

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Введение	9
В.1. Множества и операции над ними	9
В.2. Основные алгебраические структуры	11
В.2.1. Арифметические операции и их свойства	11
В.2.2. Бинарные операции и их свойства	15
В.2.3. Группы, кольца, поля	18
В.3. Поле комплексных чисел	25
В.4. Кольцо многочленов	29
В.5. Аксиоматические построения и логические рассуждения	38
Глава 1. Матрицы и действия над ними	46
1.1. Числовые матрицы	46
1.2. Линейные операции над матрицами	48
1.2.1. Сложение матриц	48
1.2.2. Умножение матрицы на число	49
1.3. Умножение матриц	50
1.3.1. Определение произведения матриц	50
1.3.2. Свойства умножения матриц	54
1.3.3. Умножение матриц на столбцы и строки единичной матрицы	57
1.3.4. Степень матрицы	59
1.4. Транспонирование и сопряжение матриц	62
1.4.1. Транспонирование матриц	62
1.4.2. Сопряжение матриц	65
1.4.3. След матрицы	68
1.5. Блочные (клеточные) матрицы	70
1.5.1. Блочные матрицы и операции над ними	70
1.5.2. Кронекеровские произведение и сумма матриц	74
1.6. Элементарные преобразования матриц	75
1.6.1. Метод Гаусса приведения матрицы к ступенчатому виду	75
1.6.2. Элементарные преобразования как умножения матриц	83
1.6.3. Нахождение элементарных преобразующих матриц	91
Глава 2. Определители	99
2.1. Индуктивное определение	99
2.2. Формула разложения определителя по элементам строки (столбца)	102
2.3. Свойства определителей	104
2.3.1. Основные свойства определителей	104
2.3.2. Формула полного разложения определителя	108

2.3.3. Формула Лапласа.....	110
2.3.4. Определитель произведения матриц	112
2.4. Методы вычисления определителей	115
2.4.1. Применение элементарных преобразований	115
2.4.2. Метод рекуррентных уравнений.....	121
Глава 3. Ранг матрицы.....	128
3.1. Линейная зависимость и линейная независимость строк (столбцов) матрицы	128
3.2. Базисный минор и ранг матрицы	131
3.2.1. Базисный минор матрицы	131
3.2.2. Теоремы о базисном миноре и о ранге матрицы	133
3.3. Методы вычисления ранга матрицы	138
3.3.1. Метод окаймляющих миноров	138
3.3.2. Метод Гаусса нахождения ранга матрицы	140
3.4. Ранг системы столбцов (строк).....	143
Глава 4. Обратная матрица.....	149
4.1. Определение, существование и единственность обратной матрицы	149
4.2. Свойства обратной матрицы.....	151
4.3. Способы нахождения обратной матрицы	153
4.4. Матричные уравнения	160
4.5. Полуобратная и псевдообратная матрицы	162
4.5.1. Односторонние обратные матрицы	162
4.5.2. Полуобратная матрица.....	164
4.5.3. Псевдообратная матрица	170
Глава 5. Системы линейных алгебраических уравнений	185
5.1. Основные понятия и определения.....	185
5.2. Правило Крамера	187
5.3. Условие совместности системы линейных уравнений.....	189
5.4. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений	190
5.5. Структура общего решения однородной системы.....	194
5.6. Структура общего решения неоднородной системы	200
5.7. Применение элементарных преобразующих матриц	203
5.8. Псевдорешения системы линейных уравнений	209
Глава 6. Функциональные матрицы и функции векторного аргумента.....	218
6.1. Функциональные матрицы скалярного аргумента	218
6.2. Производные скалярной функции по векторному аргументу	222

6.3.	Производные векторной функции по векторному аргументу	224
6.4.	Производные матричной функции по векторному аргументу	230
6.5.	Линейные и квадратичные формы	231
6.5.1.	Преобразования форм при линейной замене переменных	235
6.5.2.	Приведение квадратичной формы к каноническому виду	238
6.5.3.	Закон инерции вещественных квадратичных форм	248
6.5.4.	Знакоопределенность вещественных квадратичных форм.....	251
6.5.5.	Применение форм к исследованию функций на экстремум... 254	
Глава 7.	Многочленные матрицы и функции от матриц	261
7.1.	Многочленные матрицы (λ -матрицы)	261
7.1.1.	Определение многочленных матриц (λ -матриц).....	261
7.1.2.	Операции над λ -матрицами	262
7.1.3.	Элементарные преобразования λ -матриц	271
7.1.4.	Инвариантные множители λ -матрицы	279
7.2.	Характеристические матрицы и многочлены	282
7.2.1.	Собственные векторы и собственные значения матрицы.....	282
7.2.2.	Подобие числовых матриц	291
7.2.3.	Характеристический многочлен матрицы.....	298
7.2.4.	Теорема Гамильтона – Кэли. Минимальный многочлен матрицы	300
7.3.	Жорданова форма матрицы	306
7.3.1.	Элементарные делители матрицы.....	306
7.3.2.	Жордановы клетки и матрицы	309
7.3.3.	Приведение матрицы к жордановой форме	316
7.3.4.	Многочлены от матриц	331
7.3.5.	Применение многочленов от матриц для решения систем линейных рекуррентных уравнений с постоянными коэффициентами.....	342
7.4.	Функции от матриц.....	346
7.4.1.	Функции, определенные на спектре матрицы	347
7.4.2.	Определение и свойства функций от матриц	348
7.4.3.	Способы нахождения функций от матриц	349
7.4.4.	Свойства функций от матриц	354
7.4.5.	Применение функций от матриц для решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.....	356
Глава 8.	Линейные пространства.....	364
8.1.	Определение и примеры линейных пространств	364
8.1.1.	Аксиомы линейного пространства.....	364
8.1.2.	Простейшие следствия аксиом.....	365
8.1.3.	Примеры линейных пространств	366

8.2.	Линейная зависимость и линейная независимость векторов.....	370
8.2.1.	Понятие линейной зависимости и линейной независимости векторов	370
8.2.2.	Свойства линейно зависимых и линейно независимых векторов.....	372
8.2.3.	Аффинные, неотрицательные и выпуклые комбинации векторов.....	373
8.3.	Размерность и базис линейного пространства	376
8.3.1.	Определения размерности и базиса	376
8.3.2.	Примеры базисов линейных пространств	379
8.4.	Координаты и преобразования координат	383
8.4.1.	Координаты векторов в данном базисе	383
8.4.2.	Линейные операции в координатной форме	383
8.4.3.	Преобразование координат вектора при замене базиса	385
8.4.4.	Свойства матрицы перехода от одного базиса к другому	387
8.5.	Изоморфизм линейных пространств.....	389
8.6.	Подпространства линейного пространства	391
8.6.1.	Определение линейного подпространства	391
8.6.2.	Примеры линейных подпространств	392
8.6.3.	Пересечение и сумма подпространств.....	395
8.6.4.	Прямая сумма подпространств.....	400
8.6.5.	Способы описания подпространств.....	403
8.7.	Линейные многообразия	419
8.7.1.	Определение линейного многообразия	419
8.7.2.	Свойства линейных многообразий	420
8.7.3.	Способы описания линейных многообразий	421
8.8.	Евклидовы пространства.....	426
8.8.1.	Определение евклидова пространства.....	426
8.8.2.	Примеры евклидовых пространств	428
8.8.3.	Длина вектора. Угол между векторами	430
8.8.4.	Ортогональные векторы и их свойства	433
8.8.5.	Процесс ортогонализации Грама – Шмидта	434
8.8.6.	Ортогональный и ортонормированный базисы	437
8.8.7.	Ортогональные дополнения	443
8.8.8.	Задача о перпендикуляре	447
8.8.9.	Унитарные пространства	453
Глава 9.	Линейные отображения и операторы	459
9.1.	Линейные отображения.....	459
9.1.1.	Определение линейных отображений	459
9.1.2.	Примеры линейных отображений	460
9.1.3.	Свойства линейных отображений	462
9.1.4.	Матрица линейного отображения	464
9.1.5.	Ядро и образ линейного отображения	467

9.2. Линейные преобразования (операторы)	471
9.2.1. Определение и примеры линейных преобразований	471
9.2.2. Матрицы линейного преобразования в разных базисах	475
9.2.3. Алгебра линейных операторов	476
9.3. Инвариантные подпространства	478
9.3.1. Определение и примеры инвариантных подпространств	478
9.3.2. Свойства инвариантных подпространств	480
9.4. Собственные векторы линейного преобразования	482
9.4.1. Собственные векторы и собственные значения	482
9.4.2. Примеры собственных векторов	487
9.4.3. Свойства собственных векторов	489
9.5. Канонический вид линейного преобразования	494
9.5.1. Приведение линейного преобразования к диагональному виду	494
9.5.2. Приведение линейного преобразования к каноническому виду	496
9.6. Линейные преобразования евклидовых пространств	513
9.6.1. Ортогональные преобразования	513
9.6.2. Сопряженные преобразования	522
9.6.3. Самосопряженные преобразования	523
9.6.4. Приведение квадратичной формы к главным осям	528
9.6.5. Линейные преобразования унитарных пространств	532
Глава 10. Численные методы линейной алгебры	539
10.1. Основные положения. Нормы матриц	539
10.2. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений	545
10.2.1. Численные схемы реализации метода Гаусса	545
10.2.2. Метод прогонки	550
10.2.3. Метод LU -разложения	555
10.2.4. Метод квадратных корней	561
10.3. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений	564
10.3.1. Метод простых итераций	564
10.3.2. Метод Зейделя	570
10.4. Итерационный метод Шульца нахождения обратной матрицы	575
10.5. Методы решения задач о собственных значениях и собственных векторах матрицы	578
10.5.1. Метод итераций	579
10.5.2. Метод вращений	582
Литература	590