

И. БЕЗУХОВ

ОСНОВЫ
ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ
ПЛАСТИЧНОСТИ
И ПОЛЗУЧЕСТВИ

ГЛАВА ШКОЛА МОБИ

Н. И. БЕЗУХОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

*Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника
для высших технических учебных
заведений*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва — 1961

АННОТАЦИЯ

Книга представляет собою учебник по курсу теории упругости и пластичности применительно к программам высших технических учебных заведений. В книге дано слитное изложение основ теории упругости, теории пластичности и теории ползучести. Учебник может быть использован как на тех факультетах и специальностях, где указанные основы в учебном плане представлены самостоятельной технической дисциплиной, так и на тех факультетах, где основы теории упругости и пластичности проходятся слитно с курсом сопротивления материалов. В последнем случае исключаются некоторые главы и разделы книги, о чем указано в предисловии.

Предисловие

Глава I. Введение. Задачи, принципы и методы механики деформируемых сплошных сред

§ 1. 01. Различные ветви механики деформируемого тела, их значение	15
§ 1. 02. Основные гипотезы и принципы механики деформируемого тела и классической теории упругости в частности	25
§ 1. 03. Основные этапы в развитии теории упругости, пластичности и ползучести	32
Литература	38

РАЗДЕЛ I. Общие уравнения механики сплошной среды

Глава 2. Общая теория напряженного и деформированного состояния в точке сплошной среды

А. Статическая теория напряженного состояния в точке

§ 2. 01. Обозначения составляющих напряжений. Тензор напряжений	43
§ 2. 02. Частный случай записи тензора напряжений	49
§ 2. 03. Другие обозначения компонентов напряжений	50
§ 2. 04. Связь компонентов напряжений вблизи наружной поверхности тела с компонентами нагрузки на той же поверхности тела (условия на границе тела)	51
§ 2. 05. Исследование напряженного состояния в данной точке тела при известном тензоре напряжений для той же точки	54
§ 2. 06. Продолжение. Главные напряжения	55
§ 2. 07. Инварианты тензора напряжений	58
§ 2. 08. Наибольшие касательные напряжения	60
§ 2. 09. Октаэдрические напряжения	63
§ 2. 10. Выделение среднего нормального напряжения из тензора напряжений. Понятие о шаровом тензоре напряжений и о тензоре — девиаторе напряжений	66

Б. Геометрическая теория деформации в точке

§ 2. 11. Обозначение составляющих деформации. Тензор малой деформации	69
	3

§ 2. 12. Другие обозначения компонентов деформации.	75
§ 2. 13. Исследование деформаций в окрестности заданной точки при известном тензоре деформации для той же точки (аналогия теории деформации и теории напряжений)	76
§ 2. 14. Выделение средней деформации из тензора деформации. Понятие о шаровом тензоре деформации и о тензоре-девиаторе деформации	79
§ 2. 15. Краткие выводы по главе	80

Глава 3. Общая теория поля напряжений и поля деформации в сплошной среде

A. Статические уравнения	
§ 3. 01. Обозначения компонентов перемещения и вращения . .	85
§ 3. 02. Обозначения компонентов напряжений в близлежащих друг к другу точках (в декартовых координатах)	88
§ 3. 03. Дифференциальные уравнения равновесия и движения (статическое обследование)	91
§ 3. 04. Продолжение. Еще о законе взаимности касательных напряжений	94
§ 3. 05. Еще о так называемых условиях на контуре тела	96
§ 3. 05а. Замечания о статических уравнениях в других координатах	98
B. Геометрические уравнения	
§ 3. 06. Обозначения компонентов смещения вблизи заданной точки	100
§ 3. 07. Дифференциальные зависимости компонентов малой деформации от компонентов смещения (в декартовых координатах) .	102
§ 3. 08. Уравнения неразрывности деформации	105
§ 3. 09. Оценка точности уравнений (§ 3. 08) с позиции нелинейной теории упругости	109
§ 3. 10. Краткие выводы по главе	111
Литература к главам 2 и 3	111

Раздел II. Общая теория связи напряжений и деформации в точке сплошной среды

Глава 4. Линейное упругое тело

§ 4. 01. Связь компонентов напряжений с компонентами деформации для случая линейного упругого тела — обобщенный закон упругости	115
§ 4. 02. Различные записи обобщенного закона упругости	118
§ 4. 03. Продолжение. Закон упругого изменения объема и закон упругого изменения формы	121
§ 4. 04. Удельная потенциальная энергия	124
§ 4. 05. Замечание о законе упругости для анизотропного упругого тела	129
§ 4. 06. О различных гипотезах наступления предельного упругого состояния в точке сплошного тела и наступления пластического состояния в той же точке	130
§ 4. 07. Дополнительные замечания. Случай температурного поля .	136
Литература	137

Глава 5. Нелинейное упругое тело и упруго-пластическое тело

§ 5. 01. Основная предпосылка нелинейной теории упругости, она же и основная гипотеза в теории пластичности	139
§ 5. 02. Следствия из основной предпосылки — физические уравнения нелинейной теории упругости и теории пластичности . . .	144

§ 5. 03. Возможность доказательства физических уравнений теории пластичности	146
§ 5. 04. Иная редакция законов упруго-пластической деформации в точке сплошной среды	148
§ 5. 05. Частные случаи — идеально-пластическое тело	150
§ 5. 06. Замечания, касающиеся установления связи между напряжениями и деформациями в нелинейной теории упругости и в теории пластичности	152
Литература	154

Глава 6. Упруго-пластически-ползучая среда

§ 6. 01. Предварительные замечания о протекании деформации сложной среды во времени. Дополнительные определения, понятия, обозначения	156
§ 6. 02. Условная классификация физических сред и уравнений, описывающих законы их деформаций	161
§ 6. 03. Связь компонентов напряжений с компонентами скоростей деформаций для идеально-вязкой среды	163
§ 6. 04. Связь компонентов напряжений с компонентами деформации и их скоростей для линейной упруго-вязкой среды	165
§ 6. 05. Условие текучести (течения, пластичности) для идеальной пластически-вязкой среды	167
§ 6. 06. Замечание о связи напряжений и деформаций для нелинейной упруго-вязкой среды. Эмпирические и полуэмпирические соотношения для упруго-пластически-ползучей среды	168
§ 6. 07. Краткие выводы по главам 4, 5, 6	173
Литература	174

Раздел III. Теория упругости

Глава 7. Основные уравнения теории упругости

§ 7. 01. Еще о постановке задач в теории упругости, пластичности и ползучести	177
§ 7. 02. Основные уравнения линейной теории упругости (в декартовых координатах) и возможные методы их решения	180
§ 7. 03. Решение задач теории упругости в перемещениях	184
§ 7. 04. Решение задач теории упругости в напряжениях	186
§ 7. 05. Дополнительные замечания — наличие температурного поля	188
§ 7. 06. Краткие выводы по главе	190
Литература	191

Глава 8. Основные уравнения плоской задачи теории упругости в декартовых координатах

§ 8. 01. Частный случай — плоское напряженное состояние	193
§ 8. 02. Дальнейшие упрощения	195
§ 8. 03. Частный случай — плоская деформация	196
§ 8. 04. Функция напряжений для плоской задачи	199
§ 8. 05. Частные случаи начертания функции напряжений и примеры их использования	201
§ 8. 06. Дополнительные замечания. Обобщенное плоское напряженное состояние. Погонные усилия	206

Глава 9. Основные уравнения плоской задачи теории упругости в полярных координатах

§ 9. 01. Обозначение компонентов смещения, напряжения и деформации в полярных координатах	208
§ 9. 02. Частный случай — симметричное относительно оси распределение напряжений (решение в перемещениях)	209
§ 9. 03. Решение в напряжениях	213
§ 9. 04. Основные уравнения для плоской задачи в полярных координатах (решение в напряжениях)	214
§ 9. 05. Некоторые частные случаи начертания функции напряжений и примеры использования	216

Глава 10. Основные уравнения осесимметричной задачи теории упругости в цилиндрических координатах

§ 10. 01. Основные уравнения	220
§ 10. 02. Решение задачи в перемещениях	222
§ 10. 03. Решение задачи в напряжениях	224
§ 10. 04. Функция напряжений при осесимметрической деформации	224
§ 10. 05. Дополнительные замечания. Температурные задачи	226
§ 10. 06. Краткие выводы по главам 8—10	228
Литература к главам 8—10	229

Глава 11. Некоторые плоские задачи теории упругости

§ 11. 01. Задача о чистом изгибе. Случаи применения элементарных решений	231
§ 11. 02. Задача об изгибе консоли равномерно-распределенной нагрузкой	234
§ 11. 03. Продолжение задачи	239
§ 11. 04. Другой вариант решения задачи об изгибе консоли	241
§ 11. 05. Изгиб балки на двух опорах под равномерно-распределенной нагрузкой	245
§ 11. 06. Треугольная подпорная стенка	247
§ 11. 07. Чистый изгиб кривого бруса (задача Х. С. Головина)	253
§ 11. 08. Сила, действующая на острие клина	255
§ 11. 09. Другие задачи по нагружению клина	257
§ 11. 10. Сосредоточенная сила, приложенная к точке прямолинейного края полубесконечной пластинки	262
§ 11. 11. Деформация полубесконечной пластинки от сосредоточенной силы	263
§ 11. 12. Прогiby прямолинейного края полубесконечной пластинки при частных видах загрузки	264
§ 11. 13. Влияние круглого отверстия (ослабления) на распределение напряжений в растягиваемой пластинке	267
§ 11. 14. Использование тригонометрических рядов для функции напряжений	271
Литература	274

Глава 12. Простейшие осесимметричные задачи теории упругости

§ 12. 01. Полярно-симметричная деформация толстостенного сферического сосуда	275
§ 12. 02. Сосредоточенная сила, действующая на плоскость, ограничивающую полубесконечное тело	279
§ 12. 03. Частные случаи загрузки „упругого полупространства“	284

§ 12. 04. Вдавливание абсолютно жесткого шара в упругое полу- пространство	288
§ 12. 05. Замечание к задаче об упругом смятии шаров	292
Литература	295

Глава 13. Простейшие обратно-симметричные задачи теории упругости (кручение стержней)

§ 13. 01. Чистое кручение стержня круглого поперечного сечения	296
§ 13. 02. Кручение некруглых сечений. Задача Сен-Венана	329
§ 13. 03. Кручение эллиптического сечения	305
§ 13. 04. Деформация эллиптического сечения при его кручении	306
§ 13. 05. Кручение сечения в виде узкого прямоугольника	307
§ 13. 06. Деформация при кручении сечения в виде узкого прямо- угольника и тонкостенного сечения открытого профиля	309
§ 13. 07. Кручение тонкостенного замкнутого сечения	311
§ 13. 08. Понятие о стесненном кручении	314
§ 13. 09. Краткие выводы по главам 11—13	318
Литература	319

Раздел IV. Задачи прикладной теории упругости

Глава 14. Изгиб пластинок

§ 14. 01. Замечание о прикладной теории упругости	323
§ 14. 02. Основные определения и гипотезы в технической теории изгиба пластинок и оболочек	324
§ 14. 03. Установление выражений для напряжений в пластинке через уравнения упругой поверхности пластинки	327
§ 14. 04. Вывод дифференциального уравнения упругой поверх- ности пластинки	330
§ 14. 05. План решения задачи по исследованию изгиба пластинок. Условия на опорном контуре (решение в перемещениях)	332
§ 14. 06. Пример — эллиптическая пластинка, защемленная по контур	335
§ 14. 07. Пример — свободно-опертая прямоугольная пластинка	337
§ 14. 08. Другая форма записи для напряжений и граничных ус- ловий (приведение напряжений, параллельных срединной плоско- сти к статически эквивалентным им изгибающим и крутящим мо- ментам)	342
§ 14. 09. Общее решение для прямоугольной пластинки	345
§ 14. 10. Замечания о других решениях. Решение в напряжениях	347
§ 14. 11. О методе Бубнова-Галеркина. Пример	348
§ 14. 12. Круглая пластинка	351
§ 14. 13. Кольцевые пластинки	355
§ 14. 14. Изгиб пластинки под совместным действием поперечных нагрузок и сил в ее срединной плоскости. Предварительные заме- чания и дополнительные обозначения	357
§ 14. 15. Продолжение. Вывод дифференциального уравнения изог- нутой поверхности пластинки	361
§ 14. 16. Устойчивость прямоугольной пластинки, свободно-опер- той по четырем сторонам и сжатой в одном направлении	362
§ 14. 17. Всестороннее сжатие прямоугольной пластинки	363
§ 14. 18. Некоторые основные результаты из теории устойчивости пластинок	365
§ 14. 19. Краткие выводы по главе	366
Литература	366

Глава 15. Балки-стенки (основные результаты). Понятие о приближенных методах в теории упругости

§ 15. 01. Предварительные замечания	368
§ 15. 02. Разложение тензорного поля напряжений на основное и корректирующее (метод П. Ф. Папковича)	369
§ 15. 03. Замечание о других методах приближенного решения уравнений теории упругости	372
§ 15. 04. Основные результаты исследования некоторых частных случаев нагружения балок-стенок	378
§ 15. 05. О потере устойчивости плоской формы изгиба балок-стенок	385
§ 15. 06. Дополнительные замечания	386
Литература	387

Глава 16. Изгиб симметрично-нагруженных тонких цилиндрических оболочек

§ 16. 01. Основные понятия и допущения в технической теории изгиба тонких оболочек	389
§ 16. 02. Дифференциальные уравнения изгиба образующей симметрично нагруженной цилиндрической оболочки	391
§ 16. 03. Частный случай — полубесконечная оболочка с нагрузкой по краю	397
§ 16. 04. Другие случаи симметричного нагружения цилиндрической оболочки	399
§ 16. 05. Потеря устойчивости круговой цилиндрической оболочки под действием равномерного осевого сжатия	403
§ 16. 06. Дополнительные замечания по главе. О современном состоянии теории оболочек	405
Литература	407

Раздел V. Теория пластичности

Глава 17. Основные уравнения теории пластичности

§ 17.01. Предварительные замечания	411
§ 17.02. Теорема А. А. Ильюшина о простом нагружении	413
§ 17.03. Теорема о разгрузке	414
§ 17.04. Основные уравнения теории пластичности (теория малых упруго-пластических деформаций)	415
§ 17.05. Частный случай — плоская задача, идеально пластический материал	418
§ 17.06. О так называемой теории пластического течения	420
§ 17.07. Решение задачи теории пластичности в перемещениях. Метод «упругих» решений	423
§ 17.08. Краткие выводы по главе	427
Литература	429

Глава 18. Простейшие задачи нелинейной теории упругости и теории пластичности

§ 18.01. Чистый изгиб	430
§ 18.02. Замечания, касающиеся распространения на случай поперечного изгиба предпосылок и формул, установленных для чистого изгиба	435
§ 18.03. О несущей способности статически-неопределимых балок	438
§ 18.04. Чистое кручение	443
§ 18.05. Осесимметричное упруго-пластическое состояние толсто-	

стенного кольца или цилиндра. Устойчивое и неустойчивое решение	445
§ 18.06. Продолжение; учет упрочнения материала	449
§ 18.07. Полярно-симметричное упруго-пластическое состояние шарового сосуда. Устойчивое и неустойчивое решение	453
§ 18.08. Несущая способность круглого цилиндрического стержня, подверженного растяжению и кручению	456
§ 18.09. Несущая способность при кручении сечения в виде узкого прямоугольника	461
§ 18.10. Пластическое состояние при нестесненном кручении не-круглых сечений	465
§ 18.11. Несущая способность при изгибе однородных пластинок	468
Л и т е р а т у р а	468

Глава 19. Основные результаты решений некоторых задач теории пластичности

§ 19.01. Общее замечание по главе	470
§ 19.02. Давление пластической среды на жесткий штамп	470
§ 19.03. Приложение теории пластичности к статике сыпучей среды. Задачи В. В. Соколовского	472
§ 19.04. Осесимметричные пластические деформации равномерно-вращающегося диска	476
§ 19.05. Примеры решения задач полуобратным методом	479
§ 19.06. Термо-упруго-пластические деформации простых балок	482
§ 19.07. Несущая способность поперечного сечения балки при наличии сильных градиентов температур	485
§ 19.08. Заключительные замечания по главам 18 и 19	486
Л и т е р а т у р а	487

Раздел VI. Элементы теории ползучести

Глава 20. Основные уравнения теории ползучести

§ 20.01. Предварительные замечания	491
§ 20.02. Простейшие одномерные задачи линейного упруго-вязкого тела	492
§ 20.03. Изгиб упруго-вязкой балки	496
§ 20.04. Кручение упруго-вязкого стержня	498
§ 20.05. Устойчивость прямолинейного сжатого стержня из упруго-вязкого материала	500
§ 20.06. О полном комплекте уравнений теории линейного упруго-вязкого тела	503
§ 20.07. Замечание о полном комплекте уравнений теории вязко-пластического тела	505
§ 20.08. Основные уравнения теории установившейся ползучести	505
§ 20.09. О формальной аналогии теории установившейся ползучести с теорией течения и теорией упруго-пластических деформаций	507
§ 20.10. Краткие замечания о некоторых других теориях ползучести	509
Л и т е р а т у р а	514

Глава 21. Основные результаты решения некоторых задач теории ползучести

§ 21.01. Общее замечание по главе	515
§ 21.02. Ползучесть простейшей шарнирно-стержневой фермы	515
§ 21.03. Установившаяся ползучесть изогнутого прямого бруса	519

§ 21.04. Дифференциальное уравнение изогнутой оси бруса при нелинейной ползучести	502
§ 21.05. Установившаяся ползучесть толстостенной трубы при осесимметричном нагружении	524
§ 21.06. Соображения по расчету на ползучесть статически-неоп- ределимых балок и рам	527
§ 21.07. Краткие выводы по главам 20 и 21	528
Послесловие	531
Цитированная литература и источники	534

В советских условиях механика деформируемого тела развивалась, как и все другие науки, в тесной связи с практикой. Это обстоятельство имело своим следствием исключительные успехи в области теории упругости, теории пластичности и строительной механики. Из практики грандиозного строительства в СССР эти отрасли механики деформируемого тела черпали источники для своего развития, в практику несли они свои достижения и там, на практике, имели возможность проверять достоверность своих открытий.

В этом смысле практика социалистического строительства для механики деформируемого тела была и остается грандиозной лабораторией.

Научные достижения последних лет нашли отражение в обширной научной и учебной литературе, выделяющейся принципиальностью, глубиной анализа и широкими горизонтами использования науки в различных областях нашего строительства.

Достаточно указать на отмеченные Государственными премиями С.С.С.Р. выдающиеся исследования в различных областях механики деформируемого тела, а именно: по вопросам теории упругости — академиков Б. Г. Галеркина, Л. С. Лейбензона, Н. И. Мусхелишвили, члена-корреспондента АН СССР проф. П. Ф. Папковича; по вопросам теории пластичности — члена-корреспондента АН СССР проф. А. А. Ильюшина, члена-корреспондента АН СССР, академика Польской АН проф. В. В. Соколовского, академика АН Узбекской ССР проф. Х. А. Рахматулина; по специальным вопросам теории упругости — члена-корреспондента АН СССР проф. В. З. Власова, проф. С. Г. Лехницкого и на многие другие, чтобы иметь представление о большом

идейном богатстве и практическом значении советской науки в указанных областях.

В приобщении студенческих и инженерных масс к теории упругости большое значение имели и продолжают иметь замечательные учебники и монографии заслуженного деятеля науки и техники проф. М. М. Филоненко-Бородича, академика АН УССР проф. С. В. Серенсена, действительного члена АС и А СССР проф. Б. М. Жемочкина, члена-корреспондента АН СССР проф. А. И. Лурье, члена-корреспондента АН УССР проф. И. Я. Штаермана; монографии по нелинейным проблемам теории упругости и пластичности — члена-корреспондента АН СССР проф. В. В. Новожилова, проф. Л. М. Качанова и др.

Большая потребность в инженерной практике производить расчеты по прочности конструкций с учетом особенностей длительных процессов деформирования способствовала за последнее время оформлению сравнительно новой ветви механики, а именно — теории ползучести. В этой новой области выделяются труды наших соотечественников, как-то: академика Ю. Н. Работнова, профессоров И. И. Гольденבלата, Л. М. Качанова, Н. Н. Малинина, В. М. Панферова и др.

Настольной книгой для инженеров-конструкторов стала капитальная трехтомная монография профессоров С. Д. Пономарева, В. Л. Бидермана, К. К. Лихарева, В. М. Макушина, Н. Н. Малинина, В. И. Феодосьева «Расчеты на прочность в машиностроении», удостоенная в 1960 г. Ленинской премии. В этом сочинении подытожены за многие годы исследования в различных областях механики советских ученых и самих авторов в том числе.

В трудах перечисленных и многих других ученых*, обогативших советскую механику деформируемого тела, читатель найдет исчерпывающие ответы по многим вопросам, которые у него возникнут в его практической инженерной деятельности.

Исключительно богатое содержание перечисленных ветвей механики, по каждой из которых имеются специальные монографии и учебники, побудили автора для своего учебника дать наименование «Основы теории упругости, пластичности и ползучести».

Задачи предлагаемой читателю книги действительно скромные. Настоящая книга является учебником для очных и за-

* Точное наименование трудов указывается в конце каждой главы с краткой аннотацией. Ссылки на эти труды отмечаются в тексте главы номером, стоящим в квадратных скобках. Если ссылка на труд указана номером со звездочкой, то название труда дано в конце книги.

очных втузов и факультетов, где на преподавание этого курса отводится 50—70 часов занятий с преподавателями. Однако предлагаемый учебник может быть использован и там, где на преподавание основ теории упругости и пластичности отводится и несколько большее или меньшее количество часов. В первом случае предусматривается использование учащимися всего материала в книге, включая набранного петитом. Во втором случае исключается материал, набранный петитом, главы 14—16, а также полностью последний раздел книги (элементы теории ползучести). При наличии в учебном плане только теории упругости исключаются разделы V и VI и главы 5, 6.

Для настоящей книги автор, конечно, широко использовал его прежние книги, как-то: «Введение в теорию упругости и пластичности» (Стройиздат, 1949), «Теория упругости и пластичности» (Гостехиздат, 1953), но со значительным сокращением последней (исключены исторические обзоры по каждой главе и т. д.), хотя и с одновременным включением основ теории ползучести. Попутно в новой редакции учтены все замечания, которые были опубликованы в отзывах на эти книги в СССР, а также замечания, поступившие в мой адрес от зарубежных ученых как по русскому изданию этих книг, так и по переизданиям их за рубежом (Китай, Япония, Румыния, Венгрия).

В книге нашли место некоторые новые методические приемы, не имевшие места в прежних изданиях автора, как-то: включение почти по каждой главе кратких выводов, перечень литературы для углубленного изучения вопросов, затронутых в той или иной главе, с краткой аннотацией упоминаемых монографий или учебников и т. п.

Учитывая, что в ближайшее время вообще планируется издание сборников задач по теории упругости, а также наличие ранее изданного автором «Сборника задач по теории упругости и пластичности» (Гостехиздат, М. 1957 г.) и подготовленного в настоящее время его переиздания, автор не считал возможным обременить настоящий учебник приведением текстов задач для самостоятельных упражнений.

В заключение автор почитает для себя приятным долгом выразить искреннюю и глубокую признательность академику Грузинской ССР К. С. Завриеву, профессорам М. М. Филоненко-Бородичу, И. И. Гольденблату, И. Я. Штаерману, А. П. Филину за сделанные ими указания по предыдущим изданиям, а также зарубежным коллегам Цунезо Сато (Токио), Ду Чин Хуа, Пун Ча Чу (Пекин), Селлар Одон, Калицкий Шандор (Будапешт), Каракоста Андре (Бухарест) за

их труд по переводу и подготовке к печати у себя на родине и сделанные замечания по предпоследнему изданию.

Автор выражает особую признательность члену-корреспонденту АН СССР проф. В. В. Соколовскому, члену-корреспонденту АС и А СССР проф. А. Ф. Смирнову и коллективу кафедры строительной механики Московского ин-та инж. транспорта за ценные указания при подготовке к печати настоящего издания.

Июль 1960 г.

Автор

«От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности»

(В. И. Ленин, Философские тетради)

Глава I

ВВЕДЕНИЕ. ЗАДАЧИ, ПРИНЦИПЫ И МЕТОДЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СПЛОШНЫХ СРЕД

§ 1.01 Различные ветви механики деформируемого тела, их значение

Механика в современном состоянии представляет широкий комплекс научных дисциплин, многие из которых фактически выделились из общей механики.

Эти отпочковавшиеся от классической механики отрасли знаний в своей совокупности получили наименование практической, или прикладной механики, желая этим названием подчеркнуть их прикладной характер в связи с обслуживанием определенной практической отрасли.

Рассмотрим комплекс научных дисциплин практической механики, имеющих отношение к расчету сооружений и машин на прочность, и определим в этом комплексе место теории упругости, пластичности и ползучести.

а) О реологии. Наукой, устанавливающей общие законы образования и развития во времени деформации любого вещества от различных причин в различных термодинамических и физико-химических условиях, является *реология** (наука о течении вещества).

В указанной выше формулировке вещество понимается *именно* любым: оно может быть твердым или жидким, упру-

* Перемещениями, при которых деформации тела отсутствуют (например, переносом из одного положения в другое как абсолютно твердого тела и т. п.), в реологии не интересуются.

гим, пластичным, вязким и т. п. Причины для деформации также предполагаются самыми разнообразными, как-то: статические или динамические нагрузки; изменения, происходящие в параметрах, характеризующих как внешнюю среду (температурное поле), так и самое вещество, и т. д. и т. п.

Инженера могут интересовать деформации также в разное время, как-то: вслед за приложением нагрузки или продолжительное время спустя, когда полностью или частично удалены внешние причины, как в состоянии равновесия, так и в случае движения, и т. д.

Иначе говоря, реология должна отвечать на вопрос: *каковы деформации и напряжения в данной точке заданного тела в определенный момент времени при известных параметрах внешнего воздействия и известной для последнего истории его в прошлом.*

По существу перечисленных выше задач реология есть новый отдел механики, рассматривающий движение в относительно широком смысле. Сложность решения задач в указанной выше общей формулировке должна быть очевидна нашему читателю, знакомому с современными прочностными расчетами сооружений, излагаемыми в курсах сопротивления материалов, где также рассматривались напряжения и деформации твердых тел.

В этих расчетах на прочность принимались различные идеализированные схемы самого сооружения; многие обстоятельства, влияющие на напряжения или деформацию материала, исключались при этом вовсе (отступление от закона Гука, явление ползучести, релаксации и т. п.), и все же расчет часто оставался трудоемким. По этой причине на данном этапе развития реологии представляется целесообразным несколько отступить от указанной выше слишком общей формулировки проблем этой науки, т. е. сузить задачи, схематизировать изучаемую картину и т. д. Поэтому в собственно реологии, если считать эту ветвь механики оформившейся в самостоятельную науку, получены пока немногие, но важные результаты. Пока сделаны лишь попытки установить взаимно однозначные зависимости между напряжениями и деформациями для системы классических тел (идеально пластическое, идеально вязкое и т. п.), играющие в этой науке ту же важную роль, как, например, в сопротивлении материалов закон Гука.

Некоторое абстрагирование реального тела применительно к данным конкретным условиям, т. е. сознательное отбрасывание его второстепенных свойств и сохранение за ним лишь основных качеств, вполне допустимо для целей инженерной практики. Иначе говоря, в практических расчетах неизбежно

прибегают к тем или иным допущениям или гипотезам, если в общем они подтверждаются опытом.

Более того, метод абстрагирования в указанном выше смысле совершенно необходим и, как показывает история науки и техники, он является одним из условий прогресса научного познания.

Но это, конечно, не означает культивирования в реологии упрощенного взгляда на природу, на материю.

Метод абстрагирования должен учитывать бесконечную сложность природы, ее неисчерпаемость. Познание никогда с абсолютной полнотой не сможет исчерпать объекта природы, хотя оно будет все более и более приближаться к этому.

«Мышление, восходя от конкретного к абстрактному, не отходит — если оно *правильное*... — от истины, а подходит к ней».*

Именно так, по мере накопления опытных данных и результатов теоретических исследований, должно быть и в реологии. Важно установить границы для практического применения той или иной идеализированной схемы, того или иного комплекса гипотез.

б) **Теория упругости.** Одной из таких идеализаций твердого тела является приписываемое ему свойство идеальной упругости. Это свойство и лежит в основе той ветви механики твердого деформируемого тела, которая носит название *теории упругости*.

Идеальная упругость, как известно читателю, есть способность тела, получившего деформацию, после устранения причин, ее вызвавших, полностью восстановить свою первоначальную форму. Иначе говоря, работа, затраченная внешними силами на перемещения точек их приложения, принимается телом в обратимой форме, а именно, в форме накопления в теле упругой энергии, равной по величине работе внешних сил.

Таким образом, идеально упругое тело выполняет первый закон термодинамики о сохранении энергии в изолированной системе.

Способность идеально упругого тела не оставлять на себе никакого следа от его прошлых нагрузжений (*«забывать все пережитое им ранее»*) приводит к тому, что такое тело всегда имеет форму, зависящую лишь от тех нагрузок, которые в данный момент действуют на тело, и не зависящую от того, как эти нагрузки постепенно «росли от нуля», т. е.

* В. И. Ленин. *Философские тетради*, стр. 146, Госполитиздат, 1947.

каковы были нагрузки в предшествующие моменты времени*.

Вполне очевидно, какие существенные облегчения вносит в расчеты предположение об идеальной упругости тела: отпадают вопросы влияния «наследственности» (т. е. влияния на деформацию в данное мгновение помимо действующих сил также и тех нагрузок, которые когда-то в прошлом оказывали свое влияние на деформации и на напряжения), влияния последействия (временного отставания деформаций от изменений нагрузки), релаксации (непрерывного спадания напряжений при постоянной деформации) и т. д.

Упругое состояние твердого тела характеризуется тем, что для каждой температуры тела независимо от времени существует взаимно однозначная зависимость между напряжениями и деформациями. Эта зависимость обычно является линейной и, как указывалось в курсе сопротивления материалов, носит название закона Гука.

Все строительные материалы в известной степени обладают свойством упругости; если внешние силы, вызывающие деформацию элемента конструкции, не превосходят определенной границы, то в указанных границах можно описывать законы деформации материала и конструкции в целом, исходя из предпосылки об упругом теле, чем и занимается теория упругости.

Свойством упругости обладают не только строительные материалы, им обладают жидкие тела и газы. Упругость есть основное свойство всех тел природы или во всяком случае их большинства.

Теория упругости обычно считается отделом математической физики, но она может рассматриваться и как ветвь реологии, самая простая, но вместе с тем и основная.

*Итак, теория упругости изучает действие сил на упругие тела и определяет возникающие при этом напряжения и деформации как в состоянии равновесия, так и в состоянии движения**.*

Как известно читателю, те же задачи стоят и в науке о сопротивлении материалов, но имеется существенное

* Если фактор времени (имеется в виду длительное время) — основное в реологии, то его отсутствие — основное в классической теории упругости. Случаи быстрого нарастания нагрузки, связанные с приобретением частицами тела существенных ускорений, в теории упругости также изучаются и составляют так называемые динамические задачи теории упругости; эти задачи в настоящей книге не рассматриваются.

** Здесь движение понимается в узком — механическом — смысле, например в смысле упругих колебаний и подобных малых перемещений, меняющихся во времени, но не меняющихся, конечно, не «реологически». Иначе говоря, при этих движениях физические и прочие свойства материала во времени не изменяются.

и принципиальное различие. Различие прежде всего заключается в исходных предпосылках, в методах решения задач и в диапазоне последних.

Исходные предпосылки в теории сопротивления материалов (например, так называемый закон плоских сечений) более или менее оправдываются опытом в том случае, когда исследуемое тело имеет продолговатую форму, как-то: стержня, бруса.

Поэтому сопротивление материалов не может решать задачи на отыскание напряженного и деформированного состояния тела, если его форма отлична от обычного стержня и представляет собой, например, пластинку, оболочку, массив и т. п.

Последняя задача (о напряженном состоянии массива) и ей подобные вообще не разрешены методами сопротивления материалов ни точно, ни приближенно. Такие задачи (см. § 12.03) могут быть решены только с позиций теории упругости, основные предпосылки которой отличаются достаточной широтой и не ограничиваются такой формой тела, как стержень.

Принятию более общих предпосылок в теории упругости соответствуют и более общие методы решения задач и отличительная строгость решения по сравнению с методами сопротивления материалов. Теория упругости одновременно ставит своей целью по возможности точное решение поставленной задачи, хотя это не исключает в теории упругости наличия различных приближенных методов решения задачи.

Выводы теории упругости широко используются в многочисленных областях техники. В сейсмологии по результатам изучения распространения упругих волн в земной коре вычисляют координаты очага землетрясения. Инженеры-строители используют выводы и методы теории упругости для вычисления напряжений и деформаций в инженерных сооружениях. Инженеры-механики занимаются теми же вопросами в машиностроении. Геологи используют теорию упругости для определения давления горных пород. Физики широко использовали теорию упругости при разработке волновой теории света и т. д. и т. п.

Наконец, решение целого ряда задач газодинамики, гидро- и аэродинамики, не имеющих прямого отношения к расчету на прочность, сводится к рассмотрению уравнений близких или общих с уравнениями теории упругости и теории пластичности.

Инженеру любой специальности представляется широкое поле для применения теории упругости. Следует, однако, заметить, что точное решение многих задач методами тео-

рии упругости наталкивается на чрезвычайно сложные препятствия чисто математического порядка.

в) **Математическая и прикладная теория упругости. Сопротивление материалов.** По этой причине наряду с развитием *математической теории упругости*, занимающейся изысканием способов точного решения задач механики деформируемого тела, параллельно идет развитие *прикладной теории упругости*, в которой, кроме предпосылки об идеальной упругости материала, вводятся некоторые дополнительные гипотезы и упрощения относительно характера перемещений, что позволяет при решении многих задач исходить не из полной системы уравнений теории упругости*.

Так, при расчете на изгиб тонких плит и оболочек (см. § 14.02), т. е. в так называемых двухмерных задачах теории упругости (здесь объектом изучения является тело, у которого два размера одного порядка, а третий размер — толщина — мал по сравнению с первыми), вводят гипотезу о прямолинейном элементе пластинки (или оболочки), нормальном к срединной плоскости (или срединной поверхности) до деформации, который якобы остается прямым и нормальным к искривленной плоскости (поверхности) после деформации (аналогично гипотезе плоских сечений в курсе сопротивления материалов).

Не без основания представителем прикладного направления в теории упругости считают и *сопротивление материалов*; в этой науке действительно рассматриваются одномерные задачи прикладной теории упругости, так как изучаемые в сопротивлении материалов тела — стержни — имеют два размера (высоту и ширину поперечного сечения) малые по сравнению с третьим (т. е. длиной).

Заметим, однако, что одномерные задачи прикладной теории упругости, исследуемые в сопротивлении материалов, изучаются также и в математической теории упругости, где приводятся более строгие решения без привлечения тех геометрических гипотез (закон. плоскости и др.), которые

* Заметим, что граница между классической и прикладной теориями упругости относительная, так как в ряде задач практики исключительные трудности непосредственного интегрирования уравнений теории упругости (т. е. получения точного решения) вынуждают часто обращаться к различным приближенным методам.

Если эти приближенные методы относятся к решению только самих уравнений классической теории упругости, т. е. при этом не привлекаются какие-либо новые физические или геометрические гипотезы, то такие методы обычно относят к классической теории упругости (см. §§ 15.02—15.03).

Если же приближенное решение задачи связано с принятием специальных для данной задачи допущений, например геометрического характера, то такое решение относят к прикладной теории упругости (см. главу 14—16).

иногда оказываются и слишком грубыми (например, в случае высоких балок).

Указанные выше наименования «одномерные и двухмерные задачи» не обязательно связывать с соотношениями в размерах тела по трем характерным направлениям. Чаще всего эти наименования связываются или с количеством тех основных (определяющих) функций в данной задаче, посредством которых легко определить все интересующие нас величины в той же задаче (напряжения, деформации и т. п.), или с количеством аргументов, от которых зависят эти функции.

Так, например, в случае обычной балки, изучаемой в сопротивлении материалов (когда ее длина в пять и более раз превышает высоту), достаточно знать только уравнение изогнутой оси стержня (функция одного аргумента — размера вдоль оси стержня), чтобы затем путем дифференцирования найти все остальные величины (девиации, изгибающие моменты, поперечные силы).

Именно в этом смысле задачи о брусе и вообще о стержневых системах в теории упругости называются *одномерными* задачами. По тем же соображениям пластинка, для которой такой определяющей функцией окажется уравнение ее изогнутой срединной поверхности (см. § 14.04), являющееся функцией от двух аргументов, считается *двухмерной* задачей теории упругости.

г) **Линейная и нелинейная теория упругости. Теория пластичности.** В основе классической теории упругости лежит представление об упругом и линейно деформируемом теле. Такое тело наделяется наиболее простой, а именно, *линейной зависимостью между слагающими деформации* и возникающими при этом *напряжениями* (обобщенный закон Гука). Последнее в свою очередь означает, что если внешние силы, одновременно и статически прикладываемые к упругому телу, возрастают или убывают в каком-либо известном отношении, то в той же пропорции возрастают или убывают напряжения, деформации и перемещения (прогибы, девиации и т. п.) в любой точке тела. Диаграмма растяжения — сжатия для такого материала в обычных координатах «напряжение — деформация» представляется прямой наклонной линией, выходящей из начала координат.

В теории упругости (см. § 2.11) под слагающими деформации в точке тела понимают *относительные удлинения* и *относительные сдвиги* в окрестности этой точки. Иначе говоря, удлинения и сдвиги являются *характеристиками деформации в бесконечно малом объеме тела*.

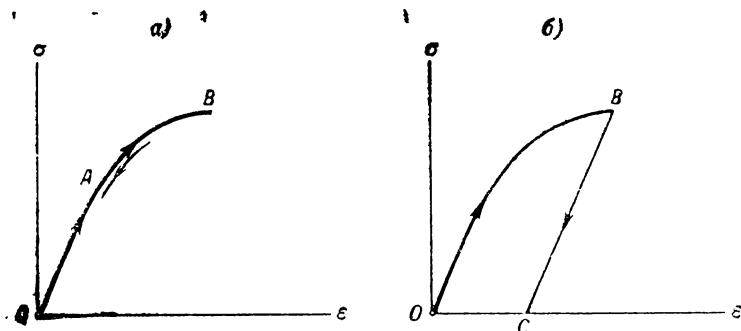
Однако в инженерной практике прогибы и девиации тела также называют деформацией; эти последние (линейные и угловые перемещения) будем считать *характеристиками деформации тела в целом*.

Если материал не подчиняется закону Гука (даже при малых напряжениях) или рассматриваемое состояние деформации перешло за предельное упругое и, стало быть, в изучаемом диапазоне деформаций диаграмма растяжения материала представляется явно выраженным отрезком кривой (фиг. 1.01 а), то в этих случаях в качестве физического закона надлежит принять уравнение упомянутой кривой, т. е. $\sigma = f(\epsilon)$.

Представим себе, что процесс медленной разгрузки происходит, следуя той же кривой BAO , причем в обратном порядке проходятся те же состояния, какие осуществлялись при нагрузке по OAB . Если график процесса вернется в начальную точку O , и мы не сможем указать никаких изменений, т. е. процесс OAB оказывается обратимым, то такое тело будем называть *нелинейно-упругим*.

Теория, устанавливающая законы образования деформаций в таком теле, может быть названа *нелинейной теорией упругости**.

Однако снятию нагрузки, как известно, для большинства строительных материалов соответствует так называемая „*прямая разгрузка*“ BC (фиг. 1.01, б), в результате чего тело не



Фиг. 1.01 Диаграмма растяжения для упругого материала, но не подчиняющегося закону Гука (слева). Диаграмма растяжения для неупругого материала (справа)

приходит в исходное положение: имеют место *остаточные, иначе говоря, пластические деформации*.

Известно, что при последующем нагружении того же материала его деформации практически будут в начале следовать линейному закону (если игнорировать образование петли упругого гистерезиса), и отступление от этого закона произойдет лишь при напряжениях, превышающих те, которые были в теле при первом нагружении.

Вообще при пластическом состоянии в каждый данный момент времени и для данной температуры связь между напряжениями и деформациями становится взаимно однозначной, если известны все предшествующие (в крайнем

* К кругу задач нелинейной теории упругости относят также и те задачи, в которых перемещения тела не могут считаться малыми, хотя в физическом отношении материал может являться и линейно-упругим, т. е. подчиняться закону Гука.

случае одно — последнее) *напряженные и деформированные его состояния и соответствующие значения температуры.*

Наукой, устанавливающей общие законы образования пластических деформаций и возникающих на всех стадиях пластического деформирования напряжений, является *теория пластичности*, имеющая тесную связь с нелинейной теорией упругости. Эта связь, как будет показано в § 17.02, заключается в том, что законы деформаций упруго-пластического тела при так называемом «простом нагружении» могут быть описаны с помощью уравнений нелинейного упругого тела с идентичной диаграммой рстяжения.

Процесс нагружения тела считается *простым*, когда внешние силы (если их несколько) от начала их приложения (непреренно все) возрастают, сохраняя между собой постоянное отношение, т. е. изменяются пропорционально их общему параметру (подробно о простом нагружении см. в § 17.02).

д) **Математическая и прикладная теории пластичности.** Как и в теории упругости наряду со строгой теорией пластических деформаций — назовем ее *математической теорией пластичности* — параллельно идет разработка упрощенных методов расчета путем введения дополнительных гипотез геометрического (например, закона плоскости) или физического характера (например, наделение тела свойствами идеальной пластичности). Круг задач по вопросам пластичности, решаемых в последнем направлении, составляет *прикладную теорию пластичности*.

Простейшие задачи теории пластических деформаций, изучаемые обычно в курсе сопротивления материалов (упруго-пластический изгиб, пластическое кручение бруса круглого сечения), характерны для этого прикладного направления.

е) **Теория ползучести.** В классической теории упругости и пластичности, как то следует из изложенного выше, напряженное и деформированное состояние тела вполне определяется нагрузкой, приложенной к указанному телу, и температурой окружающей среды. В отдельных случаях (при пластических деформациях) в какой-то степени может иметь некоторое значение история предыдущих нагружений тела и вообще его переживаний.

Формально по этим теориям, если в нагрузке и температуре среды на будущее изменений не предполагается, то не должно быть в будущем и изменений напряженного и деформированного состояния тела. В действительности, особенно в условиях высокого температурного поля это не так и деформация, хотя и медленно, может во времени нарастать. *Изменения во времени деформаций и напряжений, возникших в результате начального нагружения детали, принято*

называть ползучестью. С одной стороны этого явления, с изменением деформации при постоянной нагрузке, читатель знаком из общих курсов сопротивления материалов, где это явление называлось *последствием*. Другую сторону этого явления — изменение напряжений при постоянной деформации, часто называют *релаксацией*.

Ветвь механики, изучающая обе указанные стороны, объединяемые обычно термином ползучесть, и называется *теорией ползучести*.

Ползучесть имеет место как в том случае, когда при нагружении детали возникают пластические (остаточные) деформации, так и в том случае, когда вслед за нагружением деформации оказались упругие. По этой причине в теории ползучести будут по мере возможности использоваться некоторые методы как теории упругости, так и пластичности.

Собственно теория ползучести смыкается с реологией, понятие о которой читатель получил в начале этой книги. Однако такого отождествления все же не следует делать, так как в теории ползучести занимаются установлением законов образования и развития во времени деформации не любого вещества, а только твердых тел и в ограниченных физико-химических условиях.

ж) **О строительной механике.** Если строительную механику, иначе называемую *теорией сооружений*, понимать в широком смысле как комплекс всех технических дисциплин, предназначенных для определения напряжений и деформаций во всех сооружениях, создаваемых инженером (здания, мосты, машины, механизмы и т. д.) независимо от их конструктивной формы (брус, пластинка, оболочка, неограниченный упругий массив и т. п.), то теорию упругости, пластичности, ползучести, вместе с сопротивлением материалов и строительной механикой в узком смысле (т. е. строительной механикой стержневых систем, иначе — статикой и динамикой сооружений) можно отнести именно к такой *теории сооружений*. Впрочем, инженеры-строители давно считают, что теория упругости составляет один из разделов самой популярной для них науки — именно строительной механики.

Но суть дела не в том, куда формально отнести ту или другую область знания, а в том, что за последнее время отмечается *сближение теории упругости, пластичности, ползучести и строительной механики по существу*, т. е. проникновение методов, специфических для одной науки, в другую, и наоборот.

Заметим, что перенесение в теорию упругости (см. [1]) классических методов строительной механики (например, теории статически неопределимых систем и др.) значительно

расширило круг задач теории упругости, оказавшихся при таком кооперировании теперь решенными, хотя и с известной степенью приближения. От сближения с теорией упругости обогатилась и строительная механика, получив уточненные решения тех задач, для которых она раньше имела сравнительно грубые ответы.

В заключение отметим, что в связи с общим развитием сопротивления материалов, теории упругости, строительной механики и т. п. в дальнейшем, по-видимому, будут стираться грани между ними (см. [4] и [5]). Имеется ряд задач, которые и теперь с равным успехом можно отнести к любой из перечисленных дисциплин (пластинки, оболочки). Даже прежде принятые отличительные конструктивные формы изучаемых в строительной механике объектов, как-то: стержень и системы стержней, уже не являются теперь специфическими для строительной механики.

Строительная механика, в широком смысле этого наименования, должна давать не только правила для расчета сооружений (т. е. *анализ*), но и устанавливать также новые эффективные схемы сооружений любых конструктивных форм (т. е. *синтез*). Такие задачи, конечно, могут быть решены только наукой, включающей весь комплекс перечисленных выше технических дисциплин.

§ 1.02. Основные гипотезы и принципы механики деформируемого тела и классической теории упругости в частности

Теория упругости, отличаясь от сопротивления материалов большей строгостью в решении задач, вынуждена также прибегать к некоторой схематизации явления, обращаться к гипотезам, хотя число последних сводится к минимуму.

Основной предпосылкой в теории упругости, общей с сопротивлением материалов, является так называемая *гипотеза о сплошности строения упругого тела*.

По этой гипотезе тело сплошное, т. е. *непрерывное до деформации, остается непрерывным* (без пустот, без разрывов непрерывности) *и после деформации*; непрерывным остается любой объем тела и элементарный (микрообъем) в том числе. В связи с этим *деформации и перемещения точек тела считаются непрерывными функциями координат*.

Таким образом в классической теории упругости не принимается во внимание дискретная, атомистическая структура вещества и, тем более, движение отдельных молекул, составляющих тело.

Совершенно очевидно, что предположение о непрерывном строении материала, строго говоря, противоречит действительности, так как реальные материалы всегда обладают характерной структурой, для обнаружения которой даже не требуется микроскопа большого увеличения*. Однако также очевидно, что попытки математической интерпретации структуры материала в теории могут привести к результатам слишком сложным для обычного употребления, если такая интерпретация вообще окажется возможной (см. [1]).

Первые исследования по теории упругости, вообще-то говоря, строились, исходя из предположения о существовании именно индивидуальных частиц, отделенных друг от друга некоторым расстоянием и связанных друг с другом силами взаимного притяжения и отталкивания, действующими даже и при нормальной температуре и давлении и лишь изменяющими свое значение при изменении температуры и давления. Такую теорию упругости можно назвать *дискретной теорией упругости*.

Исключительные математические трудности такого изучения вынудили отказаться впоследствии от принятия в исследованиях дискретной схемы строения твердого тела и перейти к гипотезе** сплошной, т. е. *непрерывной среде* (механика континуума). К этому также побудило отсутствие (незнание) по тому времени многих физических постоянных, без которых теоретическое исследование невозможно.

Следует заметить, что и в теории упругости, оперируя с непрерывной средой, мы все же для целей анализа мысленно делим тело на частицы; однако они берутся достаточно и произвольно малыми (в пределе бесконечно малыми), вырезаются произвольно, соседние частицы всегда предполагаются плотно прилегающими друг к другу, и вообще частицы лишены в известном смысле индивидуальности.

Имеются попытки оценить степень точности результатов по гипотезе непрерывности в зависимости от поперечных

* Правомочность этой гипотезы, противопоставление ей гипотезы отдельных материальных точек и других гипотез, время от времени подвергалось критике. Спор об этих гипотезах вообще уходит в глубь веков и связан с философскими проблемами мироздания вообще. Отметим по этому поводу проведенное в 1950 г. Академией наук СССР дискуссионное Всесоюзное совещание, касающееся путей развития теории пластичности. Интересующихся этой дискуссией можно отослать к (1) (см. в указанной книге § 115 «Состояние теории пластичности в СССР»).

** Из приведенных выше соображений по поводу предпосылки о непрерывности среды совершенно очевидно, что ее трактовка как гипотезы не совсем удачна, так как не соответствует представлению о гипотезе, принятому в философии, физике и т. д. В дальнейшем изложении за указанной предпосылкой и другими, ей аналогичными, сохраняется (в условном смысле) название гипотезы.

размеров зерен и промежутков между ними. Эти попытки в конечном счете утверждают практическую пригодность гипотезы сплошности [5*].

Второй гипотезой, в некотором смысле примыкающей к первой, является *гипотеза о естественном ненапряженном состоянии тела*; согласно ей, существующие до приложения поверхностных нагрузок *начальные напряжения в теле*, характер и величина которых зависят от истории возникновения тела, *полагаются равными нулю*. Иначе говоря, определяемые в теории упругости напряжения не являются фактически напряжениями в теле, а составляют лишь прирост напряжений в рассматриваемых точках над начальными (неизвестными) напряжениями в тех же точках.

Хотя и имеются способы экспериментального определения упомянутых начальных напряжений методами современной теории упругости, однако строгое решение этой задачи могла бы дать (если бы была разработана) дискретная теория упругости, так как начальные напряжения, будучи уравновешенными по любому произвольному сечению тела, в пределах любого конечного объема, представляют собой уравновешенную систему напряжений уже в пределах ничтожно малых объемов, захватывающих небольшое число элементарных частиц (микрообъемы).

Заметим, что игнорирование в технических расчетах начальных напряжений, равно как и учет отступлений в структуре материалов от идеальной сплошности отчасти компенсируются тем, что установление основных механических характеристик материала (предел упругости, предел текучести и т. д.) и связанное с ними определение нормы допускаемых напряжений экспериментально выполняются также без учета начальных напряжений и без учета неравномерности заполнения веществом всего геометрического объема испытываемого образца. Например, в опытах с простым растяжением характерное напряжение находят делением характерной силы на площадь сечения, подсчитанную в предположении сплошного, без пустот, заполнения веществом. Компенсация, конечно, будет неполной, так как начальные напряжения в теле (деталь конструкции и т. п.) не будут такими же, как в лабораторном образце и т. п.

Следующими предпосылками классической* теории упругости являются наделение материала свойствами *идеальной упругости, шаровой изотропии, совершенной однородности*

* В дальнейшем под классической теорией упругости будем понимать только линейную теорию упругости однородного изотропного тела. Случай анизотропии будем относить к области специальных задач теории упругости.

и принятие *линейной зависимости между деформациями и напряжениями*. О первом и последнем из указанных допущений разъяснено в § 1.01.

Здесь лишь заметим, что пропорциональность между компонентами напряжений и компонентами деформации в каждой точке тела (иначе говоря, обобщенный закон Гука) не обязательно приводит к заключению о существовании прямой пропорциональности между величиной внешних нагрузок и приобретаемых телом перемещений, а следовательно, и вытекающему отсюда закону сложения отдельных действий — принципу независимости действия сил. В отдельных случаях (например, в так называемых контактных задачах, см. 12.04) линейная связь между компонентами напряжений и компонентами деформаций приводит к нелинейной зависимости между силами (например, нагрузка на шар) и перемещениями (смятие шара и т. п.).

Короче говоря, линейному закону деформации *в малом* (т. е. в точке тела) не всегда соответствует линейный закон деформации *в большом* (т. е. для тела в целом).

Шаровая изотропия материала понимается в том смысле, что физико-механические свойства одинаковы по всем направлениям, проведенным из данной точки материала, — любая плоскость, проходящая через частицу, может рассматриваться как плоскость симметрии для нее. Полагая, что этим свойством и в тех же числовых выражениях обладают все частицы материала, приходим к понятию *однородного изотропного тела*.

Для мельчайшего кристалла стали (для микрообъема) и вообще для технических сплавов, конечно, упругие свойства не одинаковы по разным направлениям, но беспорядочное расположение мелких кристаллов в частице создает так называемую квазиизотропию материала; таким образом, применительно к объему, включающему большое количество частиц (для макрообъема), во всех направлениях материал обладает одинаковыми свойствами в смысле среднего статистического эффекта, создаваемого деформацией отдельных кристаллов.

В этом смысле можно считать, что все величины, характеризующие напряжения и деформации, определяемые в теории упругости, вообще являются статистическими средними действительного их распределения в конгломерате зерен металлов и подобных им технических материалов.

К предпосылкам теории упругости, а впрочем, и всех ветвей реологии следует также отнести предположение, что *напряженное состояние в данной точке, необходимое для*

суждения о прочности и поведении материала в окрестности этой точки, определяется состоянием деформации в этой же точке, а не в некоторой области возле рассматриваемой точки (принцип «автономной прочности»).

Иначе говоря, принадлежит ли рассматриваемая точка однородно-напряженной среде (т. е. во всех соседних точках имеются одинаковые напряжения и деформации) или неоднородно-напряженной среде (соседние точки имеют другие деформации, например меньшие, чем рассматриваемая точка), — это не должно приблизить или отдалить момент разрушения материала в данной точке, если и в том и в другом случаях деформации в рассматриваемых точках одинаковы.

В математическом смысле это означает, что градиент напряжений (величина, характеризующая изменение напряжения от точки к точке) не влияет на прочность материала в данной точке.

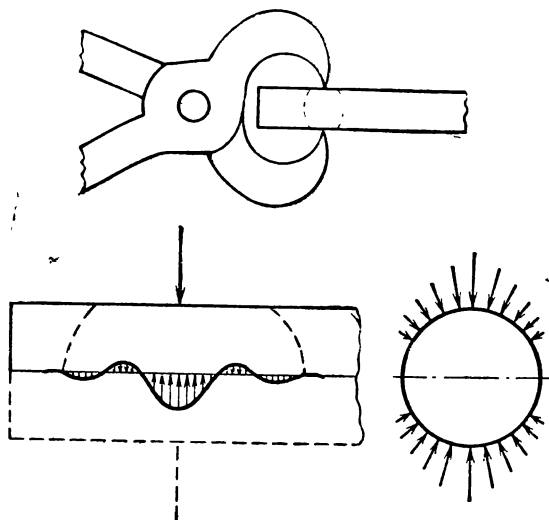
Большое количество задач теории упругости решается с использованием *принципа локальности эффекта самоуравновешенных внешних нагрузок*; в литературе он носит название *принципа Сен-Венана*. Согласно этому принципу, если в какой-либо малой части тела приложена уравновешенная система сил, то она вызовет в теле напряжения, очень быстро убывающие по мере удаления от этой части (экспоненциальный характер затухания напряжений).

Примером может быть случай с клещами, которыми сминают малую область тела (например, проволоку при ее перерезании). В этом случае клещи осуществляют уравновешенную систему сил, и как бы ни велики были эти силы, они почти не вызывают напряжений в остальных частях проволоки, вне малой области возле места нажатия клещами (фиг. 1.02).

Так как по правилам механики абсолютно твердого тела операция замены одной системы сил статически ей эквивалентной другой (например, перенос силы с верхней поверхности балки на нижнюю или замена сосредоточенной силы, приложенной к концу балки, на группу распределенных сил, имеющих ту же равнодействующую, или наоборот) связана с использованием (добавлением и т. п.) дополнительных самоуравновешенных сил, то представляется возможным принцип локальности прочесть и в другой редакции, а именно: *в точках твердого тела, достаточно удаленных от мест приложения внешних нагрузок, напряжения весьма мало зависят от детального способа осуществления этих нагрузок*.

Изучение же закона распределения напряжений в области, лежащей в непосредственной близости к месту приложения сосредоточенных или почти сосредоточенных нагрузок, сос-

твляет особые задачи теории упругости (контактные задачи, исследование местных напряжений), точные решения которых (см. §§ 12.04—05) только и могут установить те расстояния



Фиг. 1.02 Система взаимно уравновешенных сил, приложенных в какой-либо части тела, вызывает в теле напряжения, очень быстро убывающие по мере удаления от этой части. Внизу (в большем масштабе) показано распределение нормальных напряжений в среднем по высоте продольном сечении сжимаемого бруса

от нагрузок, на которых практически можно пользоваться принципом локальности. В инженерной практике, применительно к стержневым системам часто полагают, что упомянутые расстояния составляют два-три наибольших размера поперечного сечения стержня.

Наконец, в классической теории упругости (т. е. линейной) принимается, что:

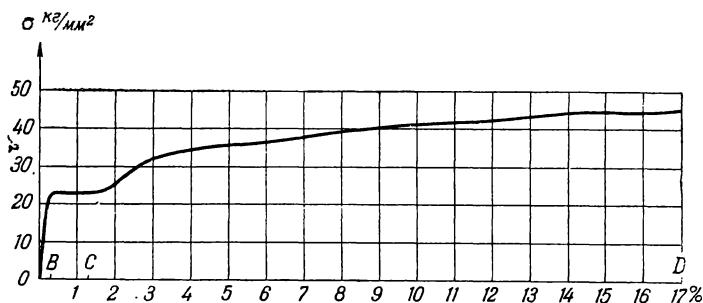
а) *перемещения тела* (применительно к стержням в строительной механике они назывались прогибами) *малы по сравнению с линейными размерами тела*; для полноты картины следует оговорить еще два допущения линейной теории упругости, хотя они обычно и вытекают как следствия из а); необходимость их сформулировать показана в § 3.09;

б) *относительные удлинения, а также и относительные сдвиги, т. е. углы сдвига в материале пренебрежимо малы по сравнению с единицей*;

в) углы поворота (т. е. девиации) малы по сравнению с единицей, а квадраты углов поворота пренебрежимо малы по сравнению с относительными удлинениями и сдвигами.

Указанные сейчас допущения а) и в) очевидны, а читателю известны также из курсов сопротивления материалов или строительной механики, так как только при соблюдении таких условий возможна нормальная эксплуатация конструкции, машины и т. п.

Удачной иллюстрацией к возможности согласиться с допущением б) является типичная диаграмма растяжения стали как наиболее употребительного материала в современных конструкциях и характерного по масштабу деформаций.



Фиг. 1.03 Характерная диаграмма растяжения для стали

На фиг. 1.03 приведены результаты испытания на растяжение образца, изготовленного из стали, применяемой в судостроении. По оси абсцисс отложены относительные удлинения, а по оси ординат — напряжения. На этой диаграмме участок *ОВ* соответствует упругой стадии работы стали, участок *ВС* — пластической стадии (площадке текучести) и наиболее длинный участок *СД* — стадии упрочнения. Длина упругого участка (отрезок) в данном частном случае равна $1,15 \cdot 10^{-3}$, длина площадки текучести около 10^{-2} и лишь длина участка упрочнения (до максимума кривой) около 0,17.

Указанные цифры типичны для сталей; в них область упругих деформаций ограничивается относительными удлинениями порядка $10^{-3} \div 5 \cdot 10^{-3}$, что пренебрежимо мало по сравнению с единицей.

Аналогичный порядок для тех же сталей имеет предельная величина упругих сдвигов.

Для теории конечных (немалых) деформаций (в нелинейной теории упругости) упомянутые выше допущения, конечно, снимаются.

В связи с указанными выше допущениями в классической теории упругости из круга ведения последней в силу ее ограниченности выпадают все так называемые нелинейные проблемы (задача о потере устойчивости упругого равновесия, задача изгиба брусьев, пластин, оболочек при прогибах, сравнимых с толщиной, и т. п.). Эти нелинейные задачи могут быть решены только с позиций нелинейной теории упругости.

Перечисленные выше гипотезы*, применяемые или одновременно все или частично (если это достаточно), позволяют решать широкий круг задач «прочностного расчета»; по окончательным результатам в большинстве случаев они в общем удовлетворительно согласуются с данными практики.

Не исключаются, конечно, случаи (более того, они непременно будут), когда именно опыт (но в отдельных, преимущественно новых по своему характеру примерах) покажет неприменимость того или иного предположения, укажет целесообразность замены его каким-то иным, т. е. выявится необходимость введения новой гипотезы. Последнее однако не должно означать, что надо отложить теоретические исследования и всякие «прочностные расчеты» до получения более совершенных схем, «точных» законов и т. п., так как совершенствование расчетных схем в науке может быть получено в результате практической работы с современными, хотя и не всегда совершенными схемами и моделями.

«Если бы мы захотели ждать, пока материал будет готов *в чистом виде* для закона, то это значило бы приостановить до тех пор мыслящее исследование, и уже по одному этому мы никогда не получили бы закона»**.

§ 1.03 Основные этапы в развитии теории упругости, пластичности и ползучести

Излагаемый ниже исторический экскурс отнюдь не претендует на полноту и ставит целью отметить лишь основные этапы в развитии теории упругости, пластичности и ползучести, которые имеют отношение к инженерной практике и ознакомление с которыми для читателя может оказаться поучительным.

В этом параграфе мы ограничимся описанием лишь тех этапов развития механики деформируемого тела, которые главным образом касаются развития взглядов на физические принципы, лежащие в основании перечисленных теорий (эти этапы относятся к XIX и началу XX в.).

Более подробное освещение и преимущественно советского периода и освещение других сторон истории читатель найдет в книгах ([1], [2], [6], [7], [8]).

* Их иногда называют «рабочими» гипотезами, подчеркивая этим удобство, вносимое ими в расчеты.

** Ф. Энгельс. «Диалектика природы». Госполитиздат, 1949, стр. 193.

Начала учения о прочности материалов, как связанные с потребностями практики, уходят в глубь веков. История древнего мира знает таких ученых механиков и строителей, как Архит (430—365 гг. до н. э.), Архимед (287—212 гг. до н. э.), Витрувий (1 в. н. э.) и других, пытавшихся выработать приемы расчета сооружений. Все эти приемы основывались лишь на умозрительных соображениях, часто весьма остроумных, но не имевших объективной ценности, ибо они не были подтверждены опытом (например, геометрический закон подобия), и потому на развитие учения о прочности материалов и сооружений они не оказали влияния.

Несомненно также, что строители древнейших сооружений умели как-то, по-видимому на базе опыта ранее возведенных сооружений назначать размеры сооружений так, что они оказались достаточно прочными. В этом смысле большой интерес и в настоящее время представляют некоторые постройки XV—XVI вв., как, например, изумительные по красоте и искусству творения русских зодчих, а именно: башни, палаты и гидротехнические сооружения Московского Кремля и таких старинных городов, как Новгород, Киев, Псков, Владимир, Углич и др. В письменном виде расчетов таких сооружений до наших дней не сохранилось.

Интерес представляют сооружения и более раннего периода, принадлежащие талантливым мастерам, как-то: некоторые храмы и здания в Закавказье (Мцхети) и на юге нашей страны, относящиеся еще к V в.

Сооружения этих, а также и еще более ранних эпох поистине достойны удивления современника и ожидают специальных исторических исследований, которые помогли бы пролить свет и разгадать секреты производившихся ранее расчетов на прочность.

Условно связывая начало истории теории упругости и учения о прочности материалов с первыми опубликованными и сохранившимися до наших дней печатными документами, историк должен начать повествование с великого ученого своей эпохи Галилея (1564—1642 гг.), который впервые описал проведенные им в Венецианском арсенале опыты над изгибаемыми балками. Хотя выводы из этих опытов, сделанные Галилеем, были ошибочными и используемая теперь так называемая техническая теория изгиба балок (1856 г.) была создана в трудах нашего соотечественника Д. И. Журавского (1821—1891 гг.), но именно с Галилея начинается эра опытных исследований. Мысли Галилея через посредство печатных его произведений и при содействии многочисленных его учеников скоро получили распространение.

Справедливость требует отметить, что вопросами прочности материалов еще за 150 лет до эпохи Галилея интересовался Леонардо да Винчи (1452—1519 гг.), кого Ф. Энгельс называл одним из титанов по силе мысли, страстности и характеру, по многосторонности и учености. Однако рукописи, содержавшие исследования Леонардо да Винчи по вопросам прочности, были утеряны и частично обнаружены сравнительно недавно. Известное высказывание, принадлежащее Леонардо да Винчи, «Практика — последний критерий научной теории... Мне кажется, что те науки суежны и полны ошибок, которые не рождаются из опыта — матери всякой достоверности и которые не заканчиваются на опыте» полностью отвечает и современному в механике деформируемого тела методологическому принципу.

Основной закон деформирования упругих тел в его простейшей, линейной форме, но к тому времени еще без объяснения физической сущности явления упругости, был в 1678 г. сформулирован Р. Гуком (1635—1702 гг.).

Первая попытка рассмотрения нелинейной связи между напряжениями и деформациями, т. е. в форме, отличной от закона Гука, была сделана Бюльфингером и опубликована в трудах Российской Академии наук в 1729 г.

Первые существенные вклады в дело создания математической теории изгиба упругого стержня принадлежат русским академикам Л. Эйлеру (1707—1783 гг.) и Д. Бернулли (1700—1782 гг.) и опубликованы в 40—70 гг. XVIII века. Эйлеру принадлежат первые исследования упругой устойчивости (задача о продольном изгибе). Эйлер и Бернулли занимались также проблемой поперечных колебаний упругого стержня.

По вопросу о причинах упругости и о содержании самого понятия упругости ценные мысли были высказаны нашим великим соотечественником М. В. Ломоносовым (1711—1765 гг.) в его знаменитом трактате «Попытка теории упругой силы воздуха», представленной им в 1748 г. в Российскую Академию наук. В этом трактате Ломоносов решительно осуждал тенденции призывать «по обычаю века» на помощь для отыскания причины упругости воздуха «невесомую материю упругости». Ломоносов писал: «Мы довольствуемся тонкостью и подвижностью самого воздуха и ищем причину упругости в самой материи его». Материалистической корпускулярной философии Ломоносова было органически чуждо представление о невесомых материях.

Попутно отметим, что Ломоносову принадлежит и введение в употребление на русском языке самого слова «упругость».

Первым исследователем, занявшимся построением общих уравнений равновесия и колебания упругих тел, был французский инженер и ученый Навье (1785—1836 гг.). Он исходил из концепции Ньютона о строении вещества и считал, что упругие реакции возникают вследствие тех изменений интрамолекулярных сил, которые являются результатом перемен во взаимном расположении молекул.

В этом смысле исследования Навье примыкают к дискретной теории упругости*.

Полученные им дифференциальные уравнения были выражены в смещениях молекулы и содержали одну постоянную, выражающую упругие свойства тела. Его мемуар был прочитан в Парижской Академии наук в 1821 г. Однако примененный Навье ход рассуждений не встретил общего признания. Были выдвинуты возражения против принятого Навье выражения для силы взаимодействия двух молекул, оспаривалась также законность примененного Навье способа интегриции взведен трехкратного суммирования при подсчете сил, действующих на отдельную молекулу.

Относящиеся к тому же периоду открытия в теории распространения света (гипотеза поперечных колебаний) тесно связали дальнейшее развитие теории упругости с проблемой распространения света. Проблема распространения волн в упругой среде привлекла тогда внимание трех выдающихся математиков: М. В. Остроградского (1801—1861 гг.), Коши (1789—1857 гг.) и Пуассона (1781—1840 гг.).

Русский академик М. В. Остроградский внес существенный вклад в развитие динамической теории упругости своими работами о распространении деформации в упругой изотропной среде, опубликованными в период 1829—1832 гг. С именем Остроградского связываются не только его

* Заметим, что упомянутая «молекулярная» теория Навье, как и родственные ей последующие попытки в том же направлении Пуассона и Коши, имеют мало общего с современными в физике представлениями о поведении молекул. Изыскания, проводимые в настоящее время и относящиеся к дискретной теории упругости, не представляют, конечно, возврата к элементарным концепциям Навье.

Попутно заметим, что для практических расчетов того времени Навье, по-видимому, считал возможным также исходить из гипотезы сплошности и отсутствия начальных напряжений в теле. Последнее можно усмотреть из характера изложения его курса сопротивления материалов, относящегося к тому времени.

работы по динамической теории упругости, но и целая школа в области механики, получившая мировое признание*.

Коши в 1822 г. ввел современное в теории упругости понятие о напряжении в точке, выразил деформацию в окрестности данной точки через шесть компонентов деформации и вывел уравнения движения (или равновесия), которые связывают компоненты напряжений с силами, распределенными по объему, и с силами инерции. Соотношения между напряжениями и деформациями Коши построил на допущениях, что эти соотношения линейны и что главные напряжения в данной точке совпадают по направлению с главными осями деформации. Остается неясным, почему Коши для оправдания последних допущений не указал на экспериментальный закон Гука. Полученные им уравнения — именно те, которые приняты ныне для изотропных тел.

Методы первоначальных** исследований Коши отличны от методов исследования Навье; гипотеза материальных точек, связанных действием центральных сил (через пустоту), Коши не применялась. Есть важные различия и в уравнениях: уравнения Навье содержат одну постоянную, выражающую упругие свойства тела, тогда как в уравнения Коши входят две такие постоянные.

В начале XIX столетия указанными выше трудами Навье, Коши, Остроградского, Пуассона и другими были положены основы той ветви, которую теперь называют математической теорией упругости. Однако методы теории упругости оставались в стороне от инженерной практики. Представители математической теории упругости того времени занимались главным образом такими физическими проблемами, как объяснение явлений распространения света, исходя из представления об эфире как об упругом теле, исследовали напряжения в земной коре вследствие тяготения и охлаждения земли и т. д.

Теория упругости оставалась наукой, достаточно далекой от конкретных технических приложений, и инженеры ею не пользовались. Такой отрыв теории упругости от требований инженерной практики, с одной стороны, развитие строительства железных дорог, металлических для них мостов, машиностроения, железного судостроения и связанная с этим необходимость производить расчеты на прочность машин и сооружений — с другой, вызвали к жизни учение о сопротивлении материалов как чисто практическую дисциплину, основанную на наглядных гипотезах и элементарных математических приемах, широко использующих экспериментальный материал, как полученный в результате специально поставленных опытов, так и накапливающийся в процессе эксплуатации тех или иных объектов.

Таким образом, дальнейшее развитие механики деформируемого тела разветвляется на два русла. Одно, отправляющееся от методов, введенных Л. Эйлером и Д. Бернулли, связанное в дальнейшем со славными именами наших соотечественников Д. И. Журавского (1821—1891 гг.), Ф. С. Ясинского (1856—1899 гг.), В. Л. Кирпичева (1845—1913 гг.) и других, получает название *теории сопротивления материалов*, и другое, именуемое *математической теорией упругости*, является продолжением теории Навье.

В связи с первым направлением, впоследствии определившим строительную механику, следует упомянуть также о современнике Л. Эйлера выдающемся русском изобретателе И. П. Кулибине (1735—1818 гг.), получившем мировую известность за изобретение автоматов. В 1776 г. И. П. Кулибин составил проект арочного деревянного моста пролетом 300 м через р. Неву в Петербурге и изготовил, а затем испытал его модель в 1/10

* См. Н. Д. Моисеев, Общий очерк развития механики в СССР, Сборник «Механика в СССР за тридцать лет», М.—Л., 1950.

** В последующем он распространил свою теорию и на случай кристаллического тела, воспользовавшись гипотезой о материальных точках.

натуральной величины. Этот проект, будучи по тому времени дерзким вызовом мировой технике, содержал достоверные суждения об упругой работе арок. Расчеты арок были проверены Л. Эйлером и признаны правильными. *«На ней печать гения»*, — писал Д. И. Журавский по поводу арки Кулибина.

Далее следует отметить плодотворную работу в Петербургском институте инженеров путей сообщения французских инженеров Ляме (1795—1870 гг.) и Клапейрона (1799—1864 гг.), которые развивали теорию Навье применительно к строительному делу.

Плодотворное развитие известной задачи Ляме об осесимметричной деформации толстостенной трубы было сделано русским академиком А. В. Гадолиным (1828—1892 гг.); метод расчета скрепленных стволов, разработанный Гадолиным, получил всеобщее признание и широкое использование во всех странах.

Не касаясь освещения причин крушений гигантских железнодорожных мостов, гибели некоторых пассажирских быстроходных пароходов и др. (исследования которых давали большой толчок к развитию методов расчета на прочность), интересующимися связью прогресса в теории упругости и катастрофами рекомендуем обратиться к сочинениям В. Л. Кирпичева (32*), Ф. Д. Дмитриева (20*) и к источникам, указанным в этих произведениях.

Возвращаясь к вопросу о развитии взглядов на физические принципы в теории упругости, отметим большие споры о количестве упругих постоянных (одна или две, или больше) и о значении некоторых констант. Причиной споров являлось расхождение опытных данных с результатами теории, вытекающей из гипотезы центральных сил. Заметим, что опыты приверженцев одних взглядов не всегда были достаточно убедительными для сторонников других воззрений вследствие ограниченности методики испытаний и специфики в выборе самого материала для экспериментирования (пробка, желатин, каучук), что было характерно для многих участников спора того времени, фактически оторванных от нужд практической жизни. Они, по выражению А. Лява*, «интересовались скорее натуральной философией, чем материальным прогрессом, стремились скорее познать мир, чем сделать его более удобным».

Вместе с тем эти споры не прошли для науки без пользы; они пролили свет на самые недоступные вопросы о природе молекул и характере их взаимодействия (оказалась несостоятельной гипотеза упругой светонесущей среды и т. д. и т. п.).

Одновременно происходившая эволюция в физических воззрениях на строение материи, развитие атомистической теории в химии, статистической молекулярной теории в физике, на распространение энергетических принципов и т. п. окончательно подрывали доверие, которым ранее пользовалась гипотеза материальных точек, связанных действием центральных сил через пустоту.

Эта гипотеза, отражающая дискретную схему строения материи, в последующем была оставлена и уступила место гипотезе о сплошности, т. е. механике континуума, с которой и связываются наиболее выдающиеся произведения по теории упругости конца XIX в. и современности**.

К таким выдающимся произведениям следует отнести работы Сен-Венана (1797—1886 гг.), связанные со строгой разработкой проблемы изгиба

* А. Ляв, Математическая теория упругости, М.—Л., 1935.

** Гипотеза сплошности, иначе говоря, сознательное пренебрежение дискретностью в строении тела и дискретностью в характере деформации, в последнее время также подвергалась резкой критике (см. [1], но сохраняет свое значение и для настоящего времени.

и особенно кручения призматических тел (1855 г.; см. § 13.02), исследования Герца (1882 г.; см. § 12.05) в области передачи силы (смятие шаров) и др.

Исследования Сен-Венана по изгибу показали, что элементарная теория изгиба, созданная Бернулли и Эйлером, обладает весьма большой точностью и совершенно достаточна для практических целей. Его исследования по теории кручения показали ошибочность предложения Навье рассчитывать стержень любого профиля по тем формулам, которые еще в 1784 г. были выведены Кулоном для стержней круглого сечения и основаны на гипотезе плоских сечений [2]. Так, по теории Навье цельная и разрезанная по образующей трубы обладают одинаковой жесткостью на кручение; стержень круглого профиля и стержень узкого прямоугольного профиля при одинаковых площадях сечений якобы также обладают равными жесткостями на кручение и др. Авторитет Навье обеспечил этим ошибочным результатам распространение в течение многих лет даже после опубликования в 1855 г. работ Сен-Венана по теории кручения призматических тел.

В области так называемой плоской задачи теории упругости следует особо отметить работы Г. В. Колосова (1909 г.), изложившего впервые метод, основанный на применении теории функций комплексного переменного. Метод Колосова был впоследствии развит и обобщен нашим талантливым современником Н. И. Muskhelishvili.

Из ученых дореволюционной России, труды которых были основополагающими, надо назвать И. Г. Бубнова (1872—1919 гг.) (теория пластинок с цепными напряжениями), Б. Г. Галеркина (1871—1945 гг.) (приближенные методы решения статических задач о расчете пластинок, впоследствии использованные в других задачах теории упругости, в аэродинамике, гидродинамике и т. п.), Л. С. Лейбензона (1879—1950 гг.) (расчет безбалочных перекрытий), В. Л. Кирпичева (по сближению математической теории упругости со строительной механикой), Х. С. Головина (1844—1904 гг.) (теория изгиба кривых брусев), П. Ф. Папковича (1887—1946 гг.) и А. Н. Крылова (1863—1945 гг.) (строительная механика корабля).

Отрыв ученых от практики, характерный для науки в прошлом и особенно для зарубежной, и вытекающее из этого отрыва определенное умонастроение, по справедливому выражению А. Лява [38], привели к тому, что «теория в меньшей степени, чем она могла бы, содействовала материальному прогрессу человечества».

Великая Октябрьская социалистическая революция коренным образом изменила развитие науки в нашей стране. Характерными особенностями советской механики деформируемого тела являются ее тесная связь с практикой строительства, принципиальность, научность и глубина анализа.

Организация мощных научно-исследовательских институтов, оснащенных современным оборудованием, разработка проблем прочности не только отдельными талантливыми учеными, а большими коллективами, участие всей армии советских механиков в решении неотложных задач, выдвигаемых грандиозными Стройками Коммунизма, все эти обстоятельства, вместе взятые, определили столь значительный перелом в развитии науки, что *новый этап в развитии теории упругости следует считать с Великой Октябрьской социалистической революцией.*

Назовем относящиеся к этому новому периоду некоторые проблемы теории упругости, оказавшие важное значение для инженеров различных специальностей, как-то: развитие методов решения так называемой в теории упругости плоской задачи при помощи теории функций комплексного переменного, разработанные Н. М. Muskhelishvili (академик АН СССР, президент АН Грузинской ССР), дальнейшее развитие теории изгиба пластинок, исследования в области отыскания общего метода решения системы дифференциальных уравнений равновесия упругого тела, расчет толстых плит и т. д., выполненные акад. Б. Г. Галеркиным, талантливо продолженные членом-корреспондентом АН СССР П. Ф. Папковичем. Отме-

тим оригинальный способ определения напряжений в пространственном теле (призме) с помощью функций особого класса, предложенный проф. М. М. Филоненко-Бородичем.

Общая теория пространственной работы тонкостенных стержней, складчатых систем и оболочек была детально разработана в трудах члена-корреспондента АН СССР В. З. Власова, дважды удостоенного Государственной премии СССР. Отметим исследования пространственных задач теории упругости, выполненные членом-корреспондентом АН СССР А. И. Лурье.

Существенные достижения оказались в новой отрасли теории упругости — нелинейной теории упругости, принадлежащие члену-корреспонденту АН СССР В. В. Новожилову.

Большие успехи были получены в решении пространственных контактных задач члена-корреспондента АН СССР Н. М. Беляева, члена-корреспондента АН Украинской ССР И. Я. Штаермана и др.

Вторая четверть XX века характерна развитием новой ветви механики — теории пластичности, к которой причастны ученые многих стран как-то, А. Надаи, В. Прагер и другие, но особо ценные результаты были получены членами-корреспондентами АН СССР А. А. Ильюшиным и В. В. Соколовским. Отметим также участие в исследованиях по теории пластичности академика А. Ю. Ишлинского, проф. Г. А. Смирнова-Аляева и его многочисленных последователей, проф. Л. М. Качанова и др.

Особо отметим удачные для инженерной практики решения и исследования, разработанные академиком АС и А СССР А. А. Гвоздевым, по расчету пластинок и оболочек за пределом упругости по так называемым предельным состояниям.

Эти исследования были успешно развиты членом-корреспондентом АС и А СССР А. Р. Ржаницыным. К прикладному направлению теории пластичности принадлежат ценные исследования проф. Н. Д. Жудина (АН Украинской ССР), А. И. Стрельбицкой и др.

Начавшаяся вторая половина XX века характерна бурным развитием совсем юной отрасли механики деформируемого тела, а именно — теории ползучести.

Здесь выделяются работы академика Ю. Н. Работнова, профессоров В. М. Панферова, Л. М. Качанова, И. И. Гольденבלата, А. Р. Ржаницына, академика АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняна и многих других.

Проводимые в СССР регулярные научные конференции по проблемам теории упругости и пластичности в незначительной степени содействуют успешному развитию и координированию научно-исследовательских работ.

Прошедшее в начале 1960 г. Всесоюзное совещание по теоретической и прикладной механике с широким участием зарубежных ученых отметило большие достижения советских ученых в области механики деформируемого тела и, естественно, наметило перспективный план дальнейшего развития науки с учетом бурно развивающейся техники в Советском Союзе.

Краткими выводами по 1-ой главе может служить Последствие (см. стр. 531).

Литература к главе I

Исторические экскурсы, касающиеся развития различных ветвей механики деформируемого тела, содержатся в книгах [1], [2], [3], [8], [10].

1. Безухов Н. И. Теория упругости и пластичности, Госуд. изд-во технико-теоретической литературы, М.—1953. Историческим очеркам развития теории упругости и пластичности в работах отечественных ученых посвящены §§ 12, 39, 44, 76, 98, 107, 115, 124, 125.
2. Бернштейн С. А. Очерки по истории строительной механики, Госстройиздат, М.—1958. Книга представлена четырьмя очерками и в

увлекательной форме излагает историю развития современных методов расчета сооружений на прочность. Отмечаются выдающиеся работы Л. Эйлера, И. П. Кулибина, Х. С. Головина, Г. Е. Паукера.

3. В е л и х о в П. А. Теория инженерных сооружений. Вып. I, Гостехиздат, М. — 1924.

Книга по своему времени представляла первый опыт слитного изложения основ сопротивления материалов и строительной механики. Имеются исторические экскурсы. Книга отличается оригинальностью построения, живостью изложения, стремлением автора увязать проблемы сопротивления материалов и теории упругости с проблемами естествознания.

4. Г а с т е в В. А. Краткий курс сопротивления материалов. Физматгиз, 1959.

Наряду с вопросами, относящимися к курсу сопротивления материалов, затронуты элементы теории упругости и ползучести.

5. И л ь ю ш и н А. А. и Л е н с к и й В. С. Сопротивление материалов. Физматгиз, 1959.

Как и в (4), дано слитное изложение вопросов теории сопротивления материалов, теории упругости, пластичности и ползучести.

6. Л е х н и ц к и й С. Г. Теория упругости анизотропного тела, Гостройиздат, М. — Л., 1950 (см. стр. 129—130, 137).

7. Л у р ь е А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек, 1948 (см. стр. 38, § 16.06).

8. Р а б и н о в и ч И. М. Строительная механика в СССР, Гостройиздат, М. — Л., 1957.

Сборник содержит ряд статей историко-обзорного характера о достижениях в СССР за последние 40 лет в области прикладной теории упругости и пластичности, теории оболочек и пластин, строительной механики стержневых систем.

9. С о к о л о в с к и й В. В. О некоторых работах по теории пластичности, ПММ, т. IX, вып. 6, 1945 (см. § 19.08).

10. Т и м о ш е н к о С. П. История науки о сопротивлении материалов, перевод с английского, Гостехиздат, М., 1957.

В его «Истории», изданной в США, затронут период XIX в. и первая половина XX в.; большое внимание в этой книге отведено работам русских ученых Д. И. Журавского, Ф. С. Ясинского, Б. Г. Галеркина и др.

«Мы не можем представить, выразить, смерить, изобразить движения, не прервав непрерывного, не упростив, углубив, не разделив, не омертвив живого. Изображение движения мыслью есть всегда огрубление, омертвление, — и не только мыслью, но и ощущением, и не только движения, но и всякого понятия. И в этом суть диалектики».

В. И. Ленин. Философские тетради.

РАЗДЕЛ I

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

А. СТАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ

§ 2.01. Обозначение составляющих напряжений. Тензор напряжений

Величины внешних, т. е. поверхностных нагрузок, а также внутренних сил характеризуются их *интенсивностью*, т. е. величиной усилия, приходящегося на единицу площади поверхности, на которую они действуют.

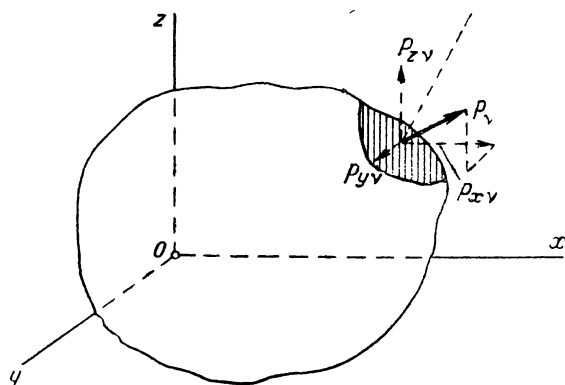
При рассмотрении внутренних усилий эта интенсивность обычно называется *напряжением*; впрочем, последнее наименование можно сохранить и для внешних нагрузок, если они распределены на рассматриваемой области сплошным образом.

Для дальнейшего условимся называть «волокном тела» совокупность его точек, расположенных вдоль некоторой линии, а «линейным элементом тела» — дифференциально малый отрезок какого-либо волокна.

«Слоем тела» будем называть совокупность его точек, располагающихся на некоторой поверхности, а «элементарной площадкой тела» — бесконечно малый элемент какого-либо слоя.

Для обозначений интенсивностей сил удобно применить следующую систему. Представим себе некоторое тело рис. (2.01) с заданной конфигурацией и заданными нагрузками,

как внешними (т. е. приложенными на наружной поверхности тела), так и объемными силами (силы тяжести и т. п.), но при совокупности которых заданное тело находится в равновесии. Если в заданном теле, некоторым образом ориентированном в прямоугольной системе координат (x, y, z) , рассматриваемая нами точка лежит на какой-либо элементарной



Фиг. 2.01 Обозначение полного напряжения в точке на площадке с заданной нормалью

площадке, например, взятой на наружной поверхности тела (фиг. 2.01), внешняя нормаль к которой у той же точки обозначена через v и не параллельна ни одной из координатных осей x, y, z , то интенсивность усилия, или иначе полное напряжение для данной точки, будем обозначать p_v . Направление вектора p_v совпадает с направлением усилия.

Если через ΔP_v обозначим усилие, приходящееся на рассматриваемую элементарную площадку ΔF , то указанное выше напряжение, иначе говоря, плотность силы, вычисляется как предел отношения:

$$p_v = \frac{\Delta P_v}{\Delta F}$$

при ΔF , устремляющемся к нулю.

Заметим, что такая формулировка понятия напряжения непременно предполагает тело сплошным, непрерывным.

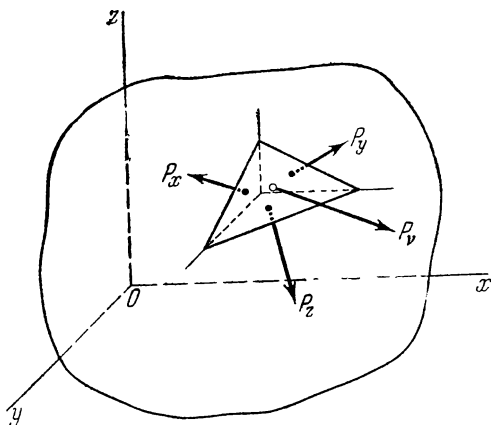
Для материалов, имеющих молекулярную структуру, невозможно связать элемент площадки с силой, действующей на этом элементе.

Иначе говоря, для дискретной теории упругости указанная выше формулировка напряжения неприемлема.

Проекции полного напряжения на координатные оси x , y , z соответственно будем обозначать p_x , p_y , p_z , причем, очевидно, имеет место равенство

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2. \quad (2.01)$$

Если обозначение напряжения имеет два индекса, то первый отмечает ту ось, параллельно которой направлена составляющая напряжения, а второй — нормаль к той площадке,



Фиг. 2.02 Обозначения полных напряжений на всех четырех гранях тетраэдра, вырезанного возле заданной точки

на которой действует рассматриваемая составляющая (т. е. второй индекс означает *адрес* напряжения). Наличие у обозначения напряжения одного только индекса, указывающего нормаль к площадке, на которой оно действует, определяет полное напряжение в точке. Пусть нас теперь интересует напряженное состояние в окрестности какой-либо точки M *внутри тела*, имеющей координаты x , y , z (фиг. 2.02). Если провести через эту точку внутри тела какую-либо площадку, то для обозначения как полного напряжения на этой площадке, так и его составляющих можно сохранить ту же систему. В частности, если в рассматриваемом нами теле через произвольную точку (x, y, z) проведем три плоскости, параллельные координатным, и, пересекая их одной наклонной плоскостью, достаточно близкой к точке (x, y, z) , вырежем элемент в виде тетраэдра (называемый в дальнейшем «элементарный тетраэдр») (фиг. 2.02), то обозначения действующих по его граням полных напряжений, представляющих взаимодействие этого тетраэдра с остальным телом, должны

иметь начертания p_x , p_y , p_z и p_v . Составляющие этих напряжений параллельны координатным осям и действуют по трем взаимно перпендикулярным площадкам, параллельным именно координатным плоскостям (эти грани тетраэдра принято называть основными площадками), должны в соответствии с вышеуказанным получить такие обозначения:

от p_x — составляющие p_{xx} , p_{yx} , p_{zx} ;

от p_y — составляющие p_{xy} , p_{yy} , p_{zy} ;

от p_z — составляющие p_{xz} , p_{yz} , p_{zz} .

Заметим, что составляющие p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} , как нормальные к соответствующим площадкам, представляют известные читателю из курса сопротивления материалов *нормальные напряжения*, остальные же — p_{xy} , p_{yz} и т. д. известные из того же курса *касательные напряжения*. Сохраняя систему обозначений, известную читателю из курсов сопротивления материалов, нормальные напряжения будем обозначать буквой σ с приданием ей индекса, указывающего ту ось, параллельно которой направлено это напряжение (одновременно это будет и обозначением нормали к площадке, на которой рассматривается нормальное напряжение); для обозначения касательных напряжений примем букву τ с приданием ей двух индексов в соответствии с указанным выше правилом. Так, например, τ_{xy} есть касательное напряжение, имеющее направление, параллельное оси x и действующее на площадке, нормаль к которой параллельна оси y .

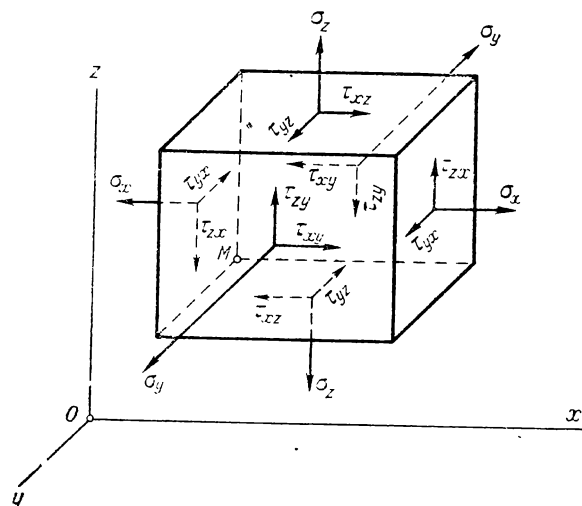
Нормальное напряжение принято считать положительным, когда оно вызывает растяжение (в этом случае оно направлено по внешней нормали к площадке, принадлежащей рассматриваемой части тела), и отрицательным, когда оно вызывает сжатие (в последнем случае оно направлено для данной части тела по внутренней нормали).

За положительные направления составляющих касательного напряжения, действующего на любой основной площадке, принимаются положительные направления осей координат, если растягивающее нормальное напряжение по той же площадке имеет направление, совпадающее с положительным направлением той оси, параллельно которой действует упомянутое нормальное напряжение. Если растягивающее напряжение на рассматриваемой площадке имеет направление, противоположное положительному направлению соответствующей, т. е. параллельной ему, координатной оси, то за положительные направления составляющих касательного напряжения на той же площадке следует взять отрицательные направления соответствующих им осей.

На фиг. 2.03 указаны обозначения всех составляющих компонентов напряжений по граням бесконечно малого

параллелепипеда, который мысленно вырезан из заданного тела, причем предположительно все напряжения назначены положительными.

Если размеры изучаемого параллелепипеда будут в самом деле бесконечно малыми и можно пренебречь объемным



Фиг. 2.03 Обозначения компонентов напряжений по граням бесконечно малого параллелепипеда, вырезанного возле заданной точки

весом такого параллелепипеда, то одноименные и параллельные напряжения для каждой пары параллельных граней, вообще говоря, различающиеся между собой на бесконечно малую величину, будут практически одинаковыми, что и показано на фиг. 2.03. Такой бесконечно малый параллелепипед в дальнейшем будем называть *элементарным объемом*, или *элементарным параллелепипедом*.

Элементарный параллелепипед является одним из основных объектов изучения в теории упругости и родственных ей науках*.

Вполне очевидно, что, когда возникнет задача нахождения закона распределения напряжений в определенной области тела, то, переходя от одного элементарного объема к другому,

* Отметим, что в рассматриваемой прямоугольной координатной системе элементарный объем имеет форму именно прямоугольного параллелепипеда. В случае использования других координатных систем (цилиндрической и т. д.) элементарный объем, очевидно, будет иным, так как грани его будут определяться направлением (и формой) принятых координатных плоскостей (или поверхностей).

конечно, придется учитывать упомянутые выше бесконечно малые разности в величинах напряжений по параллельным граням с чем, в последующем, читатель и встретится (см. § 3.02).

Приступая к исследованию напряженного состояния элементарного параллелепипеда, мы имеем, следовательно, неизвестными по три компонента на каждой паре параллельных граней, а всего девять величин — три нормальных и шесть касательных составляющих напряжений. Впрочем, знакомый читателю из теории сопротивления материалов закон о парности касательных напряжений остается в силе и в данном случае пространственного напряженного состояния. В общем виде этот закон взаимности доказывается в § 3.04, здесь лишь отметим, что в принятых выше обозначениях следующие составляющие касательных напряжений равны между собой:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (2.02)$$

Таким образом, всего неизвестных компонентов напряжений будет шесть.

Все указанные выше составляющие напряжений вполне определяют напряженное состояние рассматриваемого элементарного объема. Зная напряжения по трем ортогональным площадкам, проведенным возле рассматриваемой точки, без затруднений, как это показано в § 2.05, можно вычислить напряжения по любой площадке, произвольно наклоненной к основным взаимно перпендикулярным плоскостям.

Равным образом не составит затруднений перейти от напряжений к деформациям ввиду простой линейной связи, существующей между первыми и вторыми (см. § 4.01). Если затем деформированные элементарные объемы сложить вместе, то, очевидно, получим в целом деформированное тело.

* * *

Расположим все напряжения, определяющие собой напряженное состояние в рассматриваемой точке, в виде следующей наглядной таблички (матрицы):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, & \sigma_y, & \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}. \quad (2.03)$$

В первой строке расположились все компоненты напряжений, имеющие направление, параллельное оси x , во второй строке — параллельное оси y и в третьей строке — параллельное оси z . Кроме того, в первом столбце сгруппировались напряжения, действующие на площадке, нормаль к которой параллельна оси x , во втором столбце — все на-

пряжения на площадке с нормалью, параллельной оси y^* , и в третьем столбце — на площадке с нормалью, параллельной оси z .

В связи с этим первый индекс у напряжений, расположенных в первой строке, является общим, а именно x ; у второй строки y , а у третьей z . Вторые индексы (а для нормального напряжения — тот же единственный индекс) оказываются общими по вертикали. Так, у первого столбца — обозначение оси x , у второго — оси y и у третьего — оси z .

Нормальные напряжения при таком способе построения таблички расположились по главной диагонали, а одинаковые по величине касательные напряжения расположились симметрично относительно этой диагонали. По этой причине табличку будем для краткости письма записывать также в виде:

$$T_n = \begin{Bmatrix} \sigma_x, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ \cdot, & \sigma_y, & \tau_{yz} \\ \cdot, & \cdot, & \sigma_z \end{Bmatrix}. \quad (2.04)$$

Точки указывают, что члены, вместо которых они стоят, равны симметрично расположенным.

Написанную выше симметричную квадратную матрицу называют *тензором напряжений*. Впрочем, каких-либо специальных сведений из тензорного анализа для дальнейшего изложения от читателя не требуется и можно вообще обойтись без указанного понятия и наименования**. Однако по ходу изложения будут выясняться некоторые замечательные свойства написанной матрицы, расширяющие представления о напряженном состоянии в точке. Вообще, как в этом дальше и убедится читатель, *напряженное состояние в точке вполне определено, если задан тензор напряжений для этой точки****.

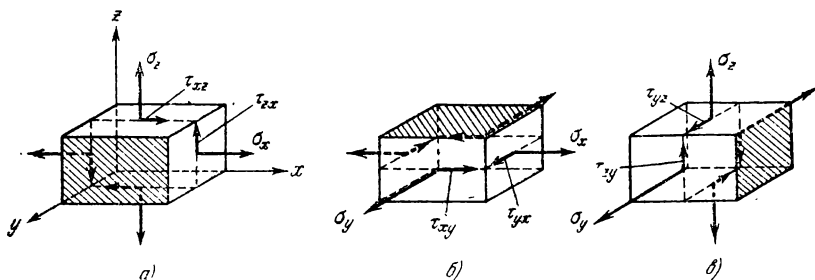
§ 2.02. Частные случаи записи тензора напряжений

Если из трех пар параллельных друг другу наружных граней параллелепипеда одна пара окажется свободной от напряжений, как это показано на фиг. 2.04 и, следовательно,

* Возможно поменять местами указания адреса и направления, т. е. вместо обозначения τ_{xy} принять τ_{yx} . Как показано далее (§ 2.04), такая перестановка индексов ничего в дальнейшем не изменит; вместе с тем первая система обозначений имеет некоторое преимущество (см. § 2.13).

** Название тензор впервые было введено в науку именно для обозначения совокупности всех векторов напряжений, действующих на площадках, проходящих через одну и ту же точку в деформируемом теле. Определение понятия тензора напряжений см. стр. 58.

*** См. §§ 2.05, 2.07.



Фиг. 2.04 Три случая плоских напряженных состояний (видимые плоскости, свободные от напряжений, заштрихованы; пояс действующих напряжений лежит в срединной плоскости, параллельно видимым плоскостям)

оставшиеся векторы напряжений будут лежать в одной плоскости, то такое состояние параллелепипеда принято называть *плоским напряженным состоянием*. Для этих случаев тензор напряжений достаточно представить матрицей из двух строк и двух столбцов. Применительно к обозначениям и случаям, показанным на рис. 2.04 а, б, в, тензоры напряжений соответственно запишутся так:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Случай плоского напряженного состояния, как известно читателю, подробно излагался в курсе сопротивления материалов.

§ 2.03. Другие обозначения компонентов напряжений

Указанные в § 2.02 обозначения компонентов напряжений, как известно читателю, широко применяются в учебниках по сопротивлению материалов и строительной механике. Приводим в сопоставление с ранее принятыми и другие обозначения (см. табл. на стр. 51).

Обозначения, приведенные в колонке II, широко используются в капитальных сочинениях по теории упругости. Обозначения, указанные в колонке IV, предполагают обозначения координатных осей не x, y, z , а 1, 2, 3. Каждая из систем обозначения имеет свои преимущества и свои недостатки. Мы будем придерживаться обозначений, приведенных в колонке I.

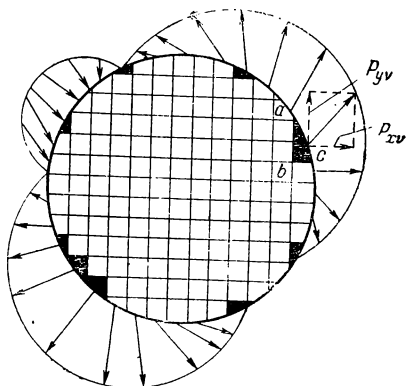
I	II	III	IV
σ_x	X_x	τ_{xx}	τ_{11}
σ_y	Y_y	τ_{yy}	τ_{22}
σ_z	Z_z	τ_{zz}	τ_{33}
τ_{xy}	X_y	τ_{yx}	τ_{12}
τ_{yz}	Y_z	τ_{zy}	τ_{23}
τ_{zx}	Z_x	τ_{xz}	τ_{31}

§ 2.04. Связь компонентов напряжений вблизи наружной поверхности тела с компонентами нагрузки на той же поверхности тела
(условия на границе тела)

Между интенсивностью внешней нагрузки, действующей на какую-либо точку наружной поверхности тела, и компонентами напряжений, действующими внутри тела, в окрестности той же точки, очевидно, должна существовать связь, которую сейчас и установим.

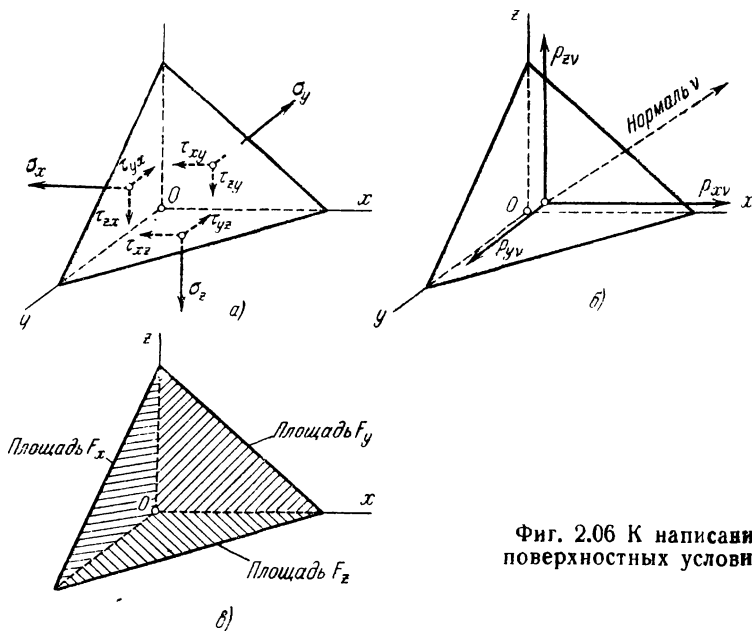
Для этой цели возле какой-либо точки границы тела мысленно плоскостями, параллельными координатам, вырежем бесконечно малый элемент.

В общем случае тела (когда оно не призматической формы) таким элементарным объемом окажется, очевидно, тетраэдр (на фиг. 2.05 проекции таких тетраэдров на плоскость чертежа заштрихованы). Рассмотрим условия равновесия



Фиг. 2.05 В общем случае тела его нельзя разбить только на «кирпичики», у поверхности тела окажутся элементарные тетраэдры

такого элементарного тетраэдра, для чего помимо заданных внешних нагрузок на наклонную грань тетраэдра, по остальным трем взаимно перпендикулярным граням надлежит приложить внутренние силы. На фиг. 2.06а отдельно указаны усилия по трем указанным взаимно перпендикулярным граням вблизи заданной точки границы (т. е. внутренние силы), а на фиг. 2.06б отдельно показаны внешние силы, т. е. усилия, действующие на наклонную грань тетраэдра и уравнивающие ранее



Фиг. 2.06 К написанию поверхностных условий

упомянутые внутренние силы. Обозначим площадь грани тетраэдра, нормальной к оси x ; через F_x , аналогично другие, ортогональные к ней грани, через F_y , F_z . Наружную грань (четвертую) тетраэдра, в общем случае не параллельную ни одной из координатных осей, обозначим через F_v (фиг. 2.06в); одновременно через v обозначим нормаль этой «трижды» косо́й грани.

Условие равновесия в проекции на ось x запишется в виде

$$p_{xv} F_v = \sigma_x F_x + \tau_{xy} F_y + \tau_{xz} F_z. \quad (a)$$

Так как отношение площади любой из трех ортогональных граней к площади наклонной грани составляет, как известно,

косинус угла наклона между нормальными к тем же граням, т. е.

$$\frac{F_x}{F_y} = \cos(x, y); \quad \frac{F_y}{F_z} = \cos(y, z);$$

$$\frac{F_z}{F_x} = \cos(z, x),$$

то из уравнения (а) следует:

$$p_{xy} = \sigma_x \cos(x, y) + \tau_{xy} \cos(y, y) + \tau_{xz} \cos(z, y). \quad (2.04)$$

По правилу круговой подстановки можно записать сразу и два других уравнения.

Вводя для направляющих косинусов обозначения:

$$\cos(x, y) = l, \quad \cos(y, y) = m, \quad \cos(z, y) = n,$$

интересующие нас три условия на контуре (иначе «граничные условия») запишем в виде

$$\begin{cases} p_{xy} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ p_{yx} = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ p_{zx} = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (2.05)$$

Указанные соотношения (2.05) и будут служить перекидным мостиком от внутренних сил возле границы твердого тела (σ_x, σ_y и т. д.) к внешним силам (p_{xy}, p_{yx}, p_{zx}), действующим на наружной поверхности того же тела.

Уравнения (2.05) называются *условиями на контуре тела*, или *статические граничные условия*.

В уравнения (2.05) не вошли объемные силы (собственный вес) и инерционные члены не потому, что мы решили ими пренебречь, а потому, что они будут бесконечно малыми третьего порядка, тогда как все члены уравнения (а) в его первоначальном виде — второго порядка.

В самом деле, например, равнодействующая нормальных сил с площади F_x составляет $\sigma_x F_x$ — бесконечно малую второго порядка, а проекция объемной силы на ось Ox составит $\rho x \, dx \, dy \, dz \frac{1}{6}$, т. е. бесконечно малую третьего порядка. Аналогично обстоит дело и с инерционным членом, если тело пребывает в движении. По тем же соображениям при написании (2.05) мы не вводили никаких приращений напряжений (от точки O к центрам тяжести ортогональных граней).

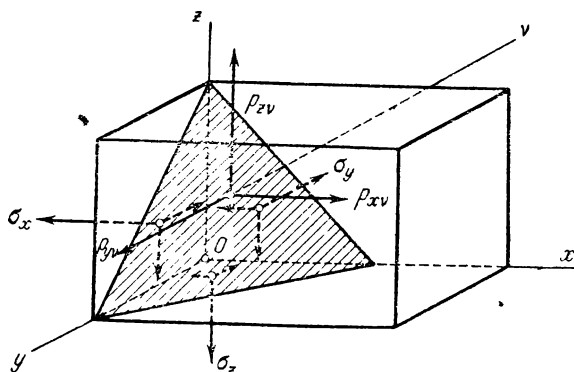
Для удобства запоминания условий (2.05) можно представить их в виде следующей таблички:

Поверхностные компоненты нагрузки	Множители		
	l	m	n
$p_{xv} =$	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}
$p_{yv} =$	τ_{yx}	σ_y	τ_{yz}
$p_{zv} =$	τ_{zx}	τ_{zy}	σ_z

Квадратная матрица, между прочим, составляет известный читателю *тензор напряжений*.

§ 2.05. Исследование напряженного состояния в данной точке тела при известном тензоре напряжений для той же точки

Формулами (2.05) можно воспользоваться для исследования напряженного состояния в любой точке внутри тела и по любой площадке, проведенной через нее. В самом деле, если нам заданы все компоненты тензора напряжений для данной точки, т. е. известны нормальные и касательные напряжения по трем ортогональным граням бесконечно малого параллелепипеда, вырезанного возле данной точки, и требовалось бы определить напряжения в какой-либо наклонной («косой» площадке, проходящей внутри параллелепипеда (фиг. 2.07), то нам пришлось бы повторить все рассуждения



Фиг. 2.07 К вычислению напряжений по «косой» площадке

предыдущего параграфа. Разница была лишь в том, что составляющие p_{xy} , p_{yx} , p_{zy} , которые были в § 2.04 известными (внешние силы), в данной задаче были бы неизвестными, т. е. определяемыми внутренними силами.

Итак, при обозначениях на фиг. 2.07 для наклонной площадки, имеющей направляющие косинусы l , m и n , компоненты напряжений, параллельные координатным осям, записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} p_{xy} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ p_{yx} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ p_{zy} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\}. \quad (a)$$

Полное напряжение, действующее по рассматриваемой наклонной площадке, определится из выражения

$$p_v^2 = p_{xy}^2 + p_{yx}^2 + p_{zy}^2.$$

Указанные компоненты (p_{xy} , p_{yx} , p_{zy}), вообще говоря, не являются ни нормальными, ни касательными напряжениями и потому для суждения о прочности не совсем удобны.

Вычислим нормальное и касательное напряжения, действующие по рассматриваемой площадке, для чего вектор полного напряжения разложим на составляющие по нормали к площадке и по касательной к последней.

Проектируя компоненты p_{xy} , p_{yx} , p_{zy} на нормаль v , имеем нормальное напряжение для наклонной площадки:

$$\sigma_v = p_{xy} \cos(x, v) + p_{yx} \cos(yv) + p_{zy} \cos(z, v)$$

или, используя (a), получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + \\ &\quad + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl. \end{aligned} \quad (2.06)$$

Касательное напряжение по той же площадке определится из уравнения

$$\sigma_v^2 + \tau^2 = p_v^2. \quad (2.07)$$

§ 2.06. Продолжение. Главные напряжения

Если проведенная наклонная площадка является главной, то, следовательно, для нее $\tau = 0$ и потому $\sigma_v = p_v$, т. е. *полное напряжение и нормальное напряжение для главной площадки совпадают по величине и по направлению.*

Из этого условия определим главные напряжения и положения площадок, на которых они имеются. Обозначив иско-

мое главное напряжение временно через σ и проектируя его на оси x, y, z , имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma \cos(\nu, x) &= p_{x\nu}, \\ \sigma \cos(\nu, y) &= p_{y\nu}, \\ \sigma \cos(\nu, z) &= p_{z\nu}; \end{aligned} \right\}$$

а с помощью (а) записываем:

$$\begin{aligned} \sigma l &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ \sigma m &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ \sigma n &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned}$$

Кроме того, имеем известное из аналитической геометрии условие

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (б)$$

Последние четыре уравнения содержат четыре неизвестных (главное напряжение и три его направляющих косинуса). На время оставим последнее уравнение и перепишем первые три уравнения в виде:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= 0; \\ \tau_{yx} l + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{yz} n &= 0; \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + (\sigma_z - \sigma) n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Так как написанные уравнения однородны, а кроме того, l, m, n одновременно не могут быть нулями (согласно (б)), то, следовательно, определитель системы уравнений (в) должен быть равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (2.08)$$

Раскрывая этот определитель, получаем кубическое уравнение:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma^3 - \sigma^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \\ - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \\ - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) = 0. \end{aligned}} \quad (2.09)$$

Решение уравнения (2.09) доставит три корня $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, и все они будут действительными*.

* Доказательство действительности всех трех корней такого уравнения, как (2.09), можно найти в любом курсе аналитической геометрии (см. теорию поверхностей второго порядка). Основанием для такого утверждения является симметрия элементов определителя (2.08) относительно его главной диагонали.

Расположим эти корни, т. е. значения трех главных напряжений, в таком порядке:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3,$$

т. е. σ_1 — максимальное, а σ_3 — минимальное напряжение.

Внося какое-либо из этих значений σ_i ($i = 1, 2, 3$) в уравнения (в) и пользуясь двумя из них (так как третье будет следствием остальных двух вследствие условия (2.08), присоединяем к этим двум уравнение (б); из совместного решения трех уравнений найдем величины направляющих косинусов для σ_i , т. е. l_i, m_i, n_i ($i = 1, 2, 3$).

Исследования указанных направляющих косинусов показывают (доказательства опускаем), что главные площадки, соответствующие значениям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, по отношению друг к другу оказываются взаимно перпендикулярными.

Кроме того, исследование (2.06) показывает, что при подстановке в него на место направляющих косинусов значений l_1, m_1, n_1 (отвечающих главной площадке с напряжением σ_1) определяется именно наибольшее σ_i из всех возможных для данной точки нормальных напряжений. Подстановка в то же выражение другой группы значений направляющих косинусов l_3, m_3, n_3 (отвечающих главной площадке с напряжением σ_3) определяет именно наименьшее из всех нормальных напряжений, действующих в различных плоскостях, проходящих через заданную точку.

Итак, в общем случае *пространственно* напряженного состояния тела через каждую его точку всегда можно провести три взаимно перпендикулярные плоскости, на которых касательные напряжения отсутствуют, причем действующие на них нормальные напряжения имеют стационарные значения (*максимум, минимум и минимакс*)^{*} для рассматриваемой точки.

*

* *

Применим для компонентов напряжений систему обозначений, указанную на стр. 51 (колонка IV), т. е. нормальные и касательные напряжения по всем трем ортогональным площадкам будем обозначать символом τ_{ik} , где i и k принимают последовательно значения 1, 2, 3.

^{*} Минимаксом напряжения будем называть промежуточное между максимумом и минимумом значение напряжения, по площадке действия которого сохраняются некоторые свойства, присущие площадкам с максимальным или минимальным напряжением [в данном случае отсутствие касательных напряжений и независимость величин главных напряжений (стационарность значений) от способа их вычисления (см. § 2.07)].

Соответственно для нормального напряжения, действующего на наклонной площадке (с внешней нормалью ν), применим обозначение $\tau_{\nu\nu}$, а для направляющих косинусов примем обозначения:

$$\cos(x\nu) = l_{1\nu}, \quad \cos(y\nu) = l_{2\nu}, \quad \cos(z\nu) = l_{3\nu},$$

тогда выражение (2.06) запишется исключительно кратко в такой форме:

$$\tau_{\nu\nu} = \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{k=1}^{k=3} \tau_{ik} l_{i\nu} l_{k\nu}. \quad (2.06a)$$

Аналогично (можно предложить читателю самостоятельно проделать надлежащие преобразования) доказывается, что на той же наклонной площадке (с нормалью ν) любая другая составляющая напряжения (например, касательное напряжение, параллельное некоторой оси η) запишется в виде

$$\tau_{\eta\nu} = \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{k=1}^{k=3} \tau_{ik} l_{i\eta} l_{k\nu}. \quad (2.06b)$$

Формулы преобразования (2.06a) и (2.06b) являются характерными для преобразования составляющих всякого тензора. Именно поэтому-то матрицы (2.03) и т. п. и называются тензорами (точнее, аффинными ортогональными тензорами второго ранга, но никаких других тензоров в классической теории упругости и теории пластичности не рассматривается).

Всякие другие матрицы, не позволяющие к их компонентам применить формулы преобразования типа (2.06b), не могут называться тензорами.

§ 2.07. Инварианты тензора напряжений

Если около данной точки мысленно вырезать несколько бесконечно малых параллелепипедов, грани которых различным образом ориентированы по отношению к осям координат, то, очевидно, компоненты напряжений для одного такого элементарного параллелепипеда будут отличными от компонентов для другого, так как напряжения зависят от направления рассматриваемой площадки, проходящей через заданную точку. Однако также очевидно, что независимо от способа вырезания элемента около заданной точки подстановка значений его компонентов напряжений в уравнение (2.09) должна дать в итоге одни и те же значения главных напряжений для всех таких элементарных параллелепипедов. Главные напряжения в данной точке суще-

ствуют, и величины их независимы от метода их нахождения, т. е. они *инвариантны* по отношению к преобразованию координатной системы.

Следовательно, корни кубического уравнения (2.09) не должны зависеть от системы координат x, y, z , а, потому, коэффициенты этого уравнения также не зависят от выбора координатной системы. Иначе говоря, эти *коэффициенты являются инвариантами преобразования координат*.

В связи с указанным уравнение (2.09) перепишем в виде

$$\sigma^3 - \sigma^2\sigma^I + \sigma\sigma^{II} - \sigma^{III} = 0, \quad (2.09a)$$

где $\sigma^I, \sigma^{II}, \sigma^{III}$ — инвариантные соотношения, иначе называемые первым, вторым и третьим инвариантами тензора. Итак:

$$\left. \begin{aligned} \sigma^I &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{const}, \\ \sigma^{II} &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \text{const} \\ \sigma^{III} &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \text{const} \end{aligned} \right\}. \quad (2.10)$$

Заметим, что первый (или линейный) инвариант представляет собой сумму членов, расположенных на главной диагонали в тензоре напряжений, которая, как показано далее (см. § 5.03), пропорциональна относительной объемной деформации у рассматриваемой точки, т. е.

$$\sigma^I = E_0\theta. \quad (2.11)$$

Объемная же деформация θ , т. е. относительное изменение объема в окрестности данной точки, как явление физического порядка, конечно, не зависит от способа ее вычисления. Контролем правильности решения кубического уравнения (2.09) может служить равенство

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \quad (2.12)$$

Третий (иначе *кубический*) инвариант, между прочим, представляет собой развернутый в строку определитель, составленный из компонентов тензора напряжений, т. е.

$$\sigma^{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (2.13)$$

Контролем правильности решения уравнения (2.09) может также служить равенство, составленное применительно к

параллелепипеду, гранями которого являются главные площадки возле данной точки:

$$\sigma^{\text{III}} = \begin{vmatrix} \sigma_1, & 0, & 0 \\ 0, & \sigma_2, & 0 \\ 0, & 0, & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \quad (2.14)$$

Второй (или *квадратичный*) инвариант, между прочим, представляет сумму миноров определителя (2.13), если произвести разложение его по главной диагонали, т. е.

$$\sigma^{\text{II}} = \begin{vmatrix} \sigma_x, & \tau_{xy} \\ \tau_{yx}, & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x, & \tau_{xz} \\ \tau_{zx}, & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y, & \tau_{yz} \\ \tau_{zy}, & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

Контролем правильности решения уравнения (2.09) может, очевидно, служить равенство

$$\sigma^{\text{II}} = \begin{vmatrix} \sigma_1, & 0 \\ 0, & \sigma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1, & 0 \\ 0, & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_2, & 0 \\ 0, & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1. \quad (2.15a)$$

Написанные выше контрольные соотношения (2.13) — (2.15a) могут быть использованы и для непосредственного вычисления корней кубического уравнения (2.09). Так, если один из корней был найден непосредственно из (2.09), то остальные могут быть подсчитаны с помощью (2.12) — (2.15).

Заметим, что в теории напряжений, а также в теории деформаций инварианты следует рассматривать как основные характеристики напряженного и деформированного состояния в точке; компоненты же напряжений и деформаций, как связанные с осями координат, являются вспомогательными.

Указанные выше три инварианта напряжений (2.10) не исчерпывают всех возможностей комбинаций из компонентов напряжений, которые были бы также инвариантны к ортогональному преобразованию координат. Так, ниже, в § 4.04, приводятся еще другие инварианты, а вообще инвариантов имеется бесконечное множество. Приведенные же ранее инварианты (2.10) следует рассматривать как базисные, потому что все другие могут быть выражены как функции трех базисных инвариантов.

§ 2.08. Наибольшие касательные напряжения

Примем для заданной точки направления главных напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 за направления координатных осей x , y , z . Тогда для любой «косой» площадки по отношению к упомя-

нутым главным направлениям нормальное и касательное напряжения запишутся, согласно (2.06), (2.07), в виде:

$$\sigma_v = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2, \quad (a)$$

$$\tau^2 = \rho_v^2 - \sigma_v^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2. \quad (б)$$

Исключим теперь из уравнения (б) один из косинусов, например n , при помощи зависимости

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

после чего определим косинусы l и m таким образом, чтобы касательное напряжение τ получило максимальное значение.

После подстановки $n^2 = 1 - l^2 - m^2$ в выражение (б) составим производные последнего по l и m и приравняем эти производные нулю. Получим следующие два уравнения для направляющих косинусов l и m , определяющие положение площадок, по которым напряжение τ получает максимальное или минимальное значение:

$$\left. \begin{aligned} l \left[(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \right] &= 0, \\ m \left[(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 - \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Одно из решений этих уравнений получится, если приравнять l и m нулю. Можно получить и решения, отличные от нуля. Так, приняв $l = 0$, найдем по второму из уравнений (в)

$$m = \pm \sqrt{\frac{1}{2}},$$

а приняв m равным нулю, найдем по первому из уравнений (в)

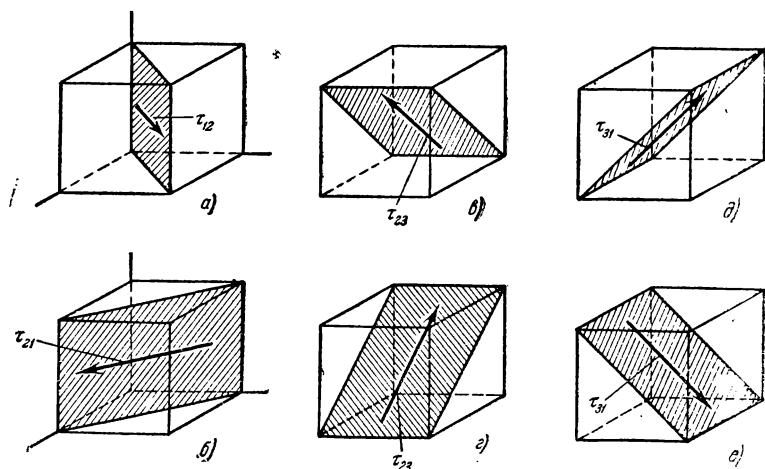
$$l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Повторяя приведенные выше выкладки, при исключении из выражения (б) сначала косинуса m , а затем косинуса l , в конечном итоге получим следующую таблицу шести значений косинусов углов, при которых напряжения τ получает максимальное или минимальное значение (см. след. стр.).

Первые три столбца дают площадки, совпадающие с плоскостями координат, которые, как это было принято вначале, являются главными площадками. По этим площадкам касательные напряжения обращаются в нуль, т. е. выражение (б) для квадрата τ получает минимальное значение.

l	0	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
m	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
n	± 1	0	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0

Три последних столбца дают площадки, проходящие через одну из трех главных осей и делящие угол между двумя другими главными осями пополам (фиг. 2.08). Поставив направляющие косинусы, определяющие положения этих трех



Фиг. 2.08 Три пары площадок с относительными максимумами касательных напряжений

площадок, в выражение (б), найдем следующие значения касательных напряжений (иногда называемых *главными касательными*) по этим трем плоскостям:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{12} &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2); \\ \tau_{23} &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3); \\ \tau_{31} &= \pm \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1). \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Это показывает, что наибольшее касательное напряжение действует по площадке, делящей пополам угол между наибольшим и наименьшим главными напряжениями, и что оно равно половине разности между этими двумя главными напряжениями.

На площадках, на которых касательные напряжения принимают значения (2.16), действуют также нормальные напряжения, которые согласно (а) оказываются равными полусуммам соответствующих главных напряжений:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3), \quad \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1). \quad (2.17)$$

Из 2.16 следует, что если величины главных напряжений подчинены неравенствам $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то наибольшее касательное напряжение равно $\sigma_1 - \sigma_3$, т. е. полуразности наибольшего и наименьшего главных напряжений.

§ 2.09. Октаэдрические напряжения

Рассмотрим в некотором отношении замечательную площадку, которая равно наклонена к главным плоскостям (фиг. 2.09). Вычислим нормальное и касательное напряжения по такой площадке, называемой *октаэдрической*, или площадкой результирующих напряжений в данной точке.

Оси координат направим по нормальям главных площадок, т. е. вдоль главных напряжений. Направляющие косинусы для октаэдрической площадки относительно упомянутых осей координат, очевидно, равны между собой и составляют

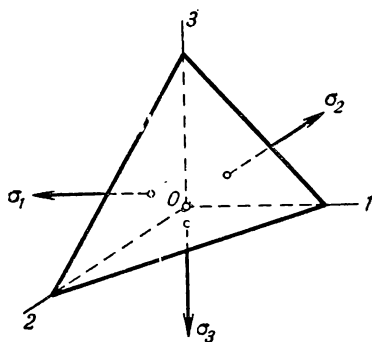
$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Согласно формуле (2.05), в данном случае находим:

$$p_1 = \sigma_1 l, \quad p_2 = \sigma_2 m, \quad p_3 = \sigma_3 n.$$

Для полного напряжения на октаэдрической площадке имеем уравнение

$$p_v^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2),$$



Фиг. 2.09 Октаэдрическая площадка

т. е. квадрат полного напряжения на октаэдрической площадке равняется среднему из квадратов главных напряжений.

По формуле (2.06) для нормального напряжения на той же площадке получаем

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

или

$$\sigma_{\text{окт}} = \sigma_{\text{ср}}, \quad (2.18)$$

т. е. нормальное напряжение на октаэдрической площадке равняется среднему нормальному напряжению для данной точки.

Для касательного напряжения на октаэдрической площадке имеем выражения (2.07)

$$\tau_{\text{окт}}^2 = p_v^2 - \sigma_{\text{окт}}^2,$$

которое в данном случае переписывается в виде:

$$\tau_{\text{окт}}^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

По раскрытии скобок имеем

$$\tau_{\text{окт}}^2 = \frac{2}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1),$$

откуда

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (2.19)$$

принимая во внимание, что полуразности (см. § 2.06)

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{12}, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \tau_{23}, \quad \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \tau_{31}$$

являются главными касательными напряжениями; выражение (2.19) можем записать и так

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}, \quad (2.19a)$$

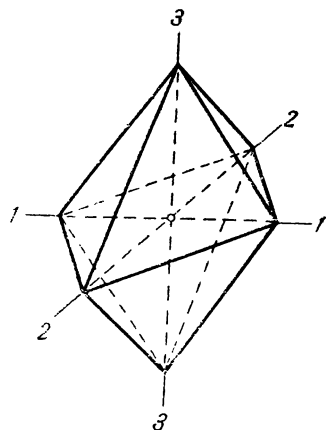
т. е. квадрат касательного напряжения на октаэдрической площадке равняется $4/9$ (т. е. немного меньше половины) суммы квадратов главных касательных напряжений.

Указанные выше нормальное и касательное напряжения на октаэдрических площадках, иначе, так называемые *октаэдрические напряжения*, одинаковы для всех восьми площадок, которые можно провести во всех октантах; если

отрезки, отсекаемые площадками на главных осях 1, 2, 3, одинаковы во всех октантах, то совокупность таких равнонаклоненных площадок образует замкнутую восьмигранную фигуру — *октаэдр* (фиг. 2.10).

В теории пластичности октаэдрическое касательное напряжение является основным, определяющим характер развития пластических деформаций.

Для октаэдрического касательного напряжения можно дать и другие начертания. Так из (2.19) на основании записи инвариантов тензора напряжений (2.12) — (2—15), выраженных через главные напряжения, следует



Фиг. 2.10 По всем восьми граням октаэдра действуют одинаковые касательные напряжения

$$\tau_{\text{окт}}^2 = \frac{2}{9} [(\sigma^I)^2 - 3\sigma^{II}]. \quad (2.20)$$

Принимая для инвариантов записи через компоненты напряжений, действующих по случайным (не главным) ортогональным площадкам, на основании (2.10) имеем:

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (2.19б)$$

Из курса сопротивления материалов для суждения о прочности, т. е. для выяснения вопроса о том, насколько состояние материала в окрестности данной точки близко к предельному упругому или к начальному состоянию пластичности, в числе многих теорий прочности читателю известна так называемая «энергетическая теория прочности», или, точнее, «теория энергии формоизменения». Расчетное (приведенное, фиктивное) напряжение по указанной теории, как известно, записывалось так:

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (2.21)$$

Сопоставляя (2.19) и (2.21), заключаем, что октаэдрическое касательное напряжение прямо пропорционально расчет-

ному напряжению по энергетической теории прочности, т.е.

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{\text{пр}}. \quad (2.22)$$

В теории пластичности $\sigma_{\text{пр}}$, устанавливаемое независимо от тех соображений, которые были в сопротивлении материалов, называется *интенсивностью напряжения* (лучше было бы назвать *обобщенным напряжением*) и обозначается через σ . Таким образом, в дальнейшем будет также применяться запись *:

$$\sigma_l = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}}. \quad (2.22a)$$

§. 2.10. Выделение среднего нормального напряжения из тензора напряжений.

Понятие о шаровом тензоре напряжений и о тензоре-девиаторе напряжений

Наблюдения показывают, что прочность материала зависит не только от величины компонентов напряжений, но и от характера напряженного состояния.

Так, большинство твердых тел противостоит без разрушения действию одинакового всестороннего очень высокого давления. Только в некоторых, менее плотных телах наблюдались случаи разрушения, причину чего можно усмотреть в наличии внутри тела мелких щелей и трещин, куда проникала жидкость, в которую были погружены испытываемые тела.

И, наоборот, те же тела иногда разрушаются при сравнительно невысоких напряжениях, если последние в основном изменяют форму тела (например, в случае сдвига или наличия разных по знаку нормальных давлений, действующих на грани параллелепипеда).

В связи с этим для суждения о прочности представляется необходимым из общей деформации тела выделить особо те компоненты, которые связаны с изменением объема, и отдельно рассмотреть компоненты деформации, имеющие отношение к изменению формы. Уместным будет в том же смысле разделить и компоненты напряжений.

* Удобство введения в теорию пластичности σ_l взамен $\tau_{\text{окт}}$ объясняется тем, что в случае одноосного растяжения (или сжатия), когда существует отличное от нуля только одно главное напряжение, например σ_1 , а два других отсутствуют, интенсивность напряжений согласно (2.21) становится равной этому единственному напряжению σ_1 .

Хотя в случае всестороннего равномерного растяжения (случай «чисто объемной» деформации) материал не обладает способностью противостоять высоким напряжениям, однако и в этом случае, как выяснится позднее, упомянутое разделение на чисто объемную деформацию и на «деформацию формы» (иначе называемую «скашивающей», или «девиаторной», деформацией) оказывается целесообразным.

Помимо того, что это удобно для решения в дальнейшем вопросов прочности, то же самое разделение оказывается необходимым и для наглядного описания законов деформации сложно-напряженного тела.

Введем обозначение

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad (2.23)$$

в дальнейшем именуемое *среднее напряжение* или, что все равно, на основании (2.10):

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{1}{3} \sigma^I,$$

где по-прежнему σ^I — первый инвариант тензора напряжений. Произведем выделение этого среднего напряжения из напряженного состояния точки следующим образом.

Представим известный ранее читателю тензор напряжений в виде двух составляющих:

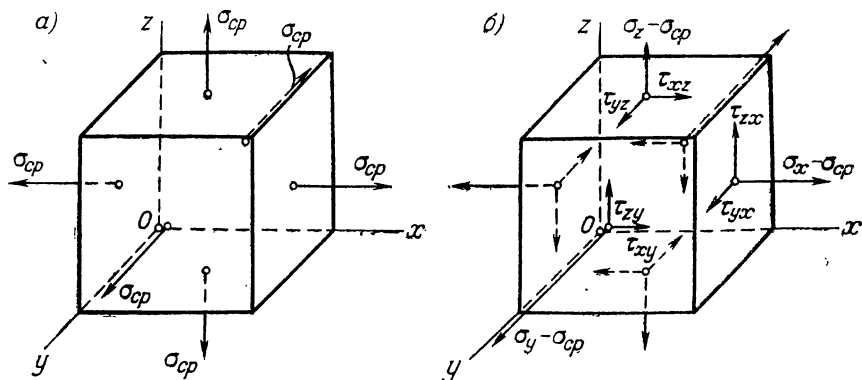
$$T_n = T_n^0 + D_n, \quad (2.24)$$

где T_n^0 — именуемый *шаровой тензор напряжений* — характеризует напряженное состояние элементарного объема, изображенное на фиг. 2.11, т. е.

$$T_n^0 = \begin{pmatrix} \sigma_{\text{ср}}, & 0, & 0 \\ 0, & \sigma_{\text{ср}}, & 0 \\ 0, & 0, & \sigma_{\text{ср}} \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

а D_n — именуемый тензор-девиатор, или *девиатор напряжений*, характеризует напряженное состояние элементарного объема, изображенное на фиг. 2.12, т. е.

$$D_n = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{\text{ср}}, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, & \sigma_y - \sigma_{\text{ср}}, & \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, & \tau_{zy}, & \sigma_z - \sigma_{\text{ср}} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$



Фиг. 2.11 2.12 — Разложение компонентов тензора напряжений на составляющие, связанные с изменением объема (фиг. 2.11) и на составляющие компоненты, обуславливающие изменение формы (фиг. 2.12)

В первом случае (фиг. 2.11) очевидно будет происходить только изменение объема и таким образом шаровой тензор напряжений характеризует *объемную деформацию в точке*. Девиаторы напряжений, как то будет доказано позже (§ 4.03) характеризуют *формоизменение* в окрестности той же точки.

Девиатор напряжений показывает, насколько заданное напряженное состояние уклоняется от всестороннего растяжения (или сжатия), у которого главные напряжения равны среднему алгебраическому нормальных напряжений исходного напряженного состояния.

Отделение компонентов напряжений, связанных только с объемной деформацией (к которой большинство материалов чувствительны в меньшей степени), от компонентов, связанных с формоизменением (к которому все материалы особо чувствительны), будет иметь важное значение как для суждения о прочности в рассматриваемой точке, так и для описания законов деформации в окрестности той же точки тела.

Эти соображения будут использованы в § 4.06.

Попутно заметим, что первый инвариант шарового тензора напряжений совпадает с первым инвариантом вообще тензора напряжений, т. е.

$$\sigma_0^I = \sigma_{cp} + \sigma_{cp} + \sigma_{cp} = 3\sigma_{cp} = \sigma^I.$$

Первый же инвариант девиатора напряжений, очевидно, равен нулю. Действительно

$$\bar{\sigma}^I = (\sigma_x - \sigma_{cp}) + (\sigma_y - \sigma_{cp}) + (\sigma_z - \sigma_{cp}) = 0.$$

Читателю рекомендуется доказать, что второй инвариант девиатора напряжений оказывается

$$\sigma_{II} = -\frac{3}{2} \tau_{окт}^2$$

и, наоборот,

$$\tau_{окт}^2 = -\frac{2}{3} \sigma_{II},$$

т. е. квадрат октаэдрического касательного напряжения с точностью до числового множителя равен второму инварианту девиатора напряжений.

Позднее (§ 4.06) будет дана еще одна интерпретация этого же напряжения.

Исследования показывают *, что октаэдрическое напряжение близко по величине к наибольшему касательному напряжению для той же точки и находится в пределах

$$0,941 > \frac{\tau_{окт}}{\tau_{max}} > 0,816. \quad (2.27)$$

Б. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИИ В ТОЧКЕ

§ 2.11. Обозначение компонентов деформации. Тензор малой деформации

Деформация любого элементарного объема тела, имевшего, например, до деформации вид бесконечно малого параллелепипеда, может быть представлена состоящей из ряда отдельных простейших деформаций, т. е. разложена на составляющие.

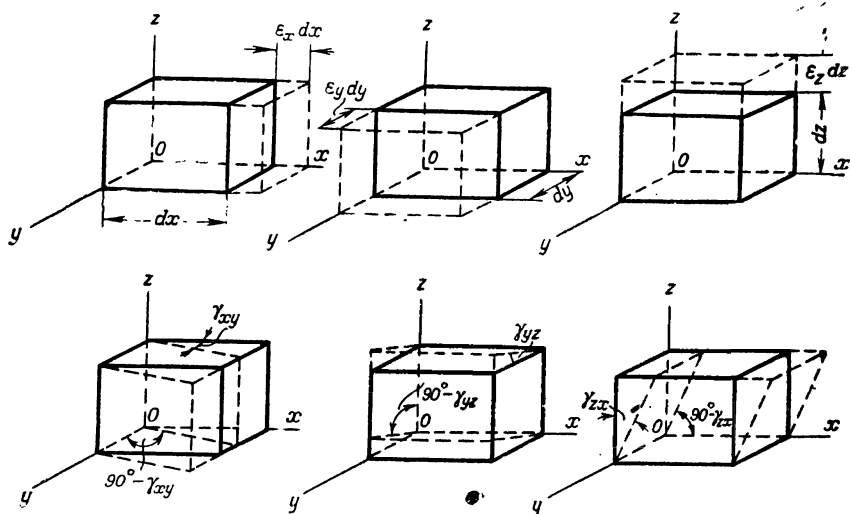
Так, в случае элементарного параллелепипеда можно говорить о шести составляющих деформации: о трех ее линейных составляющих (удлинениях ребер) и о трех угловых (сдвигах)**.

На фиг. 2.13 изображены эти составляющие деформации и указаны их обозначения, в основном известные читателю из курсов сопротивления материалов.

Относительные удлинения ребер (*деформации первого рода*) будем обозначать буквой ϵ с индексом, указывающим направление удлинения, или, что все равно, ту ось, парал-

* А. А. Ильющин. Пластичность. Гостехиздат, стр. 29, 1948.

** Шесть простейших составляющих деформации элементарного параллелепипеда, о которых идет повествование ниже, характеризуют одновременно и полную деформацию в точке, в которую стягивается рассматриваемый параллелепипед, если полагать длины его ребер устремляющимися к нулю.



Фиг. 2. 13 Обозначения компонентов деформаций

тельно которой получило удлинение ребро. Положительными линейными деформациями считаем удлинения, отрицательными — укорочения.

При указанных на фиг. 2.13 элементарных деформациях первого рода *изменяются объем параллелепипеда и его форма*; так, если первоначальная форма была кубом, то после деформации формой будет параллелепипед.

Считается, что положительному сдвигу (*деформации в порога рода*) соответствует уменьшение угла между положительными направлениями осей; отрицательному — увеличение тех же углов. Углы сдвига (относительные сдвиги), проектирующиеся на плоскость xu , обозначаем γ_{xy} (или γ_{yx}); соответственно для остальных плоскостей (yz , zx) углы сдвига обозначаем:

$$\gamma_{yz} \text{ (или } \gamma_{zy}) \text{ и } \gamma_{zx} \text{ (или } \gamma_{xz}).$$

При углах сдвига, пренебрежимо малых по сравнению с единицей (а такие именно углы сдвига и предполагаются в классической теории упругости), можно считать, что объем параллелепипеда, получившего деформации сдвига, не изменился, а ребра не получили удлинений*.

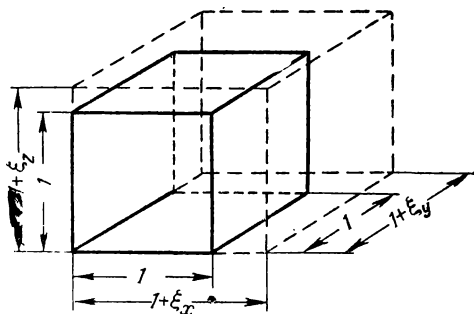
* Если исходить из фиг. 2.13, т. е. предполагать, что при сдвиге высота элемента остается неизменной, то получающиеся при этом удлинения наклоненных ребер будут составлять величины более высокого порядка малости, чем сами углы сдвига.

Таким образом, при деформациях сдвига объем в окрестности рассматриваемой точки остается неизменным, меняется лишь форма.

Объемная же деформация приобретает лишь наличием удлинений ребер.

При более строгом описании деформации элементарного параллелепипеда может возникнуть мысль об искривлении его граней, т. е. о превращении их в поверхности, каждая из которых имеет свою характеристику. По этому поводу следует заметить, что дополнительные параметры, характеризующие такие искривления (*радиусы кривизны поверхностей* и т. п.), будут представляться по результатам своего влияния на деформацию тела в целом малыми высших порядков малости относительно влияния ранее указанных шести компонентов деформации. По этой причине в классической теории упругости и в современной теории пластичности деформация элементарного параллелепипеда предполагается вполне определяющейся только перечисленными шестью составляющими.

Если первоначальный размер каждой грани параллелепипеда принять равным единице (значит, объем такого кубика равен единице) и предположить одновременное наличие всех трех линейных составляющих деформации (фиг. 2.14), то приращение объема куба вследствие такой деформации (это будет вообще относительное изменение объема в окрестности рассматриваемой точки), составит:



Фиг. 2.14' Объемная деформация определяется суммой относительных удлинений по трем ортогональным направлениям

$$\theta = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) - 1.$$

Если считать удлинения пренебрежимо малыми по сравнению с единицей (а это и предполагается в классической теории упругости), то, развертывая указанное выше произведение и отбрасывая малые второго и третьего порядков, имеем:

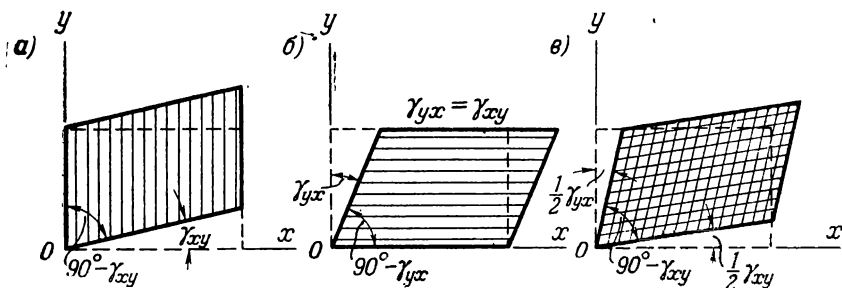
$$\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z, \quad (2.28)$$

т. е. относительная объемная деформация в точке равна сумме относительных удлинений по трем ортогональным направлениям, проведенным через заданную точку*.

Вводя обозначение $\epsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{3} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$ (в дальнейшем именуемое *средняя деформация*), выражение (2.28) записывают так:

$$\theta = 3\epsilon_{\text{ср}}^* \quad (2.29)$$

Следует остановиться на относительности расположения очередности индексов при обозначении углов сдвига. Так, если ребро, первоначально параллельное оси x , повернулось в направлении к ребру, первоначально параллельному оси y , то происходящее при этом уменьшение угла можно обозначить γ_{xy} (фиг. 2.15). Если на тот же угол повернется второе ребро (параллельное оси y) по направлению к первому (параллельному оси x), то угол сдвига можно обозначить через γ_{yx} (фиг. 2.15).



Фиг. 2. 15 Эквивалентные сдвиги (взаимность сдвигов)

Однако в обоих рассмотренных сейчас случаях деформация (γ_{xy} или γ_{yx}) и связанное с ней напряженное состояние по существу совершенно одинаковы, так как из случая а) легко получить случай б) путем жесткого поворота (следовательно, без всякого усилия и деформации элементарного параллелепипеда) на угол γ_{xy} .

Далее, тем же случаям а) и б) совершенно эквивалентен случай, изображенный на фиг. 2.15 в. Впрочем, картин, подоб-

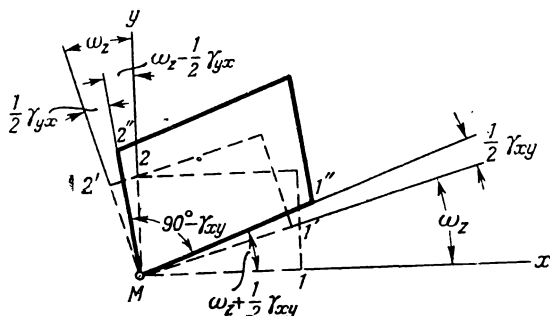
* Полученный результат не зависит от того, какой формы элемент выделяется из тела в окрестности рассматриваемой точки (прямоугольный параллелепипед, превращающийся при деформации в косоугольный, или сфера, превращающаяся при деформации в эллипсоид, или какая-либо иная геометрическая фигура).

ных и равноценных в смысле деформации сдвига, можно предложить неограниченное число, лишь бы во всех таких случаях уменьшения (или увеличения) первоначально прямого угла были бы одинаковы.

Таким образом, условливаясь в тождественности обозначений

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} \quad (2.30)$$

(взаимность сдвигов), мы допускаем, что теряет значение тот или иной способ изображения деформации сдвига. Для дальнейшего будет удобнее деформацию сдвига изображать именно по схеме фиг. 2.15 в.



Фиг. 2. 16 Углы поворота ребер параллелепипеда, выраженные через „жесткий поворот“ и относительный сдвиг

Итак, вследствие деформации сдвига, фактические углы поворота ребер параллелепипеда, составляющих между собой до деформации прямой угол, будут различны. Так, при обозначениях, принятых на фиг. 2.16, для ребра $M1$ поворот составит:

$$\omega_z + \frac{1}{2} \gamma_{xy}, \quad (2.31)$$

а для ребра $M2$ поворот будет:

$$\omega_z - \frac{1}{2} \gamma_{yx}.$$

Все перечисленные выше компоненты деформации вполне определяют деформацию элементарного параллелепипеда, так как путем наложения всех упомянутых составляющих можно построить модель деформированного элемента. Более того, как показано далее (§ 2.13), через указанные компоненты де-

формации без затруднений можно вычислить удлинение внутри параллелепипеда по любому направлению, не совпадающему с направлениями координатных осей.

* * *

Расположим все компоненты, определяющие собой деформированное состояние в рассматриваемой точке, в виде следующей таблицы, которую сознательно построим подобной тензору напряжений, для чего, поделив углы сдвигов пополам, повторим их половинки в табличке два раза с перестановкой индексов:

$$T_{\text{деф}} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Эту матрицу будем называть *тензором деформации*. Здесь можно повторить сказанное о тензоре напряжений, т. е. что для дальнейшего от читателя не требуется каких-либо сведений из тензорного анализа, что эту табличку не следует смешивать с определителем и что, наконец, эта таблица обладает рядом замечательных свойств, которые разбираются позднее (§ 2.13)*.

Впрочем, одно из свойств очевидно и сейчас. Так, если сложить все члены по главной диагонали, то получим $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \theta$, т. е. относительную объемную деформацию. А так как относительная объемная деформация в окрестности данной точки не зависит от ориентации элементарного параллелепипеда относительно координатных осей и даже не зависит от формы элементарного объема (будь то параллелепипед, сфера и др.), то, следовательно, указанная сумма диагональных членов (ее в дальнейшем будем называть *первым инвариантом тензора деформации*) инвариантна к ортогональному преобразованию координатной системы.

* При изложении теории немалых, т. е. конечных, деформаций применение тензорного анализа, ввиду общности этого анализа, его ясной и красноречивой краткости, становится уже совершенно необходимым; отказ от него приводит к очень громоздким и длинным формулам (см. Д. И. Кутилин, Теория конечных деформаций, 1947).

Так как тензор деформации оказался симметричным (что мы сделали преднамеренно), то для простоты записи его можно представить в виде

$$T_{\text{деф}} = \begin{pmatrix} \epsilon_x, & \frac{1}{2} \gamma_{xy}, & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \cdot, & \epsilon_y, & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \cdot, & \cdot, & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

В дальнейшем (§ 4.01) будет показано, что при некоторых частных значениях упругих характеристик материала (это будет, когда коэффициент Пуассона для рассматриваемого материала равен нулю) любой компонент напряжений, взятый из таблички, названной тензором напряжений, прямо пропорционален соответствующему компоненту деформации из таблички, названной тензором деформации, который располагается аналогично первому (в той же строке, в том же столбце); коэффициент пропорциональности в этом случае оказывается для всех компонентов одинаковым. Во всяком случае слагающие деформации и компоненты напряжений, наиболее зависимые друг от друга, занимают одинаковые позиции в тензоре деформации и в тензоре напряжений.

Итак, деформированное состояние в точке вполне определено, если задан тензор деформации для этой точки.

§ 2.12. Другие обозначения компонентов деформации

В некоторых монографиях по теории упругости применяются и другие обозначения для компонентов деформации, которые в соответствии с ранее указанными приводятся в следующей таблице:

I	II	III	IV
ϵ_x	e_{xx}	ϵ_{xx}	ϵ_{11}
ϵ_y	e_{yy}	ϵ_{yy}	ϵ_{22}
ϵ_z	e_{zz}	ϵ_{zz}	ϵ_{33}
γ_{xy}	e_{xy}	$2\epsilon_{xy}$	$2\epsilon_{12}$
γ_{yz}	e_{yz}	$2\epsilon_{yz}$	$2\epsilon_{23}$
γ_{zx}	e_{zx}	$2\epsilon_{zx}$	$2\epsilon_{32}$

Если, к примеру, принять обозначения, указанные в колонке III, то тензор деформации запишется в виде:

$$T_{\text{деф}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix},$$

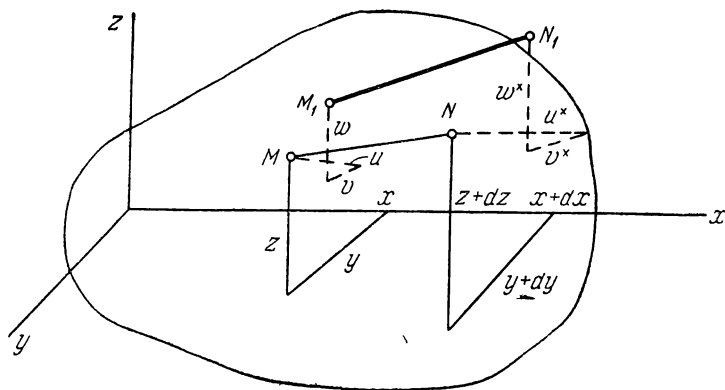
т. е. он будет сходен по начертанию с тензором напряжений, если для последнего принять обозначения, указанные в § 2.03 в колонке III.

§ 2.13. Исследование деформаций в окрестности заданной точки при известном тензоре деформации для той же точки (аналогия теории деформации и теории напряжения)

Исследуем удлинение по произвольному направлению, проходящему через заданную точку твердого тела.

Пусть прямая MN (фиг. 2.17) соединяет две точки, находящиеся в бесконечной близости друг к другу до деформации заданного тела. Прямая M_1N_1 соединяет те же точки в деформированном состоянии. Обозначим первоначальную длину отрезка MN через L , причем очевидно:

$$L^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (a)$$



Фиг. 2.17 К исследованию деформации по произвольному направлению

Направляющие косинусы отрезка MN в недеформированной конфигурации будут:

$$l = \frac{dx}{L}; \quad m = \frac{dy}{L}; \quad n = \frac{dz}{L}. \quad (б)$$

Обозначим длину M_1N_1 через L_1 , причем, согласно фиг. 2.17, очевидно, имеем:

$$L_1^2 = (dx + u' - u)^2 + (dy + v' - v)^2 + (dz + w' - w)^2; \quad (в)$$

где u, v, w и т. п. — обозначения проекций смещения точки (см. стр. 87),

кроме того, эту же длину можно записать через первоначальную длину и относительное удлинение ее следующим образом:

$$L_1 = L(1 + \epsilon).$$

Раскрывая скобки в (8), имеем:

$$L_1^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dx(u' - u) + 2dy(v' - v) + 2dz(w' - w) + (u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2; \quad (2)$$

с другой стороны,

$$L_1^2 = L^2(1 + 2\epsilon + \epsilon^2). \quad (3)$$

Вычитая (2) из (3) и пренебрегая квадратами приращений, имеем:

$$L_1^2 - L^2 = 2dx(u' - u) + 2dy(v' - v) + 2dz(w' - w).$$

Пренебрегая также членом ϵ^2 по сравнению с ϵ , из (3) имеем:

$$L_1^2 - L^2 = 2L^2\epsilon.$$

Сопоставляя последние две записи, заключаем:

$$L^2\epsilon = dx(u' - u) + dy(v' - v) + dz(w' - w),$$

или

$$\epsilon = \frac{dx}{L} \frac{u' - u}{L} + \frac{dy}{L} \frac{v' - v}{L} + \frac{dz}{L} \frac{w' - w}{L}. \quad (4)$$

Дальнейшее преобразование (4) с привлечением некоторых вспомогательных соотношений из § 3.07 приводит окончательно к следующему выражению для удлинения ϵ по произвольному направлению (подробности выкладок см. Н. И. Безухов «Теория упругости и пластичности», М., 1953):

$$\epsilon = \epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \epsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl. \quad (2.34)$$

Таким образом, удлинение какого-нибудь отрезка, проходящего через данную точку, может быть выражено через шесть компонентов деформации той же точки.

Заметим, что выражение для удлинения в произвольном направлении в окрестности данной точки оказалось сходным в отношении множителей при компонентах деформации с выражением (2.06) для нормального напряжения по произвольной площадке, проходящей через ту же точку. Множители «двойки», которые были в (2.06) при касательных напряжениях, здесь в (2.34) отсутствуют, но надо также отметить, что в тензоре деформации преднамеренно углы сдвигов были записаны с коэффициентом 0,5 (стр. 74).

Вообще можно доказать, что между теорией напряжений и деформаций имеется полная аналогия. Все необходимые формулы в теории деформаций можно записать по аналогии с соответствующими формулами в теории напряжений. Так, можно утверждать, что в каждой точке тела существует три взаимно перпендикулярных направления, называемых *главными осями деформации*, которые обладают тем свойством, что волокна, направленные по ним, испытывают только изменения длин, т. е. сдвиги в главных осях деформации равны нулю.

Кубическое уравнение для определения главных удлинений запишется аналогично (2.09) с заменой компонентов тензора напряжений на компоненты тензора деформации, т. е. σ_x на ϵ_x , τ_{xy} на $\frac{1}{2} \gamma_{xy}$ и т. д. В результате получим уравнение

$$\epsilon^3 - \epsilon^2 \epsilon^I + \epsilon \epsilon^{II} - \epsilon^{III} = 0, \quad (2.35)$$

где инварианты тензора деформации записываются таким образом:

$$\begin{aligned}\epsilon^I &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \text{const}, \\ \epsilon^{II} &= \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x - \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = \text{const}, \\ \epsilon^{III} &= \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \frac{1}{4} (\epsilon_x \gamma_{yz}^2 + \epsilon_y \gamma_{zx}^2 + \epsilon_z \gamma_{xy}^2) = \text{const}. \quad (2.36^*)\end{aligned}$$

Значения главных удлинений будем обозначать и располагать в таком порядке:

$$\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3.$$

Очевидно, в материале, свойства которого не связаны с направлением (т. е. изотропное тело), направления главных напряжений и главных деформаций должны совпадать. В самом деле, нет ведь никаких причин для того, чтобы симметричная система только нормальных напряжений вызвала несимметричную деформацию.

Итак, каково бы ни было в данной точке деформированное состояние, всегда можно найти три взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через эту точку, которые были взаимно перпендикулярными также и до деформации. Эти прямые являются направлениями, для которых удлинения имеют характерные (стационарные) значения (максимум, минимум или минимакс).

Продолжая аналогию, запишем, что удлинения в направлении, нормальном к октаэдрическим площадкам, выражаются так:

$$\epsilon_{\text{окт}} = \frac{1}{3} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3).$$

Для сдвига в октаэдрических плоскостях можно по аналогии с (2.19) записать

$$\gamma_{\text{окт}} = \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} \quad (2.37)$$

или в виде

$$\gamma_{\text{окт}} = \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (2.37a)$$

Для наибольшего сдвига по аналогии с (2.16) имеем:

$$\gamma_{\text{max}} = \epsilon_1 - \epsilon_3. \quad (2.38)$$

В теории пластичности имеет большое применение величина, пропорциональная октаэдрическому сдвигу, а именно:

$$\epsilon_i = \frac{3}{2\sqrt{2}(1+\mu)} \gamma_{\text{окт}},$$

* Если применить обозначения компонентов деформации, указанные в колонке III на стр. 75, то инварианты тензора деформации запишутся совершенно аналогично инвариантам тензора напряжений, а именно:

$$\begin{aligned}\epsilon^{II} &= \epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \epsilon_{yy}\epsilon_{zz} + \epsilon_{zz}\epsilon_{xx} - (\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{yz}^2 + \epsilon_{zx}^2) \\ \epsilon^{III} &= \epsilon_{xx}\epsilon_{yy}\epsilon_{zz} + 2\epsilon_{xy}\epsilon_{yz}\epsilon_{zx} - (\epsilon_{xx}\epsilon_{yz}^2 + \epsilon_{yy}\epsilon_{zx}^2 + \epsilon_{zz}\epsilon_{xy}^2).\end{aligned}$$

именуемая *интенсивностью деформации* (удачнее было бы ее назвать *обобщенной деформацией*). Итак, под интенсивностью деформации будем понимать выражение *

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\mu)} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}, \quad (2.39)$$

где μ — коэффициент Пуассона.

В пределах упругих деформаций, как это доказывается в § 4.03, между обобщенными напряжением и деформацией существует исключительно простая зависимость, а именно:

$$\sigma_i = E \epsilon_i, \quad (2.40)$$

где E — обычный модуль упругости рассматриваемого материала.

§ 2.14. Выделение средней деформации из тензора деформаций. Понятие о шаровом тензоре деформации и о тензоре-девиаторе деформации

Введем обозначение $\frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \epsilon_{cp}$ и назовем *средней деформацией*.

Очевидно, что

$$\epsilon_{cp} = \frac{1}{3} \epsilon^I,$$

где ϵ^I — первый инвариант тензора деформации.

В соответствии с тем, как это было показано в § 2.10, разложим тензор деформаций на два составляющих тензора, а именно:

$$T_{деф} = T_{деф}^0 + D_{деф}, \quad (2.41)$$

где под $T_{деф}^0$ — именуемым *шаровой тензор деформации* будем понимать матрицу:

$$T_{деф}^0 = \begin{Bmatrix} \epsilon_{cp}, & 0, & 0 \\ 0, & \epsilon_{cp}, & 0 \\ 0, & 0, & \epsilon_{cp} \end{Bmatrix}. \quad (2.42)$$

Тогда, очевидно, матрица, дополняющаяся (2.42) до полного тензора деформации, запишется

$$D_{деф} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_{cp}, & \frac{1}{2} \gamma_{xy}, & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx}, & \epsilon_y - \epsilon_{cp}, & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx}, & \frac{1}{2} \gamma_{zy}, & \epsilon_z - \epsilon_{cp} \end{Bmatrix}. \quad (2.43)$$

* Удобство введения понятия об интенсивности деформации ϵ_i , помимо прочего, выгодно тем, что для случая одноосного растяжения или сжатия ϵ_i становится равным главному удлинению ϵ_1 .

Последняя таблица именуется тензор-девиатор или, короче, *девиатор деформации*.

Очевидно, что первый инвариант девиатора деформации, который должен характеризовать изменение объема в окрестности рассматриваемой точки, запишется так:

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}^1 = \bar{\theta} &= (\epsilon_x - \epsilon_{cp}) + (\epsilon_y - \epsilon_{cp}) + (\epsilon_z - \epsilon_{cp}) = \\ &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z - 3\epsilon_{cp} = 0.\end{aligned}$$

Сумма компонентов шарового тензора и девиатора деформации, очевидно, даст полные компоненты деформации, т. е. составляющие тензора деформации, поэтому сделанное выше особое выделение объемной деформации и отделение компонентов *формоизменения* можно рассматривать как разложение тензора деформации на шаровой тензор и на девиатор деформации.

Итак, *шаровые тензоры напряжений и деформации характеризуют объемную деформацию в точке. Девиаторы напряжений и деформации характеризуют формоизменение в окрестности той же точки.*

В дальнейшем (§ 4.03) будет показано, что все составляющие девиатора напряжений всегда прямо пропорциональны соответствующим по положению, т. е. находящимся в той же строке и в том же столбце, составляющим девиатора деформации; то же относится и к шаровым тензорам.

Как и тензоры напряжений и деформации, девиаторы не в меньшей, а еще в большей степени обладают замечательными свойствами, раскрывающими характер ожидаемой деформации (упругая или пластическая, момент наступления разрушения и т. д. см. гл. XVII).

Помимо указанного здесь разложения тензора напряжений на шаровой и девиатор иногда, по чисто вычислительным соображениям, применяются и другие способы разложения (см. § 15.02).

§ 2.15. Краткие выводы по главе

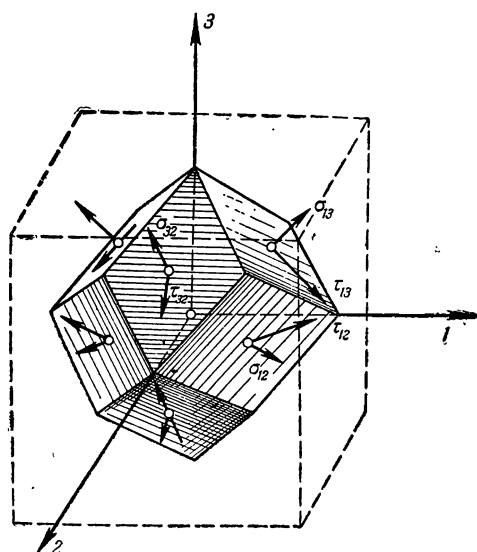
1. Напряженное состояние в окрестности заданной точки в данный момент вполне определено, если известен тензор напряжений для этой точки и для того же момента времени. Напряжения на любой площадке, проведенной через данную точку, определяются через компоненты тензора напряжений линейными соотношениями.

Через каждую пространственно напряженную точку можно провести несколько замечательных плоскостей. Действующие на этих плоскостях (площадках) напряжения являются в том или ином смысле характерными. Так, существуют три взаимно

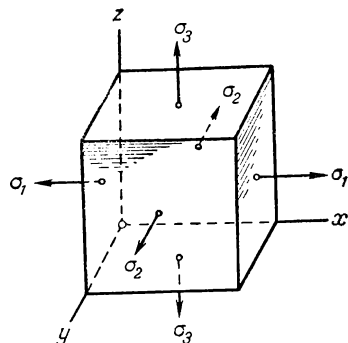
перпендикулярные площадки, которые не имеют касательных напряжений, а действующие на них нормальные напряжения имеют стационарные для данной точки значения (максимум, минимум, минимакс). Это и есть так называемые *главные площадки для нормальных напряжений*.

Три пары площадок, которые делят пополам двугранные углы между главными площадками, испытывают стационарные значения касательных напряжений. Эти площадки называются *главными площадками для касательных напряжений*.

Значения касательных напряжений на этих площадках равны



Фиг. 2.19 Главный додекаэдр, построенный возле заданной точки



Фиг. 2.18 Главный куб, построенный возле заданной точки напряженного тела

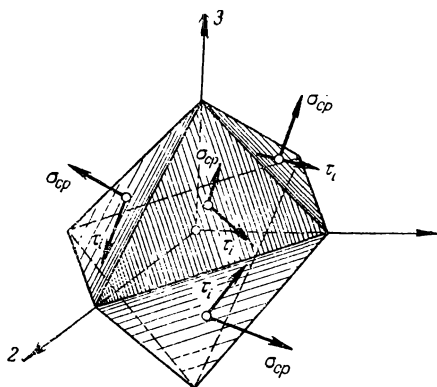
полуразности нормальных напряжений с тех главных площадок, по отношению к которым равнонаклоненными являются рассматриваемые две (из них одна биссекторная) главные для касательных напряжений площадки. Нормальные напряжения на этих плоскостях равняются соответственно полусуммам тех же главных напряжений.

Через ту же напряженную точку можно провести еще четыре замечательные плоскости; они равнонаклонены к главным площадкам и носят название *октаэдрических площадок*.

Нормальные напряжения, действующие на каждой из таких площадок, оказываются одинаковыми между собой и равняются среднему значению из нормальных напряжений для той же точки. Касательные же напряжения на таких площадках, также одинаковые между собой по величине, принимают

значения, обычно характерные для суждения о прочности материала в окрестности рассматриваемой точки.

Итак, в общей сложности через всякую пространственно напряженную точку можно провести тринадцать замечательных плоскостей.



Фиг. 2.20 Главный октаэдр, построенный возле заданной точки

Возле рассматриваемой точки можно построить замкнутые геометрические фигуры, грани которых будут состоять лишь из плоскостей первой или второй, или третьей группы. Так можно построить куб, грани которого совпадают с плоскостями главных нормальных напряжений (фиг. 2.18). Назовем его «главным кубом» у данной точки.

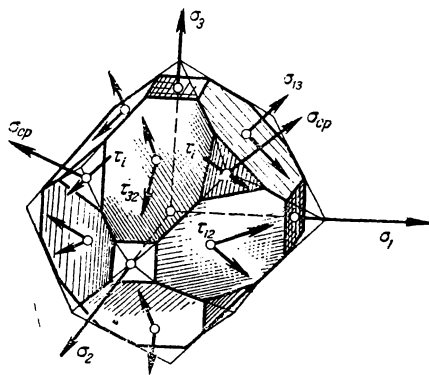
Сечения с главными касательными напряжениями (при $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) образуют ромбический додекаэдр, окружающий или вписанный

в куб (фиг. 2.19). Назовем его «главным додекаэдром» у данной точки.

Сечения с октаэдрическими напряжениями, как это уже указывалось в § 2.09 данной главы, образуют октаэдр (фиг. 2.20). Назовем его «главным октаэдром» у данной точки.

Можно попытаться построить геометрическую фигуру, включающую все указанные замечательные плоскости. Такую фигуру (26-гранник) можно назвать «главным гексаикосаэдром» у данной точки (фиг. 2.21).

Наконец, если вокруг заданной точки построить сферу, то все точки на этой сфере, испытывающие те или иные характерные напряжения (фиг. 2.22), представляются точками касания сферы с указанными выше геометрическими фигурами, если для последних указанная сфера будет вписанной в них.

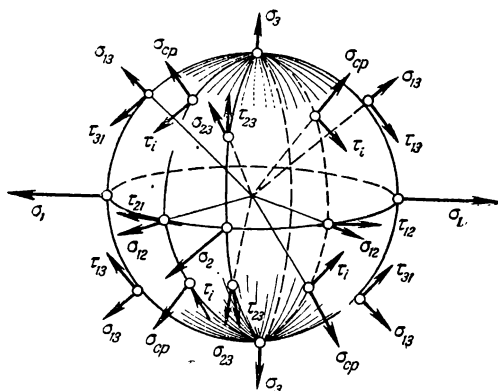


Фиг. 2.21 Главный гексаикосаэдр, построенный возле заданной точки тела

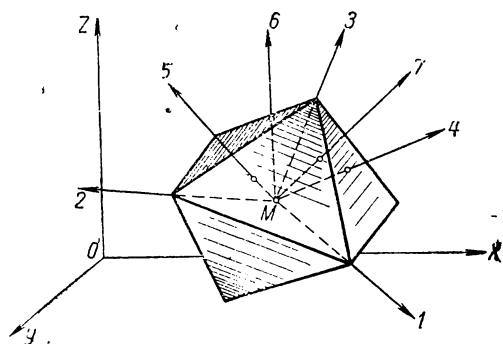
2. Деформированное состояние в окрестности заданной точки в данный момент вполне определено, если известен тензор деформации для этой точки и для того же момента времени.

Деформации по любому направлению (относительные удлинения) и в любых плоскостях (углы сдвига) определяются через компоненты тензора деформации линейными соотношениями.

Существует полная аналогия между теорией напряжений и теорией деформации, и поэтому все указанное в п. I относительно особенностей напряженного состояния в точке сохраняется и в отношении особенностей деформации, для чего надлежит соответственно лишь изменить терминологию. Так, через каждую точку деформируемого тела можно всегда про-



Фиг. 2.22 Сфера бесконечно малого радиуса, на поверхности которой имеются 26 замечательных точек



Фиг. 2.23 Главные оси деформации (1, 2, 3) и октаэдрические направления (4, 5, 6, 7) для точки M

вести также три взаимно перпендикулярные направления, сдвиги между которыми равны нулю, т. е. эти направления были взаимно перпендикулярны также и до деформации (так называемые главные оси деформации). Через ту же точку можно провести также четыре направления (октаэдрические), удлинения по которым оказываются одинаковыми (фиг. 2.23).

Можно говорить о главном кубе по деформациям (в изотропном теле он совпадает с ранее указанным главным кубом по напряжениям), который остается прямоугольным параллелепипедом и после деформации.

Существует главный октаэдр по деформациям (в изотропном теле он совпадает с главным октаэдром по напряжениям), который будучи октаэдром до деформации, остается октаэдром (с другими размерами граней) и после деформации.

3. Тензоры напряжений и деформаций имеют по три основных инварианта, которые не зависят от выбора координатной системы и могут объективно характеризовать состояние материала в окрестности рассматриваемой точки.

Компоненты тензора напряжений в случае упругого процесса и малых деформаций находятся, как то будет показано в главе 4-й, в однозначных линейных соотношениях друг от друга независимо от истории (последовательности) нагружения тела.

Литература к главе 2-й. см. главу 3, стр. 112.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ПОЛЯ ДЕФОРМАЦИИ В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ

А. СТАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 3.01. Обозначение компонентов смещения и вращения

Представим себе сплошное твердое тело, прикрепленное к земле, к опорам и т. п., причем таким образом, что оно не может перемещаться как тело абсолютно твердое. Тогда перемещения любой точки этого тела могут произойти только за счет деформации (упругой или пластической) самого тела.

Рассмотрим некоторую точку M (фиг. 3.01а) с координатами (первоначальными, т. е. до деформации тела) x, y, z и пусть M_1 есть новое положение этой точки. Обозначим проекции полного перемещения MM_1 на оси координат x, y, z через u, v, w и будем их называть *компонентами смещения*, или проекциями вектора смещения.

Для совокупности трех величин

$$\begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix} \quad (3.01)$$

в целях краткости языка удобно в дальнейшем принять название *матрица — столбец* смещения.

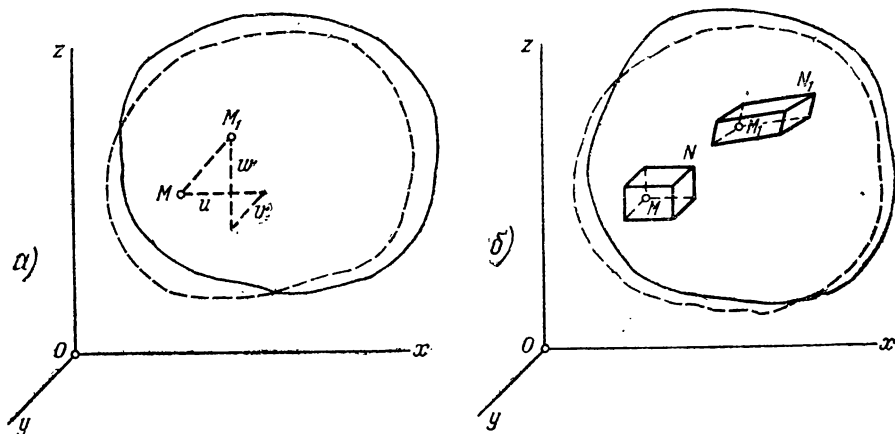
Компоненты смещения различных точек различны и будут функциями координат точки, т. е.

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z), \quad w = f_3(x, y, z). \quad (3.01a)$$

Полное смещение точки M определится выражением

$$\delta = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \psi(x, y, z) \quad (3.02)$$

и представляет собою некоторую функцию координат.



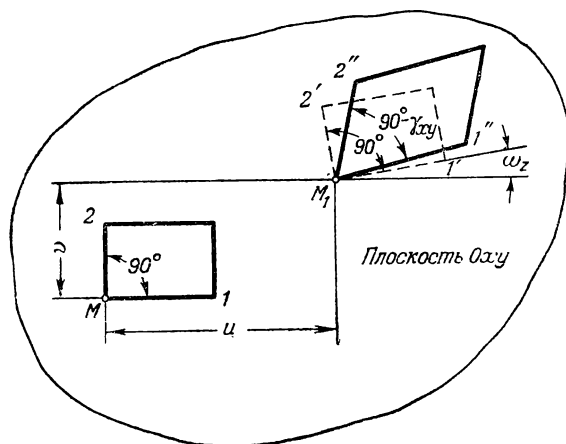
Фиг. 3.01 Обозначение компонентов смещения. Параллелепипед до деформации и после нее (сплошной линией обозначено тело до деформации, пунктиром после деформации и смещения)

* * *

Около рассматриваемой точки M можно, до деформации тела, построить бесконечно малый параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям (фиг. 3.01б). Если временно предположить, что этот элементарный параллелепипед не претерпевает деформации (т. е. его объем и форма остаются неизменными), то, для того чтобы определить его новое положение в связи с общей деформацией всего тела, трех компонентов смещения точки M , очевидно, недостаточно, так как параллелепипед на пути M_2M_1 может также еще и повернуться относительно ребра $M-1$ (параллельного оси x) или относительно ребра $M-2$ (параллельного оси y), или относительно ребра $M-3$ (параллельного оси z), или относительно произвольной оси, не параллельной ни одной из координатных осей. В последнем случае надо говорить о трех составляющих угла вращения. Эти составляющие, называемые *компонентами жесткого вращения*, обозначим

ω_x (поворот относительно оси x), ω_y и ω_z (то же относительно осей y и z)*.

Зная смещения точки M и повороты, можно без затруднений из простых соображений составить выражения для перемещения любой другой точки, например, для вершины N того же параллелепипеда. Однако действительные координаты вершины N в смещенном положении будут иными, так как на пути MM_1 рассматриваемый нами элемент мог сам претерпеть деформации, т. е. могли произойти изменения длин ребер, могли исказиться его первоначально прямые углы.



Фиг. 3.02 Проекция параллелепипеда до и после деформации

На фиг. 3.02 показана одна из проекций элементарного параллелепипеда и в первоначальном его положении ($M 1 2$), и в смещенном, но без учета собственных деформаций ($M_1 1' 2'$), и в действительной позиции ($M_1 1'' 2''$).

Заметим, что упомянутые выше компоненты жесткого вращения также являются функциями координат (т. е. изменяются при переходе от одной точки к другой), тесно связаны с компонентами перемещения (см. § 3.09), а в общем для теории упругости и вообще для реологии интереса не представляют, так как их наличие не вызывает напряжений и деформаций элементарного параллелепипеда**.

* Частный случай, когда $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, т. е. при отсутствии поворота в окрестности рассматриваемой точки, принято иногда называть чистой деформацией.

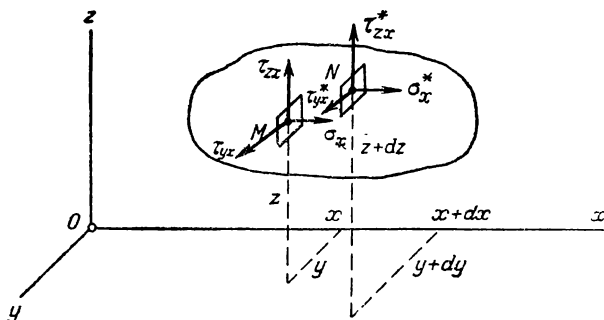
** Также, очевидно, не вызывают напряжений в элементарном параллелепипеде и компоненты жесткого перемещения (случай поступательного смещения элемента без его деформации).

В курсе сопротивления материалов прогибы балок, углы закручивания валов и т. д. часто называются деформациями рассматриваемой конструкции. Теория упругости делает четкое разграничение в наименовании, а именно: под компонентами деформации понимаются относительные удлинения и сдвиги в окрестности рассматриваемой точки, в прямом смысле зависящие от напряженного состояния в окрестности этой точки, а под компонентами смещения понимаются интегральные характеристики, зависящие от деформации тела в целом, как, например, прогибы оси балки и т. п. В связи с этим замечанием читателя не должно удивлять, что могут быть такие частные случаи, как, например, смещения точки нет, но деформация в точке есть (точка остается на месте, но для этой точки имеются относительные удлинения и т. п.) или такой случай — смещение точки есть, но деформации нет, т. е. рассматриваемая точка, а возможно и некоторый объем в окрестности этой точки переместился в новое положение без деформации, как одно целое твердое недеформированное тело.

§ 3.02. Обозначения компонентов напряжений в близлежащих друг к другу точках

(в декартовых координатах)

Представим себе сплошное тело (упругое или неупругое, находящееся в равновесии или в движении) и внутри этого тела через точку M с координатами x, y, z проведем какую-либо плоскость, например, нормальную к оси x (фиг. 3.03). Тогда компоненты напряжений для точки указанной плоскости должны быть обозначены $\sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx}$.



Фиг. 3.03 Напряжения в двух бесконечно близких друг к другу точках, принадлежащих сплошному телу, в общем не равны и отличаются между собой на бесконечно малые величины

Если в бесконечной близости от заданной точки M рассмотреть другую точку N с координатами $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ и через эту точку также провести плоскость, нормальную к оси x , то компоненты напряжений для второй точки должны отличаться от одноименных напряжений у точки M на бесконечно малые величины; эта разница тем меньше, чем ближе точка N к точке M . Последнее утверждение вытекает из того положения, что напряжения являются непрерывными функциями координат:

$$\sigma_x = F_1, (x, y, z);$$

$$\tau_{yx} = F_2 (x, y, z)$$

и т. д.

Компоненты напряжений для точки N могут быть с достаточной точностью записаны через компоненты напряжений в точке M в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^* &= \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} dz, \\ \tau_{yx}^* &= \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial z} dz, \\ \tau_{zx}^* &= \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \end{aligned} \right\} \quad (3.03)$$

Смысл последних записей таков: мы допускаем функции напряжений разложимыми в ряд Тейлора, но отбрасываем члены второго и высших порядков малости*.

В случае, если обе рассматриваемые точки лежат на прямой, параллельной одной из координатных осей, выражения (3.03) упрощаются. Так, если прямая MN параллельна оси x и, следовательно, $dy=dz=0$, то

$$\sigma_x^* = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx,$$

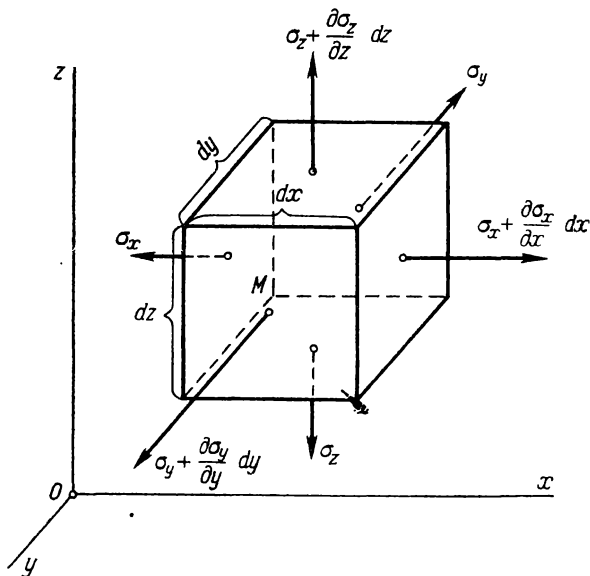
$$\tau_{yx}^* = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx,$$

$$\tau_{zx}^* = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx.$$

* Эта же идея лежит в основе всех приложений дифференциального исчисления: сложные зависимости становятся в бесконечно малом линейными, неравномерные процессы — равномерными и т. д. если пренебречь бесконечно малыми высших порядков. Но не только эти приложения, но и само создание анализа бесконечно малых стало возможным только потому, что материальные процессы имеют тенденцию в малых размерах приобретать равномерный характер (пока, разумеется, не начинает сказываться атомное строение вещества). Эту тенденцию в присущей ему форме и отражает дифференциальное исчисление.

Так как производная функции по какому-либо аргументу представляет собой интенсивность изменения функции с приростом этого аргумента, иначе говоря, величину прироста значения функции на «единицу» длины аргумента, то отношение $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$, умноженное на dx , составляет прирост функции σ_x на длине dx . Аналогично $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx$ — прирост τ_{yx} на длине dx и т. д.

В качестве иллюстрации применения приведенной выше записи на фиг. 3.04 показаны обозначения нормальных напряжений по трем взаимно перпендикулярным граням, видимым

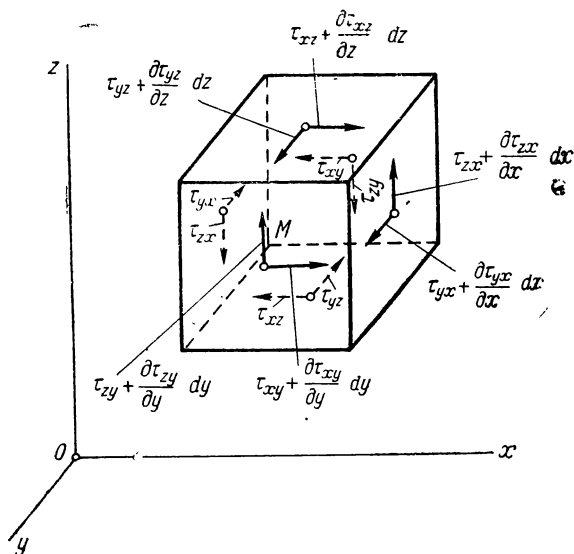


Фиг. 3.04 Обозначения нормальных напряжений по всем граням элементарного параллелепипеда

наблюдателю, через компоненты напряжений по соответственным им параллельным остальным граням того же бесконечно малого параллелепипеда. Эти последние плоскости (закрытые от наблюдателя первыми тремя гранями), примыкающие к точке M , приняты как бы за основные, и потому напряжения, действующие по плоскостям, отстоящим от основных в положительном направлении соответствующих осей, будут иметь в своем начертании указанные выше дифференциальные приращения (с положительным знаком).

Для того чтобы не затемнять чертежа, обозначения касательных напряжений даны отдельно на фиг. 3.05.

Заметим, что как бы ни были малы размеры граней элементарного параллелепипеда, однако и в пределах каждой грани напряжения, конечно, могут распределяться неравномерно. В свете этого замечания следует считать, что указанные на фиг. 3.04—3.05 обозначения компонентов напряжений имеют осредненные значения напряжений для каждой грани в отдельности.



Фиг. 3.05 Обозначения компонентов касательных напряжений по всем граням элементарного параллелепипеда

§ 3.03. Дифференциальные уравнения равновесия и движения (статическое обследование)

Предположим, что данное тело находится в равновесии. Из этого тела около некоторой точки M мысленно вырежем бесконечно малый параллелепипед; для него должны удовлетворяться шесть условий равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= 0, & \Sigma M_x &= 0, \\ \Sigma Y &= 0, & \Sigma M_y &= 0, \\ \Sigma Z &= 0, & \Sigma M_z &= 0, \end{aligned} \right\}. \quad (a)$$

Если тело находится в движении, то правые части уравнений проекций (ΣX , ΣY , ΣZ) не обращаются в нули, а, согласно второму закону Ньютона, должны быть равны произведениям массы элемента на соответствующую проекцию его ускорения * (проекция инерционных сил).

Пусть для рассматриваемой точки M (ее можно считать, например, центром тяжести элементарного параллелепипеда) проекции пути (перемещения) на оси координат будут соответственно равны: u (на ось x), v (на ось y) и w (на ось z). Смещения u , v , w полагаем очень малыми; проекции ускорения запишутся так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Аналогично должны измениться и правые части уравнений моментов, где вместо нулей должны быть проекции моментов от тех же инерционных сил.

Подробно раскроем первое уравнение динамического равновесия (строго говоря, уравнение движения), т. е.

$$\Sigma X = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (б)$$

Проекцию на ось Ox будут давать нормальные и касательные напряжения, параллельные оси Ox . Раскрывая условие равновесия (б), имеем (фиг. 3.04—3.05):

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right] dydz - \sigma_x dydz + \left[\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right] \cdot dx dz - \\ & - \tau_{xy} dx dz + \left[\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right] dy dx - \tau_{xz} dy dx + \\ & + X \rho dx dy dz = \rho dx dy dz \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (б)$$

где ρ — плотность вещества и X — проекция на ось x объемной силы (например, силы тяжести), отнесенной к единице массы.

Таким же путем надлежит раскрыть и следующие два уравнения динамического равновесия. После раскрытия скобок и выполнения сокращений уравнения проекций напишутся так:

* Можно, конечно, правые части равенств оставить равными нулю, если указанное произведение массы на ускорение, но с обратным знаком («даламберовы» силы инерции) подразумевать в составе объемной силы (X , Y , Z).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \rho &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \rho &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \rho &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
 \end{aligned}
 \tag{3.04}$$

З а м е ч а н и е 1. Уравнения (3.04) для удобства запоминания могут быть представлены следующей таблицей (после переноса членов с объемными силами в правые части):

Уравнения	Левая часть уравнения с операциями			Правая часть уравнения	
	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$	без операций	с операцией $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$
$\Sigma X = 0$	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}	X	u
$\Sigma Y = 0$	τ_{yx}	σ_y	τ_{yz}	Y	v
$\Sigma Z = 0$	τ_{zx}	τ_{zy}	σ_z	Z	w
	Множители			$-\rho$	ρ

Квадратная матрица компонентов левой части уравнений, над которыми должны быть произведены соответствующие операции по указанной в таблице схеме, *составляет тензор напряжений*. Правая часть уравнений представляет собой матрицу-столбец из объемных сил и вторые производные от матрицы-столбца смещений.

З а м е ч а н и е 2. В ряде задач теории упругости и теории пластичности массовые силы оказывают очень небольшое влияние, и поэтому при расчетах ими иногда пренебрегают. В таком случае в уравнениях (3.04) пропадают члены, содержащие X, Y, Z . Если к тому же рассмотреть случай покоя (статическая теория упругости), то *уравнения равновесия* (3.04) *оказываются однородными дифференциальными уравнениями*. Если при написании этих уравнений применить обозначения напряжений и координатных осей, указанных на стр. 51, то такие однородные статические уравнения запишутся исключительно кратко:

$$\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ki} = 0 \quad (k = 1, 2, 3).$$

В случае использования другой (не декартовой) координатной системы уравнения равновесия записываются в виде, отличном от (3.04) (см. § 9.02).

Замечание 3. При выводе (3.04) не делалось различия между величиной и положением до и после деформации тех площадок, на которых действуют напряжения. В случае больших деформаций (круг задач нелинейной теории упругости) необходимо учитывать упомянутое различие между первоначальной и деформированной формами параллелепипеда, однако заметим (см. [2]), что по внешнему виду уравнения (3.04) сохраняются и в таком случае, если под координатами x, y, z , по которым выполняется дифференцирование в (3.04), понимать не координаты точек до деформации, а координаты окончательного положения точек.

§ 3.04. Продолжение. Еще о законе взаимности касательных напряжений

Переходим ко второй группе уравнений — сумме моментов. Начнем, например, с условия $\Sigma M_y = 0$, причем для простоты выкладки начало координат примем в центре параллелепипеда. Моменты относительно этой оси $y_0 y_0$ (фиг. 3.06) будут давать

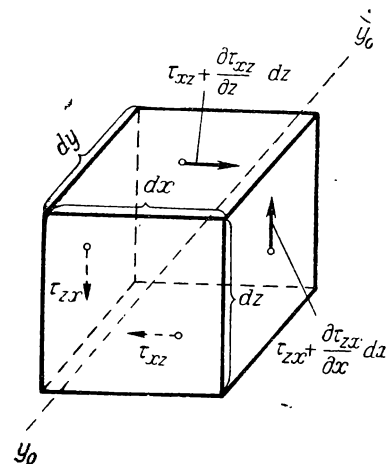
только касательные силы, нормальные к ней, которые только и указаны на фиг. 3.06. Нормальные силы, как не имеющие плеча относительно выбранной оси $y_0 y_0$ не будут давать моментов и на фиг. 3.06 потому не указаны. По тем же причинам не будут давать момента компоненты силы тяжести.

Предполагая общий случай движения, когда в данный момент времени рассматриваемый элемент имеет проекции угловых перемещений на оси координат $\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z$ в правой части уравнений моментов (а) вместо нулей должны быть записаны произведения момента инерции массы элемента на соответствующую проекцию углового ускорения, т. е.

$$\Sigma M_y = I \frac{\partial^2 \omega'_y}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Раскрываем условие (2):

$$\begin{aligned} & \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx \cdot dy \frac{dz}{2} + \tau_{zx} dx \cdot dy \frac{dz}{2} - \\ & - \tau_{zx} dy \cdot dz \frac{dx}{2} - \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx \right) \cdot dy \cdot dz \frac{dx}{2} = I \frac{\partial^2 \omega'_y}{\partial t^2}. \end{aligned}$$



Фиг. 3.06 К доказательству закона о сопряженности касательных напряжений

В последнем уравнении не все члены одинакового порядка малости; так члены $\tau_{xz} dx \cdot dy \cdot dz$, $\tau_{zx} dx dy dz$ — бесконечно малые третьего порядка, а остальные:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dx \cdot dy \frac{dz^2}{2}, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dy \cdot dz \frac{dx^2}{2}, \quad I \frac{\partial^2 \omega'_y}{dt^2} —$$

— бесконечно малые четвертого и пятого порядков, которые надлежит исключить из уравнения ввиду соседства их с малыми низших порядков. В итоге из выражения (2) определяем:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (d)$$

Это есть известный читателю из сопротивления материалов закон взаимности касательных напряжений; соответственно ему же два других уравнения моментов доставляют:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}. \quad (e)$$

Выражения (d) и (e) могут быть прочитаны в такой объединенной редакции: *в каждой двух взаимно перпендикулярных плоскостях компоненты касательных напряжений, направленные перпендикулярно к линии пересечения этих плоскостей, равны между собой и при этом направлены либо оба к линии пересечения, либо оба от линии пересечения**.

Итак, к трем дифференциальным уравнениям (3.04), содержащим девять функций от координат рассматриваемой точки (σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zy} , τ_{zx} , τ_{xz}), условие взаимности дает еще три условия:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned} \right\}. \quad (3.05)$$

Таким образом, используя (3.05) в (3.04), число неизвестных функций уменьшаем до шести.

Так как число неизвестных функций (шесть) превышает число уравнений (три), то, следовательно, одного статиче-

* Заметим, что закон взаимности (сопряженности) касательных напряжений является частным случаем общего закона взаимности напряжений, гласящего: если при одной и той же точке напряженного тела построены две площадки, то проекция полного напряжения, отвечающего одной из этих проекций, на нормаль ко второй равна проекции напряжения, отвечающего второй площадке, на нормаль к первой. Например:

$$p_{\lambda y} = p_{yx}, \quad p_{yx} = p_{xy}$$

и т. п.

ского рассмотрения задачи недостаточно для решения поставленной задачи о нахождении упомянутых выше шести функций. Иначе говоря, *всякая задача теории упругости статически неопределима*. Недостающие уравнения получим, изучая происходящие в теле деформации и их связь с напряжениями (т. е. физические свойства данного тела).

Эти геометрические и физические соотношения будут установлены ниже (§ 3.07 и глава 4), и в итоге число уравнений будет соответствовать числу неизвестных функций. Интегрирование дифференциальных уравнений в конечном счете раскроет вид искомых функций, но, как и всякое интегрирование уравнений, повлечет появление произвольных постоянных и неопределенных функций интегрирования, для нахождения которых надлежит обратиться к использованию *граничных условий*, иначе называемых *поверхностными условиями* (условия на контуре); эти условия устанавливают связь внутренних сил (напряжений) у границы тела с внешними силами, приложенными к наружной поверхности исследуемого тела (§ 3.05).

§ 3.05. Еще о так называемых условиях на контуре тела

Дифференциальные уравнения (3.04) справедливы для любой точки тела внутри этого тела, но для точек тела на его внешней границе (а для многосвязного контура и на его внутренних границах), очевидно, можно записать известные из главы II соотношения между компонентами непосредственно приложенной на границе тела внешней нагрузки и компонентами напряжений внутри тела возле указанной границы. Это известные читателю из главы II уравнения (2.05), которые могут быть для краткости записаны в форме

$$p_{ik} = \sum_{k=1}^{k=3} \tau_{ik} l_k \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.06 a)$$

В дальнейшем уравнения (3.06 a) будем называть *статическими граничными условиями*.

Но помимо статических условий на контуре, в отдельных задачах могут быть известные и *кинематические граничные условия*.

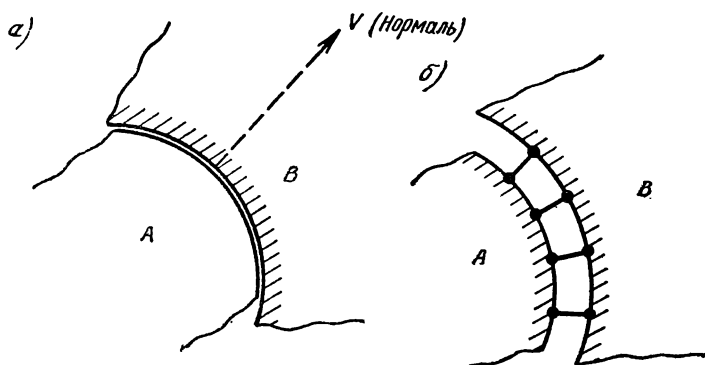
Так, если на какой-либо части поверхности тела осуществляется жесткая связь с каким-либо абсолютно-неподвижным и абсолютно-жестким (недеформируемым) другим телом, то для всех точек контакта первого и второго тела, очевидно будут соблюдаться условия

$$u = v = w = 0, \quad (a)$$

т. е. все компоненты для точек упомянутой контактной поверхности смещения отсутствуют.

Если же связь указанных двух тел будет неполная, например, исследуемое тело соприкасается с жестким таким образом, что совершенно исключаются перемещения граничных точек в направлении нормальном к поверхности контакта, но могут быть перемещения в направлении касательных к указанной поверхности (фиг. 3.07а), то для всех точек указанной поверхности очевидно будут соблюдаться условия

$$u \cdot \cos(xv) + v(\cos yv) + w \cos(zv) = 0$$



Фиг. 3.07 К написанию кинематических граничных условий

или в виде

$$ul + vt + wt = 0. \quad (б)$$

Если оба контактируемых тела будут деформируемыми, то при наличии связей, показанных на фиг. 3.07 а (т. е. допускающих проскальзывание одного тела по другому, но обеспечивающих общность перемещений по нормали к контактной поверхности), кинематические граничные условия запишутся:

$$ul + vt + wn = u^*l + v^*n + w^*n, \quad (3.06 в)$$

где u^* , v^* , w^* — относятся к проекциям перемещения граничных точек второго тела.

Наряду с непрерывным (континуальным) контактом по определенной поверхности одного тела с другим могут быть закрепления или контакт лишь в отдельных точках (*дискретные связи*), как это показано на фиг. 3.07 б.

Очевидно указанные выше связи (континуальные и дискретные) могут быть односторонними (которые осуществляются лишь при нажатии одного тела на другое и не

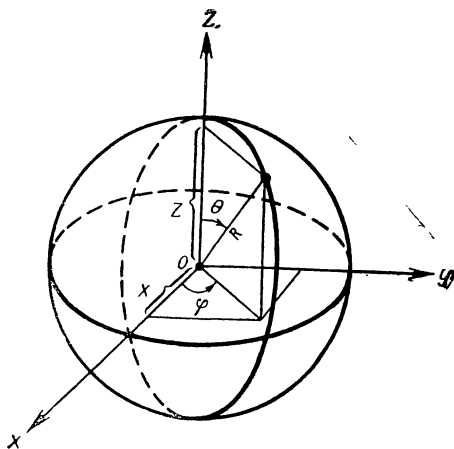
соблюдаются при расхождении тел друг от друга) и двух-сторонними.

В более общей постановке задачи (некоторые динамические задачи) на границе тела могут задаваться для определенных моментов времени скорости, ускорения и т. п. для граничных точек. В таком случае говорят о *динамических граничных условиях*.

§ 3.05 а. Замечания о статических уравнениях в других координатах

Приведенные выше дифференциальные уравнения равновесия (3.04) и граничные условия (2.05) записаны в декартовых прямоугольных прямолинейных координатах. Такая форма записи статических уравнений является широко распространенной, вывод и начертание этих уравнений простые и в случае, когда исследуемое деформируемое тело ограничено наружными гранями, параллельными той или иной координатной плоскости, то запись уравнений равновесия именно в декартовых координатах оказывается и самой удобной.

Однако при решении задач на равновесие или движение упругого тела, ограниченного криволинейными поверхностями, прибегают к криволинейным координатам, которые подбирают так, чтобы возможно проще были выражены граничные условия задачи.



Фиг. 3.08 Сферические координаты

Таким образом вместо прежней тройки чисел x, y, z , коими определяется положение рассматриваемой точки, в новой системе координат будет участвовать какая-то другая тройка чисел — α, β, γ .

Наиболее распространенными системами криволинейных координат являются полярные координаты на плоскости, цилиндрические и сферические в пространстве.

От уравнений, записанных в одной системе координат, принципиально можно перейти к записи урав-

нений в других координатах, т. к. всегда можно установить связь между координатами точки в одной и другой системах.

Так, в сферических координатах (фиг. 3.08) положение точки определяется координатами $\alpha=r$, $\beta=\theta$, $\gamma=\varphi$, где r — расстояние от центра сферы, φ — угол дальности и θ — угол широты.

Формулы преобразования криволинейных координат в декартовые в случае сферических координат имеют вид:

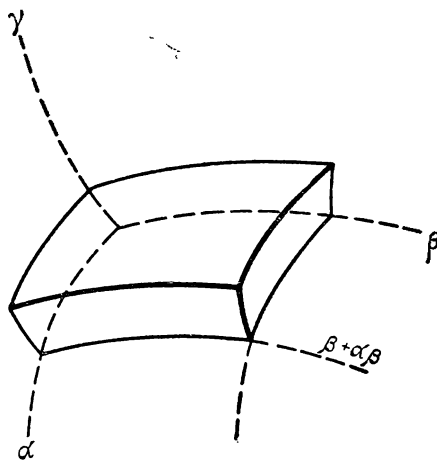
$$\begin{aligned}x &= r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi, \\y &= r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\z &= r \cdot \cos \theta.\end{aligned}\tag{3.06}$$

Использование (3.06) в уравнениях (3.04) и (2.05) позволит выполнить запись уравнений равновесия в сферических координатах. Аналогичным путем можно поступать переходя от декартовых координат к любым другим криволинейным координатам.

Однако вместо указанного плана чисто математического преобразования, обычно оказывается более целесообразным вывод уравнений равновесия в новых координатах путем непосредственного составления статических уравнений именно в новых координатах; с этим и встретится читатель в главах 9,10.

В соответствии с той или другой выбранной криволинейной координатной системой будет приниматься и соответ-

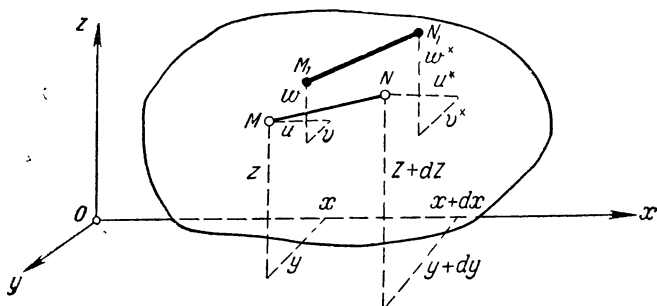
ственная форма элементарного объема, подлежащего рассмотрению (вместо прямоугольного прямолинейного параллелепипеда), так для триортогональной системы криволинейных координат элементарный объем должен выбираться ортогональным криволинейным параллелепипедом, заключенным между поверхностями α и $\alpha + d\alpha$, β и $\beta + d\beta$, γ и $\gamma + d\gamma$ (фиг. 3.09).



Фиг. 3.09 Триортогональная система криволинейных координат

§ 3.06. Обозначения компонентов смещения вблизи заданной точки

Для компонентов смещения точки $M(x, y, z)$, находящейся внутри заданного сплошного тела, были приняты (§ 3.01) обозначения u, v, w (фиг. 3.10). Если в бесконечной близости от заданной точки M рассмотреть другую точку N ,



Фиг. 3.10 Компоненты смещений двух бесконечно близких точек, принадлежащих непрерывному телу

координаты которой до деформации были $x+dx, y+dy, z+dz$, то компоненты смещения указанной соседней точки, обозначенные на фиг. 3.10 через u^*, v^*, w^* , могут быть с достаточной точностью записаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz; \\ v^* &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz; \\ w^* &= w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{aligned} \right\} \quad (3.07)$$

Аналитическая интерпретация написанного такова, что мы полагаем функцию смещения, а следовательно, и компонентов смещения непрерывной, раскладываемой в ряд Тейлора, но отбрасываем члены второго и высших порядков малости.

Последнее допущение находится в соответствии с предпосылками классической теории упругости (см. стр. 30), но, очевидно, не может быть принято в тех случаях, когда ожидаемые смещения точек тела не являются малыми.

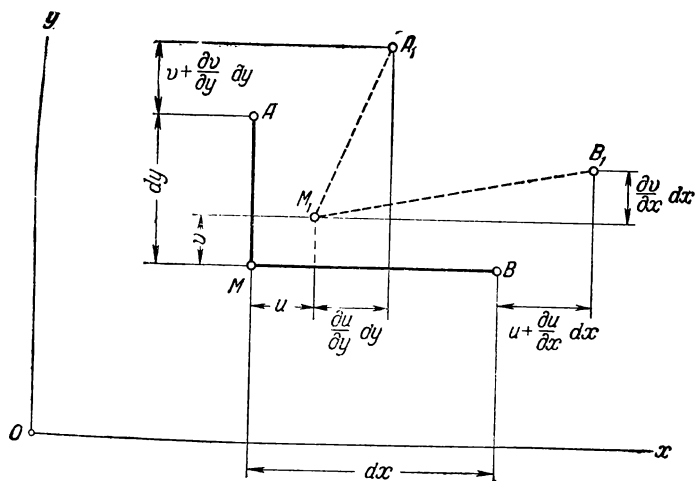
Если обе рассматриваемые точки находятся в плоскости, параллельной одной из координатных, и, тем более, лежат на прямой, параллельной любой оси, то запись компонентов смещения соседней точки упрощается. Так, если точки M и N находятся в плоскости, параллельной координатной плоскости $x-z$, и прямая MN параллельна оси x , то $dy=dz=0$ и потому

$$u^* = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad v^* = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx,$$

$$w^* = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx.$$

Отношение $\frac{\partial u}{\partial x}$ может быть истолковано как интенсивность развития в горизонтальном направлении горизонтальной компоненты (*градиент по длине* в отличие от градиента во времени и т. д.) u , а, будучи умножено на dx , оно представит приращение горизонтального перемещения на длине dx . Аналогично могут быть истолкованы вторые слагаемые в записях остальных компонентов.

В качестве иллюстрации на применение указанной выше записи на фиг. 3.11 (масштаб искажен) показаны приращения компонентов смещения для двух точек A и B , находящихся

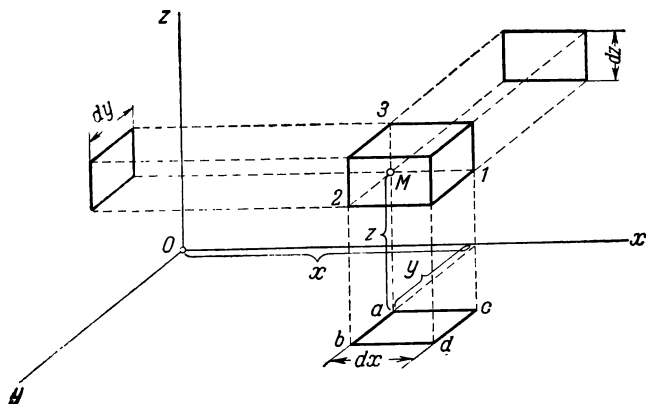


Фиг. 3.11 Обозначение компонентов смещений концов отрезка прямой в частном случае расположения в пространстве соседних точек

в бесконечной близости с точкой M , для которой компоненты смещения u, v заданы; все три названные точки лежат в плоскости xy , а отрезки MB и MA параллельны осям x и y .

§ 3.07. Дифференциальные зависимости компонентов малой деформации от компонентов смещения (в декартовых координатах)

Около заданной точки M внутри сплошного тела, мысленно, как и прежде, выделим плоскостями, параллельными координатным, бесконечно малый параллелепипед с ребрами dx, dy, dz (фиг. 3.12).



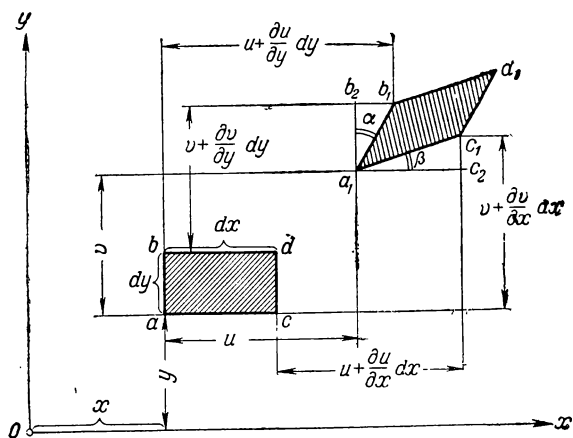
Фиг. 3.12 Параллелепипед и его проекции до деформации

Такой элементарный объем в статическом отношении рассмотрен в § 3.03. При деформации тела он переместится и сам продеформируется, причем изменятся длины его ребер и исказятся первоначально прямые углы между гранями.

Для дальнейшего достаточно изучить удлинения ребер $M1, M2, M3$ (линейные деформации) и изменения углов $1-M-2, 1-M-3, 2-M-3$ (сдвиги, т. е. угловые деформации).

Пусть фиг. 3.13 изображает проекцию рассматриваемого параллелепипеда на плоскость xy ($abcd$ — проекция до перемещения и деформации, $a_1 b_1 c_1 d_1$ — проекция после перемещения и деформации).

Компоненты смещения для точки a в прежних обозначениях будут u и v . Компоненты смещения точек b и c на



Фиг. 3.13 Одна из проекций параллелепипеда до деформации и при деформации

фиг. 3.13 записаны согласно указаниям в § 3.06 для случая весьма малых деформаций.

Из рассмотрения фиг. 3.13 следует, что относительное удлинение ребра ac (по фиг. 3.12 это — MI), первоначальная длина которого была dx , записывается (с точностью до бесконечно малых первого порядка) так:

$$\epsilon_x = \frac{a_1c_1 - ac}{ac} = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + dx - u\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Аналогично для относительного удлинения вдоль оси имеем:

$$\epsilon_y = \frac{a_1b_1 - ab}{ab} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}dy + dy - v\right) - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Для угла поворота ребра ab в плоскости Oxy имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y}dy - u}{v + \frac{\partial v}{\partial y}dy + dy - v} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}},$$

отбрасывая в знаменателе $\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y$ как весьма малую величину по сравнению с единицей, переписываем:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Аналогично для угла поворота ребра ac в плоскости Oxy :

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Итак, относительный сдвиг, т. е. искажение прямого угла bac (его уменьшение), записывается так:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

При помощи круговой подстановки, не делая специальных выкладок, можем записать выражения сдвигов и в других координатных плоскостях. Таким образом, располагаем следующими дифференциальными зависимостями:

Относительные удлинения:

Относительные сдвиги:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \hline \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right.$$

(3.08)

Указанные уравнения иногда называются уравнениями Коши*

Дифференциальные уравнения равновесия и геометрические уравнения, составляя девять уравнений, содержат в

* Соотношения (3.08) и вытекающие из него уравнения (3.09) составлены применительно к декартовым координатам. В случае использования других координат (см. гл. 9,10) указанные соотношения будут записываться иначе.

общей сложности 15 неизвестных ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, u, v, w$). Следовательно, для полного решения поставленной задачи к полученным пока двум группам уравнений необходимо добавить еще шесть уравнений, но при условии, что эти новые уравнения не будут содержать новых неизвестных.

Таковыми уравнениями являются условия упругости для упругого тела, условия пластичности для тела, пребывающего в пластическом состоянии, т. е. это должны быть физические уравнения, форма записи которых должна быть в каждом отдельном случае своей, в зависимости от свойств тела и его состояния (см. главы 4—6).

Уравнениями (3.04) и (3.08) определяются *уравнения механики сплошной среды*, одинаковые для теории упругости и для теории пластичности как для твердых тел (строительные конструкции), так и для тел, находящихся в других состояниях (жидкости, рассматриваемые в гидравлике, и т. п.).

Прежде чем покончить с общими уравнениями механики сплошной среды, осветим весьма важное свойство деформации сплошного непрерывного тела, известное под названием «условия неразрывности деформаций» (§ 3.08).

Если применить необычные обозначения компонентов деформации, указанные в колонке III на стр. 75, а также принять приведенные на стр. 93 обозначения координатных осей (x_1, x_2, x_3) и составляющих смещения (u_1, u_2, u_3), то уравнения (3.08) предстанут в виде: }

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right), & \epsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right); \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right), & \epsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \\ \epsilon_{33} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right), & \epsilon_{31} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right).\end{aligned}$$

Отмечая полную аналогию во внешнем начертании всех шести зависимостей, можно для краткости письма записать любого компонента деформации дать в форме

$$\epsilon_{lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right).$$

§ 3.08. Уравнения неразрывности деформаций

Перемещение любой точки сплошного тела определяется тремя функциями:

$$u, v, w; \quad (a)$$

деформация же данной точки определяется шестью функциями:

$$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}. \quad (б)$$

Уравнения (3.08) показывают, что если заданы три функции u, v, w , то этим самым будут определены все шесть составляющих деформации (б), так как они выражаются через первые производные от составляющих перемещения*.

Таким образом, очевидно, все шесть функций для компонентов деформации (б) произвольно задать нельзя, между ними должны существовать какие-то зависимости, которые ниже и устанавливаются.

Число таких зависимостей равно шести, и они делятся на две группы: I группа — зависимости между составляющими деформации в одной плоскости и II группа — зависимости между составляющими деформации в разных плоскостях.

Начнем с I группы. Продифференцируем первые два из уравнений (3.08) следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial x^2}.$$

Складываем эти уравнения почленно:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \cdot \partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

и замечаем, что выражение, заключенное в скобках, есть деформация сдвига γ_{xy} .

Таким образом, для каждой точки существует зависимость между удлинением и углом сдвига в каждой плоскости вида

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y}. \quad (в)$$

Итак, если заданы своими уравнениями две линейные деформации, то этим самым уже предопределяется и угол сдвига:

* В (3.08) входят девять неизвестных, и потому для самостоятельного их решения необходимо задаться любыми тремя неизвестными. Так, задавшись тремя компонентами перемещения из (3.08), найдем шесть составляющих деформации; задавшись тремя линейными деформациями, найдем три перемещения и три угловые деформации; возможны и другие комбинации.

$$\gamma_{xy} = \iint \left[\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \right] \partial x \cdot \partial y.$$

Аналогично зависимости (в), установленной для плоскости $xу$, можно установить зависимость для деформации в других плоскостях, как это выписано ниже в сводной таблице (3.09).

Для вывода зависимостей II группы дифференцируем (3.08) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \cdot \partial x}, \\ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}, \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial z \cdot \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \cdot \partial z}. \end{aligned}$$

Сложим первые две написанные строки и вычтем третью: получим:

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}.$$

Это уравнение еще раз дифференцируем по z и, замечая, что

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \cdot \partial y \cdot \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \cdot \partial y},$$

получим:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \cdot \partial y}.$$

(2)

Это — одна из зависимостей II группы; она определяет тот факт, что если заданы три деформации сдвига (γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx}), т. е. известны для них уравнения, то этим самым вполне определяется (и не может быть задано произвольно) удлинение ϵ_z , т. е.

$$[\epsilon_z = \frac{1}{2} \iint \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] \partial x \cdot \partial y.$$

Делая в уравнении (2) круговую подстановку, получим еще два уравнения такого же вида, как (2). Итак, имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y}, \\
\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \cdot \partial z}, \\
\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \cdot \partial x}, \\
\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \cdot \partial y}, \\
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \cdot \partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \cdot \partial x}.
\end{aligned} \tag{3.09}$$

Написанные уравнения называются *уравнениями, или условиями, совместности* или *неразрывности деформаций*; выведены они *Сен-Венаном*.

Физический смысл этих уравнений таков. Если мы, задаваясь деформацией, их не учтем и каждому из параллелепипедов, на которые мысленно разбили все тело, назначим шесть независимых составляющих деформаций, то из отдельных таких деформированных параллелепипедов мы не сложим непрерывного, деформированного тела, так как между ними могут, например, оказаться бесконечно малые разрывы (пустоты).

Иначе говоря, заданное тело, сплошное и непрерывное до деформации, остается сплошным и непрерывным после деформации*.

Такой физический смысл уравнений (3.09).

Если бы нам удалось по заданным нагрузкам точно найти перемещения точек тела (u , v , w), то после этого деформации можно вычислить по формулам (3.08); в этом случае условия неразрывности будут удовлетворены сами по себе, так как они выведены из уравнений (3.08) и являются их следствием.

Если же по заданным нагрузкам будем искать напряжения и затем деформации, то при этом необходимо одновременно удовлетворить и уравнениям неразрывности (3.09); в

* Весьма наглядно условие совместности деформации представляется на примере фермы (стержневой системы с жесткими или шарнирными узлами), стержни которой после своего удлинения (или укорочения), вызванного нагрузкой, должны образовать по-прежнему замкнутую фигуру вида, сходного с первоначальной фигурой фермы.

противном случае деформации будут несовместны, и мы не будем в состоянии найти перемещения из уравнений (3.08), так как в них будут взаимные противоречия.

Энергетический смысл тех же уравнений таков, что осуществлению указанного принципа неразрывности деформаций соответствует в упругом теле минимальное значение накапливаемой телом потенциальной энергии деформации*.

Таким образом, для упругого тела принцип наименьшей работы деформации и уравнения совместности деформаций тождественны между собой (хотя в теории и расчетах они не могут полностью заменять друг друга).

В несколько иной, но близкой по идее форме, указанный минималистский принцип и его тождественность уравнениям неразрывности деформаций сохраняется и в случае пластических деформаций.

Уравнения (3.09) установлены для трехмерной задачи, в других случаях число независимых уравнений неразрывности будет другое**.

§ 3.09. Оценка точности уравнений (3.08) с позиций нелинейной теории упругости

При выводе геометрических уравнений механики сплошной среды (3.09) фактически были сделаны допущения, о которых указывалось на стр. 30—31 (пункты а, б, в), надобность в которых, возможно, была для читателя не совсем очевидна. Приведем дополнительное пояснение.

Если не делать указанных на стр. 30—31 допущений, то окончательные выражения для компонентов деформации значительно осложнились бы. Приведем без вывода из книги В. В. Новожилова «Основы нелинейной теории упругости» (1946, стр. 21 и 55—58) выражения для относительного удлинения и сдвига:

* Впрочем, то положение, что нарушение условий неразрывности (например, образование трещин в сплошном теле, разрыв стержня в ферме и т. п.) должно именно увеличить работу внешних сил (сумма, составленная из произведений внешних сил на соответствующие им перемещения), очевидно само по себе, так как такой факт связан с увеличением перемещений тела (прогибы ферм и т. п.) против того случая, когда соблюдаются условия неразрывности.

** В. З. Власов (см. его «Общую теорию оболочек», 1949 г.) установил, что в общем случае евклидова пространства, имеющего n измерений, число независимых уравнений неразрывности определяется формулой

$$i = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}$$

при $n = 2$ (плоское напряженное состояние) $i = 1$; при $n = 1$ (одноосное напряженное состояние) $i = 0$; при $n = 4$ (например, четвертое измерение — время) $i = 20$.

$$\begin{aligned}\epsilon_x^* &= \epsilon_x + \frac{1}{2} \left[\epsilon_x^2 + \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} + \omega_z \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz} - \omega_y \right)^2 \right], \\ \gamma_{xy}^* &= \gamma_{xy} + \epsilon_x \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} - \omega_z \right) + \epsilon_y \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} + \omega_z \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz} - \omega_y \right) \left(\frac{1}{2} \gamma_{yz} + \omega_x \right),\end{aligned}\quad (3.10)$$

где через ϵ_x^* и γ_{xy}^* (со звездочкой) обозначены точные значения компонентов деформаций и через ϵ_x и т. д. (без звездочек) — приближенные записи для них согласно (3.08).

Рассматривая случай, когда малы по сравнению с единицей не только компоненты деформации, но и углы поворота, В. В. Новожилов приходит к такой упрощенной записи:

$$\left. \begin{aligned}\epsilon_x^* &\approx \epsilon_x + \frac{1}{2} (\omega_y^2 + \omega_z^2) \\ \gamma_{xy}^* &\approx \gamma_{xy} - \omega_x \omega_y\end{aligned} \right\}.\quad (3.11)$$

Если, наконец, предположить, что квадратами и произведениями углов поворота в формулах (3.10) можно пренебречь, то приходим к формулам классической линейной теории упругости, т. е.

$$\begin{aligned}\epsilon_x^* &\approx \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \gamma_{xy}^* &\approx \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

и т. д.

Таким образом, исследование линейных выражений для компонентов деформации (формулы 3.08) возможно лишь при соблюдении следующих условий:

- а) удлинения, сдвиги и углы поворота должны быть малы по сравнению с единицей;
- б) квадратичные комбинации углов поворота, входящие в формулы (3.11), должны быть малы по сравнению с соответствующими компонентами деформации.

Последнее условие приблизительно может быть сформулировано как требование, чтобы квадраты углов поворота были пренебрежимо малы по сравнению с удлинениями и сдвигами.

Если тело *массивно*, т. е. имеет одинакового порядка протяженность во всех своих трех измерениях, то соблюдение условия а) влечет за собой и соблюдение условия б).

Иначе будет, если тело является *гибким*. В этом случае углы поворота могут значительно превосходить удлинения и сдвиги.

Итак, очевидно, что областью применения линейных формул (3.08) являются деформации массивных тел, а областью применения нелинейных формул (3.10) и (3.11) — деформации гибких тел.

В. В. Новожилов в указанной выше книге проводит обстоятельный анализ условий применимости линейных формул (3.08). Им, в частности, показано, что нелинейная и классическая теории упругости занимаются фактически конечными деформациями и притом одного порядка малости.

Разница в подходе этих двух теорий к определению деформаций заключается в том, что линейная теория пренебрегает влиянием поворотов на удлинения и сдвиги, а нелинейная как раз его учитывает.

В соответствии с этим повышается не только точность решения задачи, но оказывается возможным нелинейной теорией охватить более широкий класс задач (например — проблемы упругой устойчивости и т. д.), чем линейной теорией.

§ 3.10. Краткие выводы по главе

1. В этой главе установлены важные для всего дальнейшего статические (3.04) и геометрические (3.08) уравнения механики сплошной среды в случае малых деформаций. Эти уравнения с одинаковым успехом и широко используются в теории упругости, в теории пластичности, в теории ползучести, так как сущность этих уравнений не связана с конкретной физической природой исследуемого тела (твердое, жидкое, газообразное, упругое, пластическое и т. д.).

2. Основным и неперенным условием для применения упомянутых уравнений является предположение (гарантия) о том, что рассматриваемая среда, будучи сплошной, т. е. *непрерывной до деформации, остается сплошной, т. е. непрерывной и в процессе деформации*. Аналитически эту мысль выражают так называемые уравнения неразрывности деформации (3.09).

3. Статические уравнения могут быть кратко записаны в виде (при отсутствии объемных сил):

$$\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ki} = 0, \quad (k=1, 2, 3)$$

при этом, согласно *закону взаимности напряжений*, $\tau_{ik} = \tau_{ki}$.

4. Геометрические уравнения могут быть кратко записаны так:

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (i=1, 2, 3; k=1, 2, 3),$$

где u_1, u_2, u_3 — компоненты смещений рассматриваемой точки по направлению осей координат x_1, x_2, x_3 .

5. Отсутствие в приведенных уравнениях указания на конкретные физические особенности рассматриваемой среды (упругая или пластическая и т. п.) и не позволяет (как правило) с помощью этих уравнений полностью решить задачу о напряженном и деформированном состоянии любого тела. По этой причине оказывается необходимым обратиться также к изучению тех же деформаций и с физической точки зрения (чему и посвящается следующий раздел книги).

Литература к главам 2 и 3

1. Кутилин Д. И. Теория конечных деформаций. Гостехиздат, 1947. В этой книге рассматриваются нелинейные геометрические задачи теории упругости.
2. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, 1948.
3. Никифоров С. Н. Теория упругости и пластичности. Госстройиздат, М., 1955.
4. Папкович П. Ф. Теории упругости. Оборонгиз, 1939 (см. стр. 35, § 15.02 и др.).

«Мысль человека бесконечно углубляется от явления к сущности, от сущности первого, так сказать, порядка к сущности второго порядка и т. д. без конца»

(В. И. Ленин. Философские тетради)

РАЗДЕЛ II

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗИ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИИ В ТОЧКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ЛИНЕЙНОЕ УПРУГОЕ ТЕЛО

§ 4.01. Связь компонентов напряжений с компонентами деформации для случая линейного упругого тела — обобщенный закон упругости

Для случая самого простейшего в реологическом смысле тела, а именно — для линейного упругого тела, связь между компонентами тензоров (и девиаторов) напряжений и деформаций легко установить путем распространения на общий случай пространственного напряженного состояния в точке известных читателю из курса сопротивления материалов законов Гука для чистого растяжения-сжатия и чистого сдвига в идеально упругом теле. Практическая возможность такой экстраполяции оправдывается опытом для большинства материалов, применяемых в технике, при соблюдении следующих условий:

а) одновременное наличие всех компонентов напряжений, а равно их действие порознь (если таковое возможно) не переводят материал в пластическое состояние, т. е. материал пребывает в рамках упругих деформаций;

б) материал практически можно считать изотропным*;

в) деформации ничтожно малы по сравнению с размерами изучаемого тела;

г) процесс деформации, будем предполагать вначале, изотермичен**.

* Случай анизотропных материалов входит, вообще говоря, в сферу теории упругости, но обычно составляет специальный раздел (см. например, [3]). В настоящей книге эти случаи не рассматриваются.

** В круг ведения классической теории упругости относятся не только изотермические, но и адиабатические процессы, а также и другие возмож-

Перечисленные условия делают практически возможным применение принципа независимости действия сил и приложение указанных элементарных законов (для одноосного растяжения и для сдвига) к вычислению деформаций по любому направлению внутри рассматриваемого параллелепипеда.

Полагая вначале действие одних только напряжений σ_x , т. е. одноосное напряженное состояние, мы должны признать, что элементарный параллелепипед получит следующие относительные удлинения: в направлении оси x , согласно так называемому первому закону Гука:

$$\epsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E},$$

а в направлении осей y и z , являющихся поперечными по отношению к направлению действующего усилия, согласно закону Пуассона:

$$\epsilon'_y = \epsilon'_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E},$$

где E — модуль упругости, постоянный для изотропного материала (в пределах упругости), и μ — коэффициент Пуассона*.

Полагая далее действие одних только напряжений σ_y , аналогичными рассуждениями получим:

$$\epsilon''_y = \frac{\sigma_y}{E}, \quad \epsilon''_x = \epsilon''_z = -\mu \frac{\sigma_y}{E}.$$

Наконец, рассматривая действие напряжений σ_z , имеем:

$$\epsilon'''_z = \frac{\sigma_z}{E}, \quad \epsilon'''_x = \epsilon'''_y = -\mu \frac{\sigma_z}{E}.$$

Во всех трех порознь рассмотренных случаях действия нормальных напряжений, конечно, отсутствует перекашивание прямых углов (углы сдвига) на гранях элементарного параллелепипеда.

Касательные напряжения, наоборот, как известно, влекут за собой искажение формы параллелепипеда, удлинения же

ные обратимые процессы деформации, связанные с изменением температуры. Однако последние задачи составляют специальный раздел теории упругости и не затрагиваются в настоящей книге.

* Этот коэффициент в случае конечных деформаций не будет величиной постоянной, а будет функцией величины самой деформации (хотя рассматривается упругий процесс); при малых же деформациях изучаемых в линейной теории упругости, он может приниматься постоянным.

ребер отсутствуют; точнее, эти удлинения пренебрежимо малы по сравнению с деформациями сдвига*.

Совокупность касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ будет вызывать перекашивание граней, параллельных плоскости xOy , и оставлять без искажения другие грани параллелепипеда. Согласно так называемому второму закону Гука, имеем:

$$\gamma'_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma'_{yz} = \gamma'_{zx} = 0,$$

где, как известно:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Аналогично от действия системы $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ имеем:

$$\gamma''_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma''_{zx} = \gamma''_{xy} = 0,$$

а от касательных напряжений $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ должны получить

$$\gamma'''_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad \gamma'''_{xy} = \gamma'''_{yz} = 0.$$

Таким образом, наличие всех компонентов напряжений, показанных на фиг. 2.03, определяет следующие составляющие деформации:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (4.01)$$

В этом виде закон упругости обычно и записывается для изотропного тела. Выражения (4.01) можно зачитать в такой редакции: *компоненты тензора деформации в данной точке тела находятся в линейной зависимости от компонентов тензора напряжений, относящихся к той же точке.*

* Указанную независимость касательных деформаций или напряжений от нормальных напряжений или удлинений можно мотивировать также известным в строительной механике законом прямой и обратной симметрии; при прямосимметричном воздействии (наличие только нормальных напряжений, равномерно распределенных по параллельным граням параллелепипеда) нет антисимметричных компонентов деформаций, т. е. сдвигов; при антисимметричном воздействии (наличие касательных напряжений) отсутствуют прямосимметричные компоненты деформации, т. е. удлинения ребер.

При $\mu=0$ обнаруживается, что любой компонент тензора напряжений прямо пропорционален соответствующему компоненту тензора деформации (см. замечание на стр. 75).

§ 4.02. Различные записи обобщенного закона упругости

В формулах (4.01) составляющие деформации выражены через составляющие напряжения. Часто бывает необходимо иметь обратные зависимости, т. е. напряжения, выраженные через деформации. Для этой цели решим уравнения (4.01) относительно σ_x , σ_y и т. д.

Опуская преобразования, сообщаем окончательные результаты:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G \left[\epsilon_x + \frac{3\mu}{1-2\mu} \epsilon_{\text{ср}} \right], & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= 2G \left[\epsilon_y + \frac{3\mu}{1-2\mu} \epsilon_{\text{ср}} \right], & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= 2G \left[\epsilon_z + \frac{3\mu}{1-2\mu} \epsilon_{\text{ср}} \right], & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx},\end{aligned}\quad (4.02)$$

где через $\epsilon_{\text{ср}}$, по-прежнему, обозначена средняя деформация, т. е.

$$\epsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{3} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z).$$

Уравнения (4.02) для нормальных напряжений записывают и в таком виде:

$$\left. \begin{aligned}\sigma_x &= 2G\epsilon_x + \lambda\theta \\ \sigma_y &= 2G\epsilon_y + \lambda\theta \\ \sigma_z &= 2G\epsilon_z + \lambda\theta\end{aligned} \right\}, \quad (4.02a)$$

где обозначены

$$\theta = 3\epsilon_{\text{ср}}, \quad \lambda = \frac{2\mu G}{1-2\mu} \text{ (постоянная Ляме).}$$

Из (4.02) вытекают следующие любопытные зависимости:

$$\left. \begin{aligned}\sigma_x - \sigma_y &= 2G(\epsilon_x - \epsilon_y), \\ \sigma_y - \sigma_z &= 2G(\epsilon_y - \epsilon_z), \\ \sigma_z - \sigma_x &= 2G(\epsilon_z - \epsilon_x)\end{aligned} \right\} \quad (a)$$

и далее:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_y - \sigma_z} = \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\epsilon_y - \epsilon_z}, \quad \frac{\sigma_y - \sigma_z}{\sigma_z - \sigma_x} = \frac{\epsilon_y - \epsilon_z}{\epsilon_z - \epsilon_x}$$

эти же пропорции определяют собой геометрическое подобие известного читателю из курсов сопротивления материалов

так называемого круга Мора — для напряжений (в координатах σ , τ), кругу — для деформации (в координатах ϵ , γ).

Применительно к «главному кубу», построенному около данной точки, выражения (а) запишутся так:

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_2 &= 2G(\epsilon_1 - \epsilon_2), \quad \sigma_2 - \sigma_3 = 2G(\epsilon_2 - \epsilon_3), \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= 2G(\epsilon_3 - \epsilon_1).\end{aligned}\quad (б)$$

Замечая, что на основании (2.16) можно записать:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\tau_{12}, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = 2\tau_{23} \quad \text{и} \quad \sigma_3 - \sigma_1 = 2\tau_{31},$$

а согласно (2.38)

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 = \gamma_{12}, \quad \epsilon_2 - \epsilon_3 = \gamma_{23} \quad \text{и} \quad \epsilon_3 - \epsilon_1 = \gamma_{31},$$

соотношения (б) перепишем так:

$$\tau_{12} = G\gamma_{12}, \quad \tau_{23} = G\gamma_{23} \quad \text{и} \quad \tau_{31} = G\gamma_{31}.\quad (в)$$

Последние записи, очевидно, можно было получить и непосредственно, рассмотрев около заданной точки параллелепипед, для которого по двум его парам параллельных граней действуют касательные напряжения $\tau_{12} = \tau_{21}$ или $\tau_{23} = \tau_{32}$, или $\tau_{31} = \tau_{13}$ (т. е. две пары граней такого параллелепипеда принадлежат граням «главного додекаэдра»)*.

Применяя к такой схеме напряженного состояния непосредственно второй закон Гука, приходим к соотношениям (в).

Построим у той же рассматриваемой точки куб, ориентированный относительно главных площадей так, что по двум парам параллельных граней такого куба действуют касательные напряжения, по величине равные октаэдрическому касательному напряжению $\tau_{\text{окт}}$ (т. е. эта пара граней куба принадлежит граням главного октаэдра)**; если $\tau_{\text{окт}}$ имеет направление действия, параллельное какой-либо стороне этой грани, то применительно к такой схеме напряженного состояния можем по второму закону Гука записать:

$$\tau_{\text{окт}} = G\gamma_{\text{окт}}.\quad (4.03)$$

Через главные нормальные напряжения выражение (4.03) на основании (2.19) и (2.37) запишется так:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{окт}} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= G \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}.\end{aligned}\quad (4.03a)$$

* См. стр. 81.

** См. § 6.7.

Вводя обозначения:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}} = \sigma_l, \quad \frac{3}{2\sqrt{2}(1+\mu)} \gamma_{\text{окт}} = \epsilon_l, \quad (4.03б)$$

называя первое, т. е. σ_l , *обобщенным напряжением* (называют также — *интенсивностью напряжения*), и второе, ϵ_l , *обобщенной деформацией*, (или *интенсивностью деформации*) и принимая во внимание зависимость $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$, равенство (4.03) записываем в исключительно простой форме:

$$\boxed{\sigma_l = E \epsilon_l} \quad (4.04)$$

В справедливости (4.04) также можно убедиться, не исходя из физического уравнения (4.03), а проделав с выражением обобщенного напряжения (4.03б) следующие формальные преобразования. Вначале запишем (4.03б) через составляющие напряжений (с помощью инвариантов тензора напряжений) в виде:

$$\boxed{\sigma_l = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}} \quad (4.05)$$

Заменим теперь разности компонентов нормальных напряжений через разности относительных удлинений [согласно (а)] и составляющие касательных напряжений — через углы сдвига [согласно (4.02)]; тогда после вынесения за знак радикала $2G$ правая часть (4.05) представится в точности правой частью (4.04), где, очевидно:

$$\boxed{\epsilon_l = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\mu)} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}} \quad (4.06)$$

является прежним (4.03б), но записанным через иные компоненты деформации [см. также (2.39)].

При наличии шести условий (4.02) выражение (4.04) в теории упругости можно рассматривать как контрольное. В теории пластичности, где будет неизвестным также и коэффициент E (это уже не будет модуль упругости); уравнение (4.04) (или варианты его записи, например (4.03) будет присоединяться к системе (4.02) как полноправное и притом как одно из важнейших условий.

Примечание. Если в процессе простого или сложного нагружения для каждого последующего момента времени интенсивность напряжения (σ_i) и интенсивность деформации (ϵ_i) будет превышать их значения для предыдущего момента времени, то принято такой процесс деформации называть *активной деформацией*. В противном случае деформацию считают *пассивной*.

§ 4.03. Продолжение: закон упругого изменения объема и закон упругого изменения формы

Сложим левые части первых строк в выражениях (4.01) и приравняем сумме правых частей тех же строк. Имеем:

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (a)$$

Так как

$$\frac{1}{3} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \epsilon_{\text{ср}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \sigma_{\text{ср}}$$

составляют так называемые средние деформацию и напряжение, то из (a) следует:

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{E}{1-2\mu} \epsilon_{\text{ср}} \quad (4.07)$$

Таким образом, *среднее напряжение пропорционально средней деформации*. Так как сумма относительных удлинений по трем взаимно перпендикулярным направлениям составляет объемную деформацию, т. е. $3\epsilon_{\text{ср}} = \theta$, то (4.07) можно записать также в виде

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{E}{3(1-2\mu)} \theta, \quad (4.07a)$$

т. е. *среднее напряжение в точке пропорционально объемной деформации в окрестности той же точки*.

Выражения (4.07), а также (4.07a) носят название закона упругого изменения объема. Опыт показывает, что этот закон оказывается справедливым и при высоких значениях среднего напряжения, значительно превышающих обычный предел упругости материала (т. е. установленный в лабораторных условиях при испытании на одноосное растяжение или сжатие). В связи с этим объемная деформация, вычисляемая по выражению

$$\theta = \frac{3(1-2\mu)}{E} \sigma_{\text{ср}}, \quad (4.07b)$$

практически всегда оказывается исчезающей по удалении вызвавших ее причин.

Обратимся вновь к (4.02) и от левых и правых частей первой строки отнимем по σ_{cp} , причем для правой части последнее выразим через ϵ_{cp} на основании (4.07). Тогда получим:

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = 2G \left[\epsilon_x + \frac{3\mu}{1-2\mu} \epsilon_{cp} \right] - \frac{E}{1-2\mu} \epsilon_{cp}.$$

Заменяя $E = 2(1 + \mu)G$, имеем:

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = 2G (\epsilon_x - \epsilon_{cp}).$$

Аналогичное проделаем со второй и третьей строками и перепишем систему (4.02) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_{cp} &= 2G (\epsilon_x - \epsilon_{cp}) \\ \sigma_y - \sigma_{cp} &= 2G (\epsilon_y - \epsilon_{cp}) \\ \sigma_z - \sigma_{cp} &= 2G (\epsilon_z - \epsilon_{cp}) \\ \tau_{xy} &= 2G \frac{1}{2} \gamma_{xy}, \\ \tau_{yz} &= 2G \frac{1}{2} \gamma_{yz}, \\ \tau_{zx} &= 2G \frac{1}{2} \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (4.08)$$

Последняя запись (4.08) пользуется особым вниманием в теории пластических деформаций.

Если систему напряжений $(\sigma_x - \sigma_{cp})$, $(\sigma_y - \sigma_{cp})$, $(\sigma_z - \sigma_{cp})$, τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} назвать компонентами напряжений, соответствующими изменению формы, а систему деформаций $(\epsilon_x - \epsilon_{cp})$, $(\epsilon_y - \epsilon_{cp})$, $(\epsilon_z - \epsilon_{cp})$, $\frac{1}{2} \gamma_{xy}$, $\frac{1}{2} \gamma_{yz}$, $\frac{1}{2} \gamma_{zx}$ назвать компонентами деформации, отвечающими изменению формы, то обобщенный закон упругости (4.08) (являющийся законом изменения формы) может быть прочитан в следующей простой редакции: *компоненты напряжений и деформации, соответствующие изменению формы, пропорциональны друг другу; первые равняются вторым, умноженным на двойной модуль сдвига.*

* * *

Систему зависимостей (4.08) можно записать в виде следующей таблицы:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_x - \sigma_{cp}, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ . & \sigma_y - \sigma_{cp}, & \tau_{yz} \\ . & . & \sigma_z - \sigma_{cp} \end{array} \right\} = 2G \left\{ \begin{array}{ccc} \epsilon_x - \epsilon_{cp}, & \frac{1}{2} \gamma_{xy}, & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ . & \epsilon_y - \epsilon_{cp}, & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ . & . & \epsilon_z - \epsilon_{cp} \end{array} \right\}, \quad (4.08a)$$

в которой левые и правые части уравнений (4.08), пропорциональные друг другу, располагаются соответственно одинаково.

Так, например, выражению $(\sigma_y - \sigma_{cp})$ из второй строки второго столбца левой матрицы соответствует в правой матрице и также во второй строке и во втором столбце выражение $(\epsilon_y - \epsilon_{cp})$, которое, как известно, пропорционально первому.

Как установлено в § 2.10, левую матрицу, составленную из компонентов напряжений, влияющих на изменение формы, называют девиатором напряжений (D_n), а правую матрицу — соответственно девиатором деформации ($D_{\text{деф}}$) (см. § 2.14).

В связи с этим обобщенный закон упругости можно символически записать в виде

$$D_n = 2GD_{\text{деф}} \quad (4.09)$$

и прочитать в такой изящной редакции: *девиатор напряжений прямо пропорционален девиатору деформации.*

Выражения (4.08a), а также и (4.09) носят название закона изменения формы.

Возвращаясь к закону изменения объема и используя понятия о шаровых тензорах (§ 2.10), можно (4.07) записать так:

$$T_n^0 = E_0 T_{\text{деф}}^0, \quad (4.10)$$

т. е. *шаровой тензор напряжений пропорционален шаровому тензору деформации**. Коэффициент пропорциональности (объемный модуль упругости) записывается в виде:

$$E_0 = \frac{E}{1 - 2\mu} \quad (4.11)$$

и, заметим, при $\mu = 0,5$ обращается в бесконечность.

Из четырех упругих постоянных E , μ , G , E_0 очевидно, независимы только два. В связи с наличием указанных двух характерных законов деформации упругого тела и входящих в эти законы модулей E_0 и G логично в качестве двух основных, т. е. независимых физических характеристик упругого тела, считать именно E_0 и G .

* Очевидно, возможна и такая редакция: *первые инварианты тензоров напряжений и деформации пропорциональны друг другу*, т. е.

$$\sigma^I = E_0 \epsilon^I.$$

Объемный модуль E_0 измеряет сопротивление материала изменению объема, которое не сопровождается изменением формы (случай гидростатического давления). Модуль сдвига G (иначе, модуль упругого формоизменения), наоборот, измеряет сопротивление материала изменению его формы, которое не сопровождается изменением объема.

Примечание. Перепишем (4.09) с помощью (4.04) следующим образом:

$$\frac{D_n}{\sigma_i} = \frac{2GD_{\text{деф}}}{E\epsilon_i}.$$

Тензор-девиатор напряжений, в котором все компоненты поделены на σ_i , назовем *направляющим тензором напряжений* и обозначим $\bar{D}_n$, т. е.

$$\bar{D}_n = \frac{1}{\sigma_i} D_n.$$

Тензор-девиатор деформаций, в котором все компоненты поделены на $(1 + \mu)\epsilon_i$, назовем *направляющим тензором деформации* и обозначим $\bar{D}_{\text{деф}}$, т. е.

$$\bar{D}_{\text{деф}} = \frac{1}{(1 + \mu)\epsilon_i} D_{\text{деф}},$$

то, взамен (4.08), можно записать

$$\bar{D}_n = \bar{D}_{\text{деф}}. \quad (4.12)$$

Последнее можно зачитать в такой редакции — *направляющие тензоры напряжений и деформации совпадают*.

§ 4.04. Удельная потенциальная энергия

Под действием внешних сил упругое тело испытывает деформацию, при которой силы совершают некоторое количество работы. Эта работа превращается в потенциальную энергию и в последующем, при удалении внешних сил, расходуется на восстановление первоначальной (т. е. недеформированной) формы тела.

Энергия, накапливаемая при деформации в единичном объеме материала, выделенном около данной точки, называется *удельной потенциальной энергией* или *упругим потенциалом в окрестности рассматриваемой точки* *.

Для подсчета упругого потенциала необходимо составить сумму произведений из компонентсв напряжений (ком-

* Выражения для потенциальной энергии деформации упругого тела широко используются в различных методах решения сложных задач, в частности, в вариационных методах теории упругости (см. §§ 15.02—15.03).

понентов тензора напряжений) на соответствующие им компоненты деформации (компоненты тензора деформации). Половинное значение такой суммы и составит искомую удельную энергию, обозначаемую в дальнейшем $\mathcal{E}$.

Представим себе около заданной точки кубик с единичным объемом: следовательно, площадь каждой его грани равна единице. Приходящаяся на нее упругая сила будет количественно равна самому напряжению, действующему на эту грань. Так, в случае одноосного растяжения вдоль оси x эта сила будет σ_x на одной грани и такая же (если пренебречь возможным приращением в величине σ_x), но противоположно направленная, на другой грани, параллельной первой.

Система двух противоположно направленных сил (обобщенная сила) совершает работу, зависящую, как известно, от изменения расстояния между точками приложения упомянутых сил, т. е. на деформации удлинения кубика (на обобщенном перемещении); и так как в упругом теле зависимость между напряжением и деформацией линейна, то работа внутренних сил запишется как половина произведения из обобщенной силы на обобщенное перемещение.

Деформация удлинения ребра с первоначальной длиной в единицу количественно будет равна относительному удлинению того же ребра. Таким образом, при одноосном растяжении-сжатии удельная энергия запишется так:

$$\frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x;$$

аналогично составятся выражения работы и для других составляющих напряжений.

Таким образом, в общем случае пространственно напряженного состояния для подсчета упругого потенциала имеем:

$$2\mathcal{E} = \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}. \quad (4.12a)$$

На основании (4.01) выражение (4.12a) может быть переписано в виде:

$$E(2\mathcal{E}) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \\ + 2(1 + \mu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (4.12b)$$

Если напряжения выразить через деформации, т. е. использовать (4.02), то (4.12a) переписывается в виде:

$$\frac{1}{G}(2\mathcal{E}) = 2\left(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + \frac{\mu}{1-2\mu}\theta^2\right) + \gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 \quad (4.12b)$$

Как известно из курса сопротивления материалов, количество потенциальной энергии деформации, накопленной в единице объема материала, иногда принимается за основу для определения того «приведенного напряжения», при котором наступает предельное упругое состояние (энергетическая теория прочности). Но так как изотропные материалы могут выдержать очень большие гидростатические давления без появления текучести, то в целях лучшего согласования теории с опытом подсчитанную выше энергию (4.12а) делят на две части: одну, происходящую от изменения объема тела, и другую — от искажения формы тела, и рассматривают для определения прочного сопротивления только эту вторую часть. Таким образом, записывают:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_\phi, \quad (4.13)$$

где $\mathcal{E}_0$ — энергия, расходуемая на изменение объема у данной точки, и $\mathcal{E}_\phi$ — энергия, расходуемая на формоизменение (удельная энергия формоизменения).

Для подсчета $\mathcal{E}_0$ исходим из рассмотрения фиг. 2.11, где представлены те компоненты напряжений, наличие которых связано с объемной деформацией в точке.

Таким образом,

$$\mathcal{E}_0 = \left(\frac{1}{2} \sigma_{cp} \epsilon_{cp} \right) \cdot 3 \quad (4.14)$$

или на основании (4.07)

$$\mathcal{E}_0 = \frac{3}{2} \frac{(1 - 2\mu)}{E} \sigma_{cp}^2. \quad (4.14a)$$

Удельная энергия формоизменения определится тогда вычитанием из полной энергии (4.12б) той части энергии, которая затрачивается на совершение объемной деформации (4.14), т. е.

$$\mathcal{E}_\phi = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0,$$

или после преобразований имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\phi = \frac{1}{4G} [(\sigma_x - \sigma_{cp})^2 + (\sigma_y - \sigma_{cp})^2 + (\sigma_z - \sigma_{cp})^2 + \\ + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

При написании (4.15) использованы зависимости (4.08). Выражение (4.15) после замены σ_{cp} через компоненты может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\phi = \frac{1}{12G} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \end{aligned} \quad (4.15a)$$

Рекомендуем читателю самостоятельно доказать, что для удельной энергии изменения объема ($\mathcal{E}_0$) и удельной энергии формоизменения ($\mathcal{E}_\Phi$) можно принять и такие начертания

$$\mathcal{E}_0 = \frac{(1 - 2\mu)}{2E} \sigma_{\text{окт}}^2 \quad (4.16)$$

$$\mathcal{E}_\Phi = \frac{3(1 + \mu)}{2E} \tau_{\text{окт}}^2. \quad (4.17)$$

Отметим важную роль в теории деформации именно октаэдрических напряжений — нормального и касательного. Первое оказывается связанным с объемной деформацией, а второе ответственно за деформацию (и за энергию), изменения формы в окрестности рассматриваемой точки.

Все указанные выше формулы можно получить наглядно использованием понятий о тензорах напряжений и деформации.

Так, из самого определения удельной потенциальной энергии следует, что ее можно записать в виде:

$$2\mathcal{E} = T_n T_{\text{деф}}^* \quad (4.18)$$

Подставляя в (4.18) известные обозначения для тензоров (2.03), (2.32), имеем:

$$2\mathcal{E} = \begin{Bmatrix} \sigma_x, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ \cdot, & \sigma_y, & \tau_{yz} \\ \cdot, & \cdot, & \sigma_z \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x, & \frac{1}{2} \gamma_{xy}, & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \cdot, & \epsilon_y, & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \cdot, & \cdot, & \epsilon_z \end{Bmatrix}. \quad (4.19)$$

Используя примечание к (4.18) и развернув (4.19), приходим к (4.12а).

Для указанных ранее слагающих энергии $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_\Phi$ можно составить следующие символические выражения:

$$2\mathcal{E}_0 = T_n^0 T_{\text{деф}}^0; \quad (4.20)$$

$$2\mathcal{E}_\Phi = D_n D_{\text{деф}}^* \quad (4.21)$$

Здесь учтено, что составляющие чисто объемной деформации (составляющие шаровых тензоров) связаны лишь с изменением объема и независимы от составляющих, оценивающих только изменение формы (компонентов девиаторов).

Выражения (4.20) — (4.21) можно получить также из следующих формальных преобразований над (4.18):

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E} &= (T_n^0 + D_n) (T_{\text{деф}}^0 + D_{\text{деф}}) = T_n^0 T_{\text{деф}}^0 + D_n D_{\text{деф}} + \\ &+ T_n^0 D_{\text{деф}} + D_n T_{\text{деф}}^0. \end{aligned}$$

* Произведение, стоящее в правой части, следует понимать символически и рассматривать его как сумму произведений одноименных компонентов напряжений и деформации.

Но легко показать (если произвести надлежащее перемножение), что работа составляющих шарового тензора напряжений на компонентах девиатора деформаций ($T_n^0 D_{\text{деф}}$), а также работа составляющих девиатора напряжений на компонентах шарового тензора деформации ($D_n T_{\text{деф}}^0$) равны нулю*.

Таким образом, получается, что работа составляющих шарового тензора напряжений на компонентах шарового тензора деформации представляет собой удвоенную упругую работу внутренних сил, идущую на изменение объема. И далее, работа составляющих девиатора напряжений на компонентах девиатора деформации составляет удвоенную работу внутренних сил, затрачиваемую на изменение формы (без изменения объема).

Можно доказать**, что действительному распределению напряжений внутри упругого тела всегда соответствует минимум потенциальной энергии деформируемого тела. Этот минималистский принцип оказывается весьма успешным при решении сложных задач (см. глава 15).

Так как количество потенциальной энергии деформации, равно как и упомянутых выше ее слагающих, не должно зависеть от способа вычисления, т. е. *энергия инвариантна к ортогональному преобразованию координатной системы*, то следующие выражения, входящие в (4.12б), (4.12в), (4.15) и (4.15а), составляют инварианты:

$$\left. \begin{aligned} & \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \\ & + 2(1 + \mu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = \text{const}, \\ & 2\left(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + \frac{\mu}{1-2\mu}6^2\right) + \gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 = \text{const}, \\ & (\sigma_x - \sigma_{\text{ср}})^2 + (\sigma_y - \sigma_{\text{ср}})^2 + (\sigma_z - \sigma_{\text{ср}})^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \\ & + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = \text{const}, \\ & (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ & + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Сопоставляя (4.15а) с (4.22) и с (2.19б) по поводу второго инварианта девиатора напряжений, замечаем, что *квадрат касательного октаэдрического напряжения, второй инвариант девиатора напряжений и удельная энергия формоизменения пропорциональны друг другу*.

Таким образом, октаэдрическое напряжение, а также обобщенное напряжение (4.05) с точностью до постоянных

* Аналогично тому, как в строительной механике работа прямосимметричного нагружения на перемещениях от обратно-симметричного нагружения (и наоборот) равняется нулю.

** См. § 15.02.

множителей равны квадратному корню из второго инварианта девиатора напряжения или квадратному корню из удельной энергии формоизменения.

Составим теперь полупроизведение из обобщенного напряжения на обобщенную деформацию, т. е. $\frac{1}{2} \sigma_i \epsilon_i$. Используя (4.05) и (4.06), получаем:

$$\frac{1}{2} \sigma_i \epsilon_i = \frac{1}{12G} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)], \quad (4.23)$$

т. е. упругая работа обобщенного напряжения в данной точке на обобщенной деформации составляет в точности количество удельной энергии формоизменения у той же точки.

Таким образом, оперирование с понятиями обобщенных напряжений и деформации позволяет при рассмотрении любого сложного объемного напряженного состояния как бы отвлечься от всей сложной совокупности компонентов, вообразив случай чистого растяжения или сжатия с единственным действующим напряжением, равным по величине σ_1 . В частности, каким бы сложным ни было задано объемное напряженное состояние для рассматриваемой точки, зависимость между обобщенным напряжением и соответствующей ему деформацией будет такой же, как в случае одноосного напряженного состояния того же упругого материала, т. е. наипростейшей линейной зависимостью.

§ 4.05. Замечание о законе упругости для анизотропного упругого тела

Во всех предыдущих параграфах и во всех последующих (кроме настоящего) подразумевается тело изотропное, т. е. такое, когда в каждой точке его упругие и механические свойства одинаковы для всех направлений. Однако в отдельных случаях тел преимущественно волокнистой структуры (дерево, пластмассы и т. п.) такого благоприятного положения может и не быть. Например, для фанеры, текстолита и некоторых других авиационных материалов для основных направлений — вдоль волокон и поперек волокон — модули относятся как 2:1.

Если предположить самый общий случай анизотропии, когда какие-либо элементы упругой симметрии отсутствуют, то связь деформаций с напряжениями должна записываться в виде:

$$\epsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{xy} + a_{15}\tau_{yz} + a_{16}\tau_{zx} \quad (4.24)$$

и т. д.

Здесь $a_{11}, a_{12}, \dots$ — упругие постоянные (коэффициенты деформации). Выражение (4.24) и ему подобные могут быть представлены таблицей.

К закону деформации анизотропного тела

Деформации	Напряжения					
	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}
ϵ_x	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
ϵ_y	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}
ϵ_z	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}
γ_{xy}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}
γ_{yz}	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}
γ_{zx}	a_{61}	a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_{66}

Аналогично преобразованиям в § 2.11 и 4.04, но применительно к общему случаю напряженного состояния можно доказать, что из условия инвариантности упругой энергии, т. е. ее значение в окрестности данной точки не зависит от способа вычисления, вытекает взаимность коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_{21}; & a_{13} &= a_{31}; & a_{14} &= a_{41}; & a_{15} &= a_{51}; & a_{16} &= a_{61}; \\ a_{23} &= a_{32}; & a_{24} &= a_{42}; & a_{25} &= a_{52}; & a_{26} &= a_{62}; & a_{34} &= a_{43}; \\ a_{35} &= a_{53}; & a_{36} &= a_{63}; & a_{45} &= a_{54}; & a_{46} &= a_{64}; & a_{56} &= a_{65}. \end{aligned}$$

Таким образом, для анизотропного упругого тела остается 21 коэффициент деформации.

Можно доказать [3], что если в каждой точке тела имеется плоскость, так называемая плоскость упругой симметрии, обладающая тем свойством, что любые два направления, симметричные относительно этой плоскости, являются эквивалентными в отношении упругих свойств (в однородном теле все эти плоскости, проведенные через любые точки, параллельны), то число независимых упругих постоянных сокращается до 13.

Если через каждую точку однородного тела проходят три взаимно-перпендикулярные плоскости упругой симметрии, то число независимых упругих постоянных сокращается до девяти (*ортогонально-изотропное тело*, или *ортотропное*).

Если через каждую точку тела проходит плоскость, в которой все направления являются упругоэквивалентными (плоскость изотропии), то число различных упругих постоянных сводится к пяти (*трансверсально-изотропное тело*).

В случае полной симметрии, т. е. в случае *изотропного тела*, когда любая плоскость есть плоскость упругой симметрии и любое направление — главное, число независимых упругих постоянных сокращается до двух. Например a_{11} и a_{12} , где в прежних обозначениях

$$a_{11} = \frac{1}{E}; \quad a_{12} = -\frac{\mu}{E}; \quad a_{22} = a_{33} = a_{11}.$$

§ 4.06. О различных гипотезах по поводу наступления предельного упругого состояния или пластического состояния в точке сплошной среды

С указанным в заголовке этого параграфа вопросом читатель встречался в курсе сопротивления материалов, где доста-

точно подробно рассматривались различные так называемые *теории прочности*. Задача последних, как известно, заключалась в том, чтобы на основании стандартных экспериментальных данных о разрушении конкретного материала при какой-либо простейшей деформации (обычно за эталон для сравнения берут данные, полученные при испытании на одноосное растяжение) предсказать условия, при которых возможно разрушение того же материала при заданной сложной деформации (т. е. какие необходимы для этого соотношения и значения компонентов тензора напряжений по сравнению с известным и единственным, главным и отличным от нуля компонентом напряжения при разрушении в случае простого растяжения).

Здесь, в главе об упругом теле (т. е. в главе теории упругости, а не в теории разрушения твердых тел) ограничимся напоминанием читателю из курса сопротивления материалов тех сведений из теории прочности, которые, будучи там популярными, имеют непосредственное отношение к вопросу о наступлении предельного упругого состояния в точке линейно упругого тела и, как правило, широко используются в современной теории упругости и пластичности.

Напомним читателю формулировки так называемых третьей (Кулон, Гест) и пятой (Губер, Мизес, Рош, Эйхингер) теорий прочности, но дадим эти формулировки применительно не к моменту разрушения, а к моменту наступления предельно упругого состояния в точке тела.

Так, подражая формулировке Кулона и Геста, можно предположить, что *предельное упругое состояние в данной точке сплошной среды в общем случае напряженного состояния в этой точке наступит тогда, когда в этом случае наибольшие касательные напряжения достигнут значения, соответствующего предельному упругому состоянию для того же материала при простом растяжении*.

Обозначая предел упругости материала при простом растяжении через $\sigma_{\text{упр}}$ и имея в виду, что когда главное напряжение при простом растяжении достигнет значения $\sigma_{\text{упр}}$, то в это мгновение наибольшее касательное напряжение приобретает значение

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{упр}}}{2}, \quad (a)$$

а в случае сложного напряженного состояния в точке наибольшее касательное напряжение в ней выражается через главные напряжения согласно (2.16)

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (б)$$

то сформулированная выше гипотеза о наступлении предельного упругого состояния в точке при сложном напряженном состоянии должна записаться [приравнивая правые части (а) и (б)]:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{\text{упр}}}{2}$$

или

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{\text{упр}}.$$

Подражая формулировке Роша и других, можно предположить, что *предельное упругое состояние в данной точке сплошной среды в общем случае напряженного состояния в этой точке наступит тогда, когда в этом случае касательное октаэдрическое напряжение достигнет значения касательного октаэдрического напряжения, соответствующего предельному упругому состоянию для того же материала при простом растяжении.*

Согласно (2.19) касательное октаэдрическое напряжение в общем случае напряженного состояния в точке, записываемое через главные напряжения,

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (8)$$

в случае предельного упругого состояния при простом одноосном растяжении или сжатии составляло [полагая в формуле (8) $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, а $\sigma_1 = \sigma_{\text{упр}}$].

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{\text{упр}}. \quad (2)$$

Сформулированная выше вторая гипотеза, после приравнивания правых частей (8) и (2), запишется:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_{\text{упр}}. \quad (4.26)$$

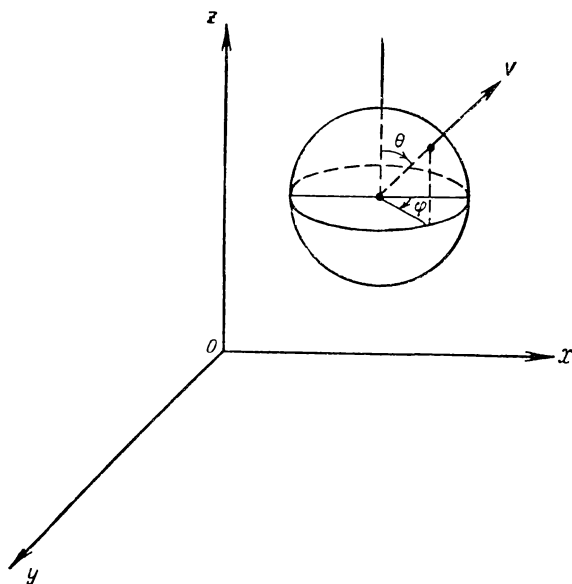
Изложением двух перечисленных гипотез и ограничимся, попутно отметив, что наибольшей популярностью (особенно в теории пластичности) пользуется условие (4.26), т. е. теория Губера — Мизеса.

Попутно отметим, что условию (4.26) соответствует и другая формулировка, предложенная Губером и Мизесом (ранее Роша), а именно, что предельное состояние в точке сплошной среды в общем случае напряженного состояния наступает тогда, когда в этом случае так называемая удель-

ная энергия формоизменения* достигает значения, соответствующего удельной энергии при простом растяжении.

Наконец, есть еще одна оригинальная трактовка условия (4.26), принадлежащая В. В. Новожилову. Согласно его точке зрения, переход материала в новое состояние (он имел в виду пластическое состояние, мы же будем предполагать и предельное упругое состояние, тем более, что указанные два состояния в ряде случаев могут считаться тождественными) происходит от касательных напряжений. Однако площадка скольжения может занять произвольное положение в зависимости от группировки отдельных кристаллитов металла, случайных пороков материала и других причин.

Поэтому В. В. Новожилов считает, что к вопросу о причинах вообще разрушения материала следует подойти статистически, оценивая наибольшую вероятность того или иного случая разрушения. Усматривая причину перехода в пластическое состояние от касательных напряжений, он предлагает в качестве критерия прочности принимать среднюю квадратичную величину касательных напряжений, возникающих в данной точке.



Фиг. 4.01 К вычислению среднего квадратичного значения касательных напряжений

* Потенциальная энергия, связанная только с изменением формы, т. е. из полной удельной энергии вычитается та ее часть, которая расходуется на изменение объема.

Представляя напряженную точку в виде шаровой модели (фиг. 4.01), среднее квадратичное значение касательных напряжений, действующих в этой точке, можно вычислить по формуле

$$\tau_{\text{ср}} = \left(\frac{1}{\omega} \int_{\omega} \tau_y^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (д)$$

где ν — обозначение нормали в рассматриваемой промежуточной точке шаровой модели, $\omega = 4\pi r^2$ — поверхность шаровой модели.

Вычисление $\tau_{\text{ср}}$ по формуле (д), после ряда преобразований, которые мы здесь опустим, в окончательном виде дает:

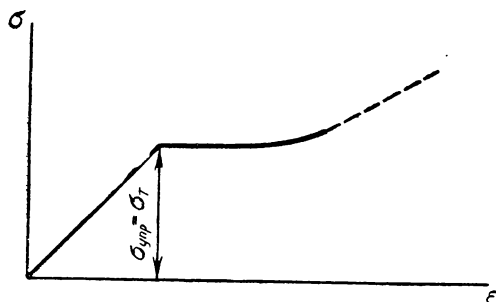
$$\tau_{\text{ср}}^2 = \frac{1}{15} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (е)$$

Величина радиуса r здесь сокращается, потому переход r к пределу ($r \rightarrow 0$) оказывается излишним.

В случае простого растяжения при предельном упругом состоянии для квадрата среднего напряжения будем, очевидно, иметь

$$[\tau_{\text{ср}}^2]_{\text{пред}} = \frac{2}{15} \sigma_{\text{упр}}^2. \quad (ж)$$

Приравнивание правых частей равенств (е) и (ж) приводит к прежнему условию (4.26).



Фиг. 4.02 Частный случай индикаторной диаграммы

В случае, если материал является идеально-пластическим, или близким к нему, т. е. для такого материала индикаторная диаграмма при простом растяжении имеет вид, показанный на фиг. 4.02, (т. е. предел упругости ($\sigma_{\text{упр}}$) и предел текучести (σ_T) совпадают), то условие (4.25—4.26) можно одновременно

толковать и как условие наступления предельного упругого состояния и как условие наступления пластического состояния.

Примечания: а) В случае, если материал имеет различные пределы прочности на растяжение и сжатие, то, естественно, условие наступления предельного упругого состояния при сложном напряженном состоянии будет записываться иначе. На эту тему имеются исследования Н. Н. Давиденкова,

Н. Н. Миролюбова, С. А. Бернштейна, М. М. Филоненко - Бородича, П. П. Баландина, Ю. И. Ягна и др. [9]. [10] [11].

б) Заслуживают быть отмеченными исследования М. Я. Леонова и его сотрудников, касающиеся развития мельчайших трещин (линейной дислокации) в твердом теле и влияния их на прочность тела. Исходя из физических представлений об изменении взаимодействия между атомными плоскостями, устанавливается закон взаимодействия между краями мельчайшей трещины, а затем задача о развитии трещины в реальном теле рассматривается как задача математической теории упругости. На конкретном примере было показано, что наличие одной линейной дислокации в твердом теле может понизить его прочность на отрыв в два раза.

в) При динамических кратковременных нагрузках, как известно, характерные механические характеристики (предел прочности, предел текучести и т. д.) большинства сплавов, как правило, повышаются и тем в большей степени, чем больше скорость относительного деформирования (ϵ).

Соответственно указанному следует, что и допускаемые напряжения при кратковременном действии динамических нагрузок (обозначим его $[\sigma]_d$) могут быть повышены по сравнению с обычным допускаемым напряжением, которое определяется в результате обработки статических испытаний на растяжение.

В первом приближении можно записать

$$[\sigma]_d = [\sigma] + \beta \epsilon, \quad (a)$$

где β — коэффициент, определяемый опытным путем в определенном диапазоне скоростей деформирования (при малых скоростях он вообще отсутствует).

Для перехода от простого растяжения к общему случаю объемного напряженного состояния логично условие безопасности записать

$$\sigma_i \leq [\sigma] + \beta \epsilon_i. \quad (б)$$

Выражение (б) можно переписать и так

$$\sigma_i \varphi \leq [\sigma], \quad (в)$$

где

$$\varphi = \frac{1}{1 + \frac{\beta \epsilon_i}{[\sigma]}} < 1. \quad (г)$$

Начертание (г) может вызвать сомнение в том смысле, что в направлении отдельных компонентов напряжений, из которых составляется интенсивность напряжения σ_i , могут отметить не одинаковые, а разные скорости деформирования. В таком случае в порядке первого приближения [10] могло бы быть предложено следующее начертание условия прочности в развернутом виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 \varphi_1 - \sigma_2 \varphi_2)^2 + (\sigma_2 \varphi_2 - \sigma_3 \varphi_3)^2 + (\sigma_3 \varphi_3 - \sigma_1 \varphi_1)^2} \leq [\sigma], \quad (д)$$

где компоненты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ могут быть вычислены в соответствии с (г), подставляя на место ϵ_i соответственно $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.

§ 4.07. Дополнительные замечания. Случай температурного поля

Если элементарный параллелепипед, рассмотренный в § 4.01, предположить подверженным только тепловому воздействию, то его деформация характеризовалась бы следующими компонентами:

$$\epsilon'_x = \epsilon'_y = \epsilon'_z = \alpha T; \quad \gamma'_{xy} = \gamma'_{yz} = \gamma'_{zx} = 0,$$

где α — коэффициент линейного теплового расширения и T — температура. Будем полагать, что рассматриваемое температурное поле не слишком высокое, чтобы могли измениться упругие характеристики материала (в частности — модуль упругости).

При одновременном наличии компонентов напряжений и теплового эффекта, компоненты деформации, используя (4.01), запишутся

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha T \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Если в первых трех выражениях (4.27) член αT перевести в левую часть равенств и обозначить:

$$\epsilon_x - \alpha T = \epsilon_x^*, \quad \epsilon_y - \alpha T = \epsilon_y^*, \quad \epsilon_z - \alpha T = \epsilon_z^*,$$

то уравнения (4.27) примут вид, сходный с (4.01) с заменой ϵ_x на ϵ_x^* , ϵ_y на ϵ_y^* и ϵ_z на ϵ_z^* .

В таком случае можно использовать известные ранее различные варианты записи обобщенного закона Гука, как-то: начертания (4.02), (4.02a), (4.04), (4.08) и т. д. Тогда получим:

$$\sigma_x = 2G \epsilon_x^* + \lambda \theta^* \quad \text{и т. д.} \quad (4.28)$$

$$\sigma_x - \sigma_y = 2G (\epsilon_x - \epsilon_y) \quad \text{и т. д.}$$

$$\sigma_{cp} = \frac{E_0}{3} \theta^*$$

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = 2G (\epsilon_x - \epsilon_{cp})$$

и т. д.

$$\sigma_i = E \varepsilon_i,$$

где $\theta^* = 3\varepsilon_{\text{ср}}^* = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3\alpha T$, σ_i и ε_i — прежние. (4.05), (4.06).

Если температурное поле будет высокое, то модуль упругости материала конечно изменится (понижится), но, если положить, что это поле лишь относительно высокое, т. е. снятия напряжений и температурного поля будет все же соответствовать полное исчезновение деформации, ранее приобретенной от упомянутых нагрузок и температуры (т. е. процесс будет термоупругий), то в ранее указанных формулах следует считать E и G отличными от их значений для «холодного» материала и зависящим от конкретной температуры. Обозначая новые модули через $E(T)$ и $G(T)$, прежние зависимости (4.27) и другие должны будут записываться в виде:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E(T)} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T$$

и т. д.

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G(T)} \tau_{xy}$$

и т. д.

$$\sigma_i = E(T) \cdot \varepsilon_i.$$

Строго говоря, коэффициент Пуассона также будет зависеть от температуры и потому правильнее в приведенных выражениях поставить не μ , а $\mu(T)$, но изменение этого коэффициента оказывается не столь существенным, почему его и оставляют прежним.

Краткие выводы по главе — см. главу VI (стр. 173)

Литература к главе 4

О некоторых вопросах, кратко затронутых в главе 4, читатель более подробно найдет в следующих сочинениях:

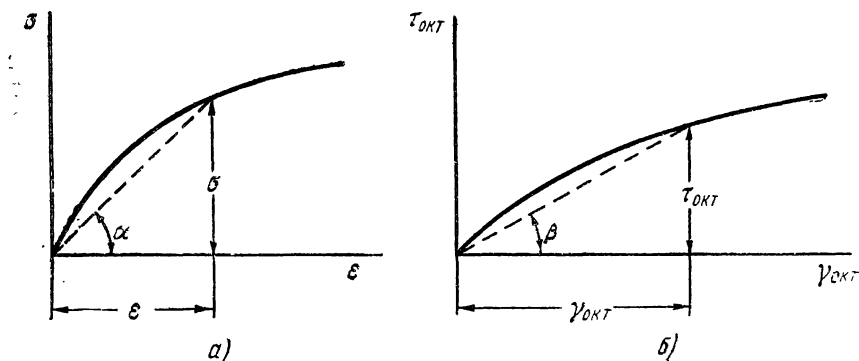
1. Гастев В. А. Краткий курс сопротивления материалов, Физматиздат, 1959.
Книга содержит не только основы сопротивления материалов, но и вопросы, за последнее время относящиеся к прикладной теории упругости (изгиб и кручение тонкостенных стержней открытого профиля, устойчивость плоской формы изгиба, упруго-вязкое и вязко-пластическое тела). Теории прочности излагаются в главе 3.
2. Кутилин Д. И. Теория конечных деформаций, Гостехиздат, 1947.
В этой книге геометрическая теория деформации трактуется для случая конечных деформаций, т. е. таких, когда нельзя пренебрегать компонентами деформации по сравнению с единицей.
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела, Гостехиздат, М.—Л., 1950. В этой книге теория деформации трактуется для тела, физические свойства которого по различным направлениям неодинаковые.

4. Одинг И. А. Проблема прочности в машиностроении. Известия АН СССР, отделение технических наук, № 12, 1949.
 5. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Макушин, Малинин Н. Н., Феодосьев В. И. Расчеты на прочность в машиностроении, т. I, II, III, Машгиз, 1959. Настольная книга инженера-конструктора, механика, строителя. Теории прочности изложены в т. I.
 6. Снитко Н. К. Теории прочности металлов с учетом внутрикристаллической структуры, изд. Военно-транспортной академии, Л., 1946.
 7. Саверин М. М. Контактная прочность материала в условиях одновременного действия нормальной и касательной нагрузок, Машгиз, М. — Л., 1946.
 8. Фридман М. М. Математическая теория упругости анизотропных сред, ПММ, т. XIV, вып. 3, 1950.
 9. Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, Аннотации докладов, Изд. АН СССР, М., 1960 г. (см. тезисы докладов) Я. Б. Фридмана и Т. К. Зыкова — о закономерностях кинетики деформации и разрушения, Л. М. Качанова — о теоретическом определении времени разрушения деталей, М. Я. Леонова — о развитии мельчайших трещин, Н. Н. Малинина — о разрушении полимеров, М. М. Филоненко-Бородич — о возможности обобщения теорий прочности Мора и Губера-Мизеса-Генки.
 10. Филоненко-Бородич М. М. Механические теории прочности (курс лекций). Изд. Московского университета, 1961 г.
Книга содержит мастерское изложение современного состояния вопроса, обобщения классических теорий, собственные исследования автора.
 11. Безухов Н. И. Заключительная лекция по сопротивлению материалов и теории упругости. Изв. ВАИА т. 109, М — 1958.
-

НЕЛИНЕЙНОЕ УПРУГОЕ ТЕЛО И УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЛО

§ 5.01. Основная предпосылка нелинейной теории упругости, она же и основная гипотеза в теории пластичности

Пусть для заданного нелинейного упругого тела известна индикаторная диаграмма растяжения-сжатия (фиг. 5.01). Коэффициент поперечного сужения примем равным $1/2$, т. е. будем полагать материал несжимаемым.



Фиг. 5.01 Связь нормального напряжения с относительным удлинением (а) и подобная ей связь октаэдрического напряжения с октаэдрическим сдвигом (б) в случае центрального растяжения

Так как при центральном растяжении стержня нормальное напряжение в поперечном сечении (σ), относительное удли-

нение стержня (ϵ), октаэдрическое напряжение ($\tau_{\text{окт}}$) и октаэдрический сдвиг $\gamma_{\text{окт}}$ связаны соотношениями

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma; \quad \gamma_{\text{окт}} = \sqrt{2} \epsilon, \quad (5.01)$$

то диаграмму растяжения (фиг. 5.01а) легко перестроить в диаграмму октаэдрических сдвигов, показанную на фиг. 5.01б.

Если по фиг. 5.01а записать

$$\sigma = E' \epsilon, \quad (5.02)$$

где $E' = \text{tg } \alpha$ — секущий модуль деформации первого рода и зависящий от степени деформаций, т. е. $E = f(\epsilon)$, то аналогично по фиг. 5.01б можем записать

$$\tau_{\text{окт}} = G' \gamma_{\text{окт}}, \quad (5.03)$$

где $G' = \text{tg } \beta$ — секущий модуль деформации второго рода, зависящий от величины октаэдрического сдвига, приобретенного телом к рассматриваемому моменту напряженного состояния, т. е.

$$G' = \varphi(\gamma_{\text{окт}}). \quad (5.04)$$

Используя соотношение (5.01) — (5.03), в порядке контроля (для несжимаемого материала) получаем:

$$G' = \frac{1}{3} E'. \quad (5.04)$$

Как должна записаться связь напряжений с деформациями в окрестности заданной точки для нелинейного упругого тела в общем случае напряженного состояния в точке? Строгое решение этой задачи оказывается очень сложным и вряд ли в настоящее время выполнимо.

Примем следующее предложение (гипотезу): *при сложном напряженном состоянии в точке заданного нелинейного упругого тела связь октаэдрического касательного напряжения для этой точки с октаэдрическим сдвигом записывается по форме так же, как связь аналогичных напряжений и деформаций при простом растяжении того же тела.*

Таким образом, закон в форме (5.03) и связь секущего модуля сдвига с октаэдрическим сдвигом по выражению (5.04) считаются общими как при простом растяжении материала, так и при сложном напряженном состоянии того же материала.

Используя понятия интенсивности (обобщенного) напряжения и интенсивности (обобщенной) деформации (2.21), (2.39), выражение (5.03) можно переписать в виде:

$$\frac{V\sqrt{2}}{3} \sigma_i = G' V\sqrt{2} \epsilon_i$$

или на основании выражения (5.04)

$$\sigma_i = E' \epsilon_i, \quad (5.05)$$

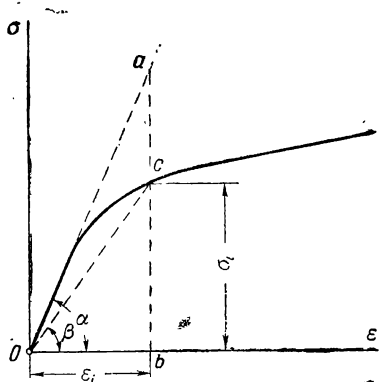
что по форме сходно с выражением (5.02). Графической иллюстрацией этого сходства служит фиг. 5.02. Таким образом, основную предпосылку нелинейной теории упругости, а также и основную гипотезу теории пластичности, но только при простом нагружении* можно зачитать и в такой редакции: *при сложном напряженном состоянии связь интенсивности напряжений с интенсивностью деформации для каждой точки тела принимается такой же, как связь напряжения с удлинением при простом растяжении того же тела.*

Итак, принимаем для $E' = \Phi(\epsilon_i)$ как функции интенсивности деформации, такое же начертание, как и для $E' = f(\epsilon)$, т. е. для секущего модуля деформации первого рода (функция обычного удлинения при простом растяжении).

Таким образом, если, к примеру, для какого-либо материала при испытании его на простое растяжение-сжатие экспериментально была установлена степенная зависимость

$$\sigma = A \left(\frac{\epsilon}{B} \right)^m,$$

где A и B — постоянные величины, то принимается, что в случае сложного напряженного состояния того же тела для



Фиг. 5.02 Характерная диаграмма истинных напряжений при чистом растяжении для мягкой стали (связь σ с ϵ). Та же диаграмма принимается и при сложном напряженном состоянии элемента той же стали, но в качестве связи интенсивность напряжения σ_i с интенсивность деформации ϵ_i

* Полное определение простого нагружения см. § 17.02 на стр. 411.

каждой его точки можно закон деформации записать в виде:

$$\sigma_l = A \left(\frac{\epsilon_l}{B} \right)^m.$$

Другой пример, если при испытании на простое растяжение-сжатие экспериментально был установлен закон

$$\sigma = (A - B \epsilon^n) \epsilon,$$

то в случае сложного напряженного состояния того же тела существует зависимость

$$\sigma_l = (A - B \epsilon_l^n) \epsilon_l$$

или, что все равно, при использовании выражения (5.05) для секущего модуля принимается

$$E' = A - B \epsilon_l^{n-1}.$$

Если результаты испытания на простое растяжение за пределом упругости для какого-либо материала были обработаны в виде $\sigma = E(1 - \omega) \epsilon$, где E — обычный модуль упругости материала, а ω — некоторая аналитическая функция относительного удлинения (отличная от нуля только за пределом упругости), т. е. $\omega = \psi(\epsilon)$, то в случае сложного напряженного состояния для того же материала принимается закон деформации в виде:

$$\boxed{\sigma_l = E(1 - \omega) \epsilon_l,} \quad (5.06)$$

где $\omega = \psi(\epsilon_l)$ — как функция интенсивности деформации имеет совершенно сходное начертание с такой же функцией при простом растяжении (и отличная от нуля только в области пластических деформаций).

Запись закона деформации в форме (5.06) находит широкое применение при решении упруго-пластических задач.

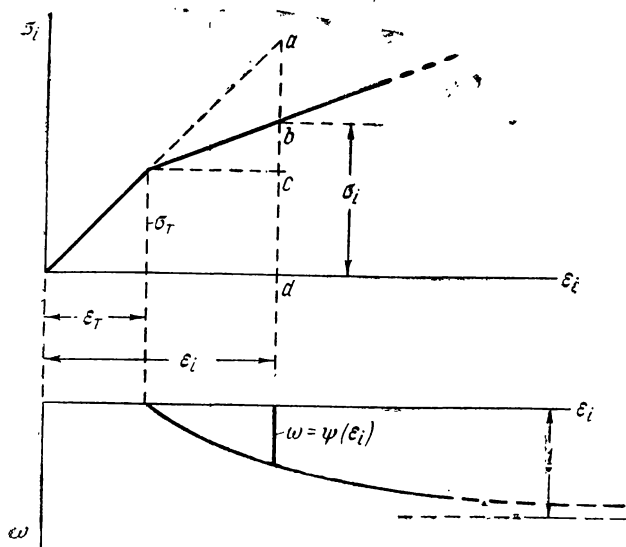
В частности, если диаграмма растяжения-сжатия материала может быть с достаточной точностью аппроксимирована двумя наклонными прямыми, показанными на фиг. 5.03, то

$$\sigma_l = \overline{ad} - \overline{ac} + \overline{bc} = \epsilon_l \operatorname{tg} \alpha - (\epsilon_l - \epsilon_T) \operatorname{tg} \alpha + (\epsilon_l - \epsilon_T) \operatorname{tg} \beta.$$

Обозначая тангенс угла наклона первого участка диаграммы, т. е. $\operatorname{tg} \alpha = E$ (обычный модуль упругости), и для второго

участка соответственно $\operatorname{tg} \beta = E''$, перепишем

$$\sigma_i = E \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i} \right) \left(1 - \frac{E''}{E} \right) \right] \varepsilon_i$$



Фиг. 5.03 Диаграмма растяжения-сжатия аппроксимирована двумя наклонными прямыми. Вид функции ω (внизу)

или, сопоставляя написанное с выражением (5.06), заключаем

$$\omega = \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i} \right) \left(1 - \frac{E''}{E} \right).$$

Последнее выражение иногда записывают так:

$$\omega = \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i} \right),$$

где $\lambda = 1 - \frac{E''}{E}$ называют *параметром разупрочнения*.

Внизу на фиг. 5.03 показан характер изменения функции ω . Исключительная важность закона (5.05) для механики упругих и пластических деформаций, а стало быть и важность понятий интенсивности напряжений и интенсивности деформации заключается прежде всего в том, что при помощи этого закона сколь угодно сложное объемное напряженное состоя-

ние и притом независимо от того, находится ли рассматриваемая область в состоянии упругих или неупругих деформаций, как бы сводится к простому растяжению или сжатию стержня. В самом деле, так как вид $\Phi(\epsilon_i)$ зависит только от материала тела, то не требуется проводить специальные опыты со сложным напряженным состоянием, если под руками имеется диаграмма $\Phi(\epsilon)$ для чистого растяжения.

§ 5.02. Следствия из основной предпосылки — физические уравнения нелинейной теории упругости и теории пластичности

Вспомним, что в результате формальных преобразований с формулами обобщенного закона Гука (4.03) пришли к линейной зависимости между октаэдрическими напряжением и сдвигом в окрестности той же точки. Можно было бы поступить и наоборот, приняв за исходное положение последнее (связь $\gamma_{\text{окт}}$ с $\gamma_{\text{окт}}$), в результате формальных преобразований вывести известные шесть зависимостей обобщенного закона Гука.

Для нелинейного упругого тела была принята связь октаэдрических напряжений и деформаций, по форме сходная с той, которая была в линейно упругом теле. Различие заключается в наличии в выражении (5.03) или (5.05) переменного модуля. Указанное дает основание записать для нелинейного упругого тела (при нагрузке и разгрузке) и для теории пластичности (но при простом нагружении) связи между отдельными компонентами напряжений и компонентами деформации, по форме сходными с известными в теории упругости, в частности, по форме (4.08, 4.09) и т. п., но с заменой постоянного модуля сдвига G на переменный G^1 (или, аналогично, с заменой модуля упругости E на переменный модуль E^1).

Используя выражение (5.05) и связь между модулями

$$G^1 = \frac{1}{3} E^1 = \frac{\sigma_i}{3\epsilon_i},$$

получаем по аналогии с выражением (4.08), но с зачеркиванием члена $\epsilon_{\text{ср}}$ (так как объемная деформация при пластических деформациях практически равна нулю) следующий, наиболее употребительный вариант записи физических уравнений для нелинейного упругого тела (справедливый при нагрузке и разгрузке) и уравнений для пластического тела, но только *при активном процессе деформации** и при так называемом «простом нагружении».

* Определение активной деформации см. стр. 121, а также § 17.02.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_{cp} &= \frac{2\sigma_i}{3\epsilon_i} \epsilon_x \\ \sigma_y - \sigma_{cp} &= \frac{2\sigma_i}{3\epsilon_i} \epsilon_y \\ \sigma_z - \sigma_{cp} &= \frac{2\sigma_i}{3\epsilon_i} \epsilon_z \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3\epsilon_i} \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= \frac{\sigma_i}{3\epsilon_i} \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= \frac{\sigma_i}{3\epsilon_i} \gamma_{zx} \end{aligned} \right\}, \quad (5.07)$$

где по-прежнему, согласно выражениям (4.05) и (4.06) соответственно:

$$\sigma_i = \frac{1}{V^2} V(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2); \quad (a)$$

$$\epsilon_i = \frac{V^2}{3} V(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \\ + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2). \quad (б)$$

Физический смысл законов (5.07), (5.03) можно истолковать так: для каждой точки деформируемого тела напряжения по различным направлениям (площадкам) являются линейными функциями соответствующих компонентов деформации. В частности, площадкам, претерпевающим наибольшие сдвиги, соответствуют наибольшие касательные напряжения, пропорциональные указанным сдвигам.

При упругой деформации коэффициент пропорциональности (модуль упругости) постоянен для всех точек упругой области тела, тогда как при пластической деформации этот коэффициент (модуль деформации) изменяется от точки к точке и уменьшается тем сильнее, чем больше деформация в новой рассматриваемой точке по сравнению с ранее обследованной.

Примечание. При плоском напряженном упруго-пластическом состоянии физические уравнения теории пластичности

иногда удобно записать в форме, сходной с выражением (4.01) из теории упругости, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E'} (\sigma_x - \mu' \sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu' \sigma_x) \end{aligned} \right\},$$

где для области пластических деформаций допустимо принять $\mu' = \frac{1}{2}$. Из последних уравнений получаем формулы для напряжений, выраженные через деформации:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{4}{3} E' \left(\epsilon_x + \frac{1}{2} \epsilon_y \right) \\ \sigma_y &= \frac{4}{3} E' \left(\epsilon_y + \frac{1}{2} \epsilon_x \right) \end{aligned} \right\}, \quad (5.07a)$$

где по-прежнему

$$E' = \frac{\sigma_i}{\epsilon_i}.$$

§ 5.03. Возможность доказательства физических уравнений теории пластичности

В § 5.01 закон (5.05) был принят как гипотеза и в известной степени был подсказан интуитивно. Можно попытаться его доказать, что и выполнено ниже. Строго говоря, это не является в прямом смысле доказательством закона (5.05), а является доказательством соблюдения тех условий, при которых на (5.05) можно смотреть именно как на закон.

Обращаясь к экспериментальным данным, можно считать достаточно установленными следующие особенности законов пластического деформирования при простом нагружении.

1. Направления главных удлинений совпадают с направлениями главных нормальных напряжений*.

2. Плотность или объем массы заметно не изменяется.

3. Диаграмма Мора для деформаций (в координатах ϵ, γ) всегда геометрически подобна такой же диаграмме для напряжений (в координатах σ, τ).

Первый закон представляет собой лишь другую формулировку экспериментального факта, заключающегося в том, что направления наибольших сдвигов совпадают с направлением наибольших касательных напряжений.

Второй закон экспериментально устанавливается просто, хотя следует заметить, что очень точные измерения удлинения при значительных пластических деформациях показывают все же незначительные изменения

* В более общей редакции это положение может быть сформулировано так — «направляющие тензора напряжений и деформации совпадают» (Определение направляющих тензоров дано в § 4.03).

объема, но эти изменения при пластической деформации такого же порядка, как и упругие деформации, так что ими можно пренебречь. Записывается второй закон в виде:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0, \quad (5.07)$$

где $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ — главные удлинения*.

Правильность третьего закона была подтверждена специально поставленными опытами**. Математически этот закон подобия может быть записан, например, в виде следующих пропорций (их может быть много, но избираем наиболее удобные для последующих преобразований) (см. также § 4.02 на стр. 118):

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_3}, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{\epsilon_3 - \epsilon_1}. \quad (a)$$

Объединение (5.07) и (a) приводит к возможности записать следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= c \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right], \quad \epsilon_2 = c \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1) \right], \\ \epsilon_3 &= c \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right], \end{aligned} \quad (5.08)$$

где c — некоторая величина, общая во всех трех приведенных выражениях. Действительно, если сложить написанные зависимости, то имеем:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = c \left[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_3 + \sigma_1 + \sigma_1 + \sigma_2) \right] = 0,$$

что соответствует второму закону.

Далее, подстановка (5.08) в правые части (a) приводит к тождествам. Например:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_3} &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{1}{2} [(\sigma_2 + \sigma_3) - (\sigma_3 + \sigma_1)]}{(\sigma_1 - \sigma_3) - \frac{1}{2} [(\sigma_2 + \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_2)]} = \\ &= \frac{\frac{3}{2} [\sigma_1 - \sigma_2]}{\frac{3}{2} [\sigma_1 - \sigma_3]} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_3} \end{aligned}$$

и т. п.

Формулы (5.08) сходны по форме с законом Гука для линейно деформируемого упругого тела (4.01); роль прежнего коэффициента μ исполняет в (5.08) величина $1/2$, а модуль E заменяется $\frac{1}{c}$. Таким образом, уста-

* В случае необходимости учета сжимаемости материала надлежит обратиться к закону изменения объема (стр. 121).

** А. А. Ильин. Пластичность, стр. 57--96.

наливаем, что в теории пластичности при «простом нагружении» и, конечно, при условии небольших деформаций имеют место по внешней форме записи такие же уравнения, как и в теории упругости.

Поскольку установлена аналогия во внешней записи законов упругой и пластической деформации, то, применяя к (5.08) известные из главы 4 формальные преобразования, очевидно, придем к возможности и такой записи обобщенного закона пластической деформации:

$$\tau_i = \frac{1}{c} \varepsilon_i$$

или, обозначая $\frac{1}{c} = E'$, получаем: $\tau_i = E' \varepsilon_i$.

Так же можно доказать, что

$$\tau_{ohm} = G' \gamma_{ohm} \quad (5.09)$$

$$\frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} = \frac{\tau_{23}}{\gamma_{23}} = \frac{\tau_{31}}{\gamma_{31}} = G', \quad (5.10)$$

где при $\mu = \frac{1}{2}$ имеем

$$G' = \frac{1}{3} E'.$$

§ 5.04. Иная редакция (обобщенная) законов упругих и пластических деформаций

Как это следует из сопоставления уравнений (5.07а), имеющих отношение к пластическим деформациям (и в равной степени к нелинейно-упругому телу) с уравнениями (4.08), которые справедливы для линейно-упругого тела, можно подыскать общую для них редакцию. Если для краткости письма использовать понятия о девиаторах напряжений и деформации, то можно следующим образом сформулировать упомянутые законы.

1. Первый основной закон — закон изменения объема. *«При упругих и пластических, при активных и пассивных деформациях твердого тела относительное изменение объема элемента этого тела (или шаровой тензор деформации) прямо пропорционально среднему напряжению (или шаровому тензору напряжений), причем модуль объемной деформации остается постоянной величиной как в пределах, так и за пределами упругости» (4.07):*

$$\varepsilon_{cp} = \frac{E}{1 - 2\mu} \varepsilon_{cp},$$

где E — модуль упругости и μ — коэффициент Пуассона — постоянный в случае упругих деформаций, переменный за

пределом упругости и практически равный $1/2$ при явно разрывных пластических деформациях.

2. Второй основной закон — закон изменения формы при активной деформации. *«При упругих и пластических деформациях, соответствующих случаю простого нагружения для каждой точки тела, девиатор напряжений прямо пропорционален девиатору деформации», т. е.*

$$D_n = 2G'D_{\text{деф}}, \quad (5.09)$$

где G' — модуль деформации второго рода, имеющий для каждой точки изотропного тела в общем случае напряженного состояния свое собственное значение, зависящее от значения обобщенного напряжения для этой точки. В скалярной форме закон (5.09) записывается согласно (5.07).

3. Третий основной закон — закон связи обобщенного напряжения с обобщенной деформацией при активном нагружении. *Обобщенное напряжение, возникающее в теле при любой активной деформации (упругой или пластической), для каждого материала есть определенная функция обобщенной деформации*

$$\sigma_i = \Phi(\epsilon_i), \quad (5.10)$$

Вид функции Φ зависит только от материала тела и не зависит от того, при каких составляющих (при простом — одноосном или сложном — объемном напряженных состояниях) интенсивность деформации достигла данного значения; величина интенсивности напряжения будет зависеть только от величины достигнутой интенсивности деформации и, конечно, от физических свойств данного материала.

Зависимость σ_i от ϵ_i должна определяться опытом, но в силу указанного сейчас ее проще установить из опытов с чистым растяжением.

Итак, третий закон устанавливает *единство природы деформации изотропных тел в сложных и простых случаях напряженных состояний в пределах и за пределами упругости.*

4. Четвертый основной закон — закон пассивной деформации. При простой (полной или частичной) разгрузке тела, находившегося в момент начала пассивной деформации в пластическом состоянии, во все последующие моменты девиатор напряжений зависит от девиатора деформации, соответствующего моменту начала разгрузки, и от девиатора деформации, подсчитанного в предположении нагружения ненапряженного и линейно деформируемого тела фиктивными силами; значения фиктивных сил равны превышению первоначальных зна-

чений сил (отвечающих моменту начала разгрузки) над фактическим их значением в рассматриваемый момент.

В символической записи этот закон можно представить так

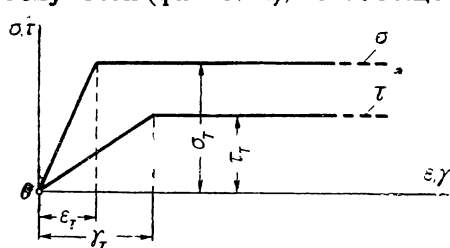
$$D_n = 2G'D_{\text{деф}} - 2G\bar{D}_{\text{деф}}, \quad (5.11)$$

где $D_{\text{деф}}$ — девиатор деформации, соответствующий моменту начала разгрузки; $\bar{D}_{\text{деф}}$ — «упругий» девиатор деформации, подсчитанный в предположении идеально-упругого тела от указанных выше фиктивных сил; D_n — девиатор напряжений (остаточных), соответствующий рассматриваемому моменту нагружения; G' — модуль деформации второго рода для рассматриваемой точки, соответствующий моменту начала разгрузки, в общем случае различный для разных точек изотропного тела; G — общий модуль сдвига, постоянный для всех точек изотропного материала (подробнее см. стр. 414).

Далее (в § 5.06) показано, что приведенные в этом параграфе основные законы не являются независимыми друг от друга и что число независимых законов связано с тем, какие предпосылки и допущения явно или неявно приняты.

§ 5.05. Частный случай — идеально пластическое тело

Если диаграмма растяжения-сжатия материала имеет ясно выраженную и притом большого протяжения площадку текучести (фиг. 5.04), то обобщенный закон деформации (5.06),



соответствующий протеканию явлений текучести, запишется проще:

$$\sigma_t = \sigma_t, \quad (5.13)$$

что представляет известное читателю (глава 4) условие пластичности по Губеру — Мизесу. Левая часть выражения (5.13) в четвертой главе называлась приведенным напряжением по так называемой энергетической

теории прочности (теория формоизменения).

Наиболее простые теории пластичности и исходят из указанного представления об условии пластичности, утверждающем, что при *пластическом состоянии вещества приведенное напряжение в любой точке остается постоянным*. Так как приведенное напряжение, определяемое формулой (5.13), будучи возведено в квадрат и поделено на удвоенный

модуль упругости, представляет собой удельную энергию формоизменения (ту часть потенциальной энергии элементарного «единичного» объема, которая расходуется только на изменение формы), то условие (5.13) может быть прочитано и так: *при пластическом состоянии вещества удельная энергия формоизменения для любой точки остается постоянной.*

Еще проще должен быть математический аппарат теории пластичности, если исходить из теории наибольших касательных напряжений (в духе так называемой третьей теории прочности), базирующейся на тех опытах, которые обнаружили, что при пластическом состоянии вещества максимальное скалывающее напряжение в любой точке остается постоянным. Запись последнего условия через главные напряжения может быть сделана в виде:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (5.14)$$

Для плоского напряженного состояния, пользуясь в этом случае компонентами напряжений, имеем:

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \sigma_T. \quad (5.15)$$

Условие постоянства касательного напряжения (условие Сен-Венана) в общем удовлетворительно характеризует состояние текучести материала и согласуется с наблюдениями над известными в литературе так называемыми «линиями Чернова». Однако более тщательные экспериментальные исследования обнаруживают систематические отклонения в поведении ковких металлов в состоянии текучести от условия (5.14).

Условие (5.13) может быть записано через главные напряжения, если положить в выражении (4.05) $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, а σ_x , σ_y , σ_z — соответственно равными главным напряжениям σ_1 , σ_2 , σ_3 . Таким образом,

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_T.} \quad (5.16)$$

Для случая, когда $\sigma_2 = \sigma_1$ или $\sigma_2 = \sigma_3$, условие (5.16) получается как и (5.14), т. е.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T.$$

Для плоской деформации, когда $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$, левая часть условия (5.16) примет следующий вид:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_3\right)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_1 - \sigma_3). \quad (5.17)$$

Следовательно, для такого случая условие пластичности (5.13) запишется аналогично теории наибольших касательных напряжений (5.14) с заменой лишь коэффициента в правой части перед пределом текучести, а именно:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T. \quad (5.18)$$

Для плоского напряженного состояния, когда $\sigma_3 = 0$, условие (5.16) становится таким:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_T^2. \quad (5.19)$$

Условие (5.17) имеет место, например, в толстостенной трубе, подверженной равномерному внутреннему и внешнему давлению и когда осевое напряжение можно приблизительно полагать равным полусумме двух других главных напряжений, так как труба в осевом направлении не удлиняется. В таком случае действительно

$$\sigma_z = \mu'(\sigma_x + \sigma_y) = \mu'(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2),$$

так как при пластической деформации коэффициент μ' следует положить равным $1/2$.

§ 5.06. Замечания, касающиеся установления связи между напряжениями и деформациями в нелинейной теории упругости и в теории пластичности

В § 5.04 были сформулированы основные четыре закона в теории малых упруго-пластических деформаций. Заметим, что не все упомянутые законы являются совершенно независимыми друг от друга, и более того, само количество независимых законов упруго-пластической деформации зависит от того, в какой степени, в явной или завуалированной, оговорены предпосылки и допущения. Так, в процессе выкладок в §§ 5.03—5.04 всюду предполагался, выражаясь в терминах термодинамики, *равновесный процесс*, т. е. состояние материала, характеризуемое напряжением σ_i и деформацией ϵ_i , *не изменялось во времени*. Далее, подразумевалось то, само по себе очевидное положение для изотропного тела, что направления главных нормальных напряжений и направления главных удлинений *совпадают*.

Можно доказать, что если первой и основной предпосылкой теории принять идеальную изотропность материала (как при упругой, так и при

пластической деформации), а второй предположительно принять равновесный процесс, то в качестве следствия получаем закон изменения формы (иначе закон подобия девнаторов). Далее, приняв закон упругого изменения объема в качестве следствия получаем закон связи обобщенного напряжения с обобщенной деформацией.

Интересующихся этим вопросом отсылаем к интересной работе И. И. Гольденблата «Некоторые вопросы теории упругих и пластических деформаций» (Стройиздат, 1950). В этой книге дано доказательство того положения, что в случае малых деформаций связь между компонентами напряжений и деформаций полностью определяется при задании первого и второго инвариантов тензора напряжений как функций первого и второго инвариантов тензора деформаций.

Иначе будет в случае немалых, т. е. конечных деформаций. Связи между компонентами тензора напряжений и тензора конечной деформации полностью определяются заданием трех уравнений состояния, связывающих три инварианта тензора напряжений с тремя инвариантами тензора деформации.

Для хрупких сталей и специальных сплавов, как показывают опыты, даже при простом нагружении на момент наступления пластичности может оказывать влияние среднее нормальное напряжение. В частности, закон деформации при простом нагружении должен для хрупких сталей иметь более сложный вид:

$$\sigma_i = \Phi(\epsilon_i, \epsilon_{\text{ср}}).$$

Но для основной массы металлов, как отмечает А. А. Ильющин [23*], при $\epsilon_{\text{ср}}$ порядка не более σ_y влиянием $\epsilon_{\text{ср}}$ можно пренебречь, а в тех случаях, когда это влияние становится существенным, требуются дополнительные специальные опыты.

Заслуживают внимания также и такие связи между напряжениями и деформациями, введение которых в основные уравнения теории упруго-пластических деформаций облегчает решение самих уравнений. Само собой очевидно, что речь идет о таких искусственных связях, которые с качественной стороны более или менее правдоподобны, и расхождение их с действительностью оказывается в пределах допустимой точности расчетов. Упомянем о степенном законе связи обобщенного напряжения с обобщенной деформацией в форме (предложено В. В. Соколовским)

$$\sigma_i = \frac{k \epsilon_i}{\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon_i}{m}\right)^2}},$$

где k и m — связанные между собой константы для данного материала.

Благодаря применению в теории пластичности функций комплексного переменного В. В. Соколовскому удалось при наличии указанного выше закона получить решение ряда новых задач теории пластичности и, в частности, тех задач, для которых имеется решение в теории упругости* (при тех же граничных условиях).

По поводу последних приближенных зависимостей между напряжениями и деформациями следует заметить, что и основные положения теории пластичности являются в некоторой степени приближенными и потому логично допустить и решение задачи в той же мере приближенное.

* Доложено В. В. Соколовским на общем собрании Отделения технических наук АН СССР 15/V 1950 г. (опубликовано в журнале «Прикладная математика и механика», вып. 4, 1960 г.).

Иначе говоря, нет смысла теорию формулировать в виде замкнутой системы дифференциальных уравнений со строгими граничными условиями, а, напротив, в виде системы, имеющей класс решений, лежащих в более или менее (соответственно с точностью экспериментальных законов) узкой полосе. Во многих случаях это обстоятельство, не уменьшая физической точности решения, позволит находить его гораздо более простыми средствами [23*].

Выше предполагалось, что среда является изотропной. Опыты, однако, свидетельствуют о том, что с развитием пластической деформации материал приобретает известную анизотропию и, следовательно, только в первом приближении может быть рассматриваем как изотропный. Иначе говоря, опыты свидетельствуют о некотором отклонении от условия подобия девиаторов.

В связи с этим делалась попытка начертания более сложных связей между девиаторами, например, типа

$$D_{\text{деф}} = AD_n^2 + BD_n + C\bar{T}_n^0, \quad (a)$$

где D_n^2 — квадрат девиатора напряжений; $\bar{T}_n^0$ — единичный тензор (шаровой, при единичном среднем напряжении), A , B и C — некоторые функции второго и третьего инвариантов девиаторов напряжений.

Практического применения связи (a) не получили как по причине сложности оперирования с ними, так и потому, что новые и более тщательные эксперименты приводили к некоторому несоответствию действительности с записью (a).

В. В. Новожиловым [3] была предложена иная форма соотношения между напряжениями и деформациями для произвольного нелинейно-упругого изотропного тела. В эти соотношения входят три подлежащие определению из опыта функции инвариантов деформации: *обобщенный модуль объемного расширения, обобщенный модуль сдвига* и (по терминологии автора) *фаза подобия девиаторов*. Если фаза подобия девиаторов равна нулю, то вышеуказанные соотношения превращаются в формулы современной теории малых упруго-пластических деформаций. К этой работе прилегают исследования Г. А. Смирнова-Аляева, который для описания законов пластического деформирования ввел понятия об углах вида деформации и вида напряженного состояния [4].

Исследования В. В. Новожилова показали, что даже значительные отклонения от фазы подобия девиаторов от нуля относительно мало влияют на закон, связывающий обобщенные напряжения и деформации. Таким образом, им доказано, что:

а) современная теория малых пластических деформаций не нуждается в уточнении в сторону учета фазы подобия девиаторов;

б) связь между напряжениями и деформациями для произвольного нелинейно-упругого тела следует искать в форме, аналогичной соответствующим соотношениям теории пластичности.

Краткие выводы по главе — см. гл. VI (стр. 173).

Литература к главе 5

1. Гастев В. А. Краткий курс сопротивления материалов, Физматгиздат, 1959, глава 13.
2. Качанов Л. М. Механика пластических сред, Гостехиздат, 1948.
3. Новожилов В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде, ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.
4. Смирнов-Аляев Г. А. Сопротивление материалов пластическим деформациям. Машгиз, 1961.

5. Томленов А. Д. Теория пластических деформаций металлов, Машгиз, 1951.

6. Ильюшин А. А. Некоторые основные задачи теории пластичности. Изв. АН СССР, 1949.

Статья представляет собой доклад, прочитанный на общем собрании отделения технических наук АН СССР в июне 1949 г. Она касается разногласий между математиками и инженерами, с одной стороны, и физиками и металлургами, с другой.

Оспаривание позиции А. А. Ильюшина дано в статье С. И. Губкина, Кишкина С. Т., Ратнер С. И., Кузнецова В. Д. Кратко об указанной дискуссии см. [1], стр. 38.

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИ-ПОЛЗУЧАЯ СРЕДА

§ 6.01. Предварительные замечания о процессе деформации сплошной среды во времени.

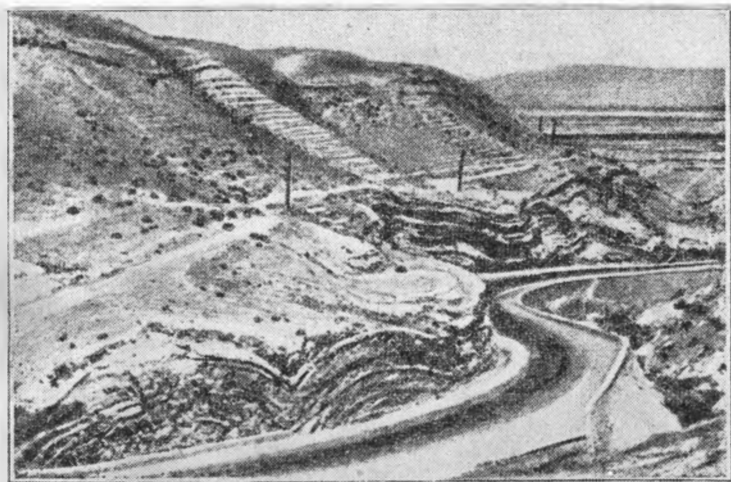
Дополнительные определения, понятия, обозначения

При изучении упругих, а также малых упруго-пластических деформаций, рассмотренных в предыдущих главах (IV, V), время как независимая переменная исключалось из законов деформирования. Так, в теории упругости деформация однозначно определялась действующими в данный момент силами независимо от истории всех предыдущих нагружений.

В теории пластичности уже требовалось знать напряженное и деформированное состояние, приобретенные телом от предыдущего нагружения. Но и в этом случае найденная новая деформация полагалась в будущем сохраняющейся без изменения, если не будет изменения в самой нагрузке.

Однако *пластическая деформация твердого тела по своей природе, вообще говоря, является состоянием движения* и потому явление текучести должно было бы исследоваться как некоторое движение непрерывной среды. Изменения во времени деформаций, а следовательно, и напряжений, в одних случаях могут быть уже ощутимы на протяжении сравнительно небольшого отрезка времени, например в течение нескольких месяцев или лет (случай падения напряжений в натянутом болте или струне, сохраняющих постоянную деформацию, т. е. так называемое *явление релаксации*) или случай возрастающих во времени прогибов сильно напряженного перекрытия под действием постоянной неизменной во времени нагрузки, т. е. *явление ползучести*).

В других случаях, наоборот, существенные изменения могут произойти лишь в течение нескольких веков. Примером последнего является случай изгиба пластов горных пород (фиг. 6.01); своеобразное течение указанных пород происходит в результате исключительно большой продолжительности действия сил.



Фиг. 6.01 Течение пластов горных пород как результат многовекового действия сил

Природа таких явлений, как *релаксация* (падение напряжений при неизменной деформации), *ползучесть* (рост деформаций при постоянных нагрузках), не может быть объяснена с точки зрения идеально упругого тела или идеально пластического. Частичное объяснение указанных явлений можно получить, если исходить из представления об упруго-вязком или вязко-пластическом телах, понимая под последними такие тела, в которых при деформации возникают напряжения, зависящие не только от деформаций, но также и от скоростей, с которыми развиваются эти деформации. В этом смысле всякое реальное тело уподобляется конгломерату, состоящему из твердого (упругого или пластического) скелета и полужидкого, жидкого или газообразного вещества, которым заполнены промежутки между твердыми элементами. Ярким примером последнего является грунт, в котором влага заполняет пространство между твердыми частицами песка и глины.

С известным приближением аналогичную картину можно встретить в бетонах и растворах, где даже чисто упругие

деформации обуславливаются не только деформацией твердых зерен, но и растяжимостью поверхностных пленок жидкости в капиллярных порах между зернами.

В древесине можно найти упругие волокна — фибриллы — и в промежутках между ними — влагу, пары и воздух. Будучи деформированы, волокна давят на окружающую их жидкость и заставляют перетекать ее в менее напряженные зоны, а также во внутренние полости. Вполне очевидно, что сопротивление, которое окажет упомянутая жидкость при ее перемещениях выдавливанию, будет зависеть от скорости, с которой должно произойти такое смещение (известное положение из гидродинамики).

Для дальнейшего изложения удобно вначале условиться о некоторых дополнительных определениях, понятиях и обозначениях.

В зависимости от длительности наблюдения процесса деформации большинства реальных тел на первый план выступает либо их свойство упругости (обратимость процесса), либо их свойство текучести (необратимость процесса). Иначе говоря, степень проявления тех или других свойств зависит от длительности наблюдения, или, точнее, от отношения времени наблюдения к так называемому *времени релаксации*.

Условимся называть временем релаксации для данного материала то время, в течение которого напряжения (или внешние силы) в материале, возникшие от заранее созданной и неизменной во времени деформации, ослабевают в $e = 2,718$ раза.

Для материала земной коры время релаксации измеряется тысячелетиями, для стекла (при обычных температурах) — столетиями, для воды — 10^{-11} сек.

Вот почему силы, действующие на внешнюю оболочку Земли в течение секунды, часа, а может быть и целого года, возможно вызовут только упругую деформацию, силы же, действующие в течение геологических периодов времени (десятки или сотни тысяч лет), несомненно вызовут течение, что и можно усмотреть из фиг. 6.01. Вообще материковые массы, составляющие оболочку Земли, находятся в состоянии медленного вязкого течения.

Для воды такой отрезок времени, как 1 сек считается столь большим, что, наблюдая течение воды в этот промежуток времени, мы практически не обнаружили ее способности оказывать упругое сопротивление сдвигу, так как в течение этого промежутка времени, на первый план выступает ее свойство текучести, которое маскирует ее упругие свойства. Наоборот, в течение промежутков времени,

меньших по сравнению с 10^{-11} сек, вода ведет себя как упругое тело, обладающее сопротивлением сдвигу.

В дополнение к понятиям о тензорах и девиаторах напряжений и деформаций, указанных в главе II (§§ 2.01, 2.10, 2.11, 2.14), полезно ввести понятия о тензорах и девиаторах скоростей напряжений и скоростей деформаций. Если точкой будем обозначать операцию дифференцирования по времени и, следовательно, скорости напряжений и деформаций будем обозначать как

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = \dot{\sigma}_x, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = \dot{\tau}_{xy}, \quad \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} = \dot{\epsilon}_x \text{ и т. д.,}$$

то запись тензоров и девиаторов скоростей напряжений и деформаций будет иметь вид сходный с обычными тензорами и девиаторами, но с простановкой над каждым прежним компонентом точки, указывающей на дифференцирование во времени.

Так табличная запись *девиатора скоростей напряжений* будет иметь вид:

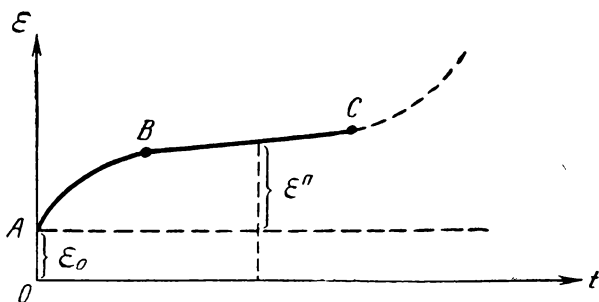
$$\dot{D}_H = \frac{\partial D_H}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_x - \dot{\sigma}_{cp}, & \dot{\tau}_{xy}, & \dot{\tau}_{xz} \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \quad (6.01)$$

и *девиатор скоростей деформаций*

$$\dot{D}_{\text{деф}} = \frac{\partial D_{\text{деф}}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_{cp}, & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy}, & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xz} \\ . & \dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_{cp}, & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yz} \\ . & . & \dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_{cp} \end{pmatrix}. \quad (6.02)$$

Для изучения ползучести металлов обычно проводят опыты по растяжению стержней при постоянной температуре и фиксированной нагрузке или напряжении. Типичные результаты длительных испытаний стержня под постоянной нагрузкой, показаны на фиг. 6.02 (так называемая *кривая ползучести*).

При нагружении стержень получает начальную деформацию (на фиг. 6.02, обозначаемую через ϵ_0), которая в зависимости от нагрузки может быть упругой или упруго-пластической. Затем следует участок *AB*, характеризующий рост деформации во времени, но с постепенно убывающей скоростью ползучести (касательная к различным точкам кривой *AB* по мере приближения к точке *B* занимает более пологое направление). Отрезок времени *OB* называют *периодом не-*

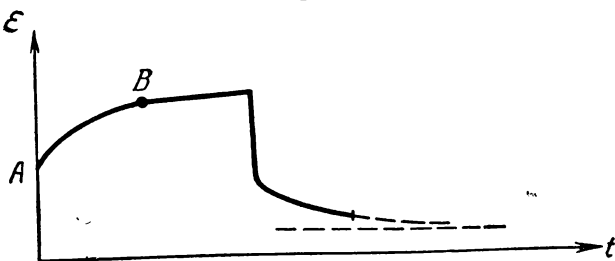


Фиг. 6.02 Типичная диаграмма ползучести
($\epsilon_{упр}$ — упругая деформация, $\epsilon^П$ — деформация ползучести)

установившейся ползучести и обычно этот период относительно невелик. На участке BC скорость деформации практически постоянна. Это так называемый *период установившейся ползучести*, обычно весьма большой и заканчивается либо «хрупким» изломом в момент времени, отвечающий точке C , либо «вязким» разрушением, вследствие образования шейки.

В соответствии с двумя характерными участками кривой ползучести в дальнейшем будем различать две теории, а именно *теорию неустановившейся ползучести* и *теорию установившейся ползучести*.

В случае, если время выдерживания испытуемого образца под постоянной нагрузкой ограничить и в какой-то момент времени его разгрузить, то характер диаграммы будет примерно тем, как показано на фиг. 6.03.



Фиг. 6.03 Диаграмма ползучести при наличии разгрузки

Примечание. Явление постепенного возрастания деформаций после приложения нагрузки и убывания после снятия нагрузки в курсе сопротивления материалов обычно назы-

вали *последствием* и в зависимости от того, до каких напряжений было доведено испытываемое тело (ниже или выше предела упругости) и, далее, продолжало оставаться под этим напряжением или разрушалось, различали упругое или неупругое последствие. В дальнейшем, указанные два термина и независимо от знака исследуемой деформации (ее рост или убывание) будут объединяться названием *ползучесть*.

Способность материала изменять свое напряженно-деформированное состояние во времени отдельные авторы называют *вязкостью*, которая в частном случае обращается или в релаксацию напряжений (при неизменной во времени деформации) или в ползучесть деформации (при неизменном во времени напряженном состоянии).

В дальнейшем удобнее указанное явление включить также в общий термин ползучесть (без прибавления к этому термину указания на напряжения или деформации).

А вообще заметим, что в теории упруго-пластически-ползучей среды, являющейся частной ветвью реологии в широком смысле этого слова, терминология не является окончательно установившейся.

Так, А. А. Ильюшин считает удобным называть релаксацией в широком смысле слова ослабление материала (имеется в виду главным образом металл), длительное время находящегося в постоянном или меняющемся во времени напряженном и деформированном состояниях и, вообще говоря, переменном тепловом режиме. Таким образом, к релаксации А. А. Ильюшин относит и явления ползучести (которое в технике именуют также крипом), последствия и релаксации в узком смысле, вязкости (являющейся причиной затухания собственных колебаний упругих систем) и нарастания усталости. Объединение одним словом указанных выше и на первый взгляд различных явлений удобно потому, что они управляются общими законами, дальнейшее отыскание которых является важной и благодарной задачей для теоретиков и экспериментаторов.

Не без оснований все упомянутые выше понятия отдельные ученые считают входящими вообще в понятие пластичность, так как пластическая деформация по своей природе динамическая.

Расширенное толкование понятия пластичности оправдывается тем, что, как это показал А. А. Ильюшин в своих работах, построение в теории пластичности так называемой теории сложного нагружения переплетается с „теорией наследственных сред“, а эта в свою очередь смыкается с теорией ползучести.

§ 6.02. Условная классификация физических сред и уравнений, описывающих законы их деформации

Точное описание законов деформации большинства конкретных тел природы оказывается весьма сложным и вряд ли практически выполнимым. По этой причине, как еще указывалось читателю в §§ 1.01—1.02, инженерная практика сознательно пошла на те или иные упрощения, игнорирование второстепенными факторами и. т. п., [с ясным представле-

нием о том диапазоне, в котором такие огрубления возможны]. Так возникло понятие об идеально-упругом теле в двух его разновидностях — линейно-упругом и нелинейно-упругом, понятие об упруго-пластическом теле, об идеально-пластическом теле (без упрочнения).

Дополним перечень полезных абстракций, имея в виду те случаи, когда влияние времени на напряженно-деформированное состояние существенно.

Простейшим примером такого тела является вязкая жидкость, расчетная модель которой была предложена Ньютоном, почему ее и называют *ньютонова вязкая жидкость*. Для такой жидкости сопротивление ее течению зависит от относительных скоростей движения ее частиц. Так касательное напряжение в точках вязкой жидкости следует сопоставлять не с величиной относительных сдвигов (γ), а со скоростью изменения этих сдвигов ($\dot{\gamma}$). Ньютон предложил принимать зависимость между τ и $\dot{\gamma}$ самой простейшей — линейной, т. е.

$$\tau = \eta \dot{\gamma}, \quad (6.03)$$

где $\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t}$ и η — коэффициент вязкости, аналогичный модулю сдвига для упругого тела.

Тело (среда), для которого применимы условия (6.03) и сходные с ним линейные соотношения, будем называть *линейно-вязкой средой* или идеально вязким.

Если природа исследуемой вязкой жидкости такова, что касательное напряжение в ней не может беспредельно увеличиваться если будет беспредельно увеличиваться скорость относительных сдвигов, иначе говоря, существует, «потолок» для напряжения, то такое тело, по аналогии с известным читателю из главы V идеально-пластическим телом, рассматриваемое сейчас тело будем называть *идеально-пластически-вязким телом*.

Если тело при его деформации будет порождать сопротивление (напряжения), зависящие от величины деформации и от величины скоростей этих же деформаций, причем сопротивления способны к исчезновению, если исчезнут деформации и скорости деформации, то такое тело логично называть упруго-вязким телом. В зависимости от того, какими уравнениями будут связаны компоненты тензоров напряжений, деформаций и скоростей деформаций (линейными или нелинейными) — будем различать *линейное упруго-вязкое тело* и *нелинейное упруго-вязкое тело*.

Иногда вводят в употребление такие понятия, как *упруго-вязкое тело*, *обладающее последствием*, далее — *упруго вязкое релаксирующее тело*;

смысл этих понятий выяснится позже, здесь же заметим, что упомянутые тела будут частными случаями нелинейного или линейного упруго-вязкого тела, которое в общем виде рассмотрено в § 6.06.

В соответствии с названием того или другого из указанных выше тел, аналогично именуются и уравнения, описывающие деформации этих тел.

Уравнения или условия, описывающие деформации перечисленных выше тел, будем делить на три группы:

а) *линейные уравнения*, где связь между напряжениями, деформациями, их скоростями, наипростейшая — линейная,

б) *нелинейные уравнения*, где указанная связь нелинейная, и

в) *условия текучести*, которые пишутся взамен уравнений в тех случаях, когда вещество в рассматриваемой точке находится в предельном состоянии по ответственному напряжению в этой точке.

В дальнейшем взамен слова тело удобнее применять термин среда, т. к. одновременное наличие такого комплекса свойств, как релаксация напряжений, ползучесть деформаций и др. естественно отнести к сложному по конституции телу, которое логично именовать *средой*.

§ 6.03. Связь компонентов напряжений с компонентами скоростей деформаций для идеально-вязкой среды

В предыдущем параграфе было показано, что для идеально-вязкой жидкости Ньютоном для наипростейшего, т. е. ламинарного движения, была предложена запись для касательного напряжения (закон сопротивления) в виде:

$$\tau = \eta \dot{\gamma}. \quad (6.03)$$

Очевидно, что для одноосного напряженного состояния в таком же идеально-вязком теле можно принять запись в виде:

$$\sigma = \kappa \dot{\epsilon}, \quad (6.04)$$

где κ — коэффициент, аналогичный модулю E для идеально-упругого тела. Этот коэффициент отдельные авторы называют *линейной вязкостью жидкости*. Также очевидно, что он должен быть связан с коэффициентом вязкости η зависимостью, аналогичной зависимости между E и G , т. е.

$$\kappa = \frac{\eta}{2(1 + \mu^*)}, \quad (6.05)$$

где μ^* — коэффициент поперечной деформации, зависящий от скорости деформации. Так как объемная деформация ньютоновой вязкой жидкости не зависит от скоростей деформирования (зависит только от гидростатического давления), т. е. не обладает объемной вязкостью, то коэффициент μ^* должен быть принят равным половине, и потому

$$\kappa = 3\eta. \quad (6.06)$$

Так как для линейно-напряженного состояния в идеально-вязкой жидкости исходный закон (6.04) идентичен по форме обычному закону Гука в случае идеально-упругого тела при простом растяжении, то, очевидно, в общем случае движения (турбулентное) связь компонентов тензора напряжений с компонентами тензора скоростей деформации должна записаться по форме, сходной с (4.08 и т. д.), но с заменой деформации на скорость деформации и модуля сдвига на вязкость.

Таким образом, можем написать следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_{cp} &= 2\eta (\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_{cp}) \\ \sigma_y - \sigma_{cp} &= 2\eta (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_{cp}) \\ \sigma_z - \sigma_{cp} &= 2\eta (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_{cp}) \\ \tau_{xy} &= \eta \dot{\gamma}_{xy} \\ \tau_{xy} &= \eta \dot{\gamma}_{yz} \\ \tau_{zx} &= \eta \dot{\gamma}_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (6.07)$$

В прямом смысле, ньютонова вязкая жидкость не представляет большого интереса с точки зрения инженера-прочника, но написанные уравнения (6.07) с успехом будут использованы дальше (§ 6.04).

Можно ввести понятие об интенсивности скорости деформации, которую записать по аналогии с (2.39), т. е.:

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2 + \frac{3}{2} (\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)} \quad (6.08)$$

и аналогично (4.04)

$$\sigma_i = E \dot{\epsilon}_i,$$

где

$$E = 2G(1 + \mu) \approx 3G$$

можно записать

$$\sigma_i = 3\eta \dot{\epsilon}_i. \quad (6.09)$$

Если ввести обозначения:

$$\frac{1}{\sigma_i} D_n = \bar{D}_n; \quad (6.10)$$

$$\frac{2}{3 \dot{\epsilon}_i} \dot{D}_{\text{деф}} = \tilde{D}_{\text{деф}} \quad (6.11)$$

и назвать $\bar{D}_n$ — направляющий девиатор напряжений, а $\tilde{D}_{\text{деф}}$ — направляющий девиатор скоростей деформации, то все шесть уравнений (6.07) могут быть символически записаны так кратко

$$\bar{D}_n = \tilde{D}_{\text{деф}} \quad (6.12)$$

и прочитано в такой редакции: *в идеально-вязком теле направляющие девиаторы напряжений и скоростей деформации совпадают.*

§ 6.04. Связь компонентов напряжений с компонентами деформаций и их скоростей для линейной упруго-вязкой среды

Большой интерес для инженера представляют тела, соединяющие в себе свойства упругих тел и вязких жидкостей. Для такого тела при линейном напряженном состоянии в силу указанного в заголовке параграфа предположения о линейном законе деформации следует, возможно, принять зависимость между напряжением, деформацией и скоростью деформации в виде:

$$\sigma = E\epsilon + \eta \dot{\epsilon}. \quad (6.13)$$

Исследование этого уравнения (что подробно выполнено в разделе VI книги (глава 20) показывает, что деформация (ϵ) в любой момент времени определяется процессом изменения напряжения за время от $t = -\infty$ до рассматриваемого момента. Это свойство тел называют *наследственностью* и потому рассматриваемое в этом параграфе тело может считаться средой, обладающей свойством наследственности, но не способной к релаксации. Последнее вытекает из того факта, что при $\epsilon = \text{const}$ согласно (6.13) должно следовать и $\sigma = \text{const}$.

Переходя от одноосного напряженного состояния к общему случаю объемного напряженного состояния и применяя

закон сложения отдельных действий, как это практиковалось в главе 4 (§§ 4.01—4.03), можем, очевидно следующим образом записать связь между напряжениями и деформациями в таком теле (ограничимся символическим начертанием):

$$D_n = 2GD_{\text{деф}} + 2\eta\dot{D}_{\text{деф}}. \quad (6.14)$$

Условие (6.14) в проекции на оси представляется в очевидной записи. Так первое из шести уравнений будет иметь вид:

$$\sigma_x - \sigma_{\text{ср}} = 2G(\epsilon_x - \epsilon_{\text{ср}}) + 2\eta(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_{\text{ср}})$$

и последнее

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} + \eta\dot{\gamma}_{zx}.$$

Если принять более общий случай упруго-вязкого тела, т. е. способного к релаксации (способность изменения напряжений даже при постоянной деформации), то взамен (6.13) следует при линейном напряженном состоянии положить запись:

$$\sigma + n\dot{\sigma} = E\epsilon + \chi\dot{\epsilon} \quad (6.15)$$

или, приняв вспомогательные обозначения (это окажется в дальнейшем удобным):

$$\chi = Hn, \quad (6.16)$$

перепишем (6.15) в виде

$$\sigma + n\dot{\sigma} = E\epsilon + Hn\dot{\epsilon}. \quad (6.17)$$

Обобщение этого *линейного* закона на случай объемного напряженного состояния в точке рассматриваемой *упруго-ползучей среды*, очевидно должно нас привести к новым шести уравнениям связи компонентов напряжений и их скоростей с компонентами деформации и их скоростей, а именно:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_{\text{ср}}) + n(\dot{\sigma}_x - \dot{\sigma}_{\text{ср}}) &= 2G(\epsilon_x - \epsilon_{\text{ср}}) + 2Hn(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_{\text{ср}}); \\ (\sigma_y - \sigma_{\text{ср}}) + n(\dot{\sigma}_y - \dot{\sigma}_{\text{ср}}) &= 2G(\epsilon_y - \epsilon_{\text{ср}}) + 2Hn(\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_{\text{ср}}); \\ (\sigma_z - \sigma_{\text{ср}}) + n(\dot{\sigma}_z - \dot{\sigma}_{\text{ср}}) &= 2G(\epsilon_z - \epsilon_{\text{ср}}) + 2Hn(\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_{\text{ср}}); \\ \tau_{xy} + n\dot{\tau}_{xy} &= G\gamma_{xy} + Hn\dot{\gamma}_{xy}; \\ \tau_{yz} + n\dot{\tau}_{yz} &= G\gamma_{yz} + Hn\dot{\gamma}_{yz}; \\ \tau_{zx} + n\dot{\tau}_{zx} &= G\gamma_{zx} + Hn\dot{\gamma}_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

К уравнениям (6.18) следует также присоединить обычный объемный закон:

$$\sigma_{\text{ср}} = E_0\epsilon_{\text{ср}} \quad (6.19)$$

(слагаемое с объемной вязкостью в (6.20) отсутствует, так как вязкая жидкость не обладает объемной вязкостью; см. [1]).

Закон изменения формы *упруго-релаксирующе-ползучего тела* (6.19) можно записать кратко в такой символической записи

$$\boxed{D_n + n \dot{D}_n = 2GD_{\text{деф}} + 2Hn\dot{D}_{\text{деф}}}, \quad (6.20)$$

т. е. *девиаторы напряжений, деформации и девиаторы скоростей напряжений и деформаций находятся в определенном соподчинении друг другу.*

§ 6.05. Условие текучести (течения, пластичности) для идеальной пластически-вязкой среды

Особенности такой среды были изложены на стр. 162 (§ 6.02). Условие предельного состояния для такой среды, очевидно, может быть получено путем надлежащего комбинирования условий текучести для идеально-пластического материала с законом деформации для линейной упруго-вязкой среды.

В случае пластической деформации без упрочнения, как известно (см. 5.05), имели условие (для краткости письма здесь и ниже будем записывать в главных осях)

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_T \quad (a)$$

При упругой деформации, с помощью (4.04) имеем

$$\sigma_i = E\epsilon_i$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ & = \frac{2}{\sqrt{2}} G \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} \end{aligned} \quad (б)$$

Аналогично для идеально-вязкой жидкости из (6.12) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ & = 2\eta \sqrt{\frac{1}{2} [(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2 + (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3)^2 + (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1)^2]} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Комбинируя уравнения (а) и (6.22) для тела, обладающего свойствами пластичности и вязкости, получим

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_T + 2\eta \sqrt{\frac{1}{2} [(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2 + (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3)^2 + (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1)^2]} \quad (6.22)$$

Так как при отсутствии объемной вязкости $\eta = \frac{\alpha}{3}$, то (6.23) возможно записать и так:

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} - \frac{\sqrt{2}}{3} \alpha \sqrt{(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2 + (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3)^2 + (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1)^2} = \sigma_T \quad (6.23)$$

Условие (6.24) и может рассматриваться *характеристикой вязко-пластического состояния в точке тела*. Не составит затруднений переписать условие (6.24) через компоненты напряжений и скоростей деформаций, отнесенные к произвольным осям x, y, z .

§ 6.06. Замечания о связи напряжений и деформаций для нелинейной упруго-вязкой среды. Эмпирические и полуэмпирические соотношения для упруго-пластически-ползучей среды

Соотношения, приведенные в § 6.04, т. е. линейные зависимости, могут быть использованы, как показывает их название в ограниченном диапазоне деформаций.

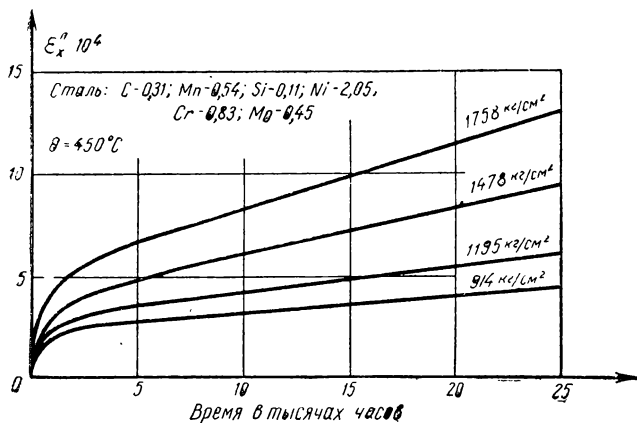
Действительные же зависимости между напряжениями и их скоростями носят *нелинейный характер*. Строгое и полное обоснование этого характера выходит за пределы настоящей книги. Заметим лишь, что входящие в уравнения (6.19) или (6.21) физические модули n, G, H , строго говоря, не являются постоянными, а сами по себе являются функциями разыскиваемых по этим уравнениям компонентов тензоров напряжений и деформаций и их скоростей и, следовательно, зависят от времени, т. е. $n = n(t), G = G(t), H = H(t)$.

Таким образом, и то, по-видимому, в первом приближении, надлежит на основании серии опытов в условиях относительно простых деформаций (чистый изгиб, чистое кручение) установить зависимость n, G, H как между собою, так и от таких обобщенных характеристик, как интенсивность напряжений, интенсивность скорости напряжений, интенсивность деформа-

пии, интенсивность скорости деформации (подобно тому, как в теории пластичности модуль G' устанавливался в зависимости от σ_i или ϵ_i). Интенсивные экспериментальные изыскания в этой области продолжаются и далеко не завершены. По этой причине на данном этапе состояния теории ползучести для упрощения самих экспериментальных исследований широко используются полуэмпирические зависимости между напряжениями и деформациями упруго-пластически вязких тел.

Полуэмпирическими они называются потому, что при использовании их недостающие параметры определяются уже теоретически.

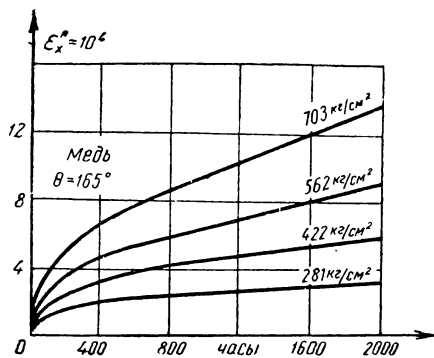
Эта зависимость, естественно, устанавливается для каждого характерного материала самостоятельно, так как указанные выше параметры n , G , H для разных материалов отличаются не только количественно, но и качественно.



Фиг. 6.04 Результаты опытов над сталью при температуре 450°C

Для выяснения зависимости ползучести от напряжения опыты проводятся при различных фиксированных нагрузках. На фиг. 6.04 показаны результаты опытов над сталью при температуре 450°C , длившихся свыше трех с половиной лет [4]. Здесь на оси ординат отложена лишь деформация ползучести ϵ_x^p , так как начальная деформация $\epsilon_x^{(0)}$ для дальнейшего обсуждения не представляет интереса.

На фиг. 6.05 показаны результаты испытаний над красной медью.

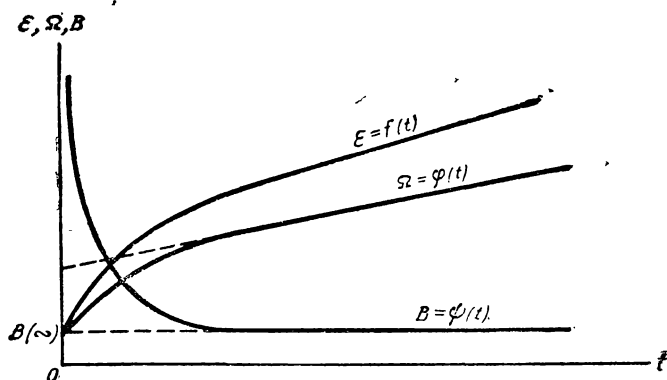


Фиг. 6.05 Результаты испытаний над красной медью

Как видно из приведенных фигур (но это же наблюдается и в других испытаниях с другими материалами), кривые ползучести оказываются почти (а для первого приближения это можно принять как исходное положение) геометрически подобными. Эти соображения позволяют записать для скорости деформации ползучести такую зависимость:

$$\dot{\epsilon}_x^{(n)} = B(t) \sigma_x^m, \quad (6.24)$$

где $B(t)$ — положительная убывающая функция времени (фиг. 6.06), отсчитываемая от момента начала ползучести, асимптотически стремящаяся к предельному значению $B(\infty)$. Показатель степени m определяется опытным путем. В качестве примера приведены некоторые данные о m и $B(\infty)$ из [4].



Фиг. 6.06 Вид функции $\Omega(t)$

Материал	Температура	m	$B(\infty)$
Сталь 0,30 С	400 С	6,9	$1,8 \cdot 10^{-30} \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \frac{1}{\text{час}}$
Сталь 12% С	454 С	4,4	$5,0 \cdot 10^{-23} \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \frac{1}{\text{час}}$

В зависимостях типа (6.25) напряжение является величиной фиксированной, исследуется скорость деформации. Интегрируя (6.25) по времени от 0 до t , имеем

$$\epsilon_x^{(n)} = \Omega(t) \sigma_x^m, \quad (6.25)$$

где

$$\Omega(t) = \int_0^t B(t) dt \quad (6.26)$$

есть положительная монотонно возрастающая функция (фиг. 6.06). При больших t указанная функция $\Omega(t)$ является линейной функцией времени*.

Если допустить, что скорость деформации ползучести при медленных и достаточно плавных изменениях напряжения описывается тем же уравнением (6.25), а сами напряжения не превышают предела упругости при данной температуре, то для полной скорости деформации $\dot{\epsilon}_x$ можем записать:

$$\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_x^{(n)} + \dot{\epsilon}_x^{(y)}, \quad (6.27)$$

где, очевидно, из закона Гука, по которому

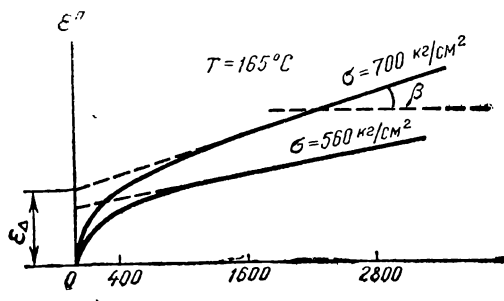
$$\epsilon_x^{(y)} = \frac{\sigma}{E_T} \text{ следует, что } \dot{\epsilon}_x = \frac{1}{E_T} \cdot \frac{d\sigma}{dt}$$

(E_T — обычный модуль упругости материала при рассматриваемой температуре T).

Подстановкой в (6.27) выражения (6.24), получаем

$$\dot{\epsilon}_x = B(t) \sigma_x^m + \frac{1}{E_T} \cdot \frac{d\sigma_x}{dt}. \quad (6.28)$$

Большие упрощения в расчет приносит введение понятия о *начальном скачке деформации* [3] с заменой истинной кривой ползучести ломаной, получающейся продолжением до оси ϵ участка установившейся ползучести (фиг. 6.07). Если обозначить отрезок, который отсекает



Фиг. 6.07 Аппроксимирование кривой ползучести ломаной

* За $\Omega(t)$ можно взять одну из кривых ползучести (фиг. 6.05), умножив ее ординаты на σ_x^{-m} , где σ_x — напряжение, отвечающее выбранной кривой.

наклонная прямая на оси ординат через ε_Δ , то деформация в любой момент времени установившейся ползучести может быть подсчитана по простой формуле:

$$\varepsilon^T = \varepsilon_\Delta + t \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (a)$$

Очевидно, что величина начального скачка для каждой кривой ползучести (соответствующей своему напряжению σ) будет своя, равно как и для каждого напряжения σ на кривой ползучести будет свой наклон участка прямой, соответствующий установившейся ползучести.

Обозначая $\varepsilon_\Delta = \varphi(\sigma)$ и $\operatorname{tg} \beta = \psi(\sigma)$, получим полное выражение для относительной деформации в момент времени t :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_T} + \varphi(\sigma) + t \cdot \psi(\sigma), \quad (6.29)$$

где первый член соответствует деформации (будем ее предполагать упругой) вслед за приложением силы (E_T — модуль упругости материала, соответствующий температуре испытания материала). Иногда уравнения семейства кривых ползучести записывают в виде

$$f_T(\sigma, \varepsilon, t) = 0, \quad (6.30)$$

где индекс « T » означает, что температура входит в это соотношение через параметры (коэффициенты).

Так, в частности, иногда записывают

$$\varepsilon^{(T)} = \varepsilon_0 \left[1 + \left(\frac{t}{t_0} \right)^n \right] \operatorname{sh} \frac{\sigma}{\sigma_0},$$

где ε_0 , t_0 , n , σ_0 , характеризующие свойства материала, зависят от температуры.

Иногда, что, между прочим, лучше согласуется в опытах на одномерную ползучесть, уравнение семейства кривых ползучести записывают в виде:

$$F_T(\sigma, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) = 0, \quad (6.31)$$

так, в частности, используют соотношения

$$\dot{\varepsilon}_p \varepsilon_p^k = A \sigma^n,$$

где пластическая деформация

$$\varepsilon_p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}.$$

Соответствующим выбором постоянных k , A , σ_0 , n можно добиться удовлетворительного описания кривых ползучести в ограниченном диапазоне напряжений.

Соотношения типа (6.30) относят обычно к так называемым *теориям старения*, т. к. в них зависимость между напряжением и деформациями явно содержит время.

Соотношения типа (6.20, 6.21) относят к так называемым *теориям упрочнения*. Попутно заметим, что в теории ползучести установившейся терминологии нет и, в частности, упомянутая выше теория старения не имеет ничего общего с теорией старения в физике металлов.

§ 6.07. Краткие выводы по главам 4, 5, 6

1) Происходящие под влиянием тех или иных внешних причин (нагружение тела, тепловое воздействие и т. п.) деформации тела (упругого, пластичного, вязкого и т. п.) вызывают внутри этого тела противодействие, иначе говоря — возникает напряженное состояние тела.

2) Как для тела в целом, так и для любого малого объема его, и даже в окрестности любой его точки процесс деформации и процесс развития напряженного состояния являются процессами динамическими. Как бы с точки зрения наблюдателя скорости деформации, а стало быть и скорости напряжений в отдельных случаях не могут ему казаться вообще отсутствующими или представляются исчезающе малыми, но они существуют и могут оказать существенное влияние на общее поведение материала в окрестности рассматриваемой точки. Поэтому для полной картины напряженного и деформированного состояния в окрестности любой точки тела необходимо располагать не только знанием тензоров напряжений и деформаций, но также и производных от них по времени, в крайнем случае первых производных, т. е. знанием тензоров скоростей напряжений и деформаций для той же точки.

3) Напряжения в окрестности данной точки имеет глубокую связь с деформациями по различным направлениям для той же точки. Эта связь в зависимости от природы тела (изотропное или анизотропное, однородное или неоднородное) может быть линейная или нелинейная, простая или сложная, неизменная во времени или непрерывно во времени изменяющаяся.

4) В общем случае изотропного деформируемого тела, т. е. способного к ползучести деформации и к релаксации напряжений, тела, способного к остаточным деформациям и т. п., существует для каждой точки такого тела определенная взаимная связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций, скоростей напряжений и деформаций.

Эту связь обычно записывают в форме соподчиненности

между собою так называемых девиаторов напряжений, девиаторов деформаций и их производных по времени (6.19).

Эта связь записывается по-разному, в зависимости от того, имеется ли активный процесс деформации (нагружение) или пассивный (разгрузка).

5) Для тела, не способного к ползучести (точнее говоря, для тела, в котором явления ползучести почти не будут наблюдаться), за время эксплуатации конструкции из этого материала связь между напряжениями и деформациями может быть записана в простой форме:

$$\overline{D}_n = \overline{D}_{\text{деф}},$$

т. е. направляющие девиаторы напряжений и деформации совпадают. Для тела упруго-пластического указанная связь справедлива только при активном процессе и при простом нагружении. Для тела идеально-упругого указанная связь справедлива всегда, как при активном, так и при пассивном, при простом и сложном нагружении, т. е. не зависит от истории нагружения тела.

6) Наиболее популярной формой записи закона деформации для идеально-упругого тела является *закон упругого изменения объема* (прямая пропорциональность первых инвариантов тензора напряжений и тензора деформаций) и *закон упругого изменения формы* (прямая пропорциональность между девиатором напряжений и девиатором деформации).

Литература к главе 6

1. Гастев В. А. Краткий курс сопротивления материалов, Физматгиз, 1959. Глава 13 этой книги посвящена упруго-вязким и вязко-пластическим телам. Имеются краткие сведения о ползучести бетона.
 2. Гольденблат И. И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред, Гостехиздат, 1955. В книге рассмотрена теория общих форм связи между полями напряжений и деформаций для различных сред, а также вопросы термодинамики деформации. При изложении широко используются методы тензорного анализа.
 3. Ильюшин А. А. и Ленский В. С. Сопротивление материалов. Физматгиз, 1959. Ползучести материала посвящена гл. V.
 4. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
 5. Пономарев С. Д. и др. (См. литературу по гл. 4). Вопросы ползучести представлены в т. II и т. III.
-

«Упругость есть основное свойство всех тел природы. Это свойство приходится приписывать даже тому воображаемому эфиру, самое существование которого то признается, то отрицается физикой, и вместе с тем столь широко используется практикой».

Акад. А. Н. Крылов

РАЗДЕЛ III

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 7.01. Еще о постановке задач в теории упругости, пластичности и ползучести

Принципиальная постановка задач в теории упругости, в теории пластичности и в теории ползучести относительно их постановки в курсе сопротивления материалов отличается исключительной общностью.

Если объектом внимания в курсе сопротивления материалов был преимущественно стержень или система стержней, то теория упругости и пластичности рассматривает тело любой конфигурации и в общем случае, как говорят, «тело трех измерений».

Обычно тело задается уравнением своей первоначальной (до деформации) наружной и внутренней поверхностями (граничными поверхностями)

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0$$

и законом распределения по поверхностям тела внешней нагрузки, чаще — уравнением ее компонентов, т. е.

$$\left. \begin{aligned} p_{x\nu} &= \theta_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ p_{y\nu} &= \theta_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ p_{z\nu} &= \theta_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{aligned} \right\} \text{ (матрица-столбец),}$$

где $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ — координаты точек, лежащих на поверхностях заданного тела, ν — нормаль к поверхности, про-

веденная в рассматриваемой точке. Направляющие косинусы этой нормали по отношению к координатным осям являются известными функциями координат тех же точек $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, т. е.

$$\cos(x\nu) = \varphi_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z});$$

$$\cos(y\nu) = \varphi_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z});$$

$$\cos(z\nu) = \varphi_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),$$

причем для каждой точки поверхности очевидно соотношение

$$\cos^2(x\nu) + \cos^2(y\nu) + \cos^2(z\nu) = 1.$$

Впрочем, нагрузки могут быть заданы также переменными во времени (динамические силы), т. е.

$$p_{x\nu} = \theta_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t) \text{ и т. п.}$$

Наконец, силы могут задаваться приложенными и внутри тела; таковы объемные силы, например — силы тяжести, инерционные нагрузки и т. п. Проекции объемных сил на координатные оси, отнесенные к единице массы около рассматриваемой точки (x, y, z) в состоянии равновесия тела будут задаваться и обозначаться так:

$$X = \psi_1(x, y, z);$$

$$Y = \psi_2(x, y, z);$$

$$Z = \psi_3(x, y, z).$$

Во всех приведенных записях имелась в виду ортогональная прямолинейная система координат. Изучение теории упругости проще начинать, используя именно декартову систему координат. Заметим, однако, что в некоторых задачах уместнее применять другие системы отсчета (полярные, цилиндрические, сферические, биполярные и т. д.).

Физические свойства тела в классической теории упругости задаются известными читателю из курса сопротивления материалов двумя упругими характеристиками: модулями продольной или поперечной упругости и коэффициентом поперечного расширения, постоянными для всех точек изотропного тела. Впрочем, в случае неоднородного, анизотропного тела упругие характеристики, изменяющиеся при переходе от одной точки и оси к другой, могут быть функциями координат точки.

В теории пластичности также полагаются известными некоторые величины, характеризующие пластические свойства рассматриваемого тела, (предел текучести и т. п.).

В теории ползучести полагаются известными из опыта с данным конкретным материалом дополнительные характе-

ристики, отражающие способность материала к длительным его переживаниям под нагрузкой.

Искомыми во всех перечисленных ветвях механики деформируемого тела будут преимущественно *компоненты смещения и компоненты напряжений* для любой точки заданного тела, т. е.

$$u = f_1(x, y, z) \text{ и т. д.}$$

$$\sigma_x = f_4(x, y, z) \text{ и т. д.}$$

$$\tau_{xy} = f_7(x, y, z) \text{ и т. д.}$$

Иногда нас могут интересовать также компоненты деформации

$$\epsilon_x = f_{10}(x, y, z) \text{ и т. д.}$$

$$\gamma_{zx} = f_{15}(x, y, z).$$

Таким образом, нас могут интересовать в каждой точке 15 компонентов: три компонента смещения, шесть компонентов напряжений, шесть компонентов деформации.

Для решения такой общей задачи, очевидно, мы должны располагать 15 уравнениями, которые можно применить к каждой точке внутри тела, и особыми уравнениями (граничные условия) — для любой точки, расположенной у наружной или внутренней поверхности тела (граничные точки). Именно этим комплексом уравнений располагает теория упругости, как это и показано ниже (§ 7.02).

Впрочем, в некоторых специальных (динамических) задачах теории упругости и особенно в теории пластичности и ползучести нас могут интересовать также и составляющие скоростей напряжений, деформации и смещения.

В таком случае количество исходных уравнений должно быть больше 15. В этой главе, однако, мы ограничиваемся рассмотрением комплекта уравнений только классической (линейной) теории упругости.

В отдельных случаях исходными данными в задаче могут быть не статические, а *кинематические* граничные условия, т. е. задается смещение наружной поверхности тела (известны составляющие u , v и w на контуре тела). В таком случае составляющие поверхностных сил (p_x , p_y , p_z), осуществляющие заданное смещение граничной поверхности, относятся к числу разыскиваемых.

Могут быть случаи, когда задаются *смешанные* граничные условия (т. е. частью заданы поверхностные нагрузки, а частью — перемещения граничной поверхности).

Во всех трех указанных случаях имеем дело с так называемой *прямой* (основной) *задачей* теории упругости, но в разных вариантах задания граничных условий.

Обратной постановкой задачи в теории упругости (обратная задача) называют такую, когда по некоторым известным функциям (функции напряжений или деформаций, или смещений) справедливыми для всей области тела ищут ту нагрузку на поверхности тела и вообще условия на поверхности, которым соответствуют заданные или известные функции.

Указанная обратная задача оказывается, как в этом своевременно убедится читатель, относительно простая и так же, как и прямая задача, может иметь несколько вариантов (исходными могут быть функции для напряжений внутри тела, или функции для смещения тех же точек или смешанные условия).

Указанная общность постановки задачи в теории упругости и пластичности и определяет широкое использование этой науки в самых разнообразных областях инженерной практики.

Применяя понятия о тензорах напряжений и деформации, можно прямую задачу теории упругости (а это относится и к теории пластичности и ползучести) сформулировать коротко так: *по заданным условиям на поверхности тела* (заданы поверхностные силы или смещения граничной поверхности тела) *определить тензоры напряжений и деформаций в любой точке тела* (тензорное поле напряжений и деформаций) *и поле перемещений граничных и внутренних точек*.

Соответственно обратная задача может быть сформулирована так: *по заданному тензорному полю напряжений или деформаций или по заданному полю смещений выяснить условия на поверхности тела* (статические и кинематические).

§ 7.02. Основные уравнения линейной теории упругости (в декартовых координатах) и возможные методы их решения

В предыдущих главах были получены все уравнения, являющиеся исходными для линейной теории упругости. Так, в главе 3 были установлены статические и геометрические уравнения, справедливые для любой сплошной среды (в том числе и для упругой) в случае малых деформаций (3.04), (3.06a), (3.08); в главе 4 была установлена связь между напряжениями и деформацией для линейно-упругой среды.

Выпишем еще раз все три группы уравнений, имеющих отношение к линейной теории упругости.

А. Статические (или динамические)* уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X &= 0 \quad \left(\text{или} \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= 0 \quad \left(\text{или} \quad \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \quad \left(\text{или} \quad \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Б. Геометрические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

В. Физические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G\epsilon_x + \lambda\theta, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G\epsilon_y + \lambda\theta, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2G\epsilon_z + \lambda\theta, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

В написанных 15 уравнениях являются неизвестными: шесть компонентов напряжений ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$), шесть компонентов деформации ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$) и три компонента перемещений (u, v, w), т. е. всего 15 неизвестных. Таким образом, с математической точки зрения задача может быть разрешена и сводится к нахождению 15 функций, удовлетворяющих 15 уравнениям (A), (B), (B), а также условиям на контуре (ограничимся случаем заданных статических граничных условий):

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x \cos(xv) + \tau_{xy} \cos(yv) + \tau_{xz} \cos(zv), \\ p_{yv} &= \tau_{yx} \cos(xv) + \sigma_y \cos(yv) + \tau_{yz} \cos(zv), \\ p_{zv} &= \tau_{zx} \cos(xv) + \tau_{zy} \cos(yv) + \sigma_z \cos(zv). \end{aligned} \right\} \quad (Г)$$

* В случае динамической задачи в правой части ур-ий вместо нулей будут выражения, указанные в скобках.

При прямом решении задачи, когда в решении участвуют все 15 уравнений (А), (Б), (В), уравнения неразрывности деформаций

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \cdot \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \cdot \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \cdot \partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \cdot \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \cdot \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (Д)$$

сами по себе, как вытекающие из (Б), не нужны и могут исполнять роль контрольных уравнений.

Решение указанных выше трех групп уравнений можно вести разными путями в зависимости от того, что нас интересует в первую очередь. В связи с этим можно отметить три основных направления.

1. Принять за основные неизвестные перемещения точек упругого тела; тогда имеем три неизвестных функции

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z), \quad w = f_3(x, y, z). \quad (а)$$

Для получения решений (а), очевидно, надлежит в физические уравнения (В) подставить геометрические соотношения (Б), т. е. выразить напряжения через перемещения и затем полученные для них выражения подставить в три уравнения равновесия, в результате чего получим три уравнения

$$\psi_1(u, v, w) = 0, \quad \psi_2(u, v, w) = 0, \quad \psi_3(u, v, w) = 0, \quad (Е)$$

решение которых приведет к выражениям типа (а). Назовем этот метод *методом перемещений*. Указанные операции выполнены в § 7.03.

2. Принять за неизвестные напряжения; тогда имеем шесть неизвестных функций

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \Phi_1(x, y, z), \quad \sigma_y = \Phi_2(x, y, z), \quad \sigma_z = \Phi_3(x, y, z); \\ \tau_{xy} &= \Phi_4(x, y, z), \quad \tau_{yz} = \Phi_5(x, y, z), \quad \tau_{zx} = \Phi_6(x, y, z). \end{aligned} \quad (б)$$

Так как напряжения из уравнений равновесия непосредственно не определяются, надо обратиться к уравнениям

деформаций. Используя, например, уравнения неразрывности деформаций (Д), с помощью (В) и (А) можно получить уравнения в форме:

$$F_1(\sigma_x, \dots, \tau_{zx}) = 0, \dots$$
$$F_B(\sigma_x, \dots, \tau_{zx}) = 0, \quad (G)$$

дальнейшее решение которых приведет к выражениям типа (б).

Назовем этот метод *методом сил*. Указанный метод разработан в § 7.04.

3. Очевидно, возможен *смешанный метод*, когда за основные неизвестные приняты некоторые из перемещений и некоторые из напряжений.

Вообще в выборе основных неизвестных и метода получения уравнений для них можно провести аналогию с теорией расчета статически неопределимых систем в строительной механике стержневых систем. Там, как известно, есть три основных метода: метод сил, метод деформаций и смешанный метод. Неизвестные силы определяются, как известно читателю, из уравнений деформаций (канонические уравнения в методе сил), неизвестные перемещения (углы поворота и смещения узлов рам) определяются из уравнений равновесия.

Итак, в смысле выбора основных неизвестных в теории упругости имеется три указанных метода.

Что касается способов математического решения полученной по предыдущему системы уравнений, то и здесь можно указать несколько направлений.

а) *Точное решение прямой задачи*, т. е. непосредственное интегрирование уравнений (Е) или (G).

Основные затруднения при решении прямой задачи теории упругости заключаются обычно в точном удовлетворении решения (а) или (б) граничным условиям. Эти трудности снимаются при решении обратной задачи.

б) *Решение обратной задачи* является, как уже отмечалось выше, сравнительно простым (так как связано лишь с дифференцированием функций) и элементарной задачей.

Так, например, задаются перемещениями как функциями координат точки (x, y, z) и разыскивают на основании условий (Б) деформации, а по ним с помощью (В) напряжения; знание же последних дает возможность с помощью (Г) установить поверхностные условия, т. е. те внешние нагрузки, которым соответствуют заданные перемещения.

Располагая несколькими решениями обратных задач, каждая из которых соответствует своим граничным условиям, можно надлежащим комбинированием таких решений получить решение и для некоторых прямых задач.

в) Оказался вполне плодотворным *полуобратный способ Сен-Венана*, согласно которому задают часть внешних сил и

часть перемещений и разыскивают остальные факторы из условия удовлетворения соответствующих уравнений указанных выше групп.

Для упрощения техники решения некоторых уравнений теории упругости оказывается целесообразным способ последовательных приближений.

Одной из эффективных разновидностей такого способа оказывается использование в некоторых задачах вначале тех решений, которые доставляются каким-либо элементарным решением, например, найденным в курсе сопротивления материалов. Подстановка этих решений в уравнения теории упругости приводит к некоторым несоответствиям (противоречиям), из анализа которых можно найти путь корректировки предварительного решения, если и не дающий в итоге точного решения задачи, то приводящий к удовлетворительному для практики приближенному решению (более строгому, чем исходное элементарное решение).

Указанный способ последовательных приближений можно использовать и в методе сил, и в методе перемещений.

Этот приближенный способ имеет некоторые общие черты с упомянутым выше полубратным способом Сен-Венана.

§ 7.03. Решение задачи теории упругости в перемещениях*

Перейдем к преобразованию основных уравнений (7.02), выражая все неизвестные через три перемещения: u , v , w , которые здесь принимаются за основные.

Из уравнения (B) с помощью (Б) имеем:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \theta; \quad \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\ \tau_{xz} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right),\end{aligned}\tag{a}$$

где

$$\theta = 3\varepsilon_{cp}.$$

Дифференцируя (a), получаем:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x};$$

* При первом ознакомлении с курсом теории упругости читателю можно рекомендовать §§ 7.03 и 7.04 вначале опустить и вернуться к ним после главы 8. Попутно заметим, что для решения частных задач, разбираемых в настоящей книге, общие уравнения, указанные в §§ 7.03 и 7.04, не имеют широкого применения.

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = G \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = G \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial z} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Внося это в первое уравнение группы (A), имеем:

$$\begin{aligned} & \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial z} \right) + \\ & + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X\rho = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (б)$$

Выражение, заключенное в первой скобке, может быть короче записано так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \frac{\partial \theta}{\partial x}. \end{aligned}$$

Введем для краткости письма обозначение *гармонической операции*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u \quad (7.01)$$

(читается «набла два»), называемое также лапласовым оператором второго порядка над функцией $u = f(x, y, z)$. Тогда уравнение (б) перепишется так:

$$(\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u + X\rho = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (в)$$

Аналогично можно преобразовать и другие два уравнения группы (A), но можно и сразу написать результат, сделав в (в) круговую подстановку букв (x, y, z) и (u, v, w) .

Итак, приходим к следующей системе основных уравнений метода перемещений теории упругости:

$$\left. \begin{aligned} & (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u + X\rho = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ & (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y\rho = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ & (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z\rho = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\}. \quad (7.02)$$

Эти уравнения носят название *уравнений Ляме*. Они являются синтезом статического, геометрического

и физического обследований задачи, каждое из которых было ранее выполнено в отдельности.

Поверхностные условия (Γ) также можно преобразовать, выразив напряжения через перемещения.

Подставив в первое уравнение группы (Γ) на место напряжений выражения для них в форме (а), имеем:

$$P_{xv} = \left[\lambda \theta + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \right] \cos(xv) + G \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \cos(yv) + \\ + G \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \cos(zv).$$

Аналогично преобразуются и два других уравнения группы (Γ). В итоге условия на контуре запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \lambda \theta \cos(vx) + \\ &+ G \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(vx) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(vy) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(vz) \right] + \\ &+ G \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cos(vx) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(vy) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(vz) \right]; \\ p_{yv} &= \lambda \theta \cos(vy) + \\ &+ G \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cos(vx) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(vy) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(vz) \right] + \\ &+ G \left[\frac{\partial u}{\partial y} \cos(vx) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(vy) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos(vz) \right]; \\ p_{zv} &= \lambda \theta \cos(vz) + \\ &+ G \left[\frac{\partial w}{\partial x} \cos(vx) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos(vy) + \frac{\partial w}{\partial z} \cos(vz) \right] + \\ &+ G \left[\frac{\partial u}{\partial z} \cos(vx) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(vy) + \frac{\partial w}{\partial z} \cos(vz) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.03)$$

Уравнения (7.02) совместно с условиями на поверхности (7.03) позволяют перейти непосредственно к решению задач теории упругости в перемещениях.

§ 7.04. Решения задачи теории упругости в напряжениях

В противоположность приему, принятому в предыдущем параграфе, когда во всех преобразованиях мы преследовали цель выразить неизвестные через перемещения, можно поставить другой: все выражать через напряжения.

Освобождая внимание читателя от необходимых для этой цели выкладок, сообщим окончательные результаты и огра-

нимся лишь случаем статического равновесия тела при условии отсутствия объемных сил или постоянства их.

Трех условий равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X\rho &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y\rho &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z\rho &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

оказывается недостаточно, и надо обратиться к условиям неразрывности деформаций (*D*). Так как в последние входят деформации $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, то их необходимо выразить через напряжения с помощью закона упругости (*B*). Выполнив эту подстановку и пользуясь одновременно уравнениями равновесия (*A*), уравнения неразрывности преобразуют к следующему виду (уравнения Бельтрами):

$$\left. \begin{aligned} (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} &= 0, \\ (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} &= 0, \\ (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= 0, \\ (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \cdot \partial y} &= 0, \\ (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \cdot \partial z} &= 0, \\ (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z \cdot \partial x} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (7.04)$$

где

$$\sigma = 3\sigma_{\text{ср.}} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z.$$

Таким образом, для решения задачи придется проинтегрировать девять уравнений (*A*), (7.04), а входящие в общие решения этих уравнений произвольные функции определить из условий на поверхности:

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= \sigma_x \cos(\nu x) + \tau_{xy} \cos(\nu y) + \tau_{xz} \cos(\nu z), \\ p_{y\nu} &= \tau_{yx} \cos(\nu x) + \sigma_y \cos(\nu y) + \tau_{yz} \cos(\nu z), \\ p_{z\nu} &= \tau_{zx} \cos(\nu x) + \tau_{zy} \cos(\nu y) + \sigma_z \cos(\nu z). \end{aligned}$$

При решении задач теории упругости в напряжениях или в перемещениях может возникнуть вопрос о том, является ли полученное в итоге решение однозначным? Не могут ли заданным на поверхности упругого тела силам соответствовать внутри тела не одна, а несколько систем напряжений? Или: заданным смещениям или напряжениям внутри тела не могут ли соответствовать различные контурные условия?

Если исключить случай начальных напряжений в теле, то ответ на указанные выше вопросы с позиций классической теории упругости должен быть дан только отрицательным. Для естественно ненапряженного тела (т. е. при отсутствии внешних сил в теле нет напряжений) решения теории упругости однозначны.

Доказательство упомянутой однозначности можно найти в книге проф. М. М. Филоненко-Бородича «Теория упругости» (Гостехиздат, 1947, стр. 105—108).

Однако указанное категорическое заключение справедливо только в линейной теории упругости и, следовательно, только для задач, входящих в сферу ее ведения. С позиций нелинейной теории упругости такой вывод считается неправильным и объясняется недостаточной точностью формул классической теории упругости.

При рассмотрении теории устойчивости упругого равновесия в нелинейной теории упругости показывается, что при увеличении до известного предела действующей на тело нагрузки [критическое значение] решение классической теории упругости действительно является единственным решением, однако *по достижении такого критического значения оказывается возможным раздвоение решения задачи* (см. В. В. Новожилов, Основы нелинейной теории упругости, М.—Л., 1948, стр. 147—169).

§ 7.05. Дополнительные замечания — наличие температурного поля

Если рассматриваемое нами упругое тело помимо внешней нагрузки (или независимо от нее) будет подвергаться тепловому воздействию, и, притом, неравномерному по объему тела, то напряжения и деформации в теле будут отличны от того случая, когда тело подвержено только нагрузке, так как наличие температурного поля повлечет за собой появление в теле дополнительных *термических напряжений*.

Компоненты уравнений теории упругости для решения такой задачи будут складываться из прежних дифференциальных уравнений равновесия (А), прежних геометрических уравнений (Б), прежних условий на границе (Г) и новых физиче-

ских уравнений (4.27) или (4.28), составленных для случая теплового эффекта (см. гл. 4).

Эти уравнения можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left[\epsilon_x + \frac{3\mu}{1-2\mu} \epsilon_{cp} - \frac{1+\mu}{1-2\mu} \alpha T \right]; \\ \sigma_y &= 2G \left[\epsilon_y + \frac{3\mu}{1-2\mu} \epsilon_{cp} - \frac{1+\mu}{1-2\mu} \alpha T \right]; \\ \sigma_z &= 2G \left[\epsilon_z + \frac{3\mu}{1-2\mu} \epsilon_{cp} - \frac{1+\mu}{1-2\mu} \alpha T \right]; \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (7.05)$$

Если теперь проделать выкладки, аналогичные в § 7.03, то взамен (7.02) придем к уравнениям

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u + \left[X_p - \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\alpha T) \right] &= 0; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 v + \left[Y_p - \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\alpha T) \right] &= 0; \quad (7.06) \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \nabla^2 w + \left[Z_p - \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\alpha T) \right] &= 0. \end{aligned}$$

! Сравнивая (7.06) с (7.04), можно заключить, что при вычислении перемещений неравномерность нагрева тела как бы равносильна добавлению к реальным объемным силам (X_p, Y_p, Z_p) некоторых фиктивных объемных сил, пропорциональных градиентам температур, т. е. пропорциональных $\frac{\partial}{\partial x} (\alpha T), \frac{\partial}{\partial y} (\alpha T), \frac{\partial}{\partial z} (\alpha T)$, а при вычислении напряжений (7.05) появление дополнительных членов, пропорциональных температуре*.

* В настоящей книге изложение температурной проблемы в теории упругости ограничим приведением уравнений (7.06). Попутно заметим, что эта проблема при наличии высокого температурного поля является уже задачей не только теории упругости, но и теории пластичности и ползучести (5). В настоящее время (в связи со строительством атомных реакторов и т. п.) такая задача привлекает большое внимание ученых ряда стран. Отметим в этой области проведенные исследования А. А. Ильюшиным, П. М. Огибаловым, В. В. Болотиним, А. Д. Коваленко (СССР), Тзяном (Китай), Новацким (Польша), Прагером, Хиллом, Надаи (США).

Не представляет затруднений доказать, что если нагревание тела будет равномерно, т. е. градиенты температур отсутствуют, а связи тела не будут препятствовать свободному расширению тела, то напряжения в теле не изменятся против тех значений, которые они имели бы только от одной нагрузки.

§ 7.06. Краткие выводы по главе

1. Цель математической теории упругости — определить напряжения и деформации при любых нагрузках (на границе тела и внутри тела) упругого тела любой формы и, в частности, в телах продолговатой формы, которыми только и занимается теория сопротивления материалов (хотя в этом случае могут быть некоторые различия в окончательных результатах по формулам теории упругости и по формулам сопротивления материалов).

В отличие от сопротивления материалов, базирующегося на гипотезе плоских сечений и других упрощенных предположениях, теория упругости ставит целью относительно строгое решение задачи при минимальном количестве исходных гипотез и предпосылок.

Задачей точного решения в теории упругости является получение такой системы функций напряжений, смещений и деформаций, чтобы в каждой точке внутри тела были обеспечены условия равновесия и условия непрерывности (сплошности) тела, а у границы тела внутренние силы находились бы в равновесии с внешними силами, действующими на поверхностях (на границе) тела.

2. Для этой цели теория упругости располагает следующими группами уравнений:

а) *тремя статическими уравнениями*, справедливыми для каждой точки внутри тела, из которых следует, что интенсивности изменения (градиенты) нормальных и касательных напряжений вдоль координатных осей и сами напряжения между собой не являются независимыми и подчинены определенным дифференциальным соотношениям (А).

Иначе говоря, для обеспечения равновесия всех точек внутри тела функции компонентов напряжений должны представлять собой непрерывные функции координат точки, определенным образом связанные друг с другом;

б) *шестью геометрическими уравнениями*, справедливыми для каждой точки внутри тела (Б), из которых, с одной стороны, следует, что компоненты деформации (удлинения и сдвиги) связаны дифференциальными соотношениями с функциями смещений, а с другой стороны (как следствие), интенсивности изменения деформаций вдоль координатных осей и

сами деформации между собой не являются независимыми и подчинены определенным дифференциальным соотношениям, именуемым уравнениями неразрывности деформации (D).

Иначе говоря, для обеспечения непрерывности тела в процессе деформации его, функции компонентов деформаций и компонентов смещений должны представлять непрерывные функции координат точки, надлежащим образом связанные друг с другом;

в) *шестью физическими уравнениями (B)*, справедливыми для каждой точки внутри тела и связывающими компоненты напряжений в каждой точке с компонентами деформации для той же точки.

Иначе говоря, в каждом конкретном теле (со своими упругими характеристиками) указанные непрерывные функции для компонентов напряжений, для компонентов деформации, а стало быть, и для компонентов смещений оказываются взаимосвязанными, т. е. существует связь не только между функциями, входящими в каждую отдельную группу, но одной группы уравнений с уравнениями другой группы. Эта взаимосвязь предопределяется физической природой исследуемого тела.

3. В указанные три группы уравнений, составляющие в итоге пятнадцать уравнений, входят пятнадцать неизвестных функций. Принципиально может быть найдено бесчисленное множество решений (подобрано начертание функций для компонентов напряжений и т. д.), каждое из которых обратило бы в тождество все перечисленные уравнения, т. е. обеспечило бы равновесие и непрерывность тела в окрестности любой точки внутри тела. Однако каждое из таких решений соответствовало бы своим особым статическим условиям на поверхности тела (внешним нагрузкам) и своим особым кинематическим условиям на поверхности тела (наличие или отсутствие тех или иных связей). Поэтому истинным решением задачи будет то, которое увязано с конкретными, заданными граничными условиями (в смысле нагрузки или в смысле смещения), и потому конкретное решение задачи должно удовлетворять действительным граничным условиям. Часто эти условия задаются в статическом плане и для каждой точки на границе тела представляются тремя граничными условиями (Γ).

Литература к главе 7

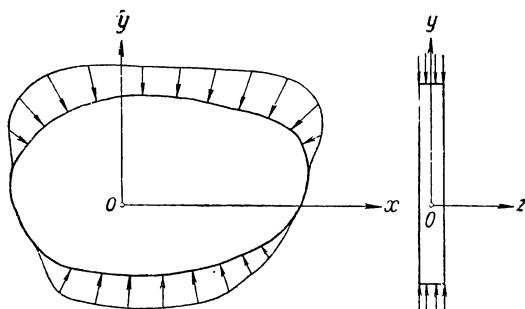
1. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости, изд. 2-ое. Гостехиздат, 1947. Книга удостоена Государственной премии СССР.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 3. АН СССР, 1949. Книга удостоена Государственной премии СССР.

3. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз, 1939.
 4. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости, из. 4-ое. Физматиздат, М., 1959 г.
 5. Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, Москва 27—1—3—11—1960 г. Аннотации докладов. Изд-во АН СССР, М., 1960 (см. тезисы докладов А. Д. Коваленко, В. Новацкого, В. М. Фролова, К. Ф. Черных).
-

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

§ 8.01. Частный случай — плоское напряженное состояние

Все уравнения теории упругости значительно упрощаются, если все напряжения параллельны одной плоскости, например, в случае тонкой пластинки (брус, стержень), подверженной действию сил, приложенных к ее контуру, параллельных плоскости пластинки и равномерно распределенных по ее толщине (фиг. 8.01).



Фиг. 8.01. Плоское напряженное состояние

В этом случае составляющие напряжений σ_z , τ_{xz} и τ_{yz} равны нулю на обеих поверхностях пластинки, и можно полагать, что они отсутствуют и по всей толщине пластинки, т. е. распределение напряжений является плоским.

Естественно предположить, что другие три компонента напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} не зависят от координаты z , т. е. остаются постоянными по всей толщине пластинки.

Тензор напряжений для плоского напряженного состояния представится сокращенной записью

$$T_n = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}.$$

Соответственно тензор деформации может быть записан в виде:

$$T_{\text{деф}} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y \end{pmatrix}.$$

Однако принципиально полное его начертание должно быть следующим:

$$T_{\text{деф}} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{Bmatrix},$$

так как в направлении координаты z имеется деформация удлинения ϵ_z , а следовательно, и смещение w . Эти компоненты могут быть легко определены. Так, из третьей строки обобщенного закона Гука:

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)]$$

следует

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y).$$

Для смещения w , впрочем не имеющего практического интереса, можем записать $w = \epsilon_z z$.

Будем полагать, что объемной силой, как это чаще всего и бывает, является только сила тяжести, т. е. $Z = X = 0$; $Y_p = -q$ (q — объемный вес).

Уравнения равновесия принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.01)$$

Условия на контуре:

$$\left. \begin{aligned} p_{xy} &= \sigma_x \cos(\nu x) + \tau_{xy} \cos(\nu y), \\ p_{yx} &= \tau_{xy} \cos(\nu x) + \sigma_y \cos(\nu y). \end{aligned} \right\} \quad (8.02)$$

Геометрические уравнения:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8.03)$$

Физические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (8.04)$$

Из уравнений неразрывности деформаций остается одно:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (8.05)$$

Уравнения (8.01), (8.03), (8.04) общим количеством 8 содержат восемь неизвестных и потому могут быть разрешены по методу сил или по методу перемещений, или, наконец, по смешанному методу. Для метода сил (три неизвестных) надлежит из (8.03) исключить перемещения u и v , что даст (8.05); далее, заменяя в (8.05) деформации через силы по (8.04), получаем дополнительное уравнение к прежним двум статическим уравнениям (8.01). В итоге получим три уравнения с неизвестными σ_x , σ_y , τ_{xy} ; эти уравнения устанавливаются в § 8.02.

Для метода перемещений (два неизвестных) надлежит в двух статических уравнениях (8.01) произвести замены, как в § 7.03, т. е. исключить силы. В итоге получим два уравнения с неизвестными u и v .

§ 8.02. Дальнейшие упрощения

Уравнение неразрывности (8.05), выраженное с помощью (8.04) через напряжения, записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \mu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \mu \sigma_x) = 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (8.05a)$$

Написанное уравнение (8.05 a) совместно с уравнениями равновесия (8.01) составляет систему трех уравнений с тремя неизвестными.

Если объемной силой является только вес тела ($X=0$, $Y_p=-q$), то с помощью уравнений равновесия (8.01) выражение (8.05a) переписывается проще. Так, дифференцируя первое из уравнений (8.01) по x и второе — по y и затем складывая их, найдем

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}. \quad (a)$$

Подстановка (a) в (8.05) приводит уравнение совместности к виду, выраженному только через нормальные напряжения (уравнение Леви):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (8.06) *$$

Итак, для плоского напряженного состояния, когда объемной силой является сила тяжести, совокупность основных уравнений теории упругости может быть приведена к следующим трем уравнениям:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - q &= 0, \\ \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) &= 0, \end{aligned}} \quad (8.07)$$

где для краткости письма обозначена (см. стр. 185 § 7.03) операция

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

которая читается «набла два» и именуется, также *гармонической* операцией.

§ 8.03. Частный случай — плоская деформация

Если при каком-либо напряженном состоянии тела перемещения всех точек могут происходить только в двух направлениях, т. е. только в одной плоскости, то такая деформация называется *плоской*. Примером может служить тело, помещенное между двумя абсолютно твердыми плитами (фиг.

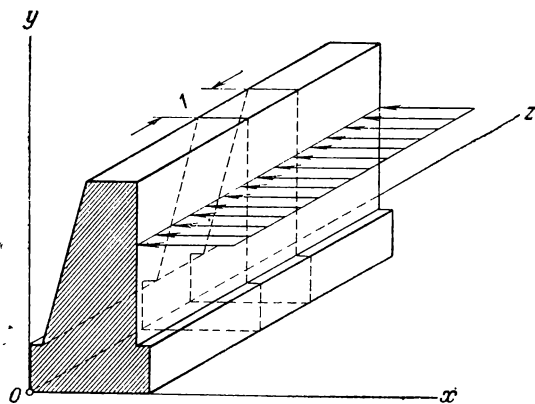
* Для общего случая объемных сил уравнение (8.06) приняло бы вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = - (1 - \mu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right).$$

8.02), расстояние между которыми остается неизменным, и сжимаемое силами, параллельными плоскостям плит.

В таких же условиях фактически оказывается и тело, размеры которого в одном направлении, например, в направлении оси z , очень велики; если такое длинное призматическое тело нагружено силами, не меняющимися по длине тела и перпендикулярными к этому направлению, то часть его, находящаяся на значительном расстоянии от концов, фактически будет подвергаться плоской деформации; перемещения всех точек деформированного тела в таком случае происходят в плоскостях, перпендикулярных к длине тела (фиг. 8.03), т. е.

$$\epsilon_z = 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$



Фиг. 8. 03. Плоская деформация

Тогда тензор деформации точно представится сокращенной матрицей

$$T_{\text{деф}} = \begin{pmatrix} \epsilon_x, & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx}, & \epsilon_y \end{pmatrix}.$$

Соответственно тензор напряжений может быть записан в виде:

$$T_n = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}.$$

Однако принципиально полное его начертание должно быть следующим:

$$T_n = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{Bmatrix}.$$

Если при плоском напряженном состоянии имелся компонент ϵ_z , но отсутствовал компонент σ_z , то при плоской деформации, наоборот, присутствует σ_z при отсутствии ϵ_z . Применяя к данному случаю третью строчку обобщенного закона Гука

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)]$$

и полагая $\epsilon_z = 0$, получаем

$$\sigma_z = \mu (\sigma_x + \sigma_y). \quad (8.08)$$

Уравнения равновесия имеют прежний вид (8.01), также остаются без изменения геометрические уравнения (8.03).

Физические уравнения (4.01) благодаря σ_z , определяемому по выражению (8.08), принимают для относительных удлинений другой вид:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [(1 - \mu^2) \cdot \sigma_x - \mu (1 + \mu) \sigma_y], \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [(1 - \mu^2) \sigma_y - \mu (1 + \mu) \sigma_x], \end{aligned} \right\} \quad (8.09)$$

причем для сдвига сохраняется выражение

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{xy}.$$

Уравнение (8.06), если повторить выкладки, аналогичные указанным в § 8.02, становится таким:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = - \frac{\rho}{1 - \mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right); \quad (8.10)$$

при постоянных объемных силах последнее выражение обращается в (8.06), т. е. ничем не отличается от уравнения, выведенного для случая плоского напряженного состояния.

Отмечается следующий любопытный факт: при постоянных объемных силах уравнения, устанавливающие распределение напряжений в плоской задаче (8.07), не содержат упругих постоянных материала. По этой причине и представляется возможным широко использовать в практике идею моде-

лирования и, в частности, переносить результаты исследования напряжений, выполненные оптическим способом с прозрачным материалом (целлюлоид и т. п.), при помощи поляризованного света, на другие материалы (сталь и т. п.).

§ 8.04. Функция напряжений для плоской задачи

Итак, решение плоской задачи в напряжениях — задачи в двух измерениях — сводится к интегрированию трех уравнений, которые для случая, когда объемной силой является вес тела, имеют вид (8.07):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - q &= 0, \\ \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

К этим уравнениям надо присоединить условия на контуре (8.02). Но могут быть дальнейшие облегчения задачи, и вместо отыскания трех функций (σ_x , σ_y , τ_{xy}) достаточно определить одну так называемую *функцию напряжений*, посредством которой дальше уже не интегрированием, а дифференцированием определяются все искомые функции.

В самом деле, представим себе, что имеется такая функция φ от координат x и y , при помощи которой напряжения определяются следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + qx. \quad (8.11)$$

Легко проверить, что такая функция существует, так как если подставить (8.11) в уравнения равновесия (8.01), то получим тождества. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - q &= \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + q - q = 0, \end{aligned}$$

т. е. уравнения удовлетворяются тождественно.

Для отыскания вида самой функции φ подставим (8.11) в уравнение (8.06), откуда получим, что функция напряжений (иначе говоря, «разрешающая функция») должна удовлетворять уравнению

$$\boxed{\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.} \quad (8.12)$$

Уравнение (8.12) можно для краткости письма записать в виде $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$, или, еще короче, в виде $\nabla^4 \varphi$, где под операцией ∇^4 (читается «набла четыре»), называемой *бигармонической*, понимается следующая:

$$\nabla^4 () = \nabla^2 [\nabla^2 ()].$$

В случае плоской задачи *

$$\nabla^4 \varphi = \nabla^2 \nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi \right].$$

Таким образом, решение плоской задачи в том случае, когда объемной силой является вес тела, сводится к нахождению решения бигармонического уравнения (8.12), которое удовлетворяло бы и условиям на контуре.

Обращаться к услугам функции напряжений, иначе — *силовой функции*, называемой в литературе также функцией Эри, оказывается весьма плодотворным при решении задач обратным или полубратным способами. В самом деле, если бы мы пожелали задаться какой-либо системой напряжений (σ_x , σ_y , τ_{xy}) и найти им соответствующие внешние нагрузки (поверхностные условия), то вначале надо проверить, может ли вообще существовать задаваемая система напряжений (удовлетворяются ли при этом уравнения равновесия и неразрывности), тогда как, задаваясь функцией напряжений, удовлетворяющей только одному уравнению (8.12) *, мы уже уверены в том, что все вышеперечисленное удовлетворится автоматически.

Примеры на использование в указанном выше смысле функции напряжений приведены в следующем параграфе.

Примечание 1. Функция напряжений не обязательно должна толковаться как некоторая отвлеченная аналитическая функция (абстракция), с помощью которой (учиняя над ней элементарные операции дифференцирования) просто получаются выражения (функции) для самих конкретных напряжений. Каждой «разрешающей» функции при желании всегда можно подобрать некоторый геометрический образ, иначе говоря, конкретную модель. Так на стр. 332 (в § 14.05 о поперечном изгибе тонких пластинок) показано, что функция напряжений (8.12) для заданной плоско-напряженной пластинки может быть истолкована и как уравнение искривленной срединной поверхности той же пластинки, если последнюю изгибать специально подобранными силами (стр. 332). Эти силы должны мыслиться приложенными на граничной линии пластинки (на опорном контуре) и действующими в плоскости, нормальной к плоскости заданной пластинки. Такая аналогия

* Если для φ задаться любым полиномом не выше третьей степени относительно x и y , то уравнение (8.12) удовлетворится и при любых коэффициентах полинома. Однако во всяком случае коэффициенты полинома должны удовлетворять граничным условиям, если только решение оказывается пригодным (см. § 8.05). Функцию φ степени ниже второй нет смысла рассматривать, так как при этой функции компоненты напряжений получаются нулями.

открывает возможность экспериментально проверить или, наоборот, найти «разрешающие» функции в плоской задаче теории упругости.

Примечание 2. Вообще гармонические и бигармонические функции имеют в теории упругости исключительно важное значение. Это вытекает хотя бы из указанных ниже выводов, которые предлагается проделать читателю в порядке самостоятельного упражнения.

Если положить отсутствие массовых сил, состояние покоя и продифференцировать первое уравнение равновесия Ляме (1.02) по x , второе по y , третье по z , а затем результаты сложить, то получим:

$$\nabla^2 \varepsilon^I = 0, \quad (8.13)$$

т. е. *объемное расширение ε^I есть гармоническая функция.*

Если, далее, сделать операцию $\nabla^2 ()$ над каждым из уравнений Ляме-то получим:

$$\begin{aligned} \Delta^4 u &= 0, \\ \Delta^4 v &= 0, \\ \Delta^4 w &= 0, \end{aligned} \quad (8.14)$$

т. е. *компоненты упругого перемещения суть бигармонические функции.*

Если проделать бигармоническую операцию над обеими частями шести формул обобщенного закона упругости (4.08), то получим:

$$\nabla^4 \sigma_x = \nabla^4 \sigma_y = \nabla^4 \sigma_z = \nabla^4 \tau_{xy} = \nabla^4 \tau_{yz} = \nabla^4 \tau_{zx} = 0, \quad (8.15)$$

т. е. *компоненты напряженного состояния суть бигармонические функции.*

Выводы, полученные для трехмерной задачи, естественно, остаются действительными и для плоского напряженного состояния.

§ 8.05. Частные случаи начертания функции напряжений и примеры их использования

Пусть объектом внимания является прямоугольная полоса длиной l и высотой h . Эта пластинка предполагается в плоском напряженном состоянии (нагружение в плоскости xy).

Зададимся в качестве примера функцией напряжений в виде полинома пятой степени, например:

$$\varphi = \frac{ax^5}{5 \cdot 4} + \frac{bx^4y}{4 \cdot 3} + \frac{cx^3y^2}{3 \cdot 2} + \frac{dx^2y^3}{3 \cdot 2} + \frac{exy^4}{4 \cdot 3} + \frac{fy^5}{5 \cdot 4}. \quad (a)$$

Подставив (a) в уравнение неразрывности (8.12), заключаем, что это уравнение будет удовлетворено, если:

$$\begin{aligned} e &= -(2c + 3a); \\ f &= -\frac{1}{3}(b + 2d). \end{aligned}$$

Соответствующие компоненты напряжений (собственный вес исключается) будут:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{c}{3} x^3 + x^2 d \cdot y - (2c + 3a) xy^2 - \frac{1}{3} (b + 2d) y^3; \quad (б)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = ax^3 + bx^2 y + cxy^2 + \frac{d}{3} \cdot y^3; \quad (в)$$

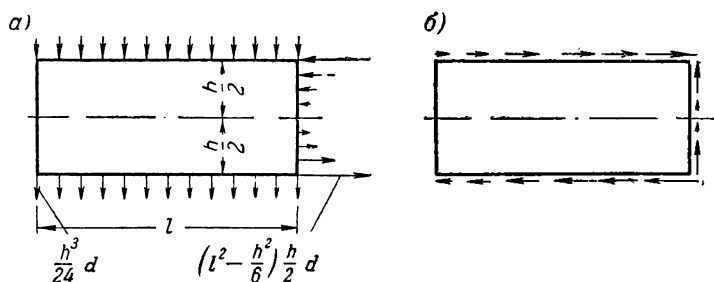
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \cdot \partial y} = -\frac{1}{3} bx^3 - cx^2 y - d \cdot xy^2 + \frac{1}{3} (2c + 3a) y^3. \quad (г)$$

Здесь коэффициенты a, b, c, d произвольны, и подбирая их, мы получим решения для различных условий нагружения пластинки.

Так, если все коэффициенты за исключением d принять равными нулю, то найдем

$$\sigma_x = d \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right), \quad \sigma_y = \frac{1}{3} d \cdot y^3; \quad \tau_{xy} = -d \cdot xy^2. \quad (д)$$

Такой закон распределения напряжений соответствует внешним воздействиям, приложенным к пластинке и показанным на фиг. 8.04, т. е. нормальные усилия равномерно распределены по продольным сторонам пластинки (фиг. 8.04а). По стороне $x=l$ нормальные усилия состоят из двух частей: одной — следующей линейному закону, другой — изменяющейся по закону кубической параболы.



Фиг. 8.04 Случай плоского напряженного состояния

Касательные усилия пропорциональны абсциссе x на продольных сторонах пластинки и следуют параболическому закону на стороне $x=l$. Распределение этих напряжений показано на фиг. 8.04б.

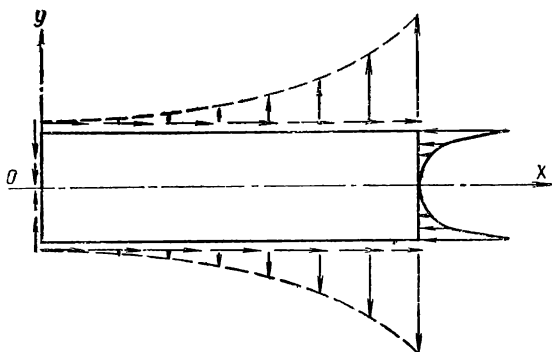
Если в выражениях (б—г) отличным от нуля принять коэффициент a , то соответственно напряжения запишутся:

$$\sigma_x = -3axy^2;$$

$$\sigma_y = ax^3; \quad (e)$$

$$\tau_{xy} = ay^3.$$

Такой закон распределения напряжений, очевидно, соответствует контурным условиям, показанным на фиг. 8.05.



Фиг. 8.05 Случай плоского напряженного состояния

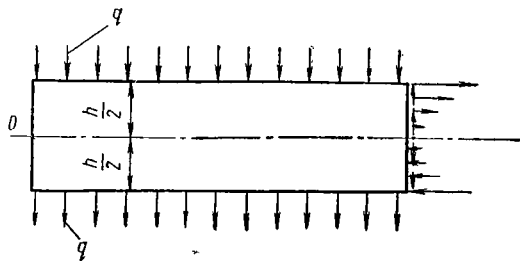
Некоторым другим более простым начертаниям функции напряжений, приведенным в таблице на стр. 204, соответствуют контурные условия, показанные в той же таблице, в чем рекомендуем читателю убедиться в порядке самостоятельного упражнения.

Решение при помощи полиномов для функций напряжений представляет практический интерес потому, что легко доставляет точные решения для многих, хотя и искусственно назначенных задач; однако комбинация из таких решений (путем сложений или вычитаний) и подобных им отдельных известных результатов позволяет получить непосредственно решения и для реальных поверхностных условий.

Так, например, пусть требуется решить такую прямую задачу (т. е., наоборот, найти выражения для напряжений при заданных контурных нагрузках), условия которой показаны на фиг. 8.06.

Очевидно, что искомое решение может быть получено путем наложения известного решения для случая, показанного на фиг. 8.04, на решение, изображенное для случая 5 в следующей таблице.

№ п/п	Вид функции напряжений	Контурные условия
1	$\varphi = ax^2$	
2	$\varphi = ay^2$	
3	$\varphi = axy$	
4	$\varphi = ax^3$	
5	$\varphi = ax^2y$	
6	$\varphi = axy^2$	
7	$\varphi = ay^3$	
8	$\varphi = axy^3$	



Фиг. 8.06 К примеру нахождения функции напряжений

На фиг. 8.04 касательные силы по горизонтальным кромкам пластинки имеют значения $\frac{d \cdot x \cdot h^2}{4}$, а для случая 5 таблицы — значение $2ax$.

Наложение должно быть произведено так, чтобы в итоге исключить касательные силы по горизонтальным кромкам. Очевидно это будет тогда, когда будет соблюдено следующее соотношение:

$$\frac{d \cdot x \cdot h^2}{4} = 2ax,$$

т. е.

$$a = \frac{dh^2}{8}.$$

Таким образом, для случая, показанного на фиг. 8.06, функция напряжений будет:

$$\varphi = \frac{d \cdot x^2 \cdot y^3}{3 \cdot 2} + \frac{d \cdot h^2}{8} x^2 \cdot y.$$

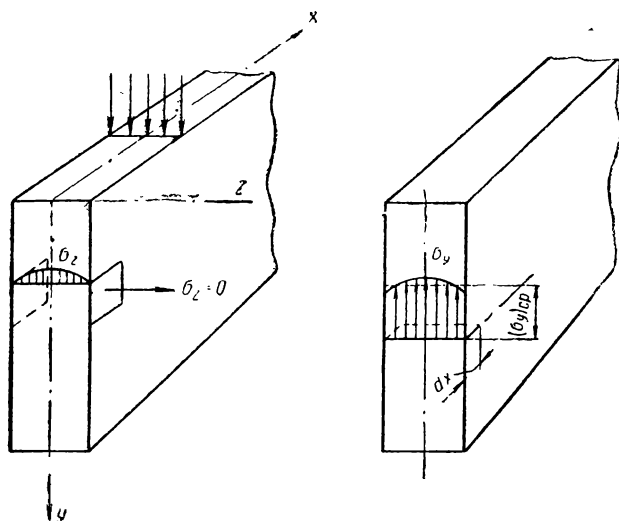
§ 8.06. Дополнительные замечания. Обобщенное плоское напряженное состояние. Погонные усилия

В § 8.01 и в последующих выкладках имелось в виду, что силы, приложенные на контуре пластинки, равномерно распределены по ее толщине, а последняя вообще предполагалась тонкой. Отсюда вытекает предположение, что компоненты напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} не зависят от координаты z , т. е. они распределяются по толщине пластинки равномерно. Компоненты σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} вообще полагались отсутствующими.

В инженерных задачах чаще приходится иметь дело с пластинкой конечной толщины, если и малой, но не исчезающе малой, как это следовало бы иметь в виду для строгости выкладок в § 8.01 и в последующих выводах.

При конечной толщине пластинки, даже при условии равномерного распределения внешних сил по наружному контуру

пластинки, компоненты σ_x , σ_y и τ_{xy} могут, *хотя и незначительно*, по толщине пластинки изменяться, но симметрично, конечно, относительно *срединной плоскости* пластинки. Другие составляющие, как-то: σ_z , τ_{xz} и τ_{yz} , могут появиться, хотя и будут исчезающе малы (фиг. 8.07).



Фиг. 8.07 К определению обобщенного плоского напряженного состояния

Введем в употребление *погонные усилия*, под которыми будем понимать следующие интегралы от напряжений, взятые по всей толщине пластинки:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot dz \\ N_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz \\ N_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \end{aligned} \right\} . \quad (8.16)$$

От указанных погонных усилий перейдем к средним по толщине пластинки напряжениям, а именно

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_{\text{ср}} &= \frac{N_x}{h} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \\ (\sigma_y)_{\text{ср}} &= \frac{N_y}{h}, \quad (\tau_{xy})_{\text{ср}} = \frac{N_{xy}}{h} \end{aligned} \right\}. \quad (8.17)$$

Если при составлении дифференциальных уравнений равновесия (8.01) мысленно вырезать из пластинки бесконечно малый элемент с размерами граней dx , dy и h (т. е. один из размеров принимать конечным и равным толщине пластинки), то, очевидно, взамен (8.01) получили бы уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - qh &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (8.18)$$

Если же в уравнениях (8.01) под σ_x , σ_y и τ_{xy} понимать именно средние значения напряжений по толщине пластинки, т. е. согласно (8.17), то уравнения (8.03) и все вытекающие из него далее (8.06 и др.) сохраняют свою силу.

Рассматриваемый случай с введенными допущениями принято называть *обобщенное плоское напряженное состояние*.

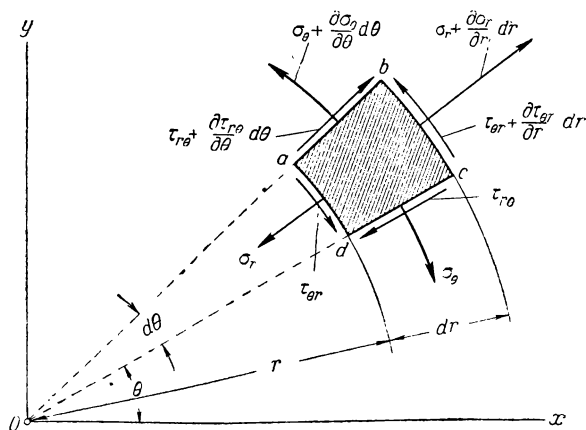
Примечание. Краткие выводы по главе и литература приведены ниже для глав 8—10 вместе (см. стр. 228).

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

§ 9.01. Обозначение компонентов смещения, напряжений и деформаций в полярных координатах

При исследовании напряжений в круглых кольцах, дисках и т. п. удобно пользоваться полярными координатами.

Положение точки на срединной плоскости пластинки определяется расстоянием r от начала координат O (фиг. 9.01) и углом θ между этим направлением r и некоторой осью Ox , занимающей определенное положение на плоскости.



Фиг. 9.01 Обозначение напряжений в полярных координатах

Взамен параллелепипеда с прямоугольной формой граней теперь выделим малый элемент $abcd$, вырезанный из пластинки двумя радиальными сечениями Oc и Ob , перпендикулярными к пластинке, и двумя нормальными к пластинке цилиндрическими поверхностями ad и bc , радиусы кривизны которых равны r и $r + dr$. Составляющие нормальных напряжений в радиальном направлении обозначим через σ_r , а в тангенциальном — через σ_θ . Для касательного напряжения примем обозначения $\tau_{r\theta}$. Прочие обозначения (для напряжений в близлежащих плоскостях) указаны на фиг. 9.01.

Проекция объемной силы, отнесенная к единице объема, обозначается: R — действующая в радиальном направлении и θ — действующая в тангенциальном направлении. В большинстве задач обычно тангенциальные составляющие отсутствуют. Составляющие перемещения точки в радиальном и тангенциальном направлениях обозначаются через u и v .

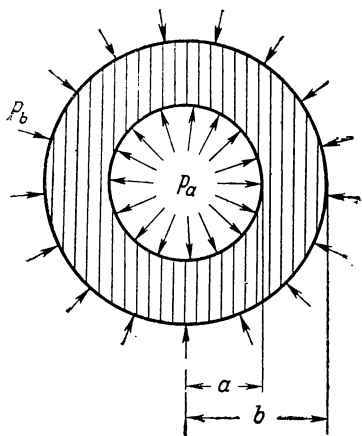
Для относительных удлинений в радиальном и тангенциальном направлениях применяются обозначения ϵ_r и ϵ_θ , а деформацию сдвига (угол перекоса граней ранее указанного параллелепипеда) обозначают $\gamma_{r\theta}$.

Таким образом, тензор напряжений и тензор деформаций для плоской задачи в полярных координатах могут быть записаны:

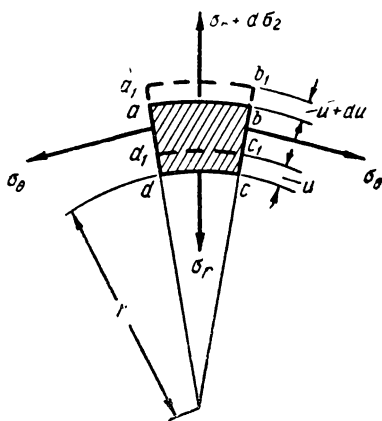
$$T = \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta \end{pmatrix}; \quad T_{\text{деф}} = \begin{pmatrix} \epsilon_r & \frac{1}{2} \gamma_{r\theta} \\ \frac{1}{2} \gamma_{\theta r} & \epsilon_\theta \end{pmatrix}. \quad (9.01)$$

§ 9.02. Частный случай — симметричное относительно оси распределение напряжений (решение в перемещениях)

Рассмотрим полый цилиндр или круглый диск, подвергающийся равномерно распределенному давлению p_a по внутренней поверхности и давлению p_b по внешнему контуру (фиг. 9.02). Объемные силы R положим отсутствующими. В этом случае как деформация, так и распределение напряжений будет симметричным, так как сечение по любому радиусу может рассматриваться как плоскость симметрии и потому в этих сечениях не могут существовать касательные напряжения ($\tau_{r\theta} = 0$). Для элементарного объема, выделенного в полярных координатах, будем иметь систему напряжений и картину его смещения, показанные на фиг. 9.03. Соответственно этим обозначениям уравнение равновесия



Фиг. 9.02 Осесимметричная деформация толстостенного цилиндра



Фиг. 9.03 К составлению уравнений равновесия

в виде суммы проекций всех усилий на направление радиуса запишется

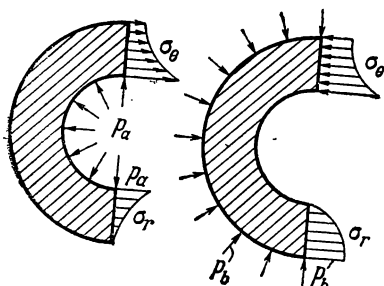
$$-\sigma_r \overline{cd} + \left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} \right) \overline{ab} - 2\sigma_\theta \overline{ad} d\theta = 0,$$

или после замены

$$\overline{cd} = r d\theta, \quad \overline{ab} = (r + dr) d\theta,$$

и по отбрасывании малых высших порядков, имеем:

$$\sigma_r - \sigma_\theta + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (9.02)$$



Фиг. 9.04 Распределение напряжений в толстостенном диске

Для относительных удлинений в радиальном и тангенциальном направлениях согласно фиг. 9.04 имеем:

$$\epsilon_r = \frac{\overline{b_1 c_1} - \overline{bc}}{\overline{bc}}$$

$$\epsilon_\theta = \frac{\overline{d_1 c_1} - \overline{dc}}{\overline{dc}};$$

или после замены:

$$\overline{dc} = r d\theta; \quad \overline{d_1 c_1} = (r + u) d\theta; \quad \overline{bc} = dr; \quad \overline{b_1 c_1} = dr + du$$

получаем:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad (9.03)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (9.04)$$

Физические уравнения

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\theta);$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_r),$$

или

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_\theta); \quad (9.05)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_r). \quad (9.06)$$

Совокупность уравнений (9.02 — 9.06) полностью решает поставленную задачу (5 уравнений с 5-ю неизвестными). Поставим целью выразить неизвестные через одну функцию u (функция смещения), т. е. проведем решение методом перемещений.

Подставляя геометрические уравнения (9.03) и (9.04) в формулы (9.05) и (9.06), имеем

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right); \quad (9.07)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right). \quad (9.08)$$

Подстановка выражений (9.07) и (9.08) в статическое уравнение (9.02) приводит к уравнению

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (9.10)$$

Это и есть искомое «разрешающее» уравнение (играющее роль уравнения 8.12 в методе напряжений). Общий интеграл (9.10) записывается так:

$$u = Ar + \frac{B}{r}. \quad (9.11)$$

Постоянные интегрирования найдутся из граничных условий, а именно:

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p_a; \quad (9.12)$$

$$(\sigma_r)_{r=b} = -p_b. \quad (9.13)$$

Используем граничные условия, для чего выражение (9.07) перепишем в виде:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[A(1+\mu) - \frac{B}{r^2}(1-\mu) \right], \quad (9.14)$$

а заодно в том же плане преобразуем и выражение (9.08)

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left[A(1+\mu) + \frac{B}{r^2}(1-\mu) \right]. \quad (9.15)$$

Условия (9.12) и (9.13) дают

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\mu^2} \left[A(1+\mu) - \frac{B}{a^2}(1-\mu) \right] &= -p_a; \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left[A(1+\mu) - \frac{B}{b^2}(1-\mu) \right] &= -p_b; \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} A &= \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1-\mu}{E}; \\ B &= \frac{(p_a - p_b) a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1+\mu}{E}. \end{aligned}$$

Подстановка последних выражений в (9.14) и (9.15) после преобразований дает

$$\sigma_\theta = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{(p_a - p_b) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2}; \quad (9.16)$$

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{(p_a - p_b) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2}. \quad (9.17)$$

Для частного случая, когда $p_b = 0$, формулы (9.16) и (9.17) принимают следующий вид:

$$\sigma_\theta = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right); \quad (9.18)$$

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right). \quad (9.19)$$

Для наибольших напряжений (для точек на внутренней поверхности) имеем:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = p \frac{b^2 + 1}{b^2 - 1}, \quad (9.20)$$

$$\sigma_r = -p_a,$$

где

$$\beta = \frac{b}{a}.$$

Эпюры напряжений согласно формулам (9.18) и (9.19) имеют вид, показанный на фиг. 9.04а; в случае, когда $p_a = 0$ и имеется только наружное давление p_b , эпюры напряжений представятся графиками, показанными на фиг. 9.04б.

§ 9.03. Решение в напряжениях

В качестве самостоятельного упражнения читателю рекомендуется проделать решение той же осесимметричной задачи методом напряжений, т. е. провести совместное решение уравнений (9.02 — 9.06) таким образом, чтобы все неизвестные функции выражать через напряжения, например через σ_r .

Так, из (9.02) следует:

$$\sigma_\theta = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr}$$

и, далее, используя (9.03) — (9.06), выражая неизвестные u , ϵ_θ , ϵ_r через σ_r , приходим к исходному уравнению следующего вида:

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (9.21)$$

Общий интеграл (9.21) может быть записан в виде:

$$\sigma_r = \frac{A^*}{r^2} + B(1 + 2\ln r) + C \quad (9.22)$$

В связи с тем, что граничных условий (их два) меньше, чем постоянных интегрирования, примем постоянную B равной нулю, (см. стр. 214), тогда

$$\sigma_r = \frac{A^*}{r^2} + C$$

и

$$\sigma_\theta = -\frac{A^*}{r^2} + C.$$

Постоянные A^* и C найдутся из условия на границе (9.12) и (9.13), откуда:

$$A^* = -\frac{(p_a - p_b) a^2 b^2}{b^2 - a^2};$$

$$C = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}$$

и, окончательно, для σ и σ_r получим прежние выражения (9.16) — (9.17).

Заметим, что если бы в диске, равномерно обжимаемом снаружи, внутреннего отверстия не было, то в диске по всем направлениям возникали бы напряжения p . Таким образом, для сплошного диска, подверженного снаружи равномерному давлению, «булавочный прокол увеличивает напряжение у поверхности прокола вдвое» против случая отсутствия такого ослабления.

Разобранное выше решение принадлежит Ляме. Первое практическое приложение этого решения и значительное его развитие получено в России в трудах А. В. Гадолина в связи с расчетом на прочность стволов артиллерийских орудий.

При решении этой задачи было сделано допущение, что постоянная $B=0$. Можно доказать, что это допущение соответствует действительности.

Особенность этой задачи заключается в том, что мы здесь встречаемся с двухсвязным контуром, так как сечение трубы ограничено двумя замкнутыми кривыми, не пересекающимися между собой. При наличии двухсвязного или многосвязного контура решение задачи вообще осложняется и возможна многозначность решения.

Условию $B \neq 0$ физически соответствует случай наличия начальных напряжений в диске, вызванных, например, тем, что небольшая часть кольца между двумя смежными сечениями была вырезана, а затем концы диска сведены и спаяны*. В данной задаче затруднение можно обойти, выбрав решение задачи не в напряжениях, а в перемещениях.

§ 9.04. Основные уравнения для плоской задачи в полярных координатах (решение в напряжениях)

Приведем без вывода основные уравнения теории упругости в полярных координатах для общего случая деформации тела, когда присутствуют и касательные напряжения $\tau_{\theta\phi}$. Вывод этих формул не должен вызвать принципиальных затруднений у читателя, и ему рекомендуется это выполнить в порядке самостоятельного упражнения.

Итак, применительно к обозначениям фиг. 9.01, если спроектировать все силы на направление радиуса и на перпендикулярное к нему направление, то после отбрасывания бесконечно малых высших порядков получим аналогично дифференциальным уравнениям равновесия в декартовых координатах (8.01) следующие выражения:

* См. [2] на стр. 191, а также [65]*, [100]*, [119]*.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0 \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (9.23)$$

где R — объемная сила, отнесенная к единице объема и предположенная действующей только в радиальном направлении.

Если составляющие перемещения точки в радиальном и тангенциальном направлениях обозначить через u и v , то соответствующие этим направлениям деформации запишутся следующим образом:

относительное удлинение в радиальном направлении

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad (9.24)$$

то же в тангенциальном направлении

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta}; \quad (9.25)$$

деформация сдвига

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (9.26)$$

Функцию напряжений, удовлетворяющую условию (8.12)

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0,$$

можно применять и при таком координатном исчислении.

Так как между декартовыми и полярными координатами имеются зависимости

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ и } \theta = \arctg \frac{y}{x},$$

то, учитывая их и подставляя в (8.12) вытекающие из них соотношения, после ряда преобразований придем к следующему уравнению неразрывности деформаций в полярных координатах:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (9.27)$$

Зависимости напряжений от функции напряжений имеют следующий вид (при отсутствии объемной силы):

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right).\end{aligned}\tag{9.28}$$

В справедливости выражений (9.28) можно легко убедиться, подставив формулы (9.28) в уравнение (9.27), которое удовлетворяется.

Если распределение напряжений симметрично относительно оси, проходящей через точку O и перпендикулярной к плоскости деформации, то компоненты напряжений не зависят от угла θ и являются функциями одного лишь r . В таком случае уравнение (9.27) и выражения (9.28) существенно упрощаются.

Так функция напряжений, удовлетворяющая условию

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0,$$

где в рассматриваемом случае

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

может быть записана сразу, а именно:

$$\varphi = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D.$$

Для компонентов напряжений соответственно получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C, \\ \tau_{r\theta} &= 0.\end{aligned}\tag{9.29}$$

Постоянные интегрирования в каждой конкретной задаче будут определяться в зависимости от поверхностных условий.

Можно рекомендовать читателю использовать высказанные замечания и проверить решения, полученные в § 9.03.

§ 9.05. Некоторые частные случаи начертания функции напряжений и примеры использования

Представим случай полукруглой пластинки (фиг. 9.05 а) и зададимся функцией напряжений в виде

$$\varphi = Cr^2\theta.\tag{a)}$$

Такая функция напряжений может существовать, так как подстановка (а) в (9.27) не приводит к противоречиям (условие неразрывности деформации выполняется точно).

Используя (9.28), получаем формулы для напряжений:

$$\sigma_r = 2C\theta, \quad \sigma_\theta = 2C\theta, \quad \tau_{r\theta} = C. \quad (б)$$

Контурные нагрузки, отвечающие (б), показаны на фиг. 9.05 б (обратно-симметричное нагружение).

В качестве использования решения (б) можно рассмотреть такую, как в этом убедится читатель позже, важную задачу, когда на полубесконечную пластинку (т. е. пластинку, бесконечного протяжения в длину и бесконечно простирающуюся ниже открытого прямолинейного края), на ограниченном протяжении ее прямолинейного края действует равномерно-распределенная нагрузка плотностью q_0 , как это показано на фиг. 9.06 а.

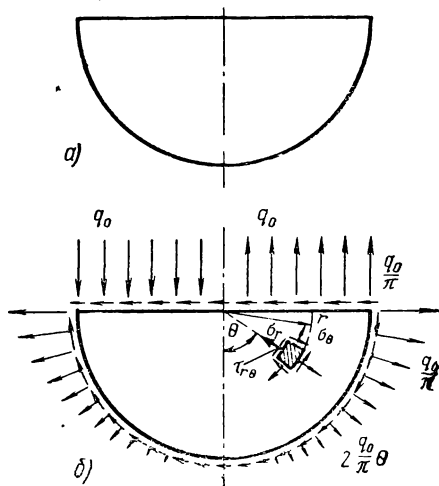
Заданную нагрузку можно представить разложенной на два частных нагружения, показанные на фиг. 9.06 а и б.

Действительно, на участке фактического нагружения прямолинейного края полубесконечной пластинки сложение нагрузок с фиг. 9.06 а и 9.06 б даст в итоге только вертикальную нагрузку плотностью q_0 (касательные силы с фиг. 9.06 а и фиг. 9.06 б взаимно уничтожатся), а на остальном протяжении вне нагруженного участка нагрузки не окажется.

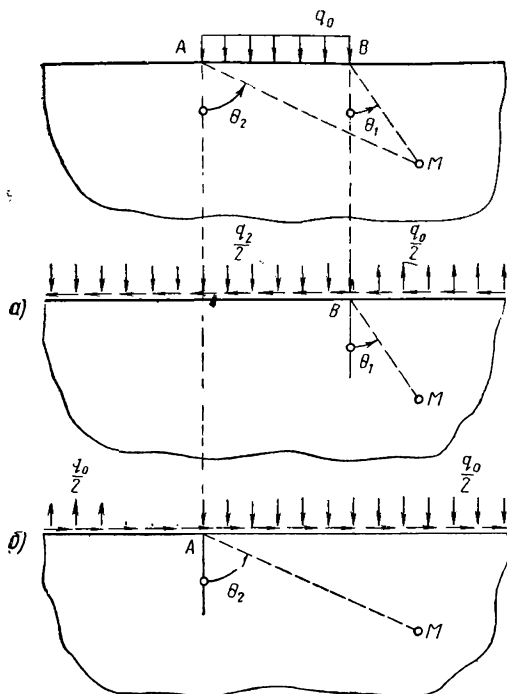
Таким образом, для напряжений в какой-либо точке M полубесконечной пластинки надлежащим образом следует сложить напряжения для частных случаев разложения нагрузки (фиг. 9.06 а и 9.06 б), используя готовые формулы для ранее разобранных случаев на фиг. 9.05.

Так, радиальное напряжение в точке M , имеющее направление MB для случая, показанного на фиг. 9.06 а, запишется:

$$\sigma_r^* = -2q_0\theta_1. \quad (в)$$



Фиг. 9.05 Случай плоского напряженного состояния (функция напряжений $\varphi = cr^{2\theta}$).



Фиг. 9.06 Частный случай нагружения полубесконечной пластинки. Разложение заданного нагружения на два составляющих, решения для которых известны ранее

Аналогично, для случая, показанного на фиг. 9.06 б, радиальное напряжение в той же точке M , но имеющее направление MA , запишется:

$$\sigma_r^{**} = -2q_0\theta_2. \quad (2)$$

Аналогично составятся выражения и для других компонентов напряжений.

Действительные напряжения получаются путем *надлежащего* объединения указанных частных решений, учитывая при этом, что выражения (в) и (2) записаны применительно к разным системам отсчета (в формуле (в) полюс предполагается в точке B , а для формулы (2) полюс в точке A).

В таких случаях рекомендуется от компонентов напряжений, записанных в полярных

координатах (σ_r^* , ... и σ_r^{**} , ...) перейти к компонентам напряжений в декартовых координатах (σ_x^* , ... σ_x^{**} , ...) и уже далее произвести обычное алгебраическое сложение, т. е.

$$\sigma_x = \sigma_x^* + \sigma_x^{**}, \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим еще один частный случай, который будет в дальнейшем использован. Пусть объектом внимания будет круговое кольцо с внутренним радиусом a и наружным — b (фиг. 9.07а).

Зададимся функцией напряжений в виде

$$\varphi = \left(Ar^2 + C \frac{1}{r^2} + D \right) \cos 2\theta. \quad (a)$$

Читателю рекомендуется убедиться самостоятельно, что такая функция действительно может быть функцией напряжений, так как подстановка ее в (9.27) приводит к тождеству при соблюдении определенных соотношений между A, C, D . Рекомендуется рассмотреть читателю случай, когда отношение $\frac{a}{b}$ стремиться к нулю (т. е. или отверстие бесконечно малого диаметра, или наружный диаметр предполагается бесконечно большой).

Если для дальнейшего положить внутренний контур свободным от нагрузки, т. е. $(\sigma_r)_{r=a} = (\tau_{r\theta})_{r=a} = 0$, то соотношения между постоянными A, C, D оказываются:

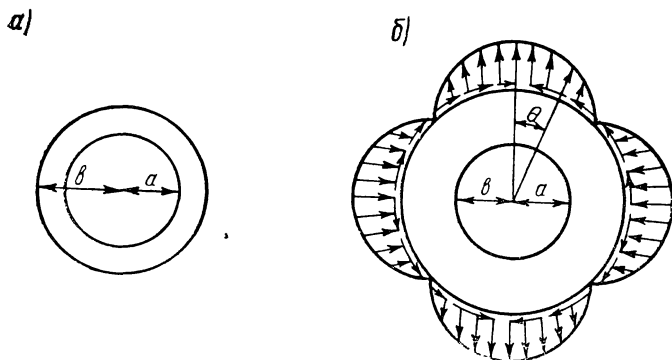
$$C = Aa^4, \quad D = -A2a^2.$$

Окончательные выражения для радиальных и касательных сил на наружном контуре оказываются

$$(\sigma_r)_{r=b} = k \cdot \cos 2\theta;$$

$$(\tau_{r\theta})_{r=b} = -k \sin 2\theta,$$

где через k обозначены амплитудные значения упомянутых составляющих. Эскиз такого нагружения изображен на фиг. 9.07б!



Фиг. 9.07. Частный случай нагружения кругового кольца.

Примечание. Краткие выводы по главе и литература приведены ниже для глав 8–10.

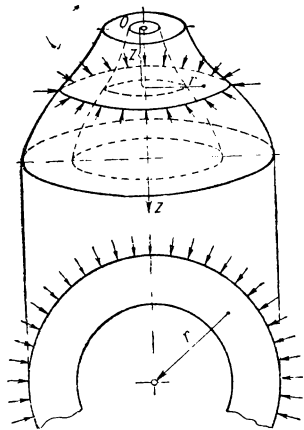
ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

§ 10.01. Основные уравнения

Представим себе тело вращения, к которому приложены силы, расположенные симметрично относительно оси этого тела (фиг. 10.01). Примерами могут быть круглый цилиндр, усеченный конус, деформирующийся под действием равномерного внутреннего или наружного давления или сил, равномерно приложенных по торцевым сечениям, и подобные тела.

За ось вращения примем ось z , ось же, перпендикулярную к первой, обозначим через r . Двух координат z и r вполне достаточно, так как все точки с одинаковыми такими координатами находятся в одинаковых условиях.

Так как каждая меридиональная плоскость zOr представляет плоскость симметрии как в отношении формы, так и в отношении нагрузки тела, то в меридиональных плоскостях касательных напряжений быть не может. Поэтому для каждой точки тела, расположенной на меридио-



Фиг. 10.01 Тело вращения с симметричным относительно оси распределением напряжений

нальной плоскости, площадку, в ней взятая, является главной площадкой рассматриваемого напряженного состояния. Главное напряжение, действующее по этой площадке, обозначим через σ_θ .

Кроме меридионального сечения, через точку с координатами z, r проведем еще второе сечение, перпендикулярное к оси z , и третье сечение, перпендикулярное к двум первым. Следы этих двух новых секущих плоскостей на меридиональной плоскости будут параллельны соответственно осям r и z .

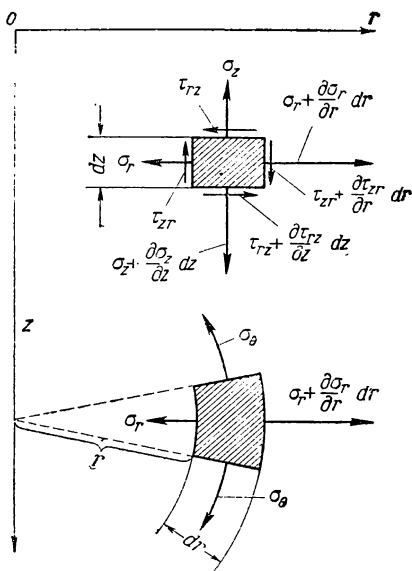
Вследствие симметрии в обеих секущих плоскостях, в точке z, r могут действовать лишь такие касательные напряжения, которые параллельны меридиональной плоскости (фиг. 10.02). Нормальные напряжения, действующие в секущих плоскостях, обозначим через σ_z и σ_r , касательные — через τ_{rz} и τ_{zr} . Эти напряжения, очевидно, надо считать функциями от z и r .

Указанные выше условия задачи характеризуют случай, когда основные уравнения упругого равновесия, как это показывается ниже, можно представить в такой же простой форме, как и в случае плоской задачи, и потому можем ограничиться рассмотрением соотношений, имеющих место для точек одной и той же плоскости.

Собственный вес и другие массовые силы в дальнейшем из рассмотрения исключаем.

Проектируя все усилия, принадлежащие элементарному объему (показанному на фиг. 10.02), на оси z и r , имеем уравнения равновесия в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} r \cdot d\theta \cdot dz \cdot dr - \tau_{zr} \cdot r \cdot d\theta \cdot dz + \left(\tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta \cdot dz = 0, \\ - \sigma_r \cdot r d\theta \cdot dz + \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta \cdot dz + \\ + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dz \cdot r \cdot d\theta \cdot dr - \sigma_\theta dr \cdot dz \cdot d\theta = 0. \end{aligned}$$



Фиг. 10.02 Проекция элемента в цилиндрических координатах

После сокращения на общего множителя $drdzd\theta$ имеем:

$$r \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \tau_{zr} + r \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} = 0,$$

$$\sigma_r + r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \sigma_\theta = 0.$$

Более компактно статические уравнения запишутся:

$$\boxed{\begin{aligned} r \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{zr}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r) - \sigma_\theta + r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} &= 0. \end{aligned}} \quad (10.01)$$

Обозначая упругие перемещения точки (z, r) в направлении оси z через w , в направлении радиуса через u (в тангенциальном направлении перемещение отсутствует), геометрические уравнения для данного случая можем представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r}, & \gamma_{rz} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (10.02)$$

Наконец, физические уравнения представятся согласно (4.02)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= 2G \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \theta; \\ \sigma_r &= 2G \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \theta; \\ \sigma_\theta &= 2G \frac{u}{r} + \lambda \theta; \\ \tau_{rz} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \end{aligned} \right\} \quad (10.03)$$

где обозначено $\theta = \varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_\theta$.

§ 10.02. Решение задачи в перемещениях

Объемное расширение

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}$$

может быть переписано иначе или в виде:

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) u,$$

или так

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial z} + Du, \quad (10.04)$$

где под D надо понимать обозначение следующей операции:

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right).$$

Подставляя (10.04) в физические уравнения (10.03), а далее в уравнения равновесия (10.01), придаем последним вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} D \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{2(1-\mu)} \frac{\partial}{\partial z} Du = 0; \quad (10.05)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} Du + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial r \cdot \partial z} = 0. \quad (10.06)$$

Таким образом, задача определения напряжений в теле вращения, нагруженном симметрично относительно оси, сводится к нахождению двух функций w и u , которые должны удовлетворять в каждой точке уравнениям (10.05) и (10.06) и одновременно граничным условиям на поверхности тела.

Если, кроме того, ввести оператор D^2 , положив

$$D^2 = \frac{\partial}{\partial r} D = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right),$$

то из уравнений (10.05) и (10.06), исключая из них w , дифференцируя (10.05) по z и r и подставляя $\frac{\partial^2 w}{\partial r \cdot \partial z}$ из (10.06), получим:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2D^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + D^2 D^2 u = 0, \quad (10.07)$$

что можно записать короче:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + D^2 \right]^2 u = 0. \quad (10.07a)$$

Аналогично можно составить дифференциальное уравнение четвертого порядка, которому должно удовлетворять перемещение w , если к уравнению (10.06) сначала применить операцию $\frac{\partial}{\partial z} D$, а затем вставить $\frac{\partial}{\partial z} Du$ из уравнения (10.05).

После простых вычислений это даст:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} D \frac{\partial w}{\partial z} + \left(D \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 w = 0. \quad (10.08)$$

§ 10.03. Решение задачи в напряжениях

Установленные в § 7.02 синтезирующие уравнения теории упругости в напряжениях (иначе говоря, уравнения неразрывности деформаций, выраженные через напряжения), написанные в декартовых координатах, можно преобразовать к цилиндрическим координатам.

Для этой цели, очевидно, надлежит выразить напряжения σ_r и σ_θ через σ_x и σ_y по известным формулам перехода

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta, \quad \sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta,$$

заменив запись суммы другой:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = \sigma,$$

но учесть, что σ_r и σ_θ не зависят от угла θ , тогда как σ_x и σ_y являются функциями θ .

Опуская преобразования*, запишем окончательные результаты для уравнений совместности, которых ввиду осесимметричного характера деформаций останется четыре:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} &= 0; \\ \nabla^2 \sigma_\theta + \frac{2}{r^2} (\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{1}{1 + \mu} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} &= 0; \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= 0; \\ \nabla^2 \tau_{rz} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} + \frac{1}{1 + \mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r \cdot \partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10.09)$$

где введен символ

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (10.10)$$

Заметим, что одновременно с уравнениями неразрывности должны быть удовлетворены уравнения равновесия (10.01) и условия на контуре.

§ 10.04. Функции напряжений при осесимметричной деформации

Подобно тому, как в плоской задаче теории упругости удалось все компоненты напряжений выразить через одну функцию напряжений, так и в разбираемом осесимметричном пространственном случае имеется такая же возможность.

* Они подробно приведены в книге проф. Б. Н. Жемочкина. Теория упругости, стр. 128—132, Стройвоенмориздат, М., 1948.

В самом деле, если задаться:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \mu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \mu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right],\end{aligned}\quad (10.11)$$

где по-прежнему

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right),$$

а φ — произвольная функция, и подставить (10.11) в первое уравнение равновесия (10.01), то оно обратится в тождество. Второе уравнение равновесия и все уравнения неразрывности будут удовлетворены, если принять φ согласно уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (10.12)$$

или короче

$$\nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = 0. \quad (10.12a).$$

Можно подобрать много решений уравнения (10.12). Вот некоторые из них:

$$\varphi = C_1 \ln r + C_2 z \ln r + C_3 z^2 \ln r + C_4 z^3 \ln r, \quad (10.13)$$

$$\varphi = C_1 z + C_2 r^2 + C_3 z^2 + C_4 r^2 z + C_5 z^3. \quad (10.14)$$

Так как эти начертания φ удовлетворяют уравнению (10.12) при любых значениях коэффициентов C , следовательно, любой член их также удовлетворяет уравнению (10.12)

$$\varphi = C (r^2 + z^2)^n, \quad (10.15)$$

где

$$n = -\frac{1}{2}, \quad 1, \quad +\frac{1}{2};$$

$$\varphi = C (r^2 + z^2)^n z, \quad (10.16)$$

где

$$n = -\frac{3}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad 1;$$

$$\varphi = C \left[(r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} z^2 - \frac{1}{3} (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right]; \quad (10.17)$$

$$\varphi = C(3r^4 - 8z^4); \quad (10.18)$$

$$\varphi = C(3r^2 - 2z^2)z^2; \quad (10.19)$$

$$\varphi = C(r^2 - 4z^2)r^2; \quad (10.20)$$

$$\varphi = Cz \ln \left(\frac{Vr^2 + z^2 - z}{Vr^2 + z^2 + z} \right). \quad (10.21)$$

§ 10.05. Дополнительные замечания. Температурные задачи

Если в числе прочих, вызывающих напряженное и деформированное состояния тела, является возникновение температурного поля, в общем случае неравномерного вдоль координаты Z и вдоль радиуса r , т. е.

$$T = T(z, r),$$

то надлежит внести дополнения в ранее приведенные физические уравнения (10.03), а именно, они должны быть записаны [(по аналогии с (7.05), но в цилиндрических координатах] следующим образом:

$$\sigma_z = 2G \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \theta - \eta T; \quad (10.22)$$

$$\sigma_r = 2G \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \theta - \eta T; \quad (10.23)$$

$$\sigma_\theta = 2G \frac{u}{r} + \lambda \theta - \eta T, \quad (10.24)$$

где, для краткости письма, введено обозначение:

$$\eta = 2G\alpha \frac{1-\mu}{1-2\mu}$$

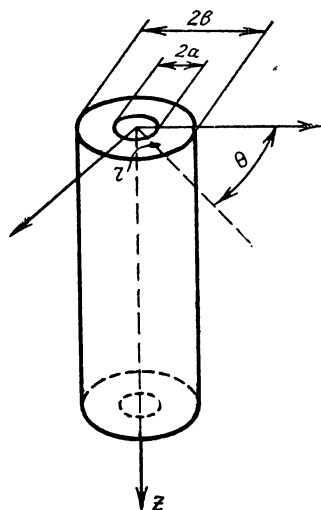
и прежнее

$$\theta = \epsilon_z + \epsilon_r + \epsilon_\theta. \quad (10.25)$$

В качестве примера рассмотрим длинную толстостенную трубу (фиг. 10.03) с радиальным перепадом температур, т. е. считается заданным

$$T = T(r). \quad (10.26)$$

Пренебрегая влиянием торцов, можно считать, что все сечения трубы, перпендикулярные к ее оси, остаются плоскими и все работают в одинаковых условиях. Таким образом, радиальное перемещение u зависит только от r , пере-



Фиг. 10.03 К расчету температурных напряжений в цилиндрической толстостенной оболочке

мещение v в направлении θ отсутствует, относительное удлинение по направлению оси z следует считать постоянным, т. е.

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \text{const.} \quad (10.27)$$

Для относительных удлинений в радиальном и тангенциальном направлениях, очевидно, возможно использовать известные из § 9.02 соотношения (9.03), (9.04), т. е.

$$\epsilon_z = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (10.28)$$

Очевидно в рассматриваемой задаче сохраняется известное в задаче о толстостенном кольце уравнение равновесия (9.02), т. е.

$$\sigma_r - \sigma_\theta + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (10.29)$$

Использование (10.27), (10.28) в (10.25) и далее в (10.22), (10.23) и (10.24) с последующей подстановкой в (10.29) приводит к разрешающему уравнению следующего вида:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{(1+\mu)}{1-\mu} \alpha \frac{dT}{dr}. \quad (10.30)$$

При постоянной вдоль радиуса r температуре, т. е. при отсутствии перепада температур, уравнение (10.30) обращается в дифференциальное уравнение (9.10) с известным интегралом (9.11).

Решением (10.30) является выражение, отличное от (9.11) за счет температурного члена, а именно, в данном случае его можно представить в виде:

$$u = Ar + \frac{B}{r} + \frac{1-\mu}{r} \alpha \int_a^r T(\rho) \rho \cdot d\rho. \quad (10.31)$$

Далее, очевидно, (10.31) надлежит подставить в (10.23—10.24), а для определения постоянных A , B и $\epsilon_z = \frac{dw}{dz}$ использовать граничные условия. Так, если внутренняя и наружная поверхности трубы свободны, то, следовательно:

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0, \quad (\sigma_r)_{r=b} = 0. \quad (10.32)$$

Если труба не имеет осевой нагрузки, то

$$\int_a^b \sigma_z 2\pi r dr = 0. \quad (10.33)$$

Использование (10.32) и (10.33) полностью решает поставленную задачу.

Приведем без промежуточных выкладок окончательные выражения для напряжений на внутренней и наружной поверхности трубы для случая, когда на этих поверхностях поддерживаются постоянные температуры T_a и T_b и, следовательно, для такого установившегося потока распределение температур по толщине стенки выражается формулой:

$$T = \frac{T_a \ln \frac{b}{a} + T_b \ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}}. \quad (10.34)$$

Тогда на внутренней и наружной поверхностях:

$$(\sigma_\theta)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=a} = \frac{E\alpha(T_b - T_a)}{1 - \mu} \cdot \left[\frac{b^2}{b^2 - a^2} - \frac{1}{2 \ln \frac{b}{a}} \right] \quad (10.35)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=b} = (\sigma_z)_{r=b} = \frac{E\alpha(T_b - T_a)}{1 - \mu} \left[\frac{a^2}{b^2 - a^2} - \frac{1}{2 \ln \frac{b}{a}} \right]. \quad (10.36)$$

Для тонкостенной трубы, когда отношение $\frac{b}{a}$ близко к единице, формулы (10.35), (10.36) приближенно можно записать так:

$$(\sigma_\theta)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=a} = \frac{E\alpha(T_b - T_a)}{2(1 - \mu)}, \quad (10.37)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=b} = (\sigma_z)_{r=b} = - \frac{E\alpha(T_b - T_a)}{2(1 - \mu)}. \quad (10.38)$$

§ 10.06. Краткие выводы по главам 8—10

1. Для плоского напряженного состояния и для плоской деформации, т. е. для так называемой плоской задачи теории упругости, количество исходных уравнений значительно уменьшается (до семи), а если нас интересует только поле напряжений, то задача теории упругости сводится только к трем уравнениям, а именно: к двум уравнениям равновесия и к одному условию неразрывности деформации (выраженному через напряжения). Эти уравнения при отсутствии объемных сил в декартовых координатах записываются так:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0;$$

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

2. Функции для компонентов напряжений в случае плоской задачи могут быть выражены через функцию напряжений, а именно (при отсутствии объемных сил) — при использовании декартовых координат:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Сама же функция напряжений является бигармонической, т. е. удовлетворяет условию

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0,$$

где оператор ∇^2 — иначе «лапласова операция» — имеет начертание, характерное для декартовых координат, т. е.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

3. В случае плоской задачи, но решаемой в полярных координатах, также возможно обратиться к услугам функций напряжений, которая также является бигармонической, но оператор ∇^2 (см. 9.27) и запись компонентов напряжений через разрешающую функцию (см. 9.28) имеют начертания специфические при использовании полярных координат.

4. В случае, когда исследуемый объект является телом вращения, подверженным осесимметричному воздействию, оказывается возможным, как и в плоской задаче, все компоненты напряжений также выразить через разрешающую функцию, удовлетворяющую условию бигармоничности, т. е.

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0,$$

где оператор ∇^2 имеет конституцию, характерную для цилиндрических координат, т. е. $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$.

Литература к главам 8, 9, 10

1. Жемочкин Б. Н. Теория упругости. Стройвоенмориздат, 1947.
2. Никифоров С. Н. Теория упругости и пластичности. Госстройиздат, М., 1953.

3. Серенсен С. В. Основы технической теории упругости (применительно к расчетам прочности в самолетостроении), Х. — К., 1934.
 4. Шапиро Г. С. Пространственные задачи теории упругости. Статья в сборнике «Механика в СССР за тридцать лет», Гостехиздат, 1950.
 5. Шапиро Г. С., Напряжения у отверстия в бесконечном клине. Труды Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина, № 3, 1941.
 6. Шерман Д. И. Основные плоские и контактные (смешанные) задачи статической теории упругости. Статья в сборнике «Механика в СССР за тридцать лет», Гостехиздат, 1950.
-

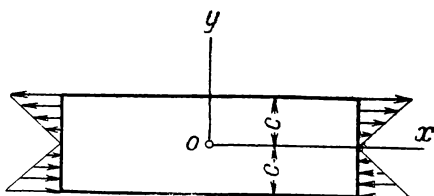
НЕКОТОРЫЕ ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 11.01. Задача о чистом изгибе.

Случай применимости элементарных решений

К числу задач сопротивления материалов, оправдываемых точным решением теории упругости, помимо очевидной задачи о чистом, т. е. одноосном растяжении — сжатии, относятся также задачи о сопротивлении чистому изгибу и чистому кручению, а также некоторые простейшие случаи поперечного изгиба. Начнем с рассмотрения случая чистого изгиба.

Для случая пластинки, имеющей узкое прямоугольное сечение и изгибаемой двумя парами с моментами M , приложенными к торцевым сечениям (фиг. 11.01), как известно, сопротивление материалов дает следующие решения:



Фиг. 11.01 Случай чистого изгиба

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y; \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad (a)$$

где I — экваториальный главный момент инерции сечения, т. е. $I = \frac{2bc^3}{3}$, если b — толщина пластинки, а $2c$ — ее высота.

Так как выражения для напряжений — линейные относительно координат, то уравнение неразрывности деформации

(8.06) удовлетворяется независимо от коэффициентов, стоящих при координатах, и потому достаточно проверить только уравнения равновесия и условия на контуре. Подставляя (а) в (8.07) и полагая собственный вес равным нулю (иначе рассматриваемый случай не был бы задачей о чистом изгибе), имеем тождества:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} - q = -q = 0.$$

На верхней и нижней гранях (при $y = \pm \frac{h}{2}$)

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0,$$

на боковых гранях (при $x = \pm \frac{l}{2}$)

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y; \quad \tau_{xy} = 0,$$

т. е. по торцам бруса действуют нормальные усилия, распределенные по линейному закону, равнодействующая которых

$$N = \int_F \sigma_x \cdot dF = \frac{M}{I} \int_F y dF = 0,$$

т. е. равна нулю, и потому указанные усилия приводятся к паре

$$\int_F \sigma_x y dF = \frac{M}{I} \int_F y^2 dF = \frac{M}{I} I = M.$$

Условие неразрывности деформации (8.07) удовлетворяется в данном случае автоматически, так как

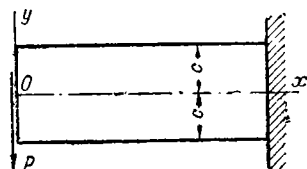
$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0.$$

Итак, известный из курса сопротивления материалов закон распределения напряжений при чистом изгибе оправдывается полностью *при условии*, что указанные в задаче концевые моменты представлены силами, распределенными по торцевым сечениям именно по линейному закону. Если приложение этих пар будет осуществлено как-либо иначе, то распределение напряжений будет другим, более сложным и переменным по длине бруса. Но, как показывает опыт, а также и точное решение задачи для других возможных случаев приложения внешних воздействий по торцам, перераспределение напряжений в отличие от (а) будет наблюдаться только в

непосредственной близости от концов балки, а во всем остальном закон распределения напряжений практически будет согласен с формулами (а).

Не представит затруднений также показать, что при чистом изгибе оказывается справедливым и так называемый в теории сопротивления материалов *закон плоских сечений*. Для этой цели надлежит выполнить переход от напряжений к деформациям, согласно (4.01) и от деформаций к смещениям на основании (3.08).

Другой задачей, где элементарное решение сопротивления материалов оказывается приемлемым и с точки зрения математической теории упругости, является случай изгиба консоли сосредоточенной силой P на конце (фиг. 11.02)



Фиг. 11.02 Поперечный изгиб консоли

Как известно, сопротивление материалов для этого случая дает решение:

$$\sigma_x = \frac{M}{J} y = \frac{Px}{J} y, \quad \sigma_y = 0,$$

$$\tau_{xy} = \frac{QS}{Jb} = \frac{P(h^2 - 4y^2)}{8J}.$$

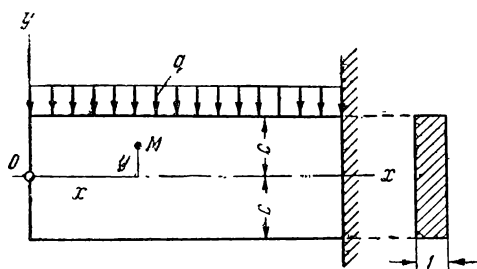
Подстановка этих выражений уравнения (8.07) приводит к тождеству, в чем рекомендуется убедиться читателю самостоятельно.

Для полного соответствия уравнениям теории упругости необходимо, чтобы на левом торцевом сечении сила P была распределена *именно* по указанному параболическому закону касательных напряжений.

Если, однако, продолжить решение этой задачи и от напряжений перейти к перемещениям, то окажется, что первоначально (до деформации) плоские поперечные сечения балки в процессе деформации не остаются плоскими, а искривляются (или, как называют это явление — *депланируют*).

А так как на правом конце депланации поперечного сечения вообще не может быть (если прикрепление этого конца осуществлено путем защемления сечения по всей высоте), то вследствие стеснения деформации опорного сечения закон распределения напряжений в этом сечении и в небольшой области вблизи защемления будет все же иным, чем дают приведенные выше элементарные формулы сопротивления материалов.

§ 11.02. Задача об изгибе консоли равномерно распределенной нагрузкой



Фиг. 11.03 Пример поперечного изгиба

Пусть балка узкого прямоугольного сечения с шириной, равной единице, закреплённая одним концом в стену, изгибается равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q , как показано на фиг. 11.03. Данный случай относится к обобщенному плоскому напряженному состоянию.

В качестве первой попытки решения такой задачи примем результаты, известные из сопротивления материалов, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M}{J} y = \frac{qx^2}{2J} y; \quad \sigma_y = 0; \\ \tau_{xy} &= \frac{QS}{Jb} = \frac{q}{2J} (c^2 - y^2) x, \end{aligned} \right\}, \quad (a)$$

в основе которых лежала так называемая гипотеза плоских сечений.

Выпишем еще раз группу уравнений (8.07), которым должно удовлетворять точное решение (собственный вес исключаем):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0, \\ \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Записываем частные производные, входящие в (б), используя для этой цели временно (а):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= \frac{qxy}{J}, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{qyx}{J}, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} &= \frac{q}{2J} (c^2 - y^2), \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (в)$$

Подставляя (в) в (б), устанавливаем, что первое уравнение удовлетворяется, так как

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y},$$

хотя отсюда не следует непременно, что функции σ_x и τ_{xy} , заимствованные из (а), точны; это лишь указывает, что производные от них, участвующие в (б), удовлетворяют первому уравнению равновесия, но сама функция σ_x может иметь, например, такой вид:

$$\sigma_x = \frac{q\lambda^2}{2J} y + f_1(y), \quad (2)$$

где $f_1(y)$ — неизвестная на-пока функция от y .

В дальнейшем показано, что такая функция для данной задачи существует и она является следствием того, что поперечное сечение бруса при изгибе искривляется — выходит из плоскости (*депланирует*).

Второе уравнение, очевидно, не удовлетворяется, так как в элементарном решении пренебрегали надавливанием продольных волокон друг на друга, но из этого же второго уравнения вытекает следующее соотношение:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}, \quad (3)$$

и если надеяться, что функция для τ_{xy} выбрана правильно, то

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = - \frac{q}{2J} (c^2 - y^2). \quad (4)$$

Интегрируя (4), имеем:

$$\sigma_y = - \frac{q}{2J} \left(c^2 y - \frac{y^3}{3} \right) + f_2(x), \quad (5)$$

где $f_2(x)$ — неизвестная на-пока функция координаты x .

Постараемся определить вид функции $f_2(x)$. Для этой цели используем граничные условия по горизонтальным (верхней и нижней) кромкам, а именно: при любом значении x и при $x=c$ имеем $\sigma_y = -q$, а при $y = -c$ имеем $\sigma_y = 0$. Подставляя эти граничные условия, получим:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_y)_{y=-c} &= - \frac{q}{2J} \left(-c^3 + \frac{c^3}{3} \right) + f_2(x) = 0. \\ (\sigma_y)_{y=c} &= - \frac{q}{2J} \left(c^3 - \frac{c^3}{3} \right) + f_2(x) = -q. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Из (6) с очевидностью вытекает, что $f_2(x)$ не может заключать координаты x и, следовательно, $f_2(x) = C$. Из

первого и второго выражений (з) следует одно и то же значение постоянной C (что подтверждает правильность указанных выше суждений о том, что $f_2(x)$ есть постоянное число), именно:

$$C = -\frac{q}{2}. \quad (u)$$

Используем третье уравнение (б), принимая для σ_x начертания более полное (з) и для σ_y — обнаруженное (ж). Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x^2} &= \frac{q y}{J}, \quad \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = f_1''(y), \quad \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} &= \frac{q y}{J}. \end{aligned} \right\} \quad (к)$$

Итак,

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{q y}{J} + f_1''(y) + \frac{q y}{J} = 0.$$

Из (к) следует:

$$f_1''(y) = -\frac{2q y}{J},$$

откуда

$$f_1'(y) = -\frac{q y^2}{J} + C_1; \quad (л)$$

$$f_1(y) = -\frac{q y^3}{3J} + C_1 y + C_2.$$

Итак, имеем следующую прокорректированную запись для компонента σ_x :

$$\sigma_x = \frac{q x^2 y}{2J} - \frac{q y^3}{3J} + C_1 y + C_2. \quad (м)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 , входящих в формулу для σ_x , заметим следующее: по записанному выше выражению (м) при $x=0$ (т. е. на левом конце) нормальные напряжения не обращаются в нуль, как это должно быть (в действительности на левом конце продольных усилий не приложено). Согласно (м) имеем:

$$(\sigma_x)_{x=0} = -\frac{q y^3}{4J} + C_1 y + C_2.$$

Однако, если эти напряжения (σ_x) на левом торце будут сводиться к взаимно уравновешивающейся системе сил, то

согласно принципу Сен-Венана (локальности) наличие таких сил практически не изменит закона распределения напряжений в балке против случая отсутствия таких сил (за исключением области балки в непосредственной близости от левого конца). Итак, поставим условием, что при $x=0$

$$\int_F \sigma_x dF = 0 \quad \text{и} \quad \int_F \sigma_x y dF = 0,$$

т. е. равнодействующая продольных усилий на левом торце и их момент равны нулю. Иначе говоря, *смягчим граничные условия на свободном торце бруса*. Итак, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-c}^{+c} \left[-\frac{qy^3}{3J} + C_1 y + C_2 \right] dy &= 0, \\ \int_{-c}^{+c} \left[-\frac{qy^3}{3J} + C_1 y + C_2 \right] y dy &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (u)$$

Интегрируя, получим:

$$2C_2c = 0, \quad -\frac{2qc^5}{15J} + C_1 \frac{2c^3}{3} = 0;$$

и, таким образом:

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{3}{10} \frac{q}{c}.$$

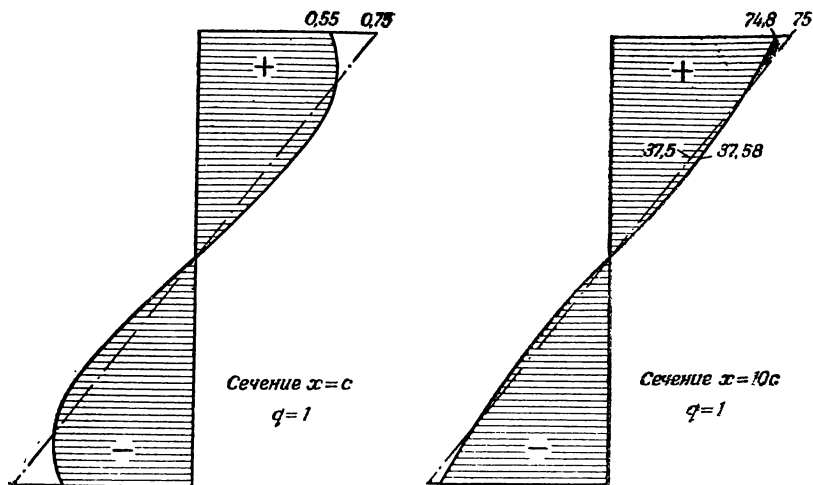
Окончательно имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{qx \cdot y}{2J} - \frac{q}{2J} \left[\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right]; \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{v}{c} - \frac{y^3}{2c^3} \right); \\ \tau_{xy} &= \frac{q}{2J} (c^2 - y^2) x. \end{aligned} \right\} \quad (11.01)$$

В полученном нами решении касательное напряжение τ_{xy} оказалось в точности соответствующим элементарной теории изгиба. Напряжения σ_x отличаются от даваемых элементарной теорией поправочным членом

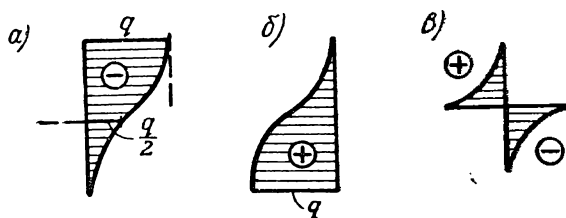
$$\frac{q}{2J} \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right). \quad (11.01a)$$

Член этот мал по сравнению с величиной σ_x , если только c мало по сравнению с l . Характер распределения напряже-



Фиг. 11.04 Характер распределения по высоте сечения нормальных напряжений σ_x согласно теории упругости. Пунктиром показано распределение нормальных напряжений согласно элементарной теории сопротивления материалов. Разница в эпюрах показана на фиг. 11.03

ний σ_x по высоте балки согласно (11.01) указан на фиг. 11.04. Эпюра σ_y изображена на фиг. 11.05а. Для других горизонтов приложения нагрузки (по нижней кромке балки или на уровне срединного слоя) эпюры σ_y будут, конечно, другими, как это показано на фиг. 11.05 б, в.



Фиг. 11.05 Эпюры σ_y (напряжения надавливания продольных волокон друг на друга). Случай приложения нагрузки по верхней кромке (а), по нижней кромке (б), на уровне срединного слоя (в)

В сечении балки, совпадающем с ее свободным концом, касательные напряжения отсутствуют, нормальные напряжения в сечении $x=0$, как это было указано выше, нулю не

равны, но нулю равны их главный вектор и момент.

Точное решение для рассмотренной балки должно поэтому отличаться от найденного (11.01), но за счет принципа локальности, т. е. ценой пренебрежения местными напряжениями в районе нагрузки, вполне уравниваемыми в пределах малой части исследуемого тела, решение (11.01), а при невысоких балках и более простое решение (а) практически могут быть приемлемы.

§ 11.03. Продолжение задачи

Представляет интерес проследить определение перемещений разобранной выше консольной балки после того, как найдены напряжения. В частности, пусть нас интересует уравнение изогнутой оси консоли (или, иначе, по терминологии в курсе сопротивления материалов — «упругой кривой»).

Для этой цели надлежит вначале на основании уравнений (4.01) от составляющих напряжений перейти к составляющим деформации. Имеем:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{xy}.\end{aligned}$$

Далее на основании геометрических соотношений (3.08)

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

можем записать:

$$\begin{aligned}u &= \int \epsilon_x dx + \varphi_1(y); \quad v = \int \epsilon_y dy + \varphi_2(x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \int \epsilon_x dx + \varphi_1'(y) + \frac{\partial}{\partial x} \int \epsilon_y dy + \varphi_2'(x),\end{aligned}$$

где $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(x)$ — произвольные функции (первая зависит только от координаты y , вторая — только от координаты x), для определения которых надлежит использовать кинематические условия, а именно, закрепление правого конца консоли, т. е. при $x=l$. В этом закреплении должно быть $u=0$ и $v=0$ для любых значений y .

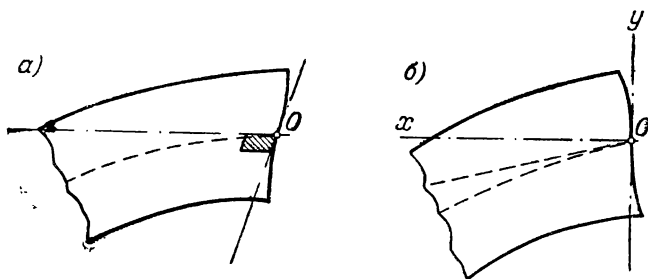
К сожалению, найденное ранее решение для напряжений не сможет удовлетворить этому, казалось бы, очевидному условию, так как условие оказывается больше (по числу точек в опорном сечении, т. е. бесконечности), чем число параметров разыскиваемых функций.

Поэтому приходится ограничиться требованием, чтобы оставалась неподвижной одна точка поперечного сечения, например, лежащая на оси бруса, т. е.

$$(u)_{x=l, y=0} = 0, \quad (v)_{x=l, y=0} = 0,$$

и далее обусловить, чтобы горизонтальный элемент оси, примыкающий к этой точке, был неподвижен и не поворачивался (фиг. 11.06а), т. е.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=l, y=0} = 0. \quad (n)$$



Фиг. 11.06 Два варианта закрепления опорного сечения в теории упругости

Впрочем, можно потребовать (и это более строго), чтобы не поворачивался вертикальный элемент в той же точке (фиг. 11.06б), т. е.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=l, y=0} = 0. \quad (p)$$

Принятие условия (p) взамен (n), конечно, изменит окончательный результат. Таким образом, перемещения будут различными на всем протяжении бруса в зависимости от того, примем ли условие (n) или (p).

Однако упомянутые сейчас различия в окончательных результатах в зависимости от принимаемого условия закрепления точки на оси бруса представляют скорее теоретический интерес. Для обычных (низких) балок разница между решением по условию (n) или по (p) оказывается пренебрежимо малой вообще; в смысле прогиба эти решения мало отличаются от того, что дается в курсах сопротивления материалов.

Разница в основном ложится на учет влияния сдвигов (влияние поперечной силы), которым по сравнению с влиянием изгибающих моментов на прогиб обычно пренебрегают в сопротивлении материалов.

Из рассмотрения фиг. 11.06 следует, что для получения полного закрепления опорного сечения (а не только неподвижного закрепления от смещения и поворота одной точки на оси бруса) потребуется приложение к этому сечению особых добавочных усилий. Иначе говоря, в месте полного защемления балки в стену и в непосредственной близости от этого сечения действительные напряжения должны описываться иными, более сложными законами, чем это записано в (11.01). Однако согласно принципу Сен-Венана влияние упомянутых дополнительных усилий должно сказаться лишь на небольшом участке около защемления балки; на всем остальном протяжении вполне пригодны будут уравнения (11.01).

§ 11.04. Другой вариант решения задачи об изгибе консоли

В § 11.02 задача об изгибе консоли была решена использованием вначале элементарного решения из курса сопротивления материалов, затем благодаря применению уравнений теории упругости упомянутое приближенное решение мы уточнили.

Решим ту же задачу, используя функцию напряжений.

Из рассмотрения различных вариантов (табл. на стр. 204) начертания функций напряжений и соответствующих им контурных условий можно заключить, что для случая консоли с равномерно распределенной нагрузкой по верхней кромке не может подойти ни одна из указанных там функций; не удовлетворит также и их комбинация (например, случаи 5 и 3, так как это не избавляет от касательных сил по левому торцу).

Однако, если комбинировать случаи 5 и 1 и разобранный на стр. 202, то при надлежащем подборе коэффициентов у функций напряжений можно получить нижнюю кромку пластинки, свободной от вертикальной нагрузки (соединяя случаи 1 и 5), а обе горизонтальные кромки — свободными от касательных сил (соединяя случаи 5 и разобранный ранее на стр. 202).

Итак, примем для функции напряжений начертание:

$$\varphi = ax^2 + bx^2y + cx^2y^3 + dy^5. \quad (a)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0,$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 120 \, d \cdot y,$$

$$2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} = 24 \, c y,$$

и используя (8.12), заключаем:

$$d = -\frac{1}{5} c,$$

теперь функция напряжений имеет вид:

$$\varphi = ax^3 + bx^2 y + c \left(x^2 y^3 - \frac{y^5}{5} \right). \quad (6)$$

Напряжения в этом случае будут:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c(6x^2 y - 4y^3),$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2a + 2by + 2cy^3,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \cdot \partial y} = -2bx - 6cxy^2.$$

Два соблюдения условий по верхнему и нижнему краям должны быть справедливы уравнения

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{xy})_{y=\frac{h}{2}} &= -2bx - \frac{3}{2} cxh^2 = 0, \\ (\tau_{xy})_{y=-\frac{h}{2}} &= -2bx - \frac{3}{2} cxh^2 = 0, \\ (\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}} &= 2a + bh + \frac{1}{4} ch^3 = -q, \\ (\sigma_y)_{y=-\frac{h}{2}} &= 2a - bh - \frac{1}{4} ch^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Первое и второе уравнения оказались тождественными (но в нашем случае для определения постоянных множителей достаточно именно трех условий). Решая систему (8), имеем:

$$a = -\frac{q}{4}, \quad b = -\frac{3}{4} \frac{q}{h}, \quad c = \frac{q}{h^3}.$$

Напряжения теперь запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{q}{h^3} (6x^2y - 4y^3), \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} - \frac{3q}{2h}y + \frac{2q}{h^3}y^3; \\ \tau_{xy} &= \frac{3}{2} \frac{q}{h}x - \frac{6q}{h^3}xy^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Однако, прежде чем на указанных формулах остановиться окончательно, надо проверить еще контурные условия на левом торце, где согласно заданию в любой точке $\tau_{xy} = \sigma_x = 0$. Подставляя в (2) $x = 0$, имеем:

$$\tau_{xy} = 0$$

и

$$\sigma'_x = -4 \frac{q}{h^3} y^3. \quad (\partial)$$

График изменения напряжения согласно (∂) показан на фиг. 11.7.

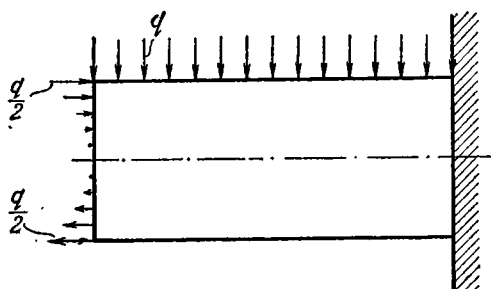
Очевидно, сумма усилий от σ'_x для всего левого торца равна нулю, так как

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma'_x dy = -4 \frac{q}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^3 dy = 0.$$

Но эти условия составляют пару с моментом:

$$M_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma'_x y dy = -4 \frac{q}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^4 dy = -\frac{qh^2}{20}.$$

Так как такого внешнего момента в действительности на левом торце не было, то для получения правильного решения рассматриваемой задачи необходимо на левом торце



Фиг. 11.07. Схема нагружения балки, отвечающая функции напряжений (а) со стр. 241

консоли приложить момент такого же значения, но противоположного направления. Наличие такого момента (случай чистого изгиба) не вызовет в балке напряжений σ_y и τ_{xy} , а напряжения σ_x'' могут быть подсчитаны по известной формуле сопротивления материалов (которая в случае чистого изгиба оправдывается и уравнениями теории упругости), а именно:

$$\sigma_x'' = -\frac{M_0}{I} y = 0,6 q \frac{y}{h}.$$

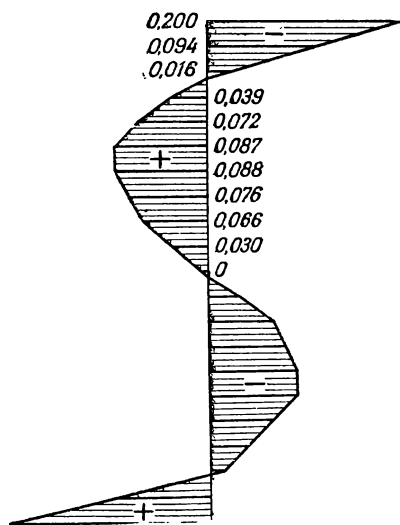
Таким образом, окончательными формулами для напряжений можно принять:

$$\sigma_x = \frac{q}{h^3} (6x^2y - 4y^3 + 0,6yh^2);$$

$$\sigma_y = -\frac{q}{2} \left(1 + 3 \frac{y}{h} - 4 \frac{y^3}{h^3} \right);$$

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{q}{h} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right) x,$$

что соответствует прежней записи (11.01).



Фиг. 11.08 Эпюра распределения по высоте взаимно-уравновешенных напряжений, получаемых в результате наложения решения (д) на решение чистого изгиба (фиг. 11.01)

Как это уже отмечалось ранее, формулы (11.01) не являются совершенно точными, так как соответствуют нескольким условиям загрузки, а именно, помимо заданных сил на левом торце также действуют напряжения, получающиеся в результате наложения эпюры (фиг. 11.07) на эпюру напряжений от чистого изгиба (фиг. 11.01). Но так как в результате такого наложения равнодействующая указанной разности сил и их момент равны нулю (фиг. 11.08), то согласно принципу локальности эффекта самоуравновешенных сил их эффект не будет иметь существенного значения вне области их непосредственного действия.

К тому же и напряжения, получившиеся у нас на левом торце, оказываются обычно несущественными и для само-

го сечения, где они приложены. В самом деле, эти напряжения определяются формулой:

$$\sigma_x^0 = -4q \frac{y^3}{h^3} + 0,6q \frac{y}{h}.$$

Наибольшего значения они достигают при

$$y = \pm \frac{h}{2}.$$

и составляют

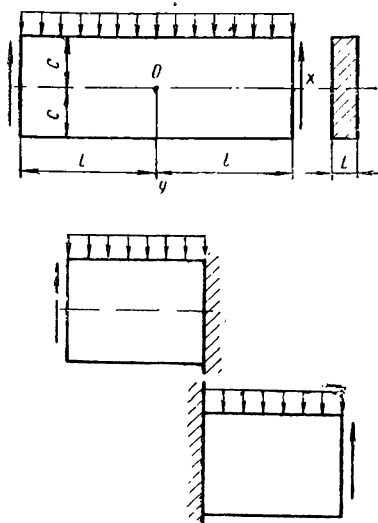
$$\max \sigma_x^0 = \pm 0,2q.$$

При длинных балках указанная величина напряжений во много раз меньше обычных напряжений в опасном сечении балки, но для высоких балок (балки-стенки) напряжения могут оказаться соразмерными и потому при расчете высоких балок пользование функциями напряжений в полиномах оказывается неэффективным.

§ 11.05. Изгиб балки на двух опорах под равномерно-распределенной нагрузкой

Выберем оси координат для обследуемой балки, как это указано на фиг. 11.09.

Решение указанной задачи (в смысле напряжений) можно получить просто путем сложения двух известных нам ранее решений, а именно — случай нагружения консоли сосредоточенной силой на свободном конце и случай нагружения консоли равномерной нагрузкой (§§ 11.01 и 11.02). Последняя возможность вытекает из тех соображений, что среднее сечение заданной балки ввиду симметричности ее загрузки будет оставаться плоским и потому каждую половину заданной балки можно уподобить консоли, показанной на фиг. 11.10 от сосредоточенной силы, каковую роль в данной задаче исполняет опорная реакция со значением ql .



Фиг. 11.09—11.10. Изгиб балки на двух опорах под равномерной нагрузкой (11.09) и представления каждой половины балки как консольной (11.10)

Напряжения определяются по элементарным формулам сопротивления материалов (см. § 11.01) с учетом направления координатных осей:

$$\sigma_x^* = \frac{M}{J} y = \frac{3}{2} \frac{ql(l-x)}{c^3} y;$$

$$\sigma_y^* = 0, \quad \tau_{xy}^* = \frac{QS}{Ib} = - \frac{3ql(c^2 - y^2)}{2c^3}.$$

От равномерно распределенной нагрузки на консоли напряжения определяются по формулам § 11.02 с заменой при новом координатном исчислении прежней координаты (в формулах § 11.02) x на $l-x$, т. е.

$$\sigma_x^{**} = \frac{q}{8c^3} [6(l-x)^2 y - 4y^3];$$

$$\sigma_y^{**} = - \frac{q}{2} - \frac{3q}{4c} y + \frac{2q}{8c^3} y^3;$$

$$\tau_{xy}^{**} = \frac{3}{4} \frac{q}{c} (l-x) - \frac{3}{4} \frac{q(l-x)y^2}{c^3}.$$

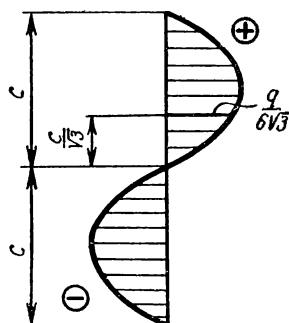
Таким образом, для рассматриваемой задачи с двухпорной балкой под равномерной нагрузкой будем иметь:

$$\sigma_x = \sigma_x^* + \sigma_x^{**};$$

$$\sigma_y = \sigma_y^* + \sigma_y^{**};$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^* + \tau_{xy}^{**}.$$

В порядке самостоятельного упражнения рекомендуем читателю исследовать напряженное состояние балки при изгибе ее собственным весом. Погонный вес балки — q .



Если читатель изберет путь решения этой задачи аналогично тому, как решалась задача в § 11.02, то для рассматриваемой задачи необходимо обратить внимание на наличие проекции объемной силы во втором дифференциальном уравнении равновесия, т. е.

$$Y_p = -q.$$

Решение такой задачи доставит читателю следующие результаты:

Фиг. 11.11. Эпюра σ_y для случая нагружения балки только собственным весом

$$\sigma_x = - \frac{3q}{4c^3} (l^2 - x^2) y - \frac{q}{2c} \left(\frac{2}{5} - \frac{y^2}{c^2} \right) y;$$

$$\sigma_y = \frac{q}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right) y; \quad (11.02)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3q}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right) x.$$

Заслуживает интереса закон распределения напряжений σ_y на высоте балки; он оказывается кубической параболой (фиг. 11.11).

§ 11.06. Треугольная подпорная стенка

Рассмотрим тело треугольного профиля, находящееся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния или в условиях плоской деформации (фиг. 11.12). К такой задаче часто сводится расчет каменных плотин, подпорных стенок укрепительных сооружений и т. п.

Для того чтобы исключить влияние особенностей связи тела плотины с основанием, будем считать стенку неограниченно простирающейся.

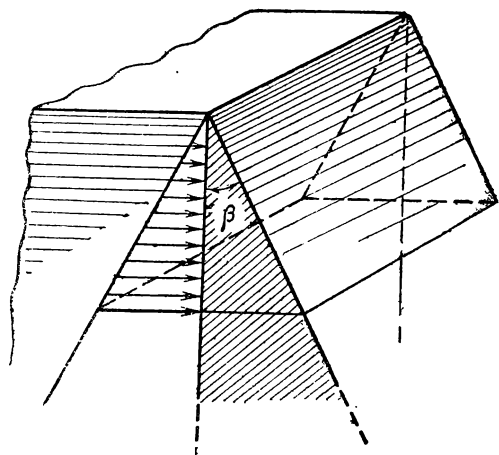
В качестве нагрузок примем две: давление воды (или земли или сыпучей массы) и собственный вес тела. Первое имеет горизонтальное направление и изменяется по закону треугольника, т. е. на глубине y давление на единицу площади составляет $\gamma \cdot y$ (в случае плотины γ — вес единицы объема воды), а второе — направление вертикально, считаем постоянным и обозначим — p (вес единицы объема кладки).

Сформулируем вначале граничные условия (фиг. 11.13) на грань OA , т. е. при $x=0$ и y любом, имеем:

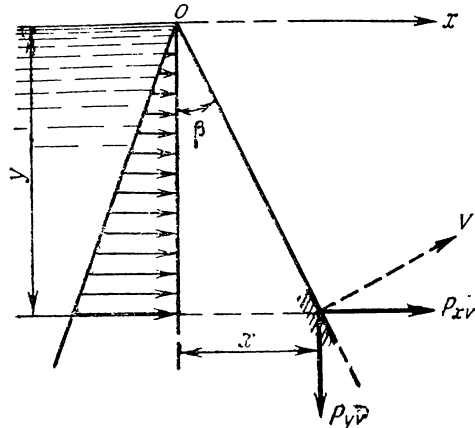
$$\sigma_x = -\gamma \cdot y, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (A)$$

Грань OB , т. е. при $x = y \cdot \operatorname{tg} \beta$ совершенно свободна от нагрузок, следовательно, для этой грани

$$p_x = p_y = 0. \quad (B)$$



Фиг. 11.12. Плотина треугольного профиля

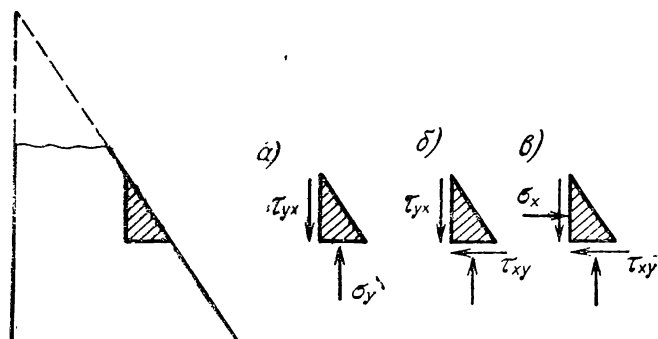


Фиг. 11.13. К формулировке граничных условий

Решение поставленной задачи можно выполнить, подобрав надлежащую функцию напряжений (в данной задаче оказывается достаточным остановиться на полиноме третьей степени), как это было выполнено в предыдущем параграфе, или начать с использования формул сопротивления материалов с последующей их корректировкой, как это было выполнено в § 11.02. Однако второй путь решения окажется здесь неудачным, так как в отношении ка-

сательных напряжений в горизонтальных сечениях рассматриваемой плотины сопротивление материалов дает не только резкое количественное расхождение с точным решением по законам теории упругости, но и качественное различие. В этом можем убедиться с самого начала из следующих простых соображений.

По формулам сопротивления материалов должно следовать, что в горизонтальных сечениях плотины касательные напряжения распределяются по обычному параболическому закону с максимумом по середине сечения и с нулевыми значениями на периферии. В действительности в точках сечения, выхо-



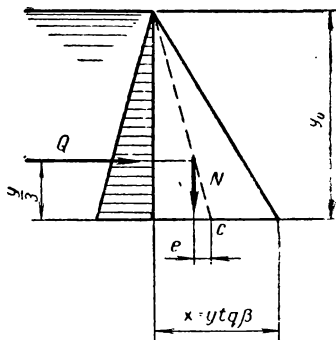
Фиг. 11.14 К доказательству необходимости существования касательного напряжения τ_{yx} возле наклонной грани плотины

дящих на наружную наклонную грань, касательные напряжения непременно существуют (и притом одного порядка с нормальными напряжениями в том же сечении). В этом легко убедиться, если рассмотреть условия равновесия элементарной треугольной призмы, мысленно вырезанной возле наружной грани (фиг. 11.14).

Действительно, очевидное наличие сжимающего напряжения σ_y потребует для равновесия призмы существование такого же порядка касательного напряжения τ_{yx} (фиг. 11.14а); наличие τ_{yx} повлечет возникновение τ_{xy} (фиг. 11.14б), а последнее вызовет появление нормального напряжения σ_x (фиг. 11.14в). Такова будет схема фактического напряженного состояния в точках тела вблизи наклонной грани тела (фиг. 11.14в), качественно отличная от той, которая следует из формального использования формул сопротивления материалов.

Для разнообразия методики решения задачи поступим следующим образом. Примем вначале формулу для нормальных напряжений в горизонтальных сечениях, т. е. для σ_y в том виде, как это дает теория сопротивления материалов, а достоверность такого предположения, а равно и формулы для остальных компонентов напряжений проверим и найдем из уравнения теории упругости.

Для горизонтального сечения на расстоянии y_0 от вершины (фиг. 11.15) изгибающий момент относительно середины сечения (точка c) и продольная сила составляет:



Фиг. 11.15. К подсчету изгибающего момента и продольной силы для промежуточного горизонтального сечения плотины

$$M = Q \frac{y}{3} - Ne = \frac{\gamma y^2}{2} \cdot \frac{y}{3} - \frac{\rho y^3 \tan^2 \beta}{2} \cdot \left(\frac{y \cdot \tan \beta}{2} - \frac{y \cdot \tan \beta}{3} \right) = \\ = \frac{\gamma y^3}{6} - \frac{\rho y^3}{12} \tan^2 \beta; \quad N = -\frac{\rho y^3 \tan \beta}{2}.$$

Нормальное напряжение в рассматриваемом сечении по формуле сопротивления материалов запишется:

$$\sigma_y = \frac{N}{F} + \frac{M}{J} y^*,$$

где y^* — координата рассматриваемой точки сечения изме-

ряется от центра тяжести его, т. е. от точки c ; в нашем случае

$$y^* = \frac{1}{2} x_0 - x = \frac{1}{2} y \operatorname{tg} \beta - x.$$

В указанной выше формуле сопротивления материалов геометрические характеристики сечения следующие:

$$F = x_0 \cdot 1 = y \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

$$J = \frac{1 \cdot x_0^3}{12} = \frac{y^3 \operatorname{tg}^3 \beta}{12}.$$

Итак, по формуле сопротивления материалов:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \left(\frac{\gamma y^3}{6} - \frac{p y^3}{12} \operatorname{tg}^2 \beta \right) \frac{12}{y^3 \operatorname{tg}^3 \beta} \left(\frac{1}{2} y \cdot \operatorname{tg} \beta - x \right) - \\ &\quad - \frac{p y^3 \operatorname{tg} \beta}{2 \cdot y \cdot \operatorname{tg} \beta} = \\ &= \left(\frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} - \frac{p}{\operatorname{tg} \beta} \right) \left(\frac{1}{2} y \operatorname{tg} \beta - x \right) - \frac{p y}{2}. \end{aligned}$$

Для дальнейшего последнюю формулу перепишем в виде:

$$\sigma_y = ax + by, \quad (a)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{p}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta}, \\ b &= \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} - p. \end{aligned}$$

Подстановка (a) во второе дифференциальное уравнение равновесия (8.07)

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + p = 0$$

доставляет уравнение

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = -p - b,$$

откуда

$$\tau_{yx} = - \int (p + b) dx = -(p + b)x + f(y). \quad (б)$$

Подстановка (б) в первое дифференциальное уравнение равновесия (8.07)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

доставляет уравнение

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -f'(y). \quad (8)$$

Вторые производные, входящие в уравнение неразрывности деформации, записываются:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} &= -f''(y); \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

и само уравнение записывается:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = -f''(y) = 0,$$

откуда

$$f(y) = c + d \cdot y.$$

Таким образом, следующие начертания для напряжений удовлетворяют *всем* уравнениям плоской задачи теории упругости

$$\begin{aligned} \sigma_x &= - \int f'(y) dx = -(c + d \cdot y) x + \psi(y), \\ \sigma_y &= ax + by, \\ \tau_{xy} &= -(p + b)x + c + d \cdot y. \end{aligned} \quad (B)$$

Неизвестные постоянные c , d и функцию $\psi(y)$ попытаемся определить из граничных условий.

Начнем с вертикальной наружной грани: используя (A), имеем

$$\begin{aligned} -c - d \cdot y + \psi(y) &= -\gamma \cdot y, \\ c + d \cdot y &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует:

$$\begin{aligned} c &= d = 0; \\ \psi(y) &= -\gamma \cdot y. \end{aligned} \quad (2)$$

Итак, окончательно:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\gamma y, \\ \sigma_y &= ax + by, \\ \tau_{xy} &= -(p + b)x = -\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta}. \end{aligned} \quad (11.03)$$

Все произвольные постоянные и функции определены, но еще не использованы все известные граничные условия. Это оказалось потому, что мы решали задачу смешанным приемом, так как частично одна из формул для напряжений была «подсказана» (и оказалась не противоречащей теории упругости) теорией сопротивления материалов.

Поэтому использование граничных условий по наклонной (низовой) грани тела будет играть роль контрольной проверки выполненного решения. Выполним этот контроль, подставляя в (Б) известные соотношения (2.05), имеем:

$$\begin{aligned} p_{1v} &= \sigma_x \cos(xv) + \tau_{xy} \cos(yv) = 0, \\ p_{yv} &= \tau_{yx} \cos(xv) + \sigma_y \cos(yv) = 0, \end{aligned} \quad (д)$$

где, очевидно,

$$\begin{aligned} \cos(xv) &= \cos \beta, \\ \cos(yv) &= \cos(90^\circ + \beta) = \sin \beta. \end{aligned}$$

В развернутом виде выражения (д) с использованием (Б) и (з) переписываются:

$$\begin{aligned} -\gamma \cdot y \cdot \cos \beta + \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} x \sin \beta &= 0, \\ \frac{-\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} x \cdot \cos \beta - (ax + by) \sin \beta &= 0. \end{aligned}$$

В последних выражениях, поскольку речь идет о точках на наклонной наружной грани, следует положить

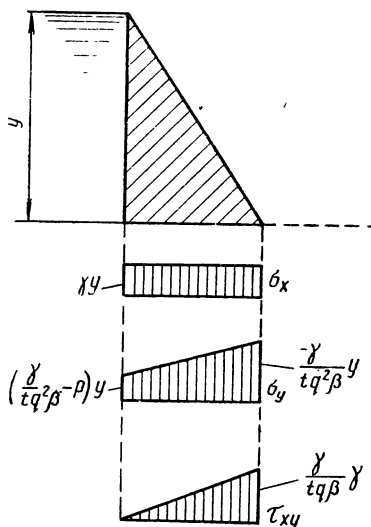
$$x = y \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Делая указанную подстановку и подставляя на место a и b ранее принятые обозначения, граничные условия, в чем

рекомендуется убедиться читателю самостоятельно, обращаются в тождество, что является дополнительным (но не необходимым) контролем правильности всех предыдущих выкладок.

Эпюры напряжений в горизонтальном сечении плотины показаны на фиг. 11.16.

Обращается внимание, что эпюра распределения касательных напряжений по горизонтальному сечению существенно отличается от известной из курса сопротивления материалов параболической эпюры, что, впрочем, из простых соображений было указано в начале этого параграфа. Любопытно, что формула для σ_y , даваемая элементарной теорией сопротивления материалов, удержалась и в рассматриваемом случае треугольного профиля.



Фиг. 11.16. Характер эпюр напряжений в горизонтальном сечении плотины

§ 11.07. Чистый изгиб кривого бруса.
Задача X. С. Головина

Рассмотрим кривой брус с постоянным сечением в виде узкого прямоугольника и круговой осевой линией, изгибаемой в плоскости своей кривизны парами сил M , приложенными по концам (фиг. 11.17).

Так как изгибающий момент по всей длине постоянен, то, очевидно, напряжения не зависят от полярного угла θ и возможно использовать (9.29).

Условия, утверждающие, что выпуклая и вогнутая поверхности бруса свободны от нормальных усилий, записываются так:

$$(\sigma_r)_{r=a}=0; \quad (\sigma_r)_{r=b}=0. \quad (a)$$

Условие на контуре (включая и торцевые сечения), где отсутствуют касательные усилия, записывается следующим образом:

$$\tau_{r\theta}=0. \quad (b)$$

Граничные условия по торцам, выраженные в интегральной форме, будут:

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = 0; \quad \int_a^b \sigma_\theta r dr = -M. \quad (c)$$

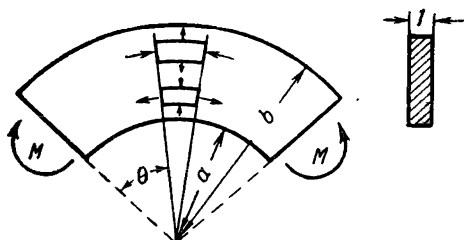
Используя первое уравнение (9.29) и подставляя в него последовательно $r=a$ и $r=b$, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{a^2} + B(1 + 2 \ln a) + 2C &= 0, \\ \frac{A}{b^2} + B(1 + 2 \ln b) + 2C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (z)$$

Первое из условий (c) оказывается после подстановки в него выражения для σ тождественным с (z). Последнее условие имеет вид:

$$\int_a^b \sigma_\theta r dr = \int_a^b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} r dr = -M$$

или после интегрирования



Фиг. 11.17 Изгиб кривого бруса

$$A \ln \frac{b}{a} - B(b^2 \ln b - a^2 \ln a) - (B + C)(b^2 - a^2) = M. \quad (\partial)$$

Решение уравнений (2) — (d) доставляет:

$$A = -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \ln \frac{b}{a},$$

$$B = -\frac{2M}{N}(b^2 - a^2),$$

$$C = \frac{M}{N}[b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a)],$$

где обозначено

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2.$$

Окончательно формулы для напряжений запишутся в форме:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right), \\ \sigma_\theta &= -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + \right. \\ &\quad \left. + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right), \quad \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.04)$$

Эти выражения дают распределение напряжений, удовлетворяющее всем условиям на контуре для чистого изгиба, и представляют собой точное решение задачи, если только распределение нормальных усилий по концам бруса следует выражению для σ_θ .

Однако, как это уже неоднократно отмечалось ранее, если усилия, образующие изгибающую пару, распределены по концам бруса каким-либо иным образом, то на основании принципа локальности можно заключить, что отклонения от решения (11.04) будут очень невелики, и ими можно пренебречь на расстояниях от концов больших, чем высота сечения бруса.

В курсах сопротивления материалов также разбирается задача об изгибе кривого бруса, исходя из гипотезы, что поперечные сечения бруса остаются при изгибе плоскими, откуда вытекало, что нормальные напряжения в сечении распределяются по гиперболическому закону. Сравнение точного решения (11.04) с гиперболическим законом показывает относительно малую разницу между этими двумя решениями.

Точные решения задач о чистом, а также и о поперечном изгибе кривого бруса были впервые даны русским ученым Х. С. Головиным в 1881 г.

§ 11.08. Сила, действующая на острие клина

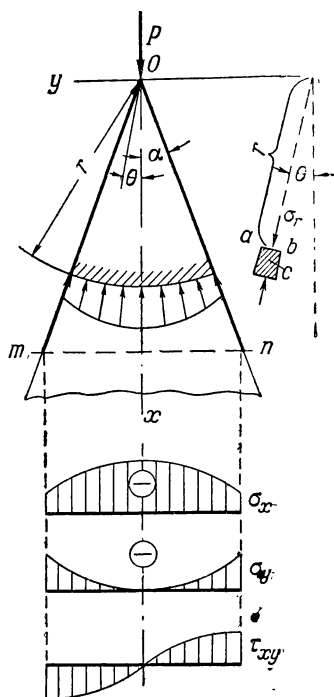
Здесь и далее (§§ 11.09—11.15) рассмотрено несколько характерных задач, для решения которых совершенно исключаются возможности (хотя бы даже в качестве попытки первого приближения) применения к ним каких-либо элементарных решений из теории сопротивления материалов. В этом смысле приводимые ниже задачи являются классическими в теории упругости.

Рассмотрим симметричный клин, показанный на фиг. 11.18. Толщину клина в направлении, перпендикулярном к плоскости xu , примем равным единице. В направлении оси Ox протяженность клина бесконечна. На острие клина приложена сила P , равномерно распределенная по толщине острия*. Случай потери упругой устойчивости исключаем из рассмотрения.

В этой задаче представляются абстракциями как «сила на острие», так и бесконечная протяженность клина. Однако, как это показано позднее (§ 11.12), пользуясь формальным решением такой абстрактной задачи, не представит затруднений перейти к реальным задачам о действии непрерывно распределенных нагрузок и притом на тело с реальными граничными условиями (без острия, с конечной протяженностью и т. д.).

В рассматриваемой сейчас задаче, характерной для использования уравнений плоской задачи в полярных координатах, выясняется также неприменимость элементарного решения сопротивления материалов.

Сделаем вначале (но это окажется и окончательным) предположение о простом радиальном распределении напряжений, а именно, допустим, что элемент C на расстоянии r от точки приложения груза испытывает



Фиг. 11.18 Случай нагрузки бесконечного клина силой на острие

* Это так называемая «погонная сила»; ее размерность — сила на единицу длины.

простое радиальное сжатие в радиальном направлении, но тем меньшее, чем дальше удалена рассматриваемая точка C от острия и чем больше определяющий ее радиус отклонен от линии действия силы. Иначе говоря, сделаем предположение:

$$\sigma_r = -kP \frac{\cos \theta}{r}, \quad (11.05)$$

где k — коэффициент, подлежащий определению.

Тангенциальное напряжение σ_θ и касательное $\tau_{r\theta}$ в этом случае для упомянутого выше элемента C равны нулю. Докажем, что решение (11.05) является точным и что оно может быть выведено при помощи следующей функции напряжений:

$$\varphi = -\frac{kP}{2} r \cdot \theta \cdot \sin \theta.$$

Такая функция может быть функцией напряжений, так как удовлетворяет уравнению неразрывности (9.27), т. е.

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad (a)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Действительно

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -\frac{kP}{r} \cos \theta \quad (б)$$

и подстановка (б) в (а) приводит к тождеству.

Далее на основании (9.28) имеем:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -\frac{kP}{r} \cos \theta,$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Это совпадает с (11.05), чем доказывается, что уравнения равновесия в неразрывности удовлетворены. Проверим граничные условия: при $\theta = \pm \alpha$, т. е. на внешних наклонных гранях клина никакие внешние силы не действуют. Действительно:

$$(\tau_{r\theta})_{\theta=\pm\alpha} = (\sigma_\theta)_{\theta=\pm\alpha} = 0.$$

Остается подобрать постоянную k так, чтобы удовлетворить условиям равновесия между внешней силой P и внутренними силами по какому-либо сечению клина. Для этой цели сделаем сечение по цилиндрической поверхности радиуса r (фиг. 11.18). Равнодействующая усилий, действующих по этой поверхности, должна уравновешивать силу P .

Эта равнодействующая получается суммированием вертикальных составляющих (фиг. 11.18, справа)

$$\sigma_r (\overline{ab} \cdot 1) \cos \theta = \sigma_r r d\theta \cos \theta,$$

действующих на каждый элемент ab по поверхности. Итак, имеем:

$$-2 \int_0^{\alpha} \frac{kP \cos^2 \theta}{r} r d\theta = -kP \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) = -P,$$

откуда

$$k = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}.$$

Таким образом, окончательно

$$\sigma_r = - \frac{P \cos \theta}{r \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)} \quad (11.06)$$

Для поперечного сечения mn имеем следующие компоненты напряжений, отнесенных к прямоугольным осям:

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta;$$

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta;$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} \sigma_r \sin 2\theta.$$

Распределение указанных напряжений по сечению mn изображено на фиг. 11.18.

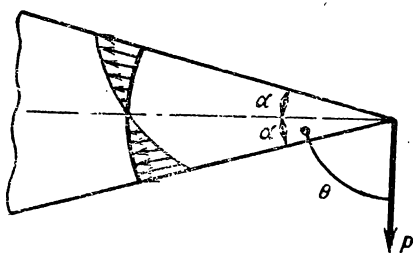
§ 11.09. Другие задачи по нагружению клина

а) Если ось клина расположить горизонтально, а груз направить вертикально (фиг. 11.19), то в этом случае оказывается применимым прежнее решение:

$$\sigma_r = -kP \frac{\cos \theta}{r},$$

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \quad (a)$$

но только угол θ следует отсчитывать от полярной оси y , направленной по силе. Тогда граням клина будут со-



Фиг. 11.19 К задаче с клином

ответствовать углы

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{и} \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Эпюра распределения радиальных напряжений по сечению $r = r_0 = \text{const}$, изображена на той же фиг. 11.19.

Для определения величины k выделим по-прежнему цилиндрической поверхностью $r_0 = \text{const}$ часть клина, прилежащего к вершине. Уравнение равновесия $\sum Y = 0$ запишется:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sigma_r \cos \theta r_0 d\theta + P = 0. \quad (6)$$

По подстановке (а) в (б), имеем:

$$\int_{\frac{\pi}{2} - \alpha}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} k P \cos^2 \theta \cdot d\theta = P,$$

откуда

$$k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha}. \quad (11.07)$$

Таким образом, окончательно

$$\sigma_r = - \frac{P}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha} \cdot \frac{\cos \theta}{r}, \quad (11.08)$$

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0.$$

Рекомендуется читателю самостоятельно продолжить рассматриваемую задачу и установить выражения для напряжений в сечении, перпендикулярном оси симметрии клина, которые окончательно записываются (в декартовых координатах)

$$\sigma_y = - \frac{P}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha} \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (11.09)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{P}{-\frac{1}{2} \sin 2\alpha} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

На фиг. 11.20 изображены эпюры напряжений σ_y и τ_{xy} для сечения $m-n$ для частного случая, когда $\alpha = 30^\circ$.

Аналогичным образом решается задача о распределении напряжений в клине при других видах его загрузки, например, показанных на фиг. 11.21.

б) Для случая изгиба клина моментом (фиг. 11.22) решение задачи легко выполняется, если принять функцию напряжений в виде

$$\varphi = A\theta + B \cdot \sin 2\theta.$$

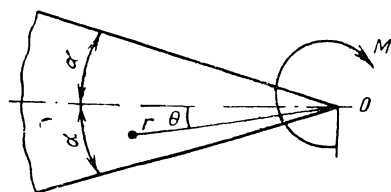
Использование этой функции напряжений доставляет такие выражения для напряжений

$$\sigma_r = \frac{2M}{(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} \frac{\sin 2\theta}{r^2}; \quad (11.10)$$

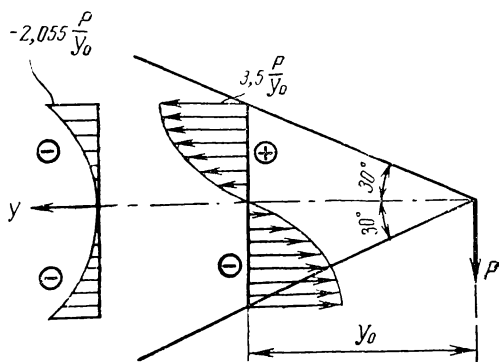
$$\sigma_\theta = 0;$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{M}{r^2} \frac{\cos 2\theta - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos \alpha}.$$

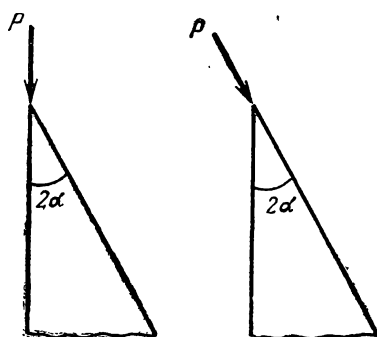
Эпюры напряжений показаны на фиг. 11.23.



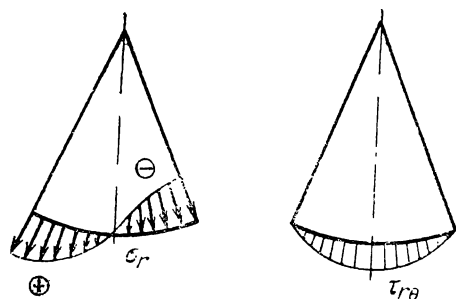
Фиг. 11.22 Изгиб клина моментом



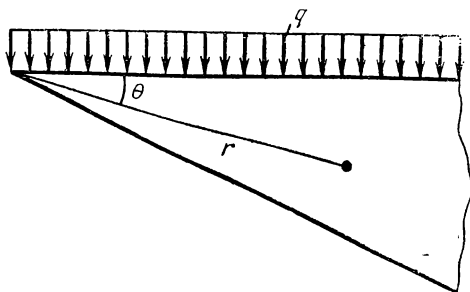
Фиг. 11.20 Эпюры σ_y и τ_{xy} по сечению $m-n$ для клина с $\alpha = 30^\circ$.



Фиг. 11.21 Случаи нагружения клина (для самостоятельных упражнений)



Фиг. 11.23 Эпюры σ_r и $\tau_{r\theta}$ для клина нагруженного моментом

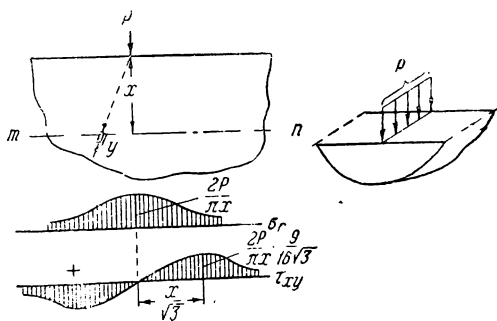


Фиг. 11.24 Частный случай загрузки клина

в) Для случая загрузки клина по одной грани равномерно распределенной нагрузкой q (фиг. 11.24) напряжения выражаются формулой:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{q}{\operatorname{tg} \beta - \beta} (\beta - \theta - \operatorname{tg} \beta \cdot \sin^2 \theta - \sin \theta \cdot \cos \theta); \\ \sigma_\theta &= \frac{q}{\operatorname{tg} \beta - \beta} (\beta - \theta - \operatorname{tg} \beta \cdot \cos^2 \theta + \sin \theta \cdot \cos \theta); \\ \tau_{r\theta} &= \frac{q}{\operatorname{tg} \beta - \beta} (\sin^2 \theta - \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta).\end{aligned}\quad (11.11)$$

§ 11.10. Сосредоточенная сила, приложенная к точке прямолинейного края полубесконечной пластинки



Фиг. 11.25 Полубесконечная пластинка, нагруженная сосредоточенной силой

Представим себе сосредоточенную вертикальную погонную силу интенсивностью P , действующую на горизонтальный прямолинейный край пластинки (фиг. 11.25), бесконечно простирающейся вниз, влево, вправо. Такую пластинку называют полубесконечной или иначе *упругой полуплоскостью*.

Распределение груза P по толщине пластинки предполагается равномерным. Толщину пластинки примем равной единице. Для отыскания закона распределения напряжений

возможно использовать решение задачи о клине (§ 11.08), полагая угол раствора клина $2\alpha = \pi$. В таком случае

$$k = \frac{2}{\pi},$$

и потому

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}. \quad (11.12)$$

Проведя горизонтальную плоскость mn на расстоянии x от прямолинейного края пластинки, определим нормальные и касательные напряжения для любой точки в этой плоскости по формулам перехода, а именно:

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos^3 \theta}{r} = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}};$$

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2P}{\pi x} \sin^2 \theta \cos^2 \theta;$$

$$\tau_{xy} = \sigma_r \sin \theta \cos \theta = -\frac{2P}{\pi x} \sin \theta \cos^3 \theta = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

На фиг. 11.25 показано распределение напряжений σ_x и τ_{xy} по горизонтальной плоскости mn .

В точке приложения груза напряжения оказываются бесконечно большими, а потому под силой и в непосредственной близости от нее неизбежны пластические деформации. Однако на некотором удалении от силы согласно известному читателю принципу локальности приведенные выше формулы «упругого» решения практически пригодны.

В порядке самостоятельного упражнения рекомендуется читателю доказать, что если провести окружность произвольного диаметра d , касающуюся верхнего края в точке приложения внешней силы (фиг. 11.26 а), то для всех точек этой окружности радиальные напряжения будут одинаковы и равны:

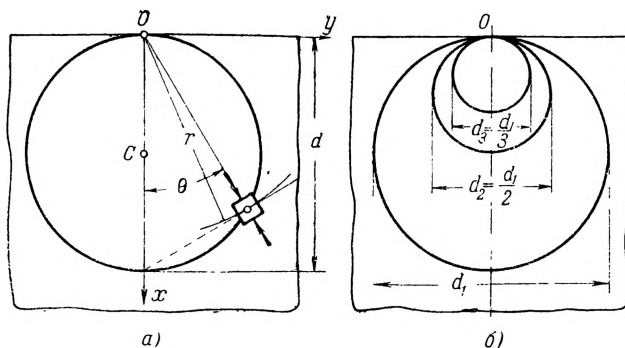
$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi d}. \quad (11.13)$$

Равны также для этих точек и наибольшие касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{P}{\pi d}. \quad (11.14)$$

Если обозначить через τ_1 наибольшие касательные напряжения на окружности диаметра d_1 , то на окружности диаметра $d_2 = \frac{1}{2} d_1$ касательные напряжения будут иметь удвоенную величину, утроенную величину на окружности диаметра $d_3 = \frac{1}{3} d_1$ и т. д. (фиг. 11.26 б).

Напомним читателю (из курса сопротивления материалов), что при оптическом методе исследования плоско-напряженного состояния в моделях из прозрачных материалов все точки модели, для которых наибольшие касательные напряжения равны между собою, ложатся на полосы той или иной окраски (*изохром*), в зависимости от величины упомянутого напря-

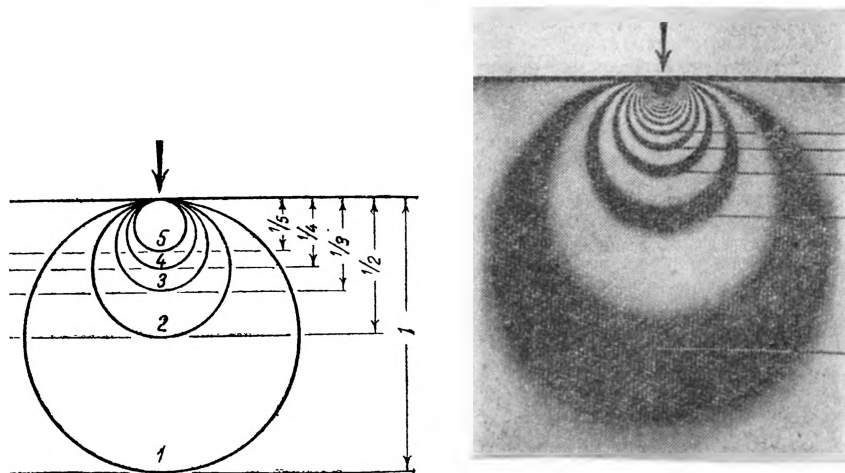


Фиг. 11.26 Для всех точек окружности, касающейся верхнего края в точке приложения внешней среды, радиальные напряжения одинаковы.

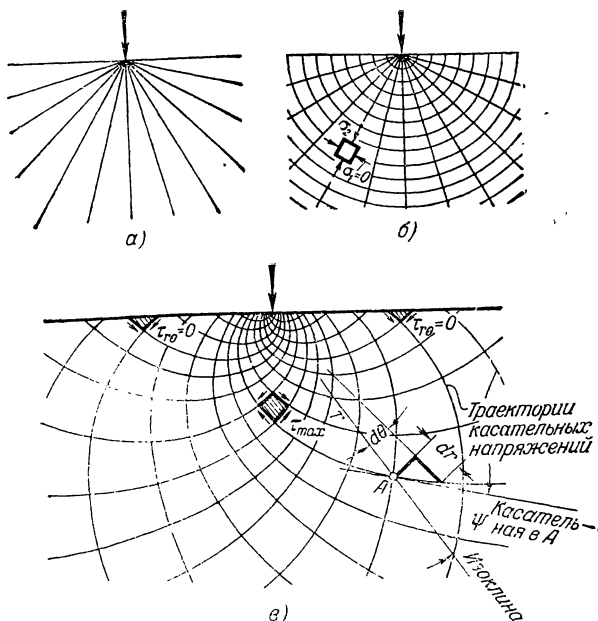
жения. В случае просвечивания модели на поляризационной установке при монохроматическом источнике света изохромы представляются черно-белой картиной полос.

На фиг. 11.27 дано сравнение теоретической и экспериментальной картин полос, из которого видно, что результаты теории упругости совпадают с экспериментальными данными (в данном случае с результатами поляризационно-оптического исследования).

Также в порядке самостоятельного упражнения рекомендуется читателю убедиться в справедливости показанных на фиг. 11.28 для рассматриваемого случая нагружения полуплоскости изоклин (а), траекторий главных напряжений (б) и траекторий наибольших касательных напряжений (в).



Фиг. 11.27 Сравнение теоретической и экспериментальной картин полос, подтверждающее совпадение результатов теории упругости с опытом



Фиг. 11.28 Изоклины (а), траектории главных напряжений (б) и траектории наибольших касательных напряжений (в)

Напомним, что *изоклины* представляют собой геометрическое место точек, направления главных напряжений в которых параллельны; траекториями главных напряжений (*изостаты*) называются кривые, касательные к которым совпадают с направлениями соответствующего главного напряжения, действующего в точках касания.

§ 11.11. Деформации полубесконечной пластинки от сосредоточенной силы

Продолжим решение предыдущей задачи в смысле определения перемещений. Используем формулы (9.24) — (9.26) и закон Гука. Подставляя в них (11.12), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{r}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} = \mu \frac{2P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{r}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0^* \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

* Правая часть равна нулю, так как $\tau_{r\theta} = 0$.

Интегрируя первое из этих уравнений, находим:

$$u = \frac{2P}{\pi E} \cos \theta \ln r + f(\theta), \quad (б)$$

где $f(\theta)$ является функцией только одного угла θ . Подставляя полученное во второе уравнение (а) и интегрируя, имеем:

$$v = \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2P}{\pi E} \ln r \sin \theta - \int f(\theta) d\theta + f(r), \quad (в)$$

где $f(r)$ — функция одного только r .

Подставляя (б) и (в) в третье уравнение (а), придем к заключению, что

$$f(\theta) = -\frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \cdot \sin \theta + A \sin \theta + B \cdot \cos \theta, \quad (г)$$

$$f(r) = Cr,$$

где A , B и C — постоянные интегрирования, которые подлежат определению из уравнений связи.

Пусть связи полуплоскости таковы (фиг. 11.25), что точки, лежащие на оси x , не имеют бокового перемещения, т. е. $v=0$; тогда найдем $A=C=0$, и вертикальное перемещение точек, лежащих на оси x , будет:

$$(u)_{\theta=0} = -\frac{2P}{\pi E} \ln r + B. \quad (11.15)$$

Чтобы найти постоянную B , допустим, что некоторая точка, лежащая на оси x на расстоянии d от начала координат, не имеет вертикального перемещения. Тогда найдем:

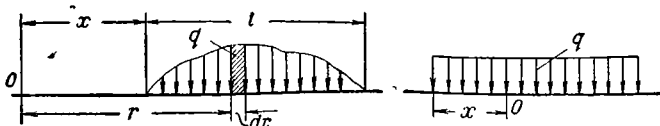
$$B = \frac{2P}{\pi E} \ln d.$$

Для вертикальных перемещений по горизонтальному прямолинейному краю будем иметь выражение:

$$(v)_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = \frac{2P}{\pi E} \ln \frac{d}{r} - \frac{(1+\nu)P}{\pi E}. \quad (11.16)$$

§ 11.12. Прогибы прямолинейного края полубесконечной пластинки при частных видах загрузки

Прогибы прямолинейного края пластинки легко найти для любого распределения нагрузки при помощи формул (11.15) — (11.16), выведенных для случая сосредоточенной силы. Если q — интенсивность вертикальной нагрузки (фиг. 11.29 слева), то прогиб, возникающий в точке O на расстоянии r от за-



Фиг. 11.29 Загружение граничной плоскости полубесконечной пластинки

штрихованного элемента qdr нагрузки, согласно (11.16) запишется так:

$$\frac{2q}{\pi E} dr \ln \frac{d}{r} - \frac{1-\mu}{\pi E} qdr.$$

Полный прогиб в точке O :

$$v_0 = \frac{2}{\pi E} \int_x^{l+x} q \ln \frac{d}{r} dr - \frac{1+\mu}{\pi E} \int_x^{l+x} qdr. \quad (11.17)$$

а) Действие равномерно распределенной нагрузки. В этом случае q постоянно, и потому

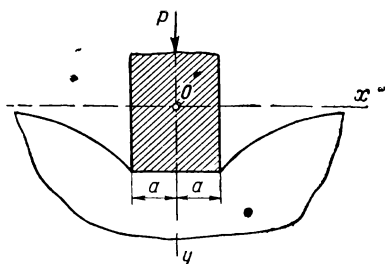
$$v_0 = \frac{2q}{\pi E} \left[(l+x) \ln \frac{d}{l+x} - x \ln \frac{d}{x} \right] + \frac{1-\mu}{\pi E} ql.$$

Для точки, находящейся в пределах нагруженной части (фиг. 11.29 справа), получим:

$$v_0 = \frac{2q}{\pi E} \left[(l-x) \ln \frac{d}{l-x} + x \ln \frac{d}{x} \right] + \frac{1-\mu}{\pi E} ql.$$

б) Обратная задача. Если задается уравнение прогиба прямолинейного края пластинки, то из 11.17 можно найти закон распределения нагрузки, вызвавшей такой прогиб.

Так, в случае, когда прогиб v постоянен по длине нагруженной части прямолинейного края (фиг. 11.30), то решение (11.17) (которое будет уже интегральным уравнением, так как неизвестная функция q входит под знак интеграла) доставляет следующий закон, установленный С. А. Чаплыгиным, а затем Садовским:



Фиг. 11.30 Задача Чаплыгина-Садовского о жестком штампе

$$q = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (11.18)$$

Наименьшее значение давления будет при $x=0$:

$$q_{\min} = \frac{p}{\pi a},$$

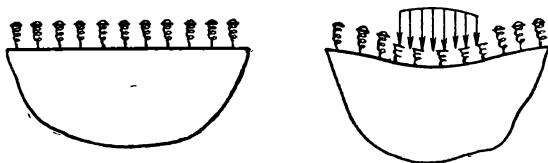
а по краям жесткого штампа давление теоретически обращается в бесконечность.

Фактически бесконечно больших напряжений не будет, так как материал пластинки у краев штампа придет в пластическое состояние, или в этом надобности не будет, если края штампа будут закруглены.

в) **Задача И. Я. Штаермана.** В предыдущей контактной задаче граничный край пластинки предполагается идеально прямым. Однако в действительности, даже при очень тщательной отделке пластинки, последняя всегда имеет мельчайшие неровности, которые могут оказать существенное влияние на последующее распределение напряжений под штампом.

Таким образом, при решении контактной задачи следовало бы учитывать микроструктуру поверхности сминаемых тел. Так как современная физика пока не дает какой-либо законченной теории поверхностной структуры твердого тела, то И. Я. Штаерман* предложил оригинальное решение, основанное на том, что при нормальном давлении на поверхность упругого тела в нем возникают два рода перемещений. Одни получаются вследствие деформации всего упругого тела (в данном случае «упругой полуплоскости»), другие предопределяются поверхностной структурой данного тела.

Первые определяются дифференциальными уравнениями теории упругости, в частности уравнением (11.17). В отношении вторых делается предположение о том, что они в данной точке линейно связаны с местным давлением в той же точке.



Фиг. 11.31 Задача И. Я. Штаермана

Иначе говоря, граница упругой плоскости представляется схемой, указанной на фиг. 11.31. Тогда эти вторые перемещения могут быть описаны зависимостью kq , где k — некоторый коэффициент, зависящий от поверхностной структуры упругого тела (исполняющий в данном случае роль коэффициента постели в известной читателю из строительной механики задаче о балке на упругом основании).

Прогиб граничного края для такой модели запишется так:

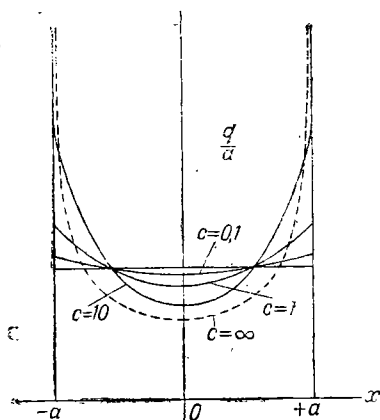
$$v_0 = \frac{2}{\pi E} \int_{-x}^{l-x} q \ln \frac{d}{r} dr - \frac{1+\mu}{\pi E} \int_{-x}^{l-x} q dr + kq \dots \quad (11.19)$$

* И. Я. Штаерман. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.

Если вернуться к задаче о вдавливании плоского штампа, то в написанном уравнении следует v_0 считать постоянным, а q разыскиваемым.

Исследование этой задачи привело Штаермана к интересным и важным в практическом отношении выводам, представленным на фиг. 11.32. На этой фигуре показаны графики давления q под штампом для следующих значений параметров: $c = \frac{2a(1-\mu^2)}{kE}$: $c=0$, $c=$

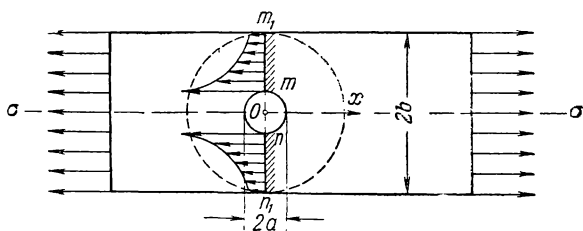
$=0,1$, $c=1$, $c=10$ и $c=\infty$. Случай $c=\infty$ соответствует общепринятой теории штампа, в соответствии с которой при $x \pm a$ давление q обращается в бесконечность: при конечных значениях c давление q остается ограниченным, и в предельном случае при $c=0$ (случай несвязанного упругого основания в смысле Винклера) получается равномерно распределенное давление под штампом.



Фиг. 11.32 Распределение напряжений под плоским жестким штампом при различных упругих характеристиках тонкого подстилающего слоя (по Штаерману).

§ 11.13. Влияние круглого отверстия (ослабления) на распределение напряжений в растягиваемой пластинке

Пусть имеем пластинку (фиг. 11.33), подвергающуюся действию растягивающего усилия, равномерно распределенного по торцам пластинки, так что $\sigma = \frac{P}{F}$. На оси Ox пла-

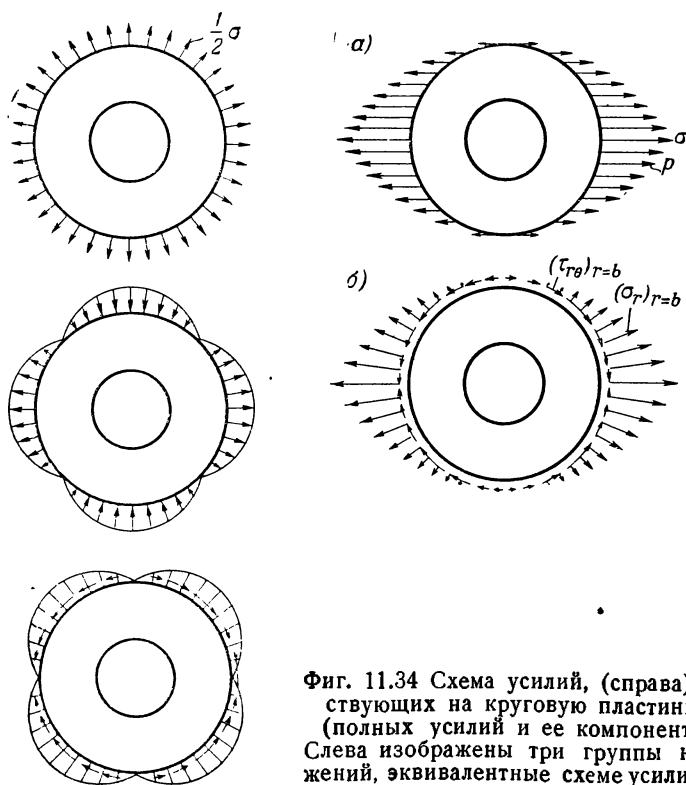


Фиг. 11.33 Растягиваемая пластинка, ослабленная отверстием.

стинка имеет небольшое круглое отверстие. Наличие последнего повлияет на распределение напряжений около ослабления, и в частности, по сечению m, n напряжения будут распределяться неравномерно с резко выраженной концентрацией около ослабления (точки m и n).

К решению этой задачи подойдем таким искусственным способом. Вырежем из заданной пластинки концентрической окружностью радиуса b часть и рассмотрим ее отдельно от остальной части пластинки. Если размер b значительно превышает размер a , то согласно принципу локальности напряжения по окружности радиуса b по существу будут мало отличаться от случая, если бы выреза в пластинке не было совсем.

Таким образом, взамен расчета пластинки задачу сводим к расчету толстостенного кольца, изображенного на фиг. 11.34 *а*, где согласно известной формуле сопротивления материалов (напряжения в косых плоскостях при чистом растяжении) $p = \sigma \cdot \cos \theta$.



Фиг. 11.34 Схема усилий, (справа) действующих на круговую пластинку (полных усилий и ее компонентов) Слева изображены три группы напряжений, эквивалентные схеме усилий, показанных на фиг. 11.34 б

Воздействие по фиг. 11.34а может быть разложено на компоненты, показанные на фиг. 11.34б, где

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{r=b} &= p \cos \theta = \sigma \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \sigma (1 + \cos 2\theta), \\ (\tau_{r\theta})_{r=b} &= -p \sin \theta = -\frac{1}{2} \sigma \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

В свою очередь эти компоненты можно между собой перегруппировывать, т. е. считать состоящими из двух частей. Первая — от действия постоянной по всему наружному периметру (фиг. 11.34, слева, вверх) составляющей, равной половине нормальных напряжений. Напряжения, возникающие под действием этой составляющей, можно определить при помощи выражений, полученных для задачи § 9.02, т. е. воспользоваться известным решением (9.16—9.17).

Вторая часть (фиг. 11.34 слева, посередине), состоящая из нормальных составляющих:

$$(\sigma_r)_{r=b} - \frac{1}{2} \sigma = \frac{1}{2} \sigma \cos 2\theta, \quad (б)$$

вместе с касательными (слева, внизу)

$$-\frac{1}{2} \sigma \sin 2\theta$$

вызывает напряжения, которые надлежит сейчас определить. Но и для этой группы внешних воздействий возможно воспользоваться готовым решением задачи § 9.05, случай 3, а именно принять функцию напряжений в виде:

$$\varphi = \left(Ar^2 + C \frac{1}{r^2} + D \right) \cos 2\theta$$

и далее

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{\sigma}{2} \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} - 4 \frac{a^4}{r^2} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma}{2} \left(1 - 3 \frac{a^4}{r^4} + 2 \frac{a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Присоединяя к ним напряжения от первой группы (фиг. 11.34, слева вверх), окончательно получим:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma}{2} \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} - 4 \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta; \end{aligned} \quad (11.19)$$

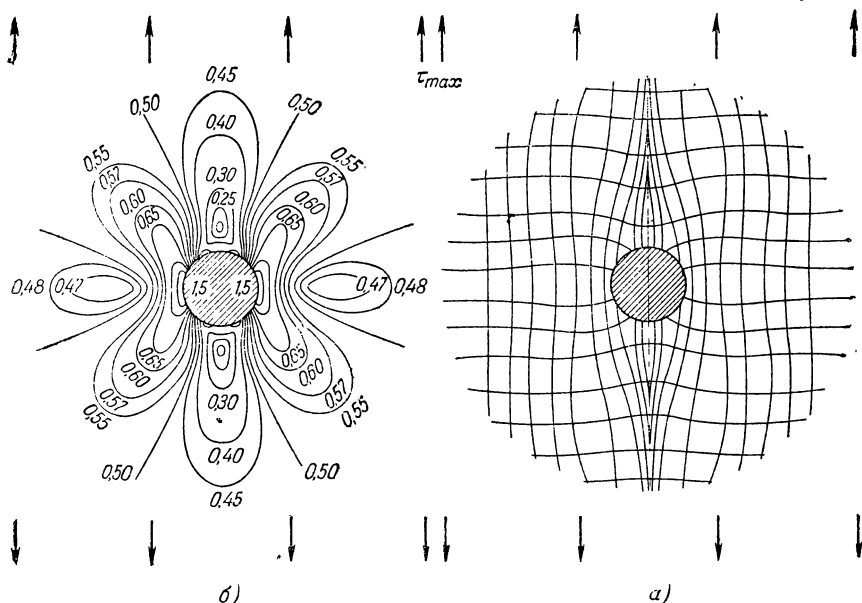
$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2} \left(1 - 3 \frac{a^4}{r^4} + 2 \frac{a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta.$$

Напряжение σ_θ будет наибольшим по концам диаметра mn и будет равно*:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = 3\sigma.$$

Располагая знанием компонентов напряжений в каждой точке (11.19), можно составить выражения для главных напряжений и для наибольших касательных напряжений в тех же точках. Рекомендуется читателю проделать эту часть исследования самостоятельно и провести анализ формул для главных напряжений.

На фиг. 11.35, б показаны траектории главных напряжений (изостаты) и на фиг. 11.35, а — линии равных $\tau_{\max}$. На фиг. 11.36 изображены интерференционные полосы (изохромы), сопоставление которых с фиг. 11.35, б показывает совпадение вычислений в теории упругости с действительностью.



Фиг. 11.35 Изостаты (справа) и изохромы (слева), построенные по теоретическим и следованиям

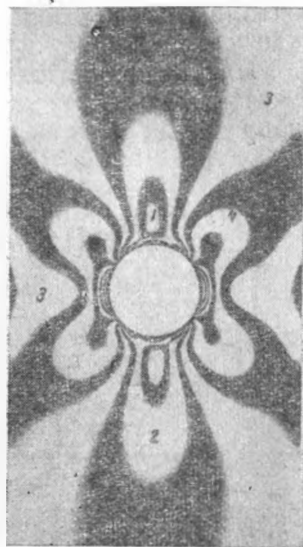
* Приведенный здесь вывод можно рассматривать точным при $\frac{a}{b}$, устремляющимся к нулю. В таком случае по отношению к размерам ослабления пластинка является бесконечно большой, иначе говоря, пластинка является упругой плоскостью.

Большое количество задач, связанных с вычислением местных напряжений, имеется в обстоятельной монографии Г. Н. Савина «Концентрация напряжений около отверстий» (Гостехиздат, 1950). Там разобраны случаи отверстий в форме эллипса, прямоугольника, правильного многоугольника, исследованы случаи изгиба плит со всевозможными отверстиями в плане и т. д.

§ 11.14. Использование тригонометрических рядов для функций напряжений

Заслуживают внимания решения задач через функции напряжений, сводящиеся к тригонометрическим функциям и рядам. Возьмем, например, функцию

$$\varphi = f(y) \cdot \sin \alpha x, \quad (11.20)$$



Фиг. 11.36 Картина полос, полученная экспериментальным путем

где $f(y)$ — функция одной только ординаты y , $\alpha = \frac{m\pi}{l}$, l — длина бруса, m — любое целое число.

Подставляя (11.20) в (8.12), найдем следующее уравнение для определения $f(y)$:

$$\alpha^4 f(y) - 2\alpha^2 f''(y) + f^{IV}(y) = 0. \quad (11.21)$$

Общий интеграл этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами записывается, как известно, так:

$$f(y) = C_1 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \operatorname{sh} \alpha y + C_3 y \cdot \operatorname{ch} \alpha y + C_4 y \cdot \operatorname{sh} \alpha y. \quad (11.22)$$

Зная функцию напряжений φ , можно определить напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} , а по ним выяснить поверхностные условия. Задаваясь различными значениями α , получим решения для всевозможных случаев нагружения балки по верхней и нижней горизонтальным кромкам распределенной сплошной нагрузкой, график изменения интенсивности которой изменяется по длине балки по синусоиде (с числом волн в зависимости от задаваемого сечения). Подобного рода метод

оказывается успешным в приложении к случаям прерывных нагрузок, если применять для этой цели ряды Фурье.

При решении задачи в полярных координатах аналогично указанному выше часто будет удобным положить функцию напряжений в виде:

$$\varphi = f(r) \sin \theta, \quad (11.23)$$

где $f(r)$ — функция только радиуса r .

Подставляя (11.23) в (9.27), находим для $f(r)$ выражение

$$f(r) = Ar^3 + Br \ln r + Cr + D \frac{1}{r}. \quad (11.24)$$

Представляет также интерес такое начертание функции напряжений:

$$\varphi = A_1 \theta r \cos \theta, \quad (11.25)$$

удовлетворяющей (9.27).

Зная функцию напряжений, при помощи (9.28) найдем выражения для самих компонентов напряжений. Так, объединяя (11.23) и (11.25), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left(2Ar + \frac{B}{r} - \frac{2D}{r^3} \right) \sin \theta - \frac{2A_1}{r} \sin \theta; \\ \sigma_\theta &= \left(6Ar + \frac{B}{r} + \frac{2D}{r^3} \right) \sin \theta; \\ \tau_{r\theta} &= - \left(2Ar + \frac{B}{r} - \frac{2D}{r^3} \right) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (11.26)$$

Наряду с (11.20), очевидно, можно принять начертание функции напряжений в виде

$$\varphi = f(y) \cos \alpha x, \quad (11.27)$$

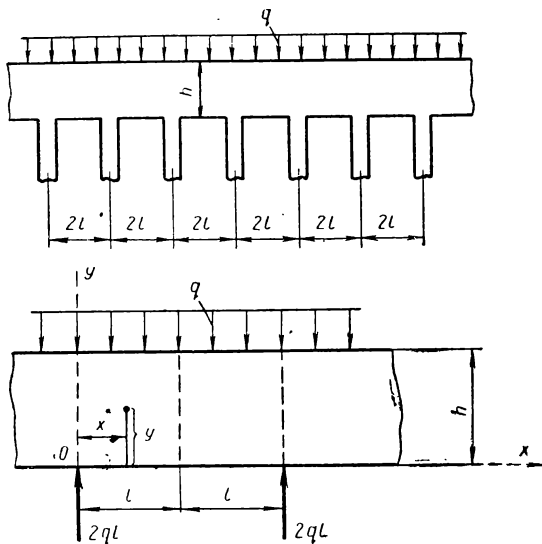
где для $f(y)$, конечно, остается прежнее выражение (11.22).

Так как m , входящее в формулу (11.20), — произвольное целое число, то, давая ему различные значения, получим бесчисленное множество функций φ . Общее решение представится таким бесконечным рядом:

$$\begin{aligned} \varphi = & \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[C_1 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{l} y + C_2 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{l} y + C_3 y \operatorname{sh} \frac{n\pi}{l} y + \right. \\ & \left. + C_4 y \operatorname{ch} \frac{n\pi}{l} y \right] \sin \frac{n\pi}{l} x + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[C_5 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{l} y + \right. \\ & \left. + C_6 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{l} y + C_7 y \operatorname{sh} \frac{n\pi}{l} y + C_8 y \operatorname{ch} \frac{n\pi}{l} y \right] \cos \frac{n\pi}{l} x \dots \quad (11.28) \end{aligned}$$

Успешное применение тригонометрических рядов к расчету неразрезных балок-стенок и рандбалок читатель может найти в книге проф. Б. Н. Жемочкина «Теория упругости» (Стройиздат, 1957).

Использованием (11.28) решается указанный ниже пример (фиг. 11.37), причем ввиду симметричности деформации (а следовательно, и симметричности напряжений σ_x) относительно оси y достаточно было принять вторую



Фиг. 11.37 Многопролетная балка-стенка

часть ряда (при множителе $\cos \frac{n\pi}{l} x$), но для возможности удовлетворить всем условиям на контуре пришлось добавить еще полином второй степени в виде

$$D_1 x^2 + D_2 xy + D_3 y^2.$$

Для указанного случая получены следующие выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -2q \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\alpha y} (1 - \alpha y) \cos \alpha x; \\ \sigma_y &= -2q \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\alpha y} (1 + \alpha y) \cos \alpha x - q; \\ \tau_{xy} &= -2q \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\alpha y} (\alpha y) \cdot \sin \alpha x, \end{aligned} \quad (11.20)$$

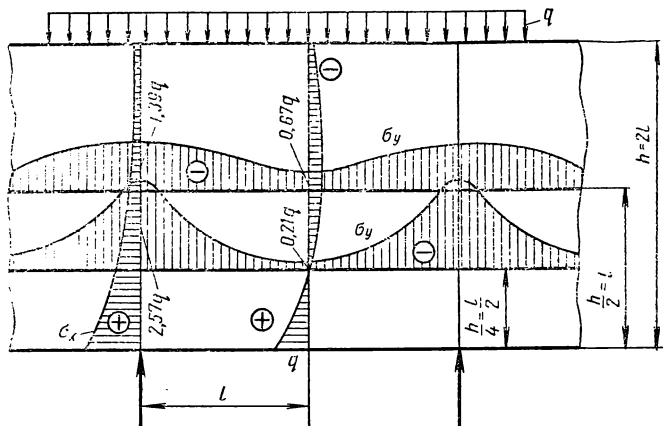
где

$$\alpha = \frac{n\pi}{l}.$$

На фиг. 11.38 показан один из средних (обследуемых) пролетов балки-стенки, имеющей вообще бесконечное число пролетов. На той же фигуре изображены эпюры σ_x и σ_y .

Ряды в (11.20) оказываются сходящимися быстро за исключением рядов для определения напряжений в точках, расположенных вблизи нижнего края балки-стенки (при малых y).

Краткие выводы по главе см. главу 13.



Эпюры σ_x и σ_y для частного случая $h=2l$

Фиг. 11.38 Эпюры σ_x и σ_y в балке-стенке для частного случая $h=2l$ (задача Б. Н. Жемочкина)

Литература к главе 11

1. Вайнберг Д. В. Сжатие диска с ободом сосредоточенными силами. Сборник трудов Киевского инженерно-строительного института, вып. VIII, Гостехиздат Украины, 1948.
2. Лурье А. И. Концентрация напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра ПММ, т. X, вып. 3, 1946.
3. Савин Т. Н. Концентрация напряжений около отверстий. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
- 4 и 5. Учебники Б. Н. Жемочкина, С. Н. Никифорова (см. стр. 229).

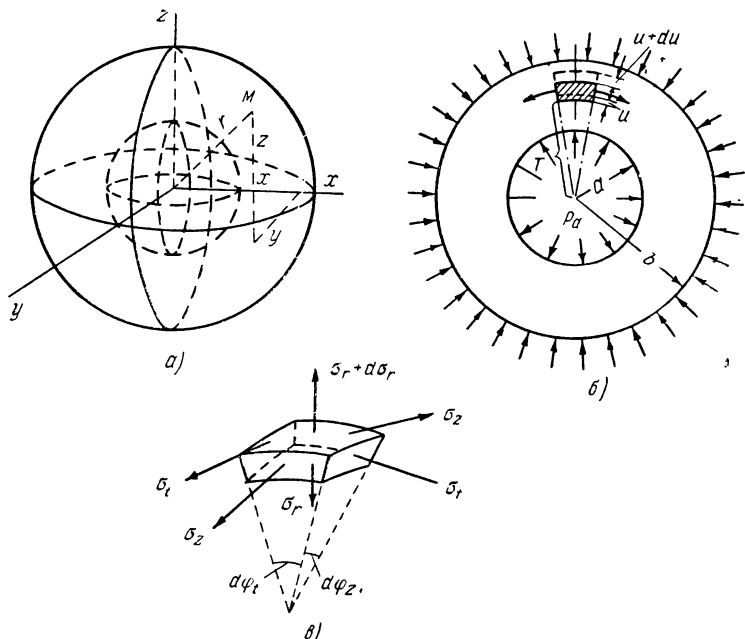
ПРОСТЕЙШИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 12.01. Полярно-симметричная деформация толстостенного сферического сосуда

При решении некоторых простейших задач, когда многие компоненты напряжений и деформаций отсутствуют, можно не прибегать к общим уравнениям теории упругости (в перемещениях или в напряжениях), которые, конечно, должны значительно упроститься, а все три необходимые стороны исследования (геометрическую, физическую и статическую) выполнить непосредственно применительно к рассматриваемому частному случаю. К такому случаю можно отнести задачу об упругом равновесии сферического сосуда.

Представим себе шаровой сосуд, подвергающийся действию внутреннего и внешнего равномерных давлений. Пусть a и b обозначают соответственно внутренний и наружный радиусы шара (фиг. 12.01), а p_a и p_b — внутреннее и наружное давления газов.

Начнем со статического обследования. Вырежем для исследования бесконечно малый элемент двумя парами взаимно перпендикулярных меридиональных сечений и двумя концентрическими сферическими поверхностями. Действие отброшенных частей сосуда заменим тангенциальными (σ_θ , σ_ϕ) и радиальными (σ_r) напряжениями. Так как в рассматриваемом случае, как в аналогичной задаче о равновесии толстостенной трубы (§§ 9.01) напряжения зависят только от текущего радиуса r , то напряжения по двум бесконечно близким друг к другу концентрическим поверхностям будут



Фиг. 12.01 Полярно-симметричная деформация толстостенного сферического сосуда

отличаться на величину $\frac{d\sigma_r}{dr} dr = d\sigma_r$ и не будут зависеть от угла θ — другого параметра, определяющего местоположение рассматриваемого элемента. Проектируя все силы на нормаль к элементу, имеем уравнение равновесия в виде:

$$-\sigma_r(r d\varphi_t)(r d\varphi_z) + (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)^2 d\varphi_t d\varphi_z - \\ - \sigma_t(r dr d\varphi_z) d\varphi_t - \sigma_z(r d\varphi_t dr) d\varphi_z = 0.$$

Имея в виду равенство $\sigma_t = \sigma_z$ и производя сокращения, получаем уравнения равновесия:

$$2(\sigma_r - \sigma_t) + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (12.01)$$

Переходим к геометрическому обследованию. Из рассмотрения перемещения и формоизменения элемента заключаем, что относительное тангенциальное удлинение выражается так:

$$\epsilon_t = \epsilon_z = \frac{(r + u) d\varphi_t - r d\varphi_t}{dr} = \frac{u}{r}, \quad (12.02)$$

а относительное радиальное удлинение:

$$\epsilon_r = \frac{(u + du) - (u)}{dr} = \frac{du}{dr}. \quad (12.03)$$

Переходим к физическому обследованию. Зависимость напряжений от деформаций при помощи закона упругости в данном случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{1}{E} [\sigma_t - \mu (\sigma_z + \sigma_r)]; \\ \sigma_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu (\sigma_t + \sigma_z)]. \end{aligned}$$

Напряжения через деформации выражаются (принимая во внимание равенство $\epsilon_t = \epsilon_z$ и $\sigma_t = \sigma_z$) так:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} (\epsilon_t + \mu \epsilon_r), \\ \sigma_r &= \frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} [2\mu \epsilon_t + (1 - \mu) \epsilon_r]. \end{aligned} \right\}. \quad (12.04)$$

Переходим теперь к обобщению полученных результатов. Данные геометрического обследования используем для преобразования полученных физических зависимостей, т. е. подставляем (12.02) и (12.03) в (12.04). Имеем:

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} \left[\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right]; \quad (a)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} \left[2\mu \frac{u}{r} + (1 - \mu) \frac{du}{dr} \right]. \quad (б)$$

Выражения (a) и (б) подставляем в уравнения статики (12.01), но для этого предварительно запишем $\frac{d\sigma_r}{dr}$, входящее в (12.01). Дифференцируя (б), имеем:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} \left[2\mu \frac{r \frac{du}{dr} - u}{r^2} + (1 - \mu) \frac{d^2u}{dr^2} \right]. \quad (в)$$

Подставляя (a), (б), (в) в (12.01), получим:

$$\begin{aligned} \frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} \left\{ 2 \cdot 2\mu \frac{u}{r} + 2(1 - \mu) \frac{du}{dr} - 2 \frac{u}{r} - 2\mu \frac{du}{dr} + \right. \\ \left. + 2\mu \frac{du}{dr} - 2\mu \frac{u}{r} + (1 - \mu) \frac{d^2u}{r dr^2} \right\} = 0 \end{aligned}$$

или после надлежащих сокращений

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - 2 \frac{u}{r^2} = 0, \quad (12.05)$$

что представляет собой уравнение, объединяющее в себе все три стороны исследования (геометрическую, физическую и статическую).

Общий интеграл дифференциального уравнения (12.05), как известно, имеет вид

$$u = \frac{A}{r^2} + Br. \quad (12.06)$$

Действительно, дифференцируя (12.06), находим:

$$\frac{du}{dr} = -\frac{2A}{r^3} + B; \quad \frac{d^2u}{dr^2} = \frac{6A}{r^4} \quad (z)$$

и, подставляя (12.06) и (z) в (12.05), имеем тождество:

$$\frac{6A}{r^4} + \frac{2}{r} \left[-\frac{2A}{r^3} + B \right] - 2 \left[\frac{A}{r^2} + Br \right] = 0.$$

Подставляя (12.06) и (z) в (a) и (б), получаем вместо дифференциальной формы выражения для напряжений в алгебраической форме:

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} \left[\frac{A}{r^3} (1 - 2\mu) + B(1 + \mu) \right]; \quad (d)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} \left[-\frac{2A}{r^3} (1 - 2\mu) + B(1 + \mu) \right]. \quad (e)$$

Постоянные интегрирования A и B определим из поверхностных условий, а именно:

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p_a \quad \text{и} \quad (\sigma_r)_{r=b} = -p_b.$$

Подставляя указанное в (e), имеем:

$$\frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} \left\{ -\frac{2A}{a^3} (1 - 2\mu) + B(1 + \mu) \right\} = -p_a,$$

$$\frac{E}{1 - \mu - 2\mu^2} \left\{ -\frac{2A}{b^3} (1 - 2\mu) + B(1 + \mu) \right\} = -p_b,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{(p_a - p_b)a^3b^3(1 - \mu - 2\mu^2)}{E(1 + \mu)(b^3 - a^3)}, \\ B &= \frac{(p_a a^3 - p_b b^3)(1 - \mu - 2\mu^2)}{E(1 + \mu)(b^3 - a^3)}. \end{aligned} \right\} \quad (жс)$$

Подставляя (ж) в (д) и (е), имеем окончательно:

$$\begin{aligned}\sigma_t &= p_a \frac{a^3 (2r^3 + b^3)}{2r^3 (b^3 - a^3)} - p_b \frac{b^3 (2r^3 + a^3)}{2r^3 (b^3 - a^3)}, \\ \sigma_r &= p_a \frac{a^3 (2r^3 + b^3)}{r^3 (b^3 - a^3)} + p_b \frac{b^3 (a^3 - r^3)}{r^3 (b^3 - a^3)}.\end{aligned}\quad (12.07)$$

Для случая одного внутреннего давления p_a наибольшее растягивающее тангенциальное напряжение будет на внутренней поверхности сосуда (при $r=a$):

$$\max \sigma_t = p_a \frac{2a^3 + b^3}{2(b^3 - a^3)},$$

а минимальное на наружной поверхности (при $r=b$):

$$\min \sigma_t = p_a \frac{3a^3}{2(b^3 - a^3)}.$$

Неравномерность распределения напряжений характеризуется отношением

$$\eta = \frac{\max \sigma_t}{\min \sigma_t} = \frac{2 + \beta^3}{3},$$

где обозначено

$$\beta = \frac{b}{a}.$$

При $\beta=3$ имеем

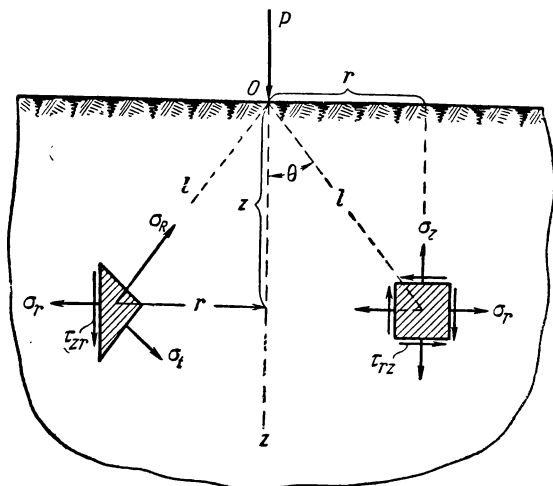
$$\eta = 9,67.$$

По существу приведенное здесь решение задачи теории упругости получено применением метода перемещений.

§ 12.02. Сосредоточенная сила, действующая на плоскость, ограничивающую полубесконечное тело

В § 11.10 была рассмотрена задача о распределении напряжений в полубесконечной пластинке от сосредоточенной силы, приложенной на внешнем крае. Аналогично упомянутой плоской задаче решена и трехмерная задача.

Пусть плоскость $z=0$ является гранью полубесконечного сплошного тела (т. е. это тело имеет безграничное простираание вниз в глубину и бесконечное же простираание в ширину); пусть на эту плоскость действует сосредоточенная сила P на оси z (фиг. 12.02). В литературе эта задача именуется задачей Буссинеска.



Фиг. 12.02 Сосредоточенная сила, действующая на плоскость, ограничивающую полубесконечное тело

Очевидно, в таком полубесконечном теле, иначе называемом *упругим полупространством*, напряжения в теле должны по мере удаления от силы P убывать быстрее, чем в полубесконечной пластинке.

Напрашивается для радиального напряжения принять в качестве первой попытки такое начертание

$$\sigma_R = -kP \frac{\cos \theta}{l^2}. \quad (12.08)$$

Переходя к цилиндрическим координатам, по формулам перехода должны тогда получить

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_R \cos^2 \theta \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{2} \sigma_R \sin 2\theta \end{aligned} \right\}. \quad (12.09)$$

Заменяя $\cos \theta = \frac{z}{l}$; $\sin \theta = \frac{r}{l}$; $\frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{rz}{l^2}$ и $l^2 = z^2 + r^2$,

имеем

$$\sigma_z = -kP \frac{\cos^3 \theta}{l^2} = -kP \frac{z^3}{l^5}; \quad (12.10)$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2} kP \frac{\cos \theta}{l^2} \sin 2\theta = -kP \frac{z^2 r}{l^5} \quad (12.11)$$

Для определения входящего в последние формулы коэффициента k составим уравнение равновесия по какому-либо горизонтальному сечению $z=a^*$.

Для элементарной площадки в виде бесконечно тонкого кольца шириной dr и радиусом r имеем элементарную внутреннюю силу

$$\sigma_z dF = 2\pi \sigma_z r dr.$$

Со всех таких элементарных площадок, т. е. со всего сечения $z=a$, имеем сумму внутренних усилий

$$2\pi \int_0^\infty \sigma_z r dr = -2\pi k P z^3 \int_0^\infty \frac{r dr}{l^5}. \quad (a)$$

Так как $l^2 = (z^2 + r^2)$, то, дифференцируя, имеем $2l dl = 2r dr$. Таким образом, (a) перепишется:

$$\begin{aligned} -2\pi k P r^3 \int \frac{dl}{l^4} &= -2\pi k P z^3 \frac{l^{-3}}{-3} = \\ &= \frac{2}{3} \pi k P z^3 (z^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} \Big|_0^\infty = -\frac{2}{3} \pi k P. \end{aligned}$$

Уравнение равновесия по сечению $z=a$ (сумма проекций на ось z) приводит к выражению

$$-\frac{2}{3} \pi k P + P = 0,$$

откуда

$$k = \frac{3}{2\pi}.$$

То, что выражения (12.10) и (12.11) дают точное решение задачи, можно доказать путем использования функции напряжений. Выполнение этой операции позволит определить нам также и другие компоненты напряжений (σ_θ , σ_r).

На основании (10.13, 10.14, 10.21) примем для функции напряжений следующее начертание:

$$\varphi = C_1 z \ln r + C_2 (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + C_3 z \ln \left(\frac{\sqrt{r^2 + z^2} - z}{\sqrt{r^2 + z^2} + z} \right), \quad (a')$$

* Можно, конечно, определить указанный коэффициент и аналогично тому, как это было сделано на стр. 257, если собирать давления с полушеры, вырезанной около точки приложения силы.

удовлетворяющее условиям неразрывности и равновесия, что было доказано ранее (§ 10.04). Используя (10.11) и (a'), имеем:

$$\tau_{rz} = C_2 \left[-(1-2\mu) r (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3rz^2 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right] + \\ + C_3 \left[-4\mu r (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 6rz^2 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right]; \quad (6')$$

$$\sigma_z = C_2 \left[-(1-2\mu) z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3z^3 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right] + \\ + C_3 \left[-4\mu z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 6z^3 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right]. \quad (8')$$

Так как на поверхности, т. е. при $z=0$, $\tau_{rz}=0$, то из (6') следует

$$C_3 = -\frac{1-2\mu}{4\mu} C_2. \quad (2')$$

Условие $(\sigma_z)_{z=0} = 0$ согласно (8') удовлетворяется. Ранее указанное условие равновесия по сечению $z=a$ даст значение

$$C_2 = \mu \frac{P}{\pi}, \quad (3')$$

и на основании (2') получим

$$C_3 = -\frac{(1-2\mu)P}{4\pi}. \quad (4')$$

Подстановка (3') и (4') в (6') и (8') приводит после сокращений к (12.10) и (12.11), чем и доказывается, что эти выражения являются окончательными.

На основании (10.11) далее имеем:

$$\sigma_r = \frac{C_1}{r^2} + C_2 \left[(1-2\mu) z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right] + \\ + C_3 \left[\frac{4z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + 4(1+\mu) z (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - \right. \\ \left. - 2 \frac{z^3}{r^2} (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 6z^3 (r^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right].$$

Для бесконечно удаленных точек (внизу) при $z=\infty$ должно быть $\sigma_r=0$. Это уравнение приводит к соотношению

$$C_1 = -2C_3 = \frac{1-2\mu}{2\pi} P.$$

Аналогично можно найти выражение и для σ_θ .

Окончательно формулы для напряжений примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{3}{2} \frac{P}{\pi} \frac{z^3}{l^5}, \\ \sigma_r &= -\frac{P}{2\pi} \left[\frac{1-2\mu}{l(l+z)} - \frac{3zr^2}{l^5} \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{P}{2\pi} (1-2\mu) \left[\frac{z}{l^3} - \frac{1}{l(l+z)} \right], \\ \tau_{rz} &= -\frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{z^2 r}{l^5} \end{aligned} \right\}. \quad (12.12)$$

Для определения перемещения используем (10.02). Компонент смещения вдоль радиуса r равен

$$u = \varepsilon_{\theta} r = \frac{r}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_r + \sigma_z)]. \quad (6)$$

После подстановки в (6) выражений (12.12) и преобразования получаем:

$$u = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{rz}{l^3} - (1 - 2\mu) \frac{r}{l^3 + l_z} \right].$$

При $l = \infty$, как и следует ожидать, $u = 0$. На основании этого:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_r + \sigma_{\theta})],$$

откуда

$$w = \frac{1}{E} \int [\sigma_z - \mu (\sigma_r + \sigma_{\theta})] dz + f(r). \quad (8)$$

После подстановки в (8) выражений (12.12) и интегрирования, принимая также очевидное положение, что $w_{r=\infty} = 0$, получаем из (8):

$$f(r) = 0 \text{ и } w = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{2(1 - \mu)}{l} + \frac{z^2}{l^3} \right]. \quad (12.13)$$

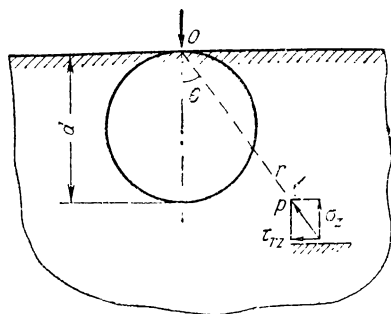
Для вертикальных перемещений точек на граничной плоскости $z = 0$ для так называемой «дневной поверхности» получим выражение:

$$\boxed{w_{z=0} = \frac{P(1 - \mu^2)}{\pi E r}}. \quad (12.14)$$

У начала координат, как это было и в плоской задаче, перемещения и напряжения становятся бесконечно большими*, и потому, чтобы избежать принципиальных затруднений при применении указанных выше выражений, необходимо представить, что у начала координат в области пластических деформаций материал вырезан полусферической поверхностью малого радиуса, а сосредоточенная сила P заменена статически эквивалентными усилиями, распределенными по этой поверхности.

Для самостоятельного упражнения можно предложить читателю доказать следующие особенности распределения напряжений в упругом пространстве от сосредоточенной силы.

* Если, однако, площадку действия силы P считать не равной нулю (см. § 12.03), то бесконечно больших давлений и перемещений не получим.



Фиг. 12.03 К вычислению полного напряжения на горизонтальной площадке

Полное напряжение в любой точке горизонтальной площадки (т. е. равнодействующая напряжений σ_z и τ_{zz} , см. фиг. 12.03) направляется к началу координат и равно:

$$p = \frac{3P}{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{l^2}.$$

Если, далее, очертить произвольным диаметром d сферу, касающуюся граничной плоскости в той же точке O , то по всем горизонтальным площадкам, размещенным на поверхности этой сферы, полные напряжения одинаковы и равны:

$$p = \frac{3P}{2\pi a^2}. \quad (12.15)$$

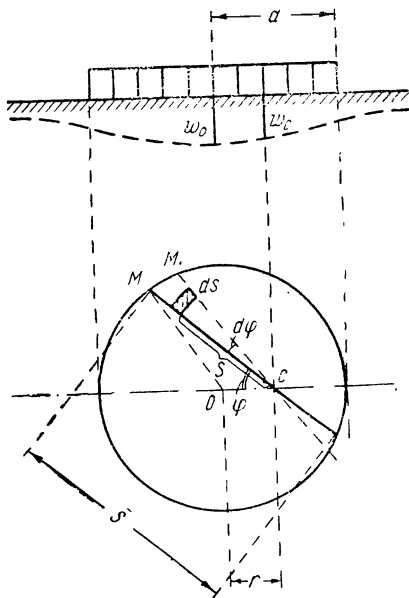
§ 12.03. Частные случаи загрузки упругого полупространства

а) **Равномерная загрузка по площади круга.** Имея решение для сосредоточенной силы, действующей на плоскую грань упругого полупространства, мы не встретим затруднений найти перемещения и напряжения, возникающие под действием распределенной нагрузки, если применим принцип сложения действия сил.

Пусть нагрузка общим весом P равномерно распределена на «дневной поверхности» полубесконечного тела по площади круга радиуса a . Интенсивность нагрузки будет равна $q = \frac{P}{\pi a^2}$.

Составим выражения для перемещения точки C , находящейся на «дневной поверхности», но в пределах загруженного круга (фиг. 12.04).

Проведем через точку C секущую MC , а в бесконечной близости другую — M_1C и рассмотрим влияние на «прогиб» точки C нагрузки, рас-



Фиг. 12.04 Равномерная загрузка упругого полупространства по площади круга

положенной на элементарной площадке, заштрихованной на фиг. 12.04. Эта площадка равна $dF = sd\varphi ds$, а нагрузка, на нее приходящаяся, будет

$$dP = qdF = qsd\varphi ds.$$

От такой нагрузки точка C должна опуститься согласно (12.14) на

$$d\omega = \frac{dP(1 - \mu^2)}{\pi Es},$$

т. е.

$$d\omega = \frac{1 - \mu^2}{\pi E} q ds d\varphi.$$

Полное перемещение точки C от всей нагрузки представится интегралом

$$\omega = \frac{1 - \mu^2}{\pi E} q \int ds \int d\varphi. \quad (a)$$

Из фиг. 12.04 ясно, что взятый по всей длине секущей интеграл составит:

$$\int ds = \bar{s} = 2\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}, \quad (b)$$

Тогда окончательно

$$\omega = 4q \frac{(1 - \mu^2)}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi. \quad (12.16)$$

Для «прогиба» в центре круга, т. е. при $r = 0$, имеем:

$$\omega_0 = \frac{2(1 - \mu^2)}{E} qa = \frac{2(1 - \mu^2)}{\pi a E} P. \quad (12.16a)$$

Таким образом, зная a , избавимся от бесконечности, получаемой по формуле (12.14).

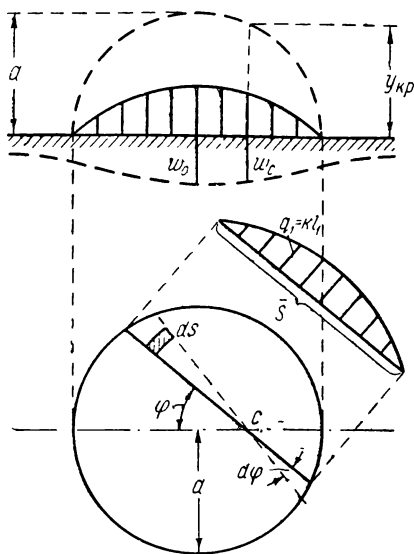
Для «прогиба» точек, лежащих на контуре загруженного круга, т. е. при $r = a$, получим:

$$\omega_a = \frac{4(1 - \mu^2)}{\pi E} qa.$$

Отношение перемещений двух характерных точек составляет:

$$\frac{\omega_0}{\omega_a} = \frac{\pi}{2} = 1,57.$$

Перемещения точек, лежащих внутри загруженного круга, но не в центре его, могут быть вычислены на основании (12.16) с помощью таблиц эллиптических интегралов.



Фиг. 12.05 Загрузка упругого полупространства по «полушару»

б) **Загрузка на площади круга по «полушару».** Рассмотрим случай, когда на площади круга радиуса a расположена нагрузка в виде шапки (фиг. 12.05) таким образом, что в любой точке загруженной территории интенсивность нагрузки пропорциональна ординате полусферы, имеющей радиус a и основанием которой служит упомянутая площадь круга.

Иначе говоря, интенсивность нагрузки в любой точке согласно обозначениям фиг. 12.05 записывается так:

$$q = k y_{\text{кр.}};$$

здесь $y_{\text{кр}}$ — ордината круга, имеющего радиус a , k — коэффициент нагрузки, т. е.

$$k = \frac{q_0}{a}, \quad (\text{в})$$

а q_0 — наибольшая интенсивность нагрузки (т. е. в центре загруженной территории); q_0 может быть выражена через общий вес

$$q_0 = \frac{P}{\frac{2}{3} \pi a^2}.$$

Для вычисления перемещения точки C , поступая аналогично предыдущему примеру, имеем:

$$w = \frac{1 - \mu^2}{\pi E} \int d\varphi \int q ds.$$

В данном случае интенсивность q , очевидно, нельзя вынести за знак интеграла.

Выясним геометрический смысл последнего интеграла. Из рассмотрения фиг. 12.05 следует, что

$$\int q ds = \Omega,$$

где Ω — площадь эпюры нагрузки на длине $\bar{s}$. Но так как,

рассекая сферу любой плоскостью, мы всегда в разрезе будем получать круг, то и в данном случае, рассекая нагрузку, в общем изображаемую «полусферой», мы всегда в разрезе должны получить «полукруг» (собственно говоря, этой фигурой в разрезе будет полуэллипс). Таким образом, можем записать

$$\Omega = \frac{\pi \bar{s}^2}{8} k,$$

где k — коэффициент, позволяющий перейти от геометрического полукруга к «полукругу» в кавычках, т. е. к нагрузке q (см. (6)). Итак,

$$\int q ds = \frac{\pi \bar{s}^2}{8} \frac{q_0}{a}$$

или на основании (6)

$$\int q ds = \frac{\pi}{2} (a^2 - r^2 \sin^2 \varphi) \frac{q_0}{a}. \quad (2)$$

Теперь для полного перемещения точки C имеем:

$$w = 2 \frac{1 - \mu^2}{\pi E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q_0}{a} \frac{\pi}{2} (a^2 - r^2 \sin^2 \varphi) d\varphi.$$

После интегрирования получаем:

$$w = w_0 - \beta r^2, \quad (12.17)$$

где обозначено

$$w_0 = \frac{1}{2} k_1 \pi^2 q_0 a; \quad (12.18)^*$$

$$\beta = \frac{k_1 \pi^2}{4a} q_0; \quad (12.19)$$

$$k_1 = \frac{1 - \mu^2}{\pi E}. \quad (12.20)$$

Если радиус изогнутой поверхности граничной плоскости будет велик по сравнению с радиусом загруженного круга (а это так обычно и бывает), то выражение (12.07) можно

* Выражению (12.19) можно придать такое начертание

$$w_0 = \frac{3(1 - \mu^2)}{4Ea} P.$$

Сличая последнее выражение с (12.16а), заключаем, что замена нагрузки «по полушару» на равномерно распределенную нагрузку по площади того же круга мало изменяет окончательный результат для прогиба в центре нагружения, уменьшения его в $3/4 : 2/\pi \approx 1,19$ раза.

практически считать уравнением некоторой сферической поверхности.

в) **Обратная задача.** Очевидно, можно решать и обратные задачи, когда задано уравнение изогнутой «дневной поверхности» и требуется найти уравнение нагрузки, вызвавшей такую деформацию.

Возьмем, например, абсолютно жесткий штамп в виде круглого цилиндра, вдавливаемого в плоскую грань упругого полупространства.

В этом случае перемещение w для всех точек будет постоянным по круглой подошве штампа; распределение давлений не будет постоянным и должно определяться в результате решения интегрального уравнения:

$$\frac{1-\mu^2}{\pi E} \iint q ds \cdot d\varphi = w_0 = \text{const.}$$

Решение такого уравнения приводит к результату (задача Чаплыгина-Садовского):

$$q = \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}, \quad (12.21)$$

где P — полная нагрузка на штамп, a — радиус штампа и r — радиус круга, на который действует давление q . Это распределение неравномерно и наименьшее его значение в центре ($r=0$), где

$$q_{\min} = \frac{P}{2\pi a^2}, \quad (12.22)$$

т. е. наименьшее давление равно половине среднего давления по круговой площади подошвы штампа.

На контуре этой площади ($r=a$) давление становится бесконечно большим. В действительности на контуре мы в таком случае штампа всегда должны иметь явления текучести. Однако эта текучесть будет иметь местный характер и не будет оказывать существенного влияния на распределение напряжений в точках, находящихся на некотором расстоянии от контура круга.

Перемещение штампа выразится формулой

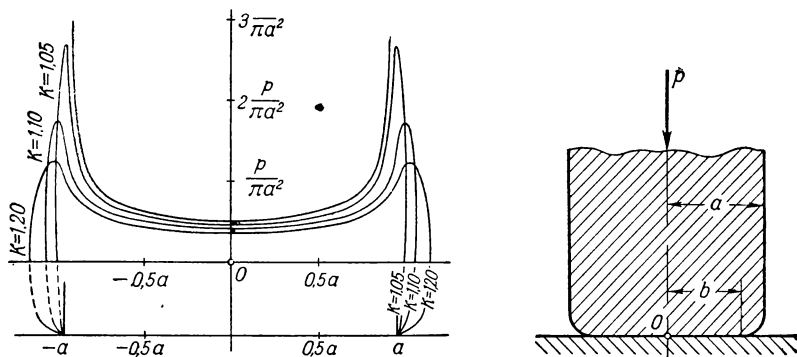
$$w_0 = \frac{P(1-\mu^2)}{2Ea}. \quad (2.23)$$

Между прочим заметим, что если подсчитать среднюю величину деформации в случае равномерного распределения

давлений, то получим величину, мало отличающуюся от перемещения абсолютно жесткого штампа, а именно:

$$w_{\text{ср}} = \frac{\int_0^a w 2\pi r dr}{\pi a} = 0,54 \frac{P(1-\mu^2)}{aE}.$$

Если предположить, и это более вероятно, что края штампа имеют некоторое закругление краев, как это показано на фиг. 12.06, то распределение напряжений у краев штампов может существенно измениться. Такая сложная контактная



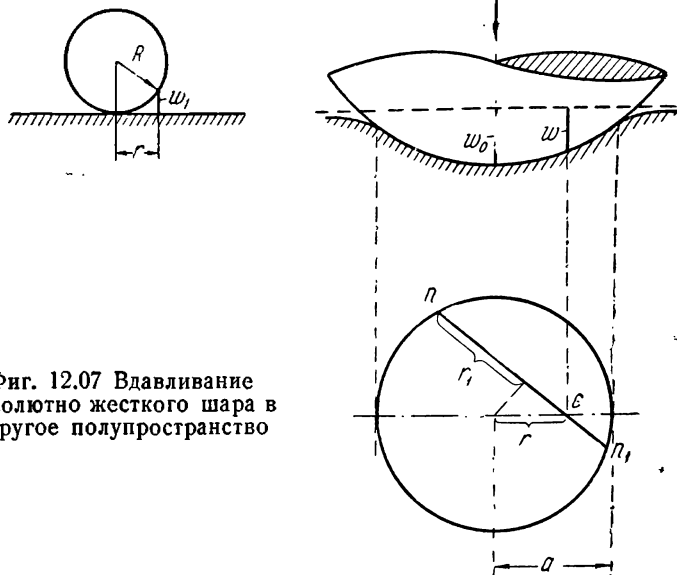
Фиг. 12.06 Распределение напряжений под круглым штампом в зависимости от смятения профиля закраины (задача И. Я. Штаермана)

задача была поставлена впервые И. Я. Штаерманом* и привела его к ответу, представленному графиком на фиг. 12.06. В частности, это решение свободно от бесконечно больших напряжений, не имеющих реального значения. На указанном графике через k обозначено $k = a/b$. Само собой очевидно, что распределение напряжений (в основном у краев) зависит также от кривизны закраин.

§ 12.04. Вдавливание абсолютно жесткого шара в упругое полупространство

Представим себе, что на упругом полупространстве покоится жесткий шар радиуса R (фиг. 12.07). Если нет давления на этот шар и исключить влияние собственного веса, то

* И. Я. Штаерман. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949, стр. 196.



Фиг. 12.07 Вдавливание абсолютно жесткого шара в упругое полупространство

касание шара с граничной плоскостью полупространства будет в точке. На расстоянии от точки касания, малом по сравнению с R , зазор между шаром и граничной плоскостью может быть, как известно, с достаточным приближением определен формулой:

$$w_1 = \frac{r^2}{2R}. \quad (a)$$

Если к шару будет приложена нагрузка, нормальная к первоначальной граничной плоскости и проходящая через центр шара, то вследствие упругости полупространства граничная плоскость изогнется и шар опустится, как это показано на фиг. 12.07 (справа).

Ввиду симметрии деформации относительно оси, совпадающей с направлением силы, площадка контакта шара с деформированной граничной поверхностью упругого полупространства будет, очевидно, представлять в плане круг некоторого радиуса a ; закон распределения давления под шаром не известен, подлежит определению.

Очевидно, эпюра этого давления должна представлять фигуру, симметричную относительно оси, совпадающей с силой.

Для вычисления прогиба какой-либо точки c упругого полупространства, лежащей в пределах площадки контакта, можно провести рассуждения, аналогичные описанным в предыдущем параграфе (см. фиг. 12.04).

Так, проведя через точку c в плане бесконечно близкие секущие cM и cM_1 , вычислим нагрузку, приходящуюся на бесконечно малую площадку dF , отстоящую на расстоянии s от точки c . Если напряжение смятия у этой площадки обозначим через q , то элементарная сила на площадке dF (стр. 285) составит:

$$dP = qdF = q \cdot s \cdot d\varphi \cdot ds. \quad (б)$$

Влияние этой элементарной силы на опускание точки c определится согласно (12.14) так:

$$\frac{dP(1 - \mu^2)}{\pi Es}$$

или после подстановки (б)

$$qd\varphi ds \frac{1 - \mu^2}{\pi E}.$$

Влияние на прогиб рассматриваемой точки c всех элементарных давлений со всей площади контакта шара и упругого полупространства оценится интегралом:

$$w = k_1 \iint q d\varphi ds, \quad (в)$$

где по-прежнему

$$k_1 = \frac{1 - \mu^2}{\pi E}.$$

В выражении (в) неизвестными являются w и функция распределения давления q . С другой стороны, из чисто геометрических соображений, поскольку шар не деформируется следует (фиг. 12.07) что

$$w = w_0 - w_1 \quad (г)$$

где w_0 — опускание шара (и одновременно «прогиб» полупространства) в центре касания, а w_1 — первоначальный зазор между шаром и граничной плоскостью. На основании (а) имеем

$$w = w_0 - \beta_1 r^2, \quad (д)$$

где обозначено

$$\beta_1 = \frac{1}{2R}. \quad (е)$$

Уравнение (д) выражает условие, что «упругая поверхность» полупространства представляет под шаром часть поверхности этого шара. Объединяя (с) и (д), имеем:

$$k_1 \int \int q d\varphi ds = w_0 - \beta_1 r^2. \quad (12.24)$$

В выражении (12.24) неизвестная функция q входит под знак интеграла и, следовательно, (12.24) является интегральным уравнением. Но именно такое же уравнение имелось в предыдущем параграфе, где, наоборот, была известна нагрузка (она была задана по «полушару»), а определялся характер изгиба граничной плоскости.

На основании сходства правых частей (12.24) и (12.17) заключаем, что эпюра распределения давления по площади контакта представляет «полушар». Таким образом, если давление в центре контакта обозначим через q_0 , то на расстоянии r от этого центра давление составляет:

$$q = q_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \quad (15.25)$$

а при $r=a$ (на контуре круга касания) обращается в нуль.

Все выражения предыдущего параграфа (§ 12.04) целиком относятся и к данной задаче, т. е.

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \frac{1}{2} k_1 \pi^2 q_0 a, & \frac{k_1 \pi^2}{4a} q_0 &= \beta_1, \\ P &= \frac{2}{3} \pi a^2 q_0. \end{aligned} \right\} \quad (12.26)$$

Решая (12.26) относительно a , q_0 и w_0 , имеем:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{8} \frac{k_1 P}{\beta_1}}; \quad (12.27)$$

$$q_0 = \sqrt[3]{\frac{24}{\pi^5} \left(\frac{\beta_1}{k_1}\right)^2 P}; \quad (12.28)$$

$$w_0 = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{8} \beta_1 k_1^2 P^2}. \quad (12.29)$$

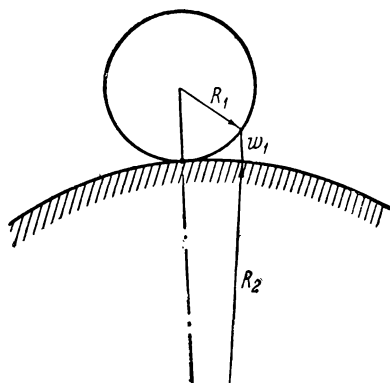
§ 12.05. Замечание к задаче об упругом смятии шаров

Представим, что абсолютно жесткий шар радиуса R_1 покоится на упругом теле сферической формы, имеющей очень большой радиус R_2 , и в дальнейшем подвергается действию силы P (фиг. 12.08). При вычислении глубины вдавливания

радиуса площадки контакта и наибольшего напряжения смятия под указанным шаром можно использовать формулы (12.27) — (12.29), введя вместо прежнего β_1 новое значение β_2 , определяемое выражением:

$$\beta_2 = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2}. \quad (12.30)$$

Последнее выражение вытекает из зависимости, составляемой для выбираемого первоначального зазора w_1 в случае касания двух сферических тел (фиг. 12.08), а именно в данном случае имеем:



Фиг. 12.08 Вдавливание абсолютно жесткого шара в упругую «почти бесконечную» сферу

$$w_1 = \frac{r^2}{2R_1} + \frac{r^2}{2R_2} = \beta_2 r^2.$$

Таким образом, при вдавливании жесткого шара в «почти бесконечную» сферу получаем:

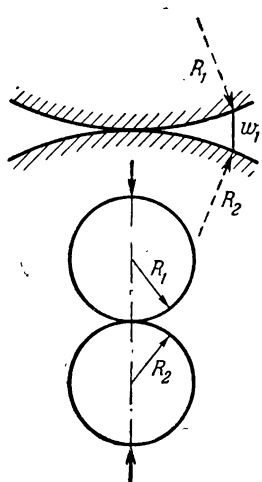
$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \frac{R_1 R_2 k_1}{R_1 + R_2} P}, \quad (12.31)$$

$$q_0 = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi^5 k_1^2} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2} P}, \quad (12.32)$$

$$w_0 = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2 k_1^2}{16} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} P^2}. \quad (12.33)$$

Указанные формулы (12.31—12.33) практически могут употребляться лишь в случае, если радиус площадки смятия a будет весьма малым по сравнению с радиусом сферы R_2 , вследствие чего последнюю можно при небольших размерах вдавливаемого шара считать «полубесконечным» телом, закон деформации которого был положен в основание вывода формул (12.27—12.29).

Если теперь представить случай двух упругих «почти бесконечных» сфер, взаимно вдавливаемых силами P (фиг. 12.09), т. е. верхнюю сферу считать не абсолютно жесткой, а способной деформироваться, то в этом случае можно воспользоваться выводами предыдущей задачи (12.31—12.33), если



Фиг. 12.09 Упругое смятие шаров

ввести изменение в коэффициент, зависящий от упругих свойств материалов, т. е. вместо k_1 подставить

$$k = k_1 + k_2, \quad (12.34)$$

где

$$k_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1}; \quad k_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2},$$

E_1 и μ_1 — упругие характеристики материала верхней сферы; E_2 и μ_2 — то же нижней сферы.

Возможность такого простого перехода от формул (12.31 — 12.33) вытекает из тех соображений, что в данной задаче ввиду деформаций обеих сфер исходное уравнение деформации (12.24) должно быть записано в виде:

$$k_1 \iint q d\varphi ds + k_2 \iint q d\varphi ds = w_0 - \beta r^2. \quad (12.35)$$

Последнее после введения обозначения (12.34) приводится к виду (12.24) с заменой k_1 и k_2 .

Так как при сжатии упругих шаров радиус площадки смятия оказывается очень малым по сравнению с радиусами самих шаров, то рассмотренная сейчас задача о сжатии двух «почти бесконечных» сфер может быть практически использована и в задаче об упругом сжатии шаров (задача Герца). Итак, при сжатии шаров имеем:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{(k_1 + k_2) R_1 R_2}{R_1 + R_2} P}; \quad (12.36)$$

$$q_0 = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi^5 (k_1 + k_2)^2} \cdot \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 \cdot R_2^2} P}; \quad (12.37)$$

$$w_0 = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2 (k_1 + k_2)^2 (R_1 + R_2)}{16 R_1 R_2} P^2}. \quad (12.38)$$

Зная закон распределения давления по поверхности контакта, можно перейти к вычислению напряжений внутри шаров, используя для этой цели (12.12) и применяя принцип наложения.

Большой практический интерес представляет нахождение внутри сжимаемых шаров точек, имеющих большие касательные напряжения.

Исследование этого вопроса * приводит к выводу, что

* Н. М. Беляев. Сопротивление материалов. Гостехиздат, 1950, стр. 151.

точка, где касательное напряжение является наибольшим, лежит на оси z на глубине, равной примерно половине радиуса поверхности касания.

Такую точку и следует рассматривать как самую опасную (в свете третьей теории прочности) для таких пластичных материалов, как сталь. Наибольшее касательное напряжение в этой точке (при $\mu = 0,3$) составляет примерно 0,31 ρ_0 .

Из (12.36—12.38) следует, что радиус площадки смятия, взаимное вдавливание и напряжения смятия не находятся в линейной зависимости от силы P . При увеличении силы P напряжения и деформации шаров возрастают медленнее, чем возрастает сила.

Таким образом, в контактной задаче принятие в основу исследования линейной связи между компонентами напряжений и компонентами деформации в каждой точке упругого тела (обобщенный закон Гука) повлекло за собой *нелинейную зависимость между силой и перемещениями*.

Более сложные контактные задачи теории упругости (общий случай касания поверхностей второго порядка, учет сил трения по площадке контакта и т. д.) решены в ряде работ советских ученых: Н. И. Мухелишвили, А. Н. Динника, Н. М. Беляева, А. И. Лурье, Л. А. Галина, Н. А. Кильчевского, Д. В. Вайнберга*, В. М. Макушина и др.

Интересующихся теорией контактных задач отсылаем к капитальному сочинению чл.-корр. АН УССР проф. И. Я. Штаерману «Контактная задача теории упругости» (1949), содержащему также много новых и важных решений, принадлежащих автору.

Краткие выводы по главе — см. главу 13.

Литература к главе 12

1. Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Москва, 27—1—3—11—1960 г. Аннотации докладов. Изд. АН СССР, М. 1960 г. (См. аннотации докладов Н. Х. Арутюнян — по плоской контактной задаче теории ползучести, В. И. Бойко — о решении задачи Герца при возникновении внутренних областей пластичности).
2. Саверин М. М. Контактная прочность материала в условиях одно-временного действия нормальной и касательной нагрузок. Машгиз, М.—Л, 1946.
3. Шапиро Г. С. Напряжения у отверстия в бесконечном клине. Труды Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина, № 3, 1941.
4. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.

* См. его обширную монографию «Напряженное состояние составных дисков и пластин», Изд-во АН УССР, Киев, 1952 г., где рассмотрено много важных для машиностроительной практики задач.

ПРОСТЕЙШИЕ ОБРАТНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ* ТЕОРИИ УПРУГОСТИ (КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ)

§ 13.1. Чистое кручение стержня круглого поперечного сечения

К числу задач теории сопротивления материалов, оправдываемых точным решением теории упругости, является, как указано выше (§ 11.01) и задача о чистом кручении стержня, когда его поперечное сечение круглое или кольцевое. Для этого случая (фиг. 13.01) сопротивление материалов, как известно, дает выражение для напряжения:

$$\tau = \frac{M_z}{I_p} r, \quad (a)$$

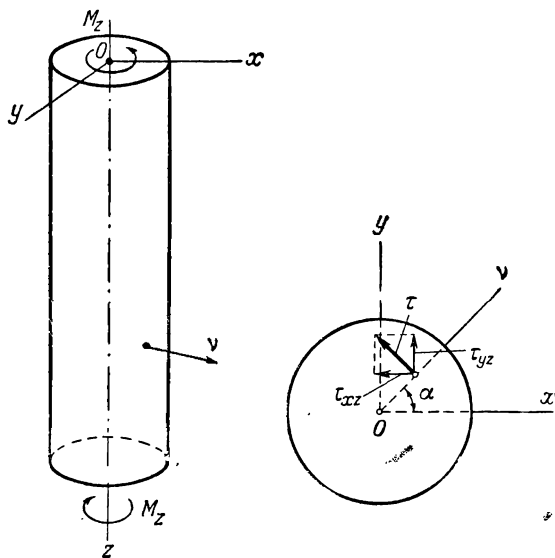
где $I_p = \int_F r^2 dF$ — полярный момент инерции сечения;

M_z — величина крутящего момента,

r — расстояние от оси стержня до рассматриваемой точки.

Касательное напряжение, согласно (a), действующее в поперечном сечении, имеет направление, нормальное к радиусу. Прочие составляющие напряжений отсутствуют.

* Название «обратно-симметричные» имеет в виду подчеркнуть, что в рассматриваемых здесь простых задачах всегда имеются плоскости, проходящие через ось стержня, по отношению к которой распределение напряжений по одну и другую сторону будет именно обратно-симметричным.



Фиг. 13.01 Случай чистого кручения

Разлагая напряжения (σ) на слагающие, параллельные осям Ox и Oy , находим (фиг. 13.01):

$$\tau_{xz} = -\tau \sin \alpha, \quad (6)$$

$$\tau_{yz} = \tau \cos \alpha,$$

где

$$\sin \alpha = \frac{y}{r},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}.$$

Таким образом,

$$\tau_{xz} = -ky, \quad (8)$$

$$\tau_{yz} = kx;$$

где

$$k = \frac{M_z}{I_p}. \quad (2)$$

Так как напряжения (σ) являются функциями не выше первой степени от координат точки, то данная задача относится к простейшим, т. е. уравнения неразрывности деформаций (3.09) удовлетворяются сами собой; поэтому придется удовлетворить только уравнениям равновесия (3.04) и контурным условиям. Подставляя (8) в (3.04), находим:

$$X = Y = Z = 0,$$

т. е. напряжения (σ) возможны при условии отсутствия объемных сил (например, собственного веса стержня).

Переходим к условиям на поверхности стержня. Легко видеть, что на боковой поверхности всюду $\cos(vz) = 0$, далее:

$$\cos(vx) = \cos \alpha = \frac{x}{r};$$

$$\cos(vy) = \sin \alpha = \frac{y}{r}.$$

Подставляя (σ) в (2.05), имеем:

$$p_{xv} = p_{yv} = p_{zv} = 0,$$

т. е. боковая поверхность свободна от нагрузки.

На концевом поперечном сечении имеем:

$$\cos(vx) = \cos(vy) = 0, \quad \cos(vz) = 1;$$

таким образом,

$$p_{xv} = \tau_{xz} = -ky, \quad p_{yv} = \tau_{yz} = kx, \quad p_{zv} = 0,$$

следовательно, здесь приложены только касательные напряжения.

Равнодействующая концевых усилий равна нулю, в чем легко убедиться, если проинтегрировать выражения:

$$\int_F \tau_{xz} dF, \quad \int_F \tau_{yz} dF$$

и принять во внимание, что равны нулю статические моменты

$$\int_F x dF = \int_F y dF = 0,$$

так как начало координат помещено в центре тяжести сечения. Момент крутящей пары вокруг оси Oz равен:

$$M_z = \int_F (-\tau_{xz}y + \tau_{yz}x) dF = k \int_F (y^2 + x^2) dF = kI_p,$$

что согласуется с (2).

Предлагается читателю самостоятельно продолжить с помощью остальных уравнений теории упругости рассматриваемую задачу и показать, что при кручении круглого бруса любое его поперечное сечение остается при деформации плоским, не выходит из своей первоначальной плоскости (как иногда говорят в технике, *не деформируется*), а поворачивается, как одно целое (иначе говоря, контур сечения недеформируется).

Если один из концов стержня, например нижний, будет тем или иным образом закреплен от поворота (например — приварен к опорной плоскости), то, очевидно, это не изменит указанного выше закона распределения напряжения; реактивный момент в опорном закреплении будет равен значению того момента, который как внешний (активный) показан на фиг. 13.01. И так как поперечные сечения при кручении стержня круглого сечения не деформируются, то никакого стеснения деформации опорного сечения и в его окрестности не произойдет (отсюда и происходит название такой задачи как чистое, т. е. свободное, нестесненное кручение).

§ 13.02. Кручение некруглых сечений. Задача Сен-Венана

При рассмотрении кручения круглого сечения (§ 13.01) оказалось, что поперечные сечения поворачиваются как одно целое и при этом остаются плоскими. При кручении некруглых сечений опыт показывает, что поперечные сечения стержня непременно искривляются. Нетрудно было бы показать, что предположение о неискривляемости таких сечений находится в противоречии с законом о взаимности касательных напряжений*.

Неприемимость гипотезы плоских сечений в задаче о кручении некруглого сечения оставалась незамеченной несколько десятков лет и приводила к явно нелепым результатам (см. стр. 37). Ниже излагается решение Сен-Венана (1855 г.), которое допускает, что *поперечные сечения при кручении искривляются*, но предполагает, что перемещения точек, лежащих в плоскости поперечных сечений, происходят так, что проекция деформированного сечения на плоскость, перпендикулярную оси, сохраняет первоначальную форму сечения.

Нормальные напряжения в поперечном сечении стержня по-прежнему, как и в теории чистого кручения, примем равными нулю.

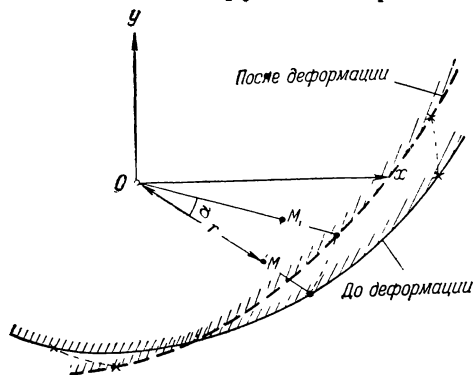
Совместим ось z с осью кручения (т. е. осью, которая при кручении остается на месте), а оси x и y расположим пока совершенно произвольно в плоскости поперечного сече-

* Если боковая поверхность стержня свободна от нагрузки (а это соблюдается во всех задачах на кручение, где усилия прикладываются в виде крутящих пар по торцам стержня), то касательные напряжения в поперечном сечении в точках, примыкающих к контуру сечения, не могут пересекать свободную от нагрузки поверхность тела. Иначе говоря, они имеют направление по касательной к соответствующим точкам контура. Таким образом, явления, когда касательные напряжения перпендикулярны к вектору, проведенному из центра кручения, как это было в случае круглого сечения (как следствие закона плоских сечений), при кручении некруглых сечений не имеется.

ния. Указанным выше предположениям о характере смещений при кручении будет соответствовать смещение точки M в направлении, перпендикулярном к радиусу (фиг. 13.02):

$$\widetilde{MM_1} = \alpha r,$$

где α — угол закручивания рассматриваемого сечения.



Фиг. 13.02 Смещение точки M при кручении в случае недеформируемости контура сечения

Если стержень имеет постоянное сечение на всей длине и подвержен действию крутящих моментов, приложенных только по его концам, то естественно считать, что касательные напряжения во всех поперечных сечениях распределяются по одному и тому же закону. Также естественно считать, что угол закручивания сечения будет пропорционален расстоянию этого сечения от того сечения, по отношению к кото-

рому исчисляются α . Проще всего считать, что один из концов стержня не закручивается; тогда $\alpha = \vartheta \frac{z}{l}$, где l — длина стержня, z — расстояние рассматриваемого сечения от закреплений, а ϑ — угол закручивания одного (свободного) конца стержня относительно другого (закрепленного). Очевидно, что ϑ и l должны в дальнейшем расчете выступать на правах постоянных величин.

Компоненты смещения u и v запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\widetilde{MM_1} \sin \alpha = -\vartheta \frac{z}{l} y, \\ v &= \widetilde{MM_1} \cos \alpha = \vartheta \frac{z}{l} x. \end{aligned} \right\} \quad (13.01)$$

Компоненты смещения той же точки M вдоль оси z , характеризующие выход точки M из первоначальной позиции сечения (вследствие деформации сечения), нам не известны, и логично предположить, что каждой точке в поперечном сечении соответствует своя деформация, т. е.

$$w = f(x, y), \quad (13.02)$$

и не зависящая от координаты z .

Удобно для последующих преобразований переписать (13.02) в виде:

$$w = \frac{\vartheta}{l} \varphi(x, y), \quad (13.03)$$

где φ есть неизвестная функция от x и y , учитывающая искривление (депланацию) поперечного сечения.

С помощью геометрических уравнений теории упругости, (3.08) при сделанных предположениях, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \vartheta \frac{z}{l} (-1 + 1) = 0, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\vartheta}{l} \left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\vartheta}{l} \left(-y + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13.04)$$

Соответственно касательные напряжения запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = 0; \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = G \frac{\vartheta}{l} \left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right); \\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} = G \frac{\vartheta}{l} \left(-y + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13.05)$$

Все компоненты нормальных напряжений в площадках, параллельных координатным, как это сказано выше, примем равными нулю, т. е.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0. \quad (13.06)$$

Подставим (13.05) и (13.06) в статические уравнения (3.04). В первом и втором уравнениях пропадут все члены, а в третьем останутся только два члена и уравнение примет вид:

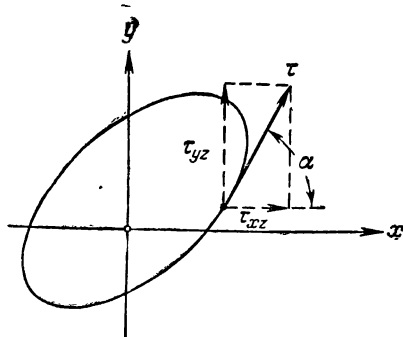
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = G \frac{\vartheta}{l} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] = 0$$

или

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.} \quad (13.07)$$

Функция, удовлетворяющая условию (13.07), как известно, называется гармонической, а в данном случае — *функцией кручения Сен-Венана*. В символической записи (13.07) имеет вид:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (13.08)$$



Фиг. 13.03 К написанию граничных условий при кручении

Таким образом, статические уравнения и принятые предположения о характере перемещения (13.03), а следовательно, и напряжений накладывают условия на функцию φ .

Для полного определения функции φ необходимо задание ее граничных значений, т. е. значений на контуре поперечного сечения. Так как на контуре поперечного сечения, иначе говоря, на внешней поверхности стержня (исключая торцевые сечения стержня),

никаких внешних сил нет, то касательные напряжения в поперечном сечении контура должны быть направлены по касательной к контуру (фиг. 13.03). Последнее требование приводит к соотношению

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}$$

или

$$\tau_{yz} dx - \tau_{xz} dy = 0, \quad (a)$$

где dx и dy означают проекции элемента дуги контура поперечного сечения на оси x и y .

Подставляя выражения касательных напряжений (13.05) в граничное условие (a), получим для определения значений функции φ на контуре уравнение:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + x dx + y dy = 0. \quad (13.09)$$

Дальнейшие вычисления значительно упрощаются, если взамен гармонической функции φ ввести так называемую сопряженную ей (и также гармоническую) функцию ψ , связанную с функцией φ зависимостями:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (13.10)$$

причем, очевидно,

$$\nabla^2 \psi = 0.$$

При такой замене (13.10) уравнение (13.09) переписывается так:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy - x dx - y dy = 0. \quad (13.11)$$

Интеграл этого уравнения может быть записан* в виде

$$\psi(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}. \quad (13.12)$$

Таким образом, задача о кручении стержня с произвольным поперечным сечением может считаться решенной, если для рассматриваемого сечения определена функция ψ (или φ), которая внутри сечения удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2\psi = 0$, а на контуре сечения принимает значения $\frac{x^2 + y^2}{2}$.

Зная ψ , можно далее найти функцию φ , определяющую согласно (13.03) форму поверхности, которую принимает после кручения (форму деформации), первоначально (до деформации) плоское сечение.

Вместо функции ψ можно ввести и так называемую функцию напряжений Прандтля $F(x, y)$, связанную с ψ соотношением

$$F = \psi - \frac{x^2 + y^2}{2}. \quad (13.13)$$

Удобство введения такой функции заключается в том, что на контуре функция $F = 0$, что с очевидностью следует, если подставить в (13.13) условие (13.12). Внутри контура поперечного сечения функция удовлетворяет тогда дифференциальному уравнению:

$$\nabla^2 F = \nabla^2 \psi - \nabla^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) = -2. \quad (13.14)$$

При пользовании функцией F упрощаются также выражения для касательных напряжений. Последние взамен (13.05) принимают начертание:

$$\tau_{yz} = -G \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial F}{\partial x}; \quad \tau_{xz} = G \frac{\partial}{\partial l} \frac{\partial F}{\partial y}; \quad (13.15)$$

через функцию F крутящий момент M_k записывается так:

$$\begin{aligned} M_k &= \iint (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dx dy = \\ &= -G \frac{\partial}{\partial l} \iint \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (13.16)$$

* В случае многосвязного контура, т. е. имеющего внутренние полости (которого мы здесь не рассматриваем), пришлось бы включить в (13.12) еще постоянную интегрирования C .

Дважды интегрируя (13.16) по частям и имея в виду граничное условие для F (на контуре $F=0$), получаем:

$$M_k = 2G \frac{\vartheta}{l} \iint F dx dy. \quad (13.17)$$

Эта важная формула принадлежит Прандтлю. Интеграл в правой части (13.17) есть не что иное, как объем, ограниченный поверхностью F и плоскостью xu , причем пересечением поверхности F с плоскостью xu является контур поперечного сечения (так как согласно граничному условию функция F принимает значение $F=0$ именно на контуре). Следовательно, поверхность $F(x, y)$ возвышается над поперечным сечением стержня в виде бугра и поэтому называется *бугром напряжений*.

Таким образом, выражение (13.17) показывает, что крутящий момент M_k равен объему бугра напряжений, увеличенному в $2G \frac{\vartheta}{l}$ раз. Из выражения (13.15) следует, что *касательное напряжение в каждой точке поперечного сечения пропорционально уклону бугра напряжений*.

Выражение (13.17) иногда записывают в форме

$$M_k = C \frac{\vartheta}{l}, \quad (13.18)$$

где

$$C = 2G \iint F dx dy \quad (13.19)$$

называется *жесткостью при кручении*.

Выражения для напряжений (13.15) и крутящего момента (13.17) послужили основанием для так называемой *мембранной аналогии Прандтля*. Суть аналогии заключается в следующем: пусть однородная мембрана постоянной толщины оперта по контуру такого же очертания, как и поперечное сечение скручиваемого стержня, и нагружена равномерной нагрузкой q , а по контуру подвергнута постоянному натяжению T . Оказывается, что теоретически подсчитанная при указанных условиях нагружения и закрепления поверхность прогиба такой мембраны будет подобна функции напряжений при кручении.

На контуре мембраны прогиб равен нулю, так же как на контуре поперечного сечения функция напряжений $F=0$.

Исходные дифференциальные уравнения для прогиба мембраны и для функции напряжений F совпадут полностью, если назначить

$$\frac{q}{T} = 2G \frac{\vartheta}{l}.$$

Простое доказательство сходства дифференциальных уравнений для функции F и прогиба мембраны имеется в книге М. М. Филоненко-Бородича «Теория упругости» (стр. 205—211, М., 1947). В указанной книге имеется много примеров использования этой аналогии для различных случаев поперечных сечений стержня, в том числе и для многосвязных.

§ 13.03. Кручение эллиптического сечения

Пусть поперечное сечение стержня представляет эллипс с полуосями a и b . Так как на контуре эллипса, где

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

функция напряжений F должна быть равна нулю, то, очевидно, ее можно взять в виде:

$$F = A \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (13.20)$$

Коэффициент определим из условия, что внутри контура согласно (13.14) должно быть: $\nabla^2 F = -2$. Подставляя (13.20) в (13.14), получаем:

$$A = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \quad (13.21)$$

Располагая теперь формулой для F , с помощью зависимостей (13.15), (13.16) получаем:

$$M_k = \frac{G \vartheta \pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}; \quad (13.22)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2M_k}{\pi a b^3} y; \quad \tau_{yz} = \frac{2M_k}{\pi a^3 b} x. \quad (13.23)$$

Полное касательное напряжение равно:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{2M_k}{\pi a b} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^4 + b^4}}$$

и достигает наибольшего значения в концах малой оси (т. е. при $a > b$, при $y = \pm b$):

$$\tau_{\max} = \frac{2M_k}{\pi a b^2}. \quad (13.24)$$

Так как площадь эллиптического сечения $\Omega = \pi a b$, а полярный момент инерции того же сечения

$$I_p = I_x + I_y = \frac{\pi a b^3}{4} + \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2),$$

то (13.22) можно переписать в виде:

$$M_k = G \frac{\vartheta}{l} \frac{\Omega^4}{\pi^2 I_p}. \quad (13.25)$$

Эта формула, принципиально применимая только для эллиптического сечения, широко используется в практике при вычислении крутящего момента при заданном угле кручения (или наоборот) для любого плавно очерченного поперечного сечения стержня с учетом в этой формуле соответственных значений Ω и I_p .

§ 13.04. Деформация эллиптического сечения при его кручении

Подставляя функцию напряжений F для эллиптического сечения (13.20) в формулу (13.13) и используя (13.21), имеем для функции ψ выражение:

$$\psi = \frac{1}{2(a^2 + b^2)} \left[2a^2b^2 - (a^2 - b^2)(x^2 - y^2) \right]. \quad (a)$$

Из выражений (13.10), связывающих сопряженные функции φ и ψ , имеем:

$$\varphi = \int \frac{\partial \psi}{\partial y} dx + f_1(y),$$

или

$$\varphi = - \int \frac{\partial \psi}{\partial x} dy + f_2(x).$$

Дифференцируя (a) по x и по y , имеем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y.$$

Таким образом,

$$\varphi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y \int dx + f_1(y), \quad (б)$$

или

$$\varphi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x \int dy + f_2(x). \quad (в)$$

Из сопоставления (б) и (в) заключаем, что $f_1(y) = f_2(x) = C$, и потому

$$\varphi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy + C \quad (г)$$

Формула (13.03) дает:

$$w = \frac{\vartheta}{l} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy + C \right).$$

Так как деформацией одной из точек поперечного сечения можем распорядиться по своему усмотрению (в зависимости от граничных кинематических условий, не стесняющих деформации кручения стержня), то, полагая, что центр кручения ($x = y = 0$) не деформируется ($w = 0$), получаем, что $C = 0$.

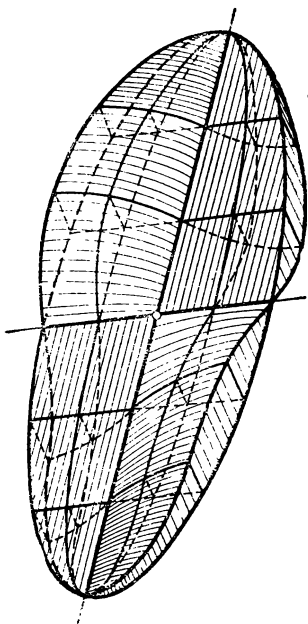
Таким образом, окончательно для смещения вдоль оси z , т. е. для деформации сечения, имеем выражение:

$$w = \frac{\vartheta}{l} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy. \quad (13.26)$$

Для круглого поперечного сечения ($a = b$) из (13.26) вытекает $w = 0$, т. е. деформации не происходит.

Используя (13.22), перепишем выражение для деформации сечения:

$$w = \frac{M_k (a^2 - b^2)}{G \pi a^3 b^3} xy. \quad (13.27)$$



Фиг. 13.04 Депланация эллиптического сечения при кручении

Из (13.27) вытекает, что при кручении эллиптическое поперечное сечение искривляется, принимая форму гиперболического параболоида. На фиг. 13.04 показан эскиз депланации сечения. Отмечаются следующие любопытные особенности искривления сечения: точки, расположенные на осях симметрии сечения, не депланируют, (это всегда! — при любом сечении, имеющем оси симметрии), если в первом и третьем квадрантах — депланации положительны, то во втором и четвертом квадрантах они отрицательны.

Если алгебраическую сумму объемов фигуры, заключенной между искривленной поверхностью сечения и его первоначальной позицией, назвать объемом депланации сечения, то объем этот равняется нулю. Заметим, что равенство нулю объема депланации оказывается справедливым при закручивании поперечного сечения любой формы. В аналитической записи последнее утверждение записывается так:

$$\int_F wdF = 0.$$

§ 13.05. Кручение сечения в виде узкого прямоугольника

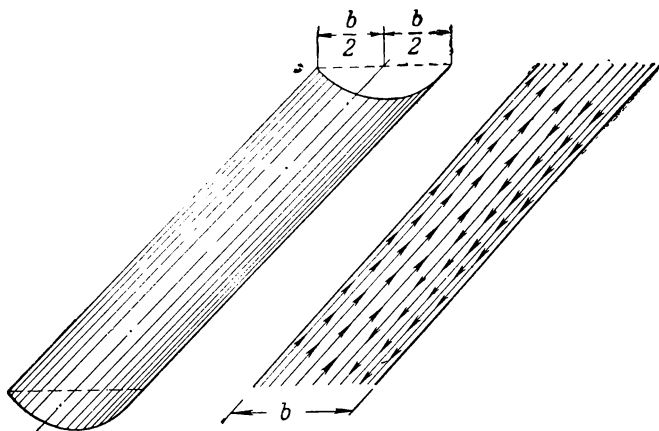
Для прямоугольного сечения точное решение в замкнутой форме невозможно, и его приходится решать в форме бесконечных рядов (см. М. М. Филоненко-Бородич, Теория упругости, стр. 199—205, М., 1947; Л. С. Лейбензон, Курс теории упругости, стр. 256—259, М., 1947).

Ограничимся рассмотрением кручения узкой прямоугольной полосы. В этом случае можно пренебречь влиянием ее узких сторон на распределение касательных напряжений и принять, что траектории касательных напряжений параллельны длинным сторонам прямоугольника на всем их протяжении (это равносильно принятию бугра напряжений в форме цилиндра с образующей, параллельной длинным сторонам прямоугольника) (фиг. 13.05, слева).

Функцию напряжений примем в виде:

$$F = A \left(x + \frac{b}{2} \right) \left(x - \frac{b}{2} \right). \quad (13.28)$$

Эта функция на длинных сторонах прямоугольника, уравнения которых $x = \frac{b}{2}$ и $x = -\frac{b}{2}$, удовлетворяют условию $F = 0$



Фиг. 13.05 Сечение в виде узкого прямоугольника с изображением траекторий касательных напряжений (справа) и «бугра напряжений» (слева)

(условия на коротких сторонах, конечно, при сделанном допущении, не удовлетворяются, но это несущественно ввиду малой протяженности коротких сторон в общем периметре сечения).

Постоянную A найдем из условия, что $\nabla^2 F = -2$. Это нам даст $A = -1$. На основании (13.15) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= G \frac{\partial}{\partial l} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} = 0; \\ \tau_{yz} &= -G \frac{\partial}{\partial l} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2G\partial}{l} x. \end{aligned} \right\} \quad (13.29)$$

Наибольшее касательное напряжение будет по периметру длинных сторон (а для недлинного прямоугольника — в середине длинных сторон) и равно:

$$\tau_{\max} = G \frac{\partial}{l} b. \quad (13.30)$$

Из выражения (13.17) имеем:

$$M_k = 2G \frac{\partial}{l} \int \int F dx \cdot dy = 2G \frac{\partial}{l} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} F h dy = \frac{1}{3} G \frac{\partial}{l} b^3 h. \quad (13.31)$$

Подставляя (13.31) и (13.29), получим:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_k}{b^2 h} \quad (13.32)$$

§ 13.06. Деформация при кручении сечения в виде узкого прямоугольника и тонкостенного сечения открытого профиля

Подставляя функцию напряжений (13.28) в (13.13), имеем для функции ψ выражение

$$\psi = -\left(x + \frac{b}{2}\right)\left(x - \frac{b}{2}\right) + \frac{x^2 + y^2}{2}. \quad (a)$$

Выполняя операции, аналогичные указанным в § 13.04, и располагаясь постоянным интегрирования (принимая ее равной нулю), получаем:

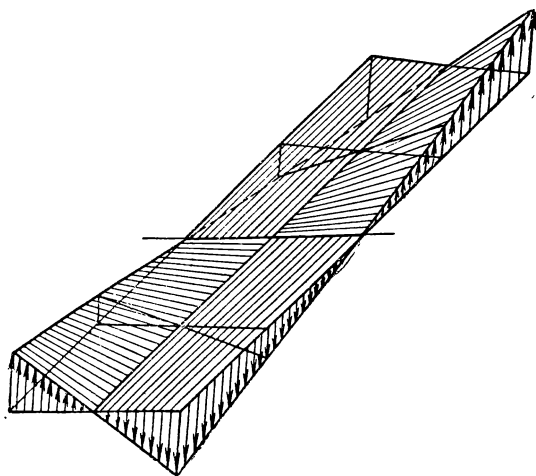
$$\varphi = xy. \quad (13.33)$$

Соответственно для деформации, согласно (13.03), имеем:

$$w = \frac{\theta}{l} xy. \quad (13.34)$$

Эскиз деформации согласно (13.34) показан на фиг. 13.06. Точки, принадлежащие осям симметрии сечения, не деформируются ($w=0$). Для точек, лежащих на контуре сечения ($y = \pm \frac{b}{2}$), функция кручения имеет значение

$$\varphi = \frac{b}{2} x.$$



Фиг. 13.06 Характер деформации при кручении сечения в виде узкого прямоугольника

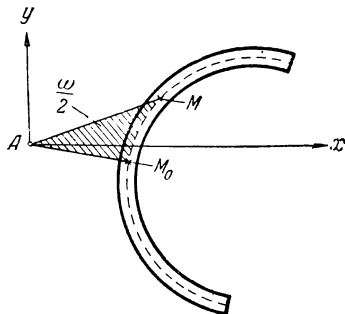
пренебречь при вычислении φ членом $\frac{n}{\rho}$ по сравнению с единицей (ρ — радиус средней линии).

Напомним читателю из курса сопротивления материалов определение секториальной площади, или, иначе, секториальной координаты: это есть удвоенная площадь сектора AM_0M (фиг. 13.09), образованного начальным, подвижным радиусами и срединной линией сечения. Заметим, что направление начального радиуса AM_0 выбирается так, чтобы

$$S_{\omega} = \int_F \omega dF = 0. \quad (13.36)$$

Положение полюса A (это, оказывается, так называемый *центр изгиба*) выбирается так, чтобы

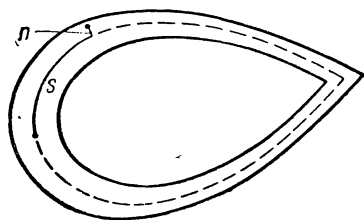
$$\int_F y \omega dF = 0; \quad \int_F x \omega dF = 0. \quad (13.37)$$



Фиг. 13.09 Главная секториальная координата (ω), начальный радиус (AM_0), центр изгиба (A). Оси A_y и A_x параллельны главным центральным осям инерции.

§ 13.07. Кручение тонкостенного замкнутого сечения

Пусть поперечное сечение закручиваемого стержня представляет собой замкнутое сечение, толщина стенок которого может быть переменной, меняющейся плавно, но остающейся всюду достаточно малой (фиг. 13.10)*. Строгое решение для такого двухсвязного контура весьма сложно, однако благодаря тонкостенности сечения оно может быть выполнено чрезвычайно просто и достаточно точно.



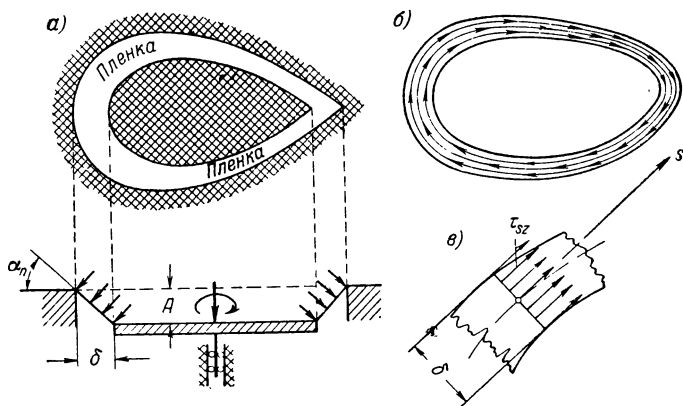
Фиг. 13.10 Тонкостенное замкнутое сечение

Для решения удобно использовать представление функции кручения F как «бугра напряжений», а касательные напряжения

интерпретировать как уклоны такого бугра. Но так как в пределах внутренней полости, не заполненной материалом, напряжения отсутствуют, то в «бугре напряжений» над пространством внутренней полости должна быть плоскость,

* В некоторое отступление от заголовка главы («обратно-симметричные задачи») здесь рассматривается сечение, в котором оси симметрии может и не быть.

параллельная плоскости сечения. Именно при этом условии уклоны бугра напряжений в упомянутой области будут равны нулю (а следовательно, нулю будут равны и касательные напряжения). Иначе говоря, «бугор напряжений» должен иметь вид, указанный на фиг. 13.11.



Фиг. 13.11 «Бугор напряжений» при кручении тонкостенного замкнутого сечения (а), траекторий касательных напряжений (б)

Если «бугор напряжений истолковать» в смысле мембранной аналогии, то по жесткому контуру, совпадающему по очертанию с наружным контуром заданного сечения, надо прикрепить мембрану, которая по другому контуру, совпадающему по очертанию с внутренним контуром заданного сечения, должна быть соединена с абсолютно жесткой пластиной (в плане такая пластина будет в точности повторять внутреннюю полость заданного сечения). Далее, надлежит подвергнуть мембрану равномерному давлению, однако для того чтобы жесткая пластина могла перемещаться лишь поступательно, к ней надлежит приложить также специальные моменты (или упомянутое выше давление осуществить специально неравномерно в пределах пластины), чтобы воспрепятствовать повороту.

Так как искривление мембраны будет незначительным, то можно считать, что уклон мембраны в пределах каждого размера δ (т. е. в пределах толщины стенки заданного сечения) не меняется.

Ввиду того, что толщина δ мала, пренебрегая искривлением поверхности «бугра напряжений» в пределах каждого размера δ и обозначая в пределах внутренней полости сечения ординату функции напряжений через A , принимаем по-

стоянным уклон этой функции в направлении n (нормальном к срединной линии профиля сечения); он составит:

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{A}{\delta},$$

но согласно (13.15) это одновременно есть величина касательного напряжения, т. е.

$$\tau_{sz} = \frac{\partial F}{\partial n} = \frac{A}{\delta}, \quad (13.38)$$

которое также надлежит принять постоянным в направлении n в пределах рассматриваемой толщины δ . Выражение (13.38) можно переписать и так:

$$\tau_{sz}\delta = A = \text{const.} \quad (a)$$

Левую часть равенства (a) можно истолковать как сумму касательных усилий с площади прямоугольника, один размер которого (в направлении n) равен толщине сечения δ , а другой размер (в направлении s) вдоль средней линии контура равен единице. Обозначая эту сумму через T и называя *поток касательных напряжений*, выражение (a) можем записать в виде:

$$T = \tau_{sz}\delta = \text{const} \quad (13.39)$$

и прочитать в такой редакции: *поток касательных напряжений* при кручении тонкостенного плавного замкнутого профиля, отнесенный к средней линии контура, является величиной *постоянной* для всех точек этого контура.

Так как толщина стенок δ , если она переменная, изменяется по условию задачи плавно вдоль средней линии контура сечения, то уклон «бугра напряжений» в направлении s будет пренебрежимо мал, и потому

$$\tau_{nz} = -\frac{\partial F}{\partial s} = 0.$$

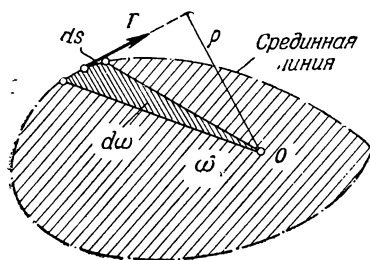
Таким образом, при кручении тонкостенного замкнутого профиля в сечении возникают касательные напряжения, которые для всей совокупности точек, лежащих на направлении n , параллельны касательной к средней линии контура в том месте, где проведена нормаль n (см. фиг. 13.11 б, в).

Наибольшее касательное напряжение будет в самом «узком горле» сечения (т. е. там, где толщина стенки сечения наименьшая) и должно вычисляться по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\delta_{\min}}. \quad (13.40)$$

Для вычисления потока T составим уравнение равновесия между внешними и внутренними силами. Для этой цели возьмем произвольную точку O (фиг. 13.12) (не обязательно центр кручения, и для дальнейшего не имеет значения, взять ли ее внутри сечения или вне его), относительно которой и составим сумму моментов.

На элементарную площадку сечения δds приходится касательная сила $\tau_{sn} \delta ds = T ds$, которая относительно точки O дает момент $T ds \rho$, где ρ — длина перпендикуляра, опущенного из точки O на направление касательной s .



Фиг. 13.12 К выводу формулы

Обозначая произведение ρds (очевидно, представляющее удвоенное значение секториальной площади, дважды заштрихованной на фиг. 13.12) через $2d\omega$, можем уравнение равновесия между крутящим моментом и внутренними силами записать в виде:

$$M_k = \int_s T \rho ds = 2T \int d\omega.$$

Очевидно, что интеграл, взятый по всей замкнутой средней линии контура, составит фигуру, ограниченную той же средней линией, т. е.

$$\int d\omega = \omega. \quad (13.41)$$

Эта площадь на фиг. 13.12 заштрихована. Таким образом,

$$T = \frac{M_k}{2\omega}, \quad (13.42)$$

и на основании (13.40) имеем:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{2\omega \delta_{\min}}. \quad (13.43)$$

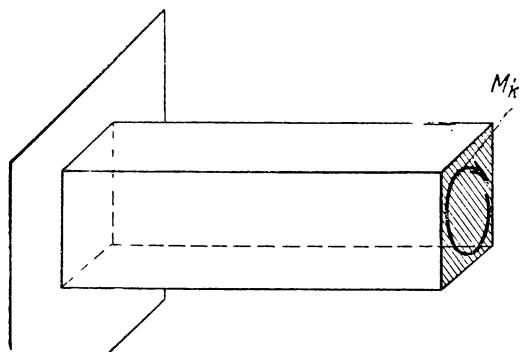
§ 13.08. Понятие о стесненном кручении

В §§ 13.01—13.07 были рассмотрены задачи о кручении стержня постоянного сечения, причем предполагалось, что во всех поперечных сечениях стержня возникают *только* касательные напряжения, что закон распределения их во всех сечениях одинаков; наконец, было сделано предположение (вытекающее, впрочем, из предыдущих), что все поперечные сечения беспрепятственно и притом одинаково деформируются,

так как в выражении (13.03) координата z отсутствует. Этот случай кручения называют кручением по Сен-Венану; будем его в дальнейшем именовать случаем *нестесненного кручения*.

В практике имеется много случаев, когда свободной деформации сечений оказывается противодействие, полное или частичное.

Примером может служить стержень, один из концов которого наглухо закреплен в стене, а к другому свободному концу приложена крутящая пара (фиг. 13.13). В этом случае поперечное сечение, совпадающее с опорным закреплением



Фиг. 13.13 Пример стесненного кручения

деформировать не может (*абсолютное стеснение* искривлению плоскости сечения). Поэтому в таком сечении непременно возникнут нормальные напряжения, благодаря которым сечение и может остаться плоским. Сечение, совпадающее со свободным концом, наоборот, находится в условиях нестесненной деформации. В этом сечении нормальных напряжений нет, имеются только касательные напряжения, распределенные согласно (13.05) или (13.15) и в совокупности составляющие крутящую пару.

Все прочие поперечные сечения находятся в промежуточных условиях *относительного стеснения*, и в них также появятся нормальные напряжения, которые по длине стержня будут убывать от опорного сечения к свободному.

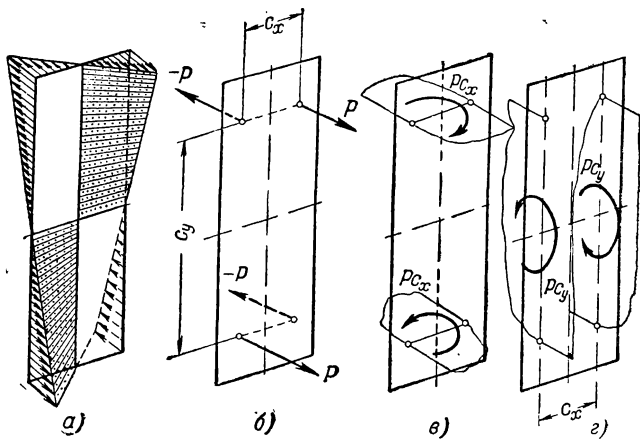
Нормальные напряжения в поперечных сечениях при стесненном кручении имеют важную особенность: они в каждом сечении составляют систему взаимно уравновешенных сил. Это очевидное утверждение вытекает из условий равновесия, так как по одну сторону от любого поперечного сечения из внешних воздействий имеется только

крутящая пара, которая вполне уравнивается касательными напряжениями в рассматриваемом сечении.

Самоуравновешенность нормальных напряжений при стесненном кручении является также следствием развитого в § 13.02 положения, что объем деформации сечения равен нулю. В самом деле, в задачу нормальных напряжений, возникающих, например, в опорном поперечном сечении, входит ликвидация деформации сечения, которая была бы при отсутствии стеснения. Это означает, что тем точкам сечения, которые стремятся выйти из плоскости сечения в ту или другую сторону, нормальные напряжения должны оказать сопротивление. Поясним это на примере закручивания эллиптического сечения.

Так как вся площадь эллиптического сечения при его деформации (13.03) делится на четыре одинаковых по площади части, из которых две части деформируются в одном направлении, а две остальные — в другом, то отсюда вытекает, что сумма нормальных усилий, возникающих в сечении и направленных в одну сторону, должна равняться сумме нормальных усилий, направленных в другую сторону*.

Примерный характер распределения нормальных напряжений, возникающих в прямоугольном сечении при стесненном кручении, показан на фиг. 13.14 и сводится, таким образом,

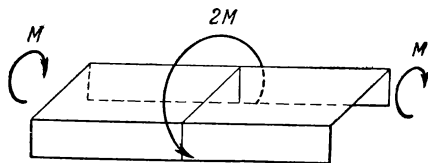


Фиг. 13.14 Характер распределения нормальных напряжений в поперечном сечении в случае стесненного кручения (а), статически эквивалентная нормальным напряжениям четверка сил (б) или бипары ((в) и (г))

* Стесненное кручение стержня эллиптического сечения рассмотрено в предыдущих изданиях книги (М., 1953) в § 91.

к «четверке сил» ($P, -P, P, -P$), которую можно истолковать или как две взаимно уравновешенные «бисилы» (P, P и $-P, -P$), или как две взаимно уравновешенные пары ($Pc_x, -Pc_x$ или $Pc_y, -Pc_y$), составляющие «бипару», и вообще ее можно рассматривать как обобщенную продольную силу, статически эквивалентную нулю. Такую обобщенную силу, по терминологии В. З. Власова, называют *бимоментом**.

Случай стесненного кручения не обязательно связывать с наличием опорных закреплений, препятствующих свободному искривлению сечений. Рассмотрим случай, когда стержень с двумя свободными концами подвержен на этих концах действию одинаковых по направлению и величине скручивающих моментов, уравновешенных в среднем сечении скручивающим моментом противоположного направления удвоенной величины (фиг. 13.15). В этом случае ввиду симметрии, очевидно, среднее поперечное сечение искривляться не может. Таким образом,



Фиг. 13.15 Среднее сечение стеснено к проявлению депланации

каждая половина рассматриваемого сейчас стержня будет находиться в условиях, сходных с рассмотренным ранее (фиг. 13.13). Заметим попутно, что эпюра крутящих моментов для случая, показанного на фиг. 13.15, должна иметь уступ в средней части. Это означает, что депланация левой и правой частей бруса, если бы они были разделены в среднем сечении, протекали бы в разных направлениях; условие же неразрывности деформаций бруса вынуждает левую и правую части пойти на ограничение (стеснение) депланаций в среднем сечении бруса.

Вообще при неравномерном кручении (когда крутящие моменты по длине стержня меняются) бруса постоянного сечения (исключая простейший случай — круглое поперечное сечение) всегда будет некоторая стесненность в депланации сечения, всегда будут в поперечных сечениях возникать нормальные, взаимно уравновешенные напряжения.

* Для указанного бимоента можно ввести условную количественную характеристику, а именно перемножить момент пары Pc_x (или Pc_y) на расстояние между плоскостями действия этих пар (т. е. на c_y или c_x). Тогда упомянутый бимомент запишется так: $B = Pc_x c_y$. Очевидно, что чем больше указанный бимомент, тем больше будут и самые нормальные напряжения в поперечном сечении.

Нормальные напряжения, статически эквивалентные нулю, возникнут и в случае постоянного по всей длине стержня крутящего момента, но если сам стержень будет иметь по длине переменное (и отличное от круглого) сечение. В последнем случае тенденция каждого сечения к свободной деформации были бы различны, но благодаря требованию совместности деформаций, сечения вынуждены иметь согласованные между собою деформации.

Большую практическую важность расчет стесненного кручения имеет главным образом для тонкостенных стержней так называемого открытого профиля (швеллер, двутавр, уголок, сечение и т. п.) и в меньшей степени для замкнутых профилей (коробчатое сечение, трубчатое).

Теория сложного сопротивления (стесненное кручение, изгиб с кручением и т. п.) тонкостенных стержней открытого профиля была с исчерпывающей полнотой разработана в СССР В. З. Власовым, удостоенным Государственной премии СССР.

Применительно к замкнутым профилям теория была разработана А. А. Уманским.

§ 13.09. Краткие выводы по главам 11—13

1. Для стержней постоянного по длине сечения и подверженных простому растяжению или чистому изгибу, а для стержней круглого сечения, подверженных и чистому кручению, решения, доставляемые для этих задач сопротивлением материалов, точно удовлетворяют всем уравнениям теории упругости, т. е. являются и ее решениями.

Если поперечное сечение стержней в указанных случаях будет по длине плавно изменяться, но с уклоном наружной поверхности не больше 0,1, то практически формулы сопротивления материалов можно оставить и в таких случаях.

2. При плоском поперечном изгибе бруса решение сопротивления материалов уже не является точным с точки зрения теории упругости. Для получения более строгого решения оказывается необходимым на систему напряжений, доставляемую сопротивлением материалов, наложить в каждом поперечном сечении стержня систему дополнительных нормальных напряжений, взаимно уравновешенных в каждом таком сечении, а также необходимо признать существование нормальных напряжений в продольных сечениях, параллельных нейтральному слою. Впрочем, если высота балки будет составлять меньше 0,1 пролета, то упомянутые коррективы к решению сопротивления материалов не имеют практического значения.

3. Для балок прямоугольной формы, сильно выраженного переменного сечения, например для треугольной подпорной стенки и т. п., решения, доставляемые элементарным сопротивлением материалов в отношении некоторых напряжений оказываются не только количественно, но и качественно отличными от действительного распределения этих напряжений внутри таких балок, что устанавливается теорией упругости.

4. Классическими задачами теории упругости, в которых методы сопротивления материалов или беспомощны, или существенно искажают действительную картину напряженного состояния, являются такие, как *полубесконечная пластинка* (так называемая упругая полуплоскость) с нагрузкой, приложенной на ее границе и действующей параллельно срединной плоскости указанной пластинки, как *полубесконечное тело* (так называемое упругое полупространство) с нагрузкой, приложенной на «дневной поверхности»; задачи о кручении некруглых сечений, поперечный изгиб пластинок, задачи о напряженном и деформированном состоянии толстых колец, цилиндрических оболочек, контактные и т. п. задачи.

5. Из различных частных задач, рассмотренных в главах 11—13, выделим особо формулы прогиба граничной плоскости полубесконечной пластинки (11.16) и прогиба «дневной поверхности» упругого полупространства (12.14) от сосредоточенной силы. Упомянутые формулы легко обобщаются на случай всяких нагрузок, расположенных на граничных плоскостях, широко используются в различных задачах строительной и машиностроительной практики.

Литература к главе 13

1. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни (прочность, устойчивость, колебания). Госстройиздат, М.—Л., 1940.
Книга удостоена Государственной премии СССР.
 2. Власов В. З. Строительная механика тонкостенных пространственных систем. Стройиздат, 1949.
 3. Кан С. Н. и Пановко Я. Г. Элементы строительной механики тонкостенных конструкций. Оборонгиз, 1949.
 4. Уманский А. А. Кручение и изгиб тонкостенных конструкций, М., 1939.
 5. Уманский А. А. Пространственные системы. Стройиздат, 1949.
 6. Урбан И. В. Теория изгибного кручения тонкостенных конструкций открытого и закрытого профиля. Изд-во МЭМИИТ, М., 1950.
-

«Сколько бы ни было точно математическое решение, оно не может быть точнее тех приближенных предположек, на коих оно основано».

Акад. А. Н. Крылов

РАЗДЕЛ IV

ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 14.01. Замечание о прикладной теории упругости

В предыдущих главах (XI—XIII) читатель ознакомился с небольшим кругом задач инженерной практики, решение которых методами математической теории упругости оказалось возможным довести до практически удобных формул. Но это были с точки зрения практики сравнительно простые задачи, как-то: плоское напряженное состояние прямоугольной полосы, осесимметричное нагружение толстостенного кольца и т. п.

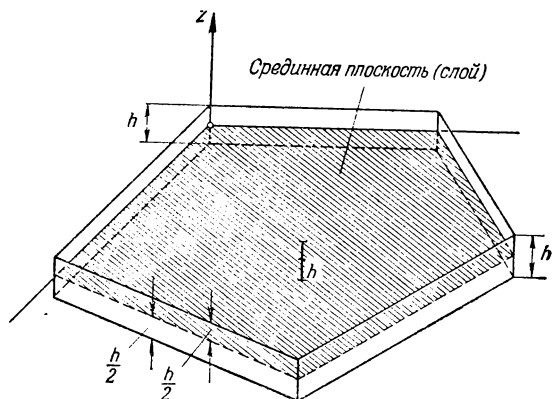
Для большинства других задач точное их решение оказывается исключительно сложным, а иногда вряд ли возможным. Поэтому в таких случаях приходится сознательно прибегать к некоторым упрощениям. Например, пренебрегают второстепенными факторами по сравнению с основными, если имеются опытные или другие данные для возможности такого разделения. Или вводят некоторые гипотезы (например, об особенностях картины деформации, причем имеются в виду, конечно, наиболее простые предположения, интуитивно напрашивающиеся или навеянные опытом с конструкциями, аналогичными исследуемым), чтобы в итоге решение оказалось приемлемым для инженерной практики. Выполняемое в таком плане исследование обычно относят к *прикладной теории упругости*, подчеркивая этим названием именно прикладной характер полученного решения, практически приемлемый лишь для определенного типа конструкции. Обычно на основании опытов или на основании сопоставлений с результатами точных исследований (где это оказалось возможным) устанавливают и границы исходных данных (например, соотношения высоты балки к пролету и т. п.), отступление от

которых в данной задаче не будет гарантировать допустимой точности расчетов по предлагаемой теории.

В этом смысле прикладная теория упругости имеет сходство с обычной теорией сопротивления материалов, но отличается тем, что рассматривает не только одномерные задачи (стержни, стержневые системы), но и двумерные и трехмерные задачи теории упругости. Одной из характерных задач прикладной теории упругости является задача изгиба плоской пластинки. Вследствие некоторых упрощений геометрического характера задача об изгибе пластинки, как то показывается дальше, сводится к двумерной задаче.

§ 14.02. Основные определения и гипотезы в технической теории изгиба пластинок

Плоской пластинкой средней толщины, или тонкой плитой, принято называть упругое тело призматической или цилиндрической формы с малой по сравнению с размерами основания высотой (фиг. 14.01).



Фиг. 14.01. К определению пластинки.
Срединный слой

Практическое применение теории изгиба плит, которая излагается в настоящей главе, должно ограничиваться следующими пределами:

а) отношение толщины к наименьшему другому размеру плиты должно быть меньше $1/10$ (хотя теория остается все же применимой, когда это отношение доходит до $1/5$);

б) ожидаемые прогибы плиты малы по сравнению с толщиной. Отдельные авторы называют верхний предел для указанного прогиба в $1/5$ толщины плиты.

Если соотношение в размерах плиты не отвечает условию «а», то такая плита считается толстой. Систематически разработанной теории толстых плит в литературе не имеется.

Если не выдерживается условие «б», то задача усложняется как по причине конечных деформаций (а не весьма малых, как предполагается в технической теории изгиба), так и по причине влияния на прогиб пластинки тех составляющих реакций опорного контура, которые действуют в плоскости пластинки (распор, цепные усилия и т. п.). Последние возникают в том случае, когда смещению в плоскости пластинки точек, принадлежащих опорному контуру, препятствуют опорные связи. Пластинки, не удовлетворяющие условию «б», иногда называют пластинками малой толщины или малой жесткости (типа мембраны).

Плоскость, параллельную основанию пластинки и делящую пополам ее высоту, называют *срединной плоскостью*, а поверхность, в которую она обращается при изгибе, — *упругой поверхностью*, или изогнутой срединной поверхностью. Линия пересечения срединной плоскости с боковой поверхностью пластинки называется опорным контуром пластинки. Считая пластинку горизонтальной, напомним ось Oz вертикально вниз, а оси Ox и Oy расположим в срединной плоскости.

При изучении в этой главе изгиба пластинок внешними нагрузками считаем только поперечные (перпендикулярные к срединной плоскости) и исключаем силы, параллельные или находящиеся в срединной плоскости. Случай нагружения пластинки силами в срединной плоскости (если исключить случаи потери устойчивости) составлял бы известную из главы 8 плоскую задачу теории упругости.

Техническая теория изгиба пластинок построена на следующих двух допущениях, существенно упрощающих исследования.

1. *Кинематическая гипотеза*: совокупность точек, лежавших до деформации пластинки на какой-либо прямой, перпендикулярной к срединной плоскости, остается на прямой, нормальной к упругой поверхности деформированной пластинки. Это допущение, аналогичное гипотезе плоских сечений в технической теории изгиба балок, носит обычно название *гипотезы прямолинейного элемента*. Считается, что упомянутый прямолинейный элемент при перемещениях сохраняет свою длину.

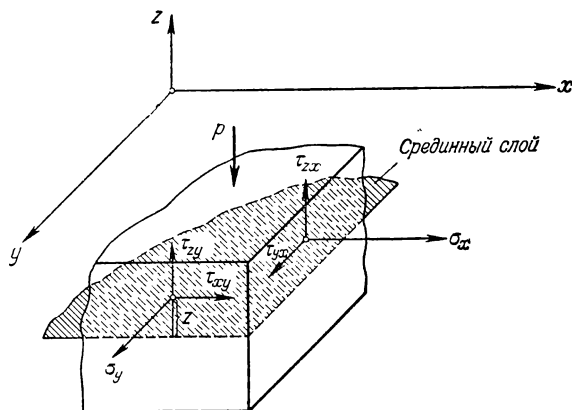
2. *Статическая гипотеза*: как и в элементарной теории изгиба балок будем пренебрегать нормальными напряжениями на площадках, параллельных срединной плоскости, возникающими вследствие взаимного нажатия горизонтальных слоев пластинки друг на друга. Таким образом, каждый бесконечно

тонкий слой пластинки, взятый параллельно срединной плоскости, может быть рассматриваем в условиях плоского напряженного состояния.

Кинематическая гипотеза, как это показывается ниже, позволяет трехмерную задачу теории упругости свести к более простой двумерной задаче, а именно, к задаче об определении усилий и перемещений, относящихся к точке на срединной плоскости (функции от двух координат).

Вторая гипотеза будет использована лишь в части упрощения записи обобщенного закона упругости, а именно, применительно к обозначениям компонентов напряжений, показанным на фиг. 14.02, будем ограничиваться такой формой записи:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x). \end{aligned} \right\} \quad (14.01)$$



Фиг. 14.02. Обозначение компонентов напряжений в сечениях, параллельных координатным

Вместе с тем ниже будет получено выражение и для σ_z с помощью дифференциальных уравнений равновесия трехмерной задачи теории упругости. В этом смысле вторая гипотеза может рассматриваться не столько как статическое допущение, сколько как математическое упрощение (игнорирование членами $\mu \sigma_z$ в формуле (14.01) для ϵ_x и ϵ_y); иначе говоря, напряжение σ_z признается, но относится к числу второстепенных.

§ 14.03. Установление выражений для напряжений через уравнение упругой поверхности пластинки

Пластинка будет предполагаться постоянной толщины и нагруженной поперечной нагрузкой $p(x, y)$, распределенной любым образом по верхней поверхности пластинки (для краткости в дальнейшем она обозначается просто p); объемные силы (собственный вес и т. п.) из рассмотрения исключаем.

Будем исходить из уравнений общей трехмерной задачи теории упругости с внесением в них тех упрощений, которые составляют перечисленные в предыдущем параграфе гипотезы.

Начнем с использования кинематической гипотезы. Обозначим через w прогиб срединной поверхности, т. е. вертикальное расстояние между точкой, взятой на срединной плоскости до деформации, и положением той же точки на упругой поверхности. В связи с допущением о том, что прямолинейный нормальный элемент сохраняет свою длину, обозначенное перемещение w будет (с точностью до малых высших порядков) общим для всех точек, принадлежащих упомянутому прямолинейному элементу. Иначе говоря, уравнение перемещений точек пластинки, расположенных на линии, параллельной оси Oz , которое в случае толстой плиты есть функция трех координат, т. е. $w(x, y, z)$, в данном случае тонкой плиты, принимается функцией двух координат $w = w(x, y)$ в дальнейшем, для краткости письма, обозначается w . Ввиду предположения о малых деформациях пластинки по сравнению с толщиной плиты и исключения из рассмотрения внешних сил, действующих в срединной плоскости пластинки, можно считать, что все точки, принадлежащие срединной плоскости, получают только вертикальные смещения w . Впрочем, принятие во внимание горизонтальных смещений этих точек (составляющие малых высших порядков по сравнению с величиной w) не изменит окончательных выводов данного параграфа, но пренебрежение ими, конечно, упростит последующие выкладки.

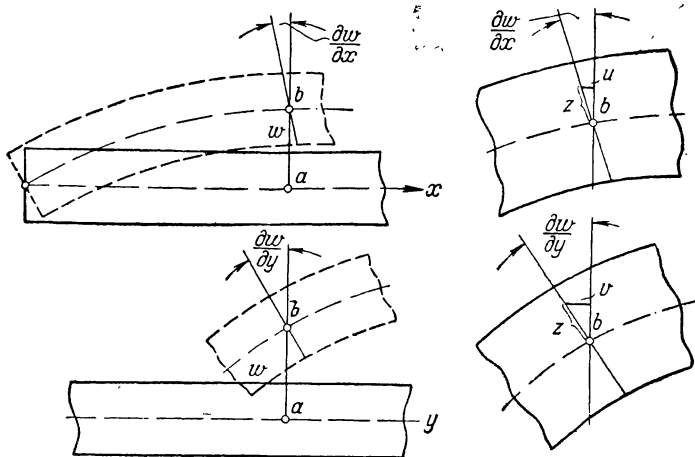
Горизонтальные смещения точек, не принадлежащих срединной плоскости, соответственно параллельно осям x и y , обозначим через u и v .

Из рассмотрения фиг. 14.03 (справа) следует:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}; \quad (14.02)$$

так как на основании выражения (14.02)

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$



Фиг. 14.03. «Гипотеза» прямых нормалей

и

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

то с помощью формул (14.02) переписываем:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (14.03)$$

Выражения (14.03) — геометрические уравнения данной задачи.

Физическими уравнениями будут (14.01) или в обратной записи:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y),$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x),$$

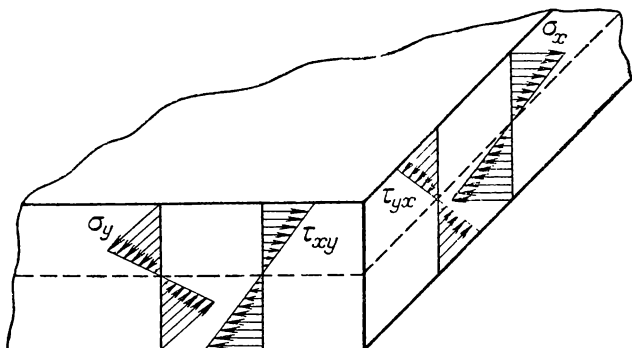
а для касательных напряжений, согласно (3.02),

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{xy}.$$

Последние уравнения с помощью выражений (14.03) переписываются так:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (14.04)$$

Законы изменения σ_x , σ_y и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ по толщине пластинки, согласно (14.04), оказываются линейными и представлены на фиг. 14.04*.



Фиг. 14.04. Распределение напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} и τ_{yx} по толщине пластинки

Из первых двух уравнений равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

имеем:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

* Как и в теории изгиба балок, и в теории кручения узкого прямоугольника.

Интегрируя эти уравнения, получаем:

$$\tau_{xz} = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \varphi_1(x, y);$$

$$\tau_{yz} = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \varphi_2(x, y).$$

Используя граничные условия на верхней и нижней поверхностях пластинки, а именно: при $z = \pm \frac{h}{2}$ имеем $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, то получаем:

$$\varphi_1(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$\varphi_2(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Таким образом,

$$\tau_{xz} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad (14.05)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (14.06)$$

Законы изменения $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ и $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ по толщине пластинки оказываются параболическими (как и в теории изгиба балок прямоугольного сечения).

Обращается внимание на то, что все полученные формулы для напряжений (14.04) — (14.06) выражены через прогиб срединной поверхности. Уравнение этой упругой поверхности в данном случае является как бы «разрешающей» функцией, т. е. аналогично функции напряжений в плоской задаче теории упругости. Осталось найти это уравнение.

§ 14.04. Вывод дифференциального уравнения упругой поверхности пластинки

Для этой цели надлежит обратиться к еще неиспользованным граничным условиям, а именно: при $z = \frac{h}{2}$ имеем

$\sigma_z = -p$, а при $z = -\frac{h}{2}$ имеем $\sigma_z = 0$ (предполагаем случай поперечной нагрузки, приложенной к верхней поверхности пластинки; между прочим, если предположить нагрузку на нижней или на срединной поверхности, то это изменит формулу для σ_z , но не изменит вида окончательного уравнения упругой поверхности плиты).

Для поставленной цели надо найти выражение для σ_z .

Из третьего уравнения равновесия

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

имеем

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}.$$

На основании выражений (14.05) и (14.06)

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = - \frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1 - \mu^2)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

и

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = - \frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1 - \mu^2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Интегрируя, получаем:

$$\sigma_z = \frac{Ez \left(h^2 - \frac{4}{3} z^2 \right)}{8(1 - \mu^2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \psi(x, y). \quad (14.07)$$

Используем граничные условия:

$$(\sigma_z)_{z = \frac{h}{2}} = - \frac{Eh^3}{24(1 - \mu^2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \psi(x, y) = -p; \quad (14.08a)$$

$$(\sigma_z)_{z = \frac{h}{2}} = \frac{Eh^3}{24(1 - \mu^2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \psi(x, y) = 0. \quad (14.08b)$$

Произведя сложение последних выражений, получаем:

$$2\psi(x, y) = -p, \quad (14.09)$$

откуда*

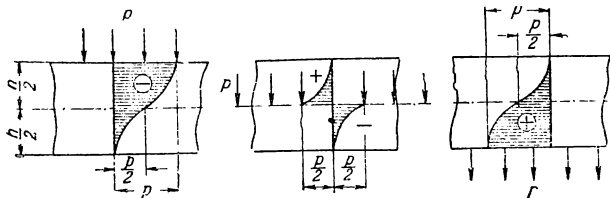
$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2} p. \quad (14.09)$$

Согласно выражению (14.07), напряжения σ_z по толщине плиты (по длине нормального элемента, для всех точек кото-

* В случае приложения нагрузки к нижней поверхности плиты

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2} p(x, y).$$

рого $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$) изменяются по закону кубической параболы. Эпюра σ_z имеет вид, показанный на фиг. 14.05, в зависимости от того, к какой поверхности (верхней, срединной или нижней) непосредственно приложена нагрузка.



Фиг. 14.05. Распределение напряжений σ_z по толщине пластинки в зависимости от плоскости, в которой находится внешняя нагрузка

Вводя обозначение

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = D \quad (14.10)$$

(так называемая цилиндрическая жесткость при изгибе пластинки) и раскрывая операцию $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ над выражением

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

окончательно имеем:

$$\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{1}{D} P \right] \quad (14.11)$$

Это есть основное уравнение теории изгиба плоской пластинки средней толщины при отсутствии сил в срединной плоскости или параллельных ей. Уравнение (14.11) называют уравнением Софи Жермен и символически записывают.

$$\nabla^2 \nabla^2 w = - \frac{P}{D},$$

или

$$\nabla^4 w = - \frac{P}{D}.$$

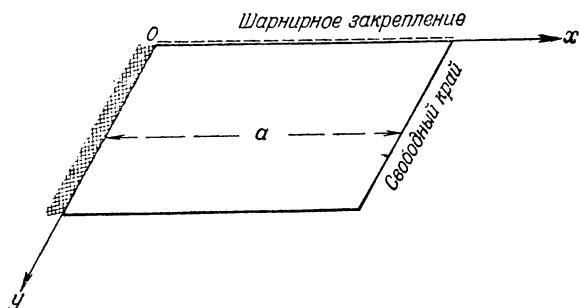
§ 14.05. План решения задачи по исследованию изгиба пластинок. Условия на опорном контуре

Если удастся для данной конкретной задачи проинтегрировать уравнение (14.11), то по найденному конечному уравнению упругой поверхности $w = f(x, y)$ получим из выражений (14.04) — (14.07) все интересующие нас компоненты напря-

жения в любой площадке, проходящей через исследуемую точку.

Задача интегрирования уравнения (14.11) заключается, очевидно, не только в том, чтобы найти функцию $w = f(x, y)$, подстановка которой в (14.11) удовлетворяла бы последнее уравнение тождественно, но также, чтобы эта функция удовлетворяла условиям на опорном контуре.

Выясним, как составляются эти условия на контуре пластинки, рассмотрев случай прямоугольной пластинки (фиг. 14.06) с различными опорными связями. Для левого защемленного конца имеем следующие очевидные условия: при $x=0$ и при



Фиг. 14.06. К составлению граничных условий для пластинки

у любом должно быть $w=0$ (отсутствие прогиба) и $\frac{\partial w}{\partial x}=0$ (отсутствие угла наклона срединной плоскости по отношению к оси ox).

Для шарнирно-опертого контура, т. е. при $y=0$ и при x любом, следует потребовать отсутствия прогиба и нормальных напряжений (σ_y) по опорному сечению и касательных напряжений (τ_{xy}), имеющих направление, параллельное оси ox (касательные напряжения, параллельные оси oz , могут и должны быть, так как именно ими осуществляется поддержание пластинки).

На основании формул (14.04) следует, что эти граничные условия аналитически представляются так (при $y=0$ и $w=0$):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} = 0.$$

Впрочем, как это было в случае балки-стенки, рассмотренной в § 11.02, если трудно подобрать уравнение $w = f(x, y)$,

удовлетворяющее всем без исключения граничным условиям, то можно несколько смягчить граничные условия, например, отказавшись от неперемещения условия $\tau_{xy}=0$, потребовать лишь, чтобы сумма этих напряжений по толщине пластинки сводилась к системе взаимно уравновешенных усилий. Иначе говоря, граничным условиям удовлетворить только в интегральной форме.

На правом, свободном крае должны отсутствовать все напряжения, т. е.

$$\sigma_x = \tau_{yx} = \tau_{zx} = 0.$$

На основании (14.04)–(14.06) заключаем, что в этом случае, т. е. при $x=a$, должно быть:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} = 0 \text{ и } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0.$$

В связи с тем, что удовлетворить граничным условиям в интегральной форме легче, чем в каждой точке опорного контура, в таких случаях представляется целесообразным перестроить формулы (14.04)–(14.07) для напряжений, выразив последние через интегралы напряжений (через интенсивность поперечности сил, изгибающих, крутящих моментов), что и выполнено в § 14.08.

Выше было указано, что уравнение упругой поверхности в теории изгиба плоской пластинки играет такую же важную роль, какую в плоской задаче теории упругости исполняет функция напряжений. Действительно, как там, в плоской задаче, зная функцию напряжений, можно было просто получить выражения для всех компонентов напряжений, так и здесь, в теории изгиба пластинок, зная уравнение изогнутой поверхности, легко получить выражения для всех компонентов напряжений, а также (это показано в § 14.08) для компонентов усилий.

Из сопоставления (14.11) и (8.12) заключаем, что и по внешней форме бигармоническое уравнение для функции напряжений в плоской задаче в точности совпадает с однородным бигармоническим уравнением (без правой части) изогнутой поверхности пластинки.

Таким образом, функцию напряжений в плоской задаче можно при желании истолковать как уравнение упругой поверхности той же пластинки, поперечный изгиб которой осуществляется поперечными нагрузками (силами и моментами), приложенными по опорному контуру пластинки. Об этой аналогии и упоминалось на стр. 200.

Существует интересная аналогия и в граничных условиях для упомянутых двух сходственных в математическом отношении задач, а именно: чисто статическим граничным условиям плоской задачи соответствуют чисто кинематические граничные условия фиктивного поперечного изгиба пластинки; чисто кинематическим граничным условиям плоской задачи соответствуют чисто статические граничные условия фиктивного поперечного изгиба пластинки. Интересующихся указанными аналогиями и их использованием отсылаем к книге А. С. Калманок «Строительная механика пластинок», М., 1950.

§ 14.06. Пример — эллиптическая пластинка, защемленная по контуру

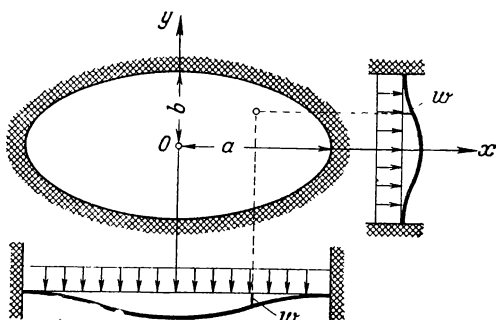
Пусть эллиптическая в плане пластинка (фиг. 14.07) с защемлением, препятствующим прогибу и девиации опорного контура, но не сопротивляющимся сдвигению [см., например, фиг. 14.23; таким образом, усилия, параллельные срединному слою пластинки („цепные усилия“), исключаются по контуру] имеет равномерно распределенную нагрузку, т. е.

$$p(x, y) = p = \text{const}$$

по всей поверхности пластинки. Выбирая оси Ox и Oy проходящими через центр пластинки, имеем уравнение контура

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (14.12)$$

где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — координаты точек на опорном контуре. Решаем задачу обратным методом. Зададимся выражением прогиба в форме



Фиг. 14.07. Эллиптическая пластинка с защемленным контуром

$$w = w_0 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2. \quad (14.13)$$

Вполне очевидно, что на эллиптическом контуре, т. е. при $x = \bar{x}$ и $y = \bar{y}$, согласно (14.12) прогиб обращается в нуль. Уравнение (14.13) отвечает и другому граничному условию о том, что опорный контур защемлен, т. е. изогнутая срединная поверхность на контуре остается горизонтальной. В самом деле, дифференцируя, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= 2w_0 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \frac{2x}{a^2}; \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= 2w_0 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \frac{2y}{b^2}, \end{aligned}$$

и при $x = \bar{x}$ и $y = \bar{y}$ указанные производные обращаются в нуль.

Итак, выбранное уравнение упругой поверхности удовлетворяет граничным условиям. Удовлетворяет ли оно исходному

дифференциальному уравнению (14.11)? Для этой цели выполним ряд дифференцирований. Опуская промежуточные, приводим четвертые производные:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 24 \frac{w_0}{a^4}; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 24 \frac{w_0}{b^4}; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 8 \frac{w_0}{a^2 b^2}.$$

Подставляя эти производные в (14.11), имеем:

$$w_0 \left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right) = \frac{p}{D}, \quad (14.14)$$

откуда заключаем (так как левая часть равенства представляет постоянную величину), что принятая форма изгиба пластинки возможна, если $p = \text{const}$, т. е. если нагрузка сплошная и притом равномерная, что и имеется в данной задаче.

Из (14.14) получаем прогиб при $x=y=0$, т. е. в центре пластинки:

$$w_0 = \frac{p}{\left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right) D}. \quad (14.15)$$

Зная $w = f(x, y)$, не представит затруднений вычислить напряжения. Так, например, на основании (14.04) и (14.05)

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{8w_0 xy}{a^2 b^2}; \\ \tau_{xz} &= -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \\ &= -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \left[24 \frac{w_0}{a^4} + 8 \frac{w_0}{a^2 b^2} x \right]. \end{aligned}$$

После преобразований последняя формула принимает вид:

$$\tau_{xz} = -\frac{p \cdot 3(3b^2 + a^2) b^2}{(3a^4 + 2a^2 b^2 + 3b^4) h^3} x(h^2 - 4z^2).$$

Предлагается читателю продолжить исследование — самостоятельно вывести формулы для нормальных напряжений, и показать, что в центре пластинки ($x=y=0$)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{4Ew_0}{1-\mu} z \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\mu}{b^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{4Ew_0}{1-\mu} z \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\mu}{a^2} \right), \end{aligned}$$

а на концах малой полуоси эллипса ($x=0, y=b$) напряжение изгиба

$$\sigma_y = \frac{8Ew_0}{b^2(1-\mu^2)}.$$

Это напряжение оказывается для пластинки наибольшим.

В случае круглой пластинки, полагая $b = a$, получаем упрощение. Так, например:

$$w_0 = \frac{pa^4}{64D}; \quad w = \frac{w_0}{a^2} (a^2 - r^2);$$

$$\tau_{xz} = -\frac{3}{2} \frac{p}{h^3} x (h^2 - 4z^2), \quad (14.15a)$$

где заменено $x^2 + y^2 = r^2$, а для точек срединной поверхности еще проще, именно:

$$(\tau_{xz})_{z=0} = -\frac{3}{2} p \frac{x}{h}.$$

В случае бесконечно вытянутой пластинки ($a = \infty$) имеем так называемый *цилиндрический изгиб пластинки*:

$$w = w_0 \left(\frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2,$$

$$w_0 = \frac{qb^4}{24 \cdot D},$$

что соответствует случаю изгиба обычной балки с теми же граничными условиями и нагружением, но с заменой в формулах для прогиба балок изгибной жесткости балки EI на цилиндрическую жесткость

$$D = \frac{EI}{1 - \mu^2}.$$

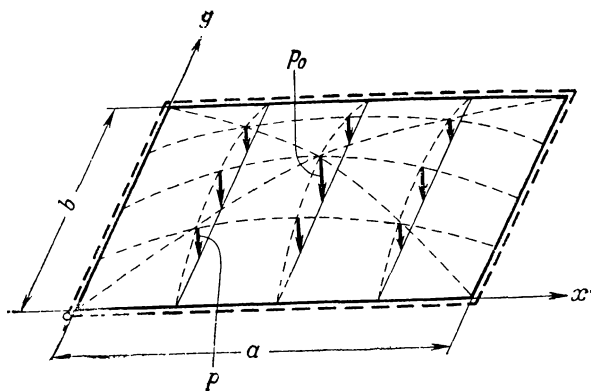
§ 14.07. Пример — свободно опертая прямоугольная пластинка

Рассмотрим случай, когда прямоугольная в плане пластинка со сторонами a и b свободно подвешена по контуру (статически эквивалентно шарнирному опиранию) и имеет нагрузку по уравнению:

$$p = p_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Графически такая нагрузка представляется «горкой», показанной на фиг. 14.08. В качестве первой попытки примем уравнение упругой поверхности, подобное уравнению нагрузки, т. е.

$$w = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (14.16)$$



Фиг. 14.08. Пример прямоугольной пластинки с нагрузкой в виде «горки»

Нетрудно доказать, что уравнение (14.16) удовлетворяет дифференциальному уравнению (14.11) и граничным условиям в перемещениях. Начнем с последнего. Действительно:

$$x=0 \quad w=0; \quad y=0 \quad w=0;$$

$$x=a \quad w=0; \quad y=b \quad w=0.$$

Выпишем последовательные производные от w :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2}{a^2} w; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\pi^4}{a^4} w;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{b^2} w; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\pi^4}{b^4} w;$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\pi^4}{a^2 b^2} w.$$

Подставляя написанные производные в (14.11), имеем тождество (функции от x и y сокращаются)

$$\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = \frac{1}{D} p_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

откуда

$$C = \frac{p_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}.$$

Величина C согласно (14.16) представляет прогиб в центре плиты, т. е. при $x = \frac{a}{2}$ и $y = \frac{b}{2}$.

Подставляя вторые производные в (14.04), заключаем, что по кромкам пластинки отсутствуют нормальные напряжения ($\sigma_x = 0$ при $y = 0$ и $y = b$ и $\sigma_y = 0$ при $x = 0$ и $x = a$).

По кромкам пластинки могут действовать вертикальные касательные напряжения τ_{zx} (на сторонах, параллельных оси y) и τ_{zy} (на сторонах, параллельных оси x). На основании (14.05)

$$\tau_{xz} = - \frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1 - \mu^2)} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^3} \right).$$

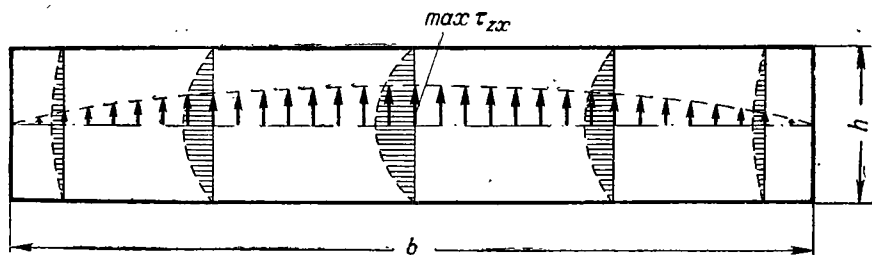
Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= C \frac{\pi^3}{a^3} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^3} &= C \frac{\pi^3}{ab^2} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \end{aligned}$$

то

$$\tau_{xz} = - \frac{E(h^2 - 4z^2)\pi^3}{8(1 - \mu^2)a} C \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

По сторонам длиной b касательные напряжения распределяются по закону, изображенному на фиг. 14.09.



Фиг. 14.09. Распределение касательных напряжений τ_{zx} по стороне длиной b . Заштрихован характер распределения по толщине пластинки

Аналогично может быть получено выражение для τ_{zy} . Очевидно, что система напряжений τ_{zx} и τ_{zy} , действующая по кромкам пластинки, в своей совокупности должна уравновесить внешнюю нагрузку, действующую на пластинку (поддерживать пластинку).

Для нормальных напряжений на основании (14.04) соответственно имеем:

$$\sigma_x = \frac{E\pi^2(b^2 + a^2\mu)}{(1 - \mu^2)a^2b^2} w z, \quad \sigma_y = \frac{E\pi^2(a^2 + b^2\mu)}{(1 - \mu^2)a^2b^2} w z. \quad (14.17)$$

Наибольших значений нормальные напряжения по толщине плиты достигают на периферии (при $z = \pm \frac{h}{2}$), и эпюра та-

ких максимальных напряжений согласно (14.17) подобна упругой поверхности пластинки. Из (14.17) следует, что кромки пластинки от нормальных напряжений свободны.

Переходим к вычислению напряжений τ_{xy} на основании (14.04):

$$\tau_{xy} = - \frac{Ez}{1 + \mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} = C \frac{\pi^2}{a^2 b^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b},$$

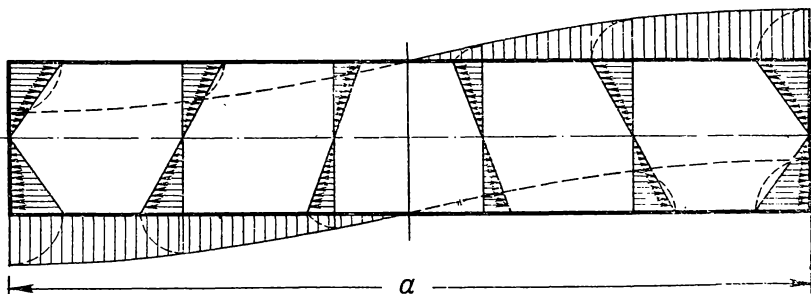
то

$$\tau_{xy} = - \frac{Ez}{1 + \mu} C \frac{\pi^2}{a^2 b^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

По кромкам пластинки соответственно имеем:

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{xy})_{y=0} &= -(\tau_{xy})_{y=b} = - \frac{Ez}{1 + \mu} C \frac{\pi^2}{a^2 b^2} \cos \frac{\pi x}{a}, \\ (\tau_{yx})_{x=0} &= -(\tau_{yx})_{x=a} = - \frac{Ez}{1 + \mu} C \frac{\pi^2}{a^2 b^2} \cos \frac{\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (14.18)$$

Характер распределения указанных напряжений показан на фиг. 14.10. Очевидно, что в пределах каждой кромки $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ такие «наружные» касательные напряжения имеют главный вектор и главный момент, равные нулю, т. е. они статически эквивалентны нулю.



Фиг. 14.10. Распределение касательных напряжений τ_{xy} по кромкам $y=0$ и $y=b$

Является ли уравнение (14.16) решением поставленной задачи? Строго говоря, — нет, так как согласно заданию пластинка «свободно подвешена по контуру». Это означает, что по контуру могут действовать только вертикальные касатель-

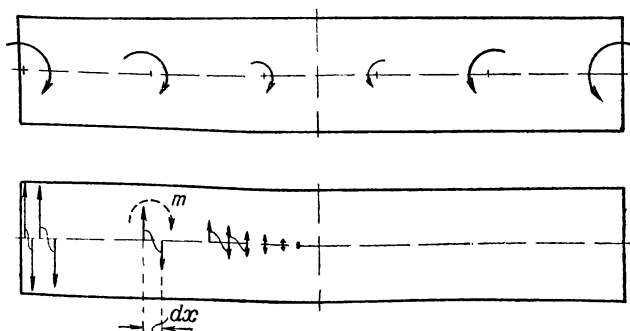
ные напряжения, имитирующие вертикальные реакции опорного контура. Никаких других напряжений по опорному контуру не должно быть.

Однако уравнению (14.18) соответствует наличие на опорном контуре также горизонтальных касательных напряжений. Вместе с тем, поскольку эти напряжения в пределах каждой кромки статически эквивалентны нулю, можно в практических целях остановиться на решении (14.16) и не искать точного и, конечно, значительно более сложного решения.

Может возникнуть сомнение в последнем утверждении, так как правильное использование принципа Сен-Венана предусматривает размеры территории, на которой действует взаимно уравновешенная нагрузка, очень малыми по сравнению с наименьшим размером тела.

Само собой очевидно, что этого нельзя сказать относительно площадей опорных поверхностей (ah или bh) Однако в данном случае применение принципа Сен-Венана все же возможно и именно потому, что рассматриваемые касательные напряжения в пределах толщины пластинки меняют направление, т. е. они двухзначные.

В самом деле, рассмотрим элемент опорной поверхности, например, hdx (или hdy); приходящиеся на такой элемент горизонтальные касательные напряжения составляют пару, имеющую некоторый элементарный момент $m dx$ (через m обозначен момент на единицу длины, т. е. интенсивность момента касательных сил по опорному контуру). Если толщина пластинки мала, то замена элементарного момента $m dx$ от горизонтально направленных сил на такой же по величине момент, но от вертикально направленных сил (фиг. 14.11), не скажется существенно в области вне опорной плоскости. Новые же, фиктивные, силы — обозначим их $\bar{\tau}_{xy}$ (на кромках $y=0$ и $y=b$) или $\bar{\tau}_{zx}$ (на кромках $x=0$ и $x=a$) — можно присоединить к прежним τ_{xy} и τ_{zx} . Очевидно, что условия равновесия пластинки от такого присовокупления к прежним силам еще новых сил, но статически эквивалентных нулю в целом, не нарушатся.



Фиг. 14.11. К доказательству практической возможности остановиться на решении (14.16).

Примечание. Если закон синусоидального распределения нагрузки задан уравнением:

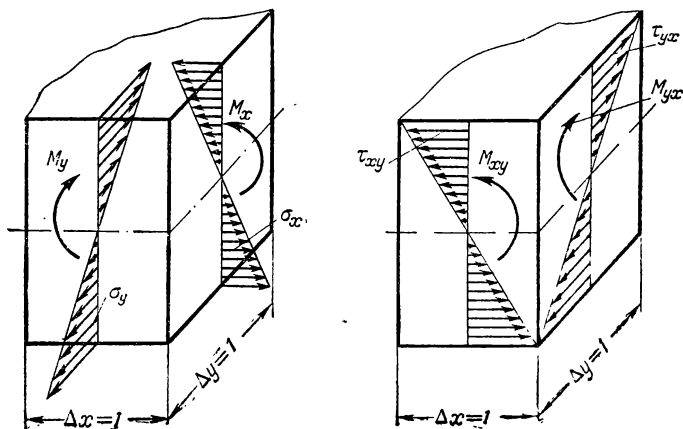
$$p = p_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (14.19)$$

где m и n — целые числа, то, поступая аналогично предыдущему, получим для изогнутой поверхности следующее выражение:

$$w = \frac{p}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (14.20)$$

§ 14.08. Другая форма записи для напряжений и граничных условий (приведение напряжений, параллельных срединной плоскости, к статическим эквивалентным им изгибающим и крутящим моментам)

Так как согласно (14.04) нормальные напряжения σ_x и σ_y , а также касательные напряжения τ_{xy} , изменяются по толщине пластинки по линейному закону, то если суммировать указанные напряжения на элементарных прямоугольниках высотой h и с основаниями dx и dy , приходим к статически эквивалентным им моментам (фиг. 14.12).



Фиг. 14.12. Приведение напряжений, параллельных срединной плоскости, к статически эквивалентным им изгибающим и крутящим моментам

Нормальные напряжения σ_x и σ_y приводятся к изгибающим моментам, действующим на элемент пластинки по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Касательные напря-

жения τ_{xy} и τ_{yx} приводятся к крутящим моментам. Эти крутящие моменты для двух взаимно перпендикулярных сечений в силу парности касательных напряжений равны между собой и противоположны по знаку.

Если обозначить интенсивность изгибающих моментов по сечениям $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ соответственно через M_x и M_y , а интенсивность крутящих моментов на тех же сечениях через M_{xy} и M_{yx} , то для них получим выражения:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz, \\ M_{xy} &= -M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz. \end{aligned} \right\} \quad (14.21)$$

Подставляя в (14.21) выражения для напряжений (14.04), имеем

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -D (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (14.22)$$

Напряжения же через интенсивность моментов представятся в виде

$$\sigma_x = \frac{M_x}{J} z, \quad \sigma_y = \frac{M_y}{J} z, \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{J} z, \quad (14.23)$$

где обозначено

$$J = \frac{h^3}{12}.$$

Формулы (14.23) могли бы быть написаны и сразу, по аналогии с известными формулами сопротивления материалов,

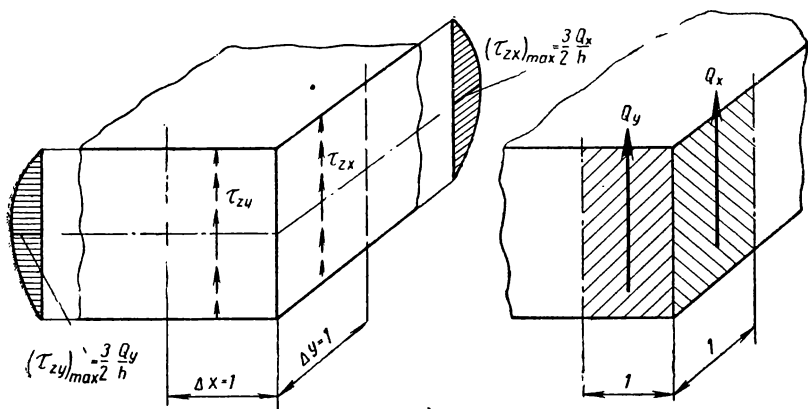
построенными на гипотезе линейного распределения напряжений.

Заметим, что размерность величин M_x , M_y и M_{xy} — это размерность силы, а размерность J (погонного момента инерции) — длина в третьей степени.

Так как запись (14.23) привычна для инженерных расчетов, то все табличные данные и графики, составленные для расчетов пластинок, обычно содержат именно указанные выше погонные изгибающие и крутящие моменты.

Аналогично можно ввести понятие об интенсивности поперечных сил (фиг. 14.13) по тем же двум взаимно перпендикулярным площадкам, а именно:

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zx} dz \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zy} dz. \quad (14.24)$$



Фиг. 14.13. Приведение касательных напряжений, нормальных к срединной плоскости, к статически эквивалентным поперечным силам

Подставляя в (14.24) формулы для касательных напряжений, соответственно получим

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (14.25)$$

Размерность Q_x и Q_y — сила, поделенная на длину (погонная поперечная сила). Очевидно, для самих касательных

напряжений, входящих в (14.24), согласно (14.05—14.06), можно дать также привычную в инженерных расчетах запись:

$$\tau_{zx} = \frac{Q_x S_x}{J}; \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y S_y}{J}, \quad (14.26)$$

где J — прежнее, а S_x и S_y — статические моменты относительно осей x и y той части площади сечения пластинки, (прямоугольники с единичным основанием), которая расположена выше того горизонта, на уровне которого вычисляются касательные напряжения.

В заключение уместно будет ввести еще одно понятие о так называемой приведенной погонной поперечной силе. На стр. 343 было показано, что касательные напряжения на опорном контуре пластинки, например, при $x = a$ (или при $y = b$) τ_{zx} (или τ_{zy}) могут быть путем использования принципа Сен-Венана условно объединены с касательными напряжениями от кручения, т. е. с τ_{xy} (или τ_{yx}). Тогда, очевидно, получаем представление о приведенной (условной) силе

$$V_x = Q_x + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a}. \quad (14.27)$$

На основании (14.24) и (14.22) можем записать по краю $x = \text{const}$:

$$V_x = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \quad (14.28)$$

и по краю $y = \text{const}$ соответственно:

$$V_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]. \quad (14.29)$$

В связи с введением указанных выше понятий граничные условия для свободного края $x = a$ могут быть записаны в виде $M_x = 0$, $V_x = 0$ или

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0, \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{y=a} = 0.$$

Таким образом, оперируя понятием приведенной поперечной силы, на свободном крае пластинки вместо прежних (§ 14.07) трех граничных условий можно решать поставленную задачу при условии удовлетворения лишь двум условиям типа (14.28), (14.29), что вполне достаточно для полного решения задачи.

§ 14.09. Общее решение для прямоугольной пластинки

Рассмотренными выше примерами (§§ 14.06 и 14.07) и осесимметричными случаями изгиба круглых пластинок (стр. 351—354)

почти исчерпываются те случаи изгиба пластинок, где окончательные формулы могут быть даны в замкнутой форме. В большинстве случаев это не удается и остается решение исходного уравнения разыскивать в форме бесконечного тригонометрического ряда или использовать для решения теорию функций комплексного переменного, или, наконец, обратиться к различным приближенным методам. В качестве примера на использование решения в рядах рассмотрим пластинку с шарнирно-закрепленными краями, нагруженную произвольной нагрузкой

$$q = f(x, y). \quad (a)$$

Представим функцию $f(x, y)$ в виде двойного тригонометрического ряда:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (б)$$

где коэффициенты ряда *

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx \cdot dy. \quad (14.30)$$

Произведя согласно (14.30) интегрирование для заданного распределения нагрузки, т. е. для заданной $f(x, y)$, найдем коэффициенты ряда (б) и таким образом представим заданную нам нагрузку как сумму синусоидальных нагрузок.

Прогиб, производимый каждой такой синусоидальной нагрузкой, был обследован в § 14.07, полный же прогиб будет определяться путем суммирования членов, аналогичных (14.16). Итак,

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (14.31)$$

Для частного случая равномерной сплошной нагрузки $f(x, y) = q_0 = \text{const}$ вычисление коэффициентов ряда упрощается.

* См., например, Ю. А. Шиманский, Изгиб пластин, М.-Л., Главная редакция судостроительной литературы, 1934.

Рекомендуется читателю проделать указанные выше операции для случая $q = \text{const}$ и показать, что в этом случае прогиб пластинки имеет вид:

$$w = \frac{16 q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2},$$

где $m = 1, 3, 5 \dots$ и $n = 1, 3, 5, \dots$, а прогиб в центре:

$$w_{\max} = \frac{16 q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{m+n}{2} - 1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (14.32)$$

Этот ряд быстро сходится, и удовлетворительное приближение достигается уже одним лишь его первым членом. Так, для квадратной пластинки первый член дает:

$$w_{\max} = \frac{4 q_0 a^4}{\pi^6 D},$$

что отличается от точного примерно на 2,5%.

Указанным выше методом и другими приемами (§ 14.10) решено большое количество задач по изгибу пластинок, а результаты представлены преимущественно в таблицах и графиках.

Все наиболее характерные случаи пластинок в смысле граничных условий и характера нагружения собраны в капитальном труде акад. Б. Г. Галеркина «Упругие тонкие плиты» (Госстройиздат, 1933).

§ 14.10. Замечания о других решениях

Помимо решений в двойных тригонометрических рядах (346), возможны решения и в одинарных рядах. Так, в случае, если два противоположных края пластинки ($x=0$, $x=a$) свободно оперты, можно взять решение в виде ряда:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (a)$$

где Y_m — функция одного лишь y .

Каждый член ряда (a) удовлетворяет граничным условиям, т. е. при $x=0$ и $x=a$ имеем $w=0$ и $M_x=0$. В дальнейшем остается определить

Y_m так, чтобы удовлетворялись граничные условия на краях $y = \pm \frac{b}{2}$, а также уравнение изогнутой поверхности (14.11).

В общем случае, когда граничные условия отличны от случая свободного опирания, взамен (а) надлежит принять:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m X_m, \quad (б)$$

где X_m — функция одного лишь x и подбирается в соответствии с граничными условиями пластинки на сторонах $x=0$ и $x=a$.

Если направление пластинки, совпадающее в ось Ox , назвать поперечным, а совпадающее с направлением Oy — продольным, то, следуя В. З. Власову, функции Y_m называют *обобщенными прогибами*, а функции X_m — *функциями поперечного распределения прогибов*.

Представление поверхности прогибов в виде разложения (б) при конечном числе m означает сведение пластинки к системе с конечным числом степеней свободы в поперечном направлении при сохранении бесконечного числа степеней свободы в продольном направлении.

Это означает также приведение двухмерной задачи теории упругости к одномерной, так как после разыскания всех m функций Y (функций одного переменного) значения прогибов $w(x, y)$ будут определены с известной степенью точности.

Функции поперечного распределения прогиба X , аппроксимирующие деформированное состояние произвольной поперечной полосы, вырезанной из пластинки, могут быть выбраны различными способами, лишь бы эти функции удовлетворяли геометрическим условиям пластинки на продольных краях и были линейно независимыми.

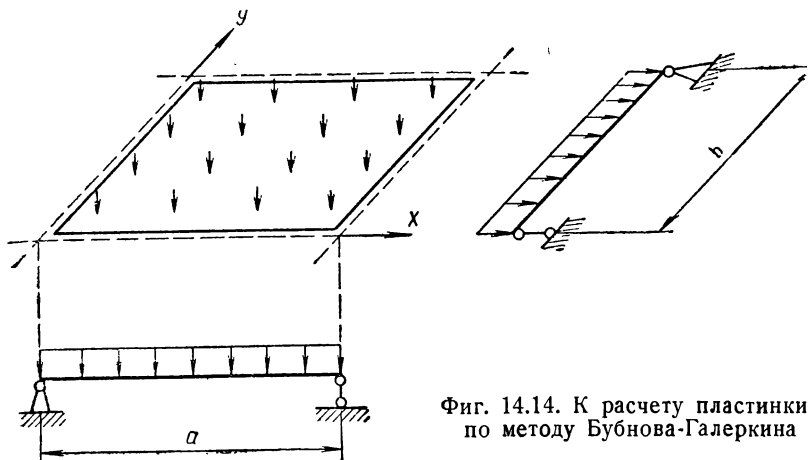
Можно принять за функции X фундаментальные функции поперечных колебаний балки постоянного сечения или функции потери устойчивости стержня, или в случае шарнирного опирания пластинки на продольных краях — тригонометрические функции.

Из числа приближенных методов решения задачи отметим так называемый «метод сеток», «энергетические» и «вариационные методы». В методе сеток интегрирование выполняется численным путем при помощи исчисления конечных разностей (см. работы А. П. Сеницына, П. М. Варвака, А. Ф. Смотров и др.). Энергетические и вариационные методы в основном исходят из положения, что истинному решению задачи соответствует минимум потенциальной энергии изгиба пластинок.

Кооперирование методов теории упругости с методами строительной механики за последнее время составило специальное отраслевое направление в механике, а именно, «строительную механику пластинок» (см. стр. 335).

§ 14.11. О методе Бубнова-Галеркина. Пример.

Пусть прямоугольная пластинка, шарнирно опертая по контуру, нагружена распределенной по всей площади нагрузкой постоянной интенсивности, т. е. $p = \text{const}$ (фиг. 14.14). Решение такой задачи (но кропотливое решение) с позиции общего решения для прямоугольной пластинки указывалось в § 14.09.



Фиг. 14.14. К расчету пластинки по методу Бубнова-Галеркина

Здесь решим эту задачу иначе — путем применения популярного в инженерной практике приближенного метода, носящего название Бубнова-Галеркина.

Зададимся уравнением изогнутой поверхности пластинки так, чтобы были удовлетворены *только* граничные условия, например, примем

$$w = C \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (a)$$

Действительно, при таком начертании для w прогибы и второе производное от w для всех четырех краев пластинки обращается в нуль.

Однако, подставляя производные от (a) (они были выписаны на стр. 338) в левую часть уравнения (14.11), имеем:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = C \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (б)$$

Таким образом, при выбранном произвольном начертании для w , хотя и удовлетворяющего граничным условиям задачи, левую часть выражения (б) получили переменной величиной, тогда как по условию задачи она должна быть величиной постоянной, а именно $\frac{p}{D}$. Иначе говоря, в рамках принятого приближенного начертания для w дифференциальное уравнение (14.11) не удовлетворяется для всех точек пластинки. Поэтому попытаемся удовлетворить (14.11) в интегральном смысле или, как говорят, в среднем для всей площади пластинки. Для этой цели обе части уравнения (14.11) умножим на принятое приближенное уравнение для w , т. е. на

$C \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$, проинтегрируем результат по всей площади пластинки и затем приравняем одну интегральную величину другой — в этом и состоит в данном случае метод Бубнова-Галеркина.

Итак, имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) w \cdot dx \cdot dy = \\ = - \int_0^a \int_0^b \frac{p}{D} w \cdot dx \cdot dy, \end{aligned}$$

переписываемое:

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b C^2 \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} \cdot dx \cdot dy = \\ = \int_0^a \int_0^b \frac{p}{D} C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Выполнив интегрирование (6), получаем:

$$C \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = - \frac{p}{D} \cdot \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{2b}{\pi},$$

откуда получим выражение для C , выполняющего роль, по смыслу (а) максимальный прогиб пластинки:

$$C = - \frac{p}{D} \frac{16}{\pi^6} \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}.$$

Для случая квадратной пластинки ($a=b$) получили бы

$$C = - \frac{4}{\pi^6} \frac{p}{D} = -0,0454 \frac{pa^4}{Eh^3}.$$

Точное решение для квадратной пластинки, как указывалось ранее (§ 14.09, стр. 347), при $\mu=0,3$ доставляет для прогиба в центре пластинки:

$$C = -0,0443 \frac{pa^4}{Eh^3},$$

т. е. приближенное решение отличается от точного в сторону увеличения прогиба на 2,5%.

К сожалению, этот простой способ для напряжений дает большие (а иногда и значительные) расхождения с точным способом. Так, для квадратной пластинки погрешность составит 11,5%.

Однако можно способом Бубнова-Галеркина получить лучшие результаты, если при выборе приближенного начертания функции прогиба w задаться надлежащим комбинированием решений, т. е.

$$w = \sum_{i=1}^{i=n} a_i w_i$$

(см. глава 16).

Примечание. Если продолжить решение разобранный задачи в части вычисления моментов, поперечных сил, реакций опорного контура (что тождественно поперечным силам при $x=0$ и $x=a$, а при $y=0$ и $y=b$), то окажется следующий любопытный результат: опорные реакции контура сводятся не только к распределенным по опорным линиям реакциям, направленным противоположно нагрузке, но и к сосредоточенным силам обратного направления в углах пластинки. Это обстоятельство, не изменяющее указанного выше решения (как в этом, так и в других сходных задачах) при наличии шарнирно-неподвижного опорного контура, но может оказаться существенным, если опорный контур пластинки будет свободно шарнирным в том смысле, что он способен воспринимать реакции только одного направления (случай пластинки, свободно уложенной на опорный контур, без связей с последним). В последнем случае углы пластинки могут приподниматься, нарушится непрерывный контакт пластинки с опорным контуром. При таких явлениях приведенное выше решение окажется непригодным.

Исследование этого явления с экспериментальной и теоретической стороны было выполнено в последнее время проф. С. Н. Никифоровым.

§ 14.12. Круглая пластинка

Для случая круглой пластинки, защемленной по контуру и имеющей равномерно распределенную нагрузку, решение просто получается из задачи с эллиптической пластинкой (14.06). В общем случае нагружения круглой пластинки весьма удобно пользоваться полярными координатами r и θ ; поэтому все основные уравнения изгиба пластинки преобразуем к полярным координатам по формулам:

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta.$$

Впрочем, необходимый результат может быть получен сразу. Дело в том, что левая часть уравнения (14.11) по своей конструкции сходна с левой частью уравнения (8.12) для функции напряжений (и то и другое уравнения написаны в декартовых координатах). Поэтому для перевода уравнения (14.11) в полярные координаты необходимо использовать (9.27) с заменой в нем φ на w .

Основное уравнение изогнутой поверхности (14.11) примет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{D} q(r, \theta). \quad (14.33)$$

В случае, когда нагрузка не зависит от θ , т. е. когда она по всем направлениям от центра пластинки распределена равномерно (симметричное нагружение), уравнение упругой поверхности принимает вид:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = q. \quad (14.34)$$

Общий интеграл этого уравнения составит из общего интеграла w_1 однородного уравнения без правой части, т. е. если $q=0$ [здесь можно по аналогии воспользоваться уравнением (9.29)], и какого-либо частного интеграла w_2 . Последний зависит от характера нагрузки, и если q постоянно (случай сплошной равномерной нагрузки), для него можно взять выражение

$$w_2 = \frac{qr^4}{64D}.$$

Таким образом, общим решением для круговой пластинки при сплошной равномерной нагрузке будет:

$$w = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + K + \frac{qr^4}{64D}. \quad (14.35)$$

Для сплошной пластинки, т. е. без выреза в средней части, из условий, что при $r=0$ прогиб w и производные должны быть конечными, заключаем: $A=B=0$. Остальные постоянные найдем из граничных условий. Этими условиями будут:

а) если пластинка защемлена по контуру, то при $r=a$, $w=0$, $\frac{\partial w}{\partial r}=0$, используя эти граничные условия, получим выражение (14.15а);

б) если пластинка опёрта по контуру, то граничные условия запишутся: при $r=a$, $w=0$, $\sigma_r=0$, т. е. при $r=a$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0;$$

рекомендуется читателю использовать указанные граничные условия и убедиться в справедливости для такого случая следующего уравнения изогнутой поверхности:

$$w = \frac{q}{64D} \left[(a^2 - r^2)^2 + \frac{4a^2(a^2 - r^2)}{1 + \mu} \right]; \quad (14.36)$$

в) для случая пластинки с шарнирно-опертым краем при отсутствии нагрузки $q=0$, но под действием равномерно распределенного по контуру момента $M_r=M$ (фиг. 14.15), граничные условия запишутся: при $r=a$, $w=0$

$$-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial r}\right) = M;$$

для такой краевой задачи в итоге получим:

$$w = \frac{M}{2D(1+\mu)} a^2 - r^2. \quad (14.37)$$

Некоторые особенности представляют задачи для случая сосредоточенной силы P , приложенной в центре пластинки. Приводим без доказательства решения. Если пластинка закреплена по контуру, то

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[\frac{1}{2} (a^2 - r^2) - r^2 \ln \frac{a}{r} \right]. \quad (14.38)$$

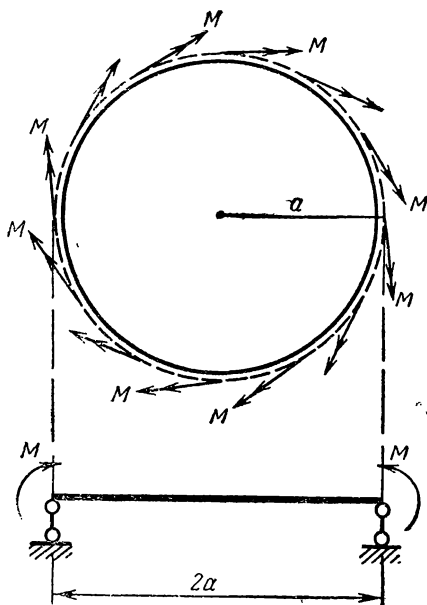
Если пластинка опята по контуру, то

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[\frac{1}{2} \frac{3+\mu}{1+\mu} (a^2 - r^2) - r^2 \ln \frac{a}{r} \right]. \quad (14.39)$$

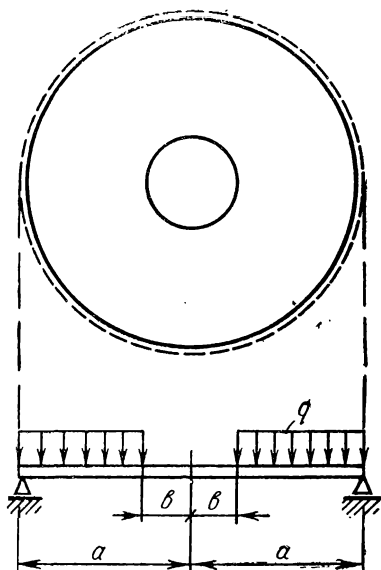
Для случая пластинки, опертой по контуру и в центре и нагруженной сплошной равномерной нагрузкой, необходимо решение получим, надлежаше комбинируя указанные выше.

§ 14.13. Кольцевая пластинка

Для случая кольцевой пластинки (круглой пластинки с вырезом), очевидно, сохраняет силу исходное дифференциальное уравнение упругой поверхности (14.33), а при симметричном нагружении и более простое (14.34). Изменяются лишь граничные условия, влияющие на значения постоянных интегрирования. Так, для кольцевой пластинки, свободно опертой по внешнему контуру, подверженной действию рав-



Фиг. 14.15. Круглая пластинка под действием равномерно распределенного по контуру момента



Фиг. 14.16. К расчету
кольцевой пластинки

где обозначено $\rho = \frac{r}{a}$,

$$\beta = \frac{b}{a};$$

$$k = \beta^2 \left[3 + \mu + 4 \left(1 + \mu \right) \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta \right].$$

Располагая уравнением для w , очевидно, можно перейти к выражениям для $\varphi = \frac{\partial w}{\partial r}$ (девиация), для M_r (радиальный момент), M_θ (тангенциальный момент) и Q (радиальная поперечная

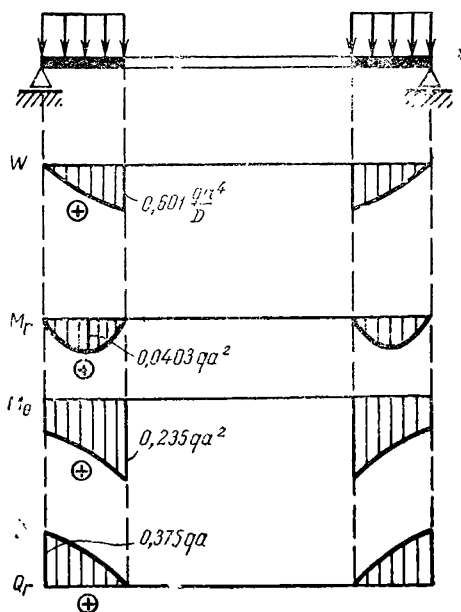
нагрузка) (фиг. 14.16), можно использовать выражение (14.35), но для определения постоянных интегрирования A, B, C, K удовлетворить следующим очевидным условиям: $r = b$, $\sigma_r = 0$ ($M_r = 0$), $\tau_{rz} = 0$, ($Q_r = 0$) и при $r = a$, т. е. на опорном контуре, $M_r = 0$,

$$Q_r = - \frac{q (\pi a^2 - \pi b^2)}{2\pi a},$$

(т. е. погонная опорная реакция).

Использование этих условий в (14.35), после упрощений приводит к окончательному уравнению упругой поверхности:

$$w = \frac{qa^4}{64D} \left\{ \frac{2}{1 + \mu} [(3 + \mu)(1 - 2\beta^2) + k](1 - \rho^2) - (1 - \rho^4) - \frac{4}{1 - \mu} k \ln \rho - 8\beta^2 \rho^2 \ln \rho \right\}, \quad (14.40)$$



Фиг. 14.17. Характер эпок M_r , M_θ и Q_r для частного случая кольцевой пластинки

сила), после чего возможно переходить к вычислениям пай-больших напряжений в различных сечениях, а именно:

$$\sigma_r = \frac{6M_r}{h^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{6M_\theta}{h^2}, \quad (\tau_{zr})_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_r}{h}.$$

В качестве иллюстрации приводим характер эпюр для одного частного случая (фиг. 14.17) пластины с данными $a=180$ см, $b=90$ см, $E=1,9 \cdot 10^5$ кг/см², $\mu=1/6$ (железобетонная пластинка), $q=0,08$ кг/см².

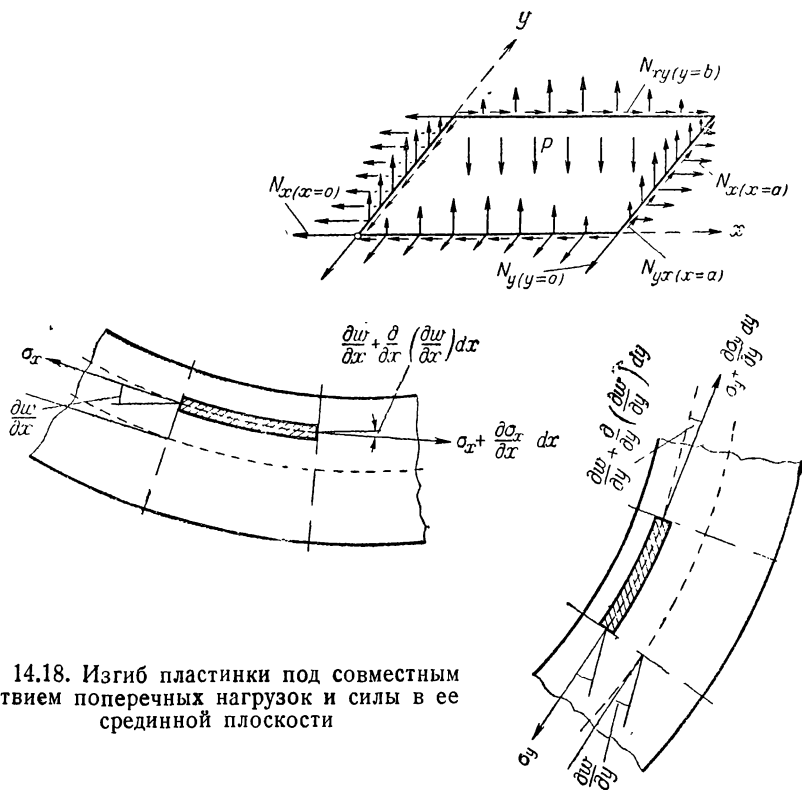
§ 14.14. Изгиб пластинки под совместным действием поперечных нагрузок и сил в ее срединной плоскости. Предварительные замечания и дополнительные обозначения

В предыдущих параграфах настоящей главы предполагалось, что пластинка изгибается под влиянием одних лишь поперечных нагрузок, т. е. силы в срединной плоскости пластинки (или в параллельной плоскости) отсутствовали и, очевидно, опорные закрепления пластинки не препятствовали, если в этом возникала потребность, смещениям опорного контура в указанной срединной плоскости.

Если, кроме поперечных нагрузок, будут (фиг. 14.18) и силы, действующие в срединной плоскости (для краткости будем их называть «продольными»), то они могут оказать заметное влияние на изгиб пластинки, а для гибких пластинок — это влияние может быть значительным. Очевидно, что сами по себе «продольные» силы, т. е. при отсутствии поперечных нагрузок, поперечного изгиба пластинки не вызвали бы и по терминологии теории упругости это составило бы задачу на плоское напряженное состояние. Исключение составит случай, когда «продольные» силы, приложенные на опорном контуре пластинки, будут сжимающими и по величине превышать так называемые критические значения, при которых теряется устойчивость плоской формы пластин (см. § 14.18).

Также очевидно, что при наличии поперечных нагрузок эти «продольные» силы окажут влияние на прогиб пластинки (уменьшат, если «продольные» силы — растягивающие, и увеличат, если они — сжимающие).

В некоторых случаях достаточно жестких пластинок указанное влияние сил, расположенных в срединной плоскости на прогиб пластинки, т. е. на влияние сил, направленных перпендикулярно к срединной плоскости, может оказаться небольшим, и тогда два отдельных решения (задача на плоское напряженное состояние и задача на поперечный изгиб пластинки) могут быть просто суммированы.



Фиг. 14.18. Изгиб пластинки под совместным действием поперечных нагрузок и силы в ее срединной плоскости

Так, по-прежнему, обозначая перемещения точек срединной плоскости в направлении оси x и y (т. е. в плоскости параллельно срединной плоскости) через u и v , а перемещения тех же точек в перпендикулярном направлении через w в случае жестких пластинок можем записать:

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2, \\ v &= v_1 + v_2, \\ w &= w_2, \end{aligned} \quad (14.40)$$

где $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$ — решения плоской задачи (см. глава 8);
 $u_2 = u_2(x, y, z)$, $v_2 = v_2(x, y, z)$ — решения задачи о поперечном изгибе пластинки (см. формулы 14.02);
 $w_2 = w_2(x, y)$ — решение той же задачи (см. 14.11).

Аналогично в случае жесткой пластинки можно было бы поступить и при вычислении напряжений, т. е. воспользоваться принципом независимости действия сил.

При наличии же взаимовлияния продольной и поперечной нагрузок, очевидно:

$$\begin{aligned} u &\neq u_1 + u_2 \\ v &\neq v_1 + v_2 \\ w &\neq w_2. \end{aligned} \quad (14.41)$$

Точно так же для гибких пластинок нельзя использовать закон сложения отдельных действий и для подсчета напряжений.

Если при поперечном изгибе пластинки напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} , взятые со всей толщины пластинки, приводились (§ 14.08) к изгибающим моментам (M_x , M_y) и крутящим ($M_{xy} = M_{yx}$), иначе говоря к парам, то при наличии сил, параллельных срединной плоскости пластинок, указанные напряжения будут приводиться не только к парам, но и к силам.

Для этой цели вводим следующие обозначения внутренних усилий на единицу длины (*погонные силы*):

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz = N_x, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz = N_y, \quad (14.42)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot dz = N_{xy},$$

называемые *интенсивностями сил, действующих в срединной плоскости* (размерность их — сила, деленная на длину).

Для опорного контура пластины очевидно N_x , N_y , N_{xy} составляют внешние силы, приходящиеся на единицу длины (фиг. 14.18).

§ 14.15. Продолжение. Вывод дифференциального уравнения изогнутой поверхности пластинки

Если поставленную в предыдущем параграфе задачу об изгибе пластинок при совместном действии поперечных и «продольных» сил решать в духе классической теории упругости и, в частности, при написании дифференциальных уравнений равновесия исходить из первоначальной, т. е. недеформированной формы элементарного параллелепипеда, то мы *потеем взаимосвязь* во влиянии поперечных нагрузок на дефор-

мации от продольных, и наоборот. Иначе говоря, решение разобьется на два независимых решения: от продольных сил (это будет обычное плоско-напряженное состояние, см. §§ 8.01—8.03) и от поперечных сил (решение, изложенное в §§ 14.03—14.04).

Рассматриваемая задача характерна *именно для нелинейной теории упругости* (нелинейность понимается в смысле геометрическом) и в этом плане только может быть решена. Не будем приводить всего комплекса исходных уравнений нелинейной теории упругости, так как имея целью получить решение, приемлемое для практических целей (следовательно, не претендующее на абсолютную точность), будет достаточно внести поправки только в дифференциальные уравнения равновесия (3.04). Эти последние должны быть написаны, исходя из деформированной формы элементарного параллелепипеда. Последовательность исследования должна быть сходной с изложенной ранее в § 14.03—14.04.

На фиг. 14.18 (внизу) показаны две проекции элементарного параллелепипеда с учетом того, что компоненты напряжений, первоначально параллельные срединной плоскости пластинки, в связи с ее изгибом оказываются уже не параллельными друг другу.

Выдерживая характер исследования, свойственный прикладной теории, логично допустить, что все параллелепипеды, принадлежащие одной нормали (т. е. имеющие общие координаты x и y), «искривляются» одинаково. Иначе говоря, их срединная плоскость при искривлении оказывается параллельной искривленной срединной поверхности пластинки*.

Если при составлении уравнений равновесия пренебречь малыми величинами выше третьего порядка малости, то первые два дифференциальных уравнения равновесия ($\Sigma X=0$; $\Sigma Y=0$) после упрощений ничем не будут отличаться от прежних (3.04). Существенные изменения претерпит третье уравнение ($\Sigma Z=0$).

В результате изгиба пластинки между направлениями компонентов σ_x , σ_y , τ_{xy} , действующих на противоположные грани элемента, образуются малые углы. Так, проекция напряжений σ_x на ось O_z дает:

$$-\sigma_x \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot dx \right) dy \cdot dz.$$

* Это позволит в конечном счете обойтись все же линейными уравнениями (14.43), хотя и отличными от (14.11).

После упрощения, если пренебречь малыми величинами выше третьего порядка малости, эта проекция получает такое выражение:

$$\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz. \quad (a)$$

Аналогично запишется проекция напряжений σ_y на ось Oz :

$$\sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz. \quad (б)$$

Что касается проекции касательных напряжений τ_{xy} на ось Oz , то заметим, что уклон изогнутой срединной поверхности элементарного параллелепипеда в направлении Oy на двух противоположных гранях элемента выразится производными $\frac{\partial w}{\partial y}$ на одной грани и $\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \cdot dx\right)$ на другой грани. В результате проекция на ось Oz запишется так:

$$\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

Аналогично запишется проекция на ось Oz и напряжений τ_{yx} . Окончательное выражение для проекции напряжений τ_{xy} и τ_{yx} на ось Oz представится в виде:

$$2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \\ + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz. \quad (в)$$

Проекции на ось Oz остальных напряжений (на фиг. 14.18 не показанных, а именно — τ_{zx} , τ_{zy} , σ_z) можно записать без изменений относительно прежнего (3.04). Таким образом, окончательное уравнение равновесия на ось Oz после сокращения у всех членов уравнения множителя dx, dy, dz будет:

$$\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} + \\ + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \left[\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right] = 0. \quad (z)$$

Выражение, написанное в скобках, есть прежнее уравнение равновесия (3.04).

Если повторить все выкладки, указанные на стр. 331, то, очевидно, в отличие от (14.07) должны получить:

$$\sigma_z = \frac{Ez \left(h^2 - \frac{4}{3} z^2 \right)}{8(1 - \mu^2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\ + \psi(x, y) - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \int \sigma_x dz - \frac{\partial w}{\partial x} \left[\int \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dz + \int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \cdot dz \right] - \\ - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \int \sigma_y \cdot dz - \frac{\partial w}{\partial y} \left[\int \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \cdot dz + \int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot dz \right] - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \int \tau_{xy} \cdot dz. \quad (\partial)$$

В последнем выражении интегралы можно взять по всей толщине пластинки, т. е. от $z = \frac{h}{2}$ до $z = -\frac{h}{2}$, что это отразится на постоянной интегрирования, завуалированной присутствующей в $\psi(x, y)$. Далее приходим к заключению, что по-прежнему

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2} p.$$

Принимая во внимание обозначения (14.42), а также учитывая, что следующие интегралы, взятые по всей толщине пластинки, очевидно, равны нулю*:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) dz = 0, \quad (e)$$

взамен (14.11) мы получим из (d) следующее окончательное дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластинки:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (14.43)$$

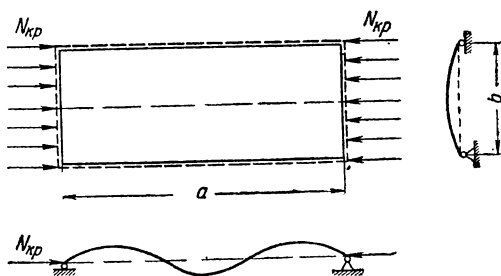
Этим уравнением и следует пользоваться вместо уравнения (14.11) при определении прогиба пластинки, если, кроме поперечных нагрузок, она подвергается еще и действию сил в ее срединной плоскости.

* В этом легко убедиться, если вырезать во всю толщину пластинки элемент с размерами граней dx , dy и h и к нему применить уравнения равновесия (8.01) $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$.

**§ 14.16. Устойчивость прямоугольной пластинки,
свободно опертой по четырем сторонам и сжатой
в одном направлении**

Пусть пластинка свободно оперта по сторонам $x=0$, $x=a$, $y=0$ и $y=b$, причем $a > b$, и подвергается действию продольных сжимающих сил по коротким сторонам (фиг. 14.19). Вычислим, при каких значениях сжимающих сил пластинка теряет устойчивость. Предположим, что выпучивание пластинки происходит по уравнению:

$$w = C \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$



(14.44) Фиг. 14.19. К задаче по упругой устойчивости пластинки

т. е. в направлении длинных сторон имеем синусоиду с m полуволнами (m — целое и пока неизвестное число), а в направлении короткой стороны — то же, но с одной полуволной.

Уравнение (14.44) удовлетворяет граничным условиям, так как при $x=0$, $x=b$, $y=0$, $y=b$ перемещение w обращается в нуль.

Удовлетворяет (14.44) и исходному дифференциальному уравнению изогнутой поверхности (14.43). В самом деле, дифференцируя (14.44) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x^2} &= -\frac{m^2 \pi^2}{a^2} w, & \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \frac{m^4 \pi^4}{a^4} w, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{\pi^4}{b^4} w, & \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} &= \frac{m^2 \pi^4}{a^2 b^2} w. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Подставляя (a) в (14.43) и принимая во внимание, что в данном случае $N_y = N_{xy} = 0$, а $N_x = -N_{kp}$, видим, что уравнение (14.43) удовлетворяется, так как функция w в уравнении сокращается.

Итак, получаем следующее тождество:

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2 b^2} + \frac{\pi^4}{b^4} = \frac{1}{D} N_{kp} \frac{m^2 \pi^2}{a^2},$$

откуда

$$N_{kp} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left[m^2 + 2 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4 m^2} \right] \quad (14.45)$$

или в краткой записи

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 D}{a^2} k, \quad (14.46)$$

где

$$k = m^2 + 2 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4 m^2}.$$

Остается обследовать выражение (14.45) на минимум, учтя, что по смыслу задачи (граничные условия) m может принимать только целые положительные значения. Для квадратной пластинки ($a=b$) минимум (14.45) получается при $m=1$, и таким образом, в этом случае

$$N_{кр} = 4 \frac{\pi^2 D}{a^2}$$

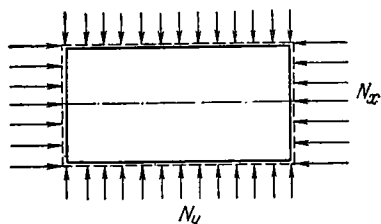
и соответственно критическое напряжение в пластинке, переход через которое влечет выпучивание пластинки:

$$\sigma_{кр} = \frac{N_{кр}}{h} = \frac{\pi^2 E}{3(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^2.$$

§ 14.17. Всестороннее сжатие прямоугольной пластинки

Пусть пластинка, обследованная в предыдущем параграфе на устойчивость, подвергается сжатию в двух направлениях силами, величина которых на единицу длины опорной кромки соответственно N_x и N_y (фиг. 14.20). Пусть между последними сохраняется определенное соотношение $N_y = \alpha N_x$.

Положим $a > b$ и $\alpha < 1$. В качестве попытки примем уравнение выпучившейся пластинки в виде:



Фиг. 14.20. Всестороннее сжатие прямоугольной пластинки

$$w = C \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (14.47)$$

где m и n — целые, пока неизвестные числа. Уравнение (14.47) удовлетворяет граничным условиям; так как при $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, по (14.47) получаем $w=0$.

Удовлетворяет (14.47) и исходному уравнению, так как, дифференцируя его и подставляя производные в (14.43), имеем тождество:

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} = \frac{1}{D} \left[N_x \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \alpha N_x \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right],$$

откуда

$$N_x = \pi^2 D \frac{m \cdot n}{a \cdot b} \left[\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2}{\frac{m}{n} \frac{b}{a} + a \frac{n}{m} \frac{a}{b}} \right]. \quad (14.48)$$

Для случая квадратной пластинки и одинаковых в двух направлениях сжимающих усилий последнее выражение упрощается и принимает вид:

$$N_{кр} = \pi^2 D \frac{2m^2}{a^2},$$

наименьшее значение для $N_{кр}$ имеем, очевидно, при $m=1$, т. е. окончательно

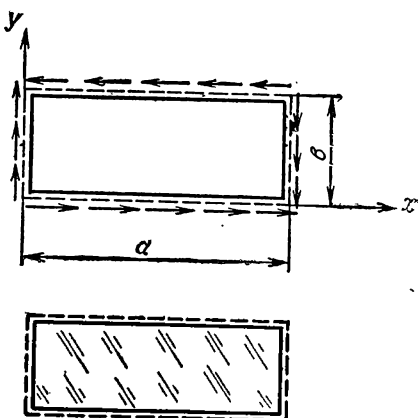
$$N_{кр} = 2\pi^2 \frac{D}{a^2}. \quad (14.49)$$

§ 14.19. Некоторые основные результаты из теории устойчивости пластинок

Ограничимся сообщением окончательных результатов для некоторых характерных задач теории упругой устойчивости пластинок.

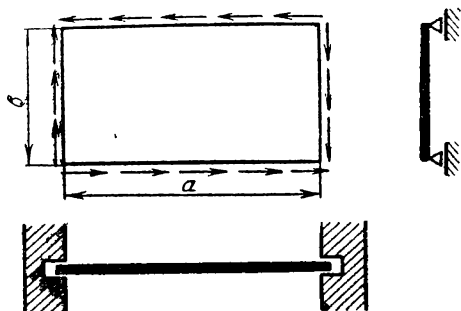
Если рассмотренную выше свободно опертую прямоугольную пластинку подвергнуть по краям касательным усилиям T , то при постепенном увеличении указанных усилий, при некотором их значении $T_{кр} = \tau_{кр} h$ может произойти выпучивание (фиг. 14.21), пластинка подразделяется обычно на полуволны, схематически показанные на фиг. 14.21, внизу. В этом случае оказывается, что

$$\tau_{кр} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \cdot k_1, \quad (14.50)$$

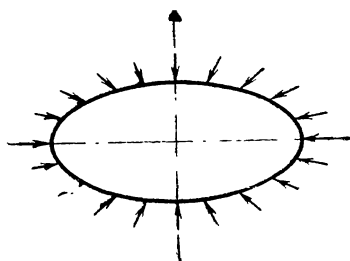


Фиг. 14.21. К задаче на устойчивость от касательных сил

где коэффициент k_1 зависит от отношения длинной стороны к короткой и в частном случае $\frac{a}{b} = 1$, $k_1 = 9,34$, а при $\frac{a}{b} = 3$ достигает значения $k_1 = 6,04$ и при $\frac{a}{b} = \infty$, $k_1 = 8,98$.



Фиг. 14.22 К задаче на устойчивость от касательных сил (второй случай)



Фиг. 14.23. Сжатие эллиптической пластинки

Для пластинки, жестко закрепленной двумя параллельными кромками и свободно опертой двумя другими (фиг. 14.22) $k_1 = 14,58$ при $\frac{a}{b} = 1$ и $k_1 = 8,99$ при $\frac{a}{b} = \infty$.

Для сжатой эллиптической пластинки с жестко-закрепленным от поворота контуром (фиг. 14.23)

$$N_{кр} = k_1 \frac{D}{b^2}, \quad (14.51)$$

где, в зависимости от отношения полуосей $\frac{a}{b}$, коэффициент k изменяется. Так, при $\frac{a}{b} = 1$ $k_1 = 14,79$, а при $\frac{a}{b} = 4$ $k_1 = 11,15$ (значения коэффициентов подсчитаны для $\mu = 0,3$).

Для свободно опертой круглой пластинки, сжатой равномерным нормальным давлением (фиг. 14.24)

$$N_{кр} = k \frac{D}{a^2}, \quad (14.52)$$

где $k = 4,191$. В случае круглой жестко-закрепленной пластинки (фиг. 14.25) значение коэффициента k другое, а именно, $k = 14,68$.

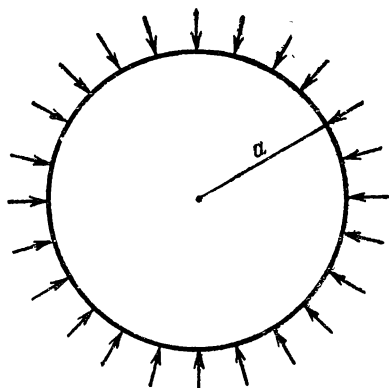
В случае кольцевой пластинки со свободным опертым контуром (фиг. 14.26)

$$N_{кр} = k \frac{D}{a^2},$$

где, в зависимости от отношения $\frac{b}{a}$, коэффициент k изме-

няет свое значение; так, при $\frac{b}{a} = 0,3$ $k = 14,4$ и при $\frac{b}{a} = 0,5$ $k = 24,9$.

В случае жестко-закрепленного контура (фиг. 14.27) $k = 3,1$ при $\frac{b}{a} = 0,3$ и $k = 2,5$ при $\frac{b}{a} = 0,5$.



§ 14.22. Краткие выводы по главе

1. Техническая теория изгиба пластинок, рассмотренная в этой главе, имеет в виду жесткую пластинку или, точнее, пластинку средней толщины, когда допустимо принять гипотезу о прямолинейном нормальном элементе, когда ожидаемые прогибы пластины весьма малы, а нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной плоскости, возможно отнести в разряд второстепенных. В этом случае расчет пластины сводится в основном к решению — линейного дифференциального уравнения изогнутой упругой поверхности пластинки (14.11), удовлетворяющего также граничным условиям.

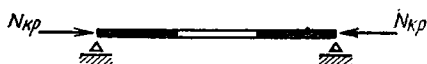
2. Располагая знанием уравнения упругой поверхности пластинки, вычисление любого компонента тензора напряжений или деформации представляет элементарную задачу, связанную с надлежащим сложением частных производных от выражения упомянутой изогнутой поверхности (14.04—14.07).



Фиг. 14.24 Сжатие круглой свободно опертой пластинки



Фиг. 14.25 Сжатие круглой жестко-закрепленной пластинки



Фиг. 14.26 Сжатие кольцевой пластинки



Фиг. 14.27 Сжатие кольцевой пластинки (второй случай)

В этом смысле уравнение упругой поверхности является своеобразной разрешающей функцией.

Наличие сил, параллельных срединной плоскости пластинки, как правило, для пластинок средней толщины оказывает влияние на изгиб, что и отражается в том, что исходным уравнением в этом случае будет иное. Для весьма жестких пластин (толстые плиты) указанным влиянием «продольных» сил на изгиб можно пренебречь, и в таком случае задача распадается на две независимые задачи, а именно — плоское напряженное состояние и на самостоятельный поперечный изгиб. В первом случае исходным будет бигармоническое уравнение для функций напряжений Эри, а во втором случае — уравнение Софи-Жермен.

4. Для пластинок средней и малой толщины при определенных значениях сжимающих сил, действующих в срединной плоскости этих пластинок, может наступить явление потери устойчивости первоначально плоской формы пластинки. Для определения параметров таких «критических» сил исходным уравнением является (14.43).

5. В случае, если прогиб пластинки, найденный с помощью (14.11), оказывается немалым, соизмеримым с толщиной пластинки, то приведенное решение следует считать неправильным (неточным), так как в этом случае исходное уравнение изогнутой поверхности пластинки (случай гибких пластинок) должно быть иным, нежели (14.11), и основываться оно должно на нелинейной теории (теории конечных деформаций). Такая теория в этой главе не рассматривалась. Также неприменима разобранный теория ((14.43) и последующие) в случае толстых плит, так как в этом случае оказывается неприменимой гипотеза прямолинейного элемента и упомянутые в п. 1 второстепенные напряжения становятся соразмерными со всеми остальными.

Литература к главе 14 (помимо указанной в тексте)

1. Галеркин Б. Г. Упругие тонкие плиты. Госстройиздат, 1933.
2. Папкович А. Ф. Строительная механика корабля, тт. I и II. Гос. изд-во судостроительной промышленности, 1941—1947.
Труд удостоен Государственной премии СССР. В главах V и VI второй части подробно разобран расчет жестких и гибких прямоугольных и круглых пластин на изгиб и устойчивость. Исследована работа пластин после потери устойчивости и вопросы устойчивости пластин, подкрепленных ребрами.
3. Власов В. З. Строительная механика тонких упругих пластинок. ПММ, т. X, вып. I, 1946.
4. Вайнберг Д. В., Вайнберг Е. Д. Пластины, диски, балки-стенки. Киев, 1959 (см. лит-ру к главе 15).
5. Огибалов П. М. Изгиб пластинок (прочность, устойчивость, колебания). Наиболее полная и современная монография по теории пластинок. Изд-во МГУ, М., 1958.

6. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1947. Труд удостоен Государственной премии СССР. Рассмотрены вопросы прочности, устойчивости и колебания анизотропных пластинок. В начале книги изложены основы теории упругости анизотропного тела.
 7. Горбунов-Посадов М. И. Плиты на упругом полупространстве. Госстройиздат, 1941.
 8. Джанелидзе Г. Ю. Обзор работ по теории изгиба толстых и тонких плит, опубликованных в СССР. ПММ, т. XII, вып. I, 1948.
 9. Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Изд-во АН СССР, М., 1960 (см. аннотации докладов В. В. Болотина по методу точечных преобразований в нелинейной теории пластин и оболочек, Брилла (Чехословакия) — по смешанной задаче изгиба анизотропной пластинки, Б. Г. Коренева по расчету гибких плит, лежащих на упругом основании, А. П. Сеницына по расчету балок и плит на двухслойном полупространстве за пределом упругости, Т. Т. Хачатуряна по теории изгиба толстых плит, С. Н. Никифорова и др.
-

БАЛКИ-СТЕНКИ (ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ). ПОНЯТИЕ О ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 15.01. Предварительное замечание

В настоящей главе внимание читателя как бы вновь возвращается к плоской задаче теории упругости (главы 8, 9, 11), т. е. к расчету пластин при нагружении их силами, лежащими в срединной плоскости этих пластинок.

Конфигурация рассматриваемых ниже пластинок преимущественно будет прямоугольная или треугольная и в соответствии с рассматриваемым характером их загрузки и деформации (изгиб в плоскости наибольшей жесткости), такие пластинки обычно называются *балками-стенками*, поскольку высота таких балок будет соразмерна с их пролетом. Некоторые задачи с такими балками были рассмотрены ранее в §§ 11.01—11.06, причем были найдены решения, при которых граничные условия не всегда выполнялись точно, а лишь в так называемом интегральном смысле (по принципу Сен-Венана).

Так как точное решение задачи о распределении напряжений в балках-стенках при разнообразных нагрузках, действующих по наружному контуру таких конструкций, представляется задачей весьма сложной, то обычно прибегают к различным приближенным методам решения самих исходных для этих балок уравнений теории упругости.

В настоящей главе и имеется в виду вначале вкратце познакомить читателя с принципиальной сущностью этих методов (§§ 15.02—15.03), которые с равным успехом применимы

как к плоским, так и к пространственным задачам теории упругости.

Так как большинство приближенных методов решения (в том числе и описанные в §§ 15.02—15.03) различных задач теории упругости (а также и теории пластичности и теории ползучести) основывается на классическом вариационном принципе, согласно которому *действительная форма равновесия тела отличается от всех возможных форм тем, что в этом случае полная энергия системы имеет минимальное значение* (минималистский принцип), то эти методы получили название экстремальных, или вариационных методов.

Далее, в этой главе имеется в виду познакомить читателя с основными результатами расчета некоторых балок-стенок и массивных тел (§§ 15.04—15.05) в результате использования таких методов.

§ 15.02. Разложение тензорного поля напряжений на основное и корректирующее (метод П. Ф. Папковича)

Подобно тому как общий интеграл неоднородного дифференциального уравнения может быть представлен в виде суммы двух решений: общего интеграла однородного уравнения (т. е. когда правая часть уравнения, характерная для данной конкретной задачи, отсутствует) и любого частного решения заданного неоднородного уравнения, так и *общий интеграл дифференциальных уравнений теории упругости* может быть представлен аналогичной суммой частного и общего решений.

Пусть на поверхности тела заданы компоненты внешних сил p_{xv} , p_{yv} и p_{zv} . Желая разыскать соответствующие этой внешней нагрузке тела напряжения внутри тела, разыщем вначале какое-нибудь частное решение уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X_p &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y_p &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z_p &= 0,\end{aligned}\tag{a}$$

удовлетворяющее на поверхности тела граничным условиям:

$$\begin{aligned}\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= p_{xv}; \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n &= p_{yv}; \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n &= p_{zv}.\end{aligned}\tag{б}$$

Пусть это решение есть

$$\sigma_x^{(0)}, \sigma_y^{(0)}, \dots, \tau_{zx}^{(0)}. \quad (8)$$

Если указанная система напряжений *случайно* удовлетворит также и уравнениям неразрывности деформаций, то найденное частное решение уравнений (а) и (б) и будет искомым *точным* решением задачи.

Если совокупность функций $\sigma_x^{(0)}, \sigma_y^{(0)}, \dots, \tau_{zx}^{(0)}$ не удовлетворит условиям неразрывности деформации, то для нахождения истинного решения задачи необходимо найти ряд таких частных решений однородных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

которые удовлетворяют на поверхности тела отсутствию внешних нагрузок, т. е.

$$\begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= 0, \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n &= 0, \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть такими решениями являются*

$$\sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)}, \dots, \tau_{zx}^{(i)}, \text{ где } i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (4)$$

Тогда истинное решение задачи можно представить в форме

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^{(0)} + \sum A_i \sigma_x^{(i)}, \\ \sigma_y &= \sigma_y^{(0)} + \sum A_i \sigma_y^{(i)}, \\ &\dots \dots \dots \\ \tau_{zx} &= \tau_{zx}^{(0)} + \sum A_i \tau_{zx}^{(i)}, \end{aligned} \quad (15.01)$$

где A_i — некоторые, пока неопределенные константы.

Варьируя значения величин A_i , получаем возможность изменять напряженное состояние тела, не нарушая условий равновесия (а), (б).

* Очевидно, что каждое такое частное решение соответствует самоуравновешенному напряженному состоянию (т. е. возбужденному без участия внешних поверхностных нагрузок).

Для определения этих констант подставим (15.01) в выражение потенциальной энергии деформации [см. (4.12 б)]

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2E} \int \int \int [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + 2(1 + \mu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] dx \cdot dy \cdot dz \quad (\text{ж})$$

и заметим, что так как действительному напряженному состоянию в упругом теле соответствует минимум потенциальной энергии деформации, то искомую комбинацию параметров A_i , при которой будут удовлетворены условия сплошности, можно разыскать из системы уравнений

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial A_i} = 0 \quad \text{при } i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (15.02)$$

Таких уравнений (15.02) можно выписать столько, сколько неизвестных A_i будет сохранено в решении (15.01). Так как точное решение требует составления и решения бесконечного множества уравнений (15.01), что практически невозможно, то приходится ограничиться небольшим количеством членов ряда в (15.01). Степень точности такого «укороченного» решения зависит от того, насколько удачно выбрано частное решение (в) и насколько удачно выбраны из всего множества решений (15.01), соответствующих различным A_i , те несколько, которые удержаны в (15.01). Иногда может оказаться достаточным в (15.01) сохранить только первый член. Компоненты напряжений, составляющие частное решение (в) и входящие первыми слагаемыми в правую часть (15.01), будем называть *компонентами основного тензора напряжений* в данной точке; компоненты же напряжений, составляющие общее решение (е) и входящие вторыми слагаемыми в правую часть (15.01), по терминологии М. Ф. Филоненко-Бородича будем называть *компонентами корректирующего тензора напряжений* в той же точке.

В символической записи выражения (15.01) можно кратко записать:

$$T_{\text{напр.}} = T_{\text{напр.}}^{(0)} + T_{\text{напр.}}^{(n)}. \quad (15.03^*)$$

Так как совокупность тензоров напряжений для всех точек тела составляет тензорное поле напряжений, последнее, по П. Ф. Папковичу, представляется составленным из основного тензорного поля напряжений и корректирующего тензорного поля напряжений.

* Обозначение основного тензора напряжений $T_{\text{напр.}}^{(0)}$ не спутать с прежним обозначением шарового тензора T^0 .

Примечание. Читателю, знакомому со строительной механикой, указанное выше изложение в какой-то степени напоминает классическое построение расчета статически неопределимых стержневых систем по так называемому «методу сил», энергетическое обоснование которого также сводилось к отысканию именно таких значений «лишних неизвестных», при которых потенциальная энергия деформации системы оказывается минимальной. Сходство еще более усиливается, если представить себе расчет статически неопределимой системы (например, фермы), где за «лишние» неизвестные взяты внутренние усилия (например, усилия в стержнях), иначе говоря, если «основную», т. е. статически определимую, систему получать из заданной не путем отбрасывания элементов, связей и т. п., а путем перерезания их и т. д.

В этом случае применяемые в строительной механике так называемые «единичные состояния» представляют обычно взаимно уравновешенную систему усилий (т. е. для их существования не требуется наличия внешних сил на контуре системы, например, опорных реакций и т. п.).

Далее, не исключается и такая возможность выбора «основной» системы, при которой напряженное состояние последней от заданной внешней нагрузки, даже без участия «лишних» неизвестных, будет состоянием действительной (не основной, не преобразованной, а именно — заданной) системы.

В последнем случае расчет статически неопределимой системы ограничивается только расчетом статически определимой, т. е. «основной» системы.

Такому частливому случаю в теории упругости соответствует, очевидно, назначение такого частного (основного) решения (е), при котором оно случайно оказывается и действительным решением задачи.

Указанные выше для строительной механики «единичные» самоуравновешенные состояния соответствуют в методе П. Ф. Папковича самоуравновешенному корректирующему тензорному полю.

После ссылки на такие аналогии читатель, естественно, поставит вопрос: не возможно ли в таком случае перенести в теорию упругости, именно в метод П. Ф. Папковича, все наиболее эффективные современные методы расчета статически неопределимых систем (канонические уравнения деформаций, способ ортогонализации взаимно нулевых эпюр и т. п.). Ответ на этот вопрос может быть дан только положительный. Горизонты использования указанной аналогии чрезвычайно широкие и увлекательные (2), (3), (5).

§ 15.03. Замечания о других методах приближенного решения уравнений теории упругости

В предыдущем параграфе основными неизвестными являлись напряжения и потому вспомогательными были коэффициенты при варьируемых функциях для напряжений. В этом смысле такой приближенный (вариационный) метод может быть отнесен к разновидности *метода сил*.

Очевидно, основными неизвестными можно принять и перемещения; тогда вспомогательными неизвестными будут коэффициенты при варьируемых функциях для компонентов перемещений.

Например, можно для компонентов упругого перемещения принять выражения:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \sum_{i=1}^{i=n} a_i f_i(x, y, z); \\ v &= v_0 + \sum_{i=1}^{i=n} b_i \varphi_i(x, y, z); \\ w &= w_0 + \sum_{i=1}^{i=n} c_i \psi_i(x, y, z), \end{aligned} \quad (15.04)$$

где

$$\begin{aligned} a_1, a_2, \dots, a_m, \\ b_1, b_2, \dots, b_m, \\ c_1, c_2, \dots, c_m \end{aligned}$$

— произвольные постоянные;

$$\begin{aligned} f_1, f_2, \dots, f_m, \\ \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \\ \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m \end{aligned} \quad (15.05)$$

— известные (назначаемые) функции координат x, y, z ; $u_0(x, y, z)$, $v_0(x, y, z)$, $w_0(x, y, z)$ — также известные функции координат, но не содержащие произвольных постоянных.

Вид функций $f_1, f_2, \dots, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \psi_1, \psi_2, \dots$, очевидно, надо выбрать так, чтобы согласно (15.04) были удовлетворены геометрические связи (граничные условия в перемещениях).

Дальнейший ход рассуждений должен быть сходен с изложенным в § 15.02, т. е. надлежит использовать начало наименьшей работы. Начертание для потенциальной энергии в таком случае следует принять выраженным не через компоненты напряжения, а через компоненты деформации (4.12 в), т. е.:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = G \iiint \left[\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} \theta^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right] dx \cdot dy \cdot dz. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее надлежит компоненты деформации выразить через компоненты смещений согласно известным геометрическим уравнениям (3.08).

Наконец, из условий

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c_i} = 0 \quad (15.06)$$

при $i=1, 2, 3, \dots, m$ разыскать параметры $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, c_1, c_2$.

Такой способ приближенного решения может быть отнесен к разновидности *метода перемещений*.

Совершенно очевидна возможность *смешанного метода*, когда назначаются приближенные начертания для некоторых (не всех) компонентов перемещения и некоторых компонентов напряжений.

Не раскрывая содержания этих методов (обстоятельное изложение читатель может найти в интересной книге Л. С. Лейбензона «Вариационные методы решения задач теории упругости», М.—Л., 1943), остановимся кратко на одной форме приближенного метода известного в литературе как «метод Галеркина», нашедший широкое применение в различных областях техники (теория упругости, строительная механика, гидро- и аэромеханика).

Суть этого метода поясним на одномерной задаче. Пусть в известном интервале (c, d) задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$L(x, w, w', w'', \dots) = 0$$

при некоторых известных граничных условиях.

Для приближенного решения его задаемся функцией w_n в виде ряда:

$$w_n = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x),$$

где $\varphi_i(x)$ — линейно-независимые функции, удовлетворяющие всем граничным условиям, а a_i — неизвестные параметры. Эти параметры определяем из условий

$$\int_c^d L(x, w_n, w_n', w_n'', \dots) \varphi_k dx = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (15.07)$$

представляющих линейные относительно a_i уравнения. Внося a_i в w_n , получаем приближенное решение задачи.

Формы этого метода могут быть самые разнообразные. С одной из форм этого метода в применении к расчету изгиба пластинок из своей плоскости, т. е. с так называемым методом Бубнова-Галеркина, читатель кратко ознакомился ранее в § 14.10. Там этот метод оформлялся, как известно, следующим образом: задаются уравнением изогнутой поверхности пластинки

$$w = \sum_{i=1}^{i=n} a_i w_i, \quad (15.08)$$

где w_i — произвольная функция, но удовлетворяющая граничным условиям опирания пластинки.

Подставляя (15.08) в известное уравнение Софи-Жермен (14.11)

$$\nabla^2 \nabla^2 w = -\frac{p}{D}, \quad (15.09)$$

в общем случае получаем противоречие (несоответствие) между левой и правой частями уравнения. Тогда обе части уравнения (15.09) умножают на w_i и интегрируют по всей площади пластинки. Тогда имеем

$$\iint \left[\nabla^2 w_i + \frac{p}{D} \right] w_i dx \cdot dy = 0, \quad (15.10)$$

где поочередно $i = 1, 2, 3, \dots m$.

Решение (15.10) дает значения $a_1, a_2, \dots m$. В большинстве задач оказывается достаточным ограничиться двумя, тремя членами в рядах, а иногда и одним членом, т. е. принять

$$w = a_1 w_1.$$

Возможен, очевидно, и такой вариант с использованием уравнений Ляме (7.02), т. е. (для краткости письма запишем при отсутствии объемных и инерционных сил):

$$\begin{aligned} \iiint \left[(\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u \right] f_i \cdot dx \cdot dy \cdot dz &= 0; \\ \iiint \left[(\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \nabla^2 v \right] \varphi_i \cdot dx \cdot dy \cdot dz &= 0; \\ \iiint \left[(\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \nabla^2 w \right] \psi_i dx \cdot dy \cdot dz &= 0, \end{aligned} \quad (15.11)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, m$; f_i, φ_i, ψ_i — определяются согласно (15.04), а интегрирование распространяется на весь объем упругого тела.

Подставляя в (15.11) поочередно $i = 1, 2, 3 \dots m$, в итоге получим систему линейных уравнений для определения постоянных коэффициентов ($a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots c_1, c_2, \dots$); число таких уравнений будет равно числу постоянных.

Если функции $f_1, f_2, \dots, \varphi_1, \varphi_2, \dots \psi_1, \psi_2$ выбраны так, чтобы были удовлетворены не только геометрические связи, но и статические граничные условия (хотя условия неразрывности и не удовлетворяются), то метод Галеркина становится самым эффективным вариационным методом; для него положительно разрешается вопрос о сходимости решения, т. е. при увеличении числа варьируемых функций до бесконечности получаем точное решение задачи.

Правомочность записи (15.10) или (15.11) можно обосновать просто, в частности, с помощью принципа возможных перемещений [1, 3, 5]*.

Далее, заметим, что выражения, заключенные в скобки [15.10—15.11], как известно, представляют левые части уравнения равновесия (7.02), (14.11) и сами по себе уже равны нулю (если, конечно, начертания для напряжений приняты точными). По этой причине умножение таких скобок на любую функцию, например, на f_i и т. п. и последующее интегрирование по любому объему не должны изменить результата, т. е. в правой части останутся нули.

Среди инженеров большую популярность за последнее время приобрел *вариационный метод В. З. Власова*. В этом методе искомая функция, зависящая от двух переменных и удовлетворяющая дифференциальному уравнению в частных производных (например, прогиб в задаче об изгибе упругой пластинки — см. § 14.10), представляется в виде произведения двух функций, из которых одна представляет заданную функцию от одного переменного, а другая — искомую функцию от другого переменного. Вместо искомых постоянных коэффициентов, рассматриваемых в методе Бубнова-Галеркина (а также в методе Ритца-Тимошенко) и определяемых линейными алгебраическими уравнениями, в вариационном методе В. З. Власова, построенном на прямом приложении принципа возможных перемещений, вводит в рассмотрение система искомых функций, зависящая каждая только от одной координаты и определяемых линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Этим методом двумерные контактные проблемы теории пластинок и оболочек приводятся к одномерным.

В заключение укажем еще один из вариационных методов.

Если функции u , v , w выбраны так, что они оказались (случайно или преднамеренно) интегралами уравнений Ляме (1.02), хотя граничные условия и не удовлетворяются, то согласно предложению Трефца может оказаться удобной следующая система уравнений для нахождения коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} \int \int (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - p_{xy}) f_i d\epsilon &= 0; \\ \int \int (\tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n - p_{yy}) \varphi_i d\epsilon &= 0; \\ \int \int (\tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n - p_{zx}) \psi_i d\epsilon &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15.12)$$

где также $l = 1, 2, 3, \dots, m$.

* За последнее время удалось показать эффективность этого метода и в нелинейных задачах теории пластин и оболочек.

Интегрирование выполняется по всей поверхности упругого тела (de — элемент поверхности тела).

Выражения, заключенные в скобки левых частей уравнений (15.12), представляют собой перенесенные в левую часть граничные условия (2.05), и потому эти выражения были бы равны нулю, если входящие в них выражения для компонентов напряжений были бы назначены точно.

В некоторых задачах (кручение и изгиб авиационных профилей и т. п.) оказался эффективным своеобразный и смешанный метод, разработанный Л. С. Лейбензоном, М. Конторовичем и др. Он состоит в том, что искомые функции представляют в виде произведения двух функций, из которых одна — известная, причем подбираемая так, чтобы частично удовлетворить граничные условия; другая же функция — неизвестная — должна зависеть от меньшего числа переменных и подлежит определению при помощи вариационного уравнения.

Упомянем также о существовании оригинального вариационного метода, состоящего в требовании, чтобы взятый по всей поверхности упругого тела интеграл от квадратичной ошибки при удовлетворении граничных условий имел наименьшее значение, либо чтобы взятый по всему объему упругого тела интеграл от квадратичной ошибки при удовлетворении уравнений упругого равновесия (Ляме) тоже имел наименьшее значение.

Отметим также успешное применение в вариационных методах теории упругости некоторых образов и приемов строительной механики стержневых систем (канонические уравнения деформации и т. п.), разработанных Я. А. Пратусевичем (5).

Особо следует отметить приближенные решения проблем плоской задачи теории упругости путем замены дифференциальных уравнений метода сил или метода перемещений — уравнениями в конечных разностях. В последнем случае рассматриваемое тело заменяется соответствующей пространственной решеткой и для каждого телесного угла записываются три уравнения в конечных разностях.

Принципиально методом сеток может быть решена любая задача, но решение оказывалось трудоемким по причине необходимости решать большое количество линейных алгебраических уравнений.

Количество таких уравнений зависит от количества узлов сетки (а также и от формы сетки — квадратная, прямоугольная, правильные шестиугольники), которой заменяется исследуемое плоское тело.

Этот метод, получивший название *метода сеток*, был широко развит как в приложении к балкам-стенкам, так же в последнее время и к пространственным задачам теории упругости П. М. Варвак.

Составленная с учетом симметрии система уравнений может быть эффективно решена на быстродействующих электронных вычислительных машинах или методом последовательных приближений (*методом релаксации*) в зависимости от числа неизвестных.

В § 15.04 приведены основные результаты исследований некоторых балок-стенок, выполненные с помощью метода сечок. Попутно отметим, что в последнее время П. М. Варвак решил разработанным им методом задачи о толстой прямоугольной плите, сплошной с отверстиями, о параллелепипеде, кубе и др. [3].

§ 15.04. Основные результаты исследований некоторых частных случаев нагружения балок-стенок

Из примеров, разобранных в §§ 11.02, 11.05, следует, что элементарная теория изгиба, изучаемая в сопротивлении материалов, дает результаты, отклоняющиеся от действительности, и в тем большей степени, чем высота балки больше. Попутно еще раз заметим, что и решение, найденное в §§ 11.02, 11.05 с помощью уравнений теории упругости, будучи уточнением элементарной теории сопротивления материалов, само по себе еще не является совершенно точным, так как граничные условия на торцевых сечениях балки были удовлетворены лишь в интегральной форме (в смысле Сен-Венана).

Для дальнейшего уточнения задачи (а для очень высоких балок это обязательно) надлежало бы на прежние решения наложить специальное решение для случая, когда на левом торце ранее разобранной балки действуют взаимно уравновешенные силы. Эта последняя задача (самоуравновешенное нагружение) оказывается не простой и не всегда может быть решена точно, а чаще решается с привлечением приближенных способов, изложенных в §§ 15.02, 15.03, например, с помощью вариационных методов.

Если напряжения, получаемые по элементарной теории изгиба, называть (в терминах вариационного метода теории упругости) *приближением нулевого порядка*, то прежнее решение, полученное в § 11.02 (когда граничные условия были удовлетворены лишь в интегральной форме), уместно назвать *приближением первого порядка*, а дальнейшие уточнения (наложение самоуравновешенного нагружения бипарой) следует уже считать *приближением второго или* (если выполняется несколько последовательных нагружений) *высших порядков*.

Ниже сообщаются результаты расчетов для некоторых частных случаев загрузки высоких балок. Исследования показали, что вполне можно ограничиться расчетами второго приближения.

Для балки-стенки с отношением $\frac{a}{b} = 1$, нагруженной (фиг. 15.01) по верхней кромке равномерной нагрузкой интенсив-

ностью q , а по нижней кромке уравнивающей нагрузкой, изменяющейся вдоль кромки по закону $q_1 = 5q \frac{x^4}{a^4}$, на фиг. 15.02 $a-b$ изображены эпюры напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} в различных вертикальных сечениях: $x=0$, $x=\frac{a}{4}$, $x=\frac{a}{2}$, $x=\frac{3}{4}a$ и горизонтальных сечениях ($y=0$, $y=\pm\frac{b}{2}$). Используются данные второго приближения.

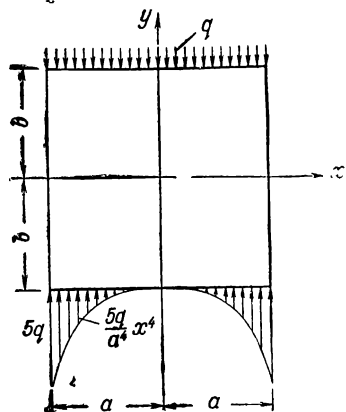
На фиг. 15.02 a по сечению $x=0$ показана пунктиром эпюра напряжений для σ_x согласно элементарной теории; разница между точным и элементарным решениями для нижней кромки ($x=0$, $y=-b$) составляет для указанного примера 232%. Эпюра напряжений для σ_y (фиг. 15.02), как известно, элементарной теорией вообще не раскрывалась.

На фиг. 15.03 показаны эпюры σ_x по среднему вертикальному сечению ($x=0$) для двух относительно крайних случаев: для высокой балки-стенки с отношением $\frac{a}{b}=1/4$ (фиг. 15.03 a) и для балки средней высоты, когда отношение $\frac{a}{b}=4$ (фиг. 15.03, b), а нагрузка прежняя.

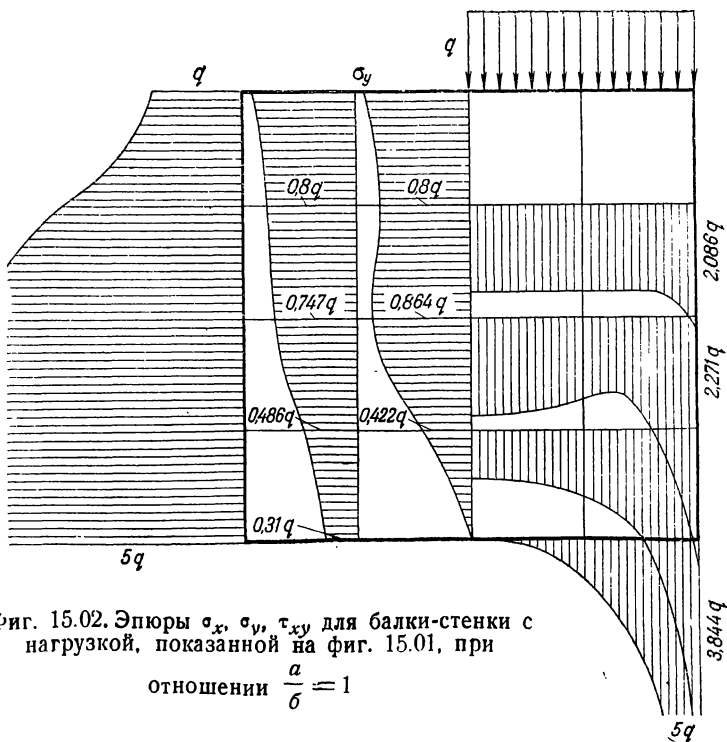
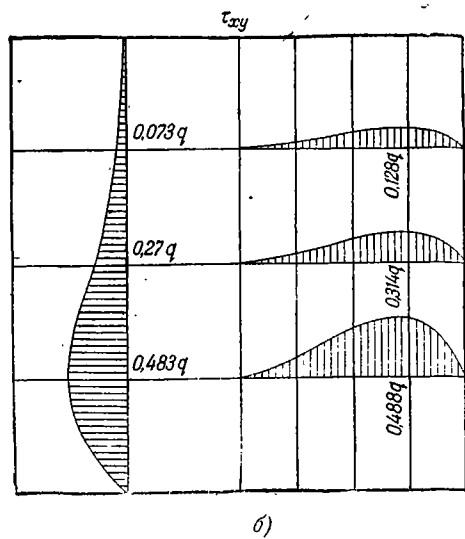
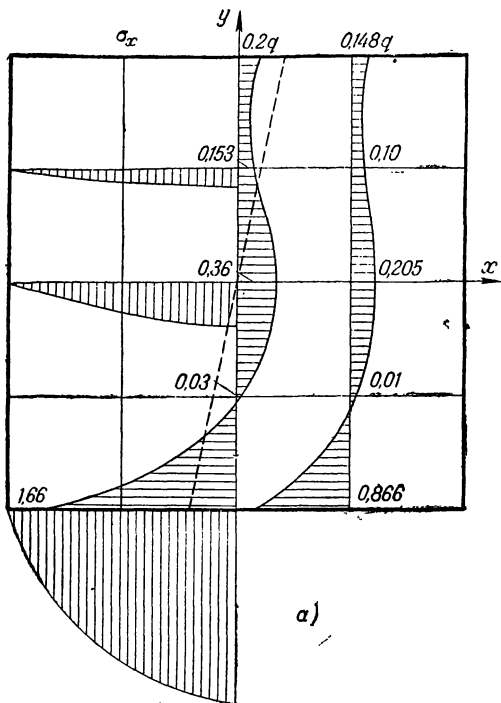
Во втором случае характер эпюры σ_x сходен с тем законом, который доставляет элементарное решение (расхождение в крайней нижней ординате составляет всего лишь 3,17%). В первом же случае (фиг. 15.03 a) эпюра σ_x не имеет общего с элементарным решением и в качественном отношении (три «нейтральных» слоя); в ординатах точная теория для нижнего волокна ($x=0$, $y=-b$) дает результат, отличный от элементарного решения, в 1298%.

Проведенные Я. А. Пратусевичем и другими авторами (А. С. Малиев, М. В. Николаева, И. И. Гольденблат) исследования приводят к практическому выводу, что в балках с отношением $\frac{a}{b}=4$ и больше можно пользоваться элементарной теорией сопротивления материалов.

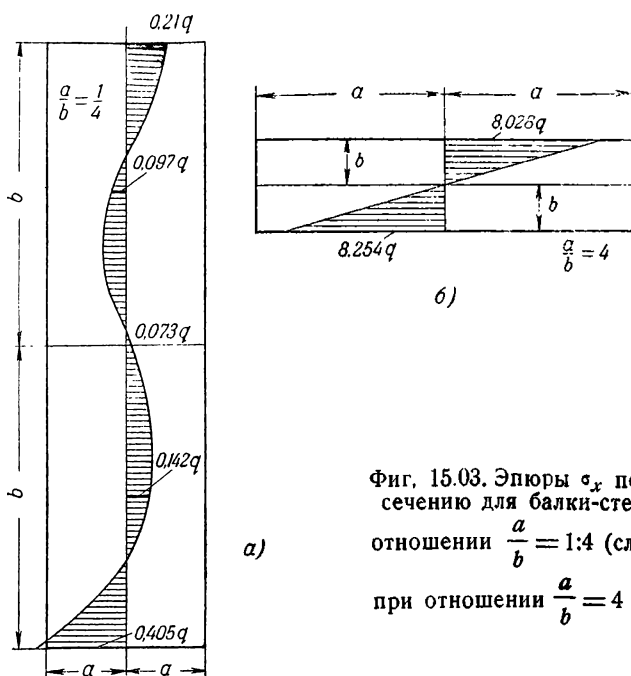
В качестве иллюстрации того, в какой степени убывают напряжения от сечения, где приложены самоуравновешенные



Фиг. 15.01. К примеру расчета балки-стенки



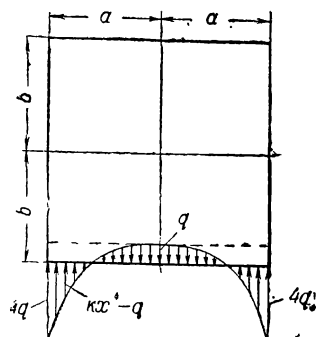
Фиг. 15.02. Эпюры σ_x , σ_y , τ_{xy} для балки-стенки с нагрузкой, показанной на фиг. 15.01, при отношении $\frac{a}{b} = 1$



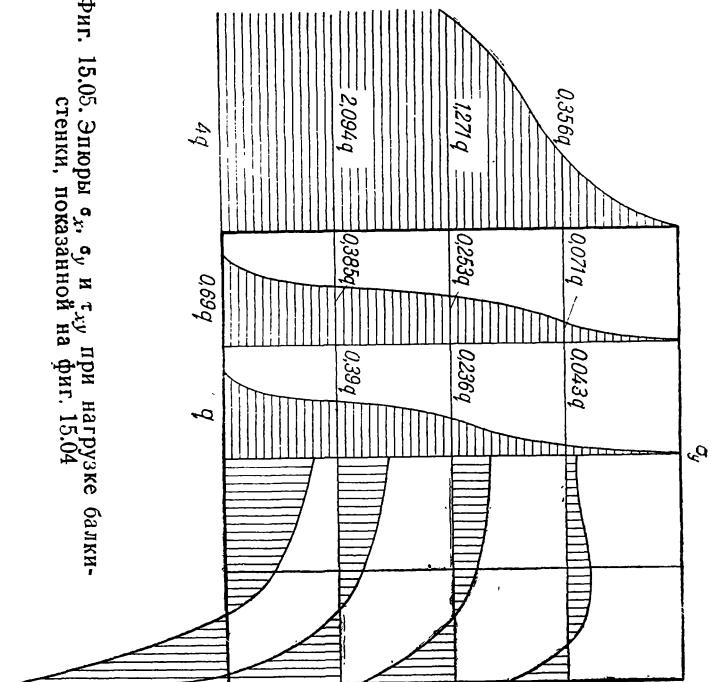
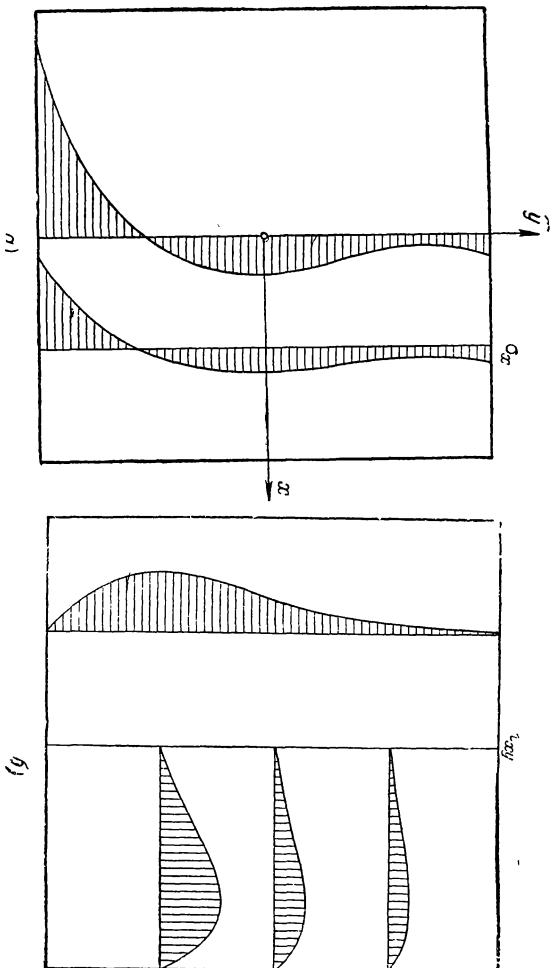
Фиг. 15.03. Эпюры σ_x по среднему сечению для балки-стенки при отношении $\frac{a}{b} = 1:4$ (слева) и при отношении $\frac{a}{b} = 4$ (справа)

нагрузки, приводим пример балки-стенки, загруженной по нижней кромке нагрузкой $q(x) = q\left(1 - 5\frac{x^4}{a^4}\right)$, уравновешивающейся в пределах той же кромки (фиг. 15.04). Для такого нагружения на фиг. 15.05 показаны эпюры σ_x , σ_y и τ_{xy} в нескольких вертикальных и горизонтальных сечениях для случая, когда балка-стенка имеет отношение $\frac{a}{b} = 1$.

В качестве иллюстрации на фиг. 15.06—15.09 приведены распределения напряжений в балках-стенках, заимствованные из книги Д. В. Вайнберг (4), в которой обследовано большое количество различной конфигурации балок-стенок, выполненное П. М. Варвак с помощью метода сеток. На фиг. 15.06 показан характер распределения по высоте среднего сечения напряжений σ_x и по среднему горизонтальному сечению, распределение σ_y



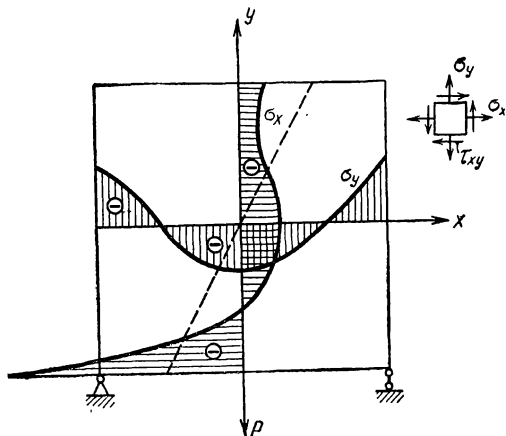
Фиг. 15.04. К примеру расчета балки-стенки на действие нагрузки, взаимно уравновешенной по одной кромке.



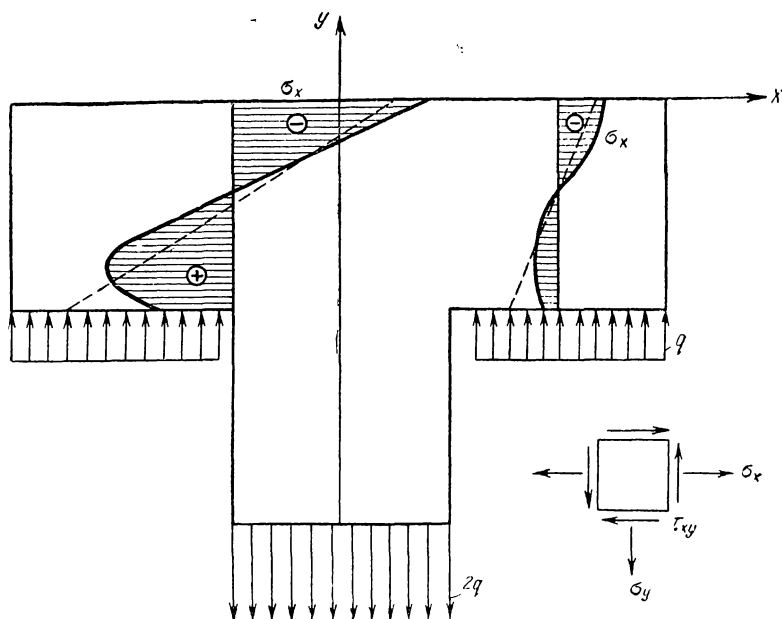
Фиг. 15.05. Эпюры σ_x , σ_y и τ_{xy} при нагрузке балки-стенки, показанной на фиг. 15.04

для случая загрузки квадратной пластинки сосредоточенной силой, приложенной к середине нижней грани. Пунктиром показана эпюра σ_x , подсчитанная по элементарной теории сопротивления материалов.

На фиг. 15.07 показаны эпюры распределения напряжений в двух вертикальных сечениях тавровой пластинки при специальном нагружении. Пунктиром показан закон распределения тех же напряжений по элементарной теории сопротивления материалов.



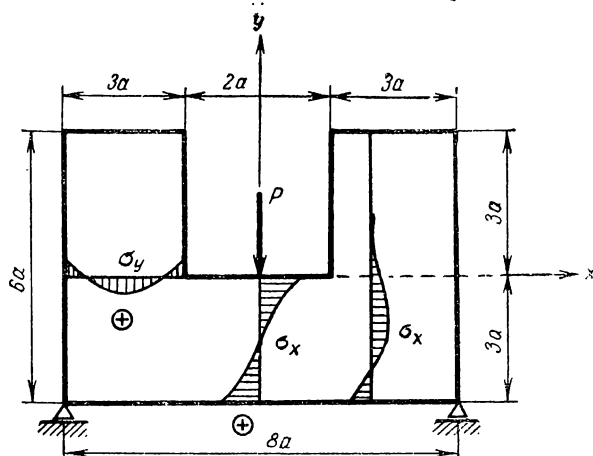
Фиг. 15.06. Квадратная балка-стенка, опертая в крайних точках нижней грани, под действием сосредоточенной силы, приложенной к середине нижней грани



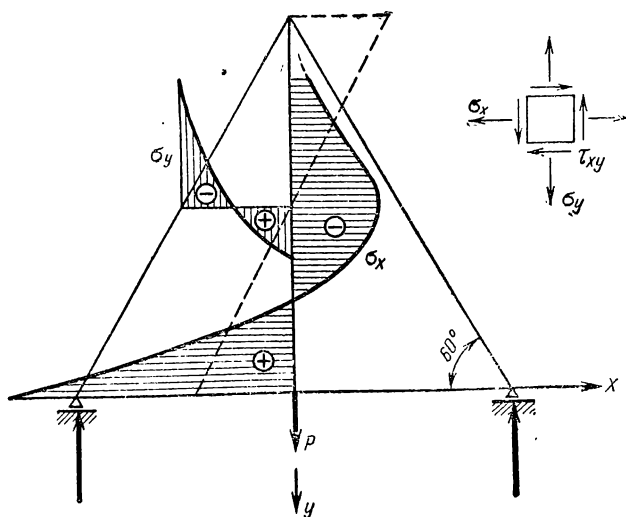
Фиг. 15.07. Тавровая пластина под действием равномерной нагрузки

На фиг. 15.08 приведен характерный случай П-образной балки-стенки при загрузении ее сосредоточенной силой.

На фиг. 15.09 показан характер распределения напряжений в среднем вертикальном сечении и в среднем по высоте горизонтальном сечении для треугольной двухопорной балки-стенки при загрузении ее сосредоточенной силой, приложенной к середине нижней грани.



Фиг. 15.08. Загружение сосредоточенной силой П-образной балки-стенки



Фиг. 15.09. Эпюры напряжений в треугольной балке-стенке

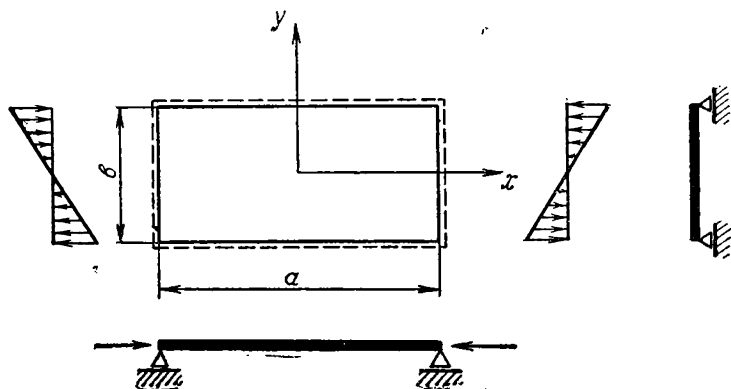
§ 15.05. О потере устойчивости плоской формы изгиба балок-стенок

Рассмотренные в предыдущем параграфе напряженные состояния балок-стенок при некоторых частных случаях нагружения таких балок, очевидно, имеют место при тех параметрах внешнего нагружения, когда исследуемое плоское напряженное состояние является *устойчивым*, т. е. все точки, принадлежащие срединной плоскости балок-стенок, совершают перемещения только в этой плоскости. Очевидно, что если нагрузка возрастает и параметры нагрузки переходят критические значения, то плоская форма изгиба балок-стенок становится уже *неустойчивой*. Задача по устойчивости упомянутой плоской формы балок-стенок сходна с задачей по устойчивости пластинок, рассмотренной ранее в §§ 14.18—14.21, и отличие может быть лишь в граничных условиях.

Приведем некоторые основные результаты по теории устойчивости балок-стенок.

Так, в случае чистого изгиба прямоугольной балки-стенки, свободно опертой по периметру (фиг. 15.10), критическое значение краевого нормального напряжения оказывается равным

$$\sigma_{0, \text{кр}} = k \frac{\pi^2 E}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2, \quad (15.13)$$



Фиг. 15.10. Устойчивость балки-стенки при чистом изгибе

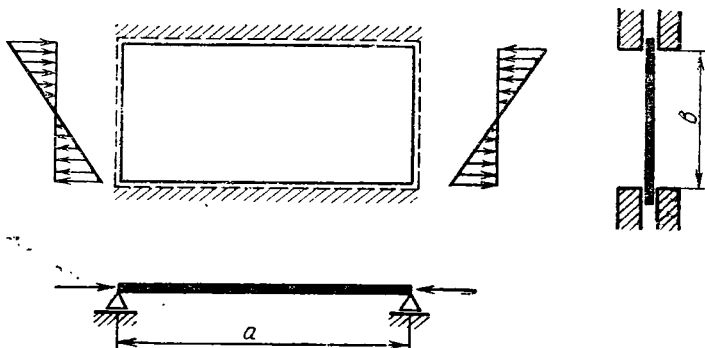
где коэффициент k изменяется в зависимости от отношения сторон. Так, при $\frac{a}{b} = 0,30$, $k = 37,45$; при $\frac{a}{b} = 0,5$, $k = 25,53$; при $\frac{a}{b} = 1$, $k = 27,13$ и при $\frac{a}{b} = 3$, $k = 113,4$ (h — толщина стенки).

Формуле (15.13) соответствует значение критического изгибающего момента (краевого):

$$M_{кр} = \sigma_0, кр \frac{hb^2}{6} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \frac{h^3}{6}.$$

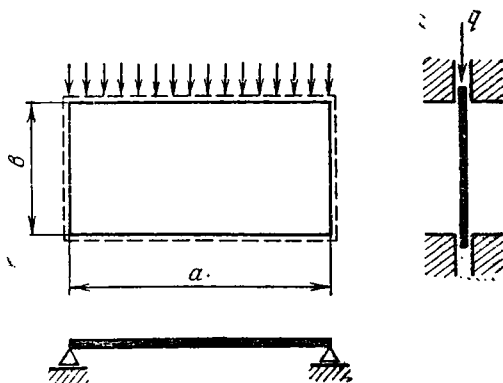
В случае, когда балка-стенка будет жестко закреплена продольными кромками и свободно опертая поперечными (фиг. 15.11), формула для критического напряжения по внешней форме сохраняет прежний вид:

$$\sigma_0, кр = k' \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2,$$



Фиг. 15.11. Второй случай

но значения коэффициентов оказываются иными, большими. Так, при $\frac{a}{b} = 0,3$, $k' = 47,36$, при $\frac{a}{b} = 0,5$, $k' = 39,74$.



Фиг. 15.12. Третий случай

Для балки-стенки, свободно опертой вертикальными кромками и жестко-закрепленными горизонтальными (фиг. 15.12),

критическое нормальное давление, приложенное к верхней кромке,

$$q_{кр} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^2,$$

где, в частности, при $\frac{a}{b} = 0,3$, $k^* = 5,83$; при $\frac{a}{b} = 1,0$, $k^* = 11,79$; при $\frac{a}{b} = 2,0$, $k^* = 33,16$.

§ 15.06. Дополнительные замечания

Упомянутые в этой главе приближенные методы решения задач широко используются в различных областях механики деформируемого тела, и, в частности, для некоторых оригинальных пространственных задач теории упругости. Так, в развитие метода П. Ф. Папковича в 1951 г. успешно решена М. М. Филоненко-Бородичем классическая задача об упругой прямоугольной призме, имеющей нагрузки нормальные и касательные к ее граням [2,144*]. Решение оказалось успешным, потому что корректирующий тензор для параллелепипеда был построен раз навсегда с помощью специальных функций М. М. Филоненко-Бородича, названных им *функциями косинус-биномов*. В частности, тем же автором была тем самым аналитически решена задача о практической границе локальности эффекта самоуравновешенных сил (принцип Сен-Венана и др.).

Т. Т. Хачатурян [3,148*] предложил один из вариантов технической теории изгиба толстых плит и оболочек. Его решение заключается в представлении прогиба (напряжения) в толстой плите в виде суммы двух слагаемых: основного прогиба (напряжения), полученного по теории тонких плит, и корректирующего члена, причем основные и корректирующий члены берутся из известных результатов классической теории изгиба тонких плит.

Объективная оценка различных вариационных методов в теории упругости с далеко идущими собственными исследованиями как для линейных, так и для нелинейных задач теории упругости дана С. Г. Михлиным [3] в его докладе на Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Москва, 27—1—3—11 1960 г.).

Литература к главе 15

1. П. Ф. Папкович. Теория упругости, 1939 г. Капитальное сочинение по теории упругости. В последней главе, посвященной общим теоре-

- мам и вариационным методам теории упругости, излагается также метод автора, о сущности которого рассказано в § 15.02 настоящей книги.
2. М. М. Филоненко-Бородич. Теория упругости, изд. 4-е, Физмаш-издат, 1959. Допущено Министерством высшего образования СССР в качестве учебника для высших технических учебных заведений.

Помимо изложения общих вопросов теории упругости в конце книги (§ 84) излагается оригинальный метод решения задачи об упругой прямоугольной призме при любых нагрузках по ее граням. Имеется числовой пример расчета, показывающий быстрое выравнивание напряжений от места непосредственного приложения несимметричного, но неравномерного нагружения призмы по ее торцам.

3. Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, Москва, 27 января—3 февраля 1960 г. Аннотации докладов С. Г. Михлина, В. А. Бовина, И. Ф. Образцова (вариационные методы в теории упругости), Т. Г. Хачатурян (К теории изгиба толстых плит), П. М. Варвак (К применению метода сеток к пространственным задачам теории упругости) и др.
4. Вайнберг Д. В. и Вайнберг Е. Д., Пластины, диски, балки-стенки. Гос. изд-во литературы по строительству и архитектуре УССР, Киев, 1959.

Систематическое руководство по расчету пластинок, дисков, балок-стенок на прочность, устойчивость и колебания. Большое внимание уделено концентрации напряжений в пластинках около отверстий различной формы и расчету несущей способности железобетонных плит. Обширная библиография.

5. Пратусевич Я. А. Вариационные методы в строительной механике. М.-Л., 1940.

Оформлению вариационных методов приложена популярная среди инженеров каноническая форма записи исходных уравнений. Имеется большое количество примеров. Дается сопоставление различных вариационных методов.

6. Ван Цзи-Де. Прикладная теория упругости. Перевод с английского, М., 1959. Методам конечных разностей, энергетическим принципам и вариационным методам посвящены главы 6—7.
7. Гольденблат И. И. Экстремальные и вариационные принципы в теории сооружений. Статья в сборнике «Строительная механика в СССР 1917—1957». М., 1957.
8. Лейбензон Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости, ОГИЗ, М.-Л., 1943.

В книге дано изложение всех классических методов приближенного решения задач теории упругости. Большое внимание уделено методу «смягчения граничных условий» (метод точечного удовлетворения граничных условий и др.).

9. Смирнов А. Ф. Устойчивость и колебания сооружений. Госжелдор-издат. М., 1958.

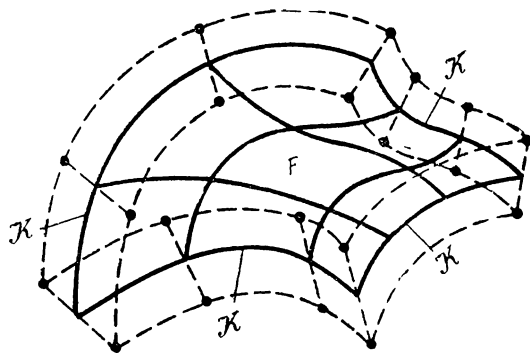
В книге изложен оригинальный вариационный метод автора, использующий теорию матриц. Эффективность метода иллюстрируется на примерах расчета на устойчивость и колебания сложных рам и арок. Метод имеет перспективы на приложение к задачам устойчивости пластин и оболочек.

ИЗГИБ СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

§ 16.01. Основные понятия и допущения в технической теории изгиба тонких оболочек

Под оболочкой в механике деформируемого тела считают тело, форму которого в ненагруженном состоянии можно охарактеризовать следующим образом.

Представим себе ограниченную каким-либо контуром K некоторую криволинейную поверхность F , которую в дальнейшем будем называть *среди́нной поверхностью* (фиг. 16.01). Представим себе, что во всех точках такой срединной поверхности проведены нормали к ней и на этих нормалях, в дальнейшем называемых *прямыми нормалями*, по обе стороны



Фиг. 16.01. К определению оболочки

от F отложены отрезки длиной $\frac{h}{2}$. Концы этих отрезков образуют поверхности, которые в дальнейшем и будем называть *боковыми поверхностями* оболочки (внешней и внутренней).

Оболочка называется *тонкой*, если ее толщина h значительно меньше (в 20 и более раз), чем прочие размеры. Толщина оболочки может быть постоянной или переменной. Направления нагрузок, приложенных к оболочке, могут быть какими угодно.

В зависимости от формы срединной поверхности оболочки и от контура можно различать оболочки с открытым или замкнутым контуром, куполообразные (оба главных радиуса кривизны срединной поверхности одного знака), сферические (оба главных радиуса кривизны срединной поверхности — одинаковые), гиперсферические (главные радиусы кривизны одинаковые, но разного знака), цилиндрические (один из главных радиусов равен бесконечности) оболочки и т. д.

При расчетах на прочность тонких оболочек в зависимости от характера очертания срединной поверхности оболочки (плавное или неплавное), в зависимости от закона распределения нагрузок по поверхностям оболочки (более или менее равномерно-распределенная или с явно выраженной концентрацией, как-то: сосредоточенные силы и т. п.) и в зависимости от опорных закреплений — применяют или упрощенную так называемую *безмоментную теорию* или более строгую — *моментную теорию*.

Безмоментная теория строится на основе допущения, что оболочка не сопротивляется изгибу и в каждой точке прямой нормали имеют место лишь напряжения, параллельные касательной плоскости (имеющей отношение к рассматриваемой прямой нормали) и якобы равномерно распределенные по толщине оболочки.

При таких предположениях задача о нахождении напряжений в оболочке становится статически определимой, а сами напряжения в таком случае обычно называют *мембранными напряжениями*.

Известная читателю из общих курсов сопротивления материалов формула для расчета напряжений в тонкостенных сосудах, находящихся под внутренним давлением (так называемая «котельная» формула), является частным случаем безмоментной теории.

Для оболочек с плавно-изменяющимися параметрами (в очертании, в нагрузке и т. д.) безмоментная теория дает удовлетворительные для практики результаты. Она, однако, оказывается неудовлетворительной при расчете напряжений

в местах, где имеет место нарушение плавности формы оболочки: у краев, в местах сопряжения частей различной кривизны, в окрестности приложения почти сосредоточенных давлений и т. д. и т. п.

В таких случаях обращаются к моментной теории. Однако сложность такой постановки вынуждает принимать некоторые допущения, в общем сходные с теми, которые известны читателю из теории изгиба пластинок.

Эти допущения следующие:

а) Прямолинейные отрезки, которые до деформирования были нормальны к срединной поверхности, остаются и в процессе деформации оболочкой прямолинейными и нормальными к деформированной срединной поверхности (*гипотеза прямых нормалей*), а их линейные размеры не изменяются.

б) Часть компонентов тензора напряжений признается основной, а другая часть — второстепенной. Это означает, что при вычислении деформаций влиянием некоторых напряжений пренебрегают, хотя их существование признается и в последующем расчете они определяются.

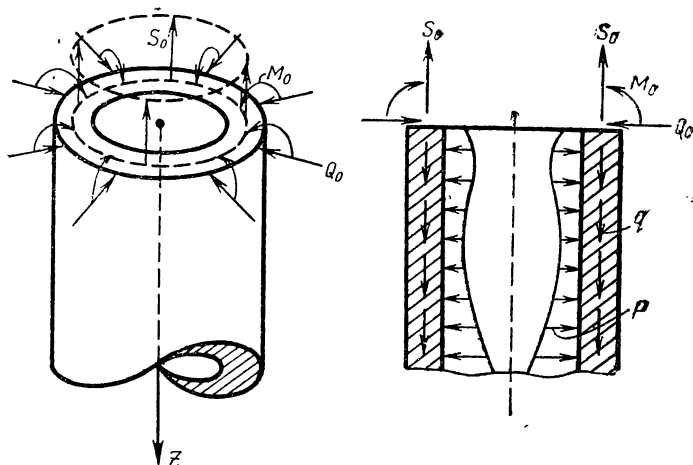
В настоящей главе рассматриваются преимущественно круговые цилиндрические оболочки при осесимметричном нагружении.

§ 16.02. Дифференциальные уравнения изгиба образующей симметрично нагруженной цилиндрической оболочки

Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку, осесимметрично нагруженную радиальной нагрузкой (например, наружное или внутреннее давление (p), которое в общем случае вдоль образующей оболочки может и изменяться), растягивающими (или сжимающими) силами, равномерно-распределенными по торцам оболочки, (S_0) и усилиями, также приложенными к торцу, но сводящимися к радиальным перерезывающим силам интенсивностью (Q_0) и к изгибающим моментам интенсивностью (M_0), равномерно-распределенным вдоль окружности трубы (фиг. 16.02). Возможно и наличие осевых (объемных) сил q , симметрично распределенных относительно оси оболочки.

Ось z цилиндрической системы координат направим вдоль оси оболочки.

Для решения поставленной задачи можно было бы воспользоваться системой дифференциальных уравнений, установленных в главе 10 (уравнения 10.01—10.03 и, далее, — 10.05—10.09), которые, вообще говоря, справедливы при любой толщине оболочки и любом очертании меридиана.



Фиг. 16.02. Осесимметричное нагружение цилиндрической оболочки

Однако, поскольку оболочка тонкая и цилиндрическая, то решение поведем иначе, используя указанные в предыдущем параграфе допущения, а именно: а) изменение толщины оболочки в процессе деформации мало по сравнению с ее прогибом в радиальном направлении, так что

$$\tilde{u}(r, z) \approx u(R, z),$$

где R — радиус срединной поверхности.

б) Осевые (σ_z) и тангенциальные (σ_θ) напряжения будем считать основными, а радиальные (σ_r) и касательные напряжения τ_{rz} — второстепенными. Это позволяет в формулах, связывающих деформации с напряжениями

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_\theta + \sigma_r)], \quad (a)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu (\sigma_r + \sigma_z)], \quad (б)$$

пренебрегать малыми напряжениями σ_r и записать (а) и (б) в виде:

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu \sigma_\theta],$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu \sigma_z]$$

или в виде:

$$\sigma_z = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_z + \mu \epsilon_\theta), \quad (16.01)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_\theta + \mu \epsilon_z). \quad (16.02)$$

в) Отнесение напряжения τ_{rz} к второстепенным означает отнесение к второстепенным и деформации сдвига γ_{rz} (как линейно зависящей от τ_{rz}), т. е. равносильно допущению о неискривляемости прямых нормалей.

Последнее дает возможность следующим образом записать компоненты смещения какой-либо точки $A(r, z)$ цилиндрической оболочки (фиг. 16.03), находившейся до деформации на расстоянии ξ от срединной поверхности:

$$\tilde{u} = u, \quad (16.03)$$

Фиг. 16.03. К использованию гипотезы прямых нормалей

$$w = w_0 - \xi \frac{du}{dz}, \quad (16.04)$$

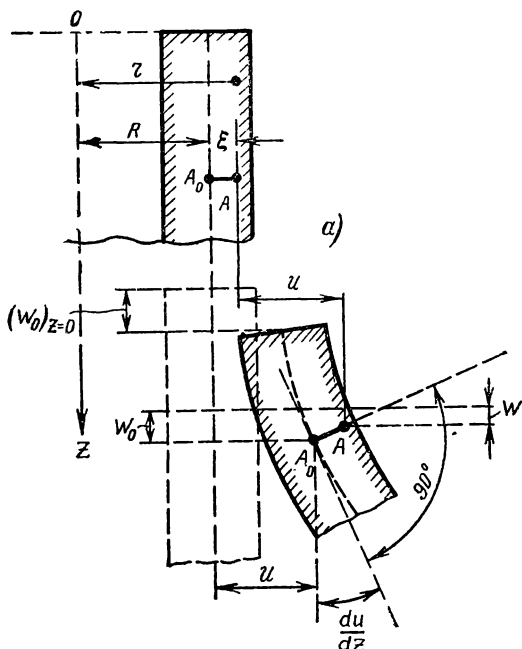
где u и w — проекции перемещения точки A_0 на направления r и z ; соответственно

$$\xi = r - R.$$

Используя известные соотношения (10.02), имеем:

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial w} = \frac{dw_0}{dz} - \xi \frac{d^2 u}{dz^2}; \quad (16.05)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{\tilde{u}}{r} \approx \frac{u}{R}. \quad (16.06)$$

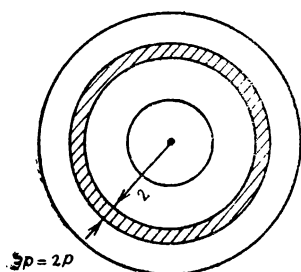


Подстановка (16.05—16.06) в (16.01—16.02) приводит к выражениям:

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\xi \frac{dw_0}{dz} - \xi \frac{d^2u}{dz^2} + \mu \frac{u}{R} \right); \quad (16.07)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{R} + \mu \frac{dw_0}{dz} - \mu \xi \frac{d^2u}{dz^2} \right). \quad (16.08)$$

Для упрощения последующих выкладок сделаем следующие вспомогательные исследования*.



Фиг. 16.04. К выводу (16.09)

Мысленно разрежем оболочку сечением нормальным к оси z и спроектируем на ось Oz внешние силы, приложенные к оболочке выше такого сечения и внутренние силы в нем же, а это и будут нормальные напряжения σ_z .

Элемент поверхности этого сечения (фиг. 16.04) записывается как $2\pi r dr \approx 2\pi R d\xi$. Указанное условие равновесия представится в виде:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z 2\pi R d\xi = S_z 2\pi R, \quad (16.09)$$

где S_z — продольная осевая сила, отнесенная к единице длины окружности среднего радиуса R оболочки (при отсутствии сил q — очевидно $S_z = S_0$). Подстановка в (16.09) выражения σ_z из (16.07) и интегрирование дает

$$\frac{2\pi R E}{1-\mu^2} \left[\xi \frac{dw_0}{dz} - \frac{\xi^2}{2} \frac{d^2u}{dz^2} + \mu \xi \frac{u}{R} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = S_z \cdot 2\pi R$$

или

$$\frac{dw_0}{dz} + \mu \frac{u}{R} = \frac{S_z}{Eh} (1-\mu^2). \quad (16.10)$$

С помощью (16.10) выражения (16.07—16.08) переписутся:

$$\sigma_z = \frac{S_z}{h} - \frac{E\xi}{1-\mu^2} \cdot \frac{d^2u}{dz^2}; \quad (16.11)$$

$$\sigma_\theta = \mu \frac{S_z}{h} + \frac{Eu}{R} - \frac{E\mu}{1-\mu^2} \xi \frac{d^2u}{dz^2}. \quad (16.12)$$

* Ниже, в изложении этого параграфа использовано с незначительными методическими изменениями изложение из книги А. М. Каца «Теория упругости», М., 1960.

Уравнениями (16.03—16.08) определяются геометрическая и физическая стороны изучаемой деформации оболочки. Переходим к подробному рассмотрению статической стороны. Для этой цели рассмотрим равновесие элемента, вырезанного из оболочки двумя плоскостями, проходящими через ось z , и двумя плоскостями, перпендикулярными к этой оси (фиг. 16.05).

Введем обозначения:

M_1 — изгибающий момент в продольном направлении;

M_2 — изгибающий момент в поперечном направлении;

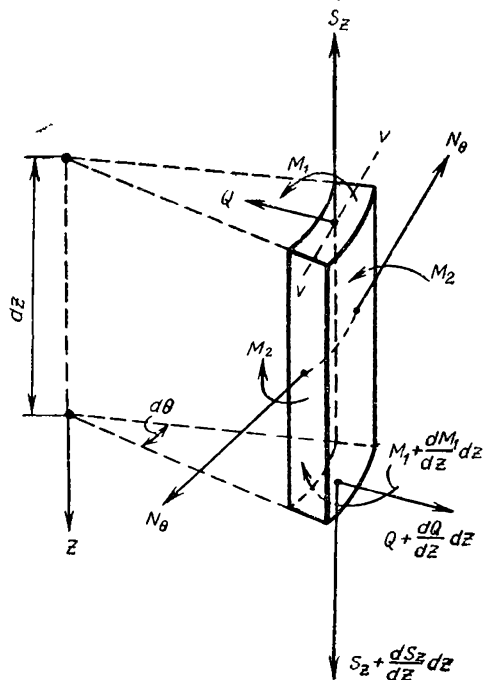
Q — перерезывающая сила;

N_θ — растягивающая сила (в тангенциальном направлении);

p — нагрузка (16.02).

Силы и моменты относим к единице длины контурной линии элемента на срединной поверхности, а нагрузку — к единице площади срединной поверхности. Ось r проведена через центр элемента перпендикулярно к оси z .

Таким образом, указанные выше погонные силы и моменты запишутся через напряжения (с использованием 16.11—16.12) следующим образом:



Фиг. 16.05. К выводу уравнений равновесия (16.16—16.17)

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z \xi d\xi = -D \frac{d^2 u}{dz^2}; \quad (16.13)$$

$$M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta \xi d\xi = -\mu D \frac{d^2 u}{dz^2}; \quad (16.14)$$

$$N_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_0 \cdot d\xi = \mu S_z + \frac{Eh}{R} u, \quad (16.15)$$

где, как и в теории изгиба пластинок, обозначено

$$D = - \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

(цилиндрическая жесткость оболочки).

Для дальнейшего исследования достаточно двух уравнений равновесия: уравнение моментов относительно оси ϑ , перпендикулярной к r и z ,

$$\left(M_1 + \frac{dM_1}{dz} \cdot dz\right) R \cdot d\theta - M_1 R d\theta - Q r d\theta dz = 0$$

и уравнение проекций на ось r :

$$\left(Q + \frac{dQ}{dz} dz\right) R d\theta - Q R d\theta - N_0 dz \cdot d\theta + p R \cdot d\theta \cdot dz = 0,$$

которые в окончательном виде записываются:

$$\frac{dM_1}{dz} - Q = 0; \quad (16.16)$$

$$\frac{dQ}{dz} - \frac{N_0}{R} + p = 0. \quad (16.17)$$

Подставляя (16.13) в (16.16), получаем выражение для перерезывающей силы

$$Q = - \frac{d}{dz} \left(D \frac{d^2 u}{dz^2} \right) \quad (16.18)$$

и использование (16.15) и (16.18) в (16.17) доставляет дифференциальное уравнение прогиба симметричной цилиндрической оболочки переменной толщины

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(D \frac{d^2 u}{dz^2} \right) + \frac{Eh}{R^2} u = p - \mu \frac{S_z}{h}. \quad (16.19)$$

Для оболочки постоянной толщины имеем (взамен 16.18)

$$Q = - D \frac{d^3 u}{dz^3} \quad (16.20)$$

и дифференциальное уравнение прогиба (взамен 16.19)

$$\frac{d^4 u}{dz^4} + \frac{12(1-\mu^2)}{h^3 R^2} u = \frac{1}{D} \left(p - \mu \frac{S_z}{h} \right). \quad (16.21)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{h^3 R^2}} \quad (16.22)$$

$$p - \mu \frac{S_z}{h} = p^*. \quad (16.23)$$

Уравнение (16.21) перепишем в виде:

$$\frac{d^4 u}{dz^4} + 4\beta^4 u = \frac{p^*}{D}. \quad (16.24)$$

Это линейное дифференциальное уравнение 4-го порядка с постоянным коэффициентом, по форме напоминающее известное читателю из курса сопротивления материалов дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, лежащей на линейно-деформируемом упругом основании. По этой причине весь известный из курсов сопротивления материалов и строительной механики расчетный аппарат теории изгиба таких балок может быть полностью использован и в теории осесимметричного изгиба оболочек.

Как известно, общее решение уравнения (16.24) может быть записано

$$u = e^{\beta z} (C_1 \cos \beta z + C_2 \sin \beta z) + e^{-\beta z} (C_3 \cos \beta z + C_4 \sin \beta z) + u_1, \quad (16.25)$$

где u_1 — какое-нибудь частное решение того же уравнения. Так, для случая равномерной нагрузки $p^* = \text{const}$:

$$u_1 = \frac{p^* R^2}{Eh}. \quad (16.26)$$

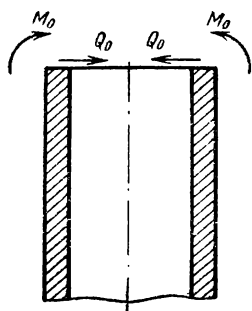
Четыре постоянных интегрирования (C_1, C_2, C_3, C_4) должны быть определены из четырех граничных условий на концах оболочки (по два условия на каждом торце).

§ 16.03. Частный случай — полубесконечная оболочка с нагрузкой по краю

Если длина оболочки L будет превышать значение

$$l = \frac{2\pi}{\beta}, \quad (16.27)$$

что, примерно, соответствует $l \approx 5\sqrt{hR}$, то для такой оболочки, как показывают исследования, прогибы и напряжения вблизи одного из торцов ее мало зависят от перерезывающих сил и изгибающих моментов, приложенных к другому концу. В таком случае можно для упрощения расчета предположить, что второй торец находится бесконечно далеко.



Фиг. 16.06. Осесимметричное нагружение по торцу полубесконечной цилиндрической оболочки

Рассмотрим действие перерезывающих сил Q_0 и изгибающих моментов M_0 , приложенных к торцу $z=0$ такой полубесконечной оболочки (фиг. 16.06).

Ввиду отсутствия распределенной нагрузки (p) и осевых растягивающих сил (S), частное решение уравнения (16.25), будет $u_1=0$. Так как при $z \rightarrow \infty$ прогиб должен оставаться ограниченным (или вообще стремиться к нулю), то в формуле (16.15) должно быть: $C_1=C_2=0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае полубесконечной оболочки

$$u = e^{-\beta z} (C_3 \cos \beta z + C_4 \sin \beta z). \quad (16.28)$$

Дифференцируя, находим:

$$\frac{du}{dz} = \beta e^{-\beta z} [(C_4 - C_3) \cos \beta z - (C_3 + C_4) \sin \beta z]. \quad (16.29)$$

и, далее,

$$M_1 = -D \frac{d^2 u}{dz^2} = 2\beta^2 D e^{-\beta z} (C_4 \cos \beta z - C_3 \sin \beta z), \quad (16.30)$$

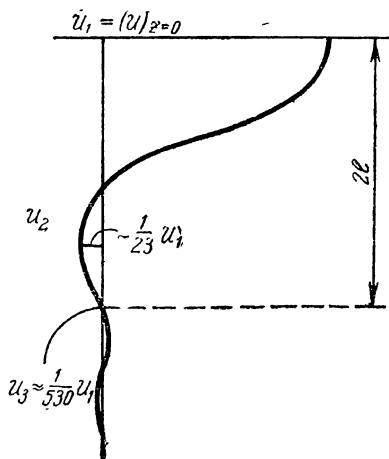
$$Q_1 = -D \frac{d^3 u}{dz^3} = -2\beta^3 D e^{-\beta z} [(C_3 + C_4) \cos \beta z +$$

$$+ (C_4 - C_3) \sin \beta z]. \quad (16.31)$$

Подставляем в (16.30)–(16.31) граничные условия, а именно, при $z=0$ $M_1=M_0$, $Q_1=Q_0$, находим

$$C_4 = \frac{M_0}{2\beta^2 D}; \quad C_3 = -\frac{\beta M_0 + Q_0}{2\beta^3 D}. \quad (16.32)$$

Таким образом, поставленная задача решена сполна. При желании придать формулам для прогиба, момента и перерезывающей силы более компактный вид можно, введя специальные обозначения



Фиг. 16.07. График изменения (затухания) функции u по длине оболочки

$$C_3^2 + C_4^2 = C^2, \quad \frac{C_4}{C} = \cos \psi, \quad \frac{C_3}{C} = \sin \psi, \quad (16.33)$$

формулы (16.28—16.31) переписать и так:

$$\left. \begin{aligned} u &= C e^{-\beta z} \sin(\beta z + \psi); \\ \frac{du}{dz} &= -V\sqrt{2} \beta C e^{-\beta z} \sin\left(\beta z + \psi - \frac{\pi}{4}\right); \\ M_1 &= -2\beta^2 D e^{-\beta z} \sin\left(\beta z + \psi - \frac{\pi}{2}\right); \\ Q &= 2V\sqrt{2} \beta^3 D C e^{-\beta z} \sin\left(\beta z + \psi - \frac{3}{4}\pi\right). \end{aligned} \right\} \quad (16.34)$$

Таким образом, графики зависимости u , $\frac{du}{dz}$, M_1 и Q от z по форме сходны и представляют собою «затухающие» функции. На фиг. 16.07 изображен график u для случая, когда $\psi = \frac{\pi}{4}$.

Располагая знанием M_1 , M_2 , M_0 , Q , можно получить значения напряжений в характерных точках оболочки. Так, при $\xi = \pm \frac{h}{2}$ (внутренняя или внешняя поверхность оболочки):

$$\begin{aligned} (\sigma_z)_{\xi = \pm \frac{h}{2}} &= \pm \frac{6M_1}{h^2}, \\ (\sigma_\theta)_{\xi = \pm \frac{h}{2}} &= \frac{N_0}{h} \pm \frac{6M_2}{h^2}, \end{aligned}$$

где

$$M_2 = \mu M_1.$$

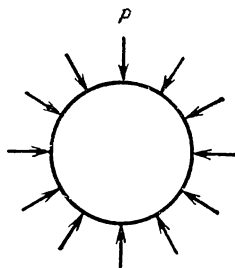
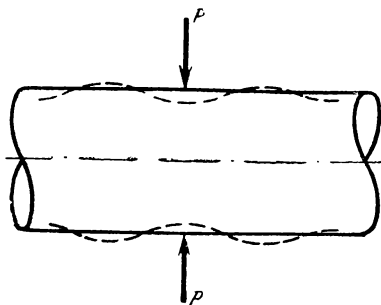
Для касательного напряжения на срединной поверхности оболочки имеем

$$\tau_{rz} = \frac{3}{2} \frac{Q}{h}.$$

§ 16.04. Другие случаи осесимметричного нагружения цилиндрической оболочки

Ограничимся планом последовательности решения задачи при других случаях осесимметричного нагружения цилиндрических оболочек, когда можно широко использовать результаты, полученные для полубесконечной оболочки.

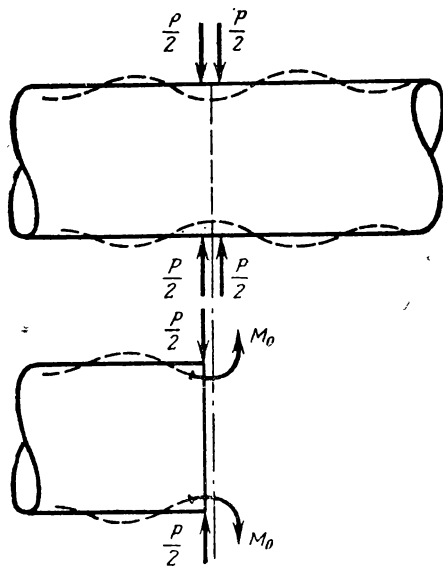
Так, для случая, когда длинная цилиндрическая оболочка, в средней части нагруженная по круговому сечению равно-



Фиг. 16.08. Частный случай загрузки бесконечно длинной цилиндрической оболочки

мерно-распределенной нагрузкой (фиг. 16.08), исследование можно выполнить следующим образом.

Мысленно разрезаем оболочку по месту приложения нагрузки, для чего удобно последнюю представить действующей по двум бесконечно близким сечениям с интенсивностью, равной половине заданной (фиг. 16.09).



Фиг. 16.09. Задача, эквивалентная показанной на фиг. 16.08

Каждая половина оболочки может быть рассмотрена как полубесконечная с известными перерезывающими силами по торцам ($Q_0 = \frac{P}{2}$) и неизвестными изгибающими моментами (M_0). Ввиду симметрии нагружения оболочки относительно места приложения нагрузки, очевидно, что среднее сечение оболочки не будет поворачиваться. Таким образом, граничные условия для определения постоянных C_3 и C_4 , входя-

щие в (16.28), будут следующие:

$$\text{при } z = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \quad \frac{d^3u}{dz^3} = -\frac{P}{2D}.$$

Используя указанные условия, в чем рекомендуем убедиться читателю самостоятельно, приходим к следующим результатам для характерных величин:

$$(M_1)_{z=0} = \frac{P}{4\beta}, \quad (u)_{z=0} = \frac{P}{2\beta^3 D}.$$

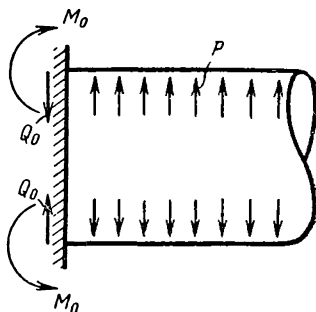
В случае длинной цилиндрической оболочки, находящейся под равномерным внутренним давлением и имеющей один торец жестко закрепленным от прогибов и от девиаций (фиг. 16.10), также возможно воспользоваться решением для полубесконечной оболочки, но условия для определения постоянных интегрирования будут следующие:

$$z=0, \quad u=0, \quad \frac{du}{dz}=0.$$

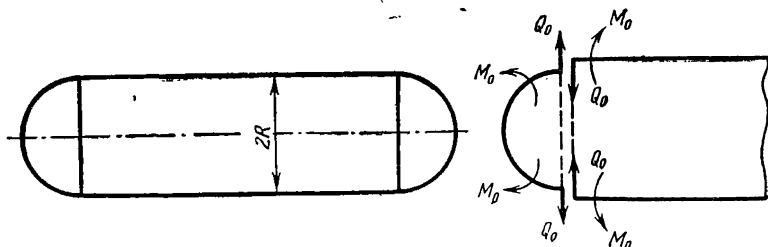
Неизвестными в данной задаче будут погонная перерезывающая сила (Q_0) и изгибающий момент (M_0), которые в результате решения оказываются равными

$$M_0 = \frac{P}{2\beta^2}, \quad Q_0 = -\frac{P}{\beta}.$$

Для расчета цилиндрической оболочки с полусферическими днищами, находящейся под действием внутреннего давления (фиг. 16.11), можно поступить следующим образом.



Фиг. 16.10. Оболочка с жестко-закрепленным торцом



Фиг. 16.11. К расчету цилиндрической оболочки с полусферическими днищами

На достаточном удалении от швов мембранная теория дает хорошие результаты. Так, в цилиндрической части осевые напряжения σ_z и тангенциальные σ_θ определяются *

$$\sigma_z = \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_\theta = \frac{pR}{h},$$

а в сферических днищах:

$$\sigma_z = \sigma_\theta = \frac{pR}{2h}.$$

Увеличение радиуса цилиндра от действия сил p будет (по безмоментной теории):

$$\Delta R_1 = \frac{pR^2}{Eh} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right),$$

а увеличение радиуса сферы:

$$\Delta R_2 = \frac{pR^2}{2h} (1 - \mu).$$

Разница в деформациях цилиндра и сферы является причиной нарушения безмоментного напряженного состояния в месте стыка.

Действительно, разрыв в деформациях может быть ликвидирован лишь в том случае, если у стыка появятся некоторые распределенные перерезающие силы Q_0 и изгибающие моменты M_0 . Считая, что изгиб от Q_0 и M_0 носит местный характер (оболочка длинная, сферическое днище гнется по краю) и сферическая оболочка вблизи стыка изгибается аналогично цилиндрической, условие неразрывности деформации запишется просто — оно должно выражать мысль, что действие Q_0 и M уничтожает упомянутый разрыв.

В итоге такого решения получим:

$$M_0 = 0, \quad Q_0 = \frac{P}{8\beta}.$$

Дальнейшие исследования в ряде случаев показывают, что наибольшие (суммарные, т. е. мембранные плюс изгибные) напряжения в оболочке будут вблизи стыка (на расстоянии $z = \frac{\pi}{4\beta}$) и превышают мембранные напряжения примерно на 30%.

* См. любой курс сопротивления материалов.

**§ 16.05. Потеря устойчивости круговой
цилиндрической оболочки под действием равномерного
осевого сжатия**

При осевом сжатии цилиндрическая оболочка может сохранять свою первоначальную цилиндрическую форму лишь при определенных значениях напряжений, меньших так называемого критического напряжения. Потеря устойчивости при большой длине оболочки может произойти так же, как теряет устойчивость тонкий сжатый стержень, т. е. его ось искривляется, но форма поперечного сечения (в данном случае круговое сечение оболочки) остается неизменной. Этот случай потери устойчивости изучался читателем в курсе сопротивления материалов, где для критической нагрузки устанавливалась известная формула Эйлера

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l_{пр}^2}, \quad (16.35)$$

где

$$J = \pi R^3 h$$

и $l_{пр}$ — приведенная длина оболочки, зависящая от способа закрепления краев.

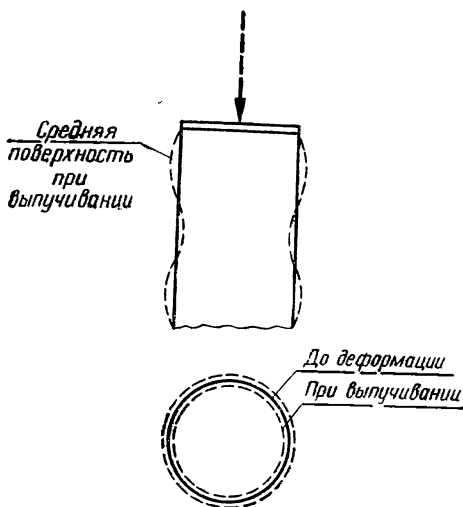
Если приведенная длина оболочки $l_{пр}$ будет меньше

$$l_{кр} = \pi \sqrt{\frac{EJ}{P}}, \quad (16.36)$$

то для тонкой оболочки (а не сплошного стержня) это не означает, что оболочка устойчива, так как она, возможно, может потерять устойчивость путем осесимметричного выпучивания (фиг. 16.12), при котором геометрическое место центров тяжести поперечных сечений (получивших радиальное расширение или сужение, но остающихся круговыми) деформируемой оболочки по-прежнему будет совпадать с первоначальной прямой осью. Возможна (и это более вероятно) и такая форма выпучивания, когда получат искривление не только образующие оболочки, но и первоначальная круговая форма поперечного сечения оболочки также искривится. В этом случае форма прогибов после потери устойчивости может быть в случае шарнирно-опертой цилиндрической оболочки, в качестве одного из предположений аппроксимирована в виде:

$$u = u^* \sin \frac{m\pi z}{l} \sin \tilde{m}\varphi, \quad (16.37)$$

где m — число полуволн для образующей и $\tilde{m}$ — число полных волн в поперечном сечении оболочки (фиг. 16.13); u^* — амплитуда выпучивания.



Фиг. 16.12. Потеря устойчивости путем осесимметричного выпучивания (первый случай — круговая форма поперечных сечений оболочки сохраняется)

Очевидно, для решения такой задачи об устойчивости оболочки необходимо взамен прежнего разрешающего уравнения (16.25) составить новое, при выводе которого (аналогично задаче об устойчивости пластинок) составление уравнения равновесия должно выполняться с учетом деформированной формы оболочки. Естественно, что исходное дифференциальное уравнение усложнится. Сообщим без вывода начертание этого уравнения. Так, если предположить, что поперечные сечения оболочки не искривляются, остаются круговыми, (фиг. 16.12), но получают

радиальные растяжения или сжатия, то исходным уравнением взамен (16.25) будет следующее:

$$\frac{d^4 u}{dz^4} + n^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + 4\beta^4 u = 0, \quad (16.38)$$

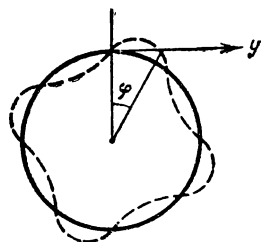
где

$$n^2 = \frac{S_z}{D}.$$

В более общем случае деформации (фиг. 16.13) при выпучивании согласно (16.37), разрешающее дифференциальное уравнение, исходя из указанного деформированного состояния и при линейных зависимостях компонентов деформации от компонентов смещений (как это и принято в линейной теории упругости), имеет вид:

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \sigma_z \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (16.39)$$

где
$$\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$



Фиг. 16.13. Второй случай (общий) — случай потери устойчивости (искривление круговой формы, образование m пуповин)

Подстановка (16.37) в (16.39) приводит к связи между величиной осевого напряжения и параметрами волнообразования. Минимизируя, далее, выражение для осевого напряжения по указанным параметрам, найдем критическое значение осевого напряжения

$$(\sigma_z)_{\text{кр}} = \frac{Eh}{R\sqrt{3}(1-\mu^2)}, \quad (16.40)$$

что также соответствует решению, доставляемому уравнением (16.38). Значение критического осевого напряжения сжатия, получаемое по формуле (16.40), во многих случаях оказывается в 3 или 4 раза превышающим фактическое напряжение в момент начала потери устойчивости, получаемое в опытах.

Объяснение этого несоответствия было дано у нас А. С. Вольмиром, В. И. Феодосьевым и Х. М. Муштари, а за границей — Карманом и Цянь Сюэ-Шеем с помощью нелинейной теории выпучивания.

Они приняли, что квадраты производных от прогиба *u* являются величинами того же порядка, что и производные от других перемещений. Тогда критическое значение сжимающего осевого напряжения оказывается теоретически равным

$$(\sigma_z)_{\text{кр}} = \frac{7}{8} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{DE}{h}}, \quad (16.41)$$

что близко соответствует экспериментальным данным.

§ 16.07. Дополнительные замечания по главе. О современном состоянии теории оболочек

Рассмотренные в предыдущих параграфах этой главы вопросы имели отношение к одной из самых простейших, хотя и имеющих большое практическое значение задач в теории оболочек, а именно — осесимметричная деформация цилиндрических круговых оболочек. Естественно, что ознакомление с такой задачей не может составить у читателя общего представления о современном состоянии теории оболочек и ему будет полезно хотя бы в общих чертах познакомиться с характером других обследованных в теории задач и широко используемых в инженерной практике.

Безмоментная теория оболочек вращения, нагруженных произвольным образом, исследовалась в работах В. З. Власова [1], В. В. Соколовского, Ю. Н. Работнова А. Л. Гольденвейзера [3] и др.

В. З. Власовым была указана область применения безмоментной теории при закреплении краев, исключаящих изгиб срединной поверхности.

Наибольшее количество работ посвящено моментной теории цилиндрических оболочек как в духе прикладной теории упругости, использующих гипотезу прямых нормалей (исследования С. П. Тимошенко, И. Г. Бубнова, П. Ф. Папковича), так и в духе классической теории упругости, т. е. рассматривая оболочку как объемную задачу теории упругости (работы Б. Г. Галеркина, Л. С. Лейбензона).

Особо следует отметить инженерное направление исследований в теории оболочек, имеющих целью расчет цилиндрических оболочек при упрощающих допущениях. Сюда следует отнести получившие широкое признание во многих странах исследования В. З. Власова, построенные на основе синтеза методов теории упругости и строительной механики (1), и, в частности, его метод заменяющей складки, по которому оболочка рассматривается как тонкостенная непрерывная пространственная система, состоящая из бесконечного множества поперечных изгибаемых элементарных рам и обладающая в продольном направлении безмоментной структурой (так называемый иногда полубезмоментный метод).

Учет изгибающих моментов и перерезывающих сил в элементах поперечного сечения круговых оболочек (в дополнение к методу В. З. Власова) получил освещение в работах С. Н. Кана и др.

О многочисленных исследованиях, выполненных в СССР по приложению метода В. З. Власова, читатель может найти в историческом обзоре (9).

Влияние несовершенства первоначальной формы (начальной прогибы) на устойчивость оболочек и поведение их в закритической области обследовано в работах А. С. Вольмира [3], В. А. Агамирова, В. Е. Минеева (12) и др. В основе таких исследований лежит теория оболочек большого прогиба (нелинейная теория). Результаты таких исследований определили существование двух (верхнего и нижнего) пределов устойчивости (p_v и p_n). Верхнему значению (p_v) критической нагрузки соответствуют малые прогибы оболочки и для вычисления этого предела достаточно аппарата линейной теории оболочек, предполагающей первоначальную форму оболочки идеальной, т. е. без каких-либо возмущений (отсутствие прогиба). Нижнему значению (p_n) критической нагрузки, определяемому из нелинейной теории, соответствуют прогибы, соизмеримые с первоначальными возмущениями формы оболочки.

Между верхними и нижними пределами устойчивости лежит так называемая *область неустойчивости оболочки*.

Оболочка при нагрузке $p < p_n$, лежащей ниже области неустойчивости, находится в состоянии единственно устойчивого равновесия. При кратковременном действии какого-либо возмущающего фактора (например — небольшая дополнительная поперечная нагрузка) оболочка получает дополнительный прогиб, исчезающий после прекращения действия дополнительной нагрузки.

При нагрузках $p_n < p < p_a$, находящихся в пределах области неустойчивости, действие возмущающего фактора может преодолеть «энергетический барьер» и оболочка может скачкообразно потерять устойчивость, пройдя через неустойчивую форму равновесия.

В области нелинейной теории оболочек выделяются исследования Х. М. Муштари, рассмотревшего общий случай гибкой упругой оболочки произвольного очертания (6) и работы В. В. Новожилова, рассмотревшего те же оболочки на основании общих соотношений нелинейной теории упругости.

В задачах динамики и устойчивости оболочек и в поведении ее в закритической области следует отметить исследования А. С. Вольмира (3).

К этому кругу задач относятся работы О. Д. Ониашвили, А. П. Филиппова, исследования В. З. Власова совместно с Б. М. Терениным. Большое количество работ выполнено по теории анизотропных оболочек (С. Г. Лехницкий, С. А. Абарцумян, Э. И. Григолюк и др.).

Литература к главе 16

1. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М., Гостехиздат, 1949.
2. Власов В. З. Строительная механика тонкостенных пространственных систем. М., Стройиздат, 1949.
Указанные сочинения удостоены Государственной премии СССР.
3. Вольмир А. С., Гибкие пластинки и оболочки. М., Гостехтеоретиздат, 1956.
4. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехтеоретиздат, 1953.
5. Ильюшин А. А. Устойчивость пластин и оболочек за пределами упругости. ПММ, т. 8, вып. 5, 1944.
6. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М., Гостехиздат, 1947.
7. Муштари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Физ.-техн. ин-т Казанского филиала АН СССР, Казань, 1957.
8. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Гос. изд-во судостроительной литературы, 1951.
9. Ониашвили О. Д. Расчет оболочек и других тонкостенных пространственных конструкций. Статья в сб. «Строительная механика в СССР 1917—1957 гг.» под ред. И. М. Рабиновича, Гостройиздат, М., 1957.

10. Пастернак П. Л. Практический расчет складок и цилиндрических оболочек с учетом изгибающих моментов. «Проект и стандарт», № 2, 1933.
 11. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат. 1948.
 12. Вайнберг Д. В., Синявский А. Л. Расчет оболочек, Киев, Гостехиздат, 1961.
- В книге изложен метод расчета оболочек, основанный на использовании задач о плоском напряженном состоянии и изгибе пластин, являющихся картой оболочки.
- Рассмотрены оболочки с прямоугольными и эллиптическими отверстиями.
13. Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. М., 1960 (см. аннотации докладов В. Л. Агамирова, А. С. Вольмира, В. Е. Минеева по исследованию замкнутых круговых оболочек, подвергающихся действию быстро изменяющейся во времени нагрузки — осевой силы или всестороннего давления), Н. А. Алузян (конические оболочки), С. А. Амбарцумян (анизотропные оболочки), А. Н. Волков (короткие оболочки), А. Д. Коваленко (температурные задачи), М. Козаров (Болгария, динамическая устойчивость оболочек) и т. д.

«Мы твердо уверены в ошибочности мнения механистов, но так же как и они, все же вынуждены пользоваться при изучении мира атомов всем арсеналом классической физики, т. е. понятием о частице-теле, скорости, силе и т. д. Делать это приходится потому, что у нас нет еще понятий, адекватных новому миру явлений и вместе с тем привычных для нас»

Акад. Вавилов С. И.

РАЗДЕЛ V

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

§ 17.01. Предварительные замечания

Определение и задачи теории пластичности сформулированы в главе I (§ 1.01), связи, существующие между компонентами напряжений и деформации в нелинейно-упругом и упруго-пластичном телах, изложены в главе V (§§ 5.02—5.04).

Сделаем несколько дополнительных замечаний и уточнений к ранее встречавшимся понятиям.

Особо важным для теории пластичности являются понятия простого и сложного нагружений, активной и пассивной деформации.

Нагрузки на конструкцию могут быть сколь угодно сложные (сосредоточенные силы или пары, равномерно или неравномерно, прерывно или непрерывно распределенные как по наружной поверхности тела, так и внутри тела и т. д.), но *нагружение будет считаться простым, если все компоненты нагрузок начав с нуля возрастают все одновременно и так, что соотношения между компонентами нагрузок в любой момент времени сохраняются неизменными, т. е. как говорят, все внешние силы возрастают пропорционально общему параметру.*

Если указанного неизменного отношения между внешними силами соблюдаться не будет (например, часть сил начала действовать ранее других или, начав вместе, некоторые из сил прекратили свое действие, а остальные продолжали нарастать и т. п.), то *такое нагружение будет считаться*

сложным, хотя бы нагрузка сама по себе (по количеству сил, по их расположению) была бы и простая.

Если, начав с какого-то момента времени, все нагрузки начнут убывать и, таким образом, что соотношения между ними на определенном отрезке времени будут оставаться неизменными (в частности, вплоть до момента полной разгрузки), то такое разгружение будем называть *простым*. В противном случае будем иметь *сложное разгружение*.

Близкими к понятиям простого нагружения и разгружения примыкают, но не всегда тождественны друг другу, понятия активной и пассивной деформаций.

При простом (одноосном) напряженном состоянии в точке, т. е. когда отличным от нуля имеется только одно главное напряжение в рассматриваемой точке, как правило, случаю простого нагружения будет соответствовать непрерывный рост упомянутого главного напряжения, и потому в каждый последующий момент времени деформация в окрестности этой точки будет отличаться в сторону увеличения по модулю от значения ее в предшествующий момент времени.

Такую деформацию рассматриваемой точки будем называть активной деформацией. В этом частном случае одноосного напряженного состояния понятия простого нагружения и активной деформации будут тождественны.

При *сложном напряженном состоянии в точке*, т. е. когда все три главных напряжения для рассматриваемой точки отличны от нуля, деформацию будем считать, следуя А. А. Ильюшину, *активной* в том случае, если интенсивность напряжения (σ_1) для этой точки в данный момент нагружения имеет значение, превышающее все предшествующие его значения.

Если интенсивность напряжения будет меньше предшествующего его значения, деформацию в этом случае будем считать пассивной.

Для линейно упругого тела, где напряжение в точке однозначно определяется деформациями этой точки, указанные выше понятия активной и пассивной деформаций простого и сложного нагружений, очевидно, не являются необходимыми.

Инженерная практика перед теорией пластичности ставит многие разнообразные задачи, из которых отметим два основных направления. *Под первым направлением теории пластичности* будем понимать обстоятельные исследования всего хода развития упруго-пластических деформаций и поля напряжений в исследуемой конструкции при заданном нагружении. Этой задаче посвящается настоящая глава.

Иногда, это преимущественно относится к случаю,

когда материал конструкции является идеально-пластическим, или близким к этим свойствам, инженерная практика будет довольствоваться выяснением заключительной стадии развития пластических деформаций, точнее — выяснением параметров внешней нагрузки, при малейшем превышении которых означает потерю равновесия (или возникновение чрезвычайно больших и совершенно недопустимых перемещений) сооружения.

Выяснение параметров такой фактически разрушающей нагрузки, или, как говорят, *несущей способности* конструкции, будет составлять *второе направление теории пластичности*. Некоторые задачи этого второго направления рассматриваются в главе 18.

Здесь же попутно заметим, что для вычисления несущей способности конструкции, как показывает опыт, разделение нагружения на простое и сложное, разделение деформаций на активную и пассивную не имеет существенного значения в то время, как для первого направления (нахождение поля напряжений и деформаций в теле) четкое разграничение указанных понятий является абсолютно необходимым.

§ 17.02. Теорема А. А. Ильюшина о простом нагружении

Выше было подчеркнуто, что закон (5.07) справедлив для случая так называемой активной пластической деформации элемента, когда обобщенное напряжение представляет монотонно возрастающую функцию. Из соотношений (5.10), связанных с (5.06), вытекает также, что отношение главных касательных напряжений к соответствующим главным сдвигам для данного элемента тела оказывается постоянным (но различным для разных точек тела).

Возникает вопрос о том, как должны изменяться во времени нагрузки, действующие на неоднородно напряженное тело любой формы, чтобы каждый элемент такого тела оказался в состоянии именно активной деформации, и в частности, чтобы в каждой точке тела обеспечивалось постоянство направлений главных осей напряжений и чтобы сохранялось упомянутое в § 5.03 постоянство отношений касательных напряжений к сдвигам? Не может ли при этом непрерывный рост нагрузок, вызывая в одной, хотя бы и значительной части тела, возрастание обобщенного напряжения, вызвать в другой части уменьшение напряжений?

Короче говоря, существует ли в общем случае неоднородно напряженного тела любой формы такая нагрузка, при которой все элементы тела оказываются в состоянии активной деформации?

Оказывается, что закон (5.07) и вытекающие из него следствия возможно применять ко всему объему тела, если процесс его нагружения будет именно простым. Этот постулат носит название теоремы А. А. Ильюшина о простом нагружении*, гласящей: *теория малых упруго-пластических деформаций дает правильные (согласные с опытом) результаты по крайней мере в том случае, когда процесс нагружения тела является простым.*

Доказательство теоремы предполагает степенную зависимость между обобщенными напряжением и деформацией, т. е. случай, когда $\sigma_i = A \epsilon_i^m$, но на основании анализа экспериментов А. А. Ильюшина заключают о возможности применения теоремы и в случае любого другого начертания зависимости $\sigma_i - \epsilon_i$.

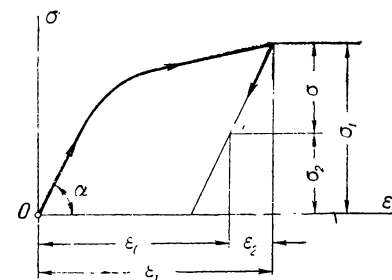
В. В. Соколовский [3] вывел сформулированные условия с помощью предложенной им тригонометрической формы представления компонентов напряжения и деформации.

§ 17.03. Теорема о разгрузке

Пусть стержень предварительно растянут на величину ϵ_1 , что соответствует в нем напряжению σ_1 , причем $\sigma_1 > \sigma_{\text{упр}}$ (фиг. 17.1). Если частично (или полностью) разгрузить стержень, т. е. оставить в нем напряжение $\sigma_2 < \sigma_1$, то, как это видно из диаграммы растяжения, остаточная деформация запишется так:

$$\epsilon_0 = \epsilon_1 - \epsilon_2. \quad (a)$$

В записи (a) обозначено: ϵ_1 — деформация, полученная при первом нагружении и определяемая упругопластическими свойствами материала; ϵ_2 — упругая часть деформации, для вычисления



Фиг. 17.01. Случай разгрузки

которой, очевидно, можно использовать зависимость

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma'}{E},$$

где $\sigma' = \sigma_1 - \sigma_2$ и E — тангенс угла наклона к горизонту прямой разгрузки, или, что все равно, тангенс угла наклона первого «упругого» участка диаграммы растяжения.

Таким образом, для вычисления остаточной деформации

* А. А. Ильюшин. Пластичность, стр. 115—118.

стержня необходимо из приобретенной им ранее деформации, т. е. соответствующей действию первоначальной силы, вычесть упругую деформацию, соответствующую значению той силы (или напряжения), на величину которой уменьшилась первоначальная сила.

Это положение, совершенно очевидное на примере с растянутым (или сжатым) стержнем, остается справедливым и в общем случае формы тела и при неоднородном напряженном состоянии, лишь бы *разгрузка* было *простым*, т. е. когда все внешние силы в стадии пассивной деформации изменяются (уменьшаются) пропорционально их общему параметру*.

Таким образом, перемещения точки в некоторый момент стадии простой разгрузки отличаются от их значений в момент начала разгрузки на величины упругих перемещений, которые возникли бы в теле, если бы в естественном (недеформированном) состоянии к нему были приложены внешние силы, равные разностям внешних сил, действующих на тело в указанные моменты. То же положение сохраняется как для деформаций, так и для напряжений.

Само собой разумеется, что такой принцип вычитания из полных первоначальных значений перемещений, деформаций и напряжений тех их значений, которые соответствуют указанным выше фиктивным силам (и должны быть подсчитаны в предположении линейного деформированного упругого тела), имеет ограничения. Он теряет смысл тогда, когда при разгрузке с последующим переходом нагрузки через нуль, обобщенное напряжение (оно уже будет другого знака, чем при первом нагружении) достигнет, или превысит значения предела упругости. Следует указать, что с учетом так называемого эффекта Баушингера этот новый предел может оказаться меньшим обычного предела упругости.

§ 17.04. Основные уравнения теории пластичности (теории малых упруго-пластических деформаций)

В различное время предполагалось много различных теорий пластичности, имевших своей целью определение пространственного деформирования твердых тел. Эти различные теории могут быть разделены на два вида, в зависимости от того, лежат ли в их основе уравнения, связывающие напряжения и деформации, или уравнения, связывающие напряжения и скорости деформации.

* См. [1], [2], [5], [46*, 48*, 100*].

В первом случае имеем так называемые *теории упруго-пластических деформаций*, а во втором — *теории пластического течения*.

В настоящей книге не будем касаться изложения многих и противоречивых точек зрения на механизм образования пластических деформаций*. Заметим лишь, что сложный клубок этих противоречий был распутан в советских исследованиях, главным образом в удостоенных Государственной премии СССР работах А. А. Ильюшина, к книге которого «Пластичность» (Гостехиздат, 1948 г.) и отсылаем интересующихся читателей. Им было, в частности, установлено, что в случае активной деформации, совершающейся при простом нагружении, и в случае малых деформаций, все известные теории пластичности являются частными случаями общей, т. е. существует одна единая теория пластичности, достаточно достоверно описывающая свойства твердых тел при малых упругих и пластических деформациях. Эта теория, именно *теория малых упруго-пластических деформаций* ниже и излагается.

Математический аппарат этой теории пластичности можно представить совокупностью: трех статических уравнений (3.04), единых, для тела упругого, и для тела пластического, шести геометрических соотношений (3.08), также общих для механики деформируемого тела, независимо от природы тела, шести физических уравнений, отражающих конкретные свойства упруго-пластического тела, написанных через компоненты напряжений и деформаций (5.07), выражений для интенсивности напряжений и деформаций (4.05 и 4.06) и уравнения (5.06), связывающего последние между собой.

Всего, таким образом, имеем 18 уравнений, куда входят 18 неизвестных.

Решением задачи теории пластичности, следовательно, явится такое, которое для каждой точки деформируемого тела удовлетворяет упомянутым выше 18 уравнениям и, кроме того, на границе тела удовлетворяет контурным условиям (2.05).

Если рассматривать состояние равновесия (*упруго-пластический равновесный процесс*) и не интересоваться компонентами смещения, то задачу можно свести к меньшему числу уравнений, а именно: взамен шести геометрических уравнений (3.08) принять первую группу уравнений неразрывности (3.09). Тогда имеем следующую совокупность уравнений.

* См. [7*], [12*], [46*], [47*], [96*], [97*].

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z &= 0.\end{aligned}\quad (A)$$

Уравнения сплошности:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \cdot \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \cdot \partial x}.\end{aligned}\quad (B)$$

Уравнения зависимости компонентов напряжений от компонентов деформации (если пренебрегать ϵ_{cp}):

$$\begin{aligned}\sigma_x - \sigma_{cp} &= 2G' \epsilon_x; \\ \sigma_y - \sigma_{cp} &= 2G' \epsilon_y; \\ \sigma_z - \sigma_{cp} &= 2G' \epsilon_z; \\ \tau_{xy} &= G' \gamma_{xy}; \\ \tau_{yz} &= G' \gamma_{yz}; \\ \tau_{zx} &= G' \gamma_{zx}.\end{aligned}\quad (B)$$

Выражение для обобщенного модуля деформации:

$$G' = G[1 - \omega(\epsilon_l)]. \quad (Г)$$

Выражение для обобщенной деформации:

$$\epsilon_l = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (Д)$$

Приведенные 14 уравнений (A) — (D) содержат 14 неизвестных (шесть компонентов напряжений, шесть компонентов деформаций, два обобщенных параметра — деформация и модуль), и таким образом, с математической точки зрения

задача может быть решена без обращения к помощи каких-либо новых уравнений, гипотез и т. п.

С практической точки зрения прямое решение указанных уравнений почти невозможно из-за большого количества уравнений в частных производных и нелинейности самих уравнений [по причине уравнения (2)].

Для плоского напряженного состояния количество уравнений уменьшается до восьми, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho Y &= 0; \\ \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \sigma_x - \sigma_{cp} &= 2G' \epsilon_x; \\ \sigma_y - \sigma_{cp} &= 2G' \epsilon_y; \\ \tau_{xy} &= G' \gamma_{xy}; \\ \epsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{6(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_x \epsilon_y) + \frac{3}{2} \gamma_{xy}^2}; \\ G' &= G[1 - \omega(\epsilon_i)]. \end{aligned} \right\} \quad (17.01)$$

Для упругого процесса, очевидно, $\omega(\epsilon_i) = 0$, обобщенный модуль деформации равен обычному модулю сдвига и постоянен для каждой точки; в таком случае уравнение (Г) отпадает, надобность в уравнении (Д) исключается, а оставшиеся уравнения (А), (Б), (В) переходят в известные уравнения линейной теории упругости.

§ 17.05. Частный случай — плоская задача, идеально пластический материал

1. Уравнения в декартовых координатах. В случае плоской деформации и идеально пластического материала написанное в предыдущем параграфе число уравнений для напряжений может быть уменьшено до трех, а задача разрешена без привлечения уравнений, содержащих компоненты деформации, т. е. задача оказывается статически определимой*.

Уравнения будут следующими (полагаем отсутствие объемных сил). Условия равновесия:

* Применяемое в таких случаях название «статически определимая» следует понимать условно, так как помимо статических уравнений приходится для решения задачи привлекать и физическое уравнение (уравнение состояния).

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0,\end{aligned}\quad (17.02)$$

условие пластичности (без эффекта упрочнения):

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \quad (17.03)$$

где $k = 1/2 \sigma_T$, если придерживаться гипотезы Сен-Венана (см. 5.15) или $k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T$, если исходить из энергетических представлений (см. 5.18).

Из уравнений (17.02) — (17.03) можно получить решение путем непосредственного интегрирования. Продифференцировав уравнения (17.02) соответственно по y и x и произведя вычитание, получим:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} &= 0; & \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \cdot \partial x} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} (\sigma_x - \sigma_y) &= \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2}.\end{aligned}\right\} \quad (17.04)$$

Подставляя в (17.04) значение $(\sigma_x - \sigma_y)$ из (17.03), т. е.

$$\sigma_x - \sigma_y = \pm 2 \sqrt{k^2 - \tau_{xy}^2},$$

имеем для касательного напряжения τ_{xy} следующее дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\pm 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sqrt{k^2 - \tau_{xy}^2} = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2}. \quad (17.05)$$

В данном случае τ_{xy} исполняет как бы роль *разрешающей функции*.

2. Уравнения в полярных координатах. Уравнения равновесия в полярных координатах имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r) - \sigma_\theta + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta} &= 0,\end{aligned}\right\} \quad (17.06)$$

а условие пластичности (без эффекта упрочнения, см. (17.03):

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4k^2. \quad (17.07)$$

По исключении σ_r и σ_θ дифференциальное уравнение для касательного напряжения $\tau_{r\theta}$ принимает вид:

$$\pm 2 \frac{\partial^2}{\partial r \cdot \partial \theta} \left\{ r \sqrt{k^2 - \tau_{r\theta}^2} \right\} = r^2 \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial r^2} + 3r \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial \theta^2}. \quad (17.08)$$

Примечание. Приведенными выше уравнениями полностью определяется напряженное состояние тела, *но не его деформация*.

Более того, при известных напряжениях в данном случае идеально пластического материала компоненты деформации не могут быть определены однозначно, и это положение будет не только в случае плоской деформации, но и при пространственной деформации. Указанное положение есть результат выпадения в системе уравнений, приведенных на стр. 141, (5.05), одного уравнения в случае материала без упрочнения (связь обобщенного напряжения с обобщенной деформацией).

Таким образом, в отличие от упругого состояния материала, где имело место однозначное соответствие между шестью компонентами напряжения, при пластическом состоянии материала без упрочнения, если шесть компонентов напряжений даны, один из компонентов деформации может быть взят произвольно, а пять остальных тогда определятся однозначно. При пластическом состоянии материала с упрочнением, как и при упругом состоянии материала, все шесть компонентов деформации полностью определяются шестью компонентами напряжений.

В телах, находящихся в упруго-пластическом равновесии, т. е. когда наряду с пластическими зонами существуют также упругие зоны, никакой неопределенности в отношении пластических деформаций нет даже в случае материала без упрочнения. Возрастание деформаций сопровождается изменением форм границы, разделяющей указанные зоны (см. 18.05).

§ 17.06. О так называемой теории пластического течения

В § 17.04 было упомянуто, что для описания пространственного деформирования твердых тел за пределом упругости в разное время предлагалось много различных теорий (гипотез) пластичности, но наиболее «устойчивой» оказалась именно теория малых упруго-пластических деформаций, разработанная нашими современниками: А. А. Ильиным, Г. А. Смирновым-Аляевым, В. В. Соколовским и др. В основу этой теории были положены уравнения, связывающие напряжения и деформации.

Теории пластичности, в основу которых были положены уравнения, связывающие напряжения и скорости деформации, составили так называемые теории пластического течения. По смыслу своего названия эти теории, конечно, рассматривают *пластическую деформацию* твердого тела как *состояние движения*. В случае медленного и непродолжительного течения пластических деформаций, когда можно пренебрегать так называемым вязким сопротивлением материала, т. е. сопротивлением, зависящим от скоростей деформации, уравнения теории малых упруго-пластических деформаций и теории пластического течения оказываются, как показал А. А. Ильин-

шин, тождественными. Отделение проблемы течения от проблемы малых упруго-пластических деформаций является более или менее формальным, хотя и необходимым по причине различия методов их исследования. Уравнения теории пластического течения могут быть написаны аналогично уравнениям теории малых упруго-пластических деформаций. Проследим указанную аналогию.

Если обозначить через $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ компоненты скорости частицы, находящейся в момент времени t в точке (x, y, z) , т. е.

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t};$$

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t};$$

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t},$$

то компоненты скорости самой деформации можно записать по формулам, аналогичным (3.08), а именно, скорость относительных удлинений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}; \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{\partial \epsilon_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y}; \\ \dot{\epsilon}_z &= \frac{\partial \epsilon_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Скорость относительных сдвигов соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x}; \\ \dot{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y}; \\ \dot{\gamma}_{zx} &= \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Ввиду указанной аналогии не представляет затруднений доказать и ряд других зависимостей, аналогичных статической задаче теории упругости и пластичности, но содержащих компоненты скоростей деформаций. Приводим их без вывода. Средняя скорость пластической деформации:

$$\dot{\epsilon}_{cp} = \frac{1}{3} (\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z) = \frac{1}{3} (\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3),$$

где $\dot{\epsilon}_1$, $\dot{\epsilon}_2$, $\dot{\epsilon}_3$ — главные скорости пластической деформации. Главные скорости деформации сдвигов:

$$\dot{\gamma}_{12} = \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2; \quad \dot{\gamma}_{23} = \dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3; \quad \dot{\gamma}_{31} = \dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1.$$

Обобщенная скорость деформации (интенсивность скорости деформации):

$$\dot{\epsilon}_t = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2 + \frac{3}{2} (\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)}. \quad (17.09)$$

Зависимость компонентов напряжений от компонентов скоростей деформации аналогично (4.08):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_{cp} &= M (\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_{cp}); \\ \sigma_y - \sigma_{cp} &= M (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_{cp}); \\ \sigma_z - \sigma_{cp} &= M (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_{cp}); \\ \tau_{xy} &= M \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy}; \\ \tau_{yz} &= M \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yz}; \\ \tau_{zx} &= M \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (17.10)$$

где M — модуль — величина переменная, подлежащая определению. Этот модуль аналогично (4.04а 5.05) связывает обобщенное напряжение с обобщенной скоростью деформации:

$$\sigma_i = M \dot{\epsilon}_i. \quad (17.11)$$

Предполагается далее, что из опыта известна зависимость:

$$M = f(\dot{\epsilon}_i). \quad (17.11a)$$

Приведенные уравнения вместе с уравнениями динамического равновесия (3.04) при соблюдении граничных и начальных условий (по силам, смещениям и скоростям) позволяют решать задачи динамики в области пластических деформаций в случае отсутствия сил вязкого сопротивления (см. § 6.02); в задачах статики эти уравнения тождественны уравнениям теории малых упруго-пластических деформаций.

Приведем в заключение параллельное сопоставление (сводку) основных законов теории упругих деформаций, теории упруго-пластических деформаций и теории пластического течения (в редакции В. В. Соколовского).

п. п.	В теории упругости	В теории пластических деформаций	В теории пластического течения
1	Направления главных нормальных напряжений и направления главных удлинений совпадают.	То же (как и в теории упругости).	Направления главных нормальных напряжений и направления главных скоростей удлинений совпадают.
2	Объемная деформация пропорциональна среднему нормальному напряжению.	То же (как и в теории упругости).	Материал в пластическом состоянии не сжимаем.
3	Главные касательные напряжения пропорциональны главным сдвигам.	То же (как и в теории упругости).	Главные касательные напряжения пропорциональны главным скоростям сдвигов.

№ п/п	В теории упругости	В теории пластических деформаций	В теории пластического течения
4	Интенсивность касательных напряжений пропорциональна интенсивности сдвига.	Интенсивность касательных напряжений постоянна (идеально пластическое тело) или есть вполне определенная для каждого материала функция интенсивности деформации сдвига.	Интенсивность касательных напряжений постоянна (идеально пластическое тело) или есть вполне определенная для каждого материала функция интенсивности скоростей деформации сдвига.

При пластическом деформировании, происходящем с большими скоростями, способность материала сопротивляться внешним воздействиям, как показывает опыт, возрастает. На основании результатов исследований предлагались различные эмпирические формулы (логарифмические линейные зависимости и т. д.) для повышенных пределов текучести, прочности и т. д.

Законченное построение системы уравнений, описывающих вязко-пластическую деформацию для плоской задачи, было выполнено А. А. Ильюшиным. К двум обычным гипотезам теории пластического течения о том, что:

а) *направление максимальной скорости скольжения совпадает в каждой точке с направлением максимального касательного напряжения и*

б) *материал в пластической деформации несжимаем*, А. А. Ильюшин в отличие от предположения постоянства наибольшего касательного напряжения (идеально пластическое тело по Сен-Венану) принимает гипотезу:

$$\tau_{\max} = k + \beta \dot{\gamma}_{\max}. \quad (17.12)$$

т. е.

в) *максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}$ при течении тела всегда больше некоторой постоянной k и является линейной функцией максимальной скорости скольжения $\dot{\gamma}_{\max}$.*

В компонентах напряжений и скоростей деформации третья гипотеза для случая плоской деформации аналитически записывается так:

$$\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = k + \beta \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + \dot{\gamma}_{xy}^2}. \quad (17.13)$$

Из приближенных методов решения задач теории пластического течения отметим разработанный в последнее время А. А. Ильюшиным и П. М. Огибаловым «Метод вязких решений», в котором в первом приближении принимается решение гидродинамической задачи со сходственными граничными условиями.

§ 17.07. Решение задач теории пластичности в перемещениях. Метод «упругих» решений

В главе 7, (в § 7.03), показана возможность все основные уравнения теории упругости свести к трем синтезирующим уравнениям (7.02), куда входят функции перемещений, т. е. u , v , w (уравнения Ляме). Формально, почти такие же ком-

пактные уравнения можно получать и в теории пластичности. Проследим возможные преобразования.

Выражения для напряжений при пластической деформации через компоненты последней, как известно, могут быть записаны по форме (5.07), аналогичной записи в теории упругости (4.08) с заменой в последних постоянного модуля сдвига G на переменный G' , определяемый (стр. 144) так:

$$G' = G(1 - \omega). \quad (a)$$

В свою очередь можем записать, учитывая (5.04) и (5.05):

$$\omega = 1 - \frac{\sigma_i}{3G\epsilon_i}. \quad (17.14)$$

Подставляя (a) в одно из уравнений (B), (см. стр. 417) а именно, для касательного напряжения τ_{xy} , получаем:

$$\tau_{xy} = G(1 - \omega)\gamma_{xy} = G\gamma_{xy} - G\omega\gamma_{xy}.$$

Замечая, что слагаемое $G\gamma_{xy}$ представляет согласно (4.08) величину касательного напряжения при той же деформации сдвига (γ_{xy}), но в случае идеально упругого процесса, и обозначая такое фиктивное напряжение

$$G\gamma_{xy} = \bar{\tau}_{xy},$$

имеем:

$$\tau_{xy} = \bar{\tau}_{xy} - G\omega\gamma_{xy}.$$

Аналогичное выражение можно записать и для остальных компонентов. Таким образом, имеем возможность закон деформации записать в форме

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \bar{\sigma}_x - 2G\omega(\epsilon_x - \epsilon_{cp}), \\ &\dots \dots \dots \\ \tau_{zx} &= \bar{\tau}_{zx} - G\omega\gamma_{zx}, \end{aligned} \quad (17.15)$$

$$\dots \dots \dots \bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{yz}, \bar{\tau}_{zx}$$

где

— *фиктивные упругие напряжения*, которые могли бы быть в действительности, если бы тело было идеально упругим, т. е. при $\omega = 0$.

Подставляя (17.15) в дифференциальные уравнения равновесия (3.04), используя (3.09) и выполняя преобразования, аналогичные приведенным в § 7.03, получим решение задачи теории пластичности в перемещениях. Прделаем указанное с первым уравнением группы (3.04).

Рассмотрим случай равновесия, т. е. положим равным нулю инерционный член в правой части (3.04). Итак, имеем:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial z} + \rho X - G \left\{ 2 \frac{\partial \omega}{\partial x} (\epsilon_x - \epsilon_{cp}) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \omega}{\partial y} \gamma_{xy} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \gamma_{xz} + \omega \left(2 \frac{\partial (\epsilon_x - \epsilon_{cp})}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} \right) \right\} = 0. \quad (17.16)$$

Как известно из § 7.03, уравнения (7.02):

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial z} + \rho X = (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u + \rho X,$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Обозначим в (17.16) через R_x сумму всех членов, которые обращаются в нуль вместе с ω , т. е.

$$R_x = 2 \frac{\partial \omega}{\partial x} (\epsilon_x - \epsilon_{cp}) + \frac{\partial \omega}{\partial y} \gamma_{xy} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \gamma_{xz} + \\ + \omega \left(2 \frac{\partial (\epsilon_x - \epsilon_{cp})}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} \right). \quad (17.17)$$

На основании (3.09) последнее выражение можно записать в виде:

$$R_x = \omega \left(\nabla^2 u + \frac{1}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial \omega}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3} \theta \right) + \\ + \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (17.18)$$

Итак, уравнение (17.16) и аналогичные два следующие могут быть представлены в виде:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u + \rho X &= R_x G, \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \nabla^2 v + \rho Y &= R_y G, \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \nabla^2 w + \rho Z &= R_z G. \end{aligned} \right\} \quad (17.19)$$

Уравнения (17.19) аналогичны уравнениям (7.02) теории упругости. В (17.19) выражения для R_y и R_z составляются на основании (17.18) по правилу круговой подстановки.

Аналогично на основании (7.03) можно записать поверхностные условия, выраженные через перемещения. Так, первое уравнение из группы (7.03) записывается так:

$$p_{xy} = \lambda \theta l + G(1 - \omega) \left[\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n + \frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right]$$

$$p_{xy} = \bar{p}_{xy} + GR_{xy},$$

где $\bar{p}_{xy}$ соответствует в точности (7.03), а

$$R_{xy} = -\omega \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot n \right); \quad (17.20)$$

последнее обращается в нуль вместе с ω .

Итак, поверхностные условия запишутся в виде:

$$p_{xy} = \bar{p}_{xy} + GR_{xy}; \quad p_{yy} = \bar{p}_{yy} + GR_{yy}; \quad p_{zy} = \bar{p}_{zy} + GR_{zy}, \quad (17.21)$$

где $\bar{p}_{xy}$, $\bar{p}_{yy}$, $\bar{p}_{zy}$ — поверхностные нагрузки, отвечающие действительным смещениям на границе тела, если бы последнее находилось в идеально упругом состоянии. Выражения для R_{yy} и R_{zy} записываются по аналогии с (17.20) по правилу круговой подстановки.

Для решения задач пластичности А. А. Ильюшин применяет следующий общий метод, названный им *методом упругих решений*. В первом приближении полагает $\omega = 0$ и, следовательно,

$$R_x = R_y = R_z = R_{xy} = R_{yy} = R_{zy} = 0.$$

Тогда из (17.19) имеем уравнения теории упругости в форме Ляме и граничные условия в напряжениях, т. е. в первом приближении имеем обычную задачу теории упругости; предположим, что для данных массовых (X , Y , Z) и поверхностных сил (p_{xy} , p_{yy} , p_{zy}) она решена и найдены компоненты перемещения u , v , w .

Далее, по формулам (3.09) и (4.06) находим деформации и по формулам (17.15) — напряжения в первом приближении: $\theta^{(1)}$, $\epsilon_x^{(1)}$, $\gamma_{xy}^{(1)}$, $\epsilon_l^{(1)}$, $\sigma_x^{(1)}$..., $\tau_{xy}^{(1)}$, а по значению $\epsilon_l^{(1)}$ из (17.14) находим $\omega^{(0)}$.

Формулы (17.18) и (17.20) позволяют теперь найти второе приближение для R_x , R_y , R_z и для R_{xy} , R_{yy} , R_{zy} ; они являются известными функциями координат и потому в (17.19) величину $\rho X - R_x G$ и т. п. можно рассматривать как массовую силу, а в (17.21) $\bar{p}_{xy} + GR_{xy}$ и т. п. как поверхностную силу, т. е. можно принять:

$$\rho X^{(1)} = \rho X - R_x G,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$p_{xy}^{(1)} = \bar{p}_{xy} + GR_{xy}.$$

Решая задачу теории упругости для этих сил, мы найдем новые значения компонентов смещений $u^{(2)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$ во вто-

ром приближении, после чего, повторяя все вычисления по формулам (17.18) и (17.20), найдем третье приближение величин $\omega^{(1)}$, $R_{xy}^{(2)}$, $R_{xy}^{(2)}$... и, следовательно, новые значения $p_X^{(2)}$..., $p_Y^{(2)}$... Таким образом, из (17.19) и (17.21) получаем задачу теории упругости для новых внешних сил и т. д. Процесс такого решения задач теории упругости может быть закончен, как только разница между последовательными приближениями окажется в пределах допустимой точности вычислений. Вычисления по указанному способу показывают очень быструю сходимость приближений. В ряде выполненных решений сложных задач пластичности оказалось вполне достаточным третье, а иногда и второе приближение.

Читатель, хорошо знакомый со строительной механикой, может провести аналогию между указанным выше методом упругих решений и способом последовательных приближений, применяемым при расчете сложных каркасных пространственных рамных конструкций. В последнем способе в качестве первого приближения принимают, например, плоское решение, т. е. из пространственного каркаса выделяют для рассмотрения стержневую систему из элементов, расположенных в одной (обычно в вертикальной) плоскости, полагая отсутствующими все элементы, примыкающие к выделенному отсеку и имеющие направления, перпендикулярные к нему («аксиальные» элементы). Определив девиации и смещения сечений, где примыкают аксиальные элементы, вычисляют силы сопротивления этих элементов указанным смещениям.

Найденные силы вводят далее в состав внешних сил плоской системы, вновь выполняют расчет и вычисляют девиации и смещения узлов, а по ним силы сопротивления аксиальных элементов и т. д. до тех пор, пока новое приближение будет давать результаты, мало отличные от предыдущих.

Отметим также исследования последнего времени Я. Л. Нудельмана и И. Н. Слезингера, в которых задачи нелинейной теории упругости трактуются как задачи классической теории упругости, но с некоторыми дополнительными объемными и поверхностными силами. Для получения приближенных решений задач нелинейной теории упругости предлагается метод последовательных приближений.

По существу идея такого решения восходит к предложенному в 1942 году А. А. Ильюшиным в теории пластичности методу упругих решений.

§ 17.08. Краткие выводы

1. Если материал обследуемой конструкции на данной стадии ее нагружения не подчиняется обобщенному закону Гука, но деформации его все же ожидаются малыми, то напряжения и деформации в таком нелинейно-упругом или упруго-пластическом теле должны определяться с помощью уравнений нелинейной теории упругости или уравнений теории пластичности.

2. В случае так называемой «активной деформации» математический аппарат нелинейной теории упругости и современной теории пластичности полностью совпадают, если соблюдаются следующие два условия: 1) диаграммы растяжения — сжатия при активной деформации (индикаторные диаграммы связи $\sigma_i - \epsilon_i$) для обоих материалов (нелинейно-упругого и упруго-пластического) идентичны; 2) процесс нагружения был «простым», т. е. на любой стадии нагружения сохранялось постоянное отношение между различными (если их несколько) составляющими внешних нагрузок.

3. При «пассивной деформации» (случай полной или частичной разгрузки) между поведением нелинейно-упругого тела и поведением упругопластического тела с идентичными (для случая нагружения) диаграммами растяжения — сжатия будет существенная разница.

В первом случае материал повторяет в обратном порядке ранее пройденные деформации и соответствующие им напряженные состояния; т. е. материал подчиняется тем же законам нелинейной теории упругости, которым он следовал при активной деформации.

Во втором случае (упругопластическое тело) в материале даже при полной его разгрузке исчезает лишь часть ранее приобретенных деформаций и напряжений и в итоге в материале оказываются остаточные деформации, а в общем случае и остаточные напряжения.

Для определения исчезающей части напряжений и деформаций следует воспользоваться аппаратом линейной теории упругости, приняв за исходное (начальное) то напряженно-деформированное состояние, с которого началась разгрузка тела.

4. Для решения практических задач современная теория пластичности, точнее — теория малых упругопластических деформаций, располагает известными из теории упругости тремя дифференциальными уравнениями равновесия (А), (3.04) и шестью геометрическими уравнениями (3.08), шестью особыми физическими уравнениями (В), (5.07), которые по форме хотя и сходны с одноименными уравнениями в теории упругости, но отличаются тем, что коэффициенты, входящие в эти уравнения и связывающие компоненты напряжений с компонентами деформаций, являются переменными и изменяющимися от точки к точке пластически деформируемого тела. Входящие в эти коэффициенты так называемые интенсивность напряжения и интенсивность деформации принимаются зависящими друг от друга так же, как для того же материала в случае его простого растяжения зависело бы нормальное напряжение от относительного удлинения.

5. В случае, когда диаграмма растяжения — сжатия материала имеет весьма малое «упрочнение», то в целях упрощения решения задачи в основу расчетов принимается предположение об идеальной пластичности материала («пластичность без упрочнения»). В таком случае взамен шести физических уравнений (В) принимается одно уравнение — *условие пластичности* в форме $\sigma_i = \sigma_T$, если придерживаться энергетических представлений о причинах наступления пластических деформаций в данной точке, или в форме $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$, если ту же причину приписывать роли наибольшего касательного напряжения для той же точки тела.

Наиболее простое в математическом отношении решение задач оказывается в случае второй формы условия пластичности, однако первая форма ($\sigma_i = \sigma_T$) экспериментально подтверждается чаще чем вторая форма.

Литература к главе 17

1. Ильюшин А. А. Пластичность. ОГИЗ, 1948.
Первое капитальное сочинение по теории пластичности, удостоено Государственной премии СССР.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. ГТТИ, 1950.
Подробно разобраны предлагаемые автором теория пластического кручения стержней (конические стержни, степенное условие пластичности с упрочнением), равновесие пластического клина и полуплоскости, давление штампа на пластическое тело, упруго-пластический изгиб пластинок.
3. Качанов Л. Б. Основы теории пластичности. ГТТИ, 1956.
4. Смирнов-Аляев Г. А. Сопротивление материалов пластическим деформациям. Машгиз, 1949.
5. Огибалов П. М. Теория пластических деформаций при высоких температурах тела. Журнал «Вестник Московского университета», № 12, 1950.
6. Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Изд-во АН СССР, М., 1960 (см. аннотации докладов А. М. Жукова по сложному нагружению, Л. М. Качанова по вариационным принципам и методам в теории пластичности, В. С. Ленского по исследованию пластичности металлов при сложном нагружении, А. К. Малмейстера, А. И. Стрельбицкой, Е. П. Ункова и др.).
7. Информационный бюллетень № 1 Научного Совета по проблеме «Научные основы прочности и пластичности». Изд-во АН СССР, 1960 (см. аннотации законченных работ А. А. Ильюшина и В. С. Ленского по теории сложного нагружения, А. М. Жукова по изменению упругих свойств при пластической деформации).
8. В. Ольшак. Об основах теории неоднородных упругопластических тел. ч. I и ч. II. Опубликовано в трудах Академии наук Польской Народной республики, т. 4, т. 5, № 2, 1955; т. 4, т. 3, № 3, 1955 (одна из первых работ по теории пластичности анизотропных сред).

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

§ 18.01. Чистый изгиб

К числу простейших нелинейных задач в теории пластичности, для решения которых нет необходимости иметь дело со всей совокупностью основных уравнений теории пластичности (так как многие из них удовлетворяются тождественно, а к оставшимся уравнениям оказывается достаточным приложение элементарного математического анализа), принадлежат задачи о чистом кручении, о чистом изгибе прямого бруса и о пластическом равновесии толстостенного кольца и сферического сосуда.

Задачи о пластических деформациях в стержне и в системе стержней, работающих на растяжение-сжатие, читателю известны, конечно, из курса сопротивления материалов.

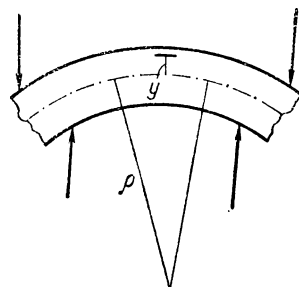
Переходим к рассмотрению плоского чистого изгиба (фиг. 18.01). В этом случае оправдывается «гипотеза плоских сечений» как в области упругих деформаций, так и за пределом упругости. Таким образом, известное положение, что при изгибе удлинения продольных волокон прямо пропорциональны расстояниям их от нейтрального слоя, в достаточной степени справедливо по самый момент разрушения сечения. Как известно, этот результат записывался так:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{\rho} y, \quad (18.01)$$

где y — расстояние изучаемой точки поперечного сечения от нейтрального слоя; $\frac{1}{\rho}$ — коэффициент пропорциональности,

являющийся одновременно кривизной при изгибе (фиг. 18.01).

Так как при чистом изгибе в любом поперечном сечении стержня отсутствуют касательные напряжения, а при малых деформациях изгиба практически равно нулю и давление продольных волокон друг на друга ($\sigma_y = 0$), то надо считать, что каждое продольное волокно находится в условиях одноосного напряженного состояния и одинакового по всей длине этого волокна (интенсивность напряжения $\sigma_1 = \sigma_z$, интенсивность деформации $\epsilon_1 = \epsilon_z$). В этом случае все дифференциальные уравнения равновесия удовлетворяются тождественно и единственный компонент напряжения должен быть увязан только с законом деформации для данного материала и с граничными условиями по торцам стержня (или соблюдены законы равновесия в интегральной форме, т. е. по сечению в целом).

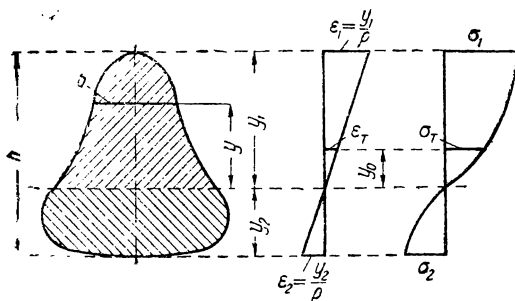


Фиг. 18.01. Чистый изгиб (в средней части бруса)

Закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении бруса для верхней и нижней его половин будет сходен с обычной диаграммой растяжения при чистом растяжении-сжатии. Если для последнего случая известна диаграмма $\sigma_z = \Phi(\epsilon_z)$, то можно найти положение нейтрального слоя и радиус кривизны оси бруса по известному моменту.

Для уравнения равновесия между внешними и внутренними силами данного сечения ($\Sigma X = 0$; $\Sigma M = 0$) запишутся так:

$$\int_F \sigma_z dF = 0; \quad \int_F \sigma_z \cdot y \cdot dF = M_x. \quad (18.02)$$



Фиг. 18.02. Распределение по высоте сечения относительных удлинений и нормальных напряжений при упругопластическом изгибе

Элемент площади $dF = bdy$ (фиг. 18.02); в общем случае $b = f(y)$. Заменяя согласно формуле (18.01) $y = \epsilon\rho$ и обозначая далее $b = f(\epsilon\rho)$, имеем * $dF = f(\epsilon\rho) \cdot \rho d\epsilon$. Тогда выражения (18.02) перепишутся:

$$\left. \begin{aligned} \rho \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \Phi(\epsilon) \cdot f(\epsilon\rho) d\epsilon &= 0, \\ \rho^2 \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \Phi(\epsilon) \epsilon f(\epsilon\rho) d\epsilon &= M, \end{aligned} \right\} \quad (18.03)$$

где ϵ_1 и ϵ_2 — отрицательное и положительное удлинения в крайних волокнах.

При постоянной ширине сечения b выражения (18.03) упрощаются

$$\left. \begin{aligned} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \Phi(\epsilon) d\epsilon &= 0 \\ b\rho^2 \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \Phi(\epsilon) \epsilon d\epsilon &= M \end{aligned} \right\}; \quad (18.04)$$

$\int \Phi(\epsilon) d\epsilon$ — представляет собой площадь диаграммы напряжений, и так как в пределах от ϵ_1 до ϵ_2 согласно первому уравнению (18.04) она должна быть равна нулю, то это означает, что площадь диаграммы, соответствующая растянутой зоне, равна площади диаграммы, соответствующей сжатой зоне. Если диаграммы растяжения и сжатия данного материала при одноосном напряженном состоянии одинаковы и отличаются лишь знаками удлинения и напряжения, то указанная выше необходимость равенства площадей диаграмм влечет за собой и равенство соответствующих частей площади поперечного сечения, т. е. $F_1 = F_2$;

$\int \Phi(\epsilon) \epsilon d\epsilon$ представляет собой с коэффициентом $\frac{1}{\rho}$ статический момент площади диаграммы относительно нейтральной оси и как для верхней, так и для нижней половины сечения берется со знаком плюс.

* В дальнейшем индекс у ϵ_2 и M_x опустим и последнее для простоты записи будем обозначать ϵ и M .

Если аппроксимировать диаграмму растяжения при помощи степенной функции вида:

$$\sigma = \sigma_T \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_T} \right)^m, \quad (18.05)$$

где $0 < m < 1$, а сечение бруса полагать прямоугольным (с двумя осями симметрии) и материал с одинаковыми свойствами на растяжение и сжатие, то второе уравнение равновесия в раскрытом виде запишется так:

$$M = b\rho^2 2 \int_0^{\epsilon_T} \sigma_T \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_T} \right)^m \epsilon d\epsilon = b\rho^2 \sigma_T \frac{2\epsilon_T^{m+2}}{\epsilon_T^m (m+2)},$$

заменяя

$$\epsilon_T = \frac{y_0}{\rho} \text{ и } \epsilon_1 = \frac{h}{2\rho},$$

имеем

$$M = \frac{\sigma_T b h^{m+2}}{y_0^m 2^{m+1} (m+2)}, \quad (18.06)$$

откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_T}{y_0} = \frac{M^{\frac{1}{m}} 2^{\frac{m+1}{m}} (m+2)^{\frac{1}{m}} \epsilon_T}{\sigma_T^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{m}} h^{\frac{(m+2)}{m}} \frac{1}{m}}, \quad (18.07)$$

переписываемое

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\epsilon_T}{h} \sqrt[m]{\frac{M}{M^*}},$$

где

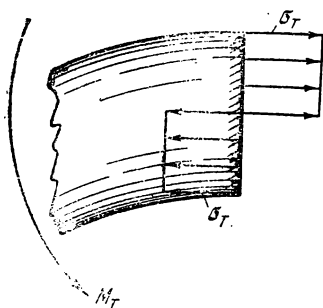
$$M^* = \sigma_T \frac{b h^2}{2(m+2)}.$$

На основании выражений (18.05) имеем

$$\sigma = \frac{M 2^{(m+1)} (m+2) y_0^m}{b h^{(m+2)}}. \quad (18.08)$$

Если $m = 1$ (упругий процесс) и положить $y_0 = \frac{h}{2}$; $\sigma_{\max} = \sigma_T$ (случай предельного упругого состояния), то на основании формулы (18.06) получим выражение для так называемого *предела упругого сопротивления* при изгибе бруса прямоугольного сечения:

$$M_{\text{упр}} = \sigma_T \frac{b h^2}{6}, \quad (18.09)$$



Фиг. 18.03. Полное пластическое состояние сечения при изгибе (исчерпание несущей способности сечения)

или $M_{\text{упр}} = \sigma_T W_{\text{упр}}$, где $W_{\text{упр}}$ — обычный (упругий) момент сопротивления сечения.

Если $m = 0$, т. е. предполагая идеально пластическое состояние, показанное на фиг. 18.03, то получим так называемый *предел пластического сопротивления* при изгибе бруса прямоугольного сечения

$$M_T = \sigma_T \frac{bh^2}{4}, \quad (18.10)$$

или

$$M_T = \sigma_T W_T,$$

где

$$W_T = \frac{bh^2}{4}$$

— так называемый *пластический момент сопротивления сечения*.

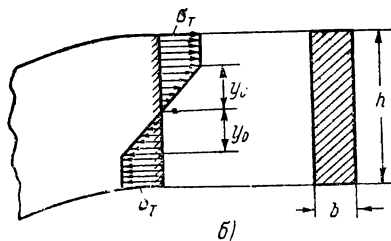
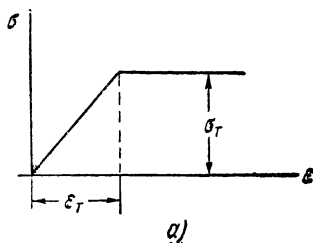
Из второго выражения (18.04) при заданном изгибающем моменте M , значение которого лежит в промежутке $M_{\text{упр}} < M < M_T$, можно получить формулу для y_0 , т. е. для расстояния от нейтрального слоя до того волокна в сечении, относительное удлинение и величина напряжения в котором имеют характерные значения ϵ_T и σ_T .

Для частного случая, когда диаграмма растяжения аппроксимируется степенной функцией, выражение для y_0 непосредственно следует из формулы (18.06).

В случае, когда диаграмма растяжения имеет вид, показанный на фиг. 18.04, т. е.

$$\Phi(\epsilon) = \frac{\sigma_T}{\epsilon_T} \epsilon \quad \text{при } \epsilon \leq \epsilon_T;$$

$$\Phi(\epsilon) = \sigma_T \quad \text{при } \epsilon \geq \epsilon_T,$$



Фиг. 18.04. Состояние, промежуточное между пределом упругого и пределом пластического сопротивлений

использование формул (18.04) приводит к выражению:

$$y_0 = \frac{1}{2} \sqrt{3h^2 - \frac{12M}{b\tau_T}}. \quad (18.11)$$

Высота упругого слоя сечения в этом случае равна $2y_0$. Если по длине бруса изгибающий момент изменяется (поперечный изгиб), то согласно выражению (18.11) меняется и высота упругого слоя балки.

Если изгибающий момент при чистом изгибе сечения (материал бруса — идеально пластический) достигает значения M_T , то принято считать, что *несущая способность* такого сечения фактически будет исчерпана. В самом деле, если представить, что моменты внешних пар, производящие чистый изгиб бруса, будут хотя бы незначительно превышать значение M_T , то равновесие между моментами внешних пар и моментом внутренних сил в сечении (достигшего ранее предельного значения M_T) *невозможно*. Теоретически в таком случае брус будет беспредельно изгибаться, а в действительности ввиду наличия всегда, хотя бы и незначительного, упрочнения материала претерпевает большие (но не бесконечно большие), обычно недопустимые деформации.

§ 18.02. Замечания, касающиеся распространения на случай поперечного изгиба предпосылок и формул, установленных для чистого изгиба

При поперечном изгибе, т. е. при наличии для каждого поперечного сечения стержня не только изгибающего момента M , но и поперечной силы Q , в поперечных сечениях, как известно, наряду с нормальными напряжениями возникают также и касательные напряжения. Вследствие этого наступлению упругого состояния или началу пластического состояния будут соответствовать нормальные напряжения, несколько меньшие тех значений, которые они имели бы для чистого изгиба, т. е. при отсутствии поперечной силы для сечения. Эпюра распределения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня при поперечном изгибе не должна быть сходной с обычной диаграммой растяжения—сжатия для материала рассматриваемого стержня.

В самом деле, если, к примеру, предполагать материал стержня идеально пластическим и исходить из гипотезы наибольших касательных напряжений, то из известного условия пластичности при поперечном изгибе [формула (17.03)]

$$\sigma^2 + 4\tau^2 = \sigma_T^2$$

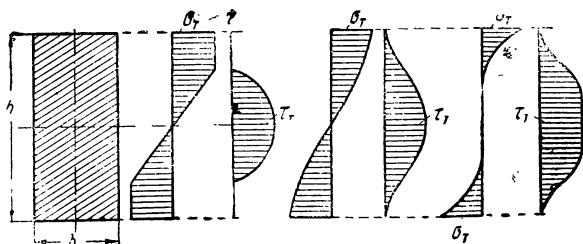
следует, что к моменту начала пластических деформаций в каждой точке поперечного сечения стержня должно быть выполнено условие

$$\sigma^2 = \sigma_T^2 - 4\tau^2,$$

т. е. нормальное напряжение в сечении меньше предела текучести для данного материала. Следовательно, и момент внутренних сил, подсчитанный для предельного состояния каждого поперечного сечения (предельный изгибающий момент для сечения), должен быть меньше того значения, которое в предыдущем параграфе получило название предела пластического сопротивления сечения при изгибе.

Точное решение задачи о предельном состоянии поперечного сечения, подверженного действию изгибающего момента и поперечной силы, представляет собой сложную задачу, которой в свою очередь должно предшествовать выяснение закона распределения в поперечном сечении касательных напряжений с переходом материала за предел упругости.

Обычно допускают, что распределение нормальных напряжений в поперечном сечении за пределом упругости как в случае поперечного изгиба, так и в случае чистого изгиба при одинаковых значениях изгибающих моментов совпадают*. Таким образом, принимают, что формулы для нормальных напряжений, для кривизны и т. д., указанные в предыдущем параграфе, сохраняются и в случае поперечного изгиба. В таком случае задачу о касательных напряжениях в поперечном сечении можно решить способом, аналогичным известному решению Д. И. Журавского в упругой постановке (выделение из балки элемента длиной dz , отсечение от него верхней части и т. п.). В случае степенного закона распределения нормальных напряжений по сечению [формулы (18.05) и (18.08)] метод Д. И. Журавского должен привести к следующей формуле



Фиг. 18.05. Различные сочетания эпюр распределения нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении балки, приводящих к полному исчерпанию его несущей способности

* Строго говоря, точного совпадения быть не должно, но для обычных балок (невысоких) такое допущение практически приемлемо.

для касательных напряжений в поперечном прямоугольном сечении:

$$\tau = \frac{Q S_{\text{отс}}^{(m)}}{J^{(m)} b}, \quad (18.12)$$

где

$$S_{\text{отс}}^{(m)} = \int_{F_{\text{отс}}} y^m dF;$$

$$J^{(m)} = \frac{b h^{m+2}}{(m+2) 2^{m+1}};$$

$F_{\text{отс}}$ —, как и прежде, часть площади поперечного сечения, расположенная выше того горизонта, на уровне которого вычисляется касательное напряжение;

m — показатель степени в законе деформации материала.

Формулой (18.12) нельзя пользоваться в случае $m=0$ (нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения равны пределу текучести материала), так как этому случаю должно соответствовать $\tau=0$.

При других законах деформации, отличных от степенного, формулы для касательных напряжений будут отличными от формулы (18.12). На фиг. 18.05 в качестве иллюстрации показаны эскизы распределения касательных напряжений в поперечном сечении в зависимости от того или иного распределения нормальных напряжений в том же сечении.

В случае идеально пластического материала несущая способность сечения при поперечном изгибе может быть приближенно подсчитана по эллиптической формуле*:

$$\left(\frac{M}{M_T}\right)^2 + \left(\frac{Q}{Q_T}\right)^2 = 1, \quad (18.13)$$

где $M_T = \sigma_T W_T$ — предельный изгибающий момент, если бы в сечении отсутствовала поперечная сила (случай чистого изгиба) и $Q_T = \tau_T F$ — предельная поперечная сила, если бы для сечения отсутствовал изгибающий момент (случай чистого среза).

* * *

Может представить интерес изучение прогиба оси балки при упругопластическом поперечном изгибе. Эта задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения изог-

* Обоснование формулы имеется в статье автора «Влияние очередности действия внешних нагрузок на несущую способность упругопластической конструкции». Известия, ВИАИ, т. 81. 1954.

** В последнее время в строгой постановке эта задача поставлена и дано решение Цунезо Сато (Япония).

нутой оси балки, которое для участков балки, где изгибающий момент меньше предельного упругого, т. е.

$$M < M_{\text{упр}},$$

имеет обычный вид (ось z направлена по оси балки)

$$EJ \frac{d^2v}{dz^2} = M,$$

а для упругопластических участков, используя выражение (18.11) и переписывая $\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_T}{\nu_0}$, получаем:

$$EJ \frac{d^2v}{dz^2} = EJ \frac{\epsilon_T}{\nu_0} = \frac{2M_T}{3 \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{M}{M_T}}}. \quad (18.14)$$

Уравнению (18.14) можно придать внешний вид обычного уравнения «упругой оси», если в употребление ввести понятие о приведенном моменте инерции:

$$J_{\text{пр}} = J \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{M}{M_T}}, \quad (18.15)$$

причем $J_{\text{пр}} < J$. Эта приведенная характеристика не является чисто геометрической, а зависит также от внешних сил (входят в M) и от пластических свойств материала (входят в M_T).

Иначе говоря, задачу определения прогибов балки постоянного сечения, находящейся в упругопластическом состоянии, можно заменить* задачей определения прогибов балки *некоторого переменного сечения, находящейся якобы в упругом состоянии*. В последнем случае можно использовать известные читателю эффективные приемы, описанные в курсе сопротивления материалов.

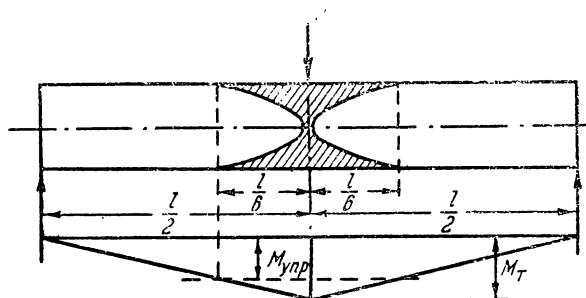
Заметим, что при $M = M_T$ из выражения (18.14) следует $\frac{1}{\rho} = \infty$ и из формулы (18.15) вытекает $J_{\text{пр}} = 0$, т. е. в этом случае теоретически прогибы стремятся к бесконечности.

§ 18.03. О несущей способности статически неопределимых балок

При простейшей деформации бруса постоянного сечения, как-то: при чистом изгибе, чистом кручении и т. п., исчерпание несущей способности одного сечения означает одновре-

* Н. И. Безухов. Эффективные методы определения деформаций стержней при упругопластическом изгибе. Известия ВАИА, т. 96. 1956.

менно такое же исчерпание и всех остальных, т. е. исчерпание несущей способности всего бруса (так как изгибающий, или крутящий момент, во всех сечениях одинаков). При поперечном изгибе (фиг. 18.06) статически определимого бруса, когда изгибающие моменты в сечениях не одинаковы, исчерпание несущей способности одним лишь сечением (фиг. 18.06) уже означает потерю несущей способности балки в целом (это будет сечение под грузом).



Фиг. 18.06. Распределение пластических и упругих зон в двухопорной балке в момент исчерпания ее несущей способности

В самом деле, наличие в двухопорной балке одного сечения в пролете, способного к неограниченному росту деформаций, означает превращение балки в геометрически изменяемую систему. Среднее сечение балки, показанной на фиг. 18.06, как бы уподобляется некоторому шарниру, позволяющему сходящиеся в нем левую и правую части балки свободно взаимно поворачиваться относительно друг друга. Появление в балке такого «шарнира» равносильно приобретению балкой одной степени свободы (потере одной внутренней связи). Подобный кинематический образ оказывается удобным при расчетах сооружений по предельным нагрузкам. Такой воображаемый шарнир принято называть *шарниром текучести* или *пластическим шарниром*. Однако шарнир текучести имеет существенные отличия от обыкновенного шарнира. Во-первых, изгибающий момент в сечении, проходящем через шарнир текучести, не равен нулю, а равен пределу пластического сопротивления изгибу сечения. Во-вторых, шарнир текучести является односторонним шарниром, так как он исчезает при перемене направления действующих сил при разгрузке.

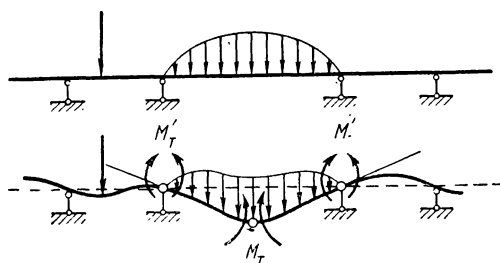
Для статически неопределимых балок и рам образование в одном сечении «шарнира» текучести не означает потери несущей способности системы в целом, так как потеря одной

связи не превращает обычно такую систему в геометрически изменяемую кинематическую цепь.

Так, система, n раз статически неопределимая, превращается при образовании шарнира в систему, $n - 1$ раз статически неопределимую. Поэтому в статически неопределимых системах следует отличать предел пластического сопротивления сечения от предела пластического сопротивления системы в целом.

Пределом пластического сопротивления статически неопределимой системы будем называть то значение напора нагрузки, при котором рассматриваемая система превращается в геометрически изменяемую систему с одной кинематической степенью свободы.

Превращение сооружения в механизм возможно и частичное, в какой-либо одной области или части, тогда как другие части могут продолжать оставаться в условиях геометрически неизменяемых систем.

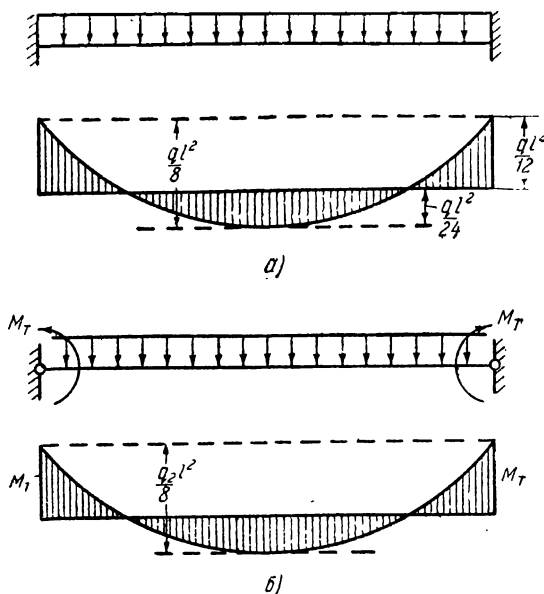


Фиг. 18.07. Случай исчерпания несущей способности многопролетной неразрезной балки вследствие образования лишь трех пластических шарниров в одном пролете; прочие пролеты при этом могут не быть в предельном равновесии

Примером может служить многопролетная неразрезная балка (фиг. 18.07), несущую способность которой следует, конечно, считать исчерпанной, если в каком-либо одном (обычно в самом большом или наиболее загруженном более других) пролете образуется три пластиче-

ских шарнира. Например: один шарнир — в средней части, в том сечении, где изгибающий момент оказывается наибольшим, т. е. предельным, и два других пластических шарнира — в опорных сечениях, где опорные моменты также достигли предельных значений для этих сечений. Образование трех пластических шарниров в одном пролете исключает эксплуатацию такого пролета, тогда как другие пролеты оказываются способными к дальнейшему нагружению.

Предел пластического сопротивления статически неопределимой системы может значительно превышать предел упругого сопротивления той же системы. Так, при упругом процессе балки с обоими заделанными концами, равномерно нагруженной по всему пролету, как известно, эпюра моментов имела вид, показанный на фиг. 18.08, где наибольший изги-



Фиг. 18.08 Эпюры моментов в балке с заделанными концами при нагрузке, меньшей предельной упругой (а); эпюра моментов при образовании двух пластических шарниров (б)

бающий момент оказывается в опорном сечении и равен $\frac{ql^2}{12}$.

Приравнявая этот момент предельному значению упругого момента, т. е. $M_{упр} = \sigma_T W_{упр}$, имеем уравнение предельного упругого состояния балки в виде:

$$\frac{ql^2}{12} = \sigma_T W_{упр}, \quad (18.16)$$

откуда интенсивность нагрузки, отвечающая такому предельному состоянию

$$q_1 = q_{упр} = \frac{12\sigma_T W_{упр}}{l^2}.$$

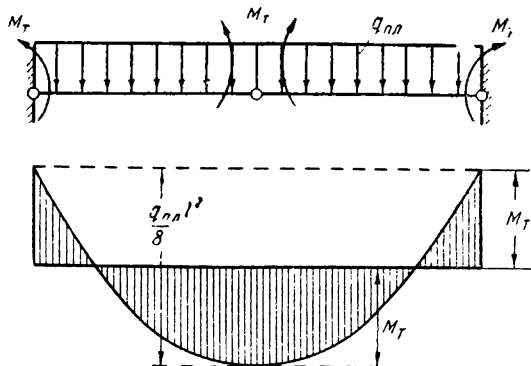
Образованию пластических шарниров (в опорных сечениях) будет отвечать большая нагрузка, значение которой получим из уравнения равновесия, аналогичного уравнению (18.16), но в форме

$$\frac{q_2 l^2}{12} = \sigma_T W_T,$$

откуда

$$q_2 = \frac{12\sigma_T W_T}{l^2}.$$

При дальнейшем возрастании нагрузки изгибающие моменты в опорных сечениях возрастать не смогут и для обеспечения равновесия балки будет интенсивно развиваться момент в среднем сечении и при некоторой нагрузке q_3 будет исчерпана несущая способность и этого сечения. Эпюра моментов в таком случае примет вид, показанный на фиг. 18.09. Если пренебречь влиянием поперечной силы на снижение несущей способности сечения при изгибе, то можем положить $M'_T = M_T$.



Фиг. 18.09 Исчерпание несущей способности балки с заделанными концами при равномерной нагрузке (образование трех пластических шарниров)

Уравнение предельного пластического состояния балки, отвечающее образованию в ней трех пластических шарниров и превращению ее в геометрически изменяемую систему, запишется так:

$$M_T + M'_T = \frac{q_3 l^2}{8},$$

откуда

$$q_3 = q_{нл} = \frac{16M_T}{l^2},$$

$$q_{нл} = \frac{16\sigma_T W_{нл}}{l^2}.$$

Если поперечное сечение балки представляет прямоугольник, то, как известно, $W_T = 1,5 W_{нл}$ и потому $q_2 = 1,5q_1$; $q_3 = 4/3 q_2 = 2q_1$, т. е. исчерпание несущей способности изги-

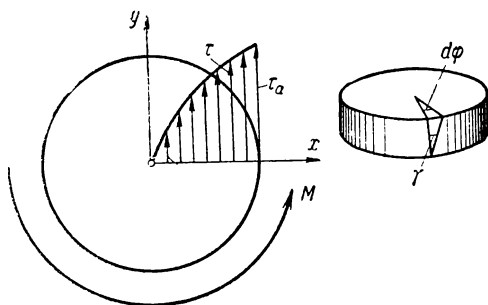
баемой балки с обоими заделанными концами наступает при нагрузке, вдвое больше той, при которой наступило предельное упругое состояние.

Если диаграмма растяжения—сжатия материала балки имеет существенную область упрочнения, то разрушение балки произойдет при нагрузке, превышающей предел пластического сопротивления балки. Решение задачи в таком случае значительно усложняется, и интересующихся отсылаем к работам (6*, 100*, 126*).

§ 18.04. Чистое кручение

При кручении бруса круглого поперечного сечения в последнем возбуждаются только касательные напряжения, направленные перпендикулярно к радиусу. Радиусы в поперечном сечении и за пределами упругости при кручении круглого бруса можно считать неискривляющимися (фиг. 18.10 справа). В таком случае, как и при рассмотрении подобной задачи в упругом состоянии, уравнения равновесия и уравнения неразрывности деформации удовлетворяются при значениях напряжений, которые должны быть увязаны только с законами деформации.

Читателю известна (глава XIII) геометрическая сторона деформации



Фиг. 18.10 Распределение касательных напряжений и схема сдвигов в поперечном сечении при чистом кручении

$$\gamma = \alpha \rho, \quad (18.17)$$

где α — угол, на который поворачиваются относительно друг друга два поперечных сечения, находящихся одно от другого на расстоянии, равном единице;

ρ — расстояние от оси бруса до рассматриваемой точки;

γ — угол сдвига для этой точки.

Касательное напряжение τ представляет функцию угла сдвига γ . Кривую, имеющую уравнение $\tau = f(\gamma)$, называют кривой деформации для чистого сдвига. Будем полагать, что такая кривая нам известна.

Уравнение равновесия между внешними силами (крутящий момент) и внутренними силами сечения запишется так*:

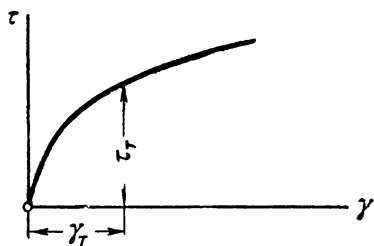
$$M = \int_F \tau r dF,$$

заменяя здесь по выражению (18.17)

$$\rho = \frac{r}{a}; \quad dF = 2\pi\rho \cdot d\rho = 2\pi \frac{r}{a^2} dr,$$

имеем:

$$M = \frac{2\pi}{a^2} \int_0^{\gamma_a} f(\gamma) r^2 d\gamma. \quad (18.18)$$



Фиг. 18.11 Диаграмма сдвигов, описываемая уравнением

$$\tau = \tau_T \left(\frac{\gamma}{\gamma_T} \right)^m$$

где

$$\tau = \tau_T \left(\frac{\gamma}{\gamma_T} \right)^m,$$

$$0 < m < 1,$$

то будем иметь

$$M = \frac{2\pi}{a^2} \int_0^{\gamma_a} \tau_T \left(\frac{\gamma}{\gamma_T} \right)^m r^2 d\gamma = \frac{2\pi\tau_T}{a^2\gamma_T^m} \cdot \frac{\gamma_a^{m+3}}{(m+3)}. \quad (18.19)$$

Имея возможность заменить $\gamma_a = a r$ и $\gamma_T = a r_0$, где r_0 — радиус «упругого» ядра, т. е. расстояние от оси бруса до точек сечения (они все лежат на окружности радиусом r_0), в которых касательное напряжение достигло характерного значения τ_T , выражение (18.19) переписывается так:

$$M = 2\pi\tau_T \frac{r^{m+3}}{r_0^m (m+3)}.$$

* Индекс у крутящего момента $M_{кр}$ для простоты записи опускается.

Далее, имеем:

$$\alpha = \frac{\gamma_T}{r_0} = \gamma_T \sqrt[m]{M \frac{m+3}{2\pi\tau_T r^{m+3}}}.$$

Полагая $m=1$ (упругое состояние) и $r_0=r$, получаем выражение для *предела упругого сопротивления при кручении* бруса круглого сечения:

$$M_{упр} = \frac{\pi\tau_T}{2} r^3. \quad (18.20)$$

Полагая $m=0$, получаем выражение для *предела пластического сопротивления при кручении* круглого бруса для случая идеальной диаграммы сдвига (идеально пластическое тело)

$$M_T = \frac{2}{3} \pi\tau_T r^3. \quad (18.21)$$

Когда внешний крутящий момент достигает M_T , то очевидно, *несущая способность* сечения *оказывается исчерпанной*.

Если имеем трубу малой толщины δ , находящуюся в состоянии пластического кручения, то соответствующий этому состоянию момент приближенно запишется через наружный радиус r :

$$M_T = (2\pi r\delta)\tau_T r = 2\pi r^2\delta\tau_T,$$

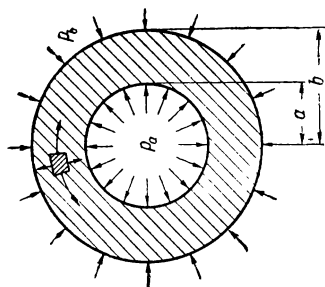
что соответствует в данном случае $M_{упр}$ для той же трубы.

Пластическое кручение стержней переменного диаметра, конического, кручение ступенчатого стержня, случай овального поперечного сечения и другие задачи решены В. В. Соколовским в его общеизвестной монографии (см. лит. к главе XVII).

§ 18.05. Осесимметричное упруго-пластическое состояние толстостенного кольца или цилиндра. Устойчивое и неустойчивое решение

Рассмотрим толстостенную трубу, находящуюся под осесимметричным внутренним и внешним давлениями (плоская задача); материал вначале полагаем идеально пластическим (фиг. 28.12). Будем считать, что $p_a > p_b$. Так как в этом случае распределение напряжений симметрично относительно оси трубы (зависит только от одной координаты — от радиуса), а тангенциальное и радиальное нормальные напряжения (σ_θ и σ_r) суть главные напряжения, то следует удовлетворить лишь одному уравнению равновесия, которое принимает следующий вид:

$$\sigma_r - \sigma_\theta + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0.$$



Фиг. 18.12. К задаче о пластическом равновесии толстостенной трубы

ям). Сравнивая полученные уравнения, имеем:

$$r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} = 2k.$$

Интегрируя, получаем:

$$\sigma_r = 2k \ln r + C. \quad (18.22)$$

На наружной поверхности т. е. при $r = b$, имеем $\sigma_r = -p_b$, а потому из выражения (18.22) следует:

$$C = -p_b - 2k \ln b. \quad (18.23)$$

На внутренней поверхности т. е. при $r = a$ имеем $\sigma_r = -p_a$ и поэтому из выражения (18.22), учитывая формулу (18.23), имеем

$$-p_a = 2k \ln a - p_b - 2k \ln b,$$

или в окончательном виде

$$p_a - p_b = 2k \ln \frac{b}{a}. \quad (18.24)$$

Выражение (18.24) есть условие пластичности для трубы, подверженной одновременно наружному и внутреннему давлению.

Для того чтобы вся труба пришла в пластическое состояние, необходимо, чтобы внутреннее давление превышало наружное согласно выражению (18.24). При $p_b = 0$ имеем так называемый *предел пластического сопротивления трубы* (предельное внутреннее давление), подверженной одному внутреннему давлению

$$p_T = 2k \ln \frac{b}{a}; \quad (18.25)$$

при $k = 0,5\sigma_T$ (по теории наибольших касательных напряжений)

$$p_T = \sigma_T \ln \beta$$

и при $k = 0,575\sigma_T$ (по теории октаэдрических напряжений)

$$p_T = 1,15\sigma_T \ln \beta,$$

где

$$\beta = \frac{b}{a}.$$

Так как в процессе возрастания внутреннего давления от 0 до значения p_T увеличение внутреннего радиуса (a) будет происходить интенсивнее, нежели увеличение наружного радиуса (b), то значение p_T по выражению (18.25) следует практически рассматривать как *критическое давление*, так как дальнейшее пластическое равновесие трубы в случае продолжающейся деформации возможно лишь при уменьшении внутреннего давления (отношение β — уменьшается и согласно 18.25 должно уменьшиться и давление). Следовательно, при $p < p_T$ имеем дело с устойчивым упруго-пластическим равновесием (устойчивое решение). При $p = p_T$, и тем более при давлении, хотя бы ничтожно превышающем p_T , равновесие оказывается неустойчивым.

В случае, когда труба подвергается только наружному давлению (p_b), согласно (18.14), предел пластического сопротивления трубы в этом смысле должен получиться:

$$|p_T| = 2k \ln \frac{b}{a},$$

то это решение должно рассматриваться как случай устойчивого равновесия. Иначе говоря, пластическое равновесие трубы возможно и при некотором увеличении p_b относительно p_T за счет того, что в процессе обжима трубы отношение $\frac{b}{a}$ возрастает.

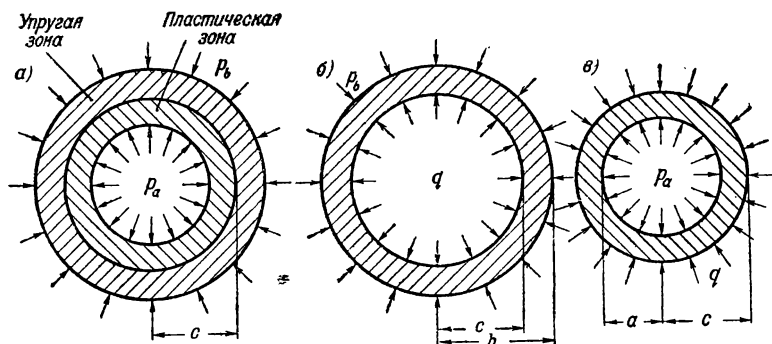
* * *

Рассмотрим случай, когда давление в трубе меньше предела пластического сопротивления, но больше предела упругого сопротивления. В этом случае в поперечном сечении трубы будем иметь две зоны: внутреннюю — пластическую и наружную — упругую. Обозначим давление пластической среды на упругую через q (фиг. 18.13). Тогда применительно к пластической зоне можем написать условие пластичности; например, обозначаем

$$\frac{c}{a} = \beta_{пл};$$

тогда

$$p_a - q = \sigma_T \ln \beta_{пл}. \quad (18.26)$$



Фиг. 18.13. Упругопластическое состояние толстостенной трубы

Применительно к упругой зоне можем написать условие предельного состояния (например, по теории наибольших касательных напряжений). Отождествляя для простоты вычислений предел упругости с пределом текучести, получаем:

$$q - p_b^* = \sigma_T \frac{\beta_y^2 - 1}{2\beta_y^2}, \quad (18.27)$$

где

$$\beta_y = \frac{b}{c}$$

(18.26) и (18.27), имеем:

$$p_a - p_b = \sigma_T \left[\ln \beta_{пл} - \frac{1}{2\beta_y^2} + \frac{1}{2} \right]. \quad (18.28)$$

Для случая, когда осевая деформация трубы $\varepsilon_z \neq 0$ (имеется осевая сила P) и приняв допущение о несжимаемости материала, В. В. Соколовский (126*) установил, что чисто пластическое состояние наступает при соблюдении условий:

$$\left. \begin{aligned} p_a - p_b &= k \ln \frac{b^2 + \sqrt{b^4 + \lambda^2 a^4}}{a^2 (1 + \sqrt{1 + \lambda^2})}, \\ P &= \pi \frac{\sqrt{3}k}{\lambda} (b^2 \sqrt{1 + \lambda^2} - \sqrt{b^4 + \lambda^2 a^4} + \pi (p_a a^2 - p_b b^2)), \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

где параметр λ находится из уравнения

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{k}{G\varepsilon_z} \right)^2 - 1.$$

В. В. Соколовский обследовал вопрос о применимости к решению задачи об упругопластическом равновесии трубы допущения о несжимаемости материала. Это допущение не позволяет (если $\mu \neq 0,5$) полностью

удовлетворить условию непрерывности всех компонентов напряжения и смещения на общей границе упругой и пластической зон, поэтому применение его, строго говоря, возможно лишь в чисто пластических задачах, когда упругая зона отсутствует.

В. В. Соколовским было показано, что значения компонентов σ_r и σ_θ , найденные с учетом или без учета сжимаемости материала, все же довольно близки. Вычисление компонента напряжений σ_z и радиального компонента смещения без учета сжимаемости недопустимо.

§ 18.06. Продолжение: учет упрочнения материала

Для случая осесимметричной и притом плоской деформации ($\epsilon_z = 0$) толстостенной трубы напряжения и деформации в ней определяются также просто и при наличии упрочнения материала.

Будем полагать известной из опытов (например, из опыта на кручение) зависимость

$$\tau = f(\gamma). \quad (18.29)$$

Наибольшее касательное напряжение в любой точке рассматриваемой трубы может быть, как известно, выражено через главные нормальные напряжения

$$\tau = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2}. \quad (18.30)$$

Кроме того, для $\epsilon_z = 0$ и несжимаемости материала (см. стр. 149) имеем:

$$\gamma = \epsilon_\theta - \epsilon_r = \frac{2B}{r^2}. \quad (18.31)$$

Уравнение равновесия элемента трубы записываем без изменения (см. 9.02):

$$\sigma_\theta - \sigma_r = r \frac{d\sigma_r}{dr}. \quad (18.32)$$

Интегрируя уравнение (18.32) в пределах от r до $r = b$, получим:

$$\int_r^b d\sigma_r = \int_r^b (\sigma_\theta - \sigma_r) \frac{dr}{r}$$

или, принимая граничные условия: при $r = b$ $\sigma_r = 0$,

$$-\sigma_r = \int_r^b (\sigma_\theta - \sigma_r) \frac{dr}{r}. \quad (18.33)$$

Дифференцируя выражение (18.31), имеем:

$$d\gamma = -\frac{4B}{r^3} dr = -\frac{2B}{r^2} \cdot \frac{2dr}{r},$$

или, принимая во внимание формулу (18.31), имеем

$$d\gamma = -2 \frac{dr}{r} \gamma. \quad (18.34)$$

Подставляя в выражение (18.33) зависимости (18.30) и (18.31), имеем

$$\sigma_r = \int_{\gamma}^{\gamma_b} \tau \frac{d\gamma}{\gamma}, \quad (18.35)$$

или

$$\sigma_r = \int_{\gamma}^{\gamma_b} f(\gamma) \frac{d\gamma}{\gamma}, \quad (18.35')$$

где верхний предел в этом интеграле обозначает значение γ при $r=b$.

Для тангенциального напряжения с помощью выражений (18.29) и (18.30) имеем:

$$\sigma_\theta = 2f(\gamma) + \int_{\gamma}^{\gamma_b} f(\gamma) \frac{d\gamma}{\gamma}.$$

Так как при $r=a$ радиальное напряжение $\sigma_r = -p$, то при помощи выражения (18.35) можем вычислить давление p , при котором на внутренней поверхности трубы деформация сдвига равна γ_a :

$$p = \int_{\gamma_b}^{\gamma_a} f(\gamma) \frac{d\gamma}{\gamma}; \quad (18.36)$$

Пределы интегрирования γ_a и γ_b между собой связаны зависимостями на основании формулы (18.31)

$$\gamma_a = \frac{2B}{a^2}; \quad \gamma_b = \frac{2B}{b^2}$$

и потому

$$\gamma_a = \gamma_b \frac{b^2}{a^2}.$$

При наличии сколь угодно сложного графика $\tau = f(\gamma)$ решение интеграла (18.36) может быть раскрыто графически или методом численного интегрирования, но если аппроксимировать кривую деформации для чистого сдвига при помощи степенной зависимости

$$\tau = \tau_T \left(\frac{\gamma}{\gamma_T} \right)^m,$$

то выражение (18.36) может быть легко проинтегрировано. Так, для внутреннего давления имеем

$$p = \int_{\tau_b}^{\tau_a} f(\gamma) \frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{\tau_T}{\gamma_T^m} \int_{\gamma_a \frac{a^2}{b^2}}^{\gamma_a} \gamma^{m-1} d\gamma = \frac{\tau_T}{m \gamma_T^m} \gamma_a^m \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (18.37)$$

Так как диаграмму истинных напряжений при испытании материала на чистое растяжение (в координатах σ и ϵ) можно считать подобной диаграмме напряжений при сдвиге и кручении (в координатах τ и γ), то результату (18.37) можно придать другое начертание, заменив $\tau = f(\gamma)$ через функцию $\sigma = f(\epsilon)$.

Вспомним, что предел текучести при чистом сдвиге связан (по энергетической теории) с пределом текучести при растяжении зависимостью

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}},$$

а при пластической деформации удлинение образца ϵ_1 в 2 раза больше поперечного сужения ϵ_2 (коэффициент $\mu = 1/2$) и потому максимальный относительный сдвиг при одноосном пластическом растяжении выражается через удлинения в виде

$$\gamma = \epsilon_1 - \epsilon_2 = \frac{3}{2} \epsilon_1.$$

Заменяя в (18.37)

$$\gamma_T = \frac{3}{2} \epsilon_T, \tau_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}},$$

имеем

$$p = \frac{\sigma_T}{m \sqrt{3}} \left(\frac{\epsilon_a}{\epsilon_T} \right)^m \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (18.38)$$

При $m = 1$ (упругий процесс), когда график $\sigma = f(\epsilon)$ — прямолинейный, из (18.38) получаем известное ранее выражение для *предела упругого сопротивления трубы* (считая, что ϵ_a достигло предела ϵ_T):

$$p = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right).$$

При $m = 0$ (идеально пластический материал), что равносильно

$$\tau = f(\gamma) = \text{const},$$

и полагая по-прежнему $\tau_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}$, из (8.36) имеем:

$$p = \tau_T \int_{\gamma_b}^{\gamma_a} \frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{b}{a}. \quad (18.39)$$

Последнее соответствует полученному ранее выражению (18.25) для предела пластического сопротивления, записываемому иногда в виде:

$$p = 1,15 \sigma_T \ln \beta,$$

где по-прежнему

$$\beta = \frac{b}{a}.$$

Предлагается читателю в порядке самостоятельного упражнения продолжить рассматриваемую задачу и доказать справедливость следующих формул:

радиальное напряжение

$$\sigma_r = -p \frac{a^{2m} (b^{2m} - r^{2m})}{r^{2m} (b^{2m} - a^{2m})};$$

тангенциальное напряжение

$$\sigma_\theta = p \frac{a^{2m} [b^{2m} (2m - 1) + r^{2m}]}{r^{2m} (b^{2m} - a^{2m})};$$

увеличение внутреннего радиуса (компонент смещения)

$$u_{r=a} = \frac{a}{2} \tau_T \left[\frac{pm}{\tau_T \left(1 - \frac{a^{2m}}{b^{2m}} \right)} \right]^{\frac{1}{m}};$$

увеличение наружного радиуса

$$u_{r=b} = u_{r=a} \frac{a}{b}.$$

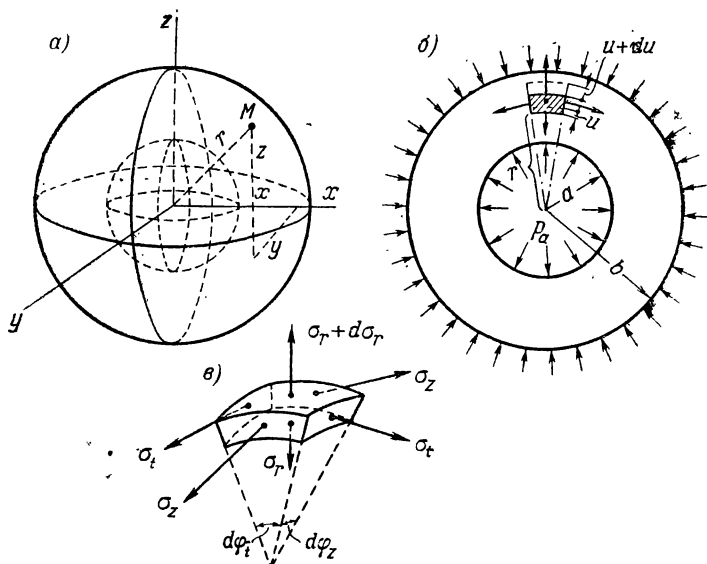
Если трубу, подвергнутую внутреннему давлению которому отвечал наибольший относительный сдвиг γ_a , далее освободить от давления, то, применяя закон пассивной деформации (§ 17.03), мы должны получить для остаточной деформации по внутреннему радиусу выражение:

$$(u_{r=a})_{\text{ост}} = \frac{a}{2} \tau_T \left[\frac{pm}{\tau_T \left(1 - \frac{a^{2m}}{b^{2m}} \right)} \right]^{\frac{1}{m}} - p \frac{(1 + \mu)}{E} \frac{b^2 a}{(b^2 - a^2)}.$$

§ 18.07. Полярно-симметричное упругопластическое состояние шарового сосуда. Устойчивое и неустойчивое решение

Пусть шаровой сосуд, имеющий радиус внутренней поверхности a и наружный b , давлением находящегося во внутренней полости газа приведен по всей толщине своих стенок в идеально пластическое состояние. Для общности задачи предположим и наличие давления газов на наружную поверхность шара. Давление газов изнутри обозначим через p_a , а снаружи p_b , причем $p_a > p_b$.

Для исследования вырежем из шарового сосуда бесконечно малый элемент двумя парами взаимно перпендикулярных меридиональных сечений и, как это выполнялось в главе 12 (фиг. 18.14), действие отброшенных частей сосуда заменим



Фиг. 18.14 Упругопластическое состояние шарового сосуда

тангенциальными (σ_t , σ_z) и радиальными (σ_r) напряжениями. Проектируя все силы на направление радиуса, имеем уравнение равновесия в прежнем виде:

$$2(\sigma - \sigma_t) + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0, \quad (18.40)$$

так как уравнения равновесия не зависят от того, в каком состоянии — упругом или пластическом — находится материал. Условие пластичности примем в форме (5.16), т. е. будем

предполагать материал способным к идеальной пластичности и не имеющим эффекта упрочнения

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - \sigma_r)^2} = \sigma_T.$$

Это уравнение в данном случае примет вид

$$\sigma_t - \sigma_r = \pm \sigma_T. \quad (18.41)$$

Объединяя выражения (18.40) и (18.41) и производя разделение переменных, имеем дифференциальное уравнение

$$d\sigma_r = \pm 2\sigma_T \frac{dr}{r}.$$

Интегрируя последнее, находим

$$\sigma_r = \pm 2\sigma_T \ln r + C. \quad (18.42)$$

Используем граничные условия: при $r = a$ $\sigma_r = -p_a$; при $r = b$ $\sigma_r = -p_b$. Из выражения (18.42)

$$-p_a = \pm 2\sigma_T \ln a + C,$$

$$-p_b = \pm 2\sigma_T \ln b + C.$$

Производя вычитание первой строки из второй, имеем

$$p_a - p_b = \pm 2\sigma_T \ln \frac{b}{a}, \quad (18.43)$$

или, обозначая

$$\frac{b}{a} = \beta,$$

окончательно получаем

$$p_a - p_b = \pm 2\sigma_T \ln \beta. \quad (18.44)$$

Выражение (18.44) и есть условие пластичности шарового сосуда (предел пластического сопротивления сосуда). Знак плюс, очевидно, надо брать в случае, когда $p_a > p_b$, знак минус — в обратном случае.

При наличии только одного внутреннего давления следует, что предел пластического сопротивления сферической оболочки равен:

$$p_T = 2\sigma_T \ln \beta,$$

и аналогично замечанию в конце § 18.05 это представляет критическое давление в оболочке, т. е. устойчивое пластическое равновесие возможно лишь при $p_a < p_T$.

При наличии одного только наружного давления нижнее значение предела пластического сопротивления, т. е. нижнее значение наружного давления p_b , при котором пластическое состояние наступает во всем объеме сосуда, будет определяться той же формулой, но это, очевидно, будет случай еще устойчивого решения.

Иначе говоря, возможно дальнейшее увеличение давления за счет того, что отношение $\frac{b}{a}$ в данном случае будет также расти.

*
* *

Рассмотрим упругопластическое состояние шарового сосуда, когда в пластическом состоянии находится часть сферы от $r=a$ до $r=c$, причем $a < c < b$. Обозначим интенсивность давления пластического слоя [толщиной $(c-a)$] на упругую часть шарового сосуда [толщиной $(b-c)$] через q .

Тогда условие пластичности для внутренней части сферы с радиусами $r=a$ и $r=c$ запишется с помощью формулы (18.44)

$$p_a - q = \pm 2\sigma_T \ln \beta_{пл}, \quad (18.45)$$

где

$$\beta_{пл} = \frac{c}{a}.$$

Условие предельного упругого состояния наружной оболочки запишется так (если для простоты расчетов отождествлять предел упругости с пределом текучести):

$$(\sigma_r)_{r=c} - (\sigma_r)_{r=b} = \sigma_T, \quad (18.46)$$

где $(\sigma_r)_{r=b} = -q$, а для тангенциального напряжения согласно известным формулам из теории упругости:

$$(\sigma_t)_{r=c} = \frac{q(2c^3 + b^3)}{2(b^3 - c^3)} - \frac{3p_b b^3}{2(b^3 - c^3)}.$$

Таким образом, условие (18.46) становится:

$$\frac{q(2c^3 + b^3)}{2(b^3 - c^3)} - \frac{3p_b b^3}{2(b^3 - c^3)} + q = \pm \sigma_T. \quad (18.47)$$

Введем обозначение $\frac{b}{c} = \beta_y$; тогда условие (18.47) примет вид

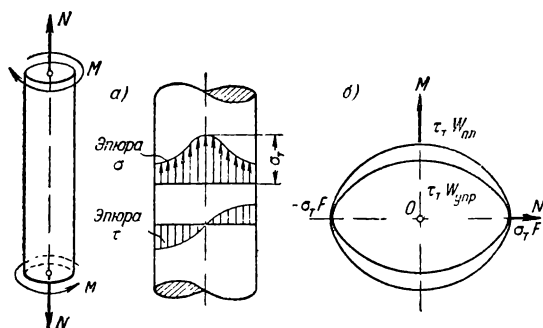
$$q \left[1 + \frac{2 + \beta_y^3}{2(\beta_y^3 - 1)} \right] - p_b \frac{3\beta_y^3}{2(\beta_y^3 - 1)} = \pm \sigma_T. \quad (18.48)$$

Объединяя выражения (18.45) и (18.48), имеем уравнение упругого пластического равновесия шарового сосуда

$$p_a - p_b = \pm 2\sigma_T \left(\ln \beta_{пл} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3\beta_y^3} \right). \quad (18.49)$$

§ 18.08. Несущая способность* круглого цилиндрического стержня, подверженного растяжению и кручению*

Считая стержень достаточно длинным, полагая, что напряженное состояние одинаково для всех сечений стержня (фиг. 18.15) и учитывая условие симметрии нагрузки, мы должны принять для продольных деформаций закон плоских сечений; более того, следует считать, что деформации (осе-



Фиг. 18.15 Одновременное кручение и растяжение. Распределение пластических напряжений по диаметру (а). Область предельных значений M и N (б)

вые удлинения) должны быть одинаковыми во всех точках стержня. В противном случае искривления сечений после деформации, будучи неодинаковыми для различных точек стержня, накапливаясь по длине стержня, привели бы к слишком большим искривлениям торцевых плоскостей, чего в действительности не наблюдается. Итак, примем $\varepsilon_z = \text{const}$.

При малых деформациях естественно предположить, что контур поперечного сечения в своей плоскости не деформируется, а поворачивается как жесткий диск, что равносильно наложению условий

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

Выпишем все уравнения теории пластичности применительно к данной задаче и примем во внимание, что материал стержня идеально пластичен. Из трех дифференциальных уравнений равновесия остается только одно (остальные обращаются в тождество):

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (a)$$

* Подробное освещение этого вопроса см. [7].

Из физических уравнений остаются:

$$\epsilon_z = \frac{1}{3G'} \sigma_z; \quad (б)$$

$$\tau_{xz} = G' \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G' \gamma_{yz}. \quad (в)$$

Условием пластичности будет:

$$\sigma_z^2 + k_0 (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = \sigma_T^2, \quad (г)$$

где $k_0 = 3$ в случае справедливости условий текучести по уравнению (5.16) и $k_0 = 4$ в случае применимости уравнения (5.15).

Геометрические соотношения для сдвигов в данной задаче, ввиду отсутствия деформации поперечного сечения (искривление из плоскости), запишутся, как и в случае чистого кручения:

$$\gamma_{xz} = \alpha y; \quad \gamma_{yz} = \alpha x, \quad (д)$$

где α — относительный угол закручивания сечения. Присоединим сюда уже принятое условие

$$\epsilon_z = \text{const}. \quad (е)$$

Используя (д) и (е), имеем:

$$\tau_{xz} = G' \alpha y; \quad \tau_{yz} = G' \alpha x. \quad (ж)$$

Из (б) и (ж) следует

$$\frac{\tau_{xz}}{\sigma_z} = \frac{\alpha}{3\epsilon_z} y; \quad \frac{\tau_{yz}}{\sigma_z} = \frac{\alpha}{3\epsilon_z} x, \quad (з)$$

откуда

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \left(\frac{\alpha}{\epsilon_z} \right)^2 \frac{\sigma_z^2}{9} r^2, \quad (и)$$

где r — расстояние от центра круга до рассматриваемой точки.

Введем обозначение

$$\frac{\alpha}{\epsilon_z} = \psi, \quad (к)$$

тогда из (и) имеем:

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \psi^2 \frac{\sigma_z^2}{9} r^2. \quad (л)$$

Подставляя (л) в (г), получаем:

$$\sigma_z^2 \left(1 + k_0 \frac{\psi^2}{9} r^2 \right) = \sigma_T^2,$$

откуда

$$\sigma_z = \frac{\sigma_T}{\sqrt{1 + \frac{k_0}{9} \psi^2 r^2}}. \quad (18.50)$$

Из (3) следует

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\sigma_T \psi y}{3 \sqrt{1 + \frac{k_0}{9} \psi^2 r^2}}; \\ \tau_{yz} &= \frac{\sigma_T \psi x}{3 \sqrt{1 + \frac{k_0}{9} \psi^2 r^2}}; \\ \tau &= \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{\sigma_T \psi r}{3 \sqrt{1 + \frac{k_0}{9} \psi^2 r^2}}. \end{aligned} \quad (18.51)$$

График изменения напряжений σ_z и напряжений τ , направленных перпендикулярно к радиусам сечения, в зависимости от радиуса r , показан на фиг. 18.15 *a*.

Дифференциальное уравнение равновесия (а), очевидно, удовлетворяется. Контурные условия также, очевидно, выполняются, так как касательные напряжения у контура имеют направление вдоль линии контура.

По напряжениям σ_z и τ вычислим предельные значения нормальной силы и крутящего момента. Интегрируя по сечению, имеем:

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_F \sigma_z dF = \int_0^R \sigma_z 2\pi r dr; \\ M &= \int_F \tau r dF = \int_0^R \tau 2\pi r^2 dr. \end{aligned} \right\} \quad (M)$$

По подстановке в (M) выражений (18.50) и (18.51) имеем:

$$N = \frac{18\pi}{k_0 \psi^3} \sigma_T \left(\sqrt{1 + \frac{k_0}{9} \psi^2 R^2} - 1 \right); \quad (18.52)$$

$$M = \frac{18\pi \sigma_T}{k_0^2 \psi^3} \left\{ \left[\left(\frac{k_0 \psi^2 R^2}{9} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]^2 \sqrt{1 + \frac{k_0}{9} \psi^2 R^2} + 2 \right\}. \quad (18.53)$$

Из (18.52) следует

$$\phi = 6 \sqrt{\frac{\pi \sigma_T}{k_0} \frac{V \sqrt{\tau R^2 \sigma_T - N}}{N}}. \quad (18.54)$$

Подставляя (18.55) в (18.53), после преобразований получаем уравнение, связывающее продольную силу и крутящий момент в предельном состоянии:

$$M^2 + \frac{R^2 N^2}{3k_0} + \frac{N^3}{9\pi k_0 \sigma_T} = \frac{\sigma_T^2 W_T^2}{k_0}, \quad (18.55^*)$$

где обозначено

$$W_T = \frac{2}{3} \pi R^3$$

(W_T — пластический момент сопротивления при чистом кручении круглого стержня).

Область предельных значений M и N очерчивается на основании (18.55) кривой третьего порядка, изображенной на фиг. 18.15б (наружная кривая).

Область предельных значений для упругой стадии работы сечения найдется путем подстановки в условие пластичности (при отождествлении предела текучести материала с пределом упругости — это будет одновременно условием предельного упругого состояния)

$$\sigma_z^2 + k_0 \tau^2 = \sigma_T^2$$

краевых напряжений, вычисляемых по формулам теории упругости, т. е.

$$\sigma_z = \frac{N}{\pi R^2} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{2M}{\pi R^3}.$$

В результате подстановки получаем уравнение эллипса (на фиг. 18.15б внутренняя кривая):

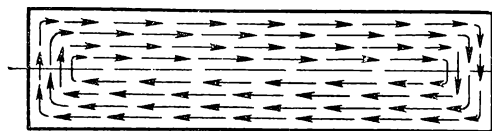
$$\frac{N^2}{\pi^2 R^4 \sigma_T^2} + \frac{4k_0 M^2}{\pi^2 R^6 \sigma_T^2} = 1. \quad (18.56)$$

* Если вначале прикладывается продольная сила, а затем добавляется крутящий момент, доводящий сечение до потери несущей способности, то взамен (18.55) получаем:

$$M^2 + \frac{4}{9} \frac{N^2 R^3}{k_0} = \frac{\sigma_T^2 W_T^2}{k_0}.$$

§ 18.09. Несущая способность при кручении сечения в виде узкого прямоугольника

а) **Кручение с растяжением.** Рассуждениями, аналогичными изложенным в предыдущем параграфе, можно просто получить решение для тонкой пластинки, для которой, пренебрегая участками закругления линий касательных напряжений вблизи кромок пластинки, можно считать, что касательные напряжения в сечении везде параллельны длинным сторонам сечения (фиг. 18.16).



Фиг. 18.16. Направления потока касательных напряжений при кручении прямоугольного сечения

Связь между крутящим моментом и продольной силой для предельного состояния

имеет вид (см. [5]*):

$$M + \frac{3N}{k_0\psi} = \frac{3b\sigma_T h}{k_0\psi} \sqrt{1 + \frac{k_0}{36} \psi^2 h^2}; \quad (18.57)$$

величина ψ определяется при заданном N из трансцендентного уравнения:

$$\frac{\sqrt{k_0}}{6} \psi h = \operatorname{sh} \frac{\sqrt{k_0} \psi N}{6b\sigma_T},$$

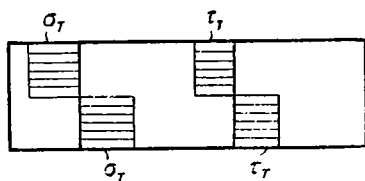
где h — толщина; b — ширина пластинки.

б) **Изгиб и кручение пластинки.** В этом случае эпюры нормальных и касательных напряжений по толщине пластинки образуют два прямоугольника (фиг. 18.17), причем величины нормальных и касательных напряжений связаны условием текучести

$$\sigma^2 + k_0 \tau^2 = \sigma_T^2.$$

Так как изгибающий момент M_u и крутящий M_k будут при прямоугольных эпюрах соответственно равны

$$M_u = \frac{bh^2}{4} \sigma; \quad M_k = \frac{bh^2}{2} \tau,$$



Фиг. 18.17. Распределение нормальных и касательных напряжений по высоте узкой пластинки при ее изгибе и кручении

то, подставляя эти выражения в условия текучести, имеем зависимость между M_u и M_k в предельном состоянии:

$$16M_u^2 + 4k_0 M_k^2 = \sigma_T^2 b^2 h^4. \quad (18.58)$$

в) Изгиб с растяжением и сдвигом. Для случая, когда в поперечном прямоугольном сечении имеются одновременно изгибающий момент M , продольная N и поперечная сила Q , может быть предложено сравнительно простое решение*, устанавливающее связь между перечисленными выше компонентами внутренних усилий в предельном состоянии. Оно имеет вид:

$$M + \frac{1}{4} \frac{N^2}{b\sigma_T} + \frac{9}{16} \frac{Q^2}{b\sigma_T} = \sigma_T W_I, \quad (18.59)$$

где

$$W_I = \frac{bh^3}{4}.$$

Решение (18.59) является приближенным, так как исходит из предположения, что предельное состояние текучести достигается лишь в крайних зонах и только в одной точке в средней части на нейтральной оси.

Уточнение (18.59), но в условиях «простого нагружения», дано А. Р. Ржаницыным (7), где показано, что действительная область предельного состояния несколько шире, чем это следует из (18.59), и особенно при больших значениях Q . Расчетные формулы, естественно, оказались очень сложными. Им же в этом труде дано графическое изображение действительной области предельного состояния и условной, определяемой из (18.59).

§ 18. 10. Пластическое состояние при нестесненном кручении некруглых сечений

Обозначая ось призматического стержня через Z , при свободном кручении (когда нет препятствий к деформации, т. е. к искривлению поперечных сечений из плоскости сечений) будем иметь $\sigma_z = 0$. Аналогично соображениям, изложенным в § 18.08, примем $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$.

* См. (3)*. Задача решалась в предположении, что вначале на сечение действует продольная сила и изгибающий момент, достигающий такого значения, при котором сечение оказывается в упругопластическом состоянии; средняя область сечения при этом находится еще в упругом состоянии. Затем, не снимая указанных продольной силы и изгибающего момента, начинаем на сечение оказывать действие поперечной силой, которая вовлекает в пластическое состояние в среднюю область сечения.

В рассматриваемом случае нагружение сечения моментом, продольной и поперечной силами, очевидно, не является простым (в смысле Ильюшина), а представляет частный случай сложного нагружения.

Из дифференциальных уравнений равновесия в этом случае останется только третье:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0,$$

переписываемое в виде

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0, \quad (18.60)$$

Условие пластичности в данном случае запишется так:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{6 (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} = \sigma_T$$

или в виде:

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \tau_T^2, \quad (18.61)$$

где

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}.$$

Совокупность уравнений (18.60) и (18.61) полностью решает задачу. Аналогично функции напряжений в теории упругости (§ 8.04) и здесь можно подобрать так называемую *функцию пластических напряжений* $F(x, y)$.

Действительно, (18.60) удовлетворяется, если принять:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}. \quad (18.62)$$

Функция напряжений на основании (18.61) и (18.62) должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = \tau_T^2. \quad (18.63)$$

Выражение, стоящее в левой части этого уравнения, представляет собой квадрат величины наибольшего наклона (градиента F) поверхности F . Следовательно, во всех точках поперечного сечения, в которых получается пластическая деформация, должно иметь место следующее равенство:

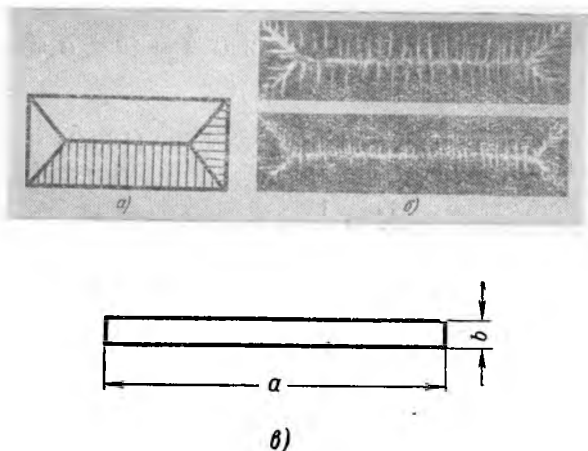
$$(\text{grad}) F = \tau_T = \text{const.} \quad (18.64)$$

На основании этого свойства, а также и того очевидного условия, что касательное напряжение τ у наружного контура сечения направлено по касательной к этому контуру, функция пластических напряжений для данного поперечного сечения определяется вполне.

Указанные свойства функции F показывают, что *поверхность пластических напряжений представляет собой по-*

верхность с постоянным углом ската (поверхность естественного откоса), которую можно построить на контуре поперечного сечения. Если вырезать из куска жесткого картона шаблон поперечного сечения, положить его горизонтально и посыпать песком, то получится куча, естественные откосы которой и дадут представление о поверхности F .

Поверхность равного ската легко построить для любого контура поперечного сечения. В частности, для круга это будет конус, а для прямоугольника — поверхность в виде крыши (фиг. 18.18).



Фиг. 18.18: а) поверхность равного ската для прямоугольного сечения; б) фото травленых шлифов стержней из мягкого железа, подвергнутых кручению (при травлении); слои скольжения становятся темными линиями или полосами; в) сечение в виде узкого прямоугольника

Опыты по кручению железных стержней дают хорошее подтверждение теории. Наблюдения показывают, что в поперечных сечениях стержней получаются довольно правильные слои скольжения. Их можно обнаружить методом травления, в котором слои скольжения становятся темными полосами или линиями. Ряд травленых шлифов стержней из мягкого железа, подвергнутых кручению, показан на фиг. 18.18б.

Предельный крутящий момент, определяющий несущую способность сечения на чистое кручение, определяется удвоенным объемом тела, ограниченного поверхностью равного ската. Так, для круглого сечения (радиус сечения R)

$$M = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_T. \quad (18.65)$$

Для эллиптического сечения с полуосями a и b по исследованиям В. В. Соколовского предельный момент записывается:

$$M = \frac{2}{3} \pi a_1^3 \cdot \left(1 - \frac{9}{2} \alpha^2 + 4\alpha^3\right) \tau_T, \quad (18.66)$$

где

$$\alpha = \frac{b_1}{a_1}; \quad b_1 = \frac{a-b}{2}; \quad a_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Для квадрата

$$M = \frac{a^3}{3} \tau_T. \quad (18.67)$$

Для прямоугольника со сторонами a и b ($b < a$):

$$M = \frac{b^2}{6} (3a - b) \tau_T. \quad (18.68)$$

Для тонкой полосы (фиг. 18.18 в) условие (18.68) можно упрощенно записать в виде:

$$M = \frac{1}{2} ab^2 \tau_T. \quad (18.69)$$

Теория упругости для предела упругого сопротивления при кручении круглого сечения дает

$$M_{\text{упр}} = \frac{\pi R^3}{2} \tau_T;$$

для эллиптического

$$M_{\text{упр}} = \frac{\pi ab^2}{2} \tau_T;$$

для квадрата

$$M_{\text{упр}} = 0,208 a^3 \tau_T;$$

для тонкой полосы

$$M_{\text{упр}} = \frac{1}{3} ab^2 \tau_T.$$

Таким образом, отношения предела пластического сопротивления сечения при кручении к пределу упругого сопротивления составляют:

для круга	1,33;
для эллипса при $b = 1/2 a$	1,46;
для тонкой полосы	1,50;
для квадрата	1,60.

В литературе (см. [2] на стр. 427) можно найти следующую интерпретацию упругопластического кручения.

Если на контур поперечного сечения с построенной на нем поверхностью равных скатов, перевернутой вниз (для

наглядности), натянуть тонкую пленку и нагружать ее равномерно распределенной нагрузкой, пропорциональной относительному углу закручивания стержня, то при постепенном деформировании такой пленки она начнет частично ложиться на поверхность равного ската, местами не доходя до нее.

Свободные участки пленки будут соответствовать упругой зоне сечения, а примыкающие к поверхности равного ската — пластической.

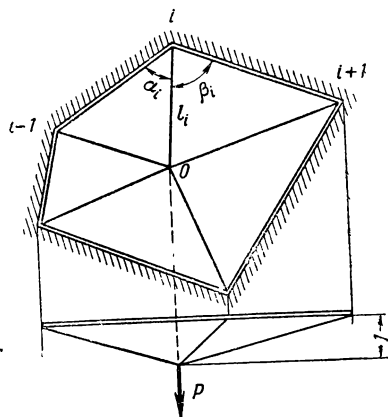
В пределе, при бесконечно большом значении относительного угла кручения, пленка полностью должна заполнить поверхность равного ската со всеми ее двухгранными и пространственными углами. Это и будет соответствовать предельному состоянию сечения, которое, конечно, можно лишь представить теоретически; фактически разрушение должно произойти раньше вследствие ограниченной деформации сдвига (отсутствие в природе идеально пластического тела), но действительный предельный момент обычно мало отличается от определяемого из условия идеально пластического материала.

§ 18.11. Несущая способность при изгибе однородных пластинок

а) Несущая способность полигональной плиты.

Рассмотрим полигональную плиту, шарнирно-опертую по периметру и нагруженную в точке O сосредоточенной силой P (фиг. 18.19).

Форму разрушения такой плиты, отвечающую превращению ее при достижении несущей способности в геометрически изменяемую систему, согласно А. А. Гвоздеву можно представить себе в виде пирамиды с вершиной в точке O и с ребрами — *цилиндрическими шарнирами текучести*, идущими в вершины опорного контура (фиг. 18.19). Высота пирамиды, т. е. прогиб под силой P в состоянии текучести, является неопределенной величиной, и ее можно принять условно за единицу. Вместо составления уравнений предельного равновесия для указанной формы разрушения плиты изящнее применить кинематический метод, т. е.



Фиг. 18.19. К расчету несущей способности полигональной плиты по А. А. Гвоздеву

написать условие равенства нулю работы всех сил системы на возможном ее перемещении.

В качестве возможных (виртуальных) перемещений примем перемещения системы в момент исчерпания несущей способности, т. е. согласно фиг. 18.19. Виртуальная работа составит из работы силы P на назначенном по ее направлению единичном перемещении, из работы предельных моментов m_T на двугранных углах перелома в цилиндрических шарнирах текучести и, наконец, из работы внутренних усилий, возникающих в тех треугольных пластинках (ограниченных двумя смежными цилиндрическими шарнирами текучести и частью опорного контура), на которые к моменту начала разрушения разбивается заданная плита. Однако последней работой пренебрегают.

Таким образом, для определения разрушающей силы P следует интенсивность предельных моментов m_T помножить на сумму произведений двугранных углов перелома в шарнирах текучести на длины этих шарниров. В результате имеем уравнение:

$$P = m_T \sum \theta_i l_i. \quad (18.70)$$

Не представляет затруднений [4, 112] установить следующие соотношения:

$$\theta_i = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где

$$a = l_i \operatorname{tg} \alpha_i, \quad b = l_i \operatorname{tg} \beta_i,$$

таким образом, окончательно,

$$P = m_T \sum (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i), \quad (18.71)$$

где α_i и β_i — углы, образуемые линиями перелома со сторонами периметра пластинки.

В частности, если пластинка имеет форму правильного многоугольника, а сила P приложена в центре, то

$$P = 2m_T n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}, \quad (18.72)$$

где n — число сторон многоугольника.

Для круглой пластинки, загруженной в центре и шарнирно-опертой по контуру, из (18.72) при $n \rightarrow \infty$ получаем:

$$P = 2\pi m_T. \quad (18.73)$$

Поверхность пластинки в предельном состоянии здесь образует конус. Его сплошь заполняют цилиндрические шарниры текучести, направленные по радиусам.

В указанных выше формулах (18.71), (18.73) под m_T следует понимать значение

$$m_T = \sigma_T \frac{h^2}{4}, \quad (18.74)$$

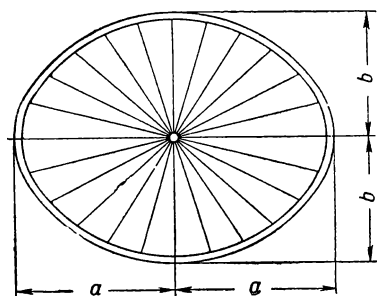
где h — толщина пластинки.

Для прямоугольной пластинки, нагруженной в центре, согласно (18.71) имеем:

$$P = 4m_T \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right), \quad (18.75)$$

где a и b — размеры сторон пластинки.

Любопытно заметить, что для круглой пластинки, обследованной В. В. Соколовским



Фиг. 18.21. Эллиптическая пластинка при загрузке в центре

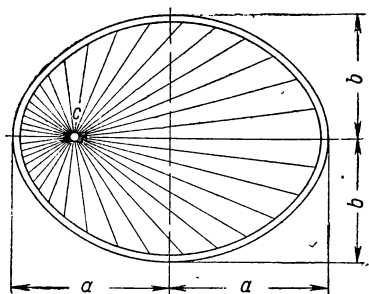
$$P = 2\pi \frac{a}{b} m_T. \quad (18.76)$$

При нагружении той же пластинки в центре эллипса (фиг. 18.21)

$$P = \pi \frac{a^2 + b^2}{ab} m_T. \quad (18.77)$$

Для круглой пластинки, нагруженной сосредоточенной силой P с эксцентриситетом c (фиг. 18.22),

$$P = 2\pi \frac{R}{\sqrt{R^2 - c^2}} m_T. \quad (18.78)$$

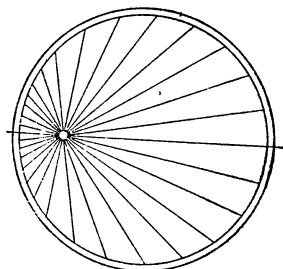


Фиг. 18.20. Эллиптическая пластинка, опертая по контуру и нагруженная сосредоточенной силой в фокусе. Линии, сходящиеся в фокусе, — цилиндрические шарниры текучести (задача А. Р. Ржаницына)

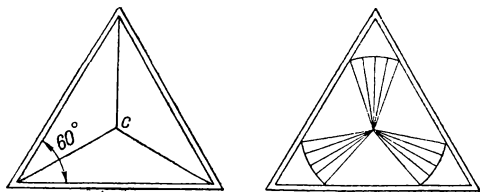
точными методами теории пластичности, получено то же решение (18.73) (см. также [2]).

б) Другие случаи плит. Исходя из указанной выше идеи А. А. Гвоздева, А. Р. Ржаницыным [4.7] исследовано несколько случаев.

Так, для эллиптической пластинки, нагруженной силой в фокусе (фиг. 18.20), им получено выражение для предельной силы в виде:



Фиг. 18.22. Круглая пластинка при эксцентричном нагружении



Фиг. 18.23. Образование «краевых» шарниров текучести в плитах с острыми углами

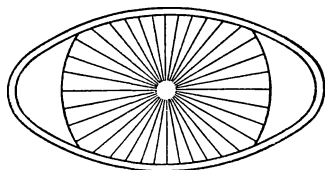
ления краевых шарниров (фиг. 18.23). Оказывается, что необходимо вводить поправки также и в формулы для эллиптической пластинки в случае вытянутого эллипса.

Так, формула (18.77) будет уже неприменима при наличии значительных углов наклона (фиг. 18.24) касательных контура к радиусу-вектору, а именно больших 135° . В таком случае образуются краевые шарниры текучести. Точно так же формула (18.78) применима при $a < 0,707R$, иначе разрушение будет происходить по форме (фиг. 18.25), отличной от представленной на фиг. 18.22.

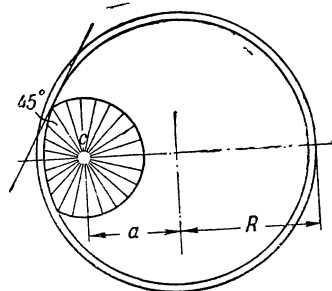
Литература к главе 18

1. Безухов Н. И. Лекции по строительной механике. Изд. ВАИА, 1956. Изложен метод упругих решений для температурных задач в цилиндрических оболочках с учетом кольцевых нагрузок и осевых сил.
2. Безухов Н. И. Основы теории сооружений, материал которых не следует закону Гука. Труды Московского автодорожного института, вып. IV, 1936.
В числе прочих вопросов подробно обследован закон распределения касательных напряжений в поперечном сечении изгибаемых балок за пределом упругости.
3. Безухов Н. И. Сборник задач по теории упругости и пластичности. Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1957.
4. Гвоздев А. А. Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределимых систем, претерпевающих пластические деформации. Изд-во АН СССР, Труды конференции по пластическим деформациям, 1938.

А. Р. Ржаницыным показано, что в формулу (18.71) разрушающей силы для полигональной — шарнирно-опертой плиты приходится вносить поправки (если какая-либо вершина контура имеет угол меньше 90°) вследствие возможности появ-



Фиг. 18.24. Образование «краевых» шарниров текучести в эллиптической пластинке, вытянутой в плане



Фиг. 18.25. Образование краевых шарниров в круглой пластинке при наличии большего эксцентриситета в приложении сосредоточенной силы

5. Качанов Л. М. Механика пластических сред. Гостехиздат, 1948.
6. Михлин С. Г. Теория пластичности. Изд-во АН СССР, 1934.
7. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материала. Стройвоенмориздат, 1949.
8. Смирнов-Аляев Г. А. Теория автоскрепления цилиндров. Оборонгиз, 1940.

В книге собран богатый материал и многочисленные исследования автора по вопросам осесимметричных пластических деформаций цилиндров.

9. Уманский А. А. и др. Курс сопротивления материалов, ч. II, ВВИА, 1953.

Краткие выводы по главе — см. гл. 19, стр. 486.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

§ 19.01. Общее замечание по главе

В теории пластичности, несмотря на относительную молодость этой ветви механики, решено много задач и, естественно, что разбор их всех невозможен, а для учебника и не нужен. Достаточно по некоторым характерным задачам сообщить лишь окончательные результаты, указав попутно идею их построения. Эти цели и преследует настоящая глава.

Здесь рассказано об одной контактной задаче в теории пластичности, об успешной попытке применения теории пластичности к одной из важных задач строительной техники — к механике грунтов, об одной элементарной квазистатической задаче, некоторые простейшие технологические задачи и элементарные задачи упругопластических деформаций в сильно и неравномерно прогретаемых стержнях.

§ 19.02. Давление пластической среды на жесткий штамп

При вдавливании жесткого штампа вначале происходит местное смятие среды в упругом ее состоянии.

Сопротивление среды вдавливанию на этом этапе может быть подсчитано с помощью формул, приведенных в §§ 12.04 — 12.05. При дальнейшем вдавливании вблизи контактной поверхности возникает пластическая зона. Подобного рода задачи решались Прандтлем, Соколовским и другими; ниже указаны результаты исследований В. В. Соколовского.

Пластические смещения предполагаются достаточно малыми, задача рассматривается плоской, исходными уравнениями являются (17.02—17.03), штамп считается абсолютно твердым, так что форма линии контакта штампа и среды известна. Задается уравнение кривой, ограничивающей штамп (фиг. 19.01):

$$x = x(\theta) - \delta; \quad y = \bar{y}(\theta), \quad (a)$$

а также уравнение кривой, ограничивающей свободную поверхность пластической среды:

$$x = \bar{x}(\bar{\theta}), \quad y = \bar{y}(\bar{\theta}), \quad (б)$$

причем кривые (а) и (б) симметричны относительно оси x .

Здесь через θ и $\bar{\theta}$ обозначены углы между нормальными соответственно к кривым (а) и (б) и осью x ; через δ — глубина вдавливания штампа; θ и θ_1 показывают значения θ в точках M , M_1 ; $\bar{\theta}_0$ — значение $\bar{\theta}$ в точке M_2 ; ρ и $\bar{\rho}$ — радиусы кривизны кривых (а) и (б). Кривая (а) — выпуклая, кривая (б) может иметь точки перегиба. В точке M_1 кривая (а) может иметь перелом.

Задача решается для трех разных условий вдоль линии контакта:

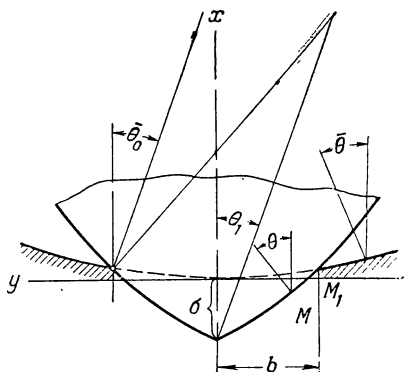
$$\begin{aligned} \tau_{nt} &= 0 \quad (\text{гладкий штамп}); \\ \tau_{nt} &= \text{const} \quad (\text{постоянное трение}) \end{aligned}$$

и

$$\tau_{nt} = \sigma_n \operatorname{tg} \mu.$$

Граница пластической среды рассматривается прямолинейной и криволинейной. Для прямолинейной границы пластической среды и для гладкого штампа ($\tau_{nt} = 0$) В. В. Соколовским получено следующее выражение для равнодействующей давления штампа, взятой на единицу длины вдоль оси z :

$$\begin{aligned} P = & 2 [\gamma x(\theta_0) + \tau_T (\pi + 2)] \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho \cos \theta d\theta - \\ & - 2\gamma \int_{\theta_0}^{\theta_1} x(\theta) \rho \cos \theta d\theta + 4\tau_T \int_{\theta_0}^{\theta_1} \theta \rho \cos \theta d\theta. \end{aligned} \quad (19.01)$$



Фиг. 19.01. Давление пластической среды на жесткий штамп

Если штамп круглый, то

$$x = -R(\cos \theta - \cos \theta_0); \quad y = -R \sin \theta_1;$$

$$x(\theta) = R(1 - \cos \theta); \quad \delta = R(1 - \cos \theta_0); \quad b = -R \sin \theta_0,$$

и вместо (19.01) имеем:

$$p = -\gamma R^2 \left(\theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right) + 4\tau_T R(1 - \theta_0 \sin \theta_0 - \cos \theta_0) + \\ + 2\tau_T R(\pi + 2) \sin \theta_0, \quad (19.02)$$

где γ — удельный вес среды (влияние членов, содержащих γ , незначительно).

Если пренебречь членами с γ , то формула запишется так:

$$p = 4\tau_T R \left[1 - \theta_0 \sin \theta_0 - \cos \theta_0 + \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \sin \theta_0 \right]. \quad (19.03)$$

В целях ориентировочного представления о величинах, определяемых по (19.03), приводим некоторые численные результаты; задаваясь величинами $\frac{b}{R}$, имеем для $\frac{p}{\tau_T R}$:

$$\frac{b}{R} = 0,01, \quad \frac{p}{\tau_T R} = 0,102; \quad \frac{b}{R} = 0,2; \quad \frac{p}{\tau_T R} = 1,976;$$

$$\frac{b}{R} = 0,1 \quad \frac{p}{\tau_T R} = 1,008; \quad \frac{b}{R} = 0,3, \quad \frac{p}{\tau_T R} = 2,904;$$

$$\frac{b}{R} = 0,4, \quad \frac{p}{\tau_T R} = 3,789.$$

Для углового штампа В. В. Соколовским [3] получено выражение

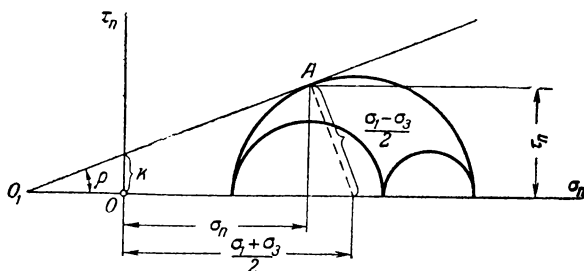
$$p = 2\tau_T b (\pi + 2 - 2\bar{\theta}_0). \quad (19.04)$$

Для прочих условий контакта (негладкий штамп, криволинейная граница пластической среды) выражения для давлений, приведенные в указанной работе, естественно, становятся значительно более сложными.

§ 19.03. Приложение теории пластичности к статике сыпучей среды. Задачи В. В. Соколовского

Сыпучей средой принято, как известно, считать среду, состоящую из весьма мелких твердых однородных частиц, между которыми имеет место трение (внутреннее трение) и некоторое небольшое сцепление.

Величина внутреннего трения сыпучей среды измеряется углом внутреннего трения ρ , а величина сцепления — коэффициентом сцепления k , отнесенным к единице площади. В слу-



Фиг. 19.03 Изображение на круге напряжений предельного равновесия сыпучей среды

Таким образом, (19.06) записывается так:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \rho = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \operatorname{tg} \rho - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2 \cos \rho} \sin^2 \rho + k,$$

или окончательно:

$$\left[\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \frac{1}{\cos \rho} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \operatorname{tg} \rho = k \right]. \quad (19.07)$$

Для плоского напряженного состояния условие (19.07) может быть несложно записано через компоненты напряжений, так как

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2},$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

В результате условие (19.07) приводится к следующему:

$$\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y + 2k \operatorname{ctg} \rho)^2 \sin^2 \rho \right]. \quad (19.08)$$

Для среды с идеальным сцеплением, т. е. при отсутствии внутреннего трения ($\rho = 0$), условие (19.08) имеет простой вид:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2,$$

что совпадает с условием пластичности по (17.03).

Если к условию (19.08) добавить два известных дифференциальных уравнения равновесия, то получим все основные уравнения так называемой *статики сыпучей среды*, т. е. той ветви механики, которая позволяет решить широкий круг вопросов, связанных с предельным равновесием земляных

масс (давление земли на подпорные стенки, распределение напряжений внутри земляного массива при заданных нагрузках на поверхности, давление сыпучей массы на стенки бункеров и т. п.), а равно и тех масс, которые по своим физическим свойствам, и именно в момент предельного равновесия, близко соответствуют сыпучим средам.

Итак, основными уравнениями механики сыпучей среды, когда эта среда пребывает в предельном равновесии, являются следующие:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= \gamma,\end{aligned}\quad (19.09)$$

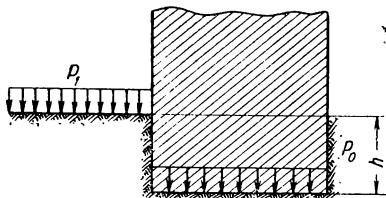
$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y + 2k \operatorname{ctg} \rho)^2 \sin \rho,$$

где γ , ρ , k — объемный вес, угол трения и удельное сцепление сыпучей массы (ось y направлена по отвесу вверх).

Исходя из системы уравнений (19.09), В. В. Соколовский решает широкий круг упомянутых выше вопросов в своей монографии «Статика сыпучей среды» (Изд-во Академии наук СССР, 1942), удостоенной Государственной премии СССР.

Приведем результаты некоторых задач, представляющих интерес для строителя.

Для минимальной величины заглубления h (фиг. 19.04), при которой сыпучая среда сохраняет предельное равновесие (не выпирается), если известно значение нормального напряжения вдоль основания $p_0 = p(x)$, имеем выражение:

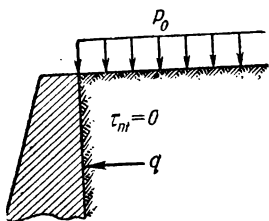


Фиг. 19.04 К задаче о необходимом заглублении фундамента против его выпирания

$$h = -\frac{p_1}{\gamma} + \frac{p_0}{\gamma} \frac{1 - \sin \rho}{1 + \sin \rho} e^{\pi \operatorname{tg} \rho} - \frac{k}{\gamma} \operatorname{ctg} \rho \left(1 - \frac{1 - \sin \rho}{1 + \sin \rho} e^{\pi \operatorname{tg} \rho} \right), \quad (19.10)$$

что, между прочим, сильно расходится [в сторону преуменьшения для (19.10)] с известной в инженерной практике формулой Паукера:

$$h = \frac{p_0}{\gamma} \left(\frac{1 - \sin \rho}{1 + \sin \rho} \right)^2, \quad (19.11)$$



Фиг. 19.05 К задаче о давлении земли на ограждающие стенки

которая по данным опыта обычно дает завышенные значения для глубины заложения фундаментов.

Для вертикальной гладкой подпорной стенки (фиг. 19.05) при наличии на поверхности временной нагрузки интенсивностью p_0 имеем следующие поверхностные условия: при $x=0$ и при любом y имеем $\tau_m=0$ (давление земли нормально к стенке), а при $y=0$ для любого x имеем $\sigma_y = -p_y$.

Используя их при интегрировании (19.11) приводит к известной формуле для давления земли:

$$q = (-\gamma y + p_0) \frac{1 - \sin \rho}{1 + \sin \rho} - \frac{2k \cos \rho}{1 + \sin \rho}. \quad (19.12)$$

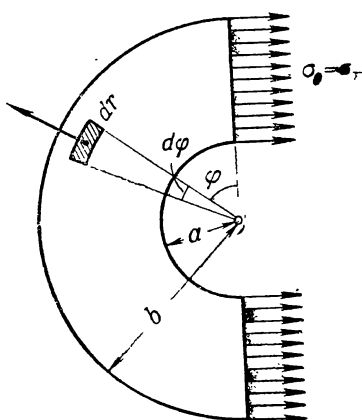
§ 19.04. Осесимметричные пластические деформации равномерного вращающегося диска

Если диск имеет небольшую толщину и равномерно вращается относительно центральной оси, нормальной к плоскости диска, с угловой скоростью ω , то условие пластичности по теории наибольших касательных напряжений может быть записано исключительно просто в виде

$$\sigma_\theta = \sigma_r. \quad (a)$$

Эта возможность вытекает из того факта, что при быстром, но равномерном вращении диска радиальные напряжения σ_r — растягивающие, а осевые σ_z ввиду малой толщины диска практически отсутствуют.

В связи с указанным определение угловой скорости вращения диска, при которой весь материал диска переходит в пластическое состояние, выполнится непосредственно из условия равновесия по диаметальному сечению между внутренними силами по такому сечению и центробежными силами инерции мысленно отсе-



Фиг. 19.06 Распределение тангенциальных нормальных напряжений во вращающемся диске при пластическом состоянии материала диска

каемой половины диска. При обозначениях фиг. 19.06 имеем:

$$2\sigma_T(b-a) = 2 \int_a^b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) (r d\varphi dr) \sin \varphi,$$

откуда для критической скорости имеем выражение:

$$\omega = \sqrt{\frac{3\sigma_T(b-a)g}{\gamma(b^3-a^3)}}, \quad (19.13)$$

где γ — удельный вес материала диска.

Для случая вращающегося кольца, когда его толщина

$$\delta = b - a$$

очень мала по сравнению с размером b (или a), выражение (19.13) упрощенно записывается так:

$$\omega_0 = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\sigma_T g}{\gamma}}, \quad (19.14)$$

и наоборот, для сплошного диска, когда $a=0$, имеем:

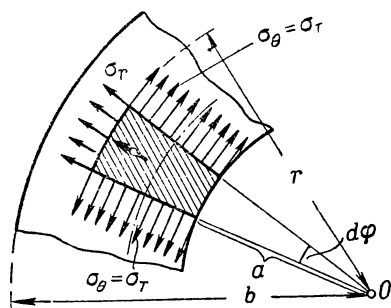
$$\omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{b} \sqrt{\frac{\sigma_T g}{\gamma}} = \sqrt{3} \omega_0. \quad (19.15)$$

Если исходить из теории постоянства интенсивности напряжения, то для той же задачи, как показал В. В. Соколовский (см. [2] на стр 429), выражение для критической скорости мало отличается от (19.15) и имеет вид

$$\omega_1 \approx 1,79 \omega_0.$$

Для вычисления радиальных напряжений σ_r составим уравнение равновесия части сектора диска, показанного на фиг. 19.07:

$$2\sigma_\theta \sin \frac{d\varphi}{2} = \int_a^r \left(\frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) r d\varphi dr + \sigma_r r d\varphi,$$



где после замены $\sin \frac{d\varphi}{2}$ на $\frac{d\varphi}{2}$ и использования (19.13) имеем:

Фиг. 19.07 Определение радиальных напряжений в быстро вращающемся диске

$$\sigma_r = \sigma_T \frac{r-a}{r} \left[1 - \frac{b-a}{r-a} \frac{r^3-a^3}{b^3-a^3} \right], \quad (6)$$

что при любом r в пределах $b > r > a$ определяет положительное (растягивающее) значение, чем и оправдывается принятая выше запись условия пластичности в форме $\sigma_0 = \sigma_T$, а не в форме $\sigma_0 - \sigma_r = \sigma_T$.

В случае вращающейся трубы, одновременно испытывающей продольное растяжение (σ_z не равно нулю), может оказаться более неблагоприятным, а значит, и действительным, условие пластичности в виде

$$\sigma_0 - \sigma_r = \sigma_T. \quad (8)$$

В таком случае задача несколько усложняется, но в общем остается простой. К уравнению (8) присоединяем уравнение равновесия бесконечно малого элемента (с учетом массовой силы)

$$\sigma_0 - \sigma_r = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2. \quad (2)$$

Подставляя (8) в (2) и интегрируя, имеем:

$$\sigma_r = \sigma_T \ln r - \frac{\gamma}{g} \omega^2 \frac{r^2}{2} + C.$$

Используя граничные условия (при $r=a$ и $r=b$, $\sigma_r=0$), находим:

$$C = \frac{\gamma}{g} \omega^2 \frac{a^2}{2} - \sigma_T \ln a,$$

после чего критическая скорость

$$\omega = \sqrt{\frac{2g\sigma_T \ln \frac{b}{a}}{\gamma(b^2 - a^2)}}.$$

При b , стремящемся к a , по раскрытии неопределенности получаем, как и выше:

$$\omega_0 = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\sigma_T g}{\gamma}}.$$

В. В. Соколовским рассмотрена также задача о напряженном состоянии диска при степенном условии пластичности с учетом упрочнения. В литературе имеются решения, полученные А. С. Григорьевым для быстро вращающегося диска, неоднородного в области пластических деформаций (например, случай, когда по причине специальных поверхностных обработок деталей, — закалка, наклеп, цементация и т. п.) — предел текучести материала диска может изменяться, возрастая по мере удаления от оси вращения или от срединной поверхности.

§ 19.05. Примеры решения задач полуобратным методом

Ниже приводится решение некоторых задач, когда по известному закону распределения отдельных компонентов напряжений внутри пластически деформируемого тела выявляются остальные компоненты напряжений, а также внешние поверхностные условия задачи. Материал во всех задачах настоящего параграфа подразумевается идеально пластическим, деформация плоская.

1. Одним из решений уравнения (17.05) является $\tau = f(y)$, т. е. касательные напряжения в плоскостях, параллельных осям x и y , зависят только от координаты y . Тогда из (17.05) вытекает:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} = 0,$$

откуда

$$\tau = C_1 - C_2 y.$$

Далее из уравнений равновесия имеем:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = - \frac{\partial \tau}{\partial y} = C_2,$$

и потому

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_2 x + f_1(y); \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= - \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

а следовательно,

$$\sigma_y = f_2(x).$$

Обе произвольные функции следует определить таким образом, чтобы условие пластичности удовлетворялось тождественно:

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y &= \pm 2 \sqrt{k^2 - \tau^2}; \\ C_2 x + f_1(y) - f_2(x) &= \pm 2 \sqrt{k^2 - (C_1 - C_2 y)^2}. \end{aligned}$$

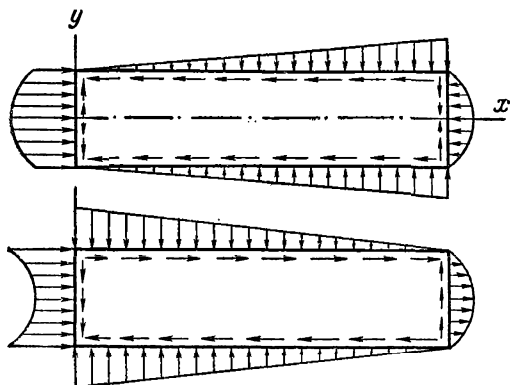
Из последней записи заключаем:

$$\begin{aligned} f_1(y) &= \pm 2 \sqrt{k^2 - (C_1 - C_2 y)^2} + C_3, \\ f_2(x) &= C_2 x + C_3. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_3 + C_2 x \pm 2 \sqrt{k^2 - (C_1 - C_2 y)^2}, \\ \sigma_y &= C_3 + C_2 x, \\ \tau &= C_1 - C_2 y. \end{aligned} \quad (19.16)$$

Варьируя значениями постоянных C_1 , C_2 и C_3 , зависящих от характера поверхностных условий, получим случаи внешнего воздействия на пластическую массу, сжатую между двумя шероховатыми параллельными плитами (изображено на фиг. 19.08).



Фиг. 19.08 Схема усилий, действующих на пластическую массу, сжатую между двумя шероховатыми параллельными плитами согласно (19.16)

2. Предполагаем, что в круговом секторе касательное напряжение не зависит от θ . В таком случае дифференциальное уравнение (17.08) запишется так:

$$r \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \tau}{\partial r} = 0.$$

Интегрируя, получаем:

$$\tau = \frac{C_1}{r^2} + C_2.$$

Из второго уравнения (9.23) имеем:

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = -\tau - \frac{\partial}{\partial r} (\tau r) =$$

$$= -\left[\frac{C_1}{r^2} + C_2 \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{C_1 r}{r} + C_2 r \right] = -2C_2.$$

Интегрируя, получаем:

$$\sigma_\theta = -2C_2\theta + C_3 + f(r),$$

где $f(r)$ — функция r (способ определения ее аналогичен выполненному в следующем примере). Из условия пластичности

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 = 4(k^2 - \tau^2)$$

имеем:

$$\sigma_r = \sigma_\theta \pm 2\sqrt{k^2 - \tau^2}. \quad (a)$$

3. Предполагаем, что в круговом секторе касательное напряжение не зависит от r . В таком случае уравнение (17.08) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta} = \mp 2\sqrt{k^2 - \tau^2} + C; \quad (19.17)$$

при $C=0$ интегрирование дает:

$$\tau = \pm k \sin(C_1 + 2\theta).$$

Из уравнений равновесия имеем:

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = -\tau - \frac{\partial}{\partial r}(r\tau) = -2\tau = \pm 2k \sin(C_1 + 2\theta),$$

откуда

$$\sigma_\theta = \mp k \cos(C_1 + 2\theta) + f(r),$$

где $f(r)$ — произвольная функция r ; далее,

$$\sigma_r = \sigma_\theta \mp 2\sqrt{k^2 - \tau^2} = \mp 3k \cos(C_1 + 2\theta) + f(r)$$

или

$$\sigma_r = 3\sigma_\theta - 2f(r);$$

при $f(r) = 0$ имеем:

$$\sigma_r = 3\sigma_\theta.$$

Неизвестную функцию $f(r)$ определим, используя первое уравнение равновесия (9.23). Так как

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta} = \pm 2k \cos(C_1 - 2\theta), \quad \sigma_r - \sigma_\theta = \mp 2\sqrt{k^2 - \tau^2},$$

то первое уравнение (9.23) запишется следующим образом:

$$\mp 2\sqrt{k^2 - \tau^2} + r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial \theta} = 0, \quad (б)$$

но из (а) следует, что

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r} = f'(r),$$

а потому (б) переписывается так:

$$\mp 4\sqrt{k^2 - \tau^2} + rf'(r) = 0,$$

откуда, принимая во внимание, что τ есть функция только угла θ , находим:

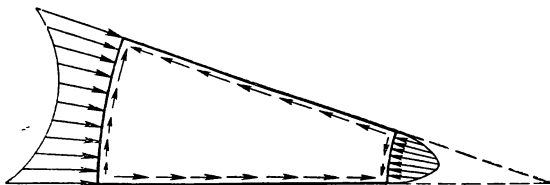
$$f'(r) = \pm \frac{4}{r} \sqrt{k^2 - \tau^2}.$$

Интегрируя, имеем:

$$f(r) = \pm 4\sqrt{k^2 - \tau^2} \ln r + C.$$

Итак, окончательно имеем следующую систему напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \mp k \cos(C_1 + 2\theta) \pm 4\sqrt{k^2 - \tau^2} \ln r + C, \\ \sigma_r &= \mp 3k \cos(C_1 + 2\theta) \pm 4\sqrt{k^2 - \tau^2} \ln r + C_1, \\ \tau_{r\theta} &= \mp k \sin(C_1 + 2\theta). \end{aligned} \right\} \quad (19.18)$$



Фиг. 19.09. Схема усилий, действующих на пластическую массу, сжатую между двумя шероховатыми жесткими плитами согласно 19.18

На фиг. 19.09 показаны внешние силы, вычисленные по (19.18); они соответствуют случаю пластической массы, сжатой между двумя наклонными жесткими плитами.

§ 19.06. Термоупругопластические деформации простых балок

Представим себе обычную балку с прямой осью постоянного поперечного сечения, имеющего хотя бы одну ось симметрии (предположим, вертикальную), которая в плоскости, проходящей через указанную ось симметрии, подвергается изгибу. Пусть деформация балки происходит за пределом упругости в условиях высокого температурного поля, неравномерного по длине балки и по высоте сечения. Параметры температурного поля таковы, что все упругие и пластические характеристики материала балки оказываются по длине балки и по высоте сечения различными (случай неоднородной пластичности).

Обозначим ось балки через x , ось симметрии сечения, лежащей в плоскости симметрии балки (каковая является и плоскостью изгиба) через y , (стало быть нейтральный слой тогда обозначим через z). Уравнения равновесия между внутренними силами какого-либо поперечного сечения и внешними силами, расположенными по одну сторону этого сечения запишется в обычном виде, а именно:

$$\int_F \sigma_x dF = N_x. \quad (19.19)$$

$$\int_F \sigma_x \cdot y \cdot dF = M_z, \quad (19.20)$$

где N_x — продольная сила и M_z — изгибающий момент для рассматриваемого сечения.

Принимая гипотезу плоских сечений, практически справедливо и за пределом упругости и при наличии высокого тем-

пературного поля, т. е. назначая закон для относительных удлинений продольных волокон в виде

$$\epsilon_x = A + By \quad (19.21)$$

и полагая, что каждый продольный слой балки имеет определенную температуру, т. е. считая заданным

$$T = T(x, y),$$

закон связи напряжений с деформацией запишется:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E^*} + \alpha T$$

или

$$\sigma_x = E^*(\epsilon_x - \alpha T). \quad (19.22)$$

В последней записи секущий модуль E^* для каждого слоя балки зависит от степени деформации и от температуры этого слоя, т. е.

$$E^* = E(\epsilon, T),$$

или в виде

$$E^* = E_T[1 - \omega(\epsilon_x)], \quad (19.23)$$

где модуль упругости $E_T = E(x, y)$ для каждой точки тела балки известен, так как известна температура прогрева этого слоя.

Характерный вид обычных диаграмм растяжения, в частности для стали 08 КП, показан на фиг. 19.10.

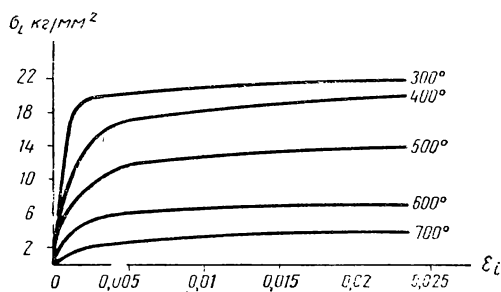
Подстановка (19.23) и (19.21) в (19.22) и далее в (19.19) и (19.20) приводит к следующим окончательным выражениям:

$$A = \frac{N_x}{EF^{(np)}} + \alpha \frac{S_T^{(np)}}{F^{(np)}}; \quad (19.24)$$

$$B = \frac{M_z}{EI_z^{(np)}} + \alpha \frac{I_z^{(np)}}{I_z^{(np)}}; \quad (19.25)$$

и

$$\sigma_x = E_T[1 - \omega(\epsilon_x)] \{ [A + By] - \alpha T \}. \quad (19.26)$$



Фиг. 19.10 Диаграмма растяжения для стали 08КП при разных температурах

В формулах (19.24), (19.25) и (19.26) для краткости письма введены следующие обозначения *приведенных термоупруго-пластических геометрических характеристик сечения*:

$$\left. \begin{aligned} F^{(np)} &= \int_F \frac{E_T}{E} [1 - \omega(\varepsilon_x)] dF, \\ S_z^{(np)} &= \int_F \frac{E_T}{E} [1 - \omega(\varepsilon_x)] y dF, \\ J_z^{(np)} &= \int_F \frac{E_T}{E} [1 - \omega(\varepsilon_x)] y^2 dF, \\ S_T^{(np)} &= \int_F \frac{E_T}{E} [1 - \omega(\varepsilon_x)] T \cdot dF, \\ J_{zT}^{(np)} &= \int_F \frac{E_T}{E} [1 - \omega(\varepsilon_x)] T \cdot y \cdot dF. \end{aligned} \right\} \quad (19.27)$$

При выводе формул (19.24), (19.25) положение начала координат в поперечном сечении (а при несимметричном сечении и направление осей y и z) было выбрано из условия, что

$$S_z^{(np)} = S_y^{(np)} = J_{yz}^{(np)} = 0, \quad (19.28)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_y^{(np)} &= \int_F \frac{E_T}{E} [1 - \omega(\varepsilon_x)] z dF, \\ \text{аналогично записывается и } S_z^{(np)}; \\ J_{yz}^{(np)} &= \int_F \frac{E_T}{E} [1 - \omega(\varepsilon_x)] y \cdot z \cdot dF. \end{aligned} \right\} \quad (19.29)$$

Непосредственное использование (19.25), (19.26) и (19.27) для вычисления напряжений невозможно, так как входящие в формулы термоупругопластические характеристики сечения и функция $\omega(\varepsilon_x)$ сами зависят не только от заданной температуры рассматриваемой точки сечения, но также и от величины разыскиваемых напряжений (или деформации) той же точки.

Задачу следует решать методом последовательных приближений и, в частности, в качестве нулевого приближения вначале положить $\omega(\epsilon_x) = 0$, т. е. процесс деформации якобы упругий. Это позволит в нулевом приближении найти $\sigma_x^{(0)}$, по ним $\epsilon_x^{(1)}$, а с помощью последних подсчитать в первом приближении термоупругопластические характеристики сечения и далее при новых характеристиках повторить все сначала и т. д.

Указанный метод, назовем его *метод термоупругих решений*, как правило, позволяет закончить процесс последовательных приближений на 3—4-ом туре.

§ 19.07. Несущая способность поперечного сечения балки при наличии сильных градиентов температур

Вопрос о несущей способности сильно прогреваемых и нагруженных балок решается просто. Для этой цели необходимо располагать для конкретного материала балки серией диаграмм растяжения—сжатия, построенных при разных температурах (фиг. 19.10), или таблицей значений пределов текучести материала (σ_{ST}) для различных температурных условий.

Будем считать, что нам задан указанный закон, т. е. известна зависимость

$$\sigma_{ST} = f(T). \quad (19.30)$$

В таком случае уравнения предельного состояния поперечного сечения балки при плоском поперечном изгибе запишутся в виде:

$$\int_F \sigma_{ST} dF = N; \quad (19.31)$$

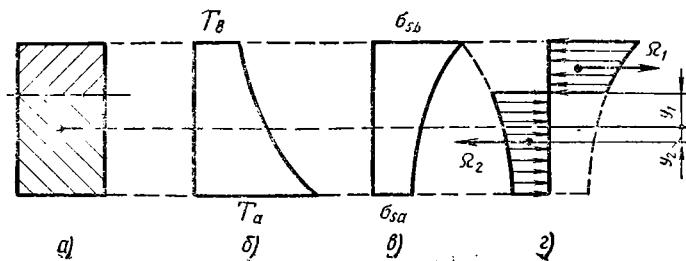
$$\int_F \sigma_{ST} y dF = M. \quad (19.32)$$

Для прямоугольного поперечного сечения указанные интегралы просто разрешаются при помощи эпюры распределения пределов текучести по высоте поперечного сечения (фиг. 19.11), а именно, взамен выражения (19.31) и (19.32) имеем:

$$(\Omega_1 - \Omega_2) b = N, \quad (19.33)$$

$$(\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2) b = M, \quad (19.34)$$

где Ω_1 и Ω_2 (фиг. 19.10 з) — отдельные части эпюры, показанной на фиг. 19.11 и построенной путем отложения на каждом горизонте сечения текущего предела текучести материала,



Фиг. 19.11. Эпюра распределения пределов текучести по высоте поперечного сечения

отвечающего температуре прогрева этого горизонта; b — ширина сечения; y_1 и y_2 — плечи центров тяжести площадок Ω_1 и Ω_2 до геометрического центра тяжести поперечного сечения.

При отсутствии продольной силы, очевидно,

$$\Omega_1 = \Omega_2.$$

Таким образом, для нахождения нейтрального слоя надлежит (проще это сделать графическим построением) площадь Ω разделить именно на две равных части.

Граница такого раздела и будет нейтральной осью в предельном состоянии, и в этом случае предельный момент запишется:

$$M_{\text{пр}} = b \Omega_1 y_{\text{ц.ц}}, \quad (19.35)$$

где $y_{\text{ц.ц}}$ — расстояние между центрами тяжести указанных, и равных по площадям, частей общей площади Ω .

§ 19.08. Заключительные замечания к главам 18 и 19

В двух последних главах были относительно подробно разобраны простейшие, а также преимущественно без вывода сообщены основные результаты некоторых характерных задач теории пластичности.

Однако и всеми затронутыми в этих главах задачами далеко не исчерпывается ассортимент типов задач, решаемых в настоящее время с привлечением аппарата теории пластичности. Так, совершенно не были затронуты задачи динамической теории пластичности (пластические деформации при высоких скоростях деформирования, распространение пластических волн нагрузки и разгрузки и т. п.). В случае встретившейся надобности рекомендуем читателю обратиться к

сочинениям по этим вопросам Х. А. Рахматулина по исследованию в области динамической теории пластичности, а также к работам Г. С. Шапиро, В. С. Ленского, А. А. Ильюшина, А. Ю. Ишлинского.

Не были затронуты в прямом смысле технологические задачи (ковка, штамповка, прошивка, вытяжка и т. п.), о которых читатель может найти в ведущих работах Г. А. Смирнова-Аляева, Е. П. Унскова, К. Н. Шевченко, А. Д. Томленова и др.

Не были затронуты вопросы динамического эффекта действия температуры в различных задачах техники, которым посвящено большое число работ отечественных и зарубежных ученых, в том числе А. А. Ильюшина, П. М. Огибалова, В. Н. Даниловской, А. П. Синицына (СССР), В. Новацкого (Польша) и др., к которым и отсылаем читателя, заинтересовавшегося этой проблемой.

Лишь вскользь были затронуты термопластические задачи, но и этот круг задач (случай высоких температур) осложняется также тем, что при относительно большом во времени выдерживании изделия под нагрузкой начинают появляться явления ползучести деформации и вообще происходит изменение во времени напряженно-деформированного состояния (при неизменных во времени нагрузках или насильственно приданных деформациях). Ответом на такие задачи теории пластичности будут служить решения, доставляемые теорией ползучести, основные положения которой рассматриваются в следующих главах учебника.

Литература к главе 19

1. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Изд-во АН СССР, 1942. Труд удостоен Государственной премии СССР. Первое сочинение, в котором дана успешная попытка приложения теории пластичности к задачам механики грунтов, расчету подпорных стен, гидротехнических сооружений.
2. Томленов А. И. Теория пластических деформаций металлов, Машгиз, 1951.
3. Унсков Е. П. Пластические деформации при ковке и штамповке. Машгиз, 1939.
4. Шевченко К. Н. Пластическое напряженное состояние и течение металлов при холодной прокатке и волочении. Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 1946. Прокатка в приводных валках. Изв. АН СССР, ОТН, № 4, 1946.

5. Дж. Н. Гудьер, Ф. Г. Ходж. Упругость и пластичность. Перевод с английского. Изд-во Иностранной лит-ры, Москва, 1960 г. (Английский оригинал относится к 1958 г.).
В книге дан объективный обзор новейших результатов по теории упругости и теории пластичности. Большое внимание уделено изложению результатов, полученных советскими учеными.
 6. В. Ольшак. Об основах теории неоднородных упругопластических тел, ч. I, ч. II. Опубликовано в трудах АН Польской Народной Республики, т. 3, № 2, № 3, 1955.
-

«Чтобы действительно знать предмет, надо охватить, изучить все его стороны, все связи и «опосредствования». Мы никогда не достигнем этого полностью, а требование всесторонности предостерегает нас от ошибок и от омертвления.»

(Ленин В. И., соч., 4 изд., т. 32, стр. 72)

РАЗДЕЛ VI

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 20.01. Предварительные замечания

Теория ползучести, как уже известно читателю из главы 1 (§§ 1.01, 1.03), а также из главы VI, — продолжением которой является настоящая глава, — представляет собою самую молодую ветвь механики деформируемых сплошных сред. Эта ветвь рассматривает *неравновесный процесс деформации*, т. е. случай, когда, в частности, при неизменных во времени нагрузках (по величине и по расположению их на конструкции) и при неизменных внешних условиях (температура, влажность), перемещения отдельных точек исследуемого тела будут во времени непрерывно изменяться. Эти изменения могут быть ощутимы или по прошествии лишь многих лет (*длительная ползучесть*) или вследствие особых внешних причин (высокое температурное поле) они оказываются уже заметными (и недопустимыми для нормальной эксплуатации конструкции) на весьма малом отрезке времени (*кратковременная ползучесть*).

Современное состояние теории ползучести характеризуется большим количеством различных теорий, точнее — гипотез ползучести, которые друг по отношению к другу далеко не являются согласными, а в приложении их к отдельным задачам оказываются даже противоречивыми. Экспериментальные исследования, которые в области теорий ползучести проводились и интенсивно ведутся во многих странах, оказываются все еще далеко недостаточными, чтобы построить единую теорию ползучести, свободную от тех явных противоречий (несоответствий), которые имеют некоторые современные

гипотезы. Такое положение естественно затрудняет изучение вопроса, но практическая важность проблемы не дает основания отложить теоретические исследования до окончательного накопления обширных экспериментальных исследований достаточных для построения единой теории ползучести.

Исходя из этих соображений, в настоящей главе преимущественно рассмотрена теория, в основе которой лежит представление об упруго-вязком или пластически-вязком теле. Теории, построенные на таких представлениях, оказываются наиболее стройными (но не всегда наиболее строгими в части количественного согласия с опытом) и в качественном отношении рисуют правильную картину развития деформаций во времени.

В заключении главы даны краткие замечания о некоторых других теориях ползучести, носящих полуэмпирический характер, не отличающиеся стройностью первых, но в отдельных задачах, рассмотренных в следующей главе, дающие хорошее совпадение с опытом.

§ 20.02. Простейшие одномерные задачи теории линейного упруго-вязкого тела

Рассмотрим несколько элементарных задач со стержнем, подверженным одноосному растяжению, полагая материал этого стержня линейно-упруго-вязким. Исходным физическим законом для этого материала следует принять (6.18), т. е.

$$\sigma + n\dot{\sigma} = E\varepsilon + Bn \cdot \dot{\varepsilon}. \quad (20.01)$$

В записи (20.01) модуль упругости E удобно называть *длительным модулем упругости*, а модуль B — *мгновенным модулем упругости*.

а) Пусть на стержень действует постоянная растягивающая сила, вызывающая напряжение $\sigma_0 = \text{const}$; так как указанная нагрузка во времени не изменяется, то, следовательно, $\dot{\sigma} = 0$ и условие (20.01) для рассматриваемой задачи записывается

$$\sigma_0 = E\varepsilon + Bn \cdot \dot{\varepsilon}. \quad (20.02)$$

Решением (20.02) оказывается

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E} + Ce^{-\frac{Et}{Bn}}. \quad (20.03)$$

Если за начальное состояние ($t=0$) принять такое, которому соответствует мгновенный модуль упругости, т. е.

$$(\epsilon)_{t=0} = \epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{B}$$

тогда

$$C = \sigma_0 \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{E} \right),$$

и

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} + \sigma_0 \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{E} \right) e^{-\frac{Et}{Bn}}. \quad (20.04)$$

Так как мгновенный модуль B всегда больше E , то, следовательно, при постоянном напряжении деформация с течением времени возрастает от

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{B} \quad (a)$$

до

$$\epsilon_{\infty} = \frac{\sigma_0}{E}. \quad (б)$$

Из конституции выражений (а) и (б), сходных с обычным законом Гука, и вытекает целесообразность указанной выше терминологии, а именно: B — мгновенный модуль упругости, так как через него вычисляется деформация удлинения вслед (как бы мгновенно) за приложением нагрузки, а E — длительный модуль, так как через него вычисляется деформация при длительном действии нагрузки. Само собою очевидно, что модуль E , участвующий в (б) и в (20.01) не есть численно тот модуль Юнга, с которого начиналось изучение курса сопротивления материалов. Роль прежнего модуля Юнга в записи (б) ближе исполняет B , т. е. *мгновенный модуль*.

Если в некоторый момент времени $t=t_2$ произвести разгрузку, то, полагая в (20.03) $\sigma_0=0$, получим изменение удлинений, начиная с этого момента, по закону

$$\epsilon = C e^{-\frac{Et}{Bn}}.$$

Если обозначить удлинение, полученное к моменту времени $t=t_2$, через ϵ_2 , то предыдущее выражение перепишется:

$$\epsilon = \epsilon_2 e^{-\frac{E(t-t_2)}{Bn}}. \quad (20.05)$$

При $t=\infty$ будем иметь $\epsilon=0$; деформация полностью исчезает, т. е. рассмотренное тело является *упруго-ползучим*.

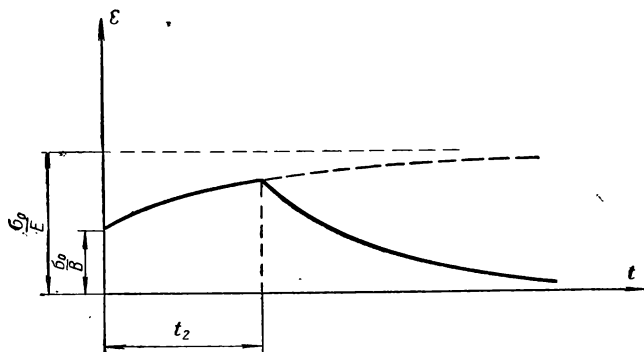
График развития деформации согласно (20.04) и (20.05) показан на фиг. 20.01.

б) Рассмотрим другую задачу, когда стержень получил постоянную деформацию $\epsilon = \epsilon_0 = \text{const}$, которая в дальнейшем не изменяется. Тогда $\dot{\epsilon} = 0$ и согласно (20.01) имеем:

$$\sigma + n\dot{\sigma} = E\epsilon_0,$$

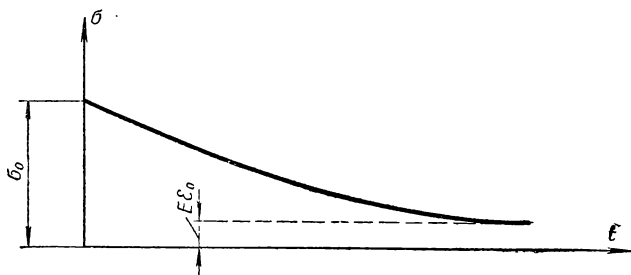
откуда

$$\sigma = E\epsilon_0 + (\sigma_0 - E\epsilon_0)e^{-\frac{t}{n}}. \quad (20.06)$$



Фиг. 20.01 Развитие деформаций во времени для случая постоянной нагрузки, которая в дальнейшем удаляется

График, построенный по (20.06), показан на фиг. (20.02). Таким образом, при постоянной деформации происходит релаксация напряжений с временем релаксации n .



Фиг. 20.02 Изменение напряжений во времени для случая постоянной деформации

Падение напряжений есть, но не до нуля, что соответствует действительности.

в) Пусть стержень испытывается на растяжение при постоянной скорости деформирования, т. е.

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 = \text{const}$$

и, следовательно,

$$\epsilon = \dot{\epsilon}_0 t. \quad (20.07)$$

Подстановка (20.07) в (20.01) приводит к уравнению:

$$\sigma + n\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon}_0 t + Bn\dot{\epsilon}_0,$$

откуда получим

$$\sigma = E\epsilon + (B - E)n\dot{\epsilon}_0(1 - e^{-\frac{\epsilon}{n\dot{\epsilon}_0}}). \quad (20.08)$$

При выводе (20.08) учитывалось, что при $t=0$ $\sigma=0$, а на последнем этапе преобразований сделана замена $t = \frac{\epsilon}{\dot{\epsilon}_0}$ согласно (20.07).

Зависимость между напряжениями и деформациями при заданной скорости $\dot{\epsilon}_0$ показана на фиг. 20.03.

При различных скоростях деформирования кривые на фиг. 20.03 будут иметь различные очертания. При уменьшении скорости $\dot{\epsilon}_0$ кривая фиг. 20.03 будет приближаться к прямой $\sigma = E\epsilon$ и при $\dot{\epsilon}_0 = 0$ обратится в эту прямую. Наоборот, при $\dot{\epsilon}_0 \rightarrow \infty$ получим $\sigma = B\epsilon$, т. е. кривая обращается в прямую.

г) Рассмотрим еще одну задачу — на стержень действует нагрузка с постоянной скоростью изменения, т. е.

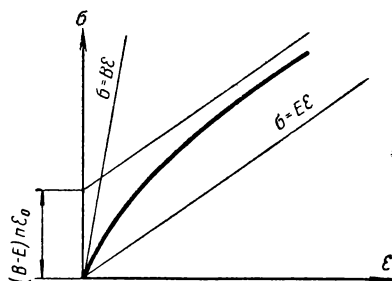
$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_0 = \text{const}$$

и, следовательно,

$$\sigma = \dot{\sigma}_0 t. \quad (20.09)$$

Тогда уравнение (20.01) переписется в виде:

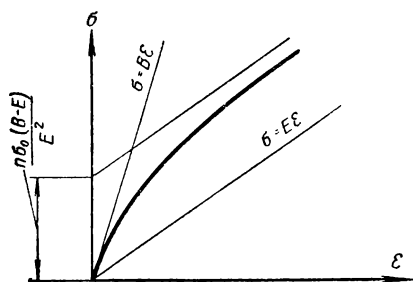
$$\dot{\sigma}_0 t + n\dot{\sigma}_0 = E\epsilon + Bn\dot{\epsilon}. \quad (20.10)$$



Фиг. 20.03 Зависимость между напряжениями и деформациями при заданной постоянной скорости деформирования

Решение (20.10) после преобразования имеет вид:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{n\dot{\sigma}_0}{E} \left(1 - \frac{B}{E}\right) \left(1 - e^{\frac{-E\epsilon}{Bn\dot{\sigma}_0}}\right). \quad (20.11)$$



Фиг. 20.04 Развитие деформаций во времени для случая заданной постоянной скорости напряжения

График, согласно (20.11), показан на фиг. 20.04. Если скорость изменения напряжений увеличивается, то кривая постепенно приближается к прямой

$$\sigma = E\epsilon;$$

при убывании скорости кривая ϵ приближается к прямой

$$\sigma = B\epsilon.$$

Попутно заметим, что кривые на фиг. 20.03, и 20.04, вообще говоря, различны, так что зависимости между напряжениями и удлинениями получаются различными при различных способах испытания (постоянная ли скорость деформации или постоянная скорость возрастания усилия).

§ 20.03. Изгиб упруго-вязкой балки

Представим себе однородный брус, подвергаемый чистому изгибу. Ось бруса обозначим через x , изгибающие моменты по концам бруса через M . Сохраняя в данном случае в силе закон плоских сечений как не связанный с природой материала балки, может записать для волокна, удаленного от нейтрального слоя на расстоянии y , выражение для удлинения

$$\epsilon_x = Ay, \quad (20.12)$$

где A — кривизна оси балки в рассматриваемом сечении.

Соответственно для $\dot{\epsilon}$ будем иметь:

$$\dot{\epsilon} = A\dot{y}. \quad (20.13)$$

Перепишем закон (20.01), подставив в него (20.12—20.13) и умножим каждое слагаемое на y . Имеем

$$\sigma_x y + n\dot{\sigma}_x y = EAy^2 + Bn\dot{A}y^2.$$

Проинтегрируем левую и правую части полученного выражения по всей площади поперечного сечения. Тогда получим:

$$\int_F \sigma_x y dF + n \int_F \dot{\sigma}_x y dF = EA \int_F y^2 dF + Bn\dot{A} \int_F y^2 dF.$$

Так как $\int_F \sigma_x y dF = M$ — момент внутренних сил сечения относительно нейтральной оси, численно равный изгибающему моменту; далее $\int_F y^2 dF = J_z$ — экваториальный момент инерции сечения относительно нейтральной оси; вводя обозначение

$$\int_F \dot{\sigma}_x y dF = \dot{M},$$

т. е. производная от изгибающего момента по времени, перепишем последнее уравнение в виде:

$$M + n\dot{M} = EJ_z A + BnJ_z \dot{A}. \quad (20.14)$$

Считая прогибы балки малыми по сравнению с ее длиной, можем кривизну балки A заменить на вторую производную от прогиба по длине, т. е.

$$A = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w'',$$

и тогда (20.14) перепишется в виде

$$M + n\dot{M} = EJ_z w'' + BnJ_z \dot{w}''. \quad (20.15)$$

Здесь штрихами обозначено дифференцирование по длине балки.

Если изгибающие моменты постоянные и во времени не изменяются, т. е.

$$M = M_0 = \text{const},$$

следовательно

$$\dot{M} = 0.$$

Уравнение (20.15) переписывается

$$M_0 = EJ_z w'' + BnJ_z \dot{w}''. \quad (20.16)$$

Уравнение (20.16) по конституции сходно с (20.02), и потому его решением будет по аналогии с (20.04) следующее выражение:

$$w'' = \frac{M_0}{EJ_z} + \frac{M_0}{J_z} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{E} \right) l^{-\frac{Et}{Bn}}. \quad (20.17)$$

Таким образом, влияние времени скажется лишь на кривизне оси балки.

Напряжение в любой точке поперечного сечения балки остается постоянным и равным

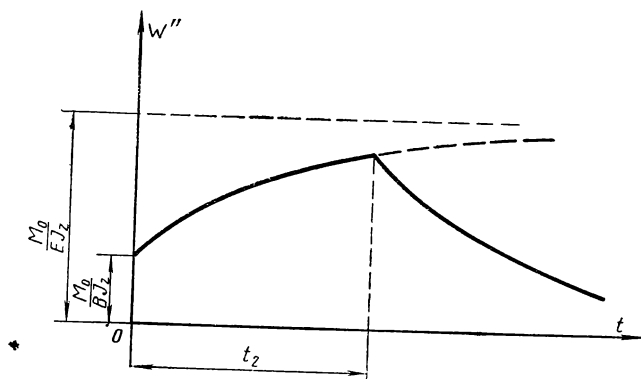
$$\sigma = \frac{M}{J} y,$$

т. е. влияние вязкости сказывается лишь на кривизне балки.

Если в какой-то момент времени t_2 отпустить концевые изгибающие моменты, то изменение кривизны (постепенное выпрямление балки) будет по аналогии с выражением (20.05) записываться:

$$w'' = w''_2 e^{\frac{t-t_2}{Bn}}. \quad (20.18)$$

График изменения во времени кривизны балки представится фиг. 20.05.



Фиг. 20.05 Изменение во времени кривизны балки для случая постоянного изгибающего момента

§ 20.04. Кручение упруго-вязкого стержня

Аналогично предыдущей задаче решается вопрос о чистом кручении стержня круглого сечения.

Зависимость (20.01) для касательных напряжений, очевидно, должна иметь вид:

$$\tau + n\dot{\tau} = G\gamma + Hn\dot{\gamma}, \quad (20.19)$$

где G — длительный модуль сдвига, H — мгновенный модуль сдвига.

Для угла сдвига, как и в теории упругости, имеем выражение через относительный угол закручивания ψ в следующем виде:

$$\gamma = \rho\psi, \quad (20.20)$$

где ρ — радиус-вектор точки сечения.

Тогда

$$\dot{\gamma} = \rho\dot{\psi}$$

и (20.19) принимает вид:

$$\tau + n\dot{\tau} = G\rho\psi + Hn\rho\dot{\psi}. \quad (20.21)$$

Умножая обе части равенства на ρdF и интегрируя по всей площади, имеем:

$$\int_F \tau \rho dF + n \int_F \dot{\tau} \rho dF = G\psi \int_F \rho^2 dF + Hn\dot{\psi} \int_F \rho^2 dF.$$

Очевидно,

$$\int_F \tau \rho dF = M_{кр},$$

$$\int_F \dot{\tau} \rho dF = \dot{M}_{кр},$$

$$\int_F \rho^2 dF = J_p,$$

и последнее уравнение переписывается:

$$M_{кр} + n\dot{M}_{кр} = GJ_p\psi + HnJ_p\dot{\psi} \dots \quad (20.22)$$

Если известен закон изменения во времени крутящего момента, то из (20.22) найдем ψ в функции от t , после чего из (20.21) можно получить напряжение в любой точке сечения.

При $M_{кр} = \text{const}$, по аналогии с задачей из предыдущего параграфа (см. 20.17) будем иметь

$$\psi = \frac{M_{кр}}{GJ_p} - \frac{M_{кр}}{J_p} \left(\frac{1}{G} - \frac{1}{H} \right) e^{-\frac{Gt}{Hn}}. \quad (20.23)$$

Подстановка (20.23) в (20.21) приведет к заключению, что касательные напряжения в поперечном сечении бруса будут при постоянном крутящем моменте постоянными. Если предположить, что, закрутив концы бруса (длина бруса l) на некоторый взаимный угол φ , так и закрепить «навечно» эти концы, то будем иметь:

$$\psi = \frac{\varphi}{l} = \psi_0 = \text{const}, \quad \dot{\psi} = 0.$$

Выражение (20.19) переписывается:

$$\tau + n\dot{\tau} = G\gamma_0, \quad (20.24)$$

где, очевидно,

$$\gamma_0 = \rho\dot{\psi}_0.$$

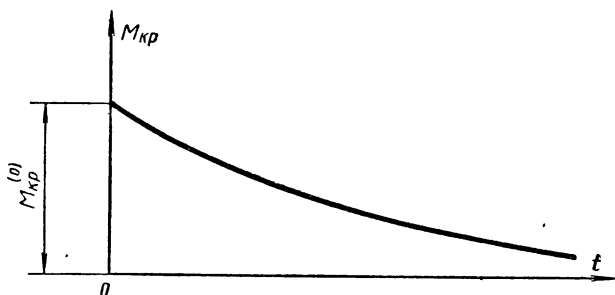
На основании (20.22), в данном случае будем иметь:

$$M_{кр} + n\dot{M}_{кр} = GJ_p\dot{\psi}_0. \quad (20.25)$$

По аналогии с задачей, разобранной в § 20.02, можем записать окончательный результат:

$$M_{кр} = GJ_p\dot{\psi}_0 + (M_{кр}^{(0)} - GJ_p\dot{\psi}_0)e^{-\frac{t}{n}}, \quad (20.26)$$

где $M_{кр}^{(0)}$ — значение крутящего момента в начальный момент. Падение крутящего момента во времени как следствие релаксации напряжений представится графиком, показанным на фиг. 20.06.



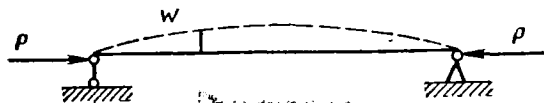
Фиг. 20.06 Падение во времени крутящего момента для случая неизменного во времени угла взаимного закручивания концов стержня

§ 20.05. Устойчивость прямолинейного сжатого стержня из упруго-вязкого материала

Рассмотрим стойку с шарнирно закрепленными концами (фиг. 20.07), сжатую по концам осевыми силами P , значение которой равняется критической силе или превышает ее на бесконечно малую величину, т. е. $P = P_{кр} + dP$. Пусть стойка под влиянием какой-либо незначительной побочной причины получила малое выпучивание, каковое не исчезает, хотя упомянутая побочная причина и исчезла.

Изгибающий момент в стержне при наличии случайного прогиба w будет равен:

$$M = -Pw. \quad (20.27)$$



Фиг. 20.07 К задаче на устойчивость при ползучести

Скорость изменения указанного момента

$$\dot{M} = -P\dot{w}. \quad (a)$$

Уравнение (20.15) для изгиба упруго-вязкой балки в данном случае запишется

$$-Pw - n\dot{P}\dot{w} = EJw'' + BnJ\dot{w}''. \quad (20.28)$$

Здесь, как и ранее, штрихами обозначено дифференцирование по длине, т. е. по координате x , а точками — дифференцирование по времени, т. е. по t .

Задаемся кривой прогиба стержня в виде синусоиды

$$w = f \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (20.29)$$

которая отвечает граничным условиям (при $x=0$ и $x=l$ $w = w' = 0$).

Тогда

$$\dot{w} = \dot{f} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (б)$$

и, подставляя (20.29) и (б) в (20.28), после сокращения на $\sin \frac{k\pi x}{l}$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-Pf - nP\dot{f} = -EJ \frac{k^2\pi^2}{l^2} f - BnJ \frac{k^2\pi^2}{l^2} \dot{f},$$

переписываем в виде:

$$-\left(P - EJ \frac{k^2\pi^2}{l^2}\right) f = n \left(BJ \frac{k^2\pi^2}{l^2} - P \right) \dot{f}. \quad (20.30)$$

Введем обозначения

$$EJ \frac{k^2\pi^2}{l^2} = P_d, \quad (20.31)$$

$$BJ \frac{k^2\pi^2}{l^2} = P_m, \quad (20.32)$$

причем, очевидно, $P_m > P_d$, так как $B > E$. Запишем (20.30) в виде:

$$(P_g - P) f = -n (P_m - P) \dot{f}. \quad (в)$$

Для краткости последующих записей введем обозначения:

$$\frac{P_d - P}{n(P_m - P)} = \beta \quad (2)$$

и уравнение (6) запишем в виде:

$$\frac{df}{dt} = -\beta f. \quad (3)$$

Решением (3) является

$$f = Ce^{-\beta t}. \quad (20.33)$$

Обозначая начальное случайное возмущение, т. е. f при $t=0$, через f_0 , переписываем

$$f = f_0 e^{-\beta t}. \quad (20.33a)$$

Решение (20.33a) является устойчивым, т. е. прогибы во времени не будут возрастать и, наоборот, стремятся убывать при β положительном (включая β равным бесконечности). Равновесие будет неустойчивым при β отрицательном.

Критическое состояние будет при $\beta=0$.

Значению $\beta=0$ соответствует $P=P_0$ и значению $\beta=\infty$ соответствует $P=P_m$.

Положительному значению β соответствует $P < \frac{P_d}{P_m}$.

Отрицательному значению β соответствует $P > \frac{P_d}{P_m}$.

Из полученного следует, что ранее введенные обозначения для P_d и P_m можно назвать:

P_d — предел длительной устойчивости стержня и

P_m — предел мгновенной устойчивости стержня.

Первое соответствует критической силе при бесконечно продолжительном действии силы P , а второе — критической силе при мгновенном приложении силы при условии ее немедленного исчезновения.

Заметим, что согласно (20.31) выражение для P_0 в точности соответствует обычной эйлеровой критической силе, однако надо помнить, что в теории вязко-упругого материала модуль E не равен (а меньше) обычному в теории упругости модулю упругости.

Попутно заметим, что определение предела мгновенной устойчивости становится особенно важным при расчете систем на устойчивость при кратковременных нагрузках, например порыв ветра, действие ударной волны при взрыве и т. п.

Для случая стержня с двумя шарнирными закреплениями очевидно, что наименьшее значение для критических сил, согласно (20.31—20.32) получим при $k=1$ (случай выпучивания по одной полуволне синусоиды).

Таким образом, для такого закрепления концов предел длительной устойчивости определяется:

$$P_g = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}; \quad (20.34)$$

предел мгновенной устойчивости записывается:

$$P_m = \frac{\pi^2 BJ}{l^2}. \quad (20.35)$$

Большой интерес представляет задача о потере устойчивости сжатого стержня при различных законах изменения во времени сжимающей силы (периодическая сжимаемая сила и т. п.). Такие задачи обследованы А. Р. Ржаницыным (см. [56*]).

Ограничимся сообщением без вывода одного из его исследований. Так, если сжимающая сила P изменяется во времени по периодическому закону

$$P = P_0 + R \sin \omega t, \quad (20.36)$$

то условие длительной устойчивости в таком случае записывается

$$R^2 < (P_m - P_0)^2 - (P_m - P_g)^2. \quad (20.37)$$

Если максимальное значение силы $P = P_{\max} = P_0 + R$ больше или равно пределу мгновенной устойчивости, т. е. P_m , то стержень может сохранить равновесие лишь ту часть первого цикла колебания силы P , в которой $P < P_m$. В этом случае предел длительной устойчивости заведомо превзойден.

§ 20.06. О полном комплекте уравнений теории линейного упруго-вязкого тела

В предыдущих параграфах этой главы были рассмотрены простейшие задачи теории деформации упруго-вязкого тела. В общем случае напряженно-деформированного состояния тела любой формы, но материал которой может быть отнесен к линейному упруго-вязкому, полный комплект уравнений, очевидно, представится следующими группами уравнений:

а) *Дифференциальными уравнениями равновесия* (3.04), известными читателям из главы 3 и справедливыми для любого тела, лишь бы оно было сплошное.

б) *Геометрическими уравнениями* (3.08), связывающими компоненты смещения с компонентами деформации и также справедливыми для любого непрерывного тела, независимо от его физической природы.

в) *Физическими уравнениями* (6.19) и (6.20), установленными именно для линейно-упруго-вязкого тела, названными в главе VI законом изменения формы упруго-релаксирующе-ползучего тела (6.19) и законом упругого изменения объема (6.20).

г) *Граничными уравнениями*, которые могут быть заданы статическими (2.05)—отражающими равновесие всех

граничных точек тела для любого мгновения времени, или геометрическими — отражающими наличие жестких или упругих, непрерывных или дискретных связей на внешней границе тела, или, наконец, кинематическими — отражающими наперед заданный закон распределения скоростей деформаций или скоростей перемещений тех же граничных точек тела.

Попутно отметим, что в случае надобности [для непосредственного использования — взамен уравнений (3.08) — или в порядке контроля] могут быть использованы также известные читателю из главы III уравнения неразрывности деформации (3.09).

Не будем приводить записи всех упомянутых выше уравнений и условий, поскольку они имеются в главах III и VI (исключая граничные геометрические и кинематические граничные условия, которые имеет смысл записывать конкретно в каждой задаче отдельно).

Читателю должно быть очевидно, что ставить в настоящее время вопрос о записи общего интеграла дифференциальных уравнений теории упруго-вязкого тела практически нереально. Остается полагать, что в теории деформации упруго-вязкого тела должны найти широкое использование различные методы последовательных приближений.

Так, в первом (нулевом) приближении можно использовать решение задачи теории упругости (т. е. пренебречь в уравнениях членами, отражающими вязкость тела) для того же тела с теми же граничными (статическими) условиями подобно тому, как в теории пластичности за первое приближение принимали решение той же задачи в идеально-упругой постановке.

Результаты такого грубого решения далее подставить в уравнения теории упруго-вязкого тела, и для уничтожения противоречия ввести в употребление некоторые фиктивные силы и т. д. и т. п.

Очевидно, этот метод можно назвать *методом упругих решений*. Можно, наоборот, в первом (нулевом) приближении принять решение задачи для идеально-вязкого тела (т. е. пренебречь в уравнениях членами отражающих упругость тела) с теми же граничными условиями, что и заданное тело.

Результаты такого грубого решения подставить в уравнения теории упруго-вязкого тела и так же, как в методе упругих решений теории пластичности, ввести далее в употребление какие-то фиктивные силы и т. д. и т. п.

Назовем такую форму последовательного решения *методом вязких решений*.

Высказанными общими замечаниями и ограничимся по вопросу, озаглавленному в настоящем параграфе.

§ 20.07. Замечание о полном комплекте уравнений теории вязко-пластического тела

Для исследования напряженно-деформированного состояния тела, находящегося в вязко-пластическом состоянии, мы располагаем, как и в теории пластичности, тремя дифференциальными уравнениями равновесия (3.04), шестью геометрическими уравнениями (3.08) и ... одним (!) условием вязкой пластичности (6.24). Количество уравнений не соответствует количеству неизвестных. Таким образом, при пространственном деформировании однозначного решения для напряжений и деформаций при вязко-пластическом состоянии материала без упрочнения не может быть.

Указанное положение есть результат выпадения в системе перечисленных выше уравнений важного уравнения (и следствие из него) однозначной связи интенсивности напряжений и интенсивности деформаций (и их производных по времени), которая имела бы реальный смысл для материала с упрочнением.

Если в теории пластичности (см. § 17.05) для идеально-пластического материала, но в случае плоского напряженного состояния задача оказывалась в отношении напряжений разрешимой без обращения к изучению поля деформации (статически-определимая задача), то в плоской задаче теории вязко-пластического тела она уже оказывается статически-неопределимой. Действительно, взамен условия (17.03), т. е. условия пластичности без упрочнения, здесь, в теории вязко-пластического тела условие вязкой пластичности имело бы вид (в главных осях):

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \times \sqrt{(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2 + (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3)^2 + (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1)^2} = \sigma_T, \quad (20.38)$$

т. е. включало бы скорости главных деформаций.

Таким образом, без введения дополнительных гипотез или без отказа от идеальной схемы вязко-пластического тела однозначным решением задачи мы располагать не будем.

§ 20.08. Основные уравнения теории установившейся ползучести

В § 6.01 было дано определение понятия установившейся ползучести, причем имелась в виду одномерная задача (одноосное растяжение); обобщим сделанное ранее понятие на сложное напряженное состояние в следующей редакции: *под процессом установившейся ползучести в сложном напря-*

т. е.

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_l}{\epsilon_l}.$$

Тогда взамен (а) можем написать

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_{cp} &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_l}{\epsilon_l} \dot{\epsilon}_x; \\ \sigma_y - \sigma_{cp} &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_l}{\epsilon_l} \dot{\epsilon}_y; \\ \sigma_z - \sigma_{cp} &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_l}{\epsilon_l} \dot{\epsilon}_z; \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{3} \frac{\sigma_l}{\epsilon_l} \dot{\gamma}_{xy}; \\ \tau_{yz} &= \frac{1}{3} \frac{\sigma_l}{\epsilon_l} \dot{\gamma}_{yz}; \\ \tau_{zx} &= \frac{1}{3} \frac{\sigma_l}{\epsilon_l} \dot{\gamma}_{xz}. \end{aligned} \right\} \quad (20.41)$$

При написании (20.41) учитывалось условие несжимаемости:

$$\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = 3 \dot{\epsilon}_{cp} = 0. \quad (20.42)$$

Приведенными выше соотношениями, присоединяя конечно статические (3.04), геометрические (3.08) уравнения и обычные граничные условия, полностью решается задача об установившейся ползучести при сложном напряженном состоянии.

Особо обратим внимание, что экспериментальный закон (20.40 а), или ему эквивалентный закон (20.40 б), получается в результате обработки опытных данных по кривым установившейся ползучести и в свете этого замечания участвующий в (20.40 б) модуль $\mathfrak{M}^*(\epsilon_l)$ не есть модуль $\mathfrak{M}(\epsilon_l)$ в теории течения.

§ 20.09. О формальной аналогии теории установившейся ползучести с теорией течения и теорией упруго-пластических деформаций

Уравнения (20.41) установившейся ползучести формально совпадают с уравнениями (17.10) теории пластического течения в случае малых деформаций и, как справедливо отмечают А. А. Ильющин и В. С. Ленский [см. [3] на стр. 174], это одна и та же теория, рассматриваемая в применении к различным диапазонам скоростей деформации: *к малым скоростям — в случае ползучести, к большим и средним скоростям — в случае течения.*

В § 17.06 отмечалось формальное совпадение уравнений теории течения с теорией малых упруго-пластических деформаций. В связи с этим замечанием можно сравнительную таблицу на стр. 422, касающуюся трех ветвей механики (теории упругости, теории пластических деформаций, теории пластического течения) дополнить еще четвертой колонкой, относящейся к теории установившейся ползучести.

Приведем для сопоставления 2-ю колонку на стр. 422 (§ 17.06) с новой четвертой колонкой:

№ п.п	В теории упруго-пластических деформаций	В теории установившейся ползучести
1	Направления главных нормальных напряжений и направления главных удлинений совпадают.	Направления главных нормальных напряжений и направления главных скоростей удлинений совпадают.
2	Объемная деформация пропорциональна среднему нормальному напряжению или принимается равной нулю (материал несжимаем).	Материал в состоянии ползучести несжимаем.
3	Главные касательные напряжения пропорциональны главным сдвигам.	Главные касательные напряжения пропорциональны главным скоростям сдвигов.
4	Интенсивность напряжений есть вполне определенная для каждого материала функция интенсивности деформации (принимается на основании обработки статических диаграмм деформации для случая одноосного растяжения).	Интенсивность напряжений есть вполне определенная для каждого материала функция интенсивности скорости деформаций (принимается на основании обработки кривых ползучести для случая одномерной ползучести).
5	Исходные соотношения (обозначение координатных осей принято номерным). $\sigma_k - \sigma_{cp} = \frac{2\sigma_l}{3\epsilon_l} \epsilon_k$ $\tau_{kn} = \frac{\sigma_l}{3\epsilon_l} \gamma_{kn}$ $k = 1, 2, 3$ $n = 1, 2, 3$ $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$ $\epsilon_l = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + \dots + 6(\gamma_{12}^2 + \dots)}$ $\sigma_l = \Phi(\epsilon_l)$	Исходные соотношения. $\sigma_k - \sigma_{cp} = \frac{2\sigma_l}{3\dot{\epsilon}_l} \dot{\epsilon}_k$ $\tau_{kn} = \frac{\sigma_l}{3\dot{\epsilon}_l} \dot{\gamma}_{kn}$ $k = 1, 2, 3$ $n = 1, 2, 3$ $\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = 0$ $\dot{\epsilon}_l = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2 + \dots + 6(\dot{\gamma}_{12}^2 + \dots)}$ $\sigma_l = \Phi(\dot{\epsilon}_l)$

Указанная аналогия позволяет иногда записать сразу решения задачи на установившуюся ползучесть, если имеется

готовое решение, сходное по граничным условиям для упруго-пластической статической задачи (при условии, конечно, что конституции функций Φ и φ также оказались идентичными).

§ 20.10. Краткие замечания о некоторых других теориях ползучести

Как уже указывалось в главе VI (§ 6.06), имеется несколько гипотез, имеющих целью описать процесс деформации во времени. И так как в настоящее время не имеется однозначного суждения по этому вопросу ввиду того, что имеются не только положительные, но и отрицательные стороны в каждой из предлагаемых гипотез, то на данном этапе полезно читателям кратко ознакомиться с различными точками зрения.

Явление ползучести характеризуется многими параметрами: температурой, напряжениями, деформациями, их производными по времени, временем, константами материала.

Естественно предположить, что между ними существует какая-то зависимость:

$$\Phi(\epsilon, \dot{\epsilon}, \sigma, \dot{\sigma}, T, t) = 0. \quad (20.43)$$

Но, по-видимому, не все параметры здесь одинаково существенны. Принимая разные группы параметров за основные, получим различные теории (гипотезы) ползучести.

Если (20.43) записать в сокращенном виде:

$$\Phi_T(\epsilon, \dot{\epsilon}, \sigma) = 0, \quad (20.44)$$

где индекс « T » у Φ_T означает, что постоянная температура косвенно входит в параметры $\epsilon, \dot{\epsilon}, \sigma$, то получаем так называемую *теорию упрочнения*.

На основании отдельных опытов предлагались в развернутом виде следующие записи (20.44):

$$\dot{\epsilon}_p = a \cdot \epsilon_p^b \sigma^c \quad (\text{Дэвис})$$

или

$$\sigma = b \left(\ln \frac{\epsilon_p^c \dot{\epsilon}_p}{a} + 1 \right) \text{ и т. п. (Ф. С. Чуриков)}$$

Индекс p у ϵ и σ указывает на пластическую составляющую деформации.

Если в сокращенной записи (20.43) сохранить время, то можем получить различные варианты так называемой *теории старения*, например:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\epsilon_p, \sigma, t) &= 0 \\ \text{или} \\ \Phi(\sigma, \dot{\epsilon}_p, t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.45)$$

Один из вариантов этой теории читатель встречал в § 6.06, а именно гипотезу Л. М. Качанова

$$\dot{\epsilon} = B(t) \cdot \sigma^n.$$

Широко популярной была гипотеза Н. М. Беляева

$$\epsilon_p = \psi(t) \cdot \sigma, \quad (20.46)$$

где функционал

$$\psi(t) = k \int_c^t \sigma^{n-1} dt.$$

Теория Н. М. Беляева была улучшена Н. Н. Малининым, предложившим начертание

$$\epsilon_p = \sigma \int_0^t \sigma^{n-1} B(t) \cdot dt, \quad (20.47)$$

где, как и в § 6.06, предполагается, что $B(t)$ — функция времени.

Одной из теорий, описывающих зависимость деформации в данный момент времени от предыдущего деформирования материала (теория наследственности), является теория Ю. Н. Работнова (108—110)*, согласно которой:

$$\varphi(\epsilon) = \sigma(t) + \int_0^t K(t - \xi) \sigma(\xi) d\xi; \quad (20.48)$$

Здесь ξ — переменная интегрирования, изменяющаяся от 0 до t , $\sigma(t)$ — напряжение в общем случае, $\varphi(\epsilon)$ является функцией только деформации, описывающей диаграмму растяжения материала; $K(t - \xi)$ — ядро интегрального уравнения (функция разности двух переменных $t - \xi$).

Основным недостатком всех вариантов теории старения является то, что в них время входит явным образом, и потому уравнения, получаемые из этих теорий, не инвариантны по отношению к системе отсчета времени.

Заслуживает быть упомянутой попытка И. И. Гольденבלата создания объединенной теории пластичности и ползучести [3].

В случае установившейся ползучести, как показал Н. Н. Малинин [2]*, можно аппарат теории ползучести представить повторением аппарата теории пластичности, но только компоненты деформации, подразумеваемые в теории пластичности (полные), считать пластическими (исключить упругие составляющие), а приняв степенную зависимость интенсивности пластических деформаций от интенсивности напряжений, т. е.

$$\epsilon_{l,p} = \sigma_l^n \Omega(t), \quad (20.49)$$

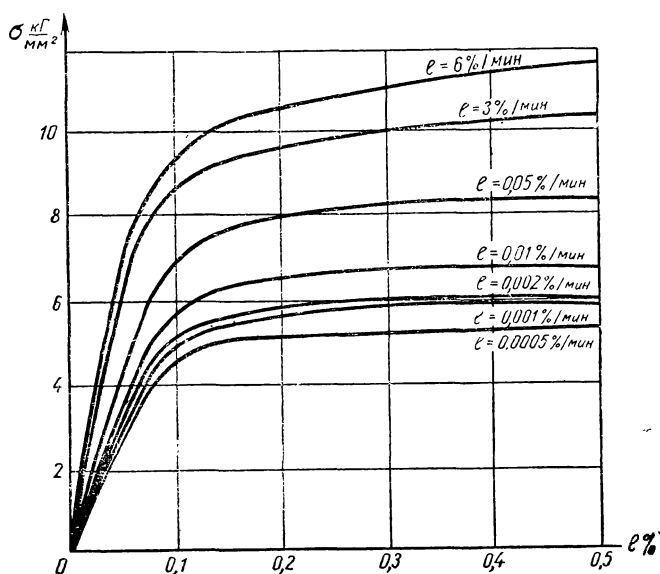
получаем эквивалентность между задачей установившейся ползучести и задачей пластического состояния детали (при

степенной зависимости интенсивности деформаций от интенсивности напряжений).

Особо задержим внимание на теории неустановившейся ползучести В. М. Панферова. (Математический аппарат этой теории сходен с аппаратом теории малых упруго-пластических деформаций А. А. Ильюшина, известным читателю из главы XVII).

В. М. Панферов вместе с его сотрудниками сконструировал специальную машину, позволяющую производить испытание металлов на растяжение в большом интервале скоростей деформации, а именно от 0,0005%/минуты до 6—8%/минуты.

Упомянутая машина поддерживает постоянную скорость деформирования и строит график $\sigma - \epsilon$ для этого значения скорости. На фиг. 20.08 показаны графики зависимости $\sigma = f(\epsilon)$ при $T = 500^\circ \text{C}$ и различных скоростях деформирования для стали 08.



Фиг. 20.08. Диаграммы растяжения при различных скоростях деформирования для стали 08 при $T = 500^\circ \text{C}$

По опытам В. М. Панферова оказалось, что кривые растяжения для данного металла при данной температуре можно считать геометрически подобными (за исключением, в отдельных случаях, начального упругого участка).

Например, кривая растяжения для стали 08 при самой высокой скорости совпадает с кривой при наименьшей скорости при коэффициенте подобия $\beta = 0,47$. При этом соответствующие точки надо брать при одинаковых полных деформациях, а не при одинаковых пластических частях их.

Указанный важный экспериментальный факт аналитически можно записать так:

$$\sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}) = \beta \cdot \sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}_m), \quad (20.50)$$

где $\sigma(\epsilon, \dot{\epsilon})$ — напряжение в стержне при скорости деформирования $\dot{\epsilon}$;

$\sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}_m)$ — напряжение в стержне при той же деформации, но при максимальной скорости деформирования $\dot{\epsilon}_m$.

В дальнейшем В. М. Панферов ограничивается рассмотрением только малых упруго-пластических деформаций и для них скорость деформации принимает:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t}.$$

Для коэффициента подобия автор принимает:

$$\beta = \Phi \left[\frac{\dot{\epsilon} - \varphi \left(\frac{\dot{\epsilon}_m - \dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_m} \right) \frac{\dot{\sigma}}{E}}{\dot{\epsilon}_m} \right], \quad (20.51)$$

где $0 \leq \varphi \leq 1$.

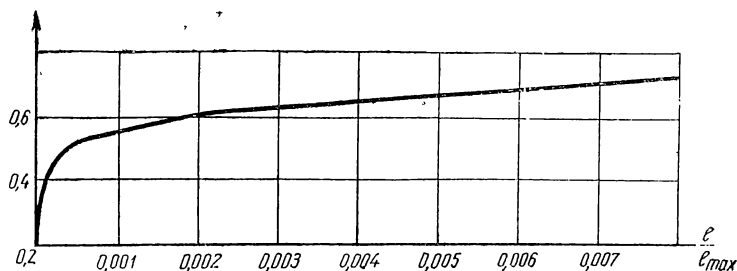
При $\varphi = 1$ функция β зависит от скорости только пластической составляющей деформации $\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E}$ (т. е. учитывается явление релаксации). При $\varphi = 0$ функция β зависит только от скорости полной упруго-пластической деформации (т. е. явление релаксации не учитывается).

Значение функции Φ определяется для фиксированной деформации $\epsilon = \text{const}$ как отношение ординат кривых растяжения в зависимости от соответствующих отношений скоростей деформаций.

График Φ , например для стали 08, имеет вид, показанный на фиг. 20.09.

Если пренебречь релаксацией, (т. е. положить в (20.51) $\dot{\sigma} = 0$), то

$$\sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}) = \Phi \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_m} \right) \sigma_m(\epsilon, \dot{\epsilon}_m). \quad (20.52)$$



Фиг. 20.09 График функции Φ для стали 08

Располагая указанными экспериментальными кривыми, В. М. Панферов описывает неустановившуюся ползучесть следующими соотношениями.

а) Девиатор напряжений пропорционален девиатору деформаций

$$D_n = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} D_{\text{деф}}. \quad (20.53)$$

б) Интенсивность напряжений есть вполне определенная функция интенсивности деформаций и интенсивности скоростей полной и пластической деформаций и не зависит от вида напряженного состояния для данного материала при фиксированной температуре (T) в случае активной деформации:

$$\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i), \quad (20.54)$$

где

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t}.$$

Вид зависимости определяется из опытов на растяжение с постоянной скоростью.

Так, если для простоты пренебрегать релаксацией, то:

$$\sigma_i(\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i) = \Phi\left(\frac{\dot{\varepsilon}_i}{\dot{\varepsilon}_m}\right) \sigma_{i,m}(\varepsilon_i \dot{\varepsilon}_{im}). \quad (20.55)$$

в) Среднее напряжение $\sigma_{\text{ср}}$ прямо пропорционально объемной деформации $3\varepsilon_{\text{ср}}$, т. е.

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{E}{1 - 2\mu} \varepsilon_{\text{ср}}, \quad (20.56)$$

где E — модуль упругости, снятый с кривой быстрого растяжения.

В ряде задач, решенных В. М. Панферовым, оказалось возможным исходить из несжимаемости материала, т. е. полагать

$$\varepsilon_{\text{ср}} = 0.$$

Из указанного выше видно, что перечисленные гипотезы представляют обобщение теории малых упруго-пластических деформаций на явление неустановившейся ползучести.

Попутно отметим, что В. М. Панферов обобщил известную читателю теорему А. А. Ильюшина о простом нагружении следующим образом:

если для тела выполняются гипотезы а), б), в) и между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформации и скоростей деформации существует зависимость

$$\sigma_i = A \left(\frac{\dot{\epsilon}_i}{\epsilon_m} \right) \epsilon_i^{\lambda}, \quad (20.57)$$

а нагрузки растут пропорционально одному параметру, то *нагружение будет простым* (т. е. направляющие тензоры напряжений и деформации не зависят от времени нагружения (t) или параметра нагружения (λ)).

Литература к главам 20 и 21

1. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. т. II, раздел IV (автор — Н. И. Малинин).
2. Гольденблат И. И. и Николаенко Н. А. Теория ползучести строительных материалов, Госстройиздат, 1960.
Имеются обширные справочные данные, входящие параметрами в различные гипотезы ползучести. Излагается обобщенная теория ползучести и пластичности по автору.
3. Работнов Ю. Н. Расчет деталей машин на ползучесть. Изв. АН СССР, отделение техн. наук, № 6, 1948.
4. Качанов Л. М. Теория ползучести. Ризматгиз, 1960.
5. Арутюнян Н. Х. Некоторые проблемы напряженного состояния бетона и железобетона. Автореферат, Ереван, 1949.
6. Гастев Н. А. (см. стр 174).
7. Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Изд. АН СССР, М., 1960 г. (см. аннотации докладов К. Ф. Войтковского по ползучести льда и мерзлых грунтов, М. В. Гзовского по исследованию деформаций, длительно развивающихся в земной коре, И. И. Гольберга по обобщению основных уравнений вязко-упругости, Л. М. Качанова к расчету времени разрушения в условиях ползучести, В. С. Ленского по исследованию виброползучести при комнатной температуре, Н. Н. Малинина о деформации ползучести и разрушении полимеров, Ю. Н. Работнова, касающегося обзора, критической оценки различных теорий ползучести и новым предложениям Хофф (США) по теории обратной ползучести, М. П. Розовского, В. П. Синицина, В. С. Строганова, Н. В. Тябина, Г. И. Фуке, и др.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

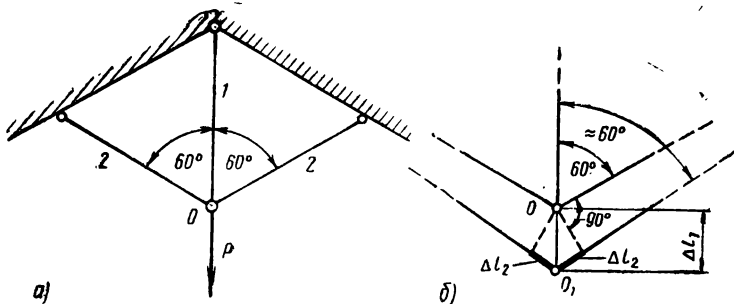
§ 21.01. Общее замечание по главе

Задачи, рассмотренные в предыдущей главе, исходили в основном из представления о таком вязком или ползучем теле, для которого зависимости между его напряжениями и деформациями и их скоростями носили *линейный характер*. Решения, полученные из таких допущений, были относительно простые, отличались наглядностью, с качественной стороны в большинстве случаев правильно описывали процесс ползучести, но диапазон практического использования выводов из таких решений, естественно, ограничивался пределом применения исходных линейных соотношений, т. е. был сравнительно узкий.

В настоящей главе рассмотрено несколько характерных для инженерной практики задач, в основе решения которых лежат *нелинейные соотношения*, широко используются также экспериментальные зависимости, полученные пока из ограниченного количества опытов и нуждающиеся в дальнейшем теоретическом обосновании и обобщении. Преимущественно рассмотрены задачи с установившейся ползучестью.

§ 21.02. Ползучесть простейшей шарнирно-стержневой фермы

Исследуем процесс изменения напряжений и деформаций в элементах трехстержневой фермы, показанной на фиг. 21.01. Все три стержня имеют одинаковые длины (l) и площади



Фиг. 21.01 К примеру расчета на ползучесть шарнирно-стержневой фермы (а). Положение узла O до и после деформации (б)

поперечного сечения F . На узел O действует постоянная сила P . Напряжение в стержне 1 обозначим σ_1 , а в стержне 2 — через σ_2 ; точно так же будем отличать относительные удлинения и скорости относительных удлинений стержней 1 и 2 (ϵ_1 , ϵ_2 , $\dot{\epsilon}_1$, $\dot{\epsilon}_2$).

Заданная ферма статически неопределима и потому условия равновесия узла O , т. е.

$$(\sigma_1 F_1) + 2(\sigma_2 \cdot F_2) \cos 60^\circ = P,$$

переписываемого

$$(\sigma_1 + \sigma_2) F = P, \quad (a)$$

недостаточно и необходимо рассмотреть деформацию фермы с геометрической стороны, т. е. записать условие неразрывности деформации.

Обозначая перемещение узла O по вертикали через Δl_1 , что одновременно равняется полному удлинению стержня 1, записываем условие неразрывности стержней 1 и 2 после деформации в виде (фиг. 21.01б)

$$\Delta l_1 \cos \beta = \Delta l_2,$$

или

$$\Delta l_1 \cos 60^\circ \approx \Delta l_2$$

и, окончательно, после разделения левой и правой части равенства на l_1 , имеем:

$$\frac{1}{2} \epsilon_1 = \epsilon_2. \quad (б)$$

Решим вначале статическую упруго-мгновенную задачу, т. е. выясним распределение напряжений в первые мгновения загрузки фермы.

Для этого к статическому (а) и геометрическому (б) уравнениям необходимо присоединить физический закон, т. е. линейный закон Гука

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= E\varepsilon_1 \\ \sigma_2 &= E\varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Внося (б) в (в) и далее в (а), получаем:

$$\sigma_1 = \frac{2}{3} \frac{P}{F}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{P}{F}. \quad (г)$$

Итак в момент загрузки усилия в среднем стержне в 2 раза больше усилий в крайних.

Решим теперь поставленную в заголовке настоящего параграфа реологическую задачу.

Для этого от соотношения (б) удобнее перейти к зависимостям между скоростями. Дифференцируя (б), имеем:

$$\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_2. \quad (Б)$$

Взамен линейного закона Гука (в) примем закон ползучести (6.29), т. е.

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= B(t) \sigma_1^m + \frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{dt}; \\ \dot{\varepsilon}_2 &= B(t) \sigma_2^m \frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma_2}{dt}. \end{aligned} \quad (В)$$

Внося (В) в (Б) и исключая σ_2 с помощью (а), получим дифференциальное уравнение:

$$B(t) \sigma_1^m + \frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{dt} = 2B(t) \left(\frac{P}{F} - \sigma_1 \right)^m - \frac{2}{E} \frac{d\sigma_1}{dt}. \quad (21.01)$$

Из уравнения (21.01) можно сразу получить два крайних решения — упруго-мгновенное и случай установившейся ползучести. В первом случае надо положить $t=0$ и, следовательно, $B(t)=B(0)$, $m=1$ и отбросить производные от напряжений по времени. Тогда (21.01) переписется

$$B(0) \sigma_1^m = 2B(0) \left(\frac{P}{F} - \sigma_1 \right)^m,$$

откуда после сокращения на $B(0)$ имеем известный ранее результат

$$\sigma_1 = \frac{2}{3} \frac{P}{F}.$$

Во втором случае (установившаяся ползучесть) следует отбросить $\frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma_1}{dt}$ и заменить $B(t)$ на $B(\infty)$. Вместо (21.01) получим:

$$B(\infty) \sigma_1^m = 2B(\infty) \left(\frac{P}{F} - \sigma_1 \right)^m,$$

откуда

$$\sigma_1^* = \frac{\frac{1}{2^{\frac{1}{m}}}}{1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{m}}}} \cdot \frac{P}{F} \quad (\Gamma)$$

и из условия равновесия (а)

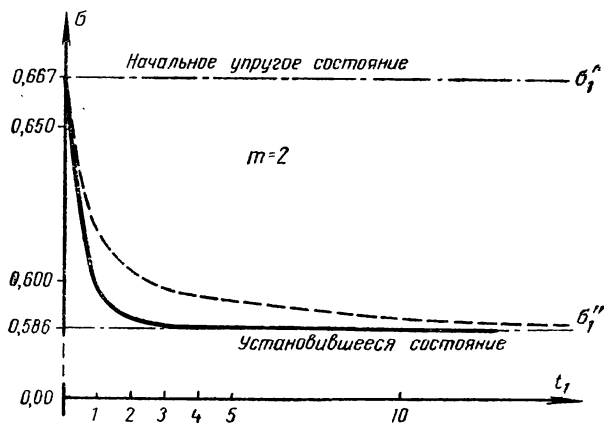
$$\sigma_2^* = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{m}}} \cdot \frac{P}{F} \quad (\Delta)$$

(напряжения при установившейся ползучести для отличия от упруго-мгновенных значений обозначаем со звездочкой). При $m=1$ (в порядке контроля) получим решение упруго-мгновенной задачи.

Так как $m > 1$, то, сопоставляя (Г и Д) и (2), заключаем, что при установившейся ползучести

$$\sigma_1^* < \sigma_1, \quad \sigma_2^* > \sigma_1,$$

т. е. в заданной статически-неопределимой ферме *благодаря* нелинейному условию ползучести напряжения в стержнях ферм имеют тенденцию выравниваться.



Фиг. 21.02 Изменение во времени напряжения в среднем стержне для случая, когда $m=2$

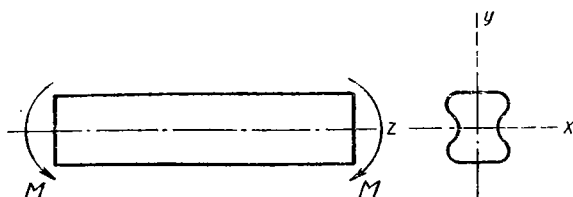
Уравнение (21.01) позволяет проследить весь процесс ползучести от начального упруго-мгновенного до состояния установившейся ползучести.

Приводим график (фиг. 21.02), характеризующий изменение во времени напряжения в среднем стержне для случая, когда $m=2$ (график заимствован из книги Л. М. Качанова [60]).

План приведенного выше расчета на ползучесть фермы был внешне сходен с теорией пластического течения. В таком же плане будут рассмотрены задачи в §§ 21.06—21.07. В следующих §§ 21.03—21.05, посвященных установившейся ползучести бруса при изгибе и кручении, приведен для разнообразия в плане, который внешне сходен с теорией малых упруго-пластических деформаций.

§ 21.03. Установившаяся ползучесть изогнутого прямого бруса

Рассмотрим брус, поперечное сечение которого имеет две оси симметрии, причем одна из них лежит в плоскости изгиба (фиг. 21.03).



Фиг. 21.03 К расчету на ползучесть при изгибе

Примем, что кривые ползучести при одинаковых температурах, как при растяжении, так и при сжатии исследуемого материала — одинаковые. Материал будем считать несжимаемым.

Исследуем чистый изгиб бруса. В этом случае напряженное состояние всех точек бруса является одноосным, $\sigma_i = |\sigma_z|$ и $\epsilon_{i,p} = |\epsilon_z|$.

Зависимость пластической деформации от напряжения пусть задано в виде:

$$\epsilon_{i,p} = \sigma_{ip}^n \Omega(t), \quad (21.01)$$

которая в данном случае переписывается

$$\varepsilon_{zp} = \sigma_{zp}^n \Omega(t). \quad (21.02)$$

Знак деформации должен быть одинаков со знаком напряжения и это очевидное условие будем подразумевать ниже, специально не оговаривая еще раз.

Решаемая нами сейчас задача будет сходна с задачей, рассмотренной в § 18.01, откуда и перепишем некоторые зависимости. Так, из закона плоских сечений (см. (18.01)):

$$\varepsilon_{zp} = \frac{1}{\rho_p} y. \quad (a)$$

Уравнение равновесия (см. (18.02))

$$M_x = \int_F \sigma_{zp} \cdot y \cdot dF. \quad (б)$$

Из (21.02) следует:

$$\sigma_{zp} = \left(\frac{\varepsilon_{zp}}{\Omega} \right)^{\frac{1}{n}},$$

а по подстановке (a) имеем:

$$\sigma_{zp} = \left\{ \frac{|y|}{\rho_p \Omega} \right\}^{\frac{1}{n}}. \quad (в)$$

Подстановка (в) в (б) приводит к зависимости:

$$M_x = \left[\frac{1}{\rho_p \Omega} \right]^{\frac{1}{n}} \int_F |y|^{\frac{n+1}{n}} dF. \quad (г)$$

Назовем интеграл в выражении (г) *обобщенным моментом инерции* поперечного сечения относительно оси x (или момент $\frac{n+1}{n}$ порядка) и обозначим

$$J_{nx} = \int_F |y|^{\frac{n+1}{n}} dF. \quad (21.03)$$

Из уравнения (г) вытекает:

$$\frac{1}{\rho_p} = \left(\frac{M_x}{J_{nx}} \right)^n \Omega. \quad (21.04)$$

Подставляя (21.04) в (в), получаем:

$$\sigma_{zp} = \frac{M_x}{J_{nx}} |y|^{\frac{1}{n}}. \quad (21.05)$$

Для бруса прямоугольного сечения ($b \times h$) интегрирование (21.03) доставляет:

$$J_{nx} = \frac{1}{2 \frac{n+1}{n}} \cdot \frac{n}{2n+1} b h^{\frac{2n+1}{n}}.$$

Заметим, что при $n=1$, $J_{nx} = \frac{bh^3}{12}$ (т. е. обычный экваториальный момент инерции сечения)

$$\sigma_{zp} = \frac{M_x}{J_x} y.$$

Примечание: Рекомендуем читателю сравнить выражение (21.05) с выражением (18.08) в теории пластического изгиба бруса при степенной зависимости напряжения от деформации.

Максимальные нормальные напряжения можно получить по (21.05), полагая $y = \frac{h}{2}$ (h — высота сечения), тогда

$$\sigma_{z, \max} = \frac{M_x}{W_{nx}}, \quad (21.06)$$

где W_{nx} — обобщенный момент сопротивления изгибу поперечного сечения, т. е.

$$W_{nx} = 2^{\frac{1}{n}} \frac{J_{nx}}{h^{\frac{1}{n}}}. \quad (21.07)$$

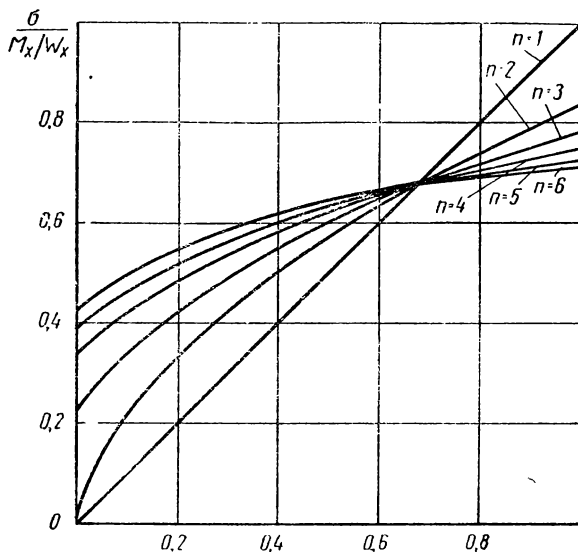
Для прямоугольного поперечного сечения

$$W_{nx} = \frac{n}{2(2n+1)} b h^2.$$

На фиг. (21.04) представлены графики зависимостей $\frac{\sigma_z}{\frac{M_x}{W_x}}$

от $\frac{y}{n/2}$.

Из графика следует, что *максимальное нормальное напряжение при ползучести меньше*, чем максимальное нормальное напряжение в начальный момент времени, и тем меньше, чем выше показатель n . Нормальные напряжения, следовательно, имеют тенденцию во времени как бы выравниваться. Любопытно заметить, что с точки зрения теории линейного упруго-вязкого тела (§ 20.03) при постоянных изгибающих моментах, приложенных по концам балки, нормальные напряжения во времени оставались неизменными, а изменялся лишь прогиб балки.



Фиг. 21.04 График зависимости

$$\frac{\sigma_x}{W_x} \text{ от } \frac{y}{n} \text{ при изгибе}$$

§ 21.04. Дифференциальное уравнение изогнутой оси бруса при нелинейной ползучести

Подставим выражение для кривизны балки при ползучести (21.04) в известное дифференциальное соотношение

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$

которое в данном случае записывается:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \left(\frac{M_x}{J_{nx}} \right)^n \Omega. \quad (21.08)$$

Интегрирование (21.08) позволит получить величину прогиба, возникшего за счет ползучести материала балки; так, для балки постоянного поперечного сечения имеем:

$$w_p = \frac{\Omega}{J_{nx}^n} \int \int M_x^n dz^2. \quad (21.09)$$

Очевидно, возможно использовать также и известный интеграл Мора, а именно:

$$w_p = \int_0^e \overline{M} \frac{1}{\rho_n} dz, \quad (21.10)$$

который в развернутом виде переписывается:

$$w_p = \int_0^e \overline{M} \left(\frac{M_x}{J_{nx}} \right)^n \Omega dz. \quad (21.11)$$

Напомним, что в (21.10) под $\overline{M}$ подразумевался изгибающий момент в текущем сечении от единичной силы, приложенной в направлении искомого перемещения.

Выражению (21.08) можно искусственно придать следующий вид:

$$\frac{\partial^2 w_p}{\partial z^2} = \frac{M_x}{EJ_\phi}, \quad (21.12)$$

где обозначаем

$$EJ_\phi = \frac{J_{nx}^n}{M_x^{n-1} \Omega}. \quad (21.13)$$

Формально (21.12) можно считать дифференциальным уравнением изогнутой упругой балки, имеющей жесткость поперечного сечения EJ_ϕ .

Таким образом, определение прогибов балки при ползучести можно заменить фиктивной задачей — определение прогибов в упругой балке специально подобранного переменного сечения, жесткость которой определяется по (21.13).

Очевидно, возможны и такие приемы, как например, переписать (21.08) в виде:

$$\frac{\partial^2 w_p}{\partial z^2} = \frac{M_\phi}{EJ}, \quad (21.14)$$

где

$$M_\phi = \left(\frac{M_x}{J_{nx}} \right)^n \Omega EJ, \quad (21.15)$$

где EJ — обычная жесткость балки при изгибе, а M_ϕ — некоторый фиктивный момент, вычисленный по (21.14).

Так как (21.14) формально сходно с обычным дифференциальным уравнением упругой балки, то, возможно, например, использовать графоаналитический способ (принять эпюру M_ϕ за фиктивную нагрузку и, далее, строить новую эпюру, которая в масштабе EJ даст эпюру действительных прогибов).

§ 21.05. Установившаяся ползучесть толстостенной трубы при осесимметричном нагружении

Пусть круглая труба с внутренним радиусом a и наружным b находится под действием внутреннего давления p_a и наружного p_b и равномерно нагрета до некоторой неизменной во времени температуры. Торцы трубы считаем опертymi на гладкие плиты так, что осевая деформация трубы отсутствует, т. е. $\epsilon_z = 0$.

Как и в задаче, разобранный в § 9.02 (упругое состояние) и § 18.05 (пластическое состояние) радиальные (σ_r) и тангенциальные (σ_θ) напряжения, как и деформации ϵ_r и ϵ_θ , являются главными. Все точки трубы получают только радиальные перемещения. Обозначим их через $u = u(r, t)$.

Для относительных удлинений имеем известные выражения (9.03) и (9.04), т. е.

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}.$$

Из условия несжимаемости

$$\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z = 0, \quad (a)$$

которое при установившейся ползучести переписывается:

$$\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_z = 0, \quad (б)$$

имеем

$$\frac{d\dot{u}}{dr} + \frac{\dot{u}}{r} = 0. \quad (в)$$

Решением (в) является

$$\dot{u} = \frac{C}{r}, \quad (г)$$

где C — постоянная, подлежащая определению.

Таким образом,

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{d\dot{u}}{dr} = -\frac{C}{r^2}, \quad (д)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \frac{\dot{u}}{r} = \frac{C}{r^2} \quad (е)$$

и интенсивность скорости деформации (20.39), записанная в цилиндрических координатах, представится:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\theta)^2 + (\dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_r)^2} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \dot{\epsilon}_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C}{r^2}.\end{aligned}\quad (\text{ж})$$

Выражение интенсивности напряжения

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2} \quad (3)$$

содержит также осевое напряжение, которое легко вычисляется через остальные компоненты из условия несжимаемости, т. е. (при коэффициенте Пуассона равном 1/2):

$$\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0,$$

откуда

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta). \quad (u)$$

Используя (u) в (3), имеем

$$\sigma_i = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \quad (u')$$

(знак: минус — по той причине, что σ_r — сжимающие, стало быть, отрицательные, а σ_i — по смыслу его определения должно быть положительным).

Полагаем, что из опытов нам известна связь интенсивности скорости деформации ($\dot{\epsilon}_i$) с интенсивностью напряжений (σ_i), т. е.

$$\dot{\epsilon}_i = \psi(\sigma_i), \quad (21.22)$$

или наоборот

$$\sigma_i = \psi^{-1}(\dot{\epsilon}_i). \quad (21.23)$$

Используя известное ранее (9.02) уравнение равновесия

$$\sigma_r - \sigma_\theta + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0, \quad (\kappa)$$

которое с учетом (u') перепишем:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_t, \quad (л)$$

или

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \psi^{-1}(\epsilon_t) \quad (21.24)$$

с учетом ($\mathcal{M}$), выражение (21.24) можно переписать:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \psi^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{C}{r^2} \right). \quad (21.25)$$

Интегрируя (21.25) от a до r и принимая во внимание, что при $r=a$ $\sigma_r = -p_a$, имеем:

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_a^r \frac{1}{r} \psi^{-1} \left(\frac{2C}{\sqrt{3} r^2} \right) dr - p_a. \quad (21.26)$$

Для определения постоянной C получаем второе граничное условие, а именно — при $r=b$ $\sigma_r = -p_b$

$$-p_b = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_a^b \frac{1}{r} \psi^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{C}{r^2} \right) dr - p_a. \quad (21.27)$$

Определив из (21.27) постоянную C (что возможно, если на место ψ поставить конкретную зависимость), далее из (21.26) находим σ_r , а с помощью уравнения равновесия (k) найдем и σ_θ , т. е.

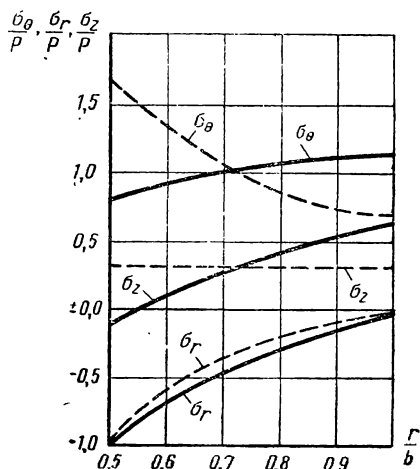
$$\sigma_\theta = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr}. \quad (м)$$

Если на основании опытов оказывается возможным принять закон одномерной ползучести в виде

$$\dot{\epsilon} = \psi(\sigma) = B \cdot \sigma^n \quad (21.28)$$

или, что все равно,

$$\sigma = \left(\frac{\dot{\epsilon}}{B} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (21.28a)$$



Фиг. 21.05. Эпюры распределения σ_r и σ_z , при установившейся ползучести для случая $n=3$.

т. е., согласно обозначению (21.23), принять

$$\psi^{-1}(\dot{\epsilon}_I) = \left(\frac{\dot{\epsilon}_I}{B} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (21.29)$$

то [см. (2) на стр. 516] решение задачи оказывается весьма простым (в этом рекомендуется убедиться читателю самостоятельно, используя (21.29) в (21.24 ÷ 21.27)), и окончательно (для напряжений) получаем выражения:

$$\sigma_r = \frac{p_a a^{2/n} - p_b b^{2/n}}{b^{2/n} - a^{2/n}} - \frac{(p_a - p_b) a^{2/n} b^{2/n}}{(b^{2/n} - a^{2/n}) r^{2/n}}, \quad (21.30)$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_a a^{2/n} - p_b b^{2/n}}{b^{2/n} - a^{2/n}} + \frac{2-n}{n} \cdot \frac{(p_a - p_b) a^{2/n} b^{2/n}}{(b^{2/n} - a^{2/n}) r^{2/n}} \quad (21.31)$$

На фиг. 21.05 показаны эпюры распределения σ_r , σ_θ и σ_z при установившейся ползучести (сплошные линии) для случая $n=3$ (при $n=1$ имеем обычное упругое решение) при отношении $b/a=2$ и при наличии только одного внутреннего давления. Пунктирные линии относятся к упруго-мгновенной задаче.

§ 21.06. Соображения по расчету на ползучесть статически-неопределимых балок и рам

Из рассмотренных в §§ 21.02 — 21.05 примеров следует, что к моменту наступления так называемой установившейся ползучести закон распределения напряжений внутри тела отличается от того закона, который имеет место в первые мгновения приложения нагрузки. В случае отдельного стержня при заданных по его концам изгибающих или крутящих моментах задача решается в замкнутом виде и сравнительно просто по формулам, приведенным в упомянутых выше параграфах.

Задача осложняется, если обследуемым объектом является статически-неопределимая балка или рама. Для вычисления в таких системах напряжений и деформаций с учетом фактора времени необходимо для каждого обследуемого поперечного сечения знать компоненты внутренних усилий этого сечения, т. е. продольную, поперечные силы, изгибающие и крутящий моменты. Однако приступая к расчету статически-неопределимой системы, нужно иметь в виду, что упомянутые усилия, во-первых, не известны, они должны быть определены из условий совместности деформаций всех элементов, составляющих систему, а во-вторых, эти внутренние усилия во времени изменяются.

Однако если рассматривать процесс установившейся ползучести, то задачу расчета статически-неопределимой системы можно, хотя бы по форме, решить относительно просто, если воспользоваться замечаниями, высказанными в § 21.04. Там указывалось, что расчет на ползучесть какого-либо изгибаемого или скручиваемого стержня постоянного сечения можно заме-

нить некоторой фиктивной упруго-мгновенной задачей на изгиб или кручение того же стержня, но вообразив его имеющим другое, воображаемое и, как правило, переменное по длине стержня сечение, жесткость которого вычисляется в зависимости от реального для данного сечения изгибающего момента и с учетом параметров, входящих в закон одномерной ползучести для материала исследуемого стержня. (См., например, формулу (21.13)).

Учитывая сказанное, можно и расчет любой статически-неопределимой системы с учетом фактора ползучести подменить расчетом специально подобранной упругой мгновенной и также статически-неопределимой системы, но реальная жесткость отдельных стержней должна быть условно заменена на некоторую фиктивную жесткость.

Так как действительные изгибающие (или крутящие) моменты и другие усилия (продольная, поперечная силы) любого поперечного сечения рамы неизвестны (известна лишь общая заданная нагрузка на конструкцию), то, формально, вычисление ранее упомянутых фиктивных жесткостей невозможно.

В таком случае можно применить своеобразную форму *метода упругих решений*, а именно:

а) Вначале выполнить обычный статический расчет заданной рамы или балки (составляются канонические уравнения деформации и т. п.), построить эпюры моментов и т. п. Этот расчет дает картину усилий (напряжений, деформаций, прогибов) исследуемой системы в момент загрузки. Назовем это решение — *нулевое приближение*.

б) Располагая *упруго-мгновенной эпюрой моментов*, полученной выше, и используя соотношения (21.13), вычислить в первом приближении фиктивную жесткость стержней, составляющих заданную статически-неопределимую систему, и тем же расчетным аппаратом (канонические уравнения и т. п.) строится эпюра моментов для заданной системы, которая и будет в первом приближении эпюрой моментов с учетом ползучести материала.

в) Далее, исходя из полученной эпюры моментов (отличной от расчета в нулевом приближении), вновь вычисляется уточнение значения фиктивных жесткостей поперечных сечений стержней системы и заново (во втором приближении) проводится расчет системы. Процесс расчета обычно заканчивается на втором, третьем приближении.

§ 21.07. Краткие выводы по главам 20 и 21

1. Процесс деформации любого материала, рассматриваемый во времени, оказывается исключительно сложным, поскольку один и тот же материал в различных температурных условиях, при различных скоростях или характере загрузки и т. п. обнаруживает различные свойства.

В настоящее время ни для одного из реальных материалов неизвестны конкретные законы деформации, пригодные для достаточно широкого диапазона температур, напряжений, скоростей деформаций, способа загрузки и т. п.

2. Все существующие теории, учитывающие ползучесть материала, можно разделить на две группы — линейные теории и нелинейные теории.

3. К первой группе, относительно справедливой в диапазоне малых напряжений и деформаций и широко используемых в теоретических исследованиях, относится теория линейного упруго-вязкого тела.

Ко второй группе, используемой в инженерной практике в достаточно широком диапазоне, относятся различные гипотезы ползучести, в основании которых лежат обобщаемые на сложное напряженное состояние экспериментально полученные для случая одномерной ползучести так называемые кривые ползучести, т. е. для каждого конкретного материала устанавливается связь между напряжением, деформацией, скоростями напряжений и деформаций, временем и температурой (между всеми перечисленными параметрами или частью их).

4. В зависимости от того, каким из перечисленных выше параметрам во второй группе теорий отдается предпочтение, различают несколько гипотез (теорий) ползучести, каждая из которых имеет свои положительные стороны и свои недостатки.

Окончательные результаты расчетов по различным гипотезам, к сожалению, оказываются не всегда однозначными, а в отдельных случаях между собою противоречивыми.

5. Противоречия между различными гипотезами сглаживаются, а в некоторых задачах и отпадают, если рассматривается случай так называемой установившейся ползучести.

6. Для описания установившейся ползучести математический аппарат оказывается внешне сходным с теорией пластического течения, а также с теорией малых упруго-пластических деформаций.

В случае, когда закон установившегося процесса при одномерной ползучести можно аппроксимировать степенными зависимостями (т. е. $\sigma = A \dot{\epsilon}_i^n$ или $\sigma_i = B \dot{\epsilon}_i^m$), то расчет на такую установившуюся ползучесть полностью совпадает с мгновенной упруго-пластической (стационарной) задачей (при сходной зависимости σ_i от $\dot{\epsilon}_i$).

7. Наиболее стройной из всех теорий, предназначенных описывать процесс деформированного состояния во времени, является теория линейного упруго-вязкого тела. По этой теории, при постоянных нагрузках распределение напряжений, как правило, остается во времени неизменным и отвечающим упруго-мгновенной задаче; изменяются во времени только деформации. Обобщение этой теории на упруго-пластические деформации ждет своих исследователей.

8. По нелинейным теориям ползучести происходит перераспределение напряжений внутри тела даже при неизменной во времени нагрузке. Эти изменения, как правило, имеют тенденции к выравниванию напряжений в том случае, когда согласно упруго-мгновенной задаче имеется неравномерное распределение напряжений.

9. В процессе интенсивной разработки находится теория неустановившейся ползучести, первые попытки которой (см. стр. 510—514) обещают быть плодотворными.

10. Исследование конструкций во времени совершенно по новому поставило задачу об устойчивости деформации. Так, конструкция в первые моменты работы может иметь деформацию формы устойчивой, но по истечении определенного времени она становится неустойчивой.

Литература к главе — см. главу 20 (стр. 514).

Итак, наш читатель дошел до последней страницы книги, но прежде чем он ее закроет, хотелось бы в последней мысленной беседе с читателем подвести некоторые итоги.

Задачи, рассмотренные в настоящем учебнике, свидетельствуют, с одной стороны, о больших усилиях, затраченных учеными разных стран на доведение науки о прочности до ее современного состояния, а с другой стороны, показывают настоятельную необходимость решения многих новых, сложных задач, вытекающих из практики нашего грандиозного строительства. Иначе говоря, много решено важных задач, но еще больше стоит на очереди задач нерешенных.

Если из числа пока нерешенных задач механики деформируемого тела перечислить лишь те, которые для современного состояния техники нуждаются в их раскрытии, то это был бы большой список тем, имеющий отношение ко многим ветвям механики (теории упругости, теории пластичности, собственно теории сопротивления материалов и т. д.).

Для решения многих таких задач потребуются объединенные усилия инженеров — специалистов по прочности материалов, математиков, физиков, металлургов и других специалистов. Да и самые границы между некоторыми отраслями знаний ныне становятся уже условными. Так, стираются прежние резкие границы между теорией упругости и строительной механикой, сглаживаются границы между теорией пластичности и задачами реологии. Для облегчения математического решения задач механики деформируемого тела, например в теории упругости, ныне все чаще прибегают к помощи других наук (электроники, гидромеханики и т. п.), в которых для решения своего круга задач исходные диф-

ференциальные уравнения оказываются в качественном отношении сходными с некоторыми задачами теории упругости, а в экспериментальном отношении их решение в других науках оказывается легче и обозримее, чем в теории упругости [16*].

Несомненно, что такое кооперирование методов и средств в решении задач из разных областей, но описываемых сходственными уравнениями, *и дальнейшие изыскания в области синтеза методов различных ветвей механики являются прогрессивным направлением в науке.*

Споры, которые имели место и продолжают по отправным положениям теории пластичности в применении ее к особым случаям (сплавы с метастабильной структурой, особые термодинамические условия среды и др.), вынуждают искать новую конституционную форму теории пластичности, в которой гипотеза сплошности не была бы абсолютизирована, не исключены коррективы или отказ от некоторых концепций классической механики.

Поле для теоретических исследований *необозримо*, возможности для этого *неограниченны*.

Наступит время, когда будут, конечно, решены и многие новые проблемы, о которых указывалось выше лишь в порядке постановки вопроса. Инженерная практика перед наукой о прочности, несомненно, поставит тогда качественно новые задачи, быть может, потребуются даже новый язык, чтобы сформулировать их постановку, так как привычные для нас сегодня постулаты и образы современной классической, т. е. нью-тонианской, механики могут рано или поздно оказаться уже неприменимыми. Примером этого может, например, служить появление механики больших скоростей, т. е. релятивистской механики, которая лишь при малых скоростях превращается в механику Ньютона.

Возможно, что именно Ньютон был первый, кто не отрицал ограниченности диапазона своих концепций. Это можно усмотреть в его словах, сказанных им его ближайшему другу перед смертью:

«Не знаю, чем я могу казаться миру, но сам себе я кажусь только мальчиком, играющим на морском берегу, развлекающимся тем, что от поры до времени отыскиваю камешки более цветистые, чем обыкновенно, или красивую раковину, *в то время как великий океан истины расстилается передо мной неисследованным*».

В этих словах основателя классической механики обычно усматривают элементы агностицизма, но в них можно усмотреть признание им бесконечного процесса познания материальной действительности.

«Нет границ, — говоря словами великого Ленина, — для живого плодотворного, истинного, могучего, всесильного, объективного, абсолютного человеческого познания» (В. И. Ленин. Философские тетради. Госполитиздат, 1947, стр. 330).

В условиях нашей советской действительности, когда, в частности, к проблемам прочности привлечено внимание большого коллектива исследователей, располагающих многочисленными лабораториями, оснащенными советской техникой, и когда сама практика строительства в СССР является в этом смысле грандиозной лабораторией, — в таких условиях естественно ожидать и в области механики твердого деформируемого тела *творений, достойных переживаемой нами Великой Эпохи.*

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ
В ДОПОЛНЕНИЕ К УКАЗАННОМУ В КОНЦЕ ОТДЕЛЬНЫХ ГЛАВ*.

1. А р у т ю н я н Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.
2. Ба х ш и я н Ф. А. Вращение жесткого цилиндра в вязко-пластической среде. ПММ, т. XII, вып. 6, 1948. Упруго-сферическая волна нагружения, т. XII, вып. 3, 1948.
3. Без у х о в Н. И.** Развитие прикладных вопросов теории пластических деформаций и их приложение в технике (1917—1957). Известия ВАИА, т. 109, М., 1958.
4. Без у х о в Н. И., Ба ж а н о в В. Л. Нелинейные задачи теории устойчивости деформации сильно нагретых цилиндрических оболочек. Известия ВАИА, т. 118, М., 1959.
5. Без у х о в В. Н. О характерном размере поликристаллического вещества в теории упругости и пластичности. Научные доклады Высшей школы. Строительство № 2, 1959.
6. В а в и л о в С. И. Исаак Ньютон. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1943.
7. В а в и л о в С. И. Ленин и философские проблемы современной физики. Статья в сборнике «Великая сила идей ленинизма». Гос. изд-во политической литературы, 1950.
8. В а н - Ц з и - д е. Прикладная теория упругости. Перевод с английского. Госфизматиздат, М., 1959.
9. В л а с о в В. З. Новый метод расчета тонкостенных призматических складчатых покрытий и оболочек. Госстройиздат, М.—Л., 1933.
10. Г в о з д е в А. А. Расчет несущей способности конструкции по методу предельного равновесия. Стройиздат, 1949.
11. Г е й т в у д Б. Е. Температурные напряжения. Перевод с английского. Изд-во иностранной литературы, М., 1959.
12. Г л у ш к о в Г. С. Определение напряжений во вращающемся диске при различных упругих свойствах материала в двух направлениях. Труды Моск. станко-строит. института, сб. 3, 1939.
13. Г о г о л а д з е В. Г.** Упругие волны. Статья в сборнике «Механика в СССР за тридцать лет». Гостехиздат, 1950.

* Порядковый номер соответствует номеру ссылки в тексте, указанному в квадратных скобках со звездочкой.

** Двойной звездочкой отмечены работы, где имеется обширная библиография по вопросу, одноименному с названием самого источника.

14. Гольденблат И. И. Расчет и конструирование железобетонных балок-стенок. Стройиздат, 1940.
15. Григорьев А. С. Об изгибе круглой плиты за пределом упругости. ПММ, т. XVI, вып. I, 1952.
16. Гутенмахер Л. Г. Электрическое моделирование, М., 1951.
17. Давыдов С. С. Колебания грунта в упруго-пластической стадии от кратковременной нагрузки. Изд-во ВИА, М., 1957.
18. Джанелидзе Г. Ю. и Пановко Я. Г. Статика упругих тонкостенных стержней, серия «Современные проблемы механики». Гостехиздат, 1948.
19. Джанелидзе Г. Ю.** Обзор работ по теории изгиба толстых и тонких плит, опубликованных в СССР. ПММ, т. XII, вып. 1, 1948.
20. Дмитриев Ф. Д. Крушение инженерных сооружений. Госстройиздат, М., г.
21. Жемочкин Б. Н. Расчет балок на упругом полупространстве. Изд-во Военно-инж. акад, М., 1937.
22. Завриев К.-С. Расчетные формулы прочности в особых случаях. ОНТИ, 1935 (впервые эти формулы опубликованы автором в 1913 г. в «Вестнике общества технологов»).
23. Ильшин А. А. Некоторые основные задачи теории пластичности. Известия АН СССР, отделение технических наук, № 12, 1949.
24. Исследования по строительной механике. Сб. статей. Госстройиздат, М., 1954 (Статья А. Р. Ржаницына по теории ползучести, статья Н. С. Чаусова по теории оболочек и др.).
25. Институт механики АН СССР, Тезисы докладов на Всесоюзном совещании по теории упругости, строительной механике и теории пластичности. 7-10/XII-1950. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950.
26. Исследования по вопросам строительной механики и теории пластичности. Госстройиздат, М., 1956 (статьи И. Е. Милейковского, Г. А. Гениева, Н. С. Чаусова и др. по теории оболочек).
27. Информационный бюллетень № 1. Научный Совет по проблеме «Научные основы прочности и пластичности». Изд-во АН СССР, 1960.
28. Ишлинский А. Ю.** Пластичность. Статья в сборнике «Механика в СССР за тридцать лет», Гостехиздат, 1950.
29. Ишлинский А. Ю. Линейные законы деформирования не вполне упругих тел. Доклады АН СССР, т. XXVI, № 1, 1948.
30. Калманок А. С.. Строительная механика пластинок. Машстройиздат, 1950.
31. Кан С. Н. и Пановко Я. Г. Элементы строительной механики тонкостенных конструкций. Оборонгиз, 1949.
32. Кирпичев В. Л. Учение о прочности построек и машин. Киев, 1905.
33. Качанов Л. М. Механика пластических сред. Гостехиздат, 1948.
34. Колосов Г. В. О некоторых приложениях комплексного преобразования уравнений математической теории упругости к отысканию общих типов решения этих уравнений. Известия Ленинградского электр. института, 1928.
35. Ленин В. И. Философские тетради. Госполитиздат, 1947.
36. Ленский В. С. Метод построения динамической зависимости между напряжениями и деформациями по распределению остаточных деформаций. Вестник Моск. ун-та, № 5, 1951.
37. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат. 1947.
38. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1935.
39. Межлумян Р. А. Определение несущей способности тонкостенных конструкций с учетом упрочнения материала. ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.
40. Михлин С. Г. Основные уравнения математической теории пластичности, Изд-во АН СССР, 1934.

41. Моисеев Н. Д. Общий очерк развития механики в России и в СССР. Статья в сб. «Механика в СССР за тридцать лет». Гостехиздат, 1950.
42. Надаи А. Пластичность. ОНТИ НКТП, 1936.
43. Новожилов В. В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958.
44. Огибалов П. М. О распространении вязко-пластического течения с учетом упрочнения для случаев вращения и сдвига. ПММ, т. V, вып. 1, 1947.
45. Одинг И. А. Проблема прочности в машиностроении. Известия АН СССР, отделение технических наук. № 12, 1949.
46. Одинг И. А. За материалистические принципы в теории прочности и пластичности металлов. Вестник машиностроения, № 2, 1950.
47. Одинг И. А. Релаксация и ползучесть металлов. Вестник машиностроения, № 5—6, № 7—8, № 9—10, 1946.
48. Прагер В. Проблемы теории пластичности. Перевод с немецкого. Госфизматиздат, М., 1958.
49. Прагер В. и Ходж Ф. Г. Теория идеально-пластических тел. Перевод с английского. Изд-во Иностранной литературы, М., 1956.
50. Попов Е. П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
51. Рабинович И. М. Достижения строительной механики в СССР. Краткий обзор, Стройиздат, 1949.
52. Работнов Ю. Н. Пластинки и оболочки. Статья в сборнике «Механика за тридцать лет», Гостехиздат, 1950.
53. Работнов Ю. Н. Приближенная техническая теория упруго-пластических оболочек. ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.
54. Работнов Ю. Н. Расчет деталей машин на ползучесть. Известия АН СССР, отделение технических наук, № 6, 1948.
55. Рахматулин Х. А. Упруго-пластические волны. ПММ, т. IX, вып. 1, 1945.
56. Ржаницына А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
57. Савин Т. Н. Концентрация напряжений около отверстий. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
58. Серенсен С. В. Основы технической теории упругости (применительно к расчетам прочности в самолетостроении), Х.—К., 1934.
59. Синельников В. В. О природе упругости и прочности твердых тел. Диссертация, 1947, Библиотека Моск. института инженеров транспорта.
60. Слезкин Н. А. Основные уравнения движения деформируемой среды. ДАН, № 1, 1951.
61. Смирнов-Аляев Г. А., Розенберг В. М. Технологические задачи теории пластичности. Лениздат, 1951.
62. Совещание по контактным напряжениям и усталости рабочих поверхностей 23—25 мая 1941 г. Тезисы докладов, издание Института машиноведения АН СССР, М., 1941.
63. Соколовский В. В. О некоторых работах по теории пластичности. ПММ, т. IX, вып. 6, 1945.
64. Соколовский В. В. Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях. ПММ, т. XII, вып. 3, 1948.
65. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Изд. 2-ое, М., 1954.
66. Тезисы совещания по теории упругости, строительной механике и теории пластичности 25—28 марта 1946 г. Изд. Института механики АН СССР, М., 1946.
67. Тезисы докладов на конференции по пластическим деформациям. Изд. АН СССР, М., 1936.
68. Теория пластичности. Сборник статей под ред. Ю. Н. Работнова, Гос. Изд-во иностранной литературы, М., 1948.

69. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. Перевод с английского, Гостехиздат, М.—Л., 1946.
 70. Уманский А. А. Кручение и изгиб тонкостенных конструкций. М., 1939.
 71. Улицкий И. И. Расчет бетонных и железобетонных арочных и комбинированных конструкций с учетом длительных процессов. Гостехиздат Украины. Киев — Львов, 1950.
 72. Филоненко-Бородич М. М. Новые вопросы строительной механики. Статья в сборнике «Механика в СССР за тридцать лет», Гостехиздат, 1950.
 73. Филоненко-Бородич М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.
 74. Филоненко-Бородич М. М. Некоторые приближенные теории упругого основания. Ученые записки Моск. государственного университета, Механика, вып. 46 1940.
 75. Фридман М. М. Математическая теория упругости анизотропных сред. ПММ, т. XIV, вып. 3. 1950.
 76. Фрохт М. Фотоупругость, т. 1. Гостехиздат, 1948.
 77. Христианович С. А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре. Математический сборник, нов. серия, т. I 43), вып. 4, 1938.
 78. Чаплыгин С. А. К вопросу о деформации трубы, ограниченной двумя эксцентрическими цилиндрами и сжатой постоянной давлением. Полное собрание сочинений, т. III. Изд-во АН СССР, 1935.
 79. Ченцов Н. Г. Исследование фанеры как ортотропной пластинки. Труды ЦАГИ, вып. 383, 1938.
 80. Шерман Д. И.** Основные плоские и контактные (смешанные) задачи статической теории упругости. Статья в сборнике «Механика в СССР за тридцать лет», Гостехиздат, 1950.
 81. Шиманский Ю. А. Изгиб пластин ОНТИ, 1934.
 82. Штаерман И. Я. Теория расчета купола как арки на упругом основании. Журнал «Проект и стандарт», 1933.
 83. Энгельс Ф. Диалектика природы. Гос. изд-во политической литературы, 1948.
 84. Энгельс Ф. Анти-Дюринг. Гос. изд-во политической литературы, 1948.
-

Николай Иванович Безухов

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ,
ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ**

Редактор *Н. В. Колкунов*

Редактор издательства *Т. Д. Николаева*

Технический редактор *Л. А. Григорчук*

Корректор *Н. Ф. Ломакина*

Сдано в набор 1/VI-61 г. Подписано к печати 13/XII-61 г.

Бумага 60×90¹/₁₆. 33,75 печ. л. 30,81 уч.-изд. л.

Заказ № В-218. Тираж 17000 экз. Т—13890. Изд. № От/298. Цена 1 р. 02 к.

Государственное издательство «Высшая школа»,
Москва, Б-62, Подсосенский пер., 20

Типография «Татполиграф» Министерства культуры ТАССР.
Казань, ул. Миславского, д. 9.

Замеченные опечатки (для 2-го завода)

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
258	13 снизу	$k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$	$k = \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$
258	3 снизу	$\tau_{xy} = - \frac{P}{-\frac{1}{2} \sin 2\alpha} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$	$\tau_{xy} = - \frac{P}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}$
364	15 снизу	$= 1 k_1 =$	$= 1, k_1 =$
364	14 снизу	$= 4 k_1 =$	$= 4, k_1 =$
414	5 снизу	$\epsilon_1 =$	$\epsilon_2 =$
434	22 сверху	$\epsilon_T \text{ и } \epsilon_T$	$\epsilon_T \text{ и } \sigma_T$
442	4 снизу	$W_{\text{пл}}$	W_T
495	фиг. 20.03	$(B - E) n \epsilon_0$	$(B - E) n \dot{\epsilon}_0$
496	фиг. 20.04	$\frac{n \sigma_0 (B - E)}{E^2}$	$\frac{n \dot{\sigma}_0 (B - E)}{E^2}$
498	12 сверху	$w'' = w_{2e} \frac{t - t_1}{Bn}$	$w'' = w_{2e} \frac{-t - t_1}{Bn}$
519	5 сверху	$[60]$	$[33]$

1 p. 02 k.