

**Термодинамика  
и электродинамика  
сплошных сред**

# ФИЗИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Серия основана в 2003 году

*Научные редакторы:*

д-р физ.-мат. наук, проф. Л.К. Мартинсон,  
д-р физ.-мат. наук, проф. А.Н. Морозов

Москва  
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана  
2018

И.Н. Алиев

**Термодинамика  
и электродинамика  
сплошных сред**



Москва  
ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МГТУ им. Н. Э. Баумана  
2018

УДК 537.8  
ББК 22.313  
А50

*Рецензенты:*

кафедра общей физики МГОУ  
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. *Д.Л. Богданов*);  
д-р физ.-мат. наук, проф. *П.П. Полуэктов*

*Рекомендовано Редакционно-издательским советом  
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия*

**Алиев, И. Н.**  
А50 Термодинамика и электродинамика сплошных сред : учебное пособие /  
И. Н. Алиев. — Москва : Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. —  
406, [2] с. : ил. — (Серия «Физика в техническом университете»).

ISBN 978-5-7038-4877-7

Рассмотрены различные аспекты механики поляризованных и проводящих сплошных тел и сред с учетом магнитных, электрических и тепловых эффектов. Изложение ведется в рамках общего подхода, базирующегося на термо- и электромеханическом вариационных принципах, которые позволяют находить условия равновесия, что невозможно с помощью принципов Гиббса и Планка. Полученные результаты применены к теории неравновесных процессов при выводе определяющих соотношений, необходимых для замыкания систем термоэлектромагнитодинамических уравнений. Пособие снабжено большим количеством задач, часть из них дополняет соответствующие главы, а часть является кратким изложением проведенных научных исследований.

Содержание учебного пособия соответствует курсу лекций, которые автор читает в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов и аспирантов технических университетов и вузов, преподавателей высшей школы, научных сотрудников, занимающихся техникой и физикой сплошных сред.

УДК 537.8  
ББК 22.313

ISBN 978-5-7038-4877-7

© Алиев И.Н., 2018  
© Оформление. Издательство  
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

## Предисловие

Настоящее учебное пособие написано на основании курса лекций, который автор читает студентам старших курсов в МГТУ им. Н.Э. Баумана. В основу пособия, посвященного изучению различных свойств сплошной среды, положена монография [1], ставшая библиографической редкостью сразу после выхода в свет. Поскольку эта работа предназначалась для студентов выпускного курса механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, имеющих высокий уровень математической подготовки, промежуточные (и непростые) расчеты в ней не приводились. Именно это обстоятельство, в первую очередь, побудило автора переработать материал монографии, адаптируя его для студентов технических университетов и вузов. Для этого практически все расчеты представлены более подробно (вплоть до взятия определенных интегралов), приведены новые (для студентов технического университета) приемы вычислений. Соответствующие разделы математического аппарата объединены в отдельные параграфы или вставлены фрагментами в основной текст, что, по мнению автора, более целесообразно. Приведено большое количество математических комментариев, особенно в разделах, которые не включены в систематическую математическую программу технических университетов. Автор исходил из того, что подробное изучение методов расчета необходимо при подготовке высококвалифицированных специалистов по направлению «Техническая физика», и рассчитывал максимально облегчить студентам усвоение современной физической теории.

От аналогичных изданий, вышедших за последнее время, данное учебное пособие отличается наличием подробных математических выкладок. Следует при этом отметить отсутствие других учебников, в которых теория сплошной среды столь широко излагалась бы с помощью вариационных принципов.

Глава 1 с некоторыми изменениями взята из работы [2], выпущенной малым тиражом и предназначенной для внутреннего пользования в МГТУ им. Н.Э. Баумана. Ее можно рассматривать как введение в основной материал и рекомендовать также и для студентов младших курсов, уровень математической подготовки которых предполагает хотя бы в первом приближении знание основ вариационного исчисления. В связи с этим большинство математических преобразований в главе 1 проведено в координатной форме, тогда как в остальных главах использована более удобная индексная запись. В главе 2 подробно обсуждается энергетическая концепция в механике сплошной среды. В главе 3 механическая теория дополнена нетрадиционно изложенными положениями феноменологической термодинамики. В главах 4 и 5 приведены теории постоянных электрических и магнитных полей.

Главы 6–8 посвящены введению в квантовую теорию свободных электронов в металлах, а также основам классической теории сверхпроводимости. В главе 9 представлен довольно простой вариант электромагнитной теории медленно движущихся сред и тел.

В конце большинства глав приведены задачи, которые различаются как по объему вычислений, так и по сложности. Блоки задач привязаны к отдельным главам, а не к отдельной теме, что кажется автору более целесообразным. При отборе задач автор старался в контекст каждой из них внести раздел теории, не вошедший в основной материал, или же показать новые математические приемы вычислений. Некоторые задачи, приведенные в учебном пособии, являются упрощенными вариантами законченных научных исследований. Небольшое количество задач не совпадает полностью по тематике с соответствующими главами, но в них или комментируются методы решений, или используются соответствующие физические интерпретации. Некоторые задачи являются оригинальными или взяты из задачников [3, 4], другие заимствованы из различных источников, причем в большинстве случаев истинных авторов указать невозможно.

Следует отметить, что в пособии использована Международная система единиц (СИ), хотя в главах, посвященных электромагнетизму, наиболее целесообразным было бы применение абсолютной (гауссовой) системы единиц, поскольку, по мнению автора, последняя гораздо больше соответствует современным представлениям о природе электромагнитных явлений. Электрическое и магнитное поля связаны между собой, более того, их можно считать симметричными характеристиками одного и того же физического объекта, но при этом размерности всех величин (напряженности и индукции этих полей) разные. Для преодоления этого несоответствия приходится вводить искусственные коэффициенты, обсуждение физического смысла которых продолжается и в настоящее время. Особенно это проявляется при введении понятия скалярного магнитного потенциала и соответствующего нормирующего множителя.

Основная работа по подготовке текста осуществлялась при постоянном руководстве В.В. Толмачева, идеи которого, изложенные в данном учебном пособии, послужили основанием для дальнейшего развития различных отраслей физики: магнетизма, сверхпроводимости и т. п. Следует признать, что недостаточно подробно изложены некоторые важные с точки зрения технического применения разделы, такие как геометрическая акустика поверхностных волн, диспергирование заряженных капель, магнитная гидродинамика и др. Однако сравнительно краткое введение в теорию этих и других физических явлений позволит читателю получить первоначальное представление об объектах исследования.

Описания экспериментов в учебном пособии не приведены, однако автор старался дать представление о техническом применении излагаемых теоретических положений, исходя из того, что эффективные экспериментальные исследования в современной физике возможны только при глубоком понимании основ теории.

Автор выражает признательность заведующему кафедрой физики МГТУ им. Н.Э. Баумана профессору А.Н. Морозову за постоянное внимание к данной работе и помощь в ее издании, а также сотрудникам кафедры профессору А.М. Макарову за ценные замечания, сделанные им при обсуждении некоторых разделов учебного пособия, доценту С.О. Юрченко, постоянные обсуждения с которым рукописи позволили существенно улучшить изложение материала, и другим сотрудникам МГТУ им. Н.Э. Баумана, ознакомившимся с рукописным и электронным вариантами текста, за ряд ценных и полезных критических замечаний.

Рукопись учебного пособия подробно обсуждалась на кафедре общей физики Московского государственного областного университета, возглавляемой профессором Д.Л. Богдановым. Затем была проведена большая работа по редактированию текста. Последовавшие за этим критические замечания, несомненно, способствовали улучшению предлагаемого материала.

Особую признательность хотелось бы выразить безвременно ушедшему из жизни профессору П.П. Полуэктову, автору многих идей, приведенных в этом пособии, за рецензирование данного издания.

Автор также приносит искреннюю благодарность руководству и сотрудникам издательства МГТУ им. Н.Э. Баумана — А.А. Алиеву, без энергичной деятельности которого настоящая работа еще долго не увидела бы свет, и И.В. Мартыновой за поддержку во время подготовки рукописи и неутомимую помощь при редактировании.

Несмотря на то что даже и после переработки материал остается достаточно сложным для большинства студентов технических университетов, автор считает, что предлагаемое учебное пособие предназначено в первую очередь для студентов факультета «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Кроме того, оно представляет интерес для студентов старших курсов и аспирантов соответствующих специальностей технических университетов, научных сотрудников и преподавателей высшей школы.

Автор понимает, что предпринятая попытка объединения в одном сравнительно небольшого объема учебном пособии разных разделов физики не будет свободна от недостатков, и поэтому будет признателен читателям, приславшим свои замечания и предложения по адресу:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.

## Основные обозначения

- $A$  — амплитуда; работа  
 $\vec{A}$  — векторный потенциал магнитного поля (магнитный потенциал)  
 $a$  — поправка Ван-дер-Ваальса  
 $a_{\bar{p}s}$  — оператор уничтожения  
 $a_{\bar{p}s}^+$  — оператор рождения  
 $\vec{B}$  — индукция магнитного поля  
 $b$  — прицельный параметр; поправка Ван-дер-Ваальса  
 $C$  — электрическая емкость; молярная концентрация  
 $c$  — скорость света; удельная теплоемкость; массовая концентрация; постоянная Кюри  
 $\vec{D}$  — электрическая индуктивность (электрическое смещение)  
 $E$  — полная энергия; модуль Юнга  
 $\vec{E}$  — напряженность электрического поля  
 $e_{ij}$  — тензор скоростей деформаций  
 $\vec{e}_i$  — орты осей  
 $F$  — число Фарадея; свободная энергия Гельмгольца  
 $\vec{F}$  — сила, плотность поверхностных сил  
 $\vec{f}$  — массовая плотность сил  
 $G$  — гравитационная постоянная  
 $g$  — точечный магнитный заряд  
 $\vec{g}$  — объемная плотность импульса электромагнитного поля; ускорение свободного падения  
 $g_{\text{св}}$  — объемная плотность механического импульса сверхпроводящих электронов; магнитный термодинамический потенциал Гиббса  
 $H$  — гамильтониан  
 $\vec{H}$  — напряженность магнитного поля  
 $\hat{H}$  — оператор Гамильтона  
 $H_{\text{кр}}$  — критическая напряженность магнитного поля  
 $h$  — массовая плотность энтальпии  
 $h_i$  — криволинейные коэффициенты Ламе  
 $\hbar$  — постоянная Планка  
 $I$  — плотность потока частиц; адиабатический инвариант; сила тока; полный ток  
 $I_i$  — инварианты тензора деформаций  
 $i$  — плотность поверхностного тока



- $J$  — термодинамический поток  
 $\vec{j}$  — плотность объемного тока  
 $\vec{j}_{\text{мол}}$  — молекулярный ток намагничивания  
 $\vec{j}_{\text{пр}}$  — ток проводимости  
 $\vec{j}_p$  — плотность тока поляризованных зарядов  
 $\vec{j}_Q$  — плотность потока теплоты  
 $\vec{j}_s$  — плотность потока энтропии  
 $K$  — кинетическая энергия; коэффициент объемного сжатия  
 $k$  — постоянная Больцмана  
 $\vec{k}$  — волновой вектор; орт оси  $Oz$   
 $L$  — функция Лагранжа; индуктивность; кривая интегрирования  
 $\vec{L}$  — момент импульса  
 $L_{nk}$  — кинетический коэффициент  
 $\vec{M}$  — магнитная поляризация (намагниченность)  
 $\vec{M}_0$  — спонтанная магнитная поляризация (намагниченность)  
 $m$  — масса  
 $N$  — число частиц  
 $N_A$  — число Авогадро  
 $n$  — показатель преломления; число витков соленоида на единицу длины; валентность; концентрация электронов  
 $\vec{n}$  — нормаль к поверхности  
 $n_{\vec{p}s}$  — числа заполнения  
 $\vec{P}$  — вектор Пойнтинга; электрическая поляризация (поляризованность диэлектрика)  
 $P_{ik}$  — перестановочный оператор  
 $\vec{P}_0$  — спонтанная электрическая поляризация  
 $p$  — давление  
 $p_F$  — импульс Ферми  
 $p_{ij}$  — тензор напряжений  
 $\vec{p}$  — импульс  
 $\vec{p}_m$  — магнитный дипольный момент  
 $\vec{p}_s$  — канонический импульс сверхпроводящего электрона  
 $Q$  — теплота; полный заряд; энергия, передаваемая единице объема за единицу времени  
 $Q_{im}$  — полный тензор внутренних напряжений  
 $q$  — электрический заряд  
 $\vec{q}$  — вектор смещения  
 $R$  — радиус; газовая постоянная; электрическое сопротивление  
 $r_0$  — внутреннее электрическое сопротивление источника ЭДС

- $S$  — оптическая длина пути; площадь; функция действия; площадь поверхности; энтропия  
 $s$  — длина пути; массовая плотность энтропии  
 $T$  — период времени; абсолютная температура  
 $T_{кр}$  — критическая температура  
 $T_{im}$  — тензор напряжений Максвелла (тензор натяжений)  
 $t$  — время  
 $U$  — потенциал; потенциальная энергия; внутренняя энергия  
 $U_{ij}$  — матрица преобразования координат  
 $u$  — фазовая скорость; скорость волны действия; массовая плотность внутренней энергии  
 $V$  — объем, удельный объем  
 $\bar{v}$  — скорость  
 $v_{гр}$  — групповая скорость волны  
 $W$  — действие; статистический вес; энергия электрического и магнитных полей  
 $w$  — объемная плотность электромагнитной энергии  
 $\alpha$  — термический коэффициент объемного расширения; коэффициент термоЭДС  
 $\gamma$  — коэффициент поверхностного натяжения  
 $\Delta$  — оператор Лапласа; толщина теплового пограничного слоя  
 $\delta$  — оператор варьирования по Эйлеру; глубина проникновения магнитного поля  
 $\delta(x), \delta(\vec{r})$  — дельта-функция Дирака  
 $\delta_1$  — оператор варьирования свободных токов  
 $\delta^*$  — оператор варьирования по Лагранжу  
 $\delta_{ij}$  — символ Кронекера  
 $\mathcal{E}$  — напряженность электрического поля  
 $\mathcal{E}_i$  — ЭДС индукции  
 $\mathcal{E}_e$  — ЭДС внешнего источника  
 $\mathcal{E}_F$  — энергия Ферми  
 $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость  
 $\varepsilon_{ijk}$  — символ Леви-Чивита  
 $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная  
 $\zeta$  — объемная вязкость  
 $\zeta(\vec{r})$  — множитель Лагранжа  
 $\varsigma$  — термический коэффициент линейного расширения  
 $\eta$  — динамическая вязкость  
 $\eta_{ik}$  — тензор деформаций  
 $\theta$  — полярный угол; эмпирическая температура; энергетическая температура

- $\kappa$  — теплопроводность  
 $\Lambda$  — постоянная Лондонов  
 $\lambda$  — длина волны; коэффициент Ламе; электропроводимость; линейная плотность электрического заряда  
 $\lambda(\vec{r})$  — множитель Лагранжа  
 $\mu$  — коэффициент Ламе; молярная масса; парциальный химический потенциал; сдвиговая вязкость; магнитная проницаемость  
 $\mu_0$  — магнитная постоянная  
 $\nu$  — частота волны; коэффициент Ламе; удельный объем жидкости; кинематическая вязкость  
 $\nu_{\gamma\alpha}$  — стехиометрический коэффициент  
 $\xi$  — смещение частиц среды  
 $\Pi$  — механическая потенциальная энергия  
 $\pi_{ij}$  — тензор вязких напряжений  
 $\rho$  — плотность среды  
 $\rho_{св}$  — объемная плотность электрических зарядов сверхпроводящих электронов  
 $\rho_e$  — объемная плотность сторонних электрических зарядов  
 $\rho_m$  — объемная плотность магнитных зарядов  
 $\rho_p$  — объемная плотность связанных электрических зарядов  
 $\sigma$  — эффективное сечение рассеяния; поверхностная плотность заряда; элемент поверхности; проекция спина; проводимость  
 $\sigma_e$  — поверхностная плотность сторонних электрических зарядов  
 $\sigma_m$  — поверхностная плотность магнитных зарядов  
 $\sigma_p$  — поверхностная плотность связанных электрических зарядов  
 $\sigma_s$  — объемная интенсивность источников энтропии  
 $\tau$  — характерное время; период осцилляций  
 $\vec{\tau}$  — единичный вектор, касательный к траектории (поверхности)  
 $\Phi$  — поток векторного поля; магнитный поток  
 $\Phi_0$  — электрический потенциал термостата  
 $\Phi_C$  — флюксонид  
 $\varphi$  — потенциал электрического поля; фаза волны; механический потенциал  
 $\chi$  — термодинамическая сила; сверхпотенциал  
 $\chi_e$  — диэлектрическая восприимчивость  
 $\chi_m$  — магнитная восприимчивость  
 $\psi$  — скалярная характеристика волны; волновая функция; массовая плотность свободной энергии; скалярный магнитный потенциал, потокосцепление  
 $\psi^*$  — комплексное сопряжение

- $\psi^+$  — эрмитово сопряжение  
 $\Omega$  — телесный угол; вероятность макросостояния; термодинамический потенциал  
 $\omega$  — угловая частота, угловая скорость  
 $\omega_L$  — частота Лармора  
 $\omega_\gamma$  — степень протекания химической реакции  
 $\nabla$  — оператор Гамильтона  
 $\square$  — оператор Даламбера  
 $\text{Div } i$  — дивергенция векторного поля, заданного на поверхности  
 $\text{Grad } \lambda$  — градиент скалярного поля, заданного на поверхности  
 $\text{sp}$  — след

## Введение

В курсе «Термодинамика и электродинамика сплошных сред» излагаются основные физические принципы построения наиболее широко распространенных моделей сплошной среды в современной механике, а также теория пондеромоторных сил, возникающих в электрических и магнитных полях.

Существуют различные подходы к описанию моделей сплошных сред. В данном учебном пособии выбран *принцип локального равновесия движущейся сплошной среды*: при любых движениях среды очень малые ее частицы участвуют в строго обратимых термодинамических процессах, описываемых стандартной термодинамикой равновесных состояний и обратимых процессов.

Таким образом, обратимость процессов рассматривается как непрерывная последовательность равновесных состояний. Можно сказать, что произвольное неравновесное состояние тела — это совокупность равновесных состояний его отдельных малых частей, примыкающих одна к другой и не находящихся в равновесии.

Кроме принципа локального равновесия (применяемого, например, при выводе уравнений гидродинамики) для построения моделей движущихся сплошных сред широко используются также и другие физические принципы, такие как *принципы Ферма, наименьшего действия, отвердевания* и др.

При описании равновесных состояний сплошной среды или тела как при отсутствии, так и при наличии электрических и магнитных полей используется *концепция внутренней энергии тела*, причем подробно прослеживается эмпирический способ построения функций массовых плотностей внутренней энергии и энтропии сплошного тела в зависимости от равновесных состояний однородного вещества, из которого образовано физическое тело.

Для вывода условий равновесия состояний сплошного тела применяются *термо- и электродинамические принципы виртуальных работ*. Эти вариационные принципы, обобщающие, с одной стороны, принцип виртуальных перемещений классической механики, а с другой стороны, термодинамические принципы Гиббса и Планка, позволяют, во-первых, выделить среди возможных допустимых налагаемыми связями виртуальных, или мысленно воображаемых, состояний сплошного тела то состояние, которое действительно является равновесным при данных условиях, и, во-вторых (что не менее важно), найти выражения для тензора внутренних напряжений, используя параметры, определяющие локальные термодинамические состояния малых частей тела.

Термо- и электродинамические принципы виртуальных работ позволяют находить также и условия равновесия, которые невозможно получить,

используя принципы Гиббса и Планка. В частности, с помощью принципов виртуальных работ легко определить условия термодинамического равновесия неоднородно деформированного упругого тела, произвольно нагруженного внешними электрическими и магнитными силами. Однако, применяя эти принципы, удастся рассмотреть только специальные неоднородные равновесные состояния жидкостей и газов, когда они находятся в заданных внешних потенциальных силовых полях. Термо- и электродинамический принципы виртуальных работ являются основными принципами гидротермо-электромагнитостатики изучаемых сплошных тел. Они дают полную информацию о внутренних напряжениях и силах, действующих в равновесном статическом сплошном теле. Располагая такой информацией, легко вывести уравнения движения рассматриваемого тела. Для этого необходимо только воспользоваться общими законами сохранения массы, импульса, энергии, которые математически строго можно выразить с помощью соответствующих уравнений локальных балансов.

Локальные уравнения балансов массы, импульса и энергии образуют своего рода рамки, в которые помещается картина любого реального движения. В то же время эта картина становится содержательной лишь тогда, когда система указанных уравнений замкнута. Проблема замыкания этих уравнений решается на основании принципов термодинамики неравновесных процессов, сформулированных в виде формальной теории Онсагера. Согласно этой теории, в каждой конкретной ситуации необходимо составлять уравнения локального баланса энтропии рассматриваемого сплошного тела и на основании анализа формы появляющегося в этом уравнении локального источника энтропии строить соответствующие дополнительные определяющие соотношения, которые устанавливают связи между неизвестными потоками массы, импульса и энергии и других физических величин и пространственными градиентами параметров, характеризующих локальные равновесные состояния малых частей тела.

Рассчитанные по теории Онсагера определяющие соотношения замыкают систему уравнения локальных балансов и позволяют описывать сложные движения сплошного тела, учитывая наличие в нем разнообразных физико-химических процессов, взаимодействие электрических зарядов и электрической поляризации тела с имеющимися электрическими полями и взаимодействия магнитной поляризации тела и электрических токов в нем с имеющимися магнитными полями. Для полного описания движения сплошного тела требуется также знать соответствующие граничные и начальные условия.

Отметим, что в данном учебном пособии основным объектом анализа является *сплошное тело*, а не широко используемая в гидродинамике и газодинамике *сплошная среда*. Тем самым подчеркивается ограниченность исследуемого объекта в пространстве. В этом смысле сплошную среду можно рассматривать как предельный случай протяженного во всех или некоторых направлениях сплошного тела. Это позволяет разрешить трудности, связанные с правильным учетом граничных условий.

Следует отметить также особые преимущества используемого в учебном пособии *феноменологического подхода* по сравнению с более универсальным

физическим подходом, основанным на атомно-молекулярных представлениях о веществе. Феноменологический подход применим к описанию движений любых сплошных тел и сред и представляет собой законченную математическую теорию. Вместе с тем при исследовании любого конкретного сплошного тела необходимо знать уравнение состояния вещества и кинетические коэффициенты, входящие в определяющие соотношения теории Онсагера. Для этих уравнений и коэффициентов феноменологический подход не дает универсальных выражений, следовательно, они не могут быть определены в рамках чисто феноменологической теории. Выбор того или иного вида этих уравнений и величин составляет суть моделирования движения сплошных тел и сред в рамках феноменологического подхода. При этом необходимо обращаться как к экспериментальным данным, так и к результатам, полученным на основании микроскопических атомно-молекулярных теорий вещества. Обоснованность той или иной принимаемой в конечном счете модели сплошной среды должна быть доказана путем сопоставления результатов решений основных уравнений принятой модели с результатами соответствующих экспериментов.

## Глава 1. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ОПТИКО - МЕХАНИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ

Существует два основных физических подхода к описанию оптических явлений. Возникшую в XVII в. благодаря трудам П. Ферма и Х. Гюйгенса практически одновременно с классической механикой И. Ньютона приближенную, но все же хорошо описывающую эксперимент теорию называют *геометрической оптикой*. Другой, физически более адекватный эксперименту подход, создатели которого Т. Юнг и О. Фореель работали в первой трети XIX в., называют *волновой оптикой*. Несмотря на приближенный характер геометрической оптики (в рамках этой теории полностью пренебрегают длиной волны света), она и в настоящее время служит основой инженерного подхода и используется при конструировании любого оптического прибора. Основными понятиями геометрической оптики являются «луч» и «волновой фронт», точнее, взаимно ортогональные семейства лучей и волновых фронтов.

### 1.1. Геометрическая оптика неоднородных сред

Введем понятие оптически неоднородной среды с заданным показателем преломления  $n(x, y, z)$ . *Оптически неоднородной средой* можно считать пространство внутри любого оптического прибора, который состоит из набора линз. В этом случае  $n(x, y, z)$  является сложной кусочно-непрерывной (точнее, кусочно-постоянной) функцией. Оптически неоднородная среда характеризуется локальной фазовой скоростью света  $u(x, y, z)$ , связанной с показателем преломления простым соотношением

$$n(x, y, z) = \frac{c}{u(x, y, z)}.$$

Ясно, что всегда  $u < c$  (где  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с — скорость света в вакууме), и поэтому  $n > 1$ .

Задача о прохождении лучей в оптически неоднородной среде решается с помощью **принципа Ферма** (1657). Формулируется этот принцип следующим образом: лучи или геометрическая кривая, по которой распространяется свет из точки  $A$  в точку  $B$ , отличается от всех других мыслимых геометрических траекторий тем, что время распространения света вдоль истинного пути **минимально**:



## Глава 2. МЕХАНИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ РАБОТ

Основным свойством сплошного тела является его пространственная протяженность, т. е. в каждый момент времени тело занимает в пространстве некоторый объем  $V$ , ограниченный замкнутой поверхностью  $S$ . Будем полагать, что тело способно механически деформироваться. В настоящей главе с энергетической точки зрения рассмотрены статически напряженные состояния тел, на которые действуют заданные внешние силы, и возникающие при этом внутренние напряжения. При исследовании произвольной механической системы, находящейся предположительно в состоянии равновесия, используют *механический принцип виртуальных работ*, который, хотя и в довольно абстрактном виде, формулирует единственное универсальное необходимое и достаточное условие любого активного механического равновесия, применимое во всех ситуациях. Принцип виртуальных работ называется механическим, поскольку подчеркивается, что он является общим физическим принципом, применимым к состоянию не только механических, но и тепловых, диффузионных, химических, электрических, магнитных равновесий. Отметим, что речь идет именно о принципе, т. е. о положении, взятом за основу рассуждений без доказательства.

Согласно этому принципу, рассмотрены возможные бесконечно малые смещения системы из начального состояния в близкие соседние, не обязательно равновесные, состояния и определены соответствующие им работы внешних и внутренних сил, так называемые виртуальные работы. С помощью механического принципа виртуальных работ и принципа локального равновесия внутренних напряжений, возникающих в движущемся сплошном теле или среде при различных нагрузках в статически напряженных состояниях, получены уравнения идеальной гидрогазодинамики и идеальной теории упругости с учетом инерционных свойств среды. Следует отметить, что это оправдано только при довольно медленных изменениях внешних сил, когда за характерные интервалы времени их изменений тело успевает прийти в мгновенное равновесное состояние покоя.

### 2.1. Механическое равновесие сплошного тела (среды)

**Условия равновесия жидкой или газообразной среды.** Рассмотрим жидкую или газообразную среду объемом  $V$ , ограниченную гибкой оболочкой с площадью поверхности  $S$ . Характеристиками среды, зависящими от координат  $\vec{r}$  ее точек, являются плотность  $\rho(\vec{r})$ , описывающая степень сжатия, и давление  $p(\vec{r})$ , связанное с внутренними напряжениями. На среду действуют

### Глава 3. ТЕПЛОВЫЕ ЭФФЕКТЫ

В главе 2 были рассмотрены состояния механического равновесия напряженно-деформированного сплошного тела и внутренние механические напряжения, возникающие в нем под действием различных заданных внешних сил и нагрузок. При этом предполагалось, что тело абсолютно нетеплопроводно. Любое тепловое состояние тела с произвольным распределением температуры являлось равновесным в тепловом отношении. Данная глава посвящена тепловым эффектам в сплошных телах. Сначала чисто феноменологически опишем состояния теплового равновесия и способы их изменения. Для этого введем понятия температуры, теплоты и рассмотрим закон сохранения теплоты в контактирующих телах. Отметим, что этот закон подобен закону сохранения суммарной массы жидкости, заполняющей два или несколько сообщающихся сосудов и способной свободно перетекать из одного сосуда в другой. Эта аналогия позволяет понять физическую сущность введенных термодинамических понятий. В рамках такой аналогии теплоту можно рассматривать как особую жидкость («теплород»), способную перетекать от тела к телу при их непосредственном тепловом контакте, а температуру тел можно сравнить с «уровнем» этой жидкости в среде, подобно уровню обычной жидкости, находящейся в сосуде. При тепловом контакте температура тел выравнивается аналогично выравниванию уровней жидкостей в сообщающихся сосудах.

Кроме того, рассмотрим расширенное понятие внутренней энергии, по аналогии с которой введем понятие энтропии. Исходя из анализа выражения для объемного источника энтропии удастся обосновать теорию Л. Онсагера неравновесных состояний. В соответствии с этой теорией введем понятия термодинамической силы и сопряженного с ней термодинамического потока. Они не обязательно являются векторами, а могут быть и тензорными величинами любого ранга. В общем случае линейные соотношения для изотропной системы в соответствии с так называемой теоремой Кюри могут связывать между собой лишь величины одинаковой тензорной размерности.

Из условия равновесия для внутренних механических напряжений в газообразном или жидком теплопроводном теле, находящемся в состоянии покоя, получена полная система уравнений гидрогазодинамики теплопроводного вязкого сплошного тела. Аналогично из соотношений для внутренних механических напряжений, которые возникают в упругом твердом теле, находящемся в статически напряженном состоянии, получена система уравнений, описывающих теплопроводное нелинейное упругое тело.

## Глава 4. ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Все количественные данные об электрических явлениях были получены путем экспериментальных измерений механических сил, которые действуют между различными телами с помещенными на них электрическими зарядами и телами, имеющими спонтанную или индуцированную электрическую поляризацию. *Спонтанной* называется поляризация, внутренне присущая телу, а *индуцированной* — поляризация, возникающая в теле при внесении его во внешнее электрическое поле. Материал настоящей главы и особенно последующей, посвященной магнетизму, основан на опытных законах Кулона, Ампера, Фарадея. На их базе построена вся теория электромагнетизма сплошных сред, включая уравнения Максвелла. Такой подход более логичен, так как соответствует естественному (и историческому) развитию теории электромагнетизма.

Рассмотрим совокупность находящихся в состоянии покоя тел, в объемах и на поверхностях которых имеются электрические заряды с заданными объемными и поверхностными плотностями, а также электрически поляризованные тела с известной объемной плотностью поляризации. В окружающем тела пространстве и в них самих возникает постоянное электрическое поле, созданное этими зарядами и поляризованными телами. Поле воздействует на создавшие его тела механическими силами. Таким образом, электрическое поле можно рассматривать в качестве посредника, осуществляющего механическое взаимодействие наэлектризованных тел. Напряженность возникающего при этом электрического поля равна векторной сумме напряженностей, создаваемых отдельными телами. В этом заключается принцип суперпозиции постоянных электрических полей, который является независимым постулатом, дополняющим основные законы электростатики. Понятие энергии постоянного электрического поля и вывод соответствующего выражения для нее основаны на физической идее, суть которой сводится к следующему. Энергию любой системы необходимо рассматривать как запасенную в ней механическую работу, затраченную на создание исследуемого ее состояния. Поэтому для вывода формулы энергии требуется рассмотреть какой-либо механический процесс, при котором в электрической системе совершается механическая работа. Именно это положение и используется в настоящей главе, а также в главе 5 при вычислении энергии магнитного поля. На основе полученного выражения с помощью электрического принципа виртуальных работ и с учетом условий электрического, механического и теплового равновесия жидких и твердых теплопроводных деформируемых диэлектриков и проводников получены условия равновесного распределения электрических зарядов.

## Глава 5. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Как и в случае электрического поля, все известные количественные сведения о магнитных явлениях были получены исключительно путем экспериментальных измерений механических сил, действующих между проводниками, по которым текут электрические токи, постоянными магнитами и магнетиками, обладающими индуцированным магнетизмом.

Тела с заданной спонтанной поляризацией (постоянные магниты), тела, по которым текут постоянные токи, и тела, способные поляризоваться во внешнем поле (магнетики), создают постоянное магнитное поле. Причем это поле оказывает определенное механическое воздействие как на тела, реально его создавшие (постоянные магниты и тела с токами), так и на тела с индуцированной поляризацией, стремясь переместить их и вызвать в них деформацию. Таким образом, по аналогии с электрическим полем магнитное поле играет роль посредника, через которого осуществляются механические взаимодействия магнитов, проводников с токами и магнетиков. В связи с этим отдельно рассматриваем магнитное поле, порождаемое магнитной поляризацией, и магнитное поле, порождаемое постоянным электрическим током. Полное магнитное поле, согласно принципу суперпозиции, получается простым векторным суммированием указанных полей. Основные уравнения магнитостатики выражают исходные эмпирические законы Кулона и Био — Савара. Этим основным уравнений вполне достаточно, чтобы иметь полное представление обо всех свойствах магнитного поля. Однако часто оказывается, что вычислить получаемые из этих законов интегралы при заданных распределениях магнитной поляризации и электрических токов в телах весьма затруднительно и гораздо проще учитывать свойства магнитного поля, зная, что оно удовлетворяет основным дифференциальным уравнениям магнитостатики, выражающим эти свойства в наиболее простом виде.

В главе 5 вычисление энергии магнитного поля проведено аналогично вычислению энергии электрического поля в главе 4. Условия теплового, механического и магнитного равновесия твердого или жидкого магнетика с «вмороженными» в него или свободно текущими по его телу объемными и поверхностными токами исследованы с использованием магнитного принципа виртуальных работ.

Проведено сравнение поведения кольцеобразного тела (тора) со свободными токами в магнитостатике и поведения обычного заряженного проводника в электростатике. В этом случае роль полного электрического заряда проводника играет магнитный поток через отверстие тора.

## Глава 6. СВОБОДНЫЕ ЭЛЕКТРОНЫ В НОРМАЛЬНОМ МЕТАЛЛЕ

Явление сверхпроводимости, основы которого будут изложены в главе 7, связано с необычным поведением электронов в металле, которое отличается от их поведения в нормальном металле. Для того чтобы понять суть этого явления, необходимо ясно представлять, как ведут себя коллективизированные электроны в нормальном металле.

Сначала будут рассмотрены основы современного квантово-механического описания системы свободных электронов в обычном металле при произвольных температурах. Дальнейшее изложение будет посвящено вычислению термодинамических характеристик многоэлектронной системы невзаимодействующих электронов.

Введенный математический аппарат вторичного квантования применен для вывода диамагнетизма Ландау системы нормальных электронов.

### 6.1. Квантовая механика системы невзаимодействующих электронов

Свободные электроны в нормальном металле образуют сложную квантовую многоэлектронную систему тождественных частиц, взаимодействующих между собой и с решеткой. Описать эту систему в рамках классической физики невозможно. Однако можно с самого начала сделать ряд физически разумных, хотя и довольно грубых, упрощающих предположений. Прежде всего следует выяснить, какими свойствами обладает изолированная система свободных электронов в металле, если пренебречь их взаимодействием с остальными электронами металла и с атомными ионными остовами его кристаллической решетки. Поскольку вовсе не учитывать влияние атомных остовов невозможно, будем считать, что свободные электроны движутся в очень большом объеме  $V$ , имеющем, например, форму куба с длиной ребра  $L = V^{1/3}$ , и никогда не покидают этот объем (так как свободные электроны не могут вылететь за пределы металла). Предположим также, что свободные электроны не взаимодействуют между собой, т. е. являются идеальной системой тождественных частиц.

Учтем, что каждый электрон обладает спином, равным  $1/2$ , проекция которого, например, на ось  $Oz$  в пространстве декартовой системы может принимать только два значения:  $\sigma = \pm 1/2$ .

## Глава 7. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

Приступая к изучению основных положений теории сверхпроводимости, необходимо иметь в виду, что физика сверхпроводимости не является чем-то экзотическим и не стоит особняком в современной физике. Наоборот, она находится в самом центре интересов современной физической науки, и в ней широко используются физические представления и модели, которые составляют фундамент современного физического знания.

Изучение физики сверхпроводимости основано на использовании термодинамики, электродинамики, квантовой механики, так же как и изучение других современных физических теорий. Тем не менее для понимания современной теории сверхпроводимости требуется более обстоятельное и более полное знакомство с некоторыми специальными разделами общезначимых теорий. Иногда необходимые сведения даже выходят за рамки обычных университетских курсов. Однако фундаментальные явления в физике сверхпроводимости легко понять, опираясь на простые теоретические представления, подробно изложенные в настоящей главе. В рассматриваемой здесь элементарной теории сверхпроводимости, которая успешно объясняет поведение больших, массивных сверхпроводящих образцов, помещенных во внешнее однородное магнитное поле, пренебрегают всеми деталями специфических поверхностных явлений, т. е. физикой тонкого приповерхностного слоя, в который может проникнуть магнитное поле. Другими словами, считается, что объемные сверхпроводящие токи равны нулю и что все сверхпроводящие токи являются поверхностными токами, текущими по бесконечно тонким поверхностям сверхпроводников.

### 7.1. Основные свойства сверхпроводников

Сверхпроводимость — одно из наиболее удивительных явлений в природе — была открыта Х. Камерлингом-Оннесом в 1911 г. при исследовании температурной зависимости электрического сопротивления ртути. При температуре около 4 К сопротивление ртути резко уменьшалось до столь малого значения, что его невозможно было измерить. Столь сильное уменьшение электрического сопротивления ртути позволило назвать новое состояние, в которое ртуть переходит при понижении температуры, *сверхпроводящим*, а температуру, при которой осуществляется этот переход, *температурой перехода в сверхпроводящее состояние*, или *критической температурой*  $T_{кр}$ . В последующие годы сверхпроводимость была обнаружена у большого числа металлов, соединений и сплавов.

## Глава 8. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ЛОНДОНОВ И ТЕРМОДИНАМИКА ГОРТЕРА — КАЗИМИРА

Как хорошо известно, последовательная теория сверхпроводимости должна быть квантовой. Однако феноменологическая электродинамика сверхпроводников может быть построена на базе классических представлений, причем, несмотря на крупные успехи в объяснении явления сверхпроводимости, элементарная классическая теория, изложенная в главе 7, требует существенных уточнений и усовершенствования. Во-первых, условие тождественного равенства нулю магнитной индукции  $\vec{B}$  во всем объеме сверхпроводника не выполняется с абсолютной точностью. В действительности постоянное магнитное поле проникает в тонкие приповерхностные слои массивных сверхпроводников на глубину примерно  $10^{-5} \dots 10^{-6}$  см, поэтому эффект проникновения магнитного поля проявляется особо сильно в сверхпроводящих тонких пленках или цилиндрах. Во-вторых, условие равенства нулю напряженности электрического поля внутри массивного сверхпроводника справедливо только для статических электрических полей. Переменные поля, начиная с частот  $10^{12} \dots 10^{13}$  Гц, способны проникать в приповерхностные слои массивных сверхпроводников и в сверхпроводники малых размеров, в частности сверхпроводящие пленки. Таким образом, в сверхпроводящих пленках нарушаются сразу оба условия элементарной теории  $\vec{E} = 0$  и  $\vec{B} = 0$ . В связи с этим при изучении процессов, происходящих в тонких приповерхностных слоях массивных сверхпроводников или в сверхпроводящих тонких пленках, требуется более внимательный подход, чем может обеспечить элементарная теория, основы которой были заложены в 30-е годы XX в.

В 1935 г. вышла совместная статья 15 авторов (практически всех ученых, занимавшихся в то время изучением сверхпроводимости), в которой были обозначены существующие на тот момент достижения и перспективы в указанной области. Одним из ее авторов был Ф. Лондон. В том же году он с братом Х. Лондоном представил нетривиальную теорию сверхпроводимости приповерхностных слоев, которая оказалась в состоянии объяснить появление базовой величины — глубины проникновения постоянного магнитного поля в толщу сверхпроводника. Лондоны исходили из простой идеи, казавшейся естественной после открытия эффекта Мейсснера в 1935 г.: в теории сверхпроводимости в первую очередь надо учитывать свойство сверхпроводников выталкивать на поверхность образца постоянные магнитные поля (т. е. свойство идеального диамагнетика), а уже затем объяснять свойство нулевого электрического сопротивления или обращения в бесконечность электропроводности. В параграфе 5.5 при вычислении равновесного распределения

## Глава 9. МЕДЛЕННО ДВИЖУЩИЕСЯ СРЕДЫ

В главах 7 и 8 были рассмотрены постоянные электрические и магнитные поля в неподвижных телах и средах. Полученные при этом основные уравнения описывают все физические свойства этих полей. При переходе к их изучению в движущихся средах необходимо учитывать два важных электромагнитных явления: электромагнитную индукцию и магнитоэлектрический эффект. Явление электромагнитной индукции заключается в том, что изменяющееся магнитное поле порождает электрическое поле, а обратный этому явлению магнитоэлектрический эффект — в том, что изменяющееся электрическое поле порождает магнитное поле. Оба указанных явления учитывают с помощью системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Объединив эту систему уравнений с уравнениями гидродинамики теплопроводного вязкого сплошного тела или с уравнениями, описывающими теплопроводное нелинейное упругое тело, получим систему уравнений медленно движущихся сплошных тел и сред в общем случае.

### 9.1. Уравнения Максвелла

**Закон Фарадея.** Выведем закон электромагнитной индукции с учетом требования сохранения полной энергии электромагнитного поля. Пусть по соленоиду длиной  $l$ , радиусом  $r$  и с числом витков  $N$  (рис. 9.1) протекает ток  $I$ , поддерживаемый источником с внутренним сопротивлением  $r_0$  и ЭДС  $\mathcal{E}_0$ . Соленоид изнутри плотно прилегает к цилиндрической поверхности, по которой протекают круговые замкнутые токи с поверхностной плотностью  $i = nI$ , где  $n = N/l$  — число витков на единицу длины.

Индукция однородного внутреннего магнитного поля (в приближении достаточно длинного соленоида), как известно, имеет вид

$$B = \mu_0 \mu n I = \mu_0 \mu i. \quad (9.1)$$

В соответствии с законом Ампера на единицу площади цилиндрической поверхности действует сила

$$F = \frac{1}{2} i B = \frac{1}{2} \mu_0 \mu i^2.$$

Тогда элементарная работа этих сил за время  $dt$  при увеличении радиуса цилиндра на  $dr$

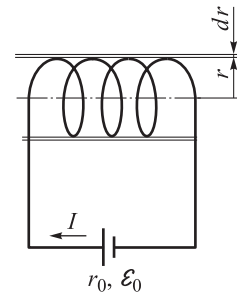


Рис. 9.1. Схема, поясняющая явление электромагнитной индукции



## Заключение

В предлагаемом учебном пособии рассмотрен широкий круг вопросов из различных разделов физики, которые в конечном результате сведены к основным соотношениям, описывающим гидротермоэлектромагнитостатику (и динамику) сплошных тел и сред. Ограниченный объем пособия обусловил выбор объектов исследования: рассмотрены только простые среды.

Сложные модели сплошных сред, такие как многоскоростная модель газовых или жидких смесей, компоненты которых либо химически инертны, либо могут вступать в определенные химические реакции, двухтемпературная в рамках механики сплошной среды модель плазмы с различной температурой электронной и ионной компонент, а также двухскоростная модель сверхтекучего гелия, для которых, строго говоря, принцип локального термодинамического равновесия несправедлив, выходят за рамки настоящего пособия. Однако автор полагает, что читатель, внимательно ознакомившийся с приведенным материалом, сможет самостоятельно применить изложенные методы и принципы к таким средам.

Автор надеется, что, несмотря на математические трудности, данное учебное пособие усилит интерес читателей к рассматриваемым вопросам, и они смогут использовать полученные знания в своей научной и учебной деятельности.

## Литература

### Основная

1. *Толмачев В.В., Головин А.М., Потапов В.С.* Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1988. 232 с.
2. *Алиев И.Н., Толмачев В.В.* Оптико-механическая аналогия и уравнение Шредингера. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. 80 с.
3. *Алиев И.Н., Толмачев В.В.* Сборник задач по курсу общей физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 36 с.
4. *Алиев И.Н., Толмачев В.В.* Сборник задач по электродинамике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. 59 с.

### Дополнительная

5. *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики. М.: URSS, 2010. 600 с.
6. Вариационные принципы механики: Сб. статей классиков науки / под ред. Л.С. Полака. М.: Физматлит, 1959. 930 с.
7. *Зоммерфельд А.* Механика. М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1947. 392 с.
8. *Зоммерфельд А.* Механика деформируемых сред. М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1954. 492 с.
9. *Зоммерфельд А.* Термодинамика и статистическая физика. М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1955. 482 с.
10. *Зоммерфельд А.* Электродинамика. М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1958. 421 с.
11. *Глаголев К.В., Морозов А.Н.* Физическая термодинамика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 269 с.
12. *Толмачев В.В.* Квазиклассическое приближение в квантовой механике. М.: Изд-во МГУ, 1980. 185 с.
13. *Толмачев В.В.* Квазиклассическая теория модельной химической реакции. М.: Изд-во МГУ, 1981. 119 с.
14. *Кадоццев Б.Б.* Динамика и информация // УФН. 1994. Т. 164. № 5. С. 449–530.
15. *Алиев И.Н.* Геометрическая акустика капиллярных волн // Магнитная гидродинамика. 1990. № 4. С. 109–117.
16. *Алиев И.Н.* Приближение геометрической акустики для поверхностных волн // Журнал прикладной механики. 1992. № 3. С. 69–73.
17. *Алиев И.Н., Самедова З.А.* Оптико-механическая аналогия и траектория кванта // Вестник МГОУ. 2015. № 1. С. 32–36.

18. *Алиев И.Н., Копылов И.С.* О электродинамической модели Лондонов и теории Гортера — Казимира // *Поверхность*, 2017. № 2. С. 64–72.
19. *Алиев И.Н., Полуэктов П.П.* Простая модель эффекта Ферми — Паста — Улама // *Нелинейный мир*. 2015. № 3. Т. 13. С. 53–55.
20. *Алиев И.Н., Докукин М.Ю.* Применение двойного квантования в диамагнетизме Ландау // *Вестник МГТУ*. 2016. № 4. С. 14–27.
21. *Докукин М.Ю.* Концепция современного естествознания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 145 с.
22. *Алиев И.Н., Докукин М.Ю.* Термодинамика системы невзаимодействующих свободных электронов // *Вестник МГОУ*. 2016. № 3. С. 57–69.
23. *Алиев И.Н., Меликянц Д.Г.* Магнетизм и поверхностные токи сверхпроводящего шара // *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2016. Т. 21. № 9. С. 13–19.
24. *Алиев И.Н., Самедова З.А., Докукин М.Ю.* Межфазное термодинамическое равновесие магнетиков // *Динамика сложных систем*. 2016. Т. 10. № 4. С. 3–9.
25. *Алиев И.Н., Самедова З.А.* Принцип минимума энергии поверхностных сверхпроводящих токов // *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2017. Т. 22. № 1. С. 30–36.

## Именной указатель

- Аббе Эрнст (1840–1905) 21  
Абрагам Макс (1875–1922) 325  
Авогадро Амедео (1776–1856) 151  
Альманси (Альманзи) Эмилио (1869–1948) 79  
Ампер Андре Мари (1775–1836) 154, 251
- Био Жан Батист (1774–1862) 208, 214, 215, 335, 348  
Блэк Джозеф (1728–1799) 107, 148  
Больцман Людвиг (1844–1906) 115, 150, 268, 342  
Бор Нильс Хенрик Давид (1885–1962) 44, 45, 327  
Браун Карл Фердинанд (1850–1918) 373  
Бройль Луи де (1892–1987) 43  
Брунс Генрих Эрнст (1848–1919) 21, 25
- Ван-дер-Ваальс Ян Дидерик (1837–1923) 145  
Вант-Гофф Якоб Хендрик (1852–1911) 149  
Вейль Герман (1885–1955) 375
- Галилей Галилео (1564–1642) 351  
Гамильтон Уильям Роуан (1805–1865) 21, 25, 28, 30, 31, 33, 35, 43, 190, 194, 278  
Гартман Юлиус (1881–1951) 386  
Гаусс Карл Фридрих (1777–1855) 76, 80, 87, 103, 156, 157, 163–165, 168, 171, 204, 210, 213, 219, 239, 240, 242, 290, 387  
Гельмгольц Герман Людвиг Фердинанд (1821–1894) 27, 28, 268, 275,  
Гиббс Джозайя Уиллард (1839–1903) 117, 118, 123, 126, 133, 247, 249, 258, 269, 317, 365  
Гортер Корнелиус Якоб (1907–1980) 342–345  
Гук Роберт (1635–1703) 81, 96, 141  
Гюйгенс Христиан (1629–1695) 16
- Даламбер Жан Лерон (1717–1783) 374, 375  
Джоуль Джеймс Прескотт (1818–1889) 178  
Дирак Поль Адриен Морис (1902–1984) 103, 261, 330  
Друде Пауль Карл Людвиг (1863–1906) 319, 342, 343  
Дюгем (Дюэм) Пьер Морис Мари (1861–1916) 123  
Дюлонг Пьер Луи (1785–1838) 276
- Зеeman Питер (1865–1943) 65  
Зоммерфельд Арнольд Иоганнес Вильгельм (1868–1951) 44, 45, 319, 327, 342, 343

- Ирншоу Самуэль (1805–1888) 195
- Кадомцев Борис Борисович (1928–1998) 142  
Казимир Хендрик (1909–2000) 342–345  
Камерлинг-Оннес Хейке (1853–1926) 284  
Карно Никола Леонар Сади (1796–1832) 109, 110, 112, 152, 153  
Кеплер Иоганн (1571–1630) 200  
Кирхгоф Густав Роберт (1824–1887) 177  
Клапейрон Бенуа Поль Эмиль (1799–1864) 78  
Клаузиус Рудольф Юлиус Эмануэль (1822–1888) 112, 132  
Коши Огюстен Луи (1789–1857) 80, 81, 95, 129  
Кронекер Леопольд (1823–1891) 77, 265  
Кулон Шарль Огюстен (1736–1806) 154–156, 158, 203, 205, 207, 214, 335, 346, 375  
Кюри Пьер (1859–1906) 258
- Лагранж Жозеф Луи (1736–1813) 27, 33, 82, 124, 173, 200, 238, 241, 243, 248, 278, 302  
Ламе Габриэль (1795–1870) 81, 93, 99, 202  
Ландау Лев Давидович (1908–1968) 283, 346  
Ланжевэн Поль (1872–1946) 342  
Лаплас Пьер Симон (1749–1827) 158, 206, 240, 261, 297, 329, 348, 374  
Лармор Джозеф (1857–1942) 66  
Леви-Чивита Туллио (1873–1941) 77  
Лежандр Адриен Мари (1752–1833) 192  
Ленц Эмилий Христианович (1804–1865) 373  
Леонтович Михаил Александрович (1903–1981) 137  
Ле Шателье Анри Луи (1850–1936) 373  
Лондон Фриц Вольфганг (1900–1954) 296, 316–320, 325–331, 335, 337  
Лондон Хайнц (1907–1970) 296, 316, 318–320, 325–328, 330, 331, 335, 337  
Лоренц Хендрик Антон (1853–1928) 33, 220, 239, 303, 342, 343, 351, 360, 375, 385  
Лоренц Эдвард Нортон (1917–2008) 144, 145
- Маклорен Колин (1698–1746) 141, 338, 339  
Максвелл Джеймс Клерк (1831–1879) 24, 171, 173, 207, 244, 245, 278, 288–290, 296, 317, 320, 326, 337, 340, 349–391  
Мандельштам Леонид Исаакович (1879–1944) 137  
Мейсснер Вальтер Фриц (1882–1974) 285, 286, 292, 293, 296, 316  
Менделеев Дмитрий Иванович (1834–1907) 78  
Минковский Герман (1864–1909) 356, 361  
Мопертюи Пьер Луи Моро де (1698–1759) 27, 35, 39
- Навьё Анри (1785–1836) 380  
Нернст Вальтер (1864–1941) 116  
Ньютон Исаак (1643–1727) 43, 136, 319
- Оксенфельд Роберт (1901–1993) 285, 292, 296  
Ом Георг Симон (1787–1854) 289, 293

Онсагер Ларс (1903–1976) 106, 132, 133, 136, 179, 370  
Остроградский Михаил Васильевич (1801–1862) 76, 80, 87, 163, 165, 168, 204, 210, 213, 219, 239, 290

Пайерлс Рудольф Эрнст (1907–1995) 346  
Паскаль Блез (1623–1662) 76  
Планк Макс Карл Эрнст Людвиг (1858–1947) 123, 261  
Пойнтинг Джон Генри (1852–1914) 245, 321, 356, 358, 362, 363  
Пти Алексис Терез (1791–1820) 276  
Пуазейль Жан Луи Мари (1799–1869) 387  
Пуассон Симеон Дени (1781–1840) 158, 20, 6 375

Резерфорд Эрнест (1871–1973) 58  
Рентген Вильгельм Конрад (1845–1923) 359  
Рихман Георг Вильгельм (1711–1753) 107, 148  
Роуланд Шервуд (1927–2012) 359  
Рэлей Джон Уильям (1842–1919) 49, 380

Савар Феликс (1791–1841) 208, 214, 215, 335, 348  
Сильвестр Джеймс Джозеф (1814–1897) 133  
Снеллиус (Снелль) Виллеброрд (1580–1626) 19  
Стирлинг Джеймс (1692–1770) 141  
Стокс Джордж Габриель (1819–1903) 239, 298, 350, 380

Тейлор Брук (1685–1731) 167, 181, 191  
Томсон Джозеф Джон (1856–1940) 217, 219  
Томсон (лорд Кельвин) Уильям (1824–1907) 66, 69, 112, 161, 162, 334

Фарадей Майкл (1791–1867) 24, 149, 154, 290, 293, 317, 349, 380  
Ферма Пьер (1601–1665) 16, 17  
Ферми Энрико (1901–1954) 261, 263, 270, 342  
Форель Огюст Анри (1848–1931) 16  
Френель Огюстен Жан (1788–1827) 24  
Фурье Жан Батист Жозеф (1768–1830) 129, 136, 142, 265

Шварцшильд Карл (1873–1916) 33  
Шрёдингер Эрвин (1887–1961) 43, 44, 261, 264

Эйлер Леонард (1707–1783) 27, 82, 97, 317, 323  
Эйнштейн Альберт (1879–1955) 351  
Эренфест Пауль (1880–1933) 46  
Эрмит Шарль (1822–1901) 12, 263

Юнг Томас (1773–1829) 16, 25

Якоби Карл Густав Якоб (1804–1851) 28, 30, 31, 33

## Предметный указатель

Аналогия оптико-механическая 22

Вариация:

- интегралов 84, 85
  - объемных 84, 85
  - поверхностных 85, 227
- координат 82
  - по Лагранжу 82, 92, 167, 219
  - по Эйлеру 82, 165, 166, 168, 169
- объемов 84
- отрезков 82, 83
- площадей 83
- токов 231, 237
  - «вмороженных» 224, 227
  - свободных 224, 237, 238
- энергии магнитного поля 219, 224, 231
  - электростатического поля 163

Вектор Пойнтинга 356, 362, 363

Вероятность термодинамическая 115, 140

Вес статистический 115

Волна:

- де Бройля 44
- действия 28
- сферическая 53

Восприимчивость:

- диамагнитная 282, 283
- магнитная 286

Вязкость 137, 188, 189, 318, 370, 381

Двигатель вечный 88, 99, 108, 112, 140

- механический 88
- тепловой первого рода 108–110
- тепловой второго рода 112, 113

Действие 27, 28, 30–33, 39, 42, 43

Дельта-функция Дирака 103, 104

Диамagnetизм Ландау 260, 283, 346  
Дивергенция поверхностная 202, 301  
Длина пути оптическая 21

**Закон:**

Ампера 70, 386  
Био — Савара 208, 214  
возрастания энтропии 115  
Гаука 81, 96, 98, 120  
Джоуля 178  
Друде — Лоренца — Зоммерфельда 319  
Кирхгофа 177  
Кулона 154–156, 203, 214, 335, 346, 354  
Ома 177, 289, 293  
Паскаля 76  
Снеллиуса 19  
Фарадея 349

**Импульс Ферми** 266, 267, 270

**Инвариантность:**

по Галилею 351, 352  
по Лоренцу 351, 352

**Инварианты:**

адиабатические 46  
тензора деформаций 93

**Индукция:**

магнитного поля 70, 214, 292, 294, 306  
электромагнитная 217

**Калибровка:**

Вейля 375  
векторного потенциала 210, 328  
Кулона 210, 220, 375  
Лоренца 220, 239, 375

**Коэффициент:**

Ламе 81, 93  
расширения температурный 146  
термоэлектрического эффекта 370

**Критерий Сильвестра** 133

**Метод множителей Лагранжа** 173, 200, 237, 264

**Множитель Лагранжа** 302

**Модель:**

Лоренца 144  
сверхпроводимости двухжидкостная 342

**Модуль Юнга** 25, 26



- Молярность 149  
Момент магнитный 247, 250, 251, 253, 294, 378, 379
- Напряженность магнитного поля** 343, 363
- Начало термодинамики:**  
первое 111  
второе 112  
третье 116
- Оператор:**  
Гамильтона 23  
Даламбера 374, 375  
Лапласа 24, 261, 374  
рождения 262, 266  
уничтожения 262, 263
- Оптика:**  
волновая 43  
геометрическая 16, 24
- Параметр прицельный** 55
- Переменные:**  
Лагранжа 82  
Эйлера 82
- Плотность энергии объемная:**  
магнитного поля 245  
электрического поля 245
- Поверхность волновая** 29, 30
- Показатель преломления** 19, 332, 382
- Поле магнитное критическое** 285
- Поляризация магнитная** 201, 245, 286
- Постоянная Лондонов** 318, 348
- Потенциал:**  
магнитный векторный 208, 213  
— скалярный 209, 212  
термодинамический 249, 268, 270, 283, 313, 333, 334  
химический 122, 270, 273  
электрический 39
- Поток магнитный** 201, 216, 241, 286, 287
- Правило:**  
Ленца 373  
Силсби 285
- Преобразования:**  
Галилея 351, 357, 363  
Лоренца 351
- Приближение:**  
квазиклассическое 44, 45  
коротких волн 25, 27, 43, 46

**Принцип:**

- виртуальных перемещений 13
  - работ 75
  - магнитный 230, 231
  - — механический 96
  - — термодинамический 127
- локального равновесия 13, 96
- Минковского 256, 261,
- наименьшего действия Гамильтона 28
  - — Мопертюи 27, 28, 35
- отвердевания 76, 80
- суперпозиции 201, 214, 389
- термодинамический Планка и Гиббса 123
- Ферма 16, 19

Проводимость 244, 293, 385

Проницаемость магнитная 255, 258, 286, 289

**Процесс:**

- механический 88
- необратимый 131
- обратимый 13, 94, 124, 148
- термомеханический квазиравновесный 108

Сверхпотенциал 328, 329, 348

Сечение эффективное дифференциальное 41, 55, 57

Сила Лоренца 33

Символ Кронекера 77, 265

— — спиновый 262

Система тождественных частиц 260

**Скорость:**

- волновая групповая 65
- фазовая 382
- света 346

Смещение виртуальное 93, 123, 127

Соотношение Гиббса — Дюгема 123

Соотношения Онсагера 133, 136, 370, 373

**Сопряжение:**

- комплексное 263
- эрмитово 263

Состояние равновесное 75, 88, 91, 123, 247

Спин 215, 260, 263

Статистика Ферми — Дирака 261

Сфера Ферми 266

**Температура:**

- абсолютная 114, 116, 140, 268
- критическая 146, 284, 287, 296

- эмпирическая 113, 114
- энергетическая 283
- Тензор:
  - деформаций Альманси 79
  - напряжений Коши 80, 81, 95, 99, 129
  - Максвелла 171, 356, 361
- Теорема:
  - Абрагама 325
  - Гаусса — Остроградского 76, 98, 239
  - Гаусса электростатическая 103, 156, 157, 186, 387
  - Гельмгольца 364
  - живых сил 367
  - Ирншоу 195
  - Кюри 106
  - Максвелла 357, 362
  - Нернста 116
  - Пойнтинга 321, 356, 362
  - Томсона 161, 162, 217, 219
- Теория:
  - волновая 24
  - Гортера — Казимира 342
  - Друде — Лоренца — Зоммерфельда 319, 342, 343
- Теплопроводность 81, 129, 137, 179, 370
- Течение Пуазейля 387
- Тождество Гиббса 116–118, 123, 258
- Ток:
  - молекулярный 258, 282, 293, 354
  - намагничивания 208, 212, 214, 215
  - проводимости 359, 361, 379
  - Рентгена 359
  - Роуланда 359
  - сверхпроводящих электронов 299–303
- Уравнение:
  - Ван-дер-Ваальса 145
  - Вант Гоффа 149
  - Гамильтона — Якоби 30–32, 43, 46
  - Лапласа 158, 206
  - Лондонов 318, 319, 321, 330
  - непрерывности 351, 352
  - неразрывности сплошной среды 168, 177
  - Пуассона 158, 206
  - Шрёдингера 43, 44, 146, 261
  - эйконала 381, 382
  - Эйлера 97, 317, 323, 326
- Уравнения Максвелла 207, 289, 317, 326, 331, 340, 352

## Условие:

калибровки 265

квантования Бора — Зоммерфельда 44, 45, 60

## Флюксoid 325–327, 329, 348

## Фронт волновой 16, 382

## Функция:

волновая 44, 261, 263

Лагранжа 28, 200

## Числа заполнения 263, 266

## Эйконал 21, 381, 382

## Энергия:

внутренняя 88, 89, 91, 108, 110

механическая 99, 190

потенциальная 39, 44, 49, 96

свободная Гельмгольца 268, 274, 275

Ферми 342

## Энтропия 114

абсолютная 116

статистическая 115

## Эффект:

магнитоэлектрический 349

Мейсснера 285

электромагнитной индукции 350

## Оглавление

Предисловие.....	5
Основные обозначения.....	8
Введение.....	13
<b>Глава 1. Вариационные методы в оптико-механической аналогии.....</b>	<b>16</b>
1.1. Геометрическая оптика неоднородных сред.....	16
1.2. Основное уравнение геометрической оптики.....	21
1.3. Оптико-механическая аналогия.....	22
1.4. Волновая теория Френеля и приближение коротких длин волн.....	24
1.5. Принципы наименьшего действия Мопертюи и Гамильтона.....	27
1.6. Волна действия.....	28
1.7. Уравнение Гамильтона — Якоби.....	30
1.8. Принцип наименьшего действия для свободной релятивистской частицы.....	32
1.9. Учет влияния магнитного поля.....	33
1.10. Рассеяние частиц на произвольном центрально-симметричном силовом поле.....	39
1.11. Волновое уравнение Шрёдингера.....	43
1.12. Квазиклассическое приближение. Условие квантования Бора — Зоммерфельда.....	44
1.13. Понятие адиабатического инварианта.....	46
Контрольные вопросы.....	46
Задачи к главе 1.....	47
<b>Глава 2. Механический принцип виртуальных работ.....</b>	<b>75</b>
2.1. Механическое равновесие сплошного тела (среды).....	75
2.2. Переменные Лагранжа и Эйлера и их вариации.....	82
2.3. Механическая работа и внутренняя энергия.....	88
2.4. Механический принцип виртуальных работ. Условия механического равновесия сплошного тела.....	94
2.5. Уравнения идеальной гидродинамики и идеальной теории упругости.....	96
Контрольные вопросы.....	99
Задачи к главе 2.....	99
<b>Глава 3. Тепловые эффекты.....</b>	<b>106</b>
3.1. Тепловое равновесие.....	107
3.2. Внутренняя энергия и принцип невозможности существования теплового вечного двигателя первого рода.....	108

3.3. Энтропия и принцип невозможности существования теплового вечного двигателя второго рода.....	112
3.4. Тождества Гиббса .....	116
3.5. Принципы Гиббса и Планка.....	122
3.6. Термодинамический принцип виртуальных работ.....	127
3.7. Баланс энтропии.....	129
3.8. Введение в термодинамику необратимых процессов.....	131
3.9. Гидродинамика вязкой среды.....	133
3.10. Теория упругости теплопроводного твердого тела .....	138
Контрольные вопросы .....	140
Задачи к главе 3 .....	140
<b>Глава 4. Постоянное электрическое поле .....</b>	<b>154</b>
4.1. Основные уравнения электростатики.....	155
4.2. Энергия электрического поля .....	158
4.3. Электрический принцип виртуальных работ .....	161
4.4. Электрокинетика .....	176
Контрольные вопросы .....	179
Задачи к главе 4 .....	179
<b>Глава 5. Постоянное магнитное поле .....</b>	<b>201</b>
5.1. Векторный анализ полей, заданных на искривленных поверхностях .....	202
5.2. Общие положения магнитостатики .....	203
5.3. Энергия магнитного поля.....	215
5.4. Вариация энергии магнитного поля .....	219
5.5. Магнитный принцип виртуальных работ. Необходимые и достаточные условия равновесия .....	231
5.6. Основы термодинамики магнетиков .....	244
Контрольные вопросы .....	249
Задачи к главе 5 .....	249
<b>Глава 6. Свободные электроны в нормальном металле .....</b>	<b>260</b>
6.1. Квантовая механика системы невзаимодействующих электронов .....	260
6.2. Термодинамика системы невзаимодействующих свободных электронов.....	268
6.3. Электродинамика системы невзаимодействующих свободных электронов.....	276
Контрольные вопросы .....	283
<b>Глава 7. Введение в теорию сверхпроводимости .....</b>	<b>284</b>
7.1. Основные свойства сверхпроводников.....	284
7.2. Фундаментальные свойства массивных сверхпроводников .....	288
7.3. Поверхностные токи намагниченного сверхпроводящего шара .....	294
7.4. Распределение тока на сверхпроводящем участке цилиндрического провода.....	296
7.5. Принцип минимума энергии сверхпроводящих токов.....	299
7.6. Минимум магнитной энергии сверхпроводящего шара. ....	305
7.7. Элементарная термодинамика сверхпроводников.....	313
Контрольные вопросы .....	315

<b>Глава 8. Электродинамика Лондонов и термодинамика Гортера — Казимира</b>	<b>316</b>
8.1. Модель несжимаемой идеальной жидкости сверхпроводящих электронов и основные уравнения электродинамики Лондонов.....	317
8.2. Законы сохранения энергии и импульса в электродинамике Лондонов.....	320
8.3. Теория флюксоида и потенциалы в электродинамике Лондонов.....	325
8.4. Глубина проникновения и поверхностная энергия.....	331
8.5. Намагничивание сверхпроводящего шара .....	334
8.6. Двухжидкостная теория Гортера — Казимира .....	342
Контрольные вопросы .....	348
<b>Глава 9. Медленно движущиеся среды .....</b>	<b>349</b>
9.1. Уравнения Максвелла.....	349
9.2. Модифицированные уравнения Максвелла.....	352
9.3. Нерелятивистское электрическое приближение уравнений Максвелла .....	355
9.4. Нерелятивистское магнитное приближение уравнений Максвелла .....	360
9.5. Уравнения медленно движущихся сплошных тел и сред при наличии электрических и магнитных полей в общем случае .....	365
Контрольные вопросы .....	373
Задачи к главе 9 .....	373
<b>Заключение .....</b>	<b>392</b>
<b>Литература .....</b>	<b>393</b>
<b>Именной указатель .....</b>	<b>395</b>
<b>Предметный указатель .....</b>	<b>398</b>

*Учебное издание*

**Алиев** Исмаил Новруз оглы

**Термодинамика  
и электродинамика  
сплошных сред**

Редактор *И.В. Мартынова*

Художник *Я.М. Асинкритова*

Корректор *Н.В. Савельева*

Компьютерная графика *О.В. Левашовой*

Компьютерная верстка *Е.В. Жуковой*

Оригинал-макет подготовлен  
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В оформлении использованы шрифты  
Студии Артемия Лебедева.

Подписано в печать 15.03.2018. Формат 70×100/16.  
Усл. печ. л. 33.15. Тираж 300 экз. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
press@bmstu.ru  
www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
baumanprint@gmail.com