1,2 теоремы выполняются $\forall x^1 \in B_1$, то они справедливы и для $x^{1*}(t)$, т.е.

$$R(t,x^*(t),u^*(t)) = r(t), \quad t \in T; \qquad G(t_1,x^*(t_1)) = g.$$

Из этих равенств и из (3.12),(3.13) следует, что $L(x_0^*,d^*) = \min\limits_{d \in V} L(x_0^*,d)$, т.е. $L(x_0^*,d^*) \le L(x_0^*,d)$ $\forall d \in V$. Поскольку $d^* \in D \subset V$, то $L(x_0^*,d^*) \le L(x_0^*,d)$ $\forall d \in D$. Но на множестве $D$ справедливо тождество $L(x_0^*,d) \equiv I(x_0^*,d)$. Поэтому $I(x_0^*,d^*) \le I(x_0^*,d)$ $\forall d \in D$, что соответствует определению минимума функционала (3.3). Доказательство теоремы следует из произвольности начального условия $x_0^* \in \Omega$. ■

Поясним замечание к теореме 3.1. Если существует функция $\varphi(t,x) \in \Phi$, удовлетворяющая условиям 1,2 теоремы при $r(t) \not\equiv 0$, $g \ne 0$, то применяя прямую подстановку в (3.9), (3.10), можно найти, что функция



$$\varphi'(t,x) = \varphi(t,x) + \int_t^{t_1} r(\tau)\,d\tau - g$$

также удовлетворяет этим условиям при $r'(t) \equiv 0$, $g' = 0$. В этом случае из выражения для определения минимума функционала $L(x_0,d)$ и доказанной теоремы следует

$$\min_{d \in V} L(x_0,d) = \min_{d \in D} I(x_0,d) = -\varphi'(t_0,x_0) \qquad \forall x_0 \in \Omega.$$

## 3.3. Соотношения для определения оптимального управления

### 3.3.1. Общий случай задания начального многообразия

Будем искать функцию $\varphi(t,x)$ в виде

$$\varphi(t,x) = W(t,x^1) + \sum_{j=m+1}^{n} \Psi_j(t,x^1)\,x_j, \tag{3.14}$$

где $W(t,x^1)$; $\Psi_j(t,x^1)$, $j = m+1,\dots,n$, – неизвестные функции.

Подставляя (3.14) в (3.8), получаем

$$R(t,x,u) = \frac{\partial W(t,x^1)}{\partial t} + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial \Psi_j(t,x^1)}{\partial t} x_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W(t,x^1)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Psi_j(t,x^1)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + \sum_{j=m+1}^{n} \Psi_j(t,x^1)\,f_j(t,x,u) - f^0(t,x,u) =$$

$$= \frac{\partial W(t,x^1)}{\partial t} + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial \Psi_j(t,x^1)}{\partial t} x_j + H(t,x,u), \tag{3.15}$$

$$G(t_1,x) = W(t_1,x^1) + \sum_{j=m+1}^{n} \Psi_j(t_1,x^1)\,x_j + F(x).$$

Здесь

$$H(t,x,u) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W(t,x^1)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + \sum_{j=m+1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Psi_j(t,x^1)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{n} \Psi_j(t,x^1)\,f_j(t,x,u) - f^0(t,x,u).$$

Определяя в (3.9) максимум по управлению с учетом условия 1 теоремы 3.1 и (3.15), находим

$$H'(t,x^1,y^*(t,x^1)) = \max_{u \in U} H(t,x^1,y^*(t,x^1),u). \tag{3.16}$$

Предположим, что функции $R(t,x,u)$, $G(t_1,x)$ в (3.15) непрерывно дифференцируемы относительно $x^2$. Поэтому можно применить необходимые условия безусловного экстремума для определения максимума и минимума в (3.9), (3.10) по $x^2$ с учетом условий 1, 2 теоремы 3.1:

$$\frac{\partial R(t,x^1,y^*(t,x^1),u^*(t,x^1))}{\partial x_j} = 0 , \quad \frac{\partial G(x^1,y^*(t_1,x^1))}{\partial x_j} = 0 , \quad j = m+1,\dots,n .$$

Отсюда с учетом (3.15) имеем

$$\frac{\partial \Psi_j(t,x^1)}{\partial t} = - \frac{\partial H'(t,x^1,y^*(t,x^1))}{\partial x_j} , \quad j = m+1,\dots,n , \ \forall (t,x^1) \in T\times B_1,$$
$$\Psi_j(t_1,x^1) = - \frac{\partial F(x^1,y^*(t_1,x^1))}{\partial x_j} , \quad j = m+1,\dots,n, \ \forall x^1 \in B_1 . \tag{3.17}$$

Положив в (3.9), (3.10) $r(t) \equiv 0, g = 0$, с учетом (3.15), (3.17) получим

$$\max_{u\in U} \left\{ \frac{\partial W(t,x^1)}{\partial t} - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial H'(t,x^1,y^*(t,x^1))}{\partial x_j} y^*_j(t,x^1) + H(t,x^1, y^*(t,x^1),u) \right\} = 0 \quad \forall (t,x^1) \in T\times B_1,$$

$$W(t_1,x^1) = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial F(x^1,y^*(t_1,x^1))}{\partial x_j} y^*_j(t_1,x^1) - F(x^1,y^*(t_1,x^1)) \quad \forall x^1 \in B_1 ,$$

где $H'(t,x^1,y^*(t,x^1))$ определяется выражением (3.16), а функция $y^*(t,x^1)$ является решением системы (3.6), (3.7) с управлением $u^*(t,x^1)$, структура которого находится из условия

$$u^*(t,x^1) = u^*(t,x^1,y^*(t,x^1)) = \arg\max_{u\in U} H(t,x^1,y^*(t,x^1),u) .$$

Таким образом, для определения оптимальной синтезирующей функции $u^*(t,x^1)$ на множестве $\Omega$ требуется решить систему из $2(n-m)+1$ уравнений в частных производных первого порядка с $2(n-m)+1$ краевыми условиями на концах интервала $T'$:

$$\frac{\partial y_j^*(t,x^1)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y_j^*(t,x^1)}{\partial x_i} f_i(t,x^1,y^*(t,x^1),u^*(t,x^1)) +$$
$$+ f_j(t,x^1,y^*(t,x^1),u^*(t,x^1)), \quad j = m+1,\dots,n , \ \forall (t,x^1) \in T\times B_1 ,$$

$$y_j^*(t_0,x^1) = y_{0j}(x^1) , \quad j = m+1,\dots,n , \ \forall x^1 \in B_1 ,$$

$$\max_{u\in U} \left\{ \frac{\partial W(t,x^1)}{\partial t} - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial H'(t,x^1,y^*(t,x^1))}{\partial x_j} y^*_j(t,x^1) + H(t,x^1, y^*(t,x^1),u) \right\} = 0 \quad \forall (t,x^1) \in T\times B_1,$$

$$\frac{\partial \Psi_j(t,x^1)}{\partial t} = - \frac{\partial H'(t,x^1,y^*(t,x^1))}{\partial x_j} , \quad j = m+1,\dots,n , \tag{3.18}$$



$$\Psi_j(t_1,x^1) = - \frac{\partial F(x^1,y^*(t_1,x^1))}{\partial x_j} , \quad j = m+1,\dots,n , \quad \forall x^1 \in B_1$$

$$W(t_1,x^1) = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial F(x^1,y^*(t_1,x^1))}{\partial x_j} y^*_j(t_1,x^1) - F(x^1,y^*(t_1,x^1)) ,$$

где

$$H'(t,x^1,y^*(t,x^1)) = \max_{u\in U} H(t,x^1,y^*(t,x^1),u) .$$

Минимальное значение функционала (3.3) можно вычислить по формуле (3.11) с учетом (3.14):

$$\min_{d\in D} I(x,d) = - W(t_0,x^1) - \sum_{j=m+1}^{n} \Psi_j(t_0,x^1) x_j \quad \forall x \in \Omega .$$

Система уравнений (3.18) занимает промежуточное положение между соотношениями принципа максимума и уравнением Беллмана. Так, функции $\Psi_j(t,x^1)$ аналогичны вспомогательным переменным принципа максимума и совпадают с ними при $m = 0$. Функция $W(t,x^1)$ аналогична решению уравнения Беллмана и совпадает с ним при $m = n$.

Как следует из (3.11), управление $u^*(t,x^1)$, удовлетворяющее системе (3.18), для всех начальных условий из множества $\Omega$ обеспечивает то же самое значение функционала качества (3.3), что и соответствующее оптимальное программное управление $u^*(t)$, а также оптимальное управление с полной обратной связью $u^*(t,x)$. При этом $u^*(t) = u^*(t,x^{1*}(t)) = u^*(t,x^*(t))$, где $x^*(t)$ – оптимальная траектория для каждого начального условия из множества $\Omega$.

Методика определения оптимального управления детерминированной системой (3.1) с применением оптимальной синтезирующей функции $u^*(t,x^1)$ на множестве $\Omega$ состоит из двух этапов.

Первый этап. Нахождение оптимальной синтезирующей функции $u^*(t,x^1)$.

1. Для рассматриваемой постановки задачи записать систему (3.18).
2. Найти максимум функции $H(t,x^1,y^*(t,x^1),u)$ по управлению. В результате определяется структура оптимальной синтезирующей функции $u^*(t,x^1)$, включающая в себя функции $W(t,x^1),\Psi_j(t,x^1)$ и их производные.
3. Полученные выражения подставить в (3.18).
4. Решить систему (3.18) и определить явный вид функций $y(t,x^1)$, $W(t,x^1)$, $\Psi_j(t,x^1)$ и оптимальной синтезирующей функции $u^*(t,x^1)$, структура которой найдена в п.2. В результате будет получено решение задачи 4.
5. Определить минимальное значение функционала качества.

Второй этап. Применение оптимальной синтезирующей функции $u^*(t,x^1)$ для управления системой (3.1) (нахождение решения задачи 3 для фиксированного начального условия из множества $\Omega$).

1. Задать начальное условие $x(t_0) \in \Omega$.

2. Решить уравнение (3.1) совместно с найденной на предыдущем этапе оптимальной синтезирующей функцией $u^*(t,x^1)$ для начального условия, заданного в п.1 данного этапа. В результате определяется пара $d^* = (x(.), u^*(.) = u^*(.,x^1(.)))$, т.е. оптимальная траектория и оптимальное управление – решение задачи 3. Этот процесс функционирования оптимальной системы с неполной обратной связью отражает структурная схема, представленная на рис. 2.1.

3. Перейти к п. 1 данного этапа для задания нового начального условия.

З а м е ч а н и я. **1.** Отметим, что второе и третье соотношения в (3.18) – следствие применения необходимых условий экстремума соответствующих функций. Поэтому если найдено решение системы (3.18), то это еще не означает, что управление $u^*(t,x^1)$ оптимальное. Однако уравнения системы еще не задают до конца функцию $\varphi(t,x)$, используемую в формулировке теоремы 3.1, определяя лишь ее первую производную по координатам вектора $x^2$ и оставляя произвол для ее доопределения. Для случая $m = 0$ соответствующие пути обсуждаются в [36, 67, 68, 69].

**2.** Аналогичный подход может быть применен в задаче оптимального управления непрерывной системой при неполной дискретной информации в случае постоянного управления между измерениями [216].

### 3.3.2. Предельные случаи информированности о векторе состояния

Рассмотрим различные способы задания множества начальных условий $\Omega$ и, следовательно, методы синтеза оптимального управления в предельных случаях информированности о векторе состояния.

**1.** $m = 0$ (информация о векторе состояния отсутствует). Множество $\Omega$ задано точкой $x(t_0) = x_0$. Ищется оптимальное программное управление $u^*(.)$. Соотношения (3.18) преобразуются к соответствующим п р и н ц и п у м а к с и м у м а [19, 32, 68, 85]:

$$\dot{x}^*_j(t) = f_j(t,x^*(t),u(t)), \qquad x^*_j(t_0) = x_{0j}, \qquad j = 1,\ldots,n,$$

$$\dot{\Psi}_j(t) = -\frac{\partial H'(t,x^*(t))}{\partial x_j}, \qquad \Psi_j(t_1) = -\frac{\partial F(x^*(t_1))}{\partial x_j}, \qquad j = 1,\ldots,n,$$

$$H'(t,x^*(t)) = \max_{u\in U} H(t,x^*(t),u), \quad u^*(t) = u^*(t,x^*(t),\Psi(t)),$$

$$\frac{d\,W(t)}{d\,t} = -H'(t,x^*(t)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H'(t,x^*(t))}{\partial x_j}\, x^*_j(t),$$

$$W(t_1) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(x^*(t_1))}{\partial x_j}\, x^*_j(t_1) - F(x^*(t_1)).$$



Искомая пара $d^* = (x^*(.),u^*(.))$ может быть найдена из системы уравнений

$$\dot{x}^*_j(t) = f_j(t,x^*(t),u(t)), \qquad x^*_j(t_0) = x_{0j}, \qquad j = 1,\ldots,n,$$
$$\dot{\Psi}_j(t) = -\frac{\partial H'(t,x^*(t))}{\partial x_j}; \qquad \Psi_j(t_1) = -\frac{\partial F(x^*(t_1))}{\partial x_j}, \quad j = 1,\ldots,n, \tag{3.19}$$

где $H'(t,x^*(t)) = \max_{u\in U} H(t,x^*(t),u)$, $u^*(t) = u^*(t,x^*(t),\Psi(t))$,

$$H(t,x,u) = \sum_{j=1}^{n} \Psi_j(t)\, f_j(t,x,u) - f^0(t,x,u),$$

которая представляет собой двухточечную краевую задачу для $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений с $2n$ краевыми условиями.

После решения системы уравнений (3.19) можно проинтегрировать уравнение для функции $W(.)$ и вычислить минимальное значение функционала (3.3) по формуле (3.11):

$$\min_{d\in D} I(x_0,d) = -W(t_0) - \sum_{j=1}^{n} \Psi_j(t_0)\, x_{0j}.$$

Искомое оптимальное программное управление $u^*(.)$ в общем случае обеспечивает минимум функционала качества управления только для заданного начального условия $x_0$. Для другого начального условия требуется выполнить процедуру принципа максимума заново.

**2.** $m = n$ (имеется полная информация о векторе состояния). Множество $\Omega = E^n = B$ и ищется оптимальное управление с полной обратной связью $u^*(t,x)$. Система (3.18) преобразуется к у р а в н е н и ю Б е л л м а н а д л я д е т е р м и н и р о в а н н ы х с и с т е м [68]:

$$\max_{u\in U} \left\{ \frac{\partial W(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) - f^0(t,x,u) \right\} = 0 \quad \forall (t,x) \in Q,$$
$$W(t_1,x) = -F(x) \quad \forall x \in B. \tag{3.20}$$

При этом минимальное значение функционала (3.3)

$$\min_{d\in D} I(x_0,d) = -W(t_0,x_0) \quad \forall x_0 \in E^n.$$

Одновременно последнее равенство придает смысл функции $W(t,x)$. Как и в общем случае, структура оптимальной синтезирующей функции определяется в результате поиска в (3.20) максимума по управлению. Искомое управление $u^*(t,x)$ обычно выражается через производные функции $W(t,x)$. После подстановки найденной структуры оптимальной синтезирующей функции обратно в (3.20) проблема сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка.

Если положить $S(t,x) = -W(t,x)$, то используя равенство $\max f(x) = -\min[-f(x)]$, можно переписать уравнение Беллмана и краевое условие (3.20) в эквивалентной форме [160]:

$$\min_{u\in U}\left\{\frac{\partial S(t,x)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(t,x)}{\partial x_i}f_i(t,x,u)+f^0(t,x,u)\right\}=0 \quad \forall (t,x)\in Q,$$

$$S(t_1,x) = F(x) \quad \forall x\in B.$$

### 3.3.3. Примеры нахождения оптимальных синтезирующих функций

П р и м е р 3.1. Пусть задана модель объекта управления (3.1) в форме:

$$\dot{x}_1(t) = u(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t).$$

Определим функционал (3.3) в квадратичном виде:

$$I(x(t_0),d) = (1/2)\int_0^2 u^2(t)\,dt + (1/2)\,[x_1^2(2) + x_2^2(2)],$$

Здесь $x = (x_1, x_2)^T \in E^2$, $u \in E^1$, $t \in [0,2]$, $f^0(t,x,u) = (1/2)\,u^2$, $F(x) = (1/2)\,[x_1^2 + + x_2^2]$.

Рассмотрим <u>частные случаи</u>.

**А.** $m = 0$. Множество начальных условий $\Omega$ задано точкой $x(t_0) = x_0$.

Т р е б у е т с я найти оптимальное программное управление $u^*(.)$.

Воспользуемся уравнениями принципа максимума (3.19).

Составим гамильтониан:

$$H(t,x,u) = \Psi_1(t)\,u + \Psi_2(t)\,x_1 - (1/2)\,u^2.$$

Так как ограничения на управление отсутствуют, можно применить необходимые условия экстремума для нахождения максимума гамильтониана по управлению: $\partial H(t,x,u)/\partial u = \Psi_1(t) - u = 0$. Поэтому $u^*(t) = \Psi_1(t)$ – структура оптимального программного управления.

Выпишем остальные соотношения системы уравнений (3.19):

$$\dot{x}_1(t) = u(t), \qquad x_1(0) = x_{10},$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t), \qquad x_2(0) = x_{20},$$
$$\dot{\Psi}_1(t) = -\frac{\partial H(t,x,u)}{\partial x_1} = -\Psi_2(t), \qquad \Psi_1(2) = -\frac{\partial F(x(2))}{\partial x_1} = -x_1(2),$$
$$\dot{\Psi}_2(t) = -\frac{\partial H(t,x,u)}{\partial x_2} = 0, \qquad \Psi_2(2) = -\frac{\partial F(x(2))}{\partial x_2} = -x_2(2).$$

Решив эту двухточечную краевую задачу, получим:



$$\Psi_1(t) = -x_1(2) - x_2(2)\,[2-t], \qquad \Psi_2(t) = -x_2(2),$$
$$x_1(t) = x_1(2)[3-t] + (1/2)\,x_2(2)\,[2-t]^2,$$
$$x_2(t) = x_2(2) - x_1(2)\,[2-t][4-t]/2 - x_2(2)[2-t]^3/6.$$

Из последних двух соотношений при $t = 0$ имеем

$$x_1(2) = -[x_{10} + 6\,x_{20}]/21; \qquad x_2(2) = [4\,x_{10} + 3\,x_{20}]/7.$$

Тогда оптимальное программное управление

$$u^*(t) = (x_{10} + 6\,x_{20})/21 - [2-t]\,(4\,x_{10} + 3\,x_{20})/7,$$

а оптимальная траектория определяется соотношениями:

$$x_1^*(t) = -[x_{10} + 6\,x_{20}]\,[3-t]/21 + [4\,x_{10} + 3\,x_{20}]\,[2-t]^2/14,$$

$$x_2^*(t) = [x_{10} + 6\,x_{20}][2-t][4-t]/42 - [4\,x_{10} + 3\,x_{20}]\,[2-t]^3/42 + [4\,x_{10} + 3\,x_{20}]/7.$$

**Б.** $m = 1$. Начальные условия заданы множеством $\Omega$:

$$x(t_0) \in \Omega = \{\, x \mid x_2 = -(4/3)\,x_1,\ x_1 \in E^1 \,\}.$$

Т р е б у е т с я найти оптимальную синтезирующую функцию $u^*(t,x_1)$ на множестве $\Omega$.

Будем искать неизвестные функции, входящие в (3.18), в виде

$$y(t,x_1) = y_0(t) + y_1(t)\,x_1,$$
$$W(t,x_1) = (1/2)\,K_2(t)\,x_1^2 + K_1(t)\,x_1 + K_0(t), \qquad (3.21)$$
$$\Psi(t,x_1) = \Psi(t) + N(t)\,x_1,$$

где $y_0(t), y_1(t), K_0(t), K_1(t), K_2(t), \Psi(t), N(t)$ – неизвестные функции на $T'$.

Тогда из (3.18) получим

$$H'(t, x_1, y(t,x_1)) = \max_u \{ (K_2\,x_1 + K_1)\,u + N(y_0 + y_1\,x_1)\,u + (\Psi + N\,x_1)\,x_1 - (1/2)\,u^2 \}.$$

Здесь аргументы функций для краткости опущены.

Используя необходимые условия экстремума для нахождения максимума по управлению $u$, найдем структуру оптимального управления:

$$u^*(t, x_1) = K_2\,x_1 + K_1 + N\,(y_0 + y_1\,x_1). \qquad (3.22)$$

Подставляя (3.21), (3.22) в (3.18) и приравнивая члены при одинаковых степенях $x_1$ нулю, получаем систему уравнений

$$\dot{y}_0 + y_1(K_1 + N\,y_0) = 0, \qquad y_0(0) = 0,$$
$$\dot{y}_1 + y_1\,K_2 - 1 + y_1^2 N = 0, \qquad y_1(0) = -4/3,$$
$$\dot{\Psi} = -N^2 y_0 - NK_1, \qquad \Psi(2) = -y_0(2),$$
$$\dot{N} = -K_2 N - y_1 N^2, \qquad N(2) = -y_1(2),$$
$$\dot{K}_2 + K_2^2 + 2N - N^2 y_1^2 = 0, \qquad K_2(2) = -1 + y_1^2(2),$$
$$\dot{K}_1 + K_1\,K_2 + \Psi - y_1\,y_0\,N^2 = 0, \qquad K_1(2) = y_1(2)\,y_0(2),$$
$$\dot{K}_0 + (1/2)\,K_1^2 - (1/2)\,y_0^2 N^2 = 0, \qquad K_0(2) = (1/2)\,y_0^2(2).$$

Ее решение: $y_0(t) \equiv K_0(t) \equiv K_1(t) \equiv \Psi(t) \equiv N(t) \equiv 0$ ,

$$y_1(t) = -\frac{(2-t)(4-t)}{2(3-t)}, \quad K_2(t) = -\frac{1}{(3-t)} .$$

Из (3.21), (3.22) и связи $x^2 = y(t, x^1)$ определим явный вид искомой оптимальной синтезирующей функции и выражение для вычисления минимального значения функционала качества

$$u^*(t, x_1) = - x_1/(3-t) ,$$

$$\varphi(t_0, x) = W(t_0, x_1) + \Psi(t_0, x_1)\, x_2 = -(1/6)\, x_1^2 = -\min_{d \in D} I(x, d) \quad \forall x \in \Omega . \quad (3.23)$$

С помощью прямой подстановки легко показать, что на траекториях, исходящих из множества $\Omega$ , оптимальная синтезирующая функция $u^*(t, x_1)$ порождает соответствующие оптимальные программные управления, полученные в случае $m = 0$, т.е. $u^*(t, x_1^*(t)) = u^*(t) \ \ \forall t \in [0,2]$.

Действительно, из п. **А** следует, что на траекториях, исходящих из множества $\Omega$ , справедливо:

$$u^*(t) = - x_{10}/3, \ x_1^*(t) = x_{10}[3-t]/3, \ \ x_2^*(t) = - x_{10}[2-t][4-t]/6 .$$

С другой стороны, $u^*(t, x_1^*(t)) = - x_{10}[3-t]/3[3-t] = - x_{10}/3 = u^*(t)$ $\forall t \in [0,2]$, что и требовалось показать.

В. $m = 2$ . Начальные условия заданы множеством $\Omega = E^2$.

Т р е б у е т с я найти оптимальную синтезирующую функцию $u^*(t,x)$ на множестве $E^2$ .

Для рассматриваемой задачи уравнение Беллмана (3.20) имеет вид

$$\max_u \left\{ \frac{\partial W(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial W(t,x)}{\partial x_1} u + \frac{\partial W(t,x)}{\partial x_2} x_1 - (1/2)\, u^2 \right\} = 0 , \qquad (3.24)$$

$$W(2,x) = -(1/2)\, x_1^2 - (1/2)\, x_2^2 .$$

Применяя необходимые условия экстремума по управлению, получаем структуру оптимального управления

$$u^*(t,x) = \partial W(t,x)/\partial x_1 . \qquad (3.25)$$

Подставим (3.25) в (3.24). Тогда

$$\frac{\partial W(t,x)}{\partial t} + (1/2)\left\{\frac{\partial W(t,x)}{\partial x_1}\right\}^2 + \frac{\partial W(t,x)}{\partial x_2} x_1 = 0 .$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$W(t,x) = K_{11}(t)\, x_1^2 + 2 K_{12}(t)\, x_1 x_2 + K_{22}(t)\, x_2^2 .$$

Подставляя $W(t,x)$ в уравнение и краевое условие, приравнивая



затем члены при одинаковых степенях $x_1$ и $x_2$ нулю, получаем

$$\dot K_{11} = -2K_{12} - 2K_{11}^2 , \quad K_{11}(2) = -1/2 ,$$

$$\dot K_{12} = -K_{22} - 2K_{12}K_{11} , \quad K_{12}(2) = 0 ,$$

$$\dot K_{22} = -2K_{12}^2 , \quad K_{22}(2) = -1/2 .$$

Решение системы уравнений имеет вид

$$K_{11}(t) = \frac{-[6 + 2(2-t)^2(5-t)]}{12(3-t) + (2-t)^3(6-t)}, \quad K_{12}(t) = \frac{-3(2-t)(4-t)}{12(3-t) + (2-t)^3(6-t)} ,$$

$$K_{22}(t) = \frac{-6(3-t)}{12(3-t) + (2-t)^3(6-t)} .$$

Из (3.25) следует явный вид оптимальной синтезирующей функции

$$u^*(t,x) = -\frac{[12 + 4(2-t)^2(5-t)]\, x_1 + 6(2-t)(4-t)\, x_2}{12(3-t) + (2-t)^3(6-t)} ,$$

$$W(t_0, x) = -\frac{23 x_1^2 + 24 x_1 x_2 + 9 x_2^2}{42} .$$

На множестве $\Omega$ , где $x_2 = -(4/3)\, x_1$ , имеем

$$W(t_0, x_1, y_0(x_1)) = -(1/6)\, x_1^2 = -\min_{d \in D} I(x,d) \quad \forall x \in \Omega ,$$

т.е. управления $u^*(t,x)$ и $u^*(t,x_1)$ для начальных условий из множества $\Omega$ обеспечивают одно и то же минимальное значение функционала качества управления.

П р и м е р 3.2. Пусть задана модель объекта управления (3.1) в форме

$$\dot x_1(t) = u_1(t) ,$$

$$\dot x_2(t) = - x_1(t) + u_2(t) .$$

Определим функционал (3.3) в квадратичном виде

$$I(x(t_0), d) = (1/2)\int_0^1 [\, u_1^2(t) + u_2^2(t)]\, dt + (1/2)\, x_2^2(1) .$$

Здесь $x = (x_1, x_2)^T \in E^2$, $u_1 \in E^1$, $u_2 \in E^1$, $t \in [0,1]$, $f^0(t,x,u) = (1/2)[\, u_1^2 + u_2^2]$, $F(x) = (1/2)\, x_2^2$ .

Начальные условия заданы множеством $\Omega$ размерности $m = 1$ :

$$x(t_0) \in \Omega = \{ x \mid x_2 = (10/3)\, x_1 , \ x_1 \in E^1 \} .$$

Т р е б у е т с я найти оптимальную синтезирующую функцию $u^*(t, x_1)$ на множестве $\Omega$ .

Будем искать неизвестные функции, входящие в (3.18), в виде

$$y(t,x_1) = y_0(t) + y_1(t)\, x_1 ,$$

$$W(t,x_1) = (1/2)\, K_2(t)\, x_1^2 + K_1(t)\, x_1 + K_0(t) , \qquad (3.26)$$

$$\Psi(t,x_1) = \Psi(t) + N(t)\, x_1 ,$$

где $y_0(t), y_1(t), K_0(t), K_1(t), K_2(t), \Psi(t), N(t)$ – неизвестные функции на T'.

Тогда из (3.18) получим

$$H'(t, x_1, y(t,x_1)) = \max_{u_1,u_2} \{ ( K_2 x_1 + K_1 ) u_1 + N ( y_0 + y_1 x_1 ) u_1 + $$
$$+ ( \Psi + N x_1 ) ( - x_1 + u_2 ) - (1/2)\, u_1^2 - (1/2)\, u_2^2 \} .$$

Здесь аргументы функций для краткости опущены.

Используя необходимые условия экстремума для нахождения максимума по управлению $u_1, u_2$, найдем структуру оптимального управления:

$$u_1^*(t, x_1) = K_2 x_1 + K_1 + N ( y_0 + y_1 x_1 ) , \quad u_2^*(t, x_1) = \Psi + N x_1 . \qquad (3.27)$$

Подставляя (3.27), (3.26) в (3.18) и приравнивая члены при одинаковых степенях $x_1$ нулю, получаем систему

$$\begin{array}{ll}
\dot y_0 + y_1 (K_1 + N y_0 ) - \Psi = 0 , & y_0(0) = 0 , \\
\dot y_1 + y_1 K_2 + 1 + y_1^2 N - N = 0 , & y_1(0) = 10/3 , \\
\dot \Psi = - N^2 y_0 - N K_1 , & \Psi(1) = - y_0(1) , \\
\dot N = - K_2 N - y_1 N^2 , & N(1) = - y_1(1) , \\
\dot K_2 + K_2^2 + 2N - N^2 y_1^2 = 0 , & K_2(1) = y_1^2(1) , \\
\dot K_1 + K_1 K_2 - \Psi + \Psi N - y_1 y_0 N^2 = 0 , & K_1(1) = y_1(1)\, y_0(1) , \\
\dot K_0 + (1/2) K_1^2 + (1/2) \Psi^2 - (1/2) y_0^2 N^2 = 0 , & K_0(1) = (1/2)\, y_0^2(1) .
\end{array}$$

Ее решение имеет вид:

$$y_0(t) \equiv K_0(t) \equiv K_1(t) \equiv \Psi(t) \equiv 0 ,$$

$$y_1(t) = \frac{20 - 12t - 3t^2 + t^3}{3(2 + 2t - t^2)} , \qquad K_2(t) = \frac{52 - 24t - 24t^2 + 8t^3}{3(2 + 2t - t^2)^2} ,$$

$$N(t) = - \frac{2}{(2 + 2t - t^2)} .$$

Из (3.27) получим искомую оптимальную синтезирующую функцию

$$u_1^*(t, x_1) = \frac{2 x_1 (1 - t)}{(2 + 2t - t^2)} , \qquad u_2^*(t, x_1) = - \frac{2 x_1}{(2 + 2t - t^2)} .$$

Аналогично примеру 3.1 с помощью прямой подстановки легко показать, что на траекториях, исходящих из множества $\Omega$, оптимальная синтезирующая функция $(u_1^*(t,x_1), u_2^*(t,x_1))$ порождает соответствующие



оптимальные программные управления, полученные с помощью применения принципа максимума, т.е. $u_1^*(t,x_1^*(t)) = u_1^*(t)$, $u_2^*(t,x_1^*(t)) = u_2^*(t) \quad \forall\, t \in [0,1]$.

## 3.4. Оптимальное управление с подвижным правым концом траектории

### 3.4.1. Постановка задачи

В постановке задачи 3 (см. разд. 3.1) момент $t_1$ окончания процесса управления считается заданным, а правый конец траектории $x(t_1)$ – свободным. Рассмотрим более общий случай, когда время окончания процесса управления определяется первым моментом достижения точкой $(t,x(t))$ некоторой заданной поверхности $\Gamma \subseteq E^{n+1}$.

$$\Gamma = \{ (t_1,x) \mid \Gamma_j(t_1,x) = 0,\ j = 1,\dots,l\ ;\ t_1 \in (t_0,\infty) ,\ x \in E^n \} , \qquad (3.28)$$

где $0 \le l \le n+1$, при $l = n+1$ множество $\Gamma$ представлено точкой в $E^{n+1}$, функции $\Gamma_j(t_1,x)$ – непрерывно дифференцируемы; система векторов $\{ \partial\Gamma_j(t_1,x)/\partial x_1, \dots, \partial\Gamma_j(t_1,x)/\partial x_n, \partial\Gamma_j(t_1,x)/\partial t_1 \}$, $j = 1,\dots,l$, линейно независима $\forall\, (t,x) \in E^{n+1}$. Если число $m$ используемых в управлении координат задано, то $l \le n-m+1$, т.е. размерность множества $\Gamma$ не меньше размерности множества начальных условий в $E^{n+1}$.

Функционал качества управления задается в форме

$$I(x_0, d) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),u(t))\, dt + F(t_1,x(t_1)) , \qquad (3.29)$$

где $F(t_1,x)$ – непрерывная функция, множество D допустимых процессов задачи теперь состоит из троек $d = (t_1,x(\cdot),u(\cdot))$: момента окончания, траектории и управления. В остальном формулировки задач 3 и 4 не отличаются от приведенных в разд. 3.1.

### 3.4.2. Достаточные условия оптимальности

Аналогично [160] обозначим:

$Q \subseteq E^{n+1}$ – множество точек $(t,x)$, из которых можно достигнуть терминального множества $\Gamma$ по некоторой траектории, соответствующей допустимому кусочно-непрерывному управлению. При этом $\Omega \subset Q$, $t \ge t_0$;

$Q_{t x^1}$ – проекция множества Q на пространство $(t_0,\infty) \times B_1$;

$\Gamma_{x^1}$ – проекция множества $\Gamma$ на множество $B_1$;

$\Gamma_{t_1 x^2}(x^1)$ – проекция множества $\Gamma$ на множество $(t_0,\infty) \times B_2$ при фиксированном $x^1$.

Как и ранее, поведение траекторий модели объекта управления (3.1),