



издательство

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

**В.А. ВЕСТЯК
А.В. ЗЕМСКОВ**

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ И ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Москва • 2026

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)**

В.А. Вестяк, А.В. Земсков

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ
И ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ**

Учебное пособие

Утверждено
на заседании редсовета
15 октября 2025 г.

Москва
Издательство МАИ
2026

Вестяк В.А., Земсков А.В. Решение задач по функциональному анализу и вариационному исчислению: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 2026. – 96 с.: ил.

В пособии содержится необходимый материал по методам решения задач по функциональному анализу и вариационному исчислению. Приведены краткие сведения по нормированным, метрическим, банаховым и гильбертовым пространствам, теории линейных операторов и рядов Фурье.

Подробно разобраны примеры решений ряда задач по перечисленным разделам функционального анализа и вариационного исчисления. Особое внимание уделяется приложениям теоретического материала к решению систем линейных алгебраических уравнений, алгебраических и интегральных уравнений, к решению вариационных задач, что может быть в дальнейшем использовано при моделировании технических и информационных систем.

Для студентов, обучающихся по направлениям «Прикладная информатика» и «Прикладная механика», изучающих дисциплину «Функциональный анализ и вариационное исчисление».

Рецензенты:

департамент прикладной математики МИЭМ НИУ ВШЭ (руководитель департамента канд. техн. наук, доцент *А.В. Белов*); докт. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. Лаборатории динамических испытаний НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, *Е.А. Коровайцева*

ISBN 978-5-4316-1344-9

© Московский авиационный институт
(национальный исследовательский
университет), 2026

Предисловие

Функциональный анализ, являясь одним из разделов высшей математики, находит применение во многих фундаментальных и прикладных научных исследованиях. Со второй половины 20-го века функциональный анализ широко применяется в теории дифференциальных и интегральных уравнений, математической и теоретической физике, в механике деформируемого твёрдого тела, теории управления и оптимизации, в вычислительной математике и других областях.

Методы вариационного исчисления широко применяются в математическом моделировании технических систем. В механике вариационный метод является одним из мощнейших инструментов получения уравнений движения как для дискретных, так и для распределённых систем, в том числе с учетом связанности полей различной физической природы (термоупругость, термомехано-диффузия, электромагнитоупругость и т.д.).

В настоящем учебном пособии приведены краткие сведения по метрическим, нормированным и гильбертовым пространствам, теории линейных операторов, методам решения алгебраических и интегральных уравнений, а также вариационных задач с фиксированными и подвижными границами. Приведены листинги программ, написанных в пакете символьной математики Maple, используемых при решении рассмотренных задач.

Глава 1. Основная теория к решению задач

1.1. Метрические и нормированные пространства

Определение 1.1.1. Множество M называется *метрическим пространством*, если $\forall x, y \in M$ поставлено в соответствие число $\rho(x, y)$ причем:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in M$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ – аксиома *неотрицательности*;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ – аксиома *симметрии*;
- 3) $\forall x, y, z \in X$, $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ – аксиома «*неравенство треугольника*».

Число $\rho(x, y)$ называется *метрикой*, оно определяет расстояние между элементами x и $y \in M$.

Пример 1.1.1. \mathbb{R} – множество точек на плоскости. \mathbb{R} – метрическое пространство с метрикой (расстоянием) $\rho(x, y) = |x - y|$. Очевидно, что модуль числа удовлетворяет всем трём аксиомам метрического пространства.

Определение 1.1.2. *Линейным пространством* называется множество L (с элементами произвольной природы), если в этом множестве введены две *линейные операции*: операция сложения элементов $x, y \in L$, которая сопоставляет им элемент этого же множества L , называемый *суммой* и обозначаемый $x + y$, и операция умножения элемента $x \in L$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$, которая сопоставляет им элемент этого же множества L , называемый *произведением элемента x на число α* и обозначаемый αx . При этом, $\forall x, y, z \in L$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ эти линейные операции удовлетворяют следующим аксиомам:

- 1) $x + y = y + x$ (*коммутативность сложения*);
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (*ассоциативность сложения*);
- 3) существует *нулевой* элемент $0 \in L$: $\forall x \in L \Rightarrow x + 0 = x$;
- 4) для каждого $x \in L$ существует *противоположный элемент* $-x \in L$: $x + (-x) = 0$;

$$5) 1 \cdot x = x;$$

$$6) \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \text{ (ассоциативность умножения на число);}$$

$$7) (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \text{ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения чисел);}$$

$$8) \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \text{ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения элементов).}$$

Элементы линейного пространства принято называть *векторами*. Их будем обозначать так же, как и элементы метрических пространств: x, y, z, \dots . Однако, для некоторых специальных пространств, типа: \mathbb{R}^n , конечномерного евклидова пространства E^n и l_p (см. далее) будет использоваться прямой полужирный шрифт: $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$. Для матриц будут использоваться обозначения: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$

Примерами линейных пространств являются:

1) n -мерное арифметическое пространство \mathbb{R}^n ;

2) $C[a, b]$ – множество пространство функций непрерывных на отрезке;

3) $C^n[a, b]$ – множество функций, n -раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$;

4) множество матриц одинакового размера;

5) n -мерное евклидово пространство.

Определение 1.1.3. Линейное пространство L называется *нормированным пространством*, если каждому элементу $x \in L$ поставлено в соответствие число $\|x\|$ – *норма* этого элемента – так, что для любых $x, y \in L$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$:

1) $\|x\| \geq 0$, при этом $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (*неотрицательность*);

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (*однородность*);

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*неравенство треугольника*).

Можно доказать, что если пространство нормированное, то оно является метрическим (обратное не верно) [3–5, 7, 12–14]. При этом метрика в нормированном пространстве определяется следующим образом:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

В частности, $\|x\| = \|x - 0\| = \rho(x, 0)$, так что норма элемента есть расстояние от этого элемента x до нулевого элемента.

При решении прикладных задач математики, механики, физики и информатики рассматриваются следующие пространства:

- 1) $C[a, b]$ – пространство функций $f(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Здесь норма определяется так:

$$\|f\|_{\infty} = \max_{[a, b]} |f(x)|. \quad (1.1.1)$$

Более широким пространством является множество функций, абсолютно интегрируемых на отрезке $[a, b]$ (обозначается $C_1[a, b]$) с нормой:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (1.1.2)$$

Также, довольно часто используется пространство непрерывных функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[a, b]$. Соответствующая этому пространству норма имеет вид:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}. \quad (1.1.3)$$

Все эти нормы являются частным случаем так называемой p -нормы (нормы Гёльдера), которая определяется по формуле:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (1.1.4)$$

- 2) Арифметическое пространство \mathbb{R}^n – множество упорядоченных наборов чисел $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Если эти числа комплексные, то

соответствующее пространство обозначается \mathbb{C}^n . Здесь тоже можно ввести p -норму следующего вида:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (1.1.5)$$

На практике чаще всего используются нормы:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_k |x_k|; \quad (1.1.6)$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|; \quad (1.1.7)$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.1.8)$$

3) Пространство l_p ограниченных последовательностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ с нормой:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (1.1.9)$$

Само собой разумеется, здесь предполагается, что ряд в (1.1.9) является сходящимся.

Так же, как и в предыдущих случаях чаще всего рассматриваются:

- пространство l_∞ с нормой вида (1.1.6);

- пространство l_1 абсолютно суммируемых последовательностей с нормой:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^\infty |x_k|; \quad (1.1.10)$$

- пространство l_2 последовательностей, суммируемых с квадратом с нормой:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.1.11)$$

Нормы, определённые равенствами (1.1.8), (1.1.11) и соответствующие им метрики принято называть *евклидовыми*. С помощью

них определяется расстояние между элементами привычным нам образом (рис. 1.1.1).

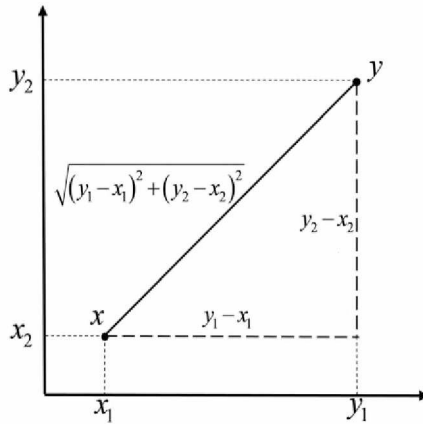


Рис. 1.1.1

Метрики, порожденные нормами (1.1.7) и (1.1.10), называются метриками городских кварталов или манхэттенским расстоянием.

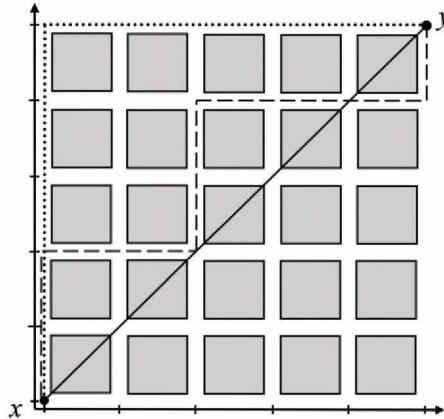


Рис. 1.1.2

Смысл этого термина пояснён на рис. 1.1.2. От элемента x к элементу y невозможно переместиться по прямой линии (сплошная линия). Возможно только движение по пространству между серыми квадратами, например, вдоль штриховой или пунктирной линий.

Расстояние от x до y будет определяться как сумма длин звеньев этих ломаных. В данном случае, $\|y-x\| = 10$.

4) Пространство матриц размера $m \times n$. Данное пространство будем обозначать $\mathbb{R}^{m \times n}$. Здесь каждая строка матрицы является элементом арифметического пространства \mathbb{R}^n . Таким образом, матричное пространство можно рассматривать как упорядоченную совокупность арифметических пространств. Норму в матричном пространстве можно определить следующим образом:

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\| \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}. \quad (1.1.12)$$

Такая норма называется *операторной (подчинённой или индуцированной)* нормой, так как она порождается соответствующей векторной нормой. Используя векторные нормы 1 и ∞ получаем:

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|; \quad (1.1.13)$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|. \quad (1.1.14)$$

Кроме операторной нормы используется векторная p -норма:

$$\|\mathbf{A}\|_p = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{1/p}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (1.1.15)$$

При $p=2$ она называется *нормой Фробениуса*.

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.1.16)$$

При решении практических задач мы будем пользоваться матричными нормами (1.1.13), (1.1.14) и (1.1.16).

1.2. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические и банаховы пространства

Пусть в метрическом пространстве M задана последовательность $\{x_n\}$.

Определение 1.2.1. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся* в метрическом пространстве M , если $\exists x_0 \in M$ такое, что $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ следует, что $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$.

Элемент x_0 , к которому сходится последовательность $\{x_n\}$ называется её *пределом* и обозначается так: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Если пространство M является нормированным и $\{x_n\}$ последовательность в этом пространстве, сходящаяся к x_0 , то $\rho(x_n, x_0) = \|x_n - x_0\|$, где $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Здесь важно отметить, что в конечномерном нормированном пространстве все нормы являются эквивалентными, т.е. из сходимости последовательности по одной из норм следует сходимость по любой из норм [3–5, 7, 12–14]. Так, например, для пространств \mathbb{R}^n и $\mathbb{R}^{m \times n}$ в отношении норм (1.1.6)–(1.1.8), (1.1.13), (1.1.14) и (1.1.16) справедливы следующие неравенства:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \|\mathbf{x}\|_\infty; \quad (1.2.1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|\mathbf{A}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq \sqrt{m} \|\mathbf{A}\|_\infty, \quad (1.2.2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|\mathbf{A}\|_1 \leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{A}\|_1.$$

В бесконечномерных пространствах условие согласованности всех норм не выполняется. Для пространства l_p справедливо следующее неравенство:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \dots \leq \|\mathbf{x}\|_p \leq \dots \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \quad \forall \mathbf{x} \in l_p. \quad (1.2.3)$$

Соответственно, для пространства $C_p[a, b]$ в отношении норм (1.1.1) –(1.1.3) можно доказать, что:

$$\frac{\|f\|_1}{b-a} \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{b-a}} \leq \|f\|_\infty \quad \forall f \in C_p[a, b], \quad p = \{1, 2, \infty\}. \quad (1.2.4)$$

Сходимость по норме $\|f\|_\infty$ в пространстве $C(G)$ называется *равномерной сходимостью*, а по норме $\|f\|_2$ в пространстве $C_2(G)$ – *сходимостью в среднеквадратичном*.

Таким образом:

- 1) из *равномерной сходимости* следует *сходимость по всем остальным p -нормам в пространствах $C_p(G)$* ;
- 2) из *сходимости по норме $\|x\|_1$ в l_1* следует *сходимость по нормам в других пространствах l_p* .

Определение 1.2.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной* или *сходящейся в себе* в метрическом пространстве M , если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n, m > N$ следует, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Отметим основные свойства последовательностей в метрических и нормированных пространствах [3–5, 7, 12–14]:

- 1) *любая сходящаяся последовательность ограничена*;
- 2) *любая сходящаяся последовательность имеет единственный предел*;
- 3) *любая сходящаяся последовательность является фундаментальной*;
- 4) *всякая фундаментальная последовательность является ограниченной*.

Заметим, что фундаментальная последовательность может не являться сходящейся в пространстве M . Рассмотрим, например, последовательность $\{1/n\}$. Все члены этой последовательности принадлежат полуинтервалу $(0, 1]$, а её предел $x_0 = 0 \notin (0, 1]$. Эта последовательность является фундаментальной (так как сходится к $x_0 = 0$ (свойство 3), но не является сходящейся на множестве $(0, 1]$. Поэтому будет уместно дать следующее определение.

Определение 1.2.3. Метрическое пространство M называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность $\{x_n\} \in M$

является сходящейся в M , т.е. её предел $x_0 \in M$. В противном случае метрическое пространство называется *неполным*.

Определение 1.2.4. Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством*.

Из курса математического анализа известно, что пространство \mathbb{R} является полным (теорема Больцано-Коши). Также полными пространствами являются: \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}^{m \times n}$, l_p и $C(G)$. Примерами неполных пространств являются $C_p(G)$ [3, 13].

Важно отметить, что *если A замкнутое подмножество в метрическом пространстве M , то A тоже является полным метрическим пространством*. Так, например, любой отрезок $[a, b] \in \mathbb{R}$ является полным метрическим пространством, так как он замкнут и \mathbb{R} — полное метрическое пространство.

1.3. Сжимающие отображения. Применение принципа сжимающих отображений к решению алгебраических уравнений, систем линейных отображений и интегральных уравнений

Рассмотрим пару метрических пространств M и N .

Определение 1.3.1. Если каждому элементу $x \in M$ по некоторому правилу A единственным образом поставлен в соответствие определённый элемент $y \in N$, то говорят, что задано *отображение* множества M на множество N . Синонимом понятия «отображение» является *оператор*. Множество M называется *областью определения* оператора A , которое будем также обозначать $D(A)$, а N — *множеством значений* оператора A , которое будем обозначать $E(A)$.

Отображения обозначаются следующим образом: $A: M \rightarrow N$ или $y = Ax$, или $y = A[x]$ (вместо квадратных скобок могут использоваться круглые).

Частные случаи отображений:

- если $M = N$, то такое отображение называется *преобразованием*;
- если $N = \mathbb{R}$, то такое отображение называется *функционалом*;

- если $M = \mathbb{R}^n$ и $N = \mathbb{R}$, то отображение называется *скалярной функцией*,

- если $M = \mathbb{R}^n$ и $N = \mathbb{R}^m$, то отображение называется *векторной функцией*.

Определение 1.3.2. Оператор $A: M_1 \rightarrow M_2$ называется *ограниченным* если он отображает всякое ограниченное подмножество из M_1 в ограниченное подмножество из M_2 . В частности, линейный оператор $A: M_1 \rightarrow M_2$ является ограниченным, если существует константа C такая, что

$$\|Ax\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in M_1.$$

Определение 1.3.3. Нормой линейного оператора называется число, вычисляемой по формуле:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \quad (1.3.1)$$

Определение 1.3.4. Отображение (преобразование) $A: M \rightarrow M$ имеет *неподвижную точку* x_0 , если $A[x_0] = x_0$.

Определение 1.3.5. Отображение (преобразование) $A: M \rightarrow M$ называется *сжимающим*, если существует действительное число $\alpha \in (0, 1)$ такое, что $\rho(Ax, Ay) = \alpha\rho(x, y) \quad \forall x, y \in M$.

Теорема 1.3.1. (теорема Банаха о сжимающем операторе). Пусть M – полное метрическое пространство. Тогда сжимающее отображение $A: M \rightarrow M$ всегда имеет единственную неподвижную точку [3–5, 7, 12–14].

Данная теорема даёт обоснование *принципу сжимающих отображений*, который широко применяется при решении алгебраических уравнений, систем линейных алгебраических уравнений, интегральных уравнений и т.д.

Решение алгебраических уравнений

Рассмотрим уравнение:

$$f(x) = x, \quad (1.3.2)$$

где $f(x)$ – дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция.

Будем предполагать, что это уравнение на отрезке $[a, b]$ имеет единственное решение. Для нахождения этого решения зададим начальное приближение x_0 . По заданному приближению найдём $x_1 = f(x_0)$. На k -м шаге будем иметь:

$$x_k = f(x_{k-1}). \quad (1.3.3)$$

Полученная последовательность $\{x_k\}$ будет сходиться к решению уравнения (1.3.1) если:

$$\|f'\| = \max_{[a,b]} |f'(x)| < 1. \quad (1.3.4)$$

Данное условие является условием сжимаемости отображения f [5, 7, 12, 13], что в соответствии с теоремой Банаха гарантирует сходимость последовательности $\{x_k\}$. Полнота метрического пространства $[a, b]$ гарантирует сходимость этой последовательности к решению уравнения (1.3.2).

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (1.3.5)$$

где $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – невырожденная квадратная матрица размера $n \times n$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – столбец неизвестных, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ – столбец правых частей системы (1.3.5).

Приведём систему (1.3.5) к эквивалентному виду:

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Gamma x} + \mathbf{c}. \quad (1.3.6)$$

Зададим начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{c}$. Далее найдём $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{\Gamma x}^{(0)} + \mathbf{c}$ и т.д. На k -м шаге получим:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \Gamma \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}. \quad (1.3.7)$$

Условием сходимости последовательности $\mathbf{x}^{(k)}$ будет выполнение неравенства [5, 7, 12]:

$$\|\Gamma\| < 1, \quad (1.3.8)$$

где $\|\Gamma\|$ – любая из норм матрицы Γ .

Опять же, полнота пространства $\mathbb{R}^{n \times n}$ гарантирует сходимость этой последовательности к решению системы (1.3.6). Так как системы (1.3.5) и (1.3.6) эквивалентны, то это будет и решением системы (1.3.5).

Рассмотренные здесь методы решения алгебраических уравнений и систем линейных алгебраических уравнений в теории численных методов называются *методами простой итерации*.

Решение интегральных уравнений

Определение 1.3.6. Уравнение

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt + \varphi(x) \quad (1.3.9)$$

называется *интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода*.

Здесь $f(x) \in C[a,b]$ – неизвестная функция, функция $K(x,t)$ называется *ядром* интегрального уравнения Фредгольма. Она является непрерывной в квадрате $Q = \{(x,t) : a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Если $\varphi(x) \equiv 0$, то это уравнение называется *однородным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода*.

Уравнение

$$\int_a^b K(x,t) f(t) dt = \varphi(x) \quad (1.3.10)$$

называется *интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода*.

Определение 1.3.7. Уравнение

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,t) f(t) dt + \varphi(x) \quad (1.3.11)$$

называется *интегральным уравнением Вольтерры 2-го рода*.

Здесь $f(x) \in C[a, b]$ – неизвестная функция, функция $K(x, t)$ называется *ядром* интегрального уравнения Вольтерры. Она является непрерывной в треугольнике $T = \{(x, t) : a \leq x \leq b, a \leq t \leq x\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Если $\varphi(x) \equiv 0$, то это уравнение называется *однородным интегральным уравнением Вольтерры 2-го рода*.

Уравнение

$$\int_a^x K(x, t) f(t) dt = \varphi(x) \quad (1.3.12)$$

называется *интегральным уравнением Вольтерры 1-го рода*.

Для решения уравнений (1.3.9) и (1.3.11) строится последовательность $\{f_k(x)\}$. В качестве начального приближения берется $f_0(x) = \varphi(x)$. Далее находим:

$$f_k(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) f_{k-1}(t) dt + \varphi(x). \quad (1.3.13)$$

$C[a, b]$ является полным пространством. Условием сходимости последовательности (1.3.13) является выполнение следующего неравенства [6, 8, 11]:

$$C|\lambda|(b-a) < 1, \quad (1.3.14)$$

где $C = \max_Q |K(x, t)|$. Этот максимум достигается, так как ядро $K(x, t)$ является непрерывным в квадрате Q (Теорема Вейерштрасса).

Аналогичным образом ищется решение уравнения (1.3.11). Здесь Интегральный оператор будет сжимающим при любых λ [6, 8, 11].

1.4. Обратный оператор. Решение интегральных уравнений

Определение 1.4.1. Пусть M_1 и M_2 – метрические пространства, A – оператор с областью определения $D(A) \subset M_1$ и множеством значений $E(A) \subset M_2$. Тогда:

1) оператор B называется *левым обратным* для оператора A , если $BA = E$;

2) оператор C называется *правым обратным* для оператора A , если $AC = E$.

Пример 1.4.1. Пусть линейный оператор A задан матрицей:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Тогда оператор C , заданный матрицей:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^{-1} \\ 0 & -b^{-1} \end{pmatrix}$$

будет являться правым обратным для оператора A . В самом деле:

$$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^{-1} \\ 0 & -b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E},$$

т.е. $AC = E$.

С другой стороны:

$$\mathbf{CA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^{-1} \\ 0 & -b^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{E},$$

т.е. оператор C не является левым обратным оператором для оператора A .

Ещё одним примером могут служить следующая пара операторов:

$$A[f] = \frac{df(x)}{dx}, \quad B[f] = \int_a^x f(t) dt,$$

$$AB[f] = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \Rightarrow AB = E,$$

$$BA[f] = \int_a^x \frac{df^a(t)}{dt} dt = f(x) - f(a) \Rightarrow BA \neq E.$$

Очевидно, что *если оператор A имеет и левый обратный B и правый обратный C , то они равны*. В самом деле:

$$B = B(AC) = (BA)C = C.$$

В этом случае говорят, что оператор A имеет *обратный оператор*, который обозначается A^{-1} .

Теорема 1.4.1. (теорема Банаха об обратном операторе). Если ограниченный линейный оператор взаимно однозначно отображает банахово пространство B_1 на банахово пространство B_2 , то обратный оператор ограничен [3–5, 7, 12–14].

Теорема 1.4.2. Пусть линейный ограниченный оператор A взаимно однозначно отображает банахово пространство B в себя и $|\lambda|\|A\| \leq q < 1$, где λ – действительное число. Тогда оператор $E - \lambda A$, где E – единичный оператор, имеет обратный ограниченный оператор. Этот обратный оператор имеет вид [3–5, 7, 12–14]:

$$(E - \lambda A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n. \quad (1.4.1)$$

Здесь степени оператора A определяются как суперпозиция операторов, т.е. $A^n = A(A^{n-1})$.

Данная теорема даёт конструктивный подход к решению различных операторных уравнений, в том числе интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерры 2-го рода.

Решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

Рассмотрим уравнение Фредгольма (1.3.9), которое запишем в операторной форме:

$$(E - \lambda A)f = \varphi, \quad (1.4.2)$$

где A – интегральный оператор Фредгольма

$$A[f] = \int_a^b K(x, t)f(t)dt, \quad (1.4.3)$$

отображающий банахово пространство $C[a, b]$ в него самого же.

В силу теоремы 1.4.2 уравнение (1.4.2) имеет единственное решение, которое в соответствии с равенством (1.4.1) имеет вид:

$$f = (E - \lambda A)^{-1} \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n \varphi. \quad (1.4.4)$$

Ряд (1.4.4) называется *рядом Неймана*. Если ядро уравнения (1.3.9) непрерывно в квадрате $Q = \{(x, y) : a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$, то оно ограничено в нём, т.е. $\exists C : |K(x, t)| \leq C \forall (x, t) \in Q$. Можно доказать, что в этом случае $\|A\| \leq C(b - a)$, и тогда ряд Неймана сходится при условии, что [6, 8, 11]:

$$|\lambda| C(b - a) \leq q < 1. \quad (1.4.5)$$

Найдём степени оператора A . Имеем:

$$A^2[f] = \int_a^b K(x, t) \left[\int_a^b K(t, \tau) f(\tau) d\tau \right] dt = \int_a^b \left[\int_a^b K(x, t) K(t, \tau) dt \right] f(\tau) d\tau.$$

Поменяем τ и t местами и положим:

$$K_1(x, t) = K(x, t), \quad K_2(x, t) = \int_a^b K(x, \tau) K_1(\tau, t) d\tau.$$

Функция $K_2(x, t)$ называется *вторым повторным* или *вторым итерированным ядром*. Таким образом:

$$A^2[f] = \int_a^b K_2(x, t) f(t) dt. \quad (1.4.6)$$

Далее получаем:

$$A^n[f] = \int_a^b K_n(x, t) f(t) dt, \quad (1.4.7)$$

где $K_n(x, t)$ — n -е повторное итерированное ядро находящееся по формуле

$$K_n(x, t) = \int_a^b K(x, \tau) K_{n-1}(\tau, t) d\tau. \quad (1.4.8)$$

Теперь, с помощью итерированных ядер решение уравнения (1.3.9) запишется так:

$$f(x) = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K_n(x, t) \varphi(t) dt. \quad (1.4.9)$$

Введём в рассмотрение функцию:

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, t), \quad (1.4.10)$$

которая называется *резольвентой* или *разрешающим ядром* уравнения (1.3.9).

Можно показать, что при выполнении условия (1.4.5) этот ряд сходится равномерно в квадрате $Q = \{(x, y) : a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$.

Таким образом, окончательно решение уравнения Фредгольма (1.3.9) запишется следующим образом:

$$f(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda) \varphi(t) dt. \quad (1.4.11)$$

Решение интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода

Аналогично, для интегрального уравнения Вольтерры второго рода (1.3.11) имеем операторное представление в форме (1.4.2), где A – интегральный оператор Вольтерры:

$$A[f] = \int_a^x K(x, t) f(t) dt. \quad (1.4.12)$$

Решение этого уравнения представляется в виде ряда Неймана (1.4.4), который сходится при любых действительных λ [6, 8, 11].

Итерированные ядра вычисляются следующим образом:

$$K_1(x, t) = K(x, t), \quad K_n(x, t) = \int_t^x K(x, \tau) K_{n-1}(\tau, t) d\tau. \quad (1.4.13)$$

Решение уравнения Вольтерры записывается в виде:

$$f(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^x R(x, t, \lambda) \varphi(t) dt, \quad (1.4.14)$$

где резольвента $R(x, t, \lambda)$ находится по формуле (1.4.10).

1.5. Гильбертовы пространства

Определение 1.5.1. Линейное пространство над полем K (K – множество действительных или комплексных чисел) называется

предгильбертовым пространством, если в нём для любой пары элементов x и y определена операция скалярного произведения (x, y) , обладающая следующими свойствами:

- 1) (x, y) – действительное или комплексное число;
- 2) $(x, x) \geq 0$, причём $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
- 4) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \forall \alpha \in K$;
- 5) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.

При этом, из свойств 3 и 4 следует, что:

$$(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha(y, x)} = \overline{\alpha} \overline{(y, x)} = \overline{\alpha} (x, y) \forall \alpha \in K,$$

а из свойств 3 и 5:

$$(x + y, z) = \overline{(z, x + y)} = \overline{(z, x) + (z, y)} = \overline{(z, x)} + \overline{(z, y)} = (x, z) + (y, z).$$

Заметим также, что предгильбертово пространство является обобщением евклидова пространства E^n на случай бесконечномерных линейных пространств над произвольным числовым полем. Так же, как и для евклидовых пространств предгильбертово пространство является нормированным с нормой, индуцированной скалярным произведением

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (1.5.1)$$

Такую норму принято называть *среднеквадратичной нормой*.

Определение 1.5.2. Полное предгильбертово пространство называется *гильбертовым пространством*. Его будем обозначать буквой H .

Для элементов гильбертовых пространств справедливо также равенство *параллелограмма*:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (1.5.2)$$

и *неравенство Коши-Буняковского-Шварца* [3–5, 7, 12, 13]:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| = \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)}, \quad (1.5.3)$$

с помощью которого доказывается неравенство треугольника (определение 1.1.3).

Примеры гильбертовых пространств.

1) Пространство \mathbb{R}^n . Скалярное произведение вводится по формуле:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (1.5.4)$$

Данное скалярное произведение порождает норму $\|x\|_2$ (2-норма):

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (1.5.5)$$

2) Пространство l_2 . Скалярное произведение и соответствующая норма задаются следующими равенствами:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}. \quad (1.5.6)$$

Пространство $C_2(G)$ не является полным, поэтому оно не является гильбертовым. Но в нём тоже можно ввести скалярное произведение следующим образом:

$$(f, g) = \int_G f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in G \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.5.7)$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_G f^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}.$$

Таким образом пространство $C_2(G)$ является предгильбертовым.

Определение 1.5.3. Система элементов $\{e_k\} \in H$ называется *ортогональной*, если:

$$(e_k, e_m) = 0 \quad \forall k \neq m.$$

Если же при этом:

$$(e_k, e_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 1, & k = m \end{cases},$$

то такая система называется *ортономированной*.

Пример 1.5.1. В пространстве l_2 ортогональной системой является следующий набор функций:

$$e_1 = \{1, 0, 0, 0, \dots\}, \quad e_2 = \{0, 1, 0, 0, \dots\}, \quad e_3 = \{0, 0, 1, 0, \dots\}, \dots \quad (1.5.8)$$

Пример 1.5.2. В пространстве $C_2[-l, l]$ можно выделить два набора функций:

$$e_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad e_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi kx}{l}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.5.9)$$

или

$$e_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi kx}{l}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.5.10)$$

Основной смысл гильбертова пространства заключается в том, что для элементов этого пространства можно определить геометрические соотношения.

Так например, равенство (1.5.1) задаёт «длину» вектора. «Угол» между векторами задаётся по формуле:

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}. \quad (1.5.11)$$

Здесь термины длина и угол взяты в кавычки, потому, что элементы гильбертовых пространств, вообще говоря, не являются геометрическими объектами в привычном смысле этого слова. Однако введение этих понятий позволяет провести аналогии между элементами произвольных гильбертовых пространств и векторами, как направленными отрезками в геометрическом пространстве. В частности, можно определить *расстояние от элемента до множества*.

Определение 1.5.4. Пусть $A \subset H$ — произвольное выпуклое множество в гильбертовом пространстве H . Тогда расстоянием между элементом $x \in H$ и множеством A называется величина:

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|. \quad (1.5.12)$$

Очевидно, что $\rho(x, A) = 0$, если $x \in A$ и $\rho(x, A) > 0$, если $x \notin A$.

1.6. Ряды Фурье

Определение 1.6.1. *Рядом Фурье* по ортонормированной системе $\{e_n\} \in H$ называется ряд следующего вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, \quad (1.6.1)$$

где множители $x_n = (x, e_n)$ называются *коэффициентами ряда Фурье* по системе $\{e_n\}$.

Теорема 1.6.1. Для любого вектора $x \in H$ справедливо следующее равенство:

$$\rho(x, L^n) = d_n = \left\| x - \sum_{n=1}^n x_n e_n \right\|, \quad d_n = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=1}^n x_k^2}, \quad (1.6.2)$$

где $E^n \subset H$ — n -мерное подпространство в H [3–5, 7, 12, 13].

Из этой теоремы следует, что наилучшим приближением элемента $x \in H$ элементом из $E^n \subset H$ является

$$x \approx \sum_{n=1}^n x_n e_n = \text{Пр } x, \quad (1.6.3)$$

где вектор $\text{Пр } x$ называется *ортогональной проекцией вектора $x \in H$ на подпространство $E^n \subset H$* .

Геометрический смысл этой теоремы на примере аппроксимации трехмерного вектора из пространства E^3 элементом из двумерного пространства E^2 показан на рис. 1.6.1.

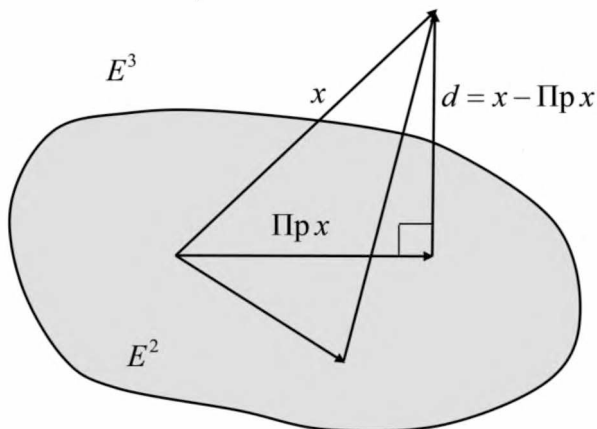


Рис. 1.6.1

Определение 1.6.2. Если для выбранной ортонормированной системы $\{e_n\}$ ряд Фурье $\forall x \in H$ сходится к x , т.е.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$

то такая система называется *полной* в H .

В курсе «Математического анализа» доказывается, что тригонометрические системы (1.5.9) и (1.5.10) являются полными в $C_2[-l, l]$. Система векторов (1.5.8) тоже является полной в l_2 . Фактически это означает, что полная система — это *ортонормированный базис* в бесконечномерном гильбертовом (предгильбертовом) пространстве.

Если ортонормированная система $\{e_n\}$ полная, то коэффициенты ряда Фурье удовлетворяют равенству:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2, \quad (1.6.4)$$

которое называется *равенством Парсеваля* [3–5, 7, 12, 13].

Равенство Парсеваля обобщает теорему Пифагора на случай бесконечномерных гильбертовых пространств.

Для того, чтобы преобразовать систему линейно независимых элементов $\{f_n\}$ к ортонормированной системе используется *процедура ортогонализации Грама-Шмидта*.

Положим $h_1 = f_1$, затем вычтем из f_2 его ортогональную проекцию на линейную оболочку h_1 и положим:

$$h_2 = f_2 - \frac{(f_2, h_1)}{|h_1|^2} h_1,$$

при этом $h_1 \perp h_2$, причём $h_2 \neq 0$, так как в противном случае вектора f_1 и f_2 были бы пропорциональными.

Будем продолжать далее таким же образом. Предположим, что построены попарно ортогональные ненулевые векторы h_1, \dots, h_k и для любого $i \leq k$ вектор h_i раскладывается по векторам f_1, \dots, f_i . Положим:

$$h_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(f_{k+1}, h_i)}{|h_i|^2} h_i. \quad (1.6.5)$$

Таким образом, после того как будет преобразован последний вектор f_n (такое возможно только в конечномерном пространстве $L^n \subset H$, $n = \dim L^n$) мы получим систему из n ненулевых ортогональных векторов $\{h_1, \dots, h_n\}$. Они будут образовывать ортогональный базис в L^n . От него можно перейти к ортонормированному положив:

$$e_i = \frac{h_i}{|h_i|}. \quad (1.6.6)$$

1.7. Функционалы. Расстояния между функциями. Непрерывность функционалов. Дифференцируемость функционалов. Вариации функционалов

Определение 1.7.1. Пусть M — множество каких-либо функций. Отображение J , сопоставляющее каждой функции $f(x) \in M$ определенное число $J[f] \in \mathbb{R}$, называется *функционалом*, определенным на множестве функций M .

Определение 1.7.2. *Расстоянием нулевого порядка* в пространстве $C[a, b]$ будем называть

$$r_0(y, y_0) = \max_{[a, b]} |y(x) - y_0(x)|. \quad (1.7.1)$$

Для пространства n раз непрерывно дифференцируемых функций $C^n[a, b]$ в качестве нормы можно взять $\|f\| = \max_{[a, b]} \{|f(x)|, \dots, |f^{(n)}(x)|\}$. Здесь расстояние будем обозначать следующим образом:

$$r_n(y, y_0) = \max_{[a, b]} \{|y(x) - y_0(x)|, \dots, |y^{(n)}(x) - y_0^{(n)}(x)|\}. \quad (1.7.2)$$

Расстояние, определённое по формуле (1.7.2), принято называть *расстоянием n -го порядка*.

Определение 1.7.3. Непрерывные кривые $y(x)$ и $y_0(x)$ заданные на отрезке $[a, b]$ называются близкими в смысле *близости нулевого порядка*, если расстояние нулевого порядка $r_0(y, y_0)$ мало на $[a, b]$. Совокупность всех кривых $y(x)$, расстояние нулевого порядка от которых до кривой $y_0(x)$ на отрезке $[a, b]$ меньше некоторого малого положительного числа ε образуют так называемую *сильную ε -окрестность*.

Иными словами, сильная ε -окрестность — это множество кривых, близких по координате.

Определение 1.7.4. Непрерывно дифференцируемые кривые $y(x)$ и $y_0(x)$ заданные на отрезке $[a, b]$ называются близкими в смысле *близости n -го порядка*, если расстояние n -го порядка $r_n(y, y_0)$ мало на $[a, b]$. Совокупность кривых $y(x)$, расстояние первого порядка от которых до кривой $y_0(x)$ на отрезке $[a, b]$ меньше некоторого малого положительного числа ε образуют *слабую ε -окрестность*.

Таким образом, слабая ε -окрестность представляет собой множество кривых близких и по координатам и по гладкости в каждой точке отрезка $[a, b]$.

Очевидно, что *слабая ε -окрестность содержится внутри сильной ε -окрестности, т.е. является её подмножеством*. Точно так же, если *кривые близки в смысле близости n -го порядка, то они близки в смысле близости любого меньшего порядка*.

Определение 1.7.5. Функционал $J[f]$, определённый в метрическом пространстве M , называется *непрерывным на кривой $f_0(x)$ в смысле близости n -го порядка*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\eta > 0$ такое, что для всех функций $f(x) \in M$ удовлетворяющих условию:

$$r_n(f, f_0) < \eta$$

выполняется неравенство:

$$\|J[f] - J[f_0]\| < \varepsilon. \quad (1.7.3)$$

Функционал, не являющийся непрерывным в смысле близости n -го порядка является разрывным в смысле указанной близости.

Непрерывность функционала в смысле нулевого первого порядка называется *сильной непрерывностью*, а непрерывность в смысле близости первого порядка называется *слабой непрерывностью*.

Заметим, что *если функционал непрерывен в смысле близости n -го порядка, то он непрерывен в смысле близости любого большего порядка*. В частности, *из непрерывности в смысле близости нулевого порядка следует непрерывность в смысле близости любого порядка*.

Определение 1.7.6. *Вариацией* или *приращением* δf аргумента $f(x)$ в точке $f_0(x)$ называется разность между двумя функциями $f(x)$ и $f_0(x)$:

$$\delta f = f - f_0,$$

где $f(x)$ и $f_0(x)$ принадлежат множеству M .

Определение 1.7.7. *Приращением* функционала $J[f]$ на кривых $f(x)$ и $f_0(x)$ называется величина:

$$\Delta J[f] = J[f] - J[f_0].$$

Определение 1.7.8. Если приращение функционала $\Delta J[f] = J[f + \delta f] - J[f]$ можно представить в виде:

$$\Delta J[f] = L[f, \delta f] + \gamma[f, \delta f],$$

где $L[f, \delta f]$ линейный по отношению δf функционал, $\gamma[f, \delta f] = o(\|\delta f\|)$ при $\|\delta f\| \rightarrow 0$, то функционал $J[f]$ называется *сильно дифференцируемым* (*дифференцируемым по Фреше*), а его линейная часть $L[f, \delta f]$ называется *первой вариацией* функционала $J[f]$ и обозначается:

$$\delta J = L[f, \delta f]. \quad (1.7.4)$$

Если далее остаточный член $\gamma[f, \delta f]$ можно представить в виде

$$\gamma[f, \delta f] = \frac{1}{2} Q[f, \delta f] + \beta[f, \delta f],$$

где $Q[f, \delta f]$ – квадратичный относительно δf функционал, а $\beta[f, \delta f] = o(\|\delta f\|^2)$ при $\|\delta f\| \rightarrow 0$, то функционал $J[f]$ называется *дважды дифференцируемым*, а его квадратичная часть $Q[f, \delta f]$ называется *второй вариацией* функционала $J[f]$ и обозначается:

$$\delta^2 J = Q[f, \delta f]. \quad (1.7.5)$$

На практике при нахождении вариации иногда удобнее использовать другой подход. Можно определить вариацию функционала как производную от функционала $J[f + \alpha \delta f]$ по α при $\alpha = 0$.

Определение 1.7.9. Функционал $J[f]$ называется *слабо дифференцируемым* (*дифференцируемым по Готто*), если его первая вариация может быть найдена по формуле:

$$\delta J = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J[f + \alpha \delta f] \right|_{\alpha=0}. \quad (1.7.6)$$

Аналогично, функционал $J[f]$ называется *дважды слабо дифференцируемым* (*по Готто*), если его первая вторая вариация может быть найдена по формуле:

$$\delta^2 J = \left. \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} J[f + \alpha \delta f] \right|_{\alpha=0}. \quad (1.7.7)$$

Можно показать, что *если функционал является дифференцируемым по Фреше, то он дифференцируем по Готто*. Обратное неверно [15].

Пример 1.7.1. Рассмотрим следующие примеры [10, 15]:

$$1) \text{ функционал } J[y] = \int_a^b f(x, y) dx$$

$$\delta J[y] = \int_a^b f'_y(x, y) \delta y dx, \quad \delta^2 J[y] = \int_a^b f''_{yy}(x, y) \delta y^2 dx, \quad \delta y^2 = (\delta y)^2; \quad (1.7.8)$$

2) функционал $J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx$

$$\delta J[y] = \int_a^b [f'_y(x, y, y') \delta y + f'_{y'}(x, y, y') \delta y'] dx,$$

$$\delta^2 J[y] = \int_a^b [f''_{yy}(x, y, y') \delta y^2 + 2f''_{yy'}(x, y, y') \delta y \delta y' + f''_{y'y'}(x, y, y') \delta y'^2] dx;$$
(1.7.9)

3) функционал $J[y] = \int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$

$$\delta J[y] = \int_a^b \sum_{i=0}^n f'_{y^{(i)}}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \delta y^{(i)} dx, \quad \delta y^{(0)} = \delta y,$$

$$\delta^2 J[y] = \int_a^b \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n f''_{y^{(i)}y^{(j)}}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \delta y^{(i)} \delta y^{(j)} dx, \quad \delta y^{(0)} = \delta y;$$
(1.7.10)

4) функционал $J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$

$$\delta J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b \sum_{i=1}^n [f'_{y_i} \delta y_i + f'_{y'_i} \delta y'_i] dx,$$

$$\delta^2 J[y] = \int_a^b \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [f''_{y_i y_j} \delta y_i \delta y_j + 2f''_{y_i y'_j} \delta y_i \delta y'_j + f''_{y'_i y'_j} \delta y'_i \delta y'_j] dx;$$
(1.7.11)

5) функционал $J[z(x, y)] = \int_a^b f(x, y, z, z'_x, z'_y) dx$

$$\delta J[z] = \int_a^b [f'_z \delta z + f'_{z'_x} \delta z'_x + f'_{z'_y} \delta z'_y] dx,$$

$$\delta^2 J[z] = \int_a^b \left[f''_{zz} \delta z^2 + f''_{z'_x z'_x} \delta z'^2_x + f''_{z'_y z'_y} \delta z'^2_y + \right. \\ \left. + 2(f''_{zz'_x} \delta z \delta z'_x + f''_{zz'_y} \delta z \delta z'_y + f''_{z'_x z'_y} \delta z'_x \delta z'_y) \right] dx.$$
(1.7.12)

1.8. Экстремум функционала с неподвижными границами

Определение 1.8.1. Функционал $J[f]$ достигает в точке $f_0(x)$ *минимума*, если приращение функционала $\Delta J[f]$, на любом элементе $f(x)$ близком к $f_0(x)$ неотрицательно, т.е.:

$$\Delta J[f] = J[f] - J[f_0] \geq 0.$$

Если $\Delta J[f] = 0$ только при $f = f_0(x)$, то говорят, что на элементе $f = f_0(x)$ достигается *строгий минимум*. Аналогично определяется элемент $f = f_0(x)$, на котором определяется *максимум*.

Если функционал достигает экстремума на кривых близких в смысле окрестности нулевого порядка, то такой экстремум называется *сильным экстремумом*.

Если же функционал достигает экстремума на кривых близких в смысле окрестности первого порядка, то такой экстремум называется *слабым экстремумом*.

Необходимое условие экстремума функционала $J[f]$ выражается равенством [1, 10, 14, 15]:

$$\delta J[f] = 0.$$

В этом случае говорят, что функционал $J[f]$ принимает *стационарное значение* на функции $f = f_0(x)$. Элементы, на которых функционал принимает стационарное значение называются *экстремалиями*.

Для функционала:

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

это условие записывается в виде *уравнения Эйлера*:

$$f'_y - \frac{d}{dx} f'_y = 0. \quad (1.8.1)$$

Если подынтегральная функция не зависит явно от x , т.е. $f = f(y, y')$, то уравнение Эйлера имеет первый интеграл [10, 15]:

$$f - y'f_{y'} = C_1. \quad (1.8.2)$$

В ряде случаев решение получившегося уравнения проще решения исходного уравнения Эйлера (1.8.1).

Если же подынтегральная функция не зависит явно ни от x , ни от y , т.е. $f = f(y')$, то экстремалами будут семейство прямых [10, 15]:

$$y = C_1x + C_2. \quad (1.8.3)$$

Соответственно, для функционала:

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$$

необходимое условие экстремума записывается в виде *уравнения Эйлера-Пуассона* [10, 15]:

$$f_y' + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} f_{y^{(j)}}' = 0. \quad (1.8.4)$$

В случае функционала, зависящего от нескольких функций:

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$$

экстремали находятся из *системы уравнений Эйлера* [10, 15]:

$$f_{y_i}' - \frac{d}{dx} f_{y_i'}' = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.8.5)$$

Наконец, для функционала:

$$J[z(x, y)] = \int_a^b f(x, y, z, z_x, z_y) dx$$

необходимое условие экстремума имеет вид *уравнения Эйлера-Остроградского* [10, 15]:

$$f_z' - \frac{\partial}{\partial x} f_{z_x}' - \frac{\partial}{\partial y} f_{z_y}' = 0. \quad (1.8.6)$$

Достаточное условие экстремума в общем случае определяется по второй вариации функционала. Существуют разные формулировки достаточных условий экстремума. Достаточное условие в форме Лежандра формулируется следующим образом [1, 10, 14, 15]:

1) для функционала $J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx$.

Если выполнено неравенство:

$$f''_{y'y'} > 0 \quad (1.8.7)$$

для всех значений (x, y) близких к значениям (x, y) на исследуемой экстремали C , а так же для всех значений y' близких к углу наклона поля на той же экстремали, то на экстремали C достигается слабый минимум.

Соответственно, если выполнено неравенство:

$$f''_{y'y'} < 0 \quad (1.8.8)$$

для всех значений (x, y) близких к значениям (x, y) на исследуемой экстремали C , а так же для всех значений y' близких к углу наклона поля на той же экстремали, то на экстремали C достигается слабый максимум.

Если неравенство (1.8.7) (или (1.8.8)) выполняются для любых значений y' , то на экстремали C достигается сильный минимум (или максимум). Отметим, что *в данном случае эти неравенства могут быть нестрогими* [10, 15];

2) для функционала $J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$ условия

(1.8.7) или (1.8.8) заменяются соответственно неравенствами [15]

$$\begin{vmatrix} f''_{y'_1 y'_1} & \dots & f''_{y'_1 y'_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ f''_{y'_n y'_1} & \dots & f''_{y'_n y'_n} \end{vmatrix} > 0; \quad (1.8.9)$$

$$f''_{y'_1 y'_1} < 0, \begin{vmatrix} f''_{y'_1 y'_1} & f''_{y'_1 y'_2} \\ f''_{y'_2 y'_1} & f''_{y'_2 y'_2} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^n \begin{vmatrix} f''_{y'_1 y'_1} & \dots & f''_{y'_1 y'_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ f''_{y'_n y'_1} & \dots & f''_{y'_n y'_n} \end{vmatrix} > 0. \quad (1.8.10)$$

1.9. Экстремум функционала с подвижными границами

Простейшая задача вариационного исчисления с подвижными границами состоит в определении экстремума функционала:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx$$

при условии, что точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) движутся по заданным траекториям.

Экстремали этой задачи должны удовлетворять уравнению Эйлера и условиям *трансверсальности* [1, 10, 15]:

$$\begin{aligned} [f + (\psi' - y')f_{y'}]_{x=x_0} &= 0, \\ [f + (\varphi' - y')f_{y'}]_{x=x_1} &= 0, \end{aligned} \tag{1.9.1}$$

где $y_0 = \psi(x_0)$, $y_1 = \varphi(x_1)$ — заданные траектории движения граничных точек.

Для функционала:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$$

условия трансверсальности сводятся к условиям *ортогональности* [1, 10, 15]:

$$(1 + \psi'y')|_{x=x_1} = 0, \quad (1 + \varphi'y')|_{x=x_1} = 0. \tag{1.9.2}$$

Отметим также, что функционал:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx \tag{1.9.3}$$

определяет длину дуги соединяющей точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) . Соответственно, экстремаль этого функционала определяет *кратчайшее расстояние* между кривыми $y_0 = \psi(x_0)$ и $y_1 = \varphi(x_1)$.

Для функционала:

$$J[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z') dx$$

в зависимости от траекторий перемещения граничных точек имеем:

1) граничные точки движутся по кривым $y_1 = \varphi_1(x_1)$, $z_1 = \psi_1(x_1)$, $y_0 = \varphi_0(x_0)$, $z_0 = \psi_0(x_0)$. Тогда условия трансверсальности запишутся следующим образом [1, 10, 15]:

$$\begin{aligned} \left[f + (\varphi_1' - y')f_{y'} + (\psi_1' - z')f_{z'} \right]_{x=x_1} &= 0, \\ \left[f + (\varphi_0' - y')f_{y'} + (\psi_0' - z')f_{z'} \right]_{x=x_0} &= 0; \end{aligned} \quad (1.9.4)$$

2) граничные точки движутся по поверхностям $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$, $z_0 = \psi(x_0, y_0)$. Здесь условия трансверсальности записываются так [1, 10, 15]:

$$\begin{aligned} \left[f - y'f_{y'} - z'f_{z'} + \varphi'_x f_{z'} \right]_{x=x_0} &= 0, \quad \left[f_{y'} + \varphi'_y f_{z'} \right]_{x=x_0} = 0, \\ \left[f - y'f_{y'} - z'f_{z'} + \varphi'_x f_{z'} \right]_{x=x_1} &= 0, \quad \left[f_{y'} + \varphi'_y f_{z'} \right]_{x=x_1} = 0. \end{aligned} \quad (1.9.5)$$

Для функционала:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

в случае, когда граничные точки движутся по поверхностям $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$, $z_0 = \psi(x_0, y_0)$ условия трансверсальности также переходят в условия ортогональности [1, 10, 15]:

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{\varphi'_x} \right|_{x=x_1} &= \left. \frac{y'}{\varphi'_y} \right|_{x=x_1} = - \left. \frac{z'}{1} \right|_{x=x_1}, \\ \left. \frac{1}{\psi'_x} \right|_{x=x_0} &= \left. \frac{y'}{\psi'_y} \right|_{x=x_0} = - \left. \frac{z'}{1} \right|_{x=x_0}. \end{aligned} \quad (1.9.6)$$

В заключение отметим, что экстремали функционала:

$$J[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx \quad (1.9.7)$$

определяют либо кратчайшее расстояние между кривыми в пространстве, заданными уравнениями $y_1 = \varphi_1(x_1)$, $z_1 = \psi_1(x_1)$ и $y_0 = \varphi_0(x_0)$, $z_0 = \psi_0(x_0)$, либо между поверхностями в пространстве, заданными уравнениями $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$, $z_0 = \psi(x_0, y_0)$. При этом экстремалами является семейство прямых вида [1, 10, 15]:

$$\begin{cases} y = C_1 x + C_2 \\ z = C_3 x + C_4 \end{cases} \quad (1.9.8)$$

В некоторых случаях, в зависимости от постановки задачи полезно рассмотреть ситуации, когда граничные точки движутся по поверхностям $y_1 = \varphi(x_1, z_1)$, $y_0 = \psi(x_0, z_0)$ или $x_1 = \varphi(y_1, z_1)$, $x_0 = \psi(y_0, z_0)$. В первом случае функционал, определяющий расстояние между этими точками будет иметь вид:

$$J[x, y] = \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} dz. \quad (1.9.9)$$

Условия ортогональности (1.9.6) запишутся так [1, 10, 15]:

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{\Phi'_z} \right|_{z=z_1} &= \left. \frac{x'}{\Phi'_x} \right|_{z=z_1} = - \left. \frac{y'}{1} \right|_{z=z_1}, \\ \left. \frac{1}{\Psi'_z} \right|_{z=z_0} &= \left. \frac{x'}{\Psi'_x} \right|_{z=z_0} = - \left. \frac{y'}{1} \right|_{z=z_0}, \end{aligned} \quad (1.9.10)$$

а экстремали функционала (1.9.9) в виде следующей системы уравнений [1, 10, 15]:

$$\begin{cases} x = C_1 z + C_2 \\ y = C_3 z + C_4 \end{cases} \quad (1.9.11)$$

Во втором случае, получаем соответственно:

$$J[x, z] = \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{1 + x'^2 + z'^2} dy; \quad (1.9.12)$$

$$(1.9.14) \quad \left. \begin{aligned} C_3 + C_4 &= z \\ C_1 + C_2 &= x \end{aligned} \right\}$$

$$(1.9.13) \quad \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \frac{1}{x'} \Big|_{y=y_0} &= \frac{z\phi}{z'} \Big|_{y=y_0} \\ \frac{1}{x'} \Big|_{y=y_1} &= \frac{z\phi}{z'} \Big|_{y=y_1} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Глава 2. Примеры решения задач

2.1. Нахождение расстояний между функциями. Вычисление норм функций

Пример 2.1.1. Исследовать на близость нулевого и первого порядка

следующие кривые: $y_1 = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in [0, \pi]$.

Решение. Имеем

$$|y_1 - y_2| = \left| \frac{\sin(n^2 x)}{n} - 0 \right| = \left| \frac{\sin(n^2 x)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

поэтому кривые y_1 и y_2 близки в смысле близости нулевого порядка при больших n . Оценим теперь расстояние первого порядка:

$$|y_1' - y_2'| = |n \cos(n^2 x) - 0| = |n \cos(n^2 x)|.$$

Эта разность может быть сколь угодно большой (например в точках $x = 2\pi/n^2$), поэтому близости в смысле близости первого порядка нет.

Пример 2.1.2. Найти расстояние нулевого и первого порядков между кривыми $y_1 = x^2$ и $y_2 = x^3$ на отрезке $[0, 1]$. Найти нормы функции $\|y_1\|_0$, $\|y_1\|_1$ и $\|y_1\|_2$.

Решение. Расстояние нулевого порядка определяется так:

$$r_0(y_1, y_2) = \max_{0 \leq x \leq 1} |x^3 - x^2|.$$

Найдём производную разности и приравняем её нулю

$$3x^2 - 2x = 0,$$

откуда находим $x_1 = 0$ и $x_2 = 2/3$. Кроме того, проверке подлежит конечная точка $x_3 = 1$. Таким образом,

$$r_0(y_1, y_2) = \max_{0 \leq x \leq 1} |x^3 - x^2| = |x^3 - x^2|_{x=2/3} = \frac{4}{27}.$$

Расстояние первого порядка равно соответственно:

$$r_1(y_1, y_2) = \max_{0 \leq x \leq 1} \{|x^3 - x^2|, |3x^2 - 2x|\}.$$

Найдём максимум второго выражения, для этого вычислим его производную и приравняем её нулю:

$$6x - 2 = 0,$$

откуда $x_1 = 1/3$ плюс концевые точки $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$. Очевидно, что

$\max_{0 \leq x \leq 1} \{3x^2 - 2x\} = 1$ достигается в точке $x_3 = 1$, следовательно

$$r_1(y_1, y_2) = \max_{0 \leq x \leq 1} \{x^3 - x^2, |3x^2 - 2x|\} = |3x^2 - 2x|_{x=1} = 1.$$

Найдём нормы функции $y_1 = x^2$ в пространствах $C[0,1]$, $C_1[0,1]$ и $C_2[0,1]$. Имеем:

$$\|y_1\|_{\infty} = \max_{0 \leq x \leq 1} |x^2| = 1,$$

$$\|y_1\|_1 = \int_0^1 |x^2| dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\|y_1\|_2 = \sqrt{\int_0^1 x^4 dx} = \sqrt{\frac{x^5}{5} \Big|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{5}}.$$

При этом:

$$\frac{1}{3} < \sqrt{\frac{1}{5}} < 1,$$

что соответствует неравенству (1.2.4).

2.2. Вычисление норм векторов и матриц

Пример 2.2.1. Даны матрица \mathbf{A} и вектор \mathbf{b} . Найти нормы $\|\mathbf{A}\|_p$, $\|\mathbf{b}\|_p$ и $\|\mathbf{Ab}\|_p$ ($p=1,2,\infty$) и проверить их согласованность, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для вычисления векторных и матричных норм используем формулы (1.1.6)–(1.1.8), (1.1.13), (1.1.14) и (1.1.16). Получаем:

$$\|\mathbf{b}\|_{\infty} = \max\{1, 0, |-2|\} = 2,$$

$$\|\mathbf{b}\|_1 = 1 + 0 + |-2| = 2,$$

$$\|\mathbf{b}\|_2 = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{5},$$

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max\{1 + |-1| + 0, 2 + 3 + 2, 1 + |-1| + 4\} = \max\{2, 7, 6\} = 7,$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max\{1 + 2 + 1, |-1| + 3 + |-1|, 0 + 2 + 4\} = \max\{4, 5, 6\} = 6,$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{37}.$$

Далее

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$\|\mathbf{A}\mathbf{b}\|_{\infty} = \max\{1, |-2|, |-7|\} = 7,$$

$$\|\mathbf{A}\mathbf{b}\|_1 = 1 + |-2| + |-7| = 10,$$

$$\|\mathbf{A}\mathbf{b}\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{54}.$$

Проверим теперь условие согласованности норм. Имеем:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{b}\|_{\infty} = 7 \leq \|\mathbf{A}\|_{\infty} \|\mathbf{b}\|_{\infty} = 7 \cdot 2 = 14,$$

$$\|\mathbf{A}\mathbf{b}\|_1 = 10 \leq \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{b}\|_1 = 6 \cdot 2 = 12,$$

$$\|\mathbf{A}\mathbf{b}\|_2 = \sqrt{54} \leq \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{b}\|_2 = \sqrt{37} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{185}.$$

Таким образом, условие согласованности норм выполнено.

2.3. Вычисление норм операторов

Пример 2.3.1. Найдём норму оператора $Af = xf(x)$, где $x \in [a, b]$, $f(x) \in C[a, b]$.

Решение. Этот оператор отображает пространство $C[a, b]$ в себя. Тогда для любой функции $f(x) \in C[a, b]$ такой, что $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq 1$ в соответствии с формулой (1.3.1) имеем:

$$\|A\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|Af\| = b \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq b.$$

Этот максимум достигается на функции $f(x) \equiv 1$. Следовательно норма этого оператора равна:

$$\|A\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|A f\| = b.$$

Пример 2.3.2. В качестве следующей задачи вычислим норму интегрального оператора Фредгольма:

$$A f = \int_a^b K(x, t) f(t) dt,$$

отображающего пространство $C[a, b]$ в себя. Здесь ядро $K(x, t)$ является непрерывным в квадрате $Q = \{(x, t) : a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$.

Решение. Так как ядро является непрерывным в квадрате Q , то оно является ограниченным и интегрируемым. Следовательно, для любой функции $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq 1$ получим:

$$\begin{aligned} \|A f\| &= \max_{x \in [a, b]} \left| \int_a^b K(x, t) f(t) dt \right| \leq \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |K(x, t)| |f(t)| dt \leq \\ &\leq \max_{x \in [a, b]} |f(t)| \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |K(x, t)| dt = M \|f\|, \quad M = \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |K(x, t)| dt. \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку для нормы оператора:

$$\|A\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|A f\| \leq M = \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |K(x, t)| dt.$$

Этот максимум достигается на функции $f = \text{sign}(K(x, t))$ (функция знака вычисляется по переменной t при фиксированном x). В самом деле:

$$\|A f\| = \max_{x \in [a, b]} \left| \int_a^b K(x, t) \text{sign}(K(x, t)) dt \right| = \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |K(x, t)| dt.$$

Таким образом искомая норма равна:

$$\|A\| = \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |K(x, t)| dt.$$

Положим в качестве примера:

$$A.f = \int_0^1 x \left(t - \frac{1}{2} \right) f(t) dt.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |K(x,t)| dt = \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 \left| x \left(t - \frac{1}{2} \right) \right| dt = \max_{x \in [0,1]} x \int_0^1 \left| t - \frac{1}{2} \right| dt = \\ &= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - t \right) dt + \int_{1/2}^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) dt = \frac{1}{2} (t - t^2) \Big|_0^{1/2} + \frac{1}{2} (t^2 - t) \Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом норма данного оператора $\|A\| = 1/4$.

Аналогично устанавливается, что норма интегрального оператора Вольтерры:

$$A.f = \int_a^x K(x,t) f(t) dt$$

равна:

$$\|A\| = \max_{x \in [a,b]} \int_a^x |K(x,t)| dt.$$

Здесь ядро $K(x,t)$ является непрерывным в треугольнике $T = \{(x,t): a \leq x \leq b, a \leq t \leq x\}$.

Пример 2.3.3. Вычислим в качестве примера норму оператора:

$$A.f = \int_0^x \sin x \cos t f(t) dt, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \max_{x \in [0, \pi/2]} \int_0^x |K(x,t)| dt = \max_{x \in [0, \pi/2]} \int_0^x |\sin x \cos t| dt = \\ &= \max_{x \in [0, \pi/2]} |\sin x| \max_{x \in [0, \pi/2]} \int_0^x |\cos t| dt = \max_{x \in [0, \pi/2]} \int_0^x \cos t dt = \max_{x \in [0, \pi/2]} |\sin x| = 1. \end{aligned}$$

В результате $\|A\| = 1$.

2.4. Решение алгебраических уравнений методом последовательных приближений

Пример 2.4.1. Рассмотрим уравнение:

$$\cos x = x.$$

Решение. Это уравнение не допускает построение точного аналитического решения. Для построения приближённого решения по методу простой итерации сделаем вначале эскизы графиков функций, стоящих в левой и правой частях этого уравнения.

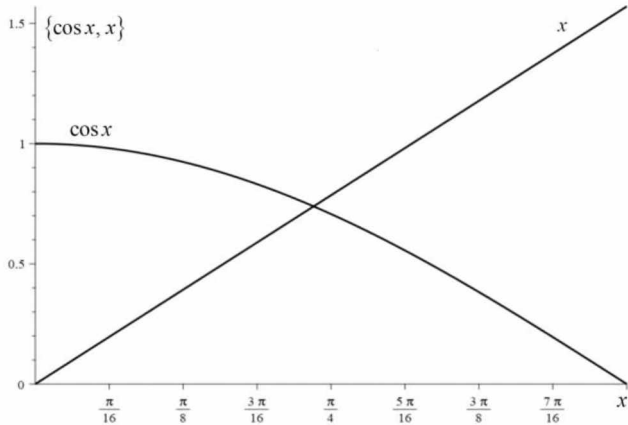


Рис. 2.4.1

По рис. 2.4.1 видно, что корень уравнения следует искать в промежутке $[0, \pi/2]$. В качестве начального приближения можно положить $x_0 = \pi/4$. Проверим достаточное условие сходимости метода простой итерации (1.3.4). Обозначим $f(x) = \cos x$. Очевидно, что:

$$|f'(x)| = \sin x < 1 \quad \forall x \in [0, b], \quad b < \frac{\pi}{2}.$$

Это означает, что итерационный метод будет сходиться. Зададим точность $\varepsilon = 0,01$. Учитывая заданную точность, будем сохранять четыре знака после запятой. Имеем:

$$x_1 = \cos x_0 = \cos \frac{\pi}{4} \approx 0,7071, \quad x_2 = \cos x_1 \approx 0,7602,$$

$$x_3 = \cos x_2 \approx 0,7247, \quad x_4 = \cos x_3 \approx 0,7487, \quad x_5 = \cos x_4 \approx 0,7327,$$

$$x_6 = \cos x_5 \approx 0,7435, \quad x_7 = \cos x_6 \approx 0,7361.$$

На седьмом шаге получаем $|x_7 - x_6| \approx |0,7361 - 0,7435| = 0,0074 < \varepsilon = 0,01$.

Таким образом, в качестве приближённого решения получаем $x^* \approx 0,7361$. Точное решение этого уравнения, найденное с помощью программы Maple, $x = 0,7390851322\dots$

Пример 2.4.2. Рассмотрим ещё одно уравнение:

$$\operatorname{ctg} x = x.$$

Решение. Внешне данная задача схожа с той, что рассматривалась в предыдущем примере. Однако:

$$\left| (\operatorname{ctg} x)' \right| = \frac{1}{\sin^2 x} \geq 1 \quad \forall x.$$

Следовательно, отображение $f(x) = \operatorname{ctg} x$ не является сжимающим. Чтобы решить данное уравнение, надо преобразовать его к эквивалентному виду:

$$\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x = x. \tag{2.4.1}$$

Теперь:

$$\left| (\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x)' \right| = \frac{1}{1+x^2} < 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Таким образом, отображение $f(x) = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x$ является сжимающим и к решению уравнения (2.4.1) можно применить метод простой итерации. Изобразим на координатной плоскости графики функций $\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x$ и x .

Рис. 2.4.2 позволяет установить, что решение уравнения (2.4.1) можно искать в промежутке $[0, \pi/2]$ (можно выбрать и более узкий промежуток), а в качестве начального приближения положить, к примеру, $x_0 = \pi/4$.

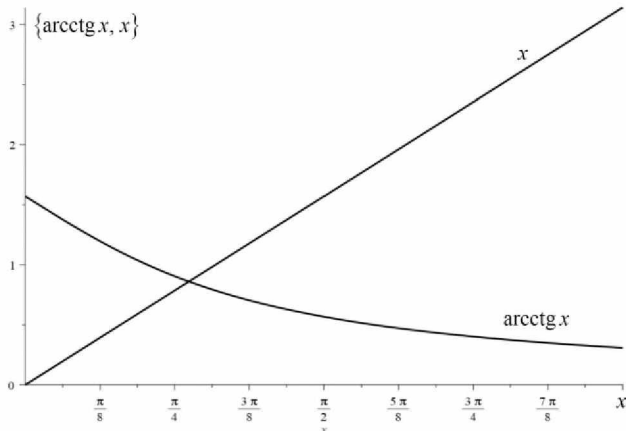


Рис. 2.4.2

Зададим, как и в предыдущем примере точность $\varepsilon = 0,01$, Тогда:

$$x_1 = \arctg x_0 = \arctg \frac{\pi}{4} \approx 0,9050, \quad x_2 = \arctg x_1 \approx 0,8352,$$

$$x_3 = \arctg x_2 \approx 0,8749, \quad x_4 = \arctg x_3 \approx 0,8520,$$

$$x_5 = \arctg x_4 \approx 0,8651, \quad x_6 = \arctg x_5 \approx 0,8576.$$

На седьмом шаге получаем $|x_6 - x_5| \approx |0,8576 - 0,8651| = 0,0075 < \varepsilon = 0,01$.

Таким образом, в качестве приближённого решения получаем $x^* \approx 0,8576$. Точное решение этого уравнения, найденное с помощью программы Maple, $x = 0,8603335890\dots$

Листинги программ, написанных в пакете Maple, для рассмотренных примеров, приведены в Приложении.

2.5. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом последовательных приближений

Пример 2.5.1. Найдём решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

с помощью метода простой итерации с точностью $\varepsilon = 0,01$.

Решение. Выразив из первого уравнения x_1 , из второго x_2 и из третьего x_3 приводим эту систему к виду:

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{x} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & -0,1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}.$$

Для проверки условия сходимости вычислим какую-нибудь из норм матрицы $\mathbf{\Gamma}$, к примеру, $\|\mathbf{\Gamma}\|_{\infty}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{\Gamma}\|_{\infty} &= \max\{0 + |-0,1| + |-0,1|, |-0,2| + 0 + |-0,1|, |-0,2| + |-0,2| + 0\} = \\ &= \max\{0, 2, 0, 3, 0, 4\} = 0,4 < 1. \end{aligned}$$

Условие сходимости выполнено. Положим в качестве начального приближения $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{c} = (1,2, 1,3, 1,4)^T$. Далее:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & -0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93 \\ 0,92 \\ 0,90 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & -0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,93 \\ 0,92 \\ 0,90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,018 \\ 1,024 \\ 1,030 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & -0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,018 \\ 1,024 \\ 1,030 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9946 \\ 0,9934 \\ 0,9916 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{x}^{(3)} + \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & -0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9946 \\ 0,9934 \\ 0,9916 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0015 \\ 1,00192 \\ 1,0024 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(5)} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{x}^{(4)} + \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & -0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,0015 \\ 1,00192 \\ 1,0024 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,999568 \\ 0,999460 \\ 0,999316 \end{pmatrix}.$$

На пятом шаге погрешность вычислений составляет:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^{(4)}\|_{\infty} &= \left\| \begin{pmatrix} 0,999568 \\ 0,999460 \\ 0,999316 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,0015 \\ 1,00192 \\ 1,0024 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = \left\| \begin{pmatrix} -0,001932 \\ -0,00246 \\ -0,003084 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = \\ &= \max \{ |-0,001932|, |-0,00246|, |-0,003084| \} = 0,003084 < \varepsilon = 0,01. \end{aligned}$$

Таким образом, в качестве приближённого решения исходной системы линейных алгебраических уравнений берём:

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0,999568 \\ 0,999460 \\ 0,999316 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что точное решение этой системы $\mathbf{x} = (1,1,1)^T$.

Листинг программы, написанной в пакете Maple, для рассмотренного примера, приведен в Приложении.

2.6. Решение интегральных уравнений методом последовательных приближений

Пример 2.6.1. Решим следующее уравнение:

$$f(x) = \lambda \int_0^1 x^2 t^2 f(t) dt + \varphi(x), \quad \varphi(x) = x. \quad (2.6.1)$$

Это уравнение Фредгольма второго рода. Положим в качестве начального приближения $f_0(x) = \varphi(x) = x$. Найдём следующие приближения:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \lambda \int_0^1 x^2 t^2 f_0(t) dt + x = \lambda x^2 \int_0^1 t^3 dt + x = \lambda x^2 \left. \frac{t^4}{4} \right|_0^1 + x = \frac{\lambda}{4} x^2 + x, \\ f_2(x) &= \lambda \int_0^1 x^2 t^2 f_1(t) dt + x = \lambda x^2 \int_0^1 t^2 \left(\frac{\lambda}{4} t^2 + t \right) dt + x = \frac{\lambda^2}{4} x^2 \int_0^1 t^4 dt + \\ &+ \lambda x^2 \int_0^1 t^3 dt + x = \frac{\lambda^2}{4} x^2 \left. \frac{t^5}{5} \right|_0^1 + \lambda x^2 \left. \frac{t^4}{4} \right|_0^1 + x = \frac{\lambda^2}{4 \cdot 5} x^2 + \frac{\lambda}{4} x^2 + x = \frac{\lambda}{4} \left(1 + \frac{\lambda}{5} \right) x^2 + x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= \lambda \int_0^1 x^2 t^2 f_2(t) dt + x = \lambda x^2 \int_0^1 \left[\frac{\lambda}{4} \left(1 + \frac{\lambda}{5} \right) t^2 + t \right] dt + x = \\
&= \frac{\lambda^2}{4} \left(1 + \frac{\lambda}{5} \right) x^2 \int_0^1 t^4 dt + \lambda x^2 \int_0^1 t^3 dt + x = \frac{\lambda^2}{4} \left(1 + \frac{\lambda}{5} \right) x^2 \frac{t^5}{5} \Big|_0^1 + \lambda x^2 \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 + x = \\
&= \frac{\lambda^2}{4 \cdot 5} \left(1 + \frac{\lambda}{5} \right) x^2 + \frac{\lambda}{4} x^2 + x = \frac{\lambda}{4} \left(1 + \frac{\lambda}{5} + \frac{\lambda^2}{5^2} \right) x^2 + x.
\end{aligned}$$

Очевидно, что для $n+1$ -го приближения имеем:

$$f_{n+1}(x) = \lambda \int_0^1 x^2 t^2 f_n(t) dt + x = \frac{\lambda}{4} x^2 \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{5^k} + x.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ получаем:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1}(x) = \frac{\lambda}{4} x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{5^k} + x = \frac{\lambda}{4} x^2 \frac{1}{1 - \lambda/5} + x = \frac{5}{4} \frac{\lambda x^2}{5 - \lambda} + x.$$

Здесь ряд сходится при $|\lambda| < 5$ (сумма членов убывающей геометрической прогрессии). При этом условии отображение, заданное интегральным оператором:

$$\lambda \int_0^1 x^2 t^2 f(t) dt$$

будет сжимающим.

Таким образом, в соответствии с теоремой Банаха о сжимающем отображении функция:

$$f(x) = \frac{5}{4} \frac{\lambda x^2}{5 - \lambda} + x$$

является решением, причём единственным, уравнения (2.6.1).

Пример 2.6.2. Решим ещё одно уравнение:

$$f(x) = -\lambda \int_0^x (x-t) f(t) dt + \varphi(x), \quad \varphi(x) = x. \quad (2.6.2)$$

Это интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода. Как и в предыдущем примере положим в качестве начального приближения $f_0(x) = \varphi(x) = x$. Для остальных приближений имеем:

$$f_1(x) = -\lambda \int_0^x (x-t) f_0(t) dt + x = -\lambda \int_0^x (x-t) t dt + x = -\lambda x \int_0^x t dt + \lambda \int_0^x t^2 dt + x =$$

$$= -\lambda x \frac{t^2}{2} \Big|_0^x + \lambda x \frac{t^3}{3} \Big|_0^x + x = \lambda \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) x^3 + x = x - \frac{\lambda}{2 \cdot 3} x^3 = x - \frac{\lambda}{3!} x^3,$$

$$f_2(x) = -\lambda \int_0^x (x-t) f_1(t) dt + x = -\lambda \int_0^x (x-t) \left(t - \frac{\lambda}{3!} t^3 \right) dt + x =$$

$$= -\lambda x \int_0^x \left(t - \frac{\lambda}{3!} t^3 \right) dt + \lambda \int_0^x \left(t^2 - \frac{\lambda}{3!} t^4 \right) dt + x = -\lambda x \left(\frac{t^2}{2} - \frac{\lambda}{3! \cdot 4} t^4 \right) \Big|_0^x +$$

$$+ \lambda \left(\frac{t^3}{3} - \frac{\lambda}{3! \cdot 5} t^5 \right) \Big|_0^x + x = -\lambda x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\lambda}{3! \cdot 4} x^4 \right) + \lambda \left(\frac{x^3}{3} - \frac{\lambda}{3! \cdot 5} x^5 \right) + x =$$

$$= x - \lambda x^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{\lambda}{3!} x^5 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = x - \frac{\lambda}{3!} x^3 + \frac{\lambda^2}{5!} x^5.$$

По индукции для $n+1$ -го получаем:

$$f_{n+1}(x) = -\lambda \int_0^x (x-t) f_n(t) dt + x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \lambda^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ находим:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{\lambda^{2k+1}}}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

Здесь ряд сходится при любых действительных λ , т.е. отображение, заданное оператором:

$$-\lambda \int_0^x (x-t) f(t) dt$$

всегда является сжимающим и функция:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

является решением уравнения (2.6.2).

2.7. Решение интегральных уравнений с помощью резольвенты

Пример 2.7.1. Используя резольвенту, решим следующее уравнение Фредгольма второго рода:

$$f(x) = \lambda \int_0^1 x t f(t) dt + \varphi(x), \quad \varphi(x) = x. \quad (2.7.1)$$

Решение. Вначале, по формуле (1.4.8) найдём итерированные ядра для этого уравнения:

$$K_1(x, t) = K(x, t) = xt,$$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, \tau) K_1(\tau, t) d\tau = \int_0^1 x\tau \cdot \tau t d\tau = xt \int_0^1 \tau^2 d\tau = xt \frac{\tau^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{xt}{3},$$

$$K_3(x, t) = \int_0^1 K(x, \tau) K_2(\tau, t) d\tau = \int_0^1 x\tau \frac{\tau t}{3} d\tau = \frac{xt}{3} \int_0^1 \tau^2 d\tau = \frac{xt}{3} \frac{\tau^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{xt}{3^2}$$

и т.д.

Для n -го итерированного ядра имеем:

$$K_n(x, t) = \int_0^1 K(x, \tau) K_{n-1}(\tau, t) d\tau = \frac{xt}{3^{n-1}}.$$

Далее по формуле (1.4.10) вычисляем резольвенту уравнения (2.7.1):

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, t) = xt \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{3^{n-1}} = xt \frac{1}{1 - \lambda/3} = \frac{3xt}{3 - \lambda}.$$

Заметим, что здесь ряд сходится при $|\lambda| < 3$, что является условием существования обратного оператора для уравнения (2.7.1). Решение этого уравнения с помощью резольвенты находится по формуле (1.4.11). Подставляя туда найденную функцию $R(x, t, \lambda)$ и заданное значение $\varphi(x) = x$ получаем:

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi(x) + \lambda \int_0^1 R(x, t, \lambda) \varphi(t) dt = x + \lambda \int_0^1 \frac{3xt}{3 - \lambda} t dt = x + \frac{3x\lambda}{3 - \lambda} \int_0^1 t^2 dt = \\ &= x + \frac{3x\lambda}{3 - \lambda} \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = x + \frac{x\lambda}{3 - \lambda} = \frac{3x}{3 - \lambda}. \end{aligned}$$

Пример 2.7.2. Точно также, используя резольвенту, решим уравнение Вольтерры второго рода:

$$f(x) = \lambda \int_0^x e^{x-t} f(t) dt + \varphi(x), \quad \varphi(x) \equiv 1. \quad (2.7.2)$$

Решение. Здесь итерированные ядра находятся по формуле (1.4.13):

$$K_1(x, t) = K(x, t) = e^{x-t},$$

$$K_2(x, t) = \int_t^x K(x, \tau) K_1(\tau, t) d\tau = \int_t^x e^{x-\tau} e^{\tau-t} d\tau = e^{x-t} \int_t^x d\tau = e^{x-t} \tau \Big|_t^x = (x-t) e^{x-t},$$

$$\begin{aligned} K_3(x, t) &= \int_t^x K(x, \tau) K_2(\tau, t) d\tau = \int_t^x e^{x-\tau} (\tau-t) e^{\tau-t} d\tau = e^{x-t} \int_t^x (\tau-t) d\tau = \\ &= e^{x-t} \frac{(\tau-t)^2}{2} \Big|_t^x = \frac{(x-t)^2}{2} e^{x-t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_4(x, t) &= \int_t^x K(x, \tau) K_3(\tau, t) d\tau = \int_t^x e^{x-\tau} \frac{(\tau-t)^2}{2} e^{\tau-t} d\tau = \frac{e^{x-t}}{2} \int_t^x (\tau-t)^2 d\tau = \\ &= \frac{e^{x-t}}{2} \frac{(\tau-t)^3}{3} \Big|_t^x = \frac{(x-t)^3}{3!} e^{x-t}. \end{aligned}$$

Продолжая процесс далее, находим n -е итерированное ядро:

$$K_n(x, t) = \int_t^x K(x, \tau) K_{n-1}(\tau, t) d\tau = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{x-t}.$$

Резольвента так же, как и для уравнения Фредгольма находится по формуле (1.4.10):

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, t) = e^{x-t} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{\lambda(x-t)}.$$

Здесь ряд сходится при любых действительных λ . Соответственно, при любых действительных λ существует решение уравнения (2.7.2), которое находится по формуле (1.4.14). При заданном $\varphi(x) \equiv 1$ получаем

$$f(x) = \varphi(x) + \lambda \int_0^x R(x, t, \lambda) \varphi(t) dt = 1 + \lambda \int_0^x e^{\lambda(x-t)} dt = 1 - e^{\lambda(x-t)} \Big|_0^x = 1 + e^{\lambda x}.$$

2.8. Разложение функций в ряды Фурье

Пример. 2.8.1. Разложим в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x^3$ с периодом $T = 2\pi$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Решение. Заданная функция является нечетной, следовательно, коэффициенты Фурье ищем в виде:

$$\begin{aligned}
 a_0, a_n &= 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad (n=1, 2, \dots), \\
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^3 \sin nx dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^3, \quad dv = \sin nx dx, \\ du = 3x^2 dx, \quad v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right\} = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x^3 \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{3}{n} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \right) = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2, \quad dv = \cos nx dx, \\ du = 2x dx, \quad v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right\} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2, \quad dv = \cos nx dx, \\ du = 2x dx, \quad v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right\} = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} + \frac{3}{n} \left(\frac{x^2 \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2x \sin nx}{n} dx \right) \right] = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} - \frac{6}{n^2} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin nx dx, \\ du = dx, \quad v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right\} = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} - \frac{6}{n^2} \left(-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right) \right] = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} + \frac{6\pi \cos \pi}{n^3} - \frac{6}{n^3} \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right) = \\
 &= -\frac{2\pi^2 \cos \pi n}{n} + \frac{12 \cos \pi n}{n^3} = (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right).
 \end{aligned}$$

Получаем:

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \sin nx.$$

Построим графики заданной функции и ее разложения в ряд Фурье, ограничившись первыми пятью и десятью членами ряда (рис. 2.8.1).

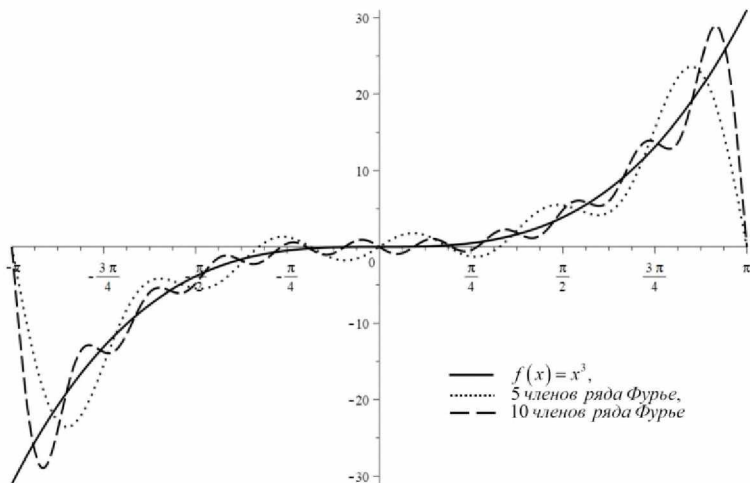


Рис. 2.8.1

Пример 2.8.2. Разложим функцию $f(x) = x$ на промежутке $(0; \pi)$ по косинусам кратных дуг.

Решение. Для построения искомого разложения продолжим функцию $f(x) = x$ на промежуток $(-\pi; \pi)$ чётным образом. Тогда:

$$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{2}{\pi} \left(0 + \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\frac{4}{\pi(2k+1)^2}, & n = 2k+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, искомое разложение функции $f(x) = x$ по косинусам кратных дуг имеет вид:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Искомые аппроксимации при двух и пяти членах ряда Фурье можно видеть на рис. 2.8.2.

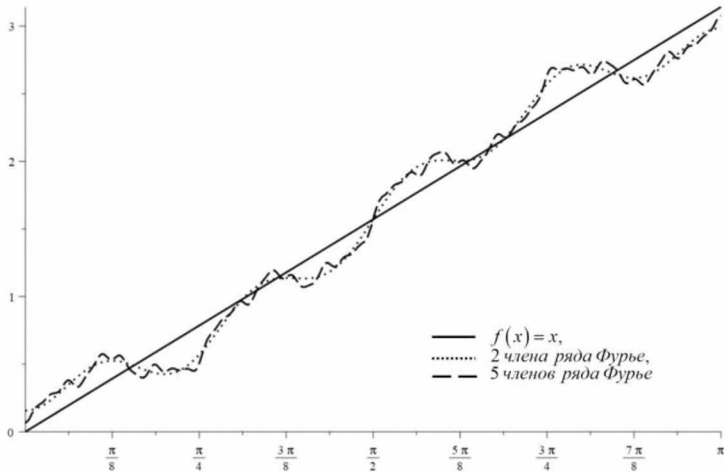


Рис. 2.8.2

Разложения в ряды Фурье можно применять для вычисления сумм числовых рядов. Положим в последнем равенстве $x = 0$. Тогда:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Далее:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Из последнего равенства имеем:

$$\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Откуда находим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Рассмотрим ещё один пример вычисления сумм числовых рядов с помощью равенства Парсеваля (1.6.4).

Пример 2.8.3. Найдём сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4},$$

используя разложение в ряд Фурье для функции $f(x) = x^2$:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^2}{n^2} \cos nx \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Решение. В представленном разложении:

$$a_0 = \frac{2\pi^4}{3}, \quad a_n = \frac{4(-1)^2}{n^2}, \quad b_n = 0.$$

В соответствии с равенством Парсеваля имеем:

$$\frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{x^5}{40\pi} \Big|_0^{\pi} - \frac{\pi^4}{72} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Таким образом, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

2.9. Исследование функционалов на непрерывность

Пример 2.9.1. Показать, что функционал:

$$J[y, y'] = \int_0^1 (ay + by') dx,$$

определённый в пространстве $C^1[0, 1]$ непрерывен на функции $y_0(x) = x$ в смысле близости первого порядка.

Решение. Оценим разность $|J[y, y'] - J[y_0, y'_0]|$. Имеем:

$$\begin{aligned} |J[y, y'] - J[y_0, y'_0]| &= \left| \int_0^1 (ay + by') dx - \int_0^1 (ax + b) dx \right| = \\ &= \left| \int_0^1 (ay - ax + by' - b) dx \right| \leq \left| \int_0^1 (ay - ax) dx \right| + \left| \int_0^1 (by' - b) dx \right| \leq \\ &\leq |a| \int_0^1 |y - x| dx + |b| \int_0^1 |y' - 1| dx < \left\{ \begin{array}{l} \max_{[0,1]} |y - x| < \eta \\ \max_{[0,1]} |y' - 1| < \eta \end{array} \right\} < (|a| + |b|) \eta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда $\eta < \varepsilon(|a| + |b|)^{-1}$, что и требовалось найти. Следовательно, рассматриваемый функционал является непрерывным в смысле близости первого порядка.

Пример 2.9.2. Исследовать функционал:

$$J[y, y'] = \int_0^{\pi} y'^2 dx$$

на непрерывность в смысле близости нулевого и первого порядка на кривой $y_0(x)$.

Решение. Проверим вначале непрерывность в смысле близости первого порядка. Имеем:

$$\begin{aligned} |J[y, y'] - J[y_0, y'_0]| &= \left| \int_0^{\pi} y'^2 dx - \int_0^{\pi} y_0'^2 dx \right| \leq \int_0^{\pi} |y'^2 - y_0'^2| dx = \\ &= \int_0^{\pi} |(y' - y'_0)(y' + y'_0)| dx < \left\{ \begin{array}{l} |y' - y'_0| < \eta \\ \int_0^{\pi} (y' + y'_0) dx = M \end{array} \right\} < M\eta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Откуда $\eta < \varepsilon M^{-1}$, тем самым доказана непрерывность первого порядка. Покажем, что функционал не является непрерывным в смысле близости нулевого порядка. Для этого рассмотрим функции:

$$y_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \text{ и } y_0(x) \equiv 0.$$

Эти кривые при $n \rightarrow \infty$ являются близкими в смысле близости нулевого порядка (см. пример 1 в п.2.1). Тогда:

$$\begin{aligned} |J[y, y'] - J[y_0, y'_0]| &= \left| \int_0^{\pi} y'^2 dx - \int_0^{\pi} y_0'^2 dx \right| = \int_0^{\pi} \cos^2 nx dx = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2nx}{4n} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, рассматриваемый функционал не является непрерывным в смысле близости нулевого порядка.

2.10. Вычисление вариаций функционалов

Найти первую и вторую вариацию функционала.

Пример 2.10.1. $J[y, y'] = \int_1^e y y'^2 dx.$

Решение. Вариация такого функционала находится по формуле (1.7.9)

$$\delta J[y, y'] = \int_1^e \left[\frac{\partial(y y'^2)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial(y y'^2)}{\partial y'} \delta y' \right] dx = \int_1^e (y'^2 \delta y + 2 y y' \delta y') dx.$$

Для второй вариации имеем:

$$\begin{aligned} \delta^2 J[y, y'] &= \int_1^e \left[\frac{\partial^2(y y'^2)}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2(y y'^2)}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2(y y'^2)}{\partial y'^2} \delta y'^2 \right] dx = \\ &= \int_1^e (0 \cdot \delta y^2 + 4 y \delta y \delta y' + 2 y \delta y'^2) dx = 2 \int_1^e (2 y \delta y \delta y' + y \delta y'^2) dx. \end{aligned}$$

Пример 2.10.2. $J[y, y', y''] = \int_0^1 (y + y'^2 + y''^3) dx.$

Решение. Вариация этого функционала находится по формуле (1.7.10):

$$\begin{aligned} \delta J[y, y', y''] &= \int_0^1 \left[\frac{\partial(y + y'^2 + y''^3)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial(y + y'^2 + y''^3)}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial(y + y'^2 + y''^3)}{\partial y''} \delta y'' \right] dx = \\ &= \int_0^1 (\delta y + 2 y' \delta y' + 3 y''^2 \delta y'') dx. \end{aligned}$$

Для второй вариации получаем соответственно:

$$\begin{aligned} \delta^2 J[y, y', y''] &= \delta \left[\int_0^1 (\delta y + 2 y' \delta y' + 3 y''^2 \delta y'') dx \right] = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial(\delta y + 2 y' \delta y' + 3 y''^2 \delta y'')}{\partial y} \delta y dx + \int_0^1 \frac{\partial(\delta y + 2 y' \delta y' + 3 y''^2 \delta y'')}{\partial y'} \delta y' dx + \\ &+ \int_0^1 \frac{\partial(\delta y + 2 y' \delta y' + 3 y''^2 \delta y'')}{\partial y''} \delta y'' dx = 2 \int_0^1 (\delta y'^2 + 3 y'' \delta y''^2) dx. \end{aligned}$$

Пример 2.10.3. $J[x, y, z, z'_x, z'_y] = \iint_D (xz'_x + yz'_y + zz'_x z'_y) dx dy$.

Решение. Найдем первую вариацию по формуле (1.7.12):

$$\begin{aligned} \delta J[x, y, z, z'_x, z'_y] &= \iint_D \frac{\partial (xz'_x + yz'_y + zz'_x z'_y)}{\partial z} \delta z dx dy + \\ &+ \iint_D \frac{\partial (xz'_x + yz'_y + zz'_x z'_y)}{\partial z'_x} \delta z'_x dx dy + \iint_D \frac{\partial (xz'_x + yz'_y + zz'_x z'_y)}{\partial z'_y} \delta z'_y dx dy = \\ &= \iint_D [z'_x z'_y \delta z + (x + zz'_y) \delta z'_x + (y + zz'_x) \delta z'_y] dx dy. \end{aligned}$$

Вычисляя вариацию от полученного выражения находим:

$$\begin{aligned} \delta J[x, y, z, z'_x, z'_y] &= \delta \iint_D [z'_x z'_y \delta z + (x + zz'_y) \delta z'_x + (y + zz'_x) \delta z'_y] dx dy = \\ &= \iint_D \frac{\partial [z'_x z'_y \delta z + (x + zz'_y) \delta z'_x + (y + zz'_x) \delta z'_y]}{\partial z} \delta z dx dy + \\ &+ \iint_D \frac{\partial [z'_x z'_y \delta z + (x + zz'_y) \delta z'_x + (y + zz'_x) \delta z'_y]}{\partial z'_x} \delta z'_x dx dy + \\ &+ \iint_D \frac{\partial [z'_x z'_y \delta z + (x + zz'_y) \delta z'_x + (y + zz'_x) \delta z'_y]}{\partial z'_y} \delta z'_y dx dy = \\ &= \iint_D [(z'_y \delta z'_x + z'_x \delta z'_y) \delta z + (z'_y \delta z + z \delta z'_y) \delta z'_x + (z'_x \delta z + z \delta z'_x) \delta z'_y] dx dy = \\ &= 2 \iint_D [z'_y \delta z'_x \delta z + z'_x \delta z'_y \delta z + z \delta z'_y \delta z'_x] dx dy. \end{aligned}$$

2.11. Нахождение экстремалей функционалов

Найти экстремали функционалов

Пример 2.11.1.

$$J[y] = \int_1^e (2y - x^2 y'^2) dx, \quad y(1) = e, \quad y(e) = 0.$$

Решение. Составим уравнение Эйлера (1.8.1)

$$f'_y - \frac{d}{dx}(f'_y) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{d}{dx}(2x^2 y') = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(2x^2 y') = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 y' = -2x + C_1 \Rightarrow y' = -\frac{1}{x} + \frac{C_1}{2x^2} \Rightarrow y = -\ln|x| - \frac{C_1}{2x} + C_2,$$

или, с учетом $x > 0$, $y = C_2 - \frac{C_1}{x} - \ln x$.

Используем краевые условия:

$$\begin{cases} e = C_2 - C_1 \\ 0 = C_2 - \frac{C_1}{e} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -e \\ C_2 = 0 \end{cases}.$$

Ответ: экстремаль $y = \frac{e}{x} - \ln x$.

Пример 2.11.2.

$$J[y] = \int_a^b (4y^2 + 5y'^2 + y''^2) dx.$$

Решение. Для функции $F = 4y^2 + 5y'^2 + y''^2$ составим уравнение Эйлера – Пуассона (1.8.4). Имеем:

$$F'_y = 8y, \quad F'_{y'} = 10y', \quad \frac{d}{dx} F'_{y'} = 10y'',$$

$$F'_{y''} = 2y'', \quad \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''} = 2y''''.$$

Тогда:

$$8y - 10y'' + 2y'''' = 0,$$

или

$$y'''' - 5y'' + 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$k^4 - 5k^2 + 4 = 0$$

имеет корни $k_{1,2} = \pm 2$, $k_{3,4} = \pm 1$.

Тогда получаем экстремаль функционала:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^x + C_4 e^{-x}.$$

Пример 2.11.3.

$$J[y] = \int_0^1 y'' dx, \quad y(0) = y(1) = y'(1) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Решение. Для подынтегральной функции $F = y''$ уравнение Эйлера – Пуассона (1.8.4) имеет вид:

$$\frac{d^2}{dx^2}(y'') = 0, \quad y''' = 0,$$

Отсюда:

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad y' = 3Ax^2 + 2Bx + C.$$

Для нахождения коэффициентов используем граничные условия:

$$\begin{cases} D = 0 \\ A + B + C + D = 0 \\ 3A + 2B + C = 0 \\ C = 1 \end{cases} \Rightarrow A = 1, \quad B = -2, \quad C = 1, \quad D = 0.$$

Получаем экстремаль:

$$y = x^3 - 2x^2 + x.$$

Пример 2.11.4.

$$J[y_1, y_2] = \int_a^b (2y_1 y_2 + y_1'^2 + y_2'^2) dx.$$

Решение. $F(x, y_1, y_2) = 2y_1 y_2 + y_1'^2 + y_2'^2$. Вычисляя частные производные

$$F'_{y_1} = 2y_2, \quad F'_{y_1'} = 2y_1', \quad \frac{d}{dx}(2y_1') = 2y_1'',$$

$$F'_{y_2} = 2y_1, \quad F'_{y_2'} = 2y_2', \quad \frac{d}{dx}(2y_2') = 2y_2'',$$

получаем систему уравнений Эйлера

$$\begin{cases} 2y_2 - 2y_1'' = 0 \\ 2y_1 - 2y_2'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = y_1'' \\ y_1 = y_2'' \end{cases}.$$

Из второго уравнения находим $y_1'' = y_2''$ и подставим в первое:

$$y_2 = y_2^{IV}, \quad k^4 - 1 = 0,$$

$$(k^2 + 1)(k + 1)(k - 1) = 0, \quad k_{1,2} = \pm i, \quad k_3 = -1, \quad k_4 = 1.$$

В результате получаем семейство экстремалей (y_1, y_2) :

$$\begin{cases} y_1 = y_2'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x + C_3 e^{-x} + C_4 e^x \\ y_2 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{-x} + C_4 e^x \end{cases}$$

2.12. Нахождение расстояний между кривыми

Пример 2.12.1. Найти кратчайшее расстояние между кривыми $y = x^2$ и $y = x - 5$ (рис. 2.12.1).

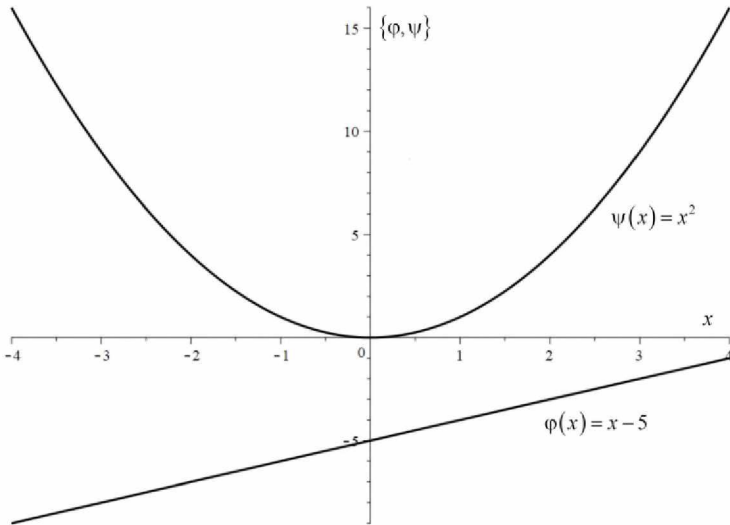


Рис. 2.12.1

Решение. Задача состоит в нахождении минимума функционала:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (\text{длина кривой } y = y(x))$$

при краевых условиях $y(x_1) = \psi(x_1)$, $y(x_2) = \phi(x_2)$, где $\psi(x) = x^2$, $\phi(x) = x - 5$.

Уравнение Эйлера (1.8.1) имеет вид:

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0 \Leftrightarrow y''=0.$$

Его общее решение $y=C_1x+C_2$ (прямая). Для нахождения C_1, C_2, x_1, x_2 используем краевые условия:

$$\begin{cases} y(x_1)=C_1x_1+C_2=\psi(x_1)=x_1^2 \\ y(x_2)=C_1x_2+C_2=\varphi(x_2)=x_2-5 \end{cases}$$

и условия ортогональности (1.9.2):

$$\begin{cases} \left(y'+\frac{1}{\psi'}\right)\Big|_{x=x_1}=C_1+\frac{1}{2x_1}=0 \\ \left(y'+\frac{1}{\varphi'}\right)\Big|_{x=x_2}=C_1+1=0 \end{cases}$$

Из условий ортогональности $C_1=-1, x_1=1/2$. Подставляя в граничные условия получаем:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}+C_2=\frac{1}{4} \\ -x_2+C_2=x_2-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2=\frac{3}{4} \\ x_2=\frac{23}{8} \end{cases}$$

Таким образом, экстремалью является прямая (рис. 2.12.2)

$$y=-x+\frac{3}{4},$$

которая доставляет экстремум функционалу.

Найдем расстояние между кривыми:

$$d=J_{\min}[y]=\int_{1/2}^{23/8}\sqrt{1+y'^2}dx=\{y'=-1\}=\int_{1/2}^{23/8}\sqrt{2}dx=\frac{19\sqrt{2}}{8}.$$

Решение задачи проиллюстрировано на рис. 2.12.2.

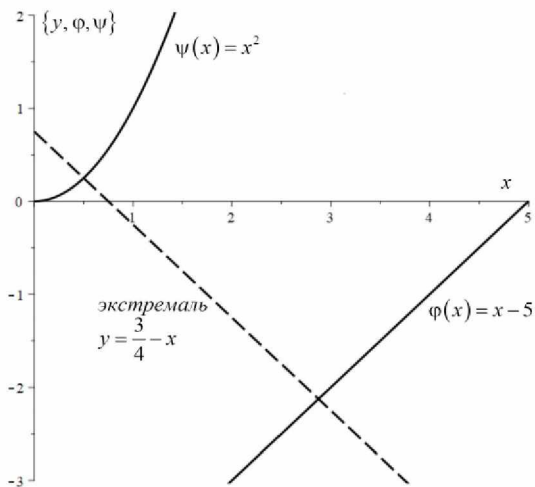


Рис. 2.12.2

Пример 2.12.2. Найдём расстояние между кривыми:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ и } \frac{(x-5)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{9} = 1.$$

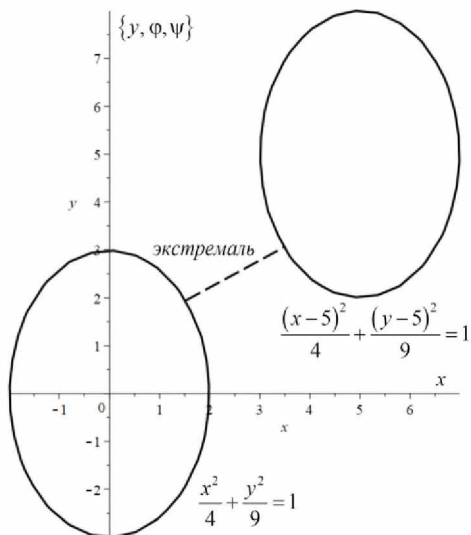


Рис. 2.12.3

Решение. Изобразим заданные кривые на плоскости (рис. 2.12.3). Судя по рисунку левая граничная точка лежит на верхней части эллипса $x^2/4 + y^2/9 = 1$, а правая граничная на нижней части эллипса $(x-5)^2/4 + (y-5)^2/9 = 1$.

Соответствующие дуги этих кривых определяются следующими равенствами:

$$\psi(x) = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}, \quad \varphi(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{4-(x-5)^2} + 5.$$

Экстремалью является прямая $y = C_1x + C_2$, пересекающая заданные кривые в точках $(x_1, \psi(x_1))$ и $(x_2, \varphi(x_2))$. В этих точках пересечения имеем:

$$\begin{aligned} C_1x_1 + C_2 &= \frac{3}{2}\sqrt{4-x_1^2}, \\ C_1x_2 + C_2 &= -\frac{3}{2}\sqrt{4-(x_2-5)^2} + 5. \end{aligned} \tag{2.12.1}$$

Далее:

$$\psi'(x) = -\frac{3x}{2\sqrt{4-x^2}}, \quad \varphi'(x) = \frac{3(x-5)}{2\sqrt{4-(x-5)^2}}.$$

Подставляя эти равенства в условия ортогональности (1.9.2) получаем:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2\sqrt{4-x_1^2}}{3x_1}, \\ C_1 &= \frac{2\sqrt{4-(5-x_2)^2}}{3(5-x_2)}. \end{aligned} \tag{2.12.2}$$

Из системы (2.12.2), приравняв правые части находим:

$$x_1 = 5 - x_2. \tag{2.12.3}$$

Подставляя это равенство в (2.12.1) получаем:

$$\begin{aligned} 5C_1 + 2C_2 &= 5, \\ C_1(2x_2 - 5) &= -3\sqrt{4-(5-x_2)^2} + 5. \end{aligned} \tag{2.12.4}$$

Выражая здесь из последнего равенства C_1 и подставляя во второе равенство в систему (2.12.2) имеем:

$$-\frac{3\sqrt{4-(5-x_2)^2}}{2x_2-5} + \frac{5}{2x_2-5} = \frac{2\sqrt{4-(5-x_2)^2}}{3(5-x_2)}.$$

После приведения к общему знаменателю и возведения в квадрат это уравнение приводится к виду:

$$4(7-x_2)^2 - 9(5-x_2)^2 = (7-x_2)^2 (5-x_2)^2. \quad (2.12.5)$$

Таким образом, для определения искомых параметров имеем систему (2.12.3), (2.12.4) и (2.12.5). Решение уравнения (2.12.5) сложно найти аналитически. Будем решать его методом последовательных итераций, изложенном в п. 1.3. Для этого, вначале сделаем замену переменных: $u = 6 - x_2$. Уравнение (2.12.5) в этом случае запишется так:

$$(5-u)(5u-1) = (u^2-1)^2. \quad (2.12.6)$$

Раскроем квадрат в правой части и выразим u . Получим:

$$u = \sqrt[3]{2u^2 + (5-u)(5u-1) - 1}. \quad (2.12.7)$$

Графики функций u и $\sqrt[3]{2u^2 + (5-u)(5u-1) - 1}$ представлены на рис. 2.12.4.

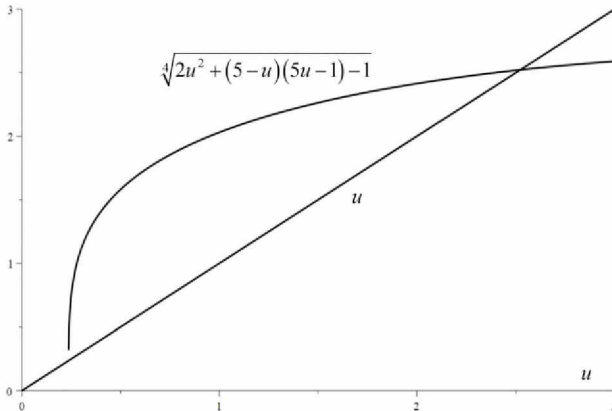


Рис. 2.12.4

Из геометрических соображений ясно (см. рис. 2.12.3) что $x_2 \approx 3,5$. Следовательно, для решения уравнения (2.12.7) в качестве начального приближения можно взять $u^{(0)} = 2,5$. Зададим точность $\varepsilon = 10^{-4}$. Тогда уже на четвертом шаге итерационного процесса (1.3.3) будем иметь:

$$u^{(4)} = 2,5226.$$

Таким образом с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$ получаем:

$$x_2 = 3,4773. \quad (2.12.8)$$

Далее из равенств (2.12.3) и (2.12.4) последовательно находим:

$$x_1 = 1,5227, C_1 = 0,5678, C_2 = 1,0806. \quad (2.12.9)$$

Таким образом, искомая экстремаль:

$$y = 0,5678x + 1,0806,$$

а расстояние между эллипсами равно:

$$d = J_{\min}[y] = \int_{1,5227}^{3,4773} \sqrt{1+y'^2} dx = \{y' = 0,5678\} = 1,15 \int_{1,5227}^{3,4773} dx = 2,2479.$$

Замечание 1. Вообще говоря, представление (2.12.7) не является единственным. Например, это уравнение можно записать так:

$$u = \frac{1}{26} \left[5(z^2 + 1) + (z^2 - 1)^2 \right] \text{ или так } u = \frac{1}{5} \left[1 + \frac{(z^2 - 1)^2}{5 - z} \right].$$

Однако, в данных ситуациях итерационная последовательность будет сходиться ко второму корню уравнения (2.12.6) при любом начальном приближении от 0 до значения u_2 (рис. 2.12.5).

Если начальное приближение взять больше чем u_2 , то итерационный процесс разойдётся, так как не выполнено условие сходимости (1.3.4). Данный вопрос уже обсуждался при решении уравнения из примера 2.4.2.

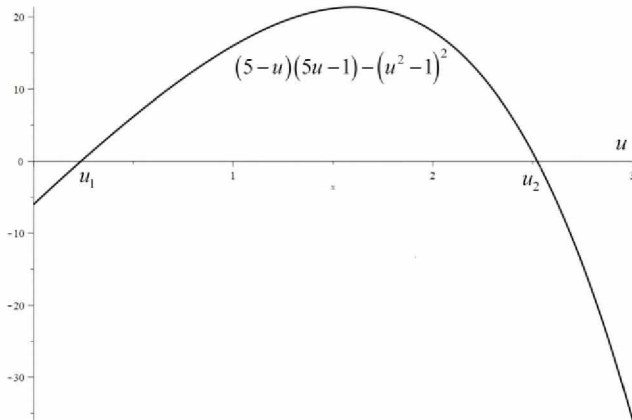


Рис. 2.12.5

Замечание 2. Отметим также, что численное решение исходных систем (2.12.1) и (2.12.2) (т.е. без выполнения упрощающих преобразований) с помощью стандартных библиотек, может привести к погрешностям. Например, пакет символьной математики Maple даёт следующее решение указанных систем:

$$x_1 = 1,5936, \quad x_2 = 3,4064, \quad C_1 = 0,7583, \quad C_2 = 0,6042.$$

Вычисляя расстояние между эллипсами по этим параметрам, имеем:

$$d = J_{\min}[y] = \int_{1,5936}^{3,4064} \sqrt{1+y'^2} dx = \{y' = 0,7583\} = 1,2550 \int_{1,5936}^{3,4064} dx = 2,2751 > 2,2479.$$

Погрешность в данном случае невелика, однако, учитывая её неконтролируемый характер, сделанные в данном примере преобразования систем (2.12.1) и (2.12.2) явно не являются лишними.

В Приложении имеется листинг программ для данного примера.

2.13. Нахождение расстояний между поверхностями

Пример 2.13.1. Найдём расстояние от точки $A(1,1,1)$ до сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (рис. 2.13.1).

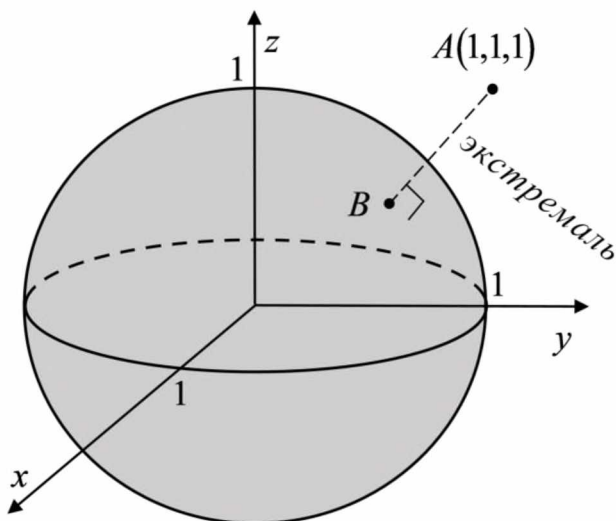


Рис. 2.13.1

Решение. Данная задача сводится к нахождению экстремума функционала (1.9.7):

$$J[y] = \int_{x_0}^1 \sqrt{1+y'^2+z'^2} dx,$$

где точка $B(x_0, y_0, z_0)$ должна находиться на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Экстремальями данного функционала являются прямые, заданные системой:

$$\begin{cases} y = C_1 x + C_2 \\ z = C_3 x + C_4 \end{cases} \quad (2.13.1)$$

Из условия прохождения экстремали через точку $A(1,1,1)$ имеем:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_3 + C_4 = 1 \end{cases} \quad (2.13.2)$$

Запишем уравнение сферы в виде:

$$z = \psi(x, y) = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Тогда из условия ортогональности (1.9.6) получаем:

$$\frac{\pm\sqrt{1-x^2-y^2}}{-x} \Big|_B = \frac{\pm y' \sqrt{1-x^2-y^2}}{-y} \Big|_B = \frac{z'}{-1} \Big|_B$$

или, что, то же самое:

$$\frac{z}{x} \Big|_B = \frac{y'z}{y} \Big|_B = \frac{z'}{1} \Big|_B.$$

Последнее равенство запишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} xz' = z \\ xy' = y \end{cases}.$$

Отсюда, с учетом равенств (2.13.1) получаем:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 x_0 \\ z_0 = C_3 x_0 \end{cases}.$$

Из условия прохождения экстремалей через точку $B(x_0, y_0, z_0)$ имеем:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 x_0 + C_2 \\ z_0 = C_3 x_0 + C_4 \end{cases},$$

откуда с учетом предыдущей системы $C_2 = 0$, $C_4 = 0$. Подставляя эти значения в систему (2.13.2) получаем $C_1 = 0$, $C_3 = 1$. Следовательно, экстремалью является прямая:

$$\begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}.$$

Так как точка $B(x_0, y_0, z_0)$ лежит на сфере, то с учётом этих равенств получаем:

$$x_0^2 + x_0^2 + x_0^2 = 1.$$

Отсюда:

$$x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Очевидно, что знак «-» соответствует максимальному расстоянию от точки $A(1,1,1)$ до сферы, а знак «+» – минимальному. Таким образом,

точка B имеет координаты $B(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Соответственно, расстояние от точки $A(1,1,1)$ до сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ равно:

$$d_{\min} = \int_{1/\sqrt{3}}^1 \sqrt{1+1+1} dx = \sqrt{3} x \Big|_{1/\sqrt{3}}^1 = \sqrt{3} - 1.$$

К слову сказать, максимальное расстояние от точки $A(1,1,1)$ до сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ равняется:

$$d_{\max} = \int_{-1/\sqrt{3}}^1 \sqrt{1+1+1} dx = \sqrt{3} x \Big|_{-1/\sqrt{3}}^1 = \sqrt{3} + 1.$$

Пример 2.13.2. Найдём расстояние между поверхностями (рис. 2.13.2):

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \text{ и } x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Решение. Исходя из геометрического смысла задачи, экстремалью, по всей видимости, будет прямая, совпадающая с осью Oz . Для проверки этого факта будем искать её в виде (1.9.11):

$$\begin{cases} x = C_1 z + C_2 \\ y = C_3 z + C_4 \end{cases}$$

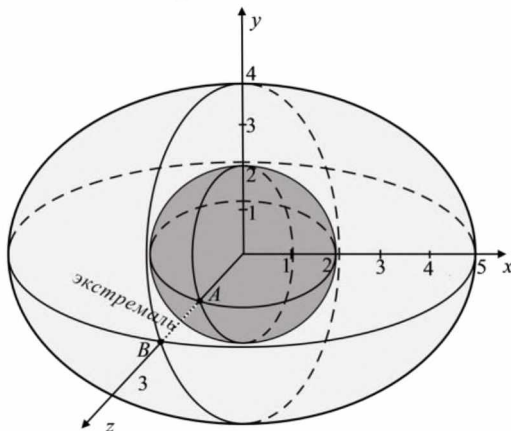


Рис. 2.13.2

Граничные точки соответствующего функционала (1.9.9) движутся по поверхностям:

$$\psi(x, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad \varphi(x, z) = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{9}}.$$

Пусть точка на сфере имеет координаты $A(x_0, y_0, z_0)$, а на эллипсоиде $B(x_1, y_1, z_1)$. Тогда из условия пересечения экстремали с данными поверхностями имеем:

$$\begin{aligned} C_1 z_0 + C_2 &= x_0, \\ C_3 z_0 + C_4 &= y_0 = \sqrt{4 - x_0^2 - z_0^2}, \\ C_1 z_1 + C_2 &= x_1, \\ C_3 z_1 + C_4 &= y_1 = 4\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{25} - \frac{z_1^2}{9}}. \end{aligned} \tag{2.13.3}$$

Далее:

$$\begin{aligned} \psi'_x &= -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - z^2}} = -\frac{x}{y}, \quad \psi'_z = -\frac{z}{\sqrt{4 - x^2 - z^2}} = -\frac{z}{y}, \\ \varphi'_x &= -\frac{4x}{25} \left(1 - \frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{9}\right)^{-1/2} = -\frac{4x}{25y}, \quad \varphi'_z = -\frac{4z}{9} \left(1 - \frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{9}\right)^{-1/2} = -\frac{4z}{9y}. \end{aligned}$$

Тогда из условия ортогональности (1.9.10) получаем:

$$\frac{y_0}{z_0} = \frac{x'_0 y_0}{x_0} = \frac{y'_0}{1}, \quad \frac{9y_1}{4z_1} = \frac{25x'_1 y_1}{4x_1} = \frac{y'_1}{1}.$$

Эти равенства перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} z_0 &= z'_0 x_0, \\ y_0 &= y'_0 x_0, \\ 25z_1 &= 3x_1 z'_1, \\ 25y_1 &= 3x_1 y'_1. \end{aligned} \tag{2.13.4}$$

Так как точки $A(x_0, y_0, z_0)$ и $B(x_1, y_1, z_1)$ лежат на экстремали, с учетом (1.9.11) имеем:

$$\begin{aligned}
C_1 z_0 + C_2 &= C_1 z_0, \\
C_3 z_0 + C_4 &= C_3 z_0, \\
3(C_1 z_1 + C_2) &= 25 C_1 z_1, \\
3(C_3 z_1 + C_4) &= 25 C_3 z_1.
\end{aligned}
\tag{2.13.5}$$

Здесь из первых двух равенств следует, что $C_2 = C_4 = 0$. Тогда из двух оставшихся равенств получаем, либо $z_1 = 0$, либо $C_1 = C_3 = 0$. В первом случае из третьего уравнения в (2.13.3) имеем $x_1 = C_1 \cdot 0 + 0 = 0$, а из последнего одновременно $y_1 = 0 \cdot 0 + 0 = 0$ и $y_1 = 4\sqrt{1 - 0^2 / 25 - 0^2 / 9} = 2$, чего быть не может. Следовательно, остается $C_1 = C_3 = 0$. В этом случае из системы (2.13.3) получаем, что:

$$\begin{aligned}
x_0 &= C_1 z_0 + C_2 = 0 \cdot z_0 + 0 = 0, \\
y_0 &= C_3 z_0 + C_4 = 0 \cdot z_0 + 0 = 0, \\
x_1 &= C_1 z_1 + C_2 = 0 \cdot z_1 + 0 = 0, \\
y_1 &= C_3 z_1 + C_4 = 0 \cdot z_1 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

С учётом этого:

$$\begin{aligned}
\sqrt{4 - x_0^2 - z_0^2} &= \sqrt{4 - z_0^2} = 0 \Rightarrow z_0 = 2, \\
4\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{25} - \frac{z_1^2}{9}} &= 4\sqrt{1 - \frac{z_1^2}{9}} = 0 \Rightarrow z_1 = 3.
\end{aligned}$$

Замечание. Этим равенствам удовлетворяют также значения $z_0 = -2$ и $z_1 = -3$, которые сразу отброшены исходя из геометрических соображений (см. рис. 2.13.2.).

Таким образом, экстремаль данной задачи задается системой равенств:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

т.е. это действительно прямая, совпадающая с осью Oz .

Найдём теперь расстояние между заданными поверхностями с помощью функционала (1.9.9). Имеем:

$$J[x, y] = \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} dz = \int_2^3 dz = 1.$$

2.14. Нахождение максимумов и минимумов функционалов

Задача о нахождении экстремумов функционалов состоит из следующих этапов:

- 1) вначале, используя необходимые условия экстремума, находят экстремали функционала;
- 2) затем с помощью достаточных условий исследуется характер экстремума (максимум или минимум, сильный или слабый экстремум) в данных точках. В рамках данного учебного пособия ограничимся рассмотрением достаточного условия экстремума в форме Лежандра (1.8.7)–(1.8.10).

Пример 2.14.1. Исследуем на экстремум функционал:

$$\int_0^a y'^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b.$$

Решение. Составляем уравнение Эйлера (1.8.1):

$$F_{y'} = 2y', \quad \frac{dF_{y'}}{dx} = 2y''.$$

Общее решение имеет вид:

$$y'' = 0 \Rightarrow y = Cx + D.$$

Из граничных условий находим:

$$D = 0, \quad Ca = b \Rightarrow C = \frac{b}{a}.$$

Следовательно, экстремалью является прямая $y = \frac{b}{a}x$.

Проверим достаточные условия Лежандра:

$$F_{y'y'} = 2 > 0 \quad \forall y'.$$

Это означает, что на прямой $y = \frac{b}{a}x$ достигается сильный минимум.

Пример 2.14.2. Исследуем на экстремум функционал:

$$\int_0^a (6y'^2 - y'^4 + yy') dx, \quad y(0)=0, y(a)=b, \quad a, b > 0.$$

Решение. Подынтегральная функция зависит только от y и y' . Поэтому уравнение Эйлера имеет первый интеграл (1.8.2). Имеем:

$$F = 6y'^2 - y'^4 + yy', \quad F_{y'} = 12y' - 4y'^3 + y.$$

Откуда:

$$F - y'F_{y'} = C \Rightarrow 3y'^4 - 6y'^2 = C.$$

Решения биквадратного уравнения имеют вид $y' = C_1$. Следовательно, экстремалами являются прямые:

$$y = C_1 x + C_2.$$

Граничным условиям удовлетворяют экстремали:

$$y = \frac{b}{a} x.$$

Проверим достаточное условие Лежандра:

$$F_{y'y'} = 12 - 12y'^2.$$

Это выражение меняет знак в зависимости от величины y' , поэтому сильного экстремума не будет. Для исследования на слабый экстремум воспользуемся полученным выражением для экстремалей. Имеем:

$$F_{y'y'} = 12 - 12\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 12\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Методом интервалов находим, что при $a > b > 0$, $F_{y'y'} > 0$ – слабый минимум, а при $b > a > 0$, $F_{y'y'} < 0$ – слабый максимум.

Глава 3. Варианты заданий для расчетных работ

1. Исследовать на близость нулевого и первого порядка кривые

1. $y_1 = \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in [0, \pi]$	2. $y_1 = \frac{\cos nx}{n^{1/2}}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
3. $y_1 = \frac{\sin n^2 x}{n^{3/2}}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in [0, \pi]$	4. $y_1 = \frac{\operatorname{tg} x/n}{n^{3/2}}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
5. $y_1 = \frac{\operatorname{tg}(x/n^2)}{n^{3/2}}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$	6. $y_1 = \frac{\ln^2 nx}{n^{1/2}}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in [e^{-1}, e]$
7. $y_1 = \frac{\ln^3 nx}{n^{1/3}}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in [e^{-1}, e^2]$	8. $y_1 = \frac{\operatorname{ctg} x/n}{n^{1/2}}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$
9. $y_1 = \frac{x \sin nx}{n}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in [0, \pi]$	10. $y_1 = \frac{x \ln nx}{n^{1/2}}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in [e^{-1}, e]$
11. $y_1 = \frac{\arcsin x/n}{n^{1/2}}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$	12. $y_1 = \frac{x^n}{n}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in [0, 1]$
13. $y_1 = \frac{e^{nx}}{n}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in [0, 1]$	14. $y_1 = \frac{x \cos nx}{n}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in [0, \pi]$
15. $y_1 = \frac{\operatorname{arctg} x/n}{n^{1/2}}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$	16. $y_1 = \frac{x^2 \cos nx}{n}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in [0, \pi]$
17. $y_1 = \frac{x}{n}$ и $y_2 = \frac{x^2}{n}$, $x \in [0, 1]$	18. $y_1 = \frac{x^n}{n}$ и $y_2 = \frac{\sqrt[n]{x}}{n}$, $x \in [0, 1]$
19. $y_1 = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in [0, 1]$	20. $y_1 = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ и $y_2 = \sin \frac{x}{n}$, $x \in [0, 1]$
21. $y_1 = \operatorname{arctg} \frac{x}{n}$ и $y_2 = \sin \frac{x}{n}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	22. $y_1 = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ и $y_2 = \operatorname{tg} \frac{x}{n}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
23. $y_1 = x^n$ и $y_2 = x^{2n}$, $x \in [0, 1]$	24. $y_1 = \frac{\arcsin x/n}{n^{1/2}}$ и $y_2 = \sin \frac{x}{n}$, $x \in [0, 1]$
25. $y_1 = \frac{\operatorname{sh}(nx)}{n}$ и $y_2 \equiv 0$, $x \in [0, 1]$	26. $y_1 = \frac{\operatorname{ch}(nx)}{n}$ и $y_2 = \frac{e^{nx}}{n}$, $x \in [0, 1]$

27. $y_1 = \text{sh}(nx)$ и $y_2 = \text{ch}(nx)$, $x \in [0,1]$	28. $y_1 = \frac{\text{sh}(nx)}{n}$ и $y_2 = \frac{e^{nx}}{n}$, $x \in [0,1]$
29. $y_1 = \text{sh} \frac{x}{n}$ и $y_2 = \text{ch} \frac{x}{n}$, $x \in [0,1]$	30. $y_1 = \frac{\text{th}(nx)}{n}$ и $y_2 = \frac{1}{n}$, $x \in [0,1]$

2. Даны: матрица \mathbf{A} , вектор \mathbf{b} . Найти нормы: $\|\mathbf{A}\|_\infty$, $\|\mathbf{A}\|_1$, $\|\mathbf{A}\|_2$, $\|\mathbf{b}\|_\infty$, $\|\mathbf{b}\|_1$, $\|\mathbf{b}\|_2$, $\|\mathbf{Ab}\|_\infty$, $\|\mathbf{Ab}\|_1$, $\|\mathbf{Ab}\|_2$. Проверить согласованность векторных и матричных норм.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$	8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$	10. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$
11. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$	12. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 5 & -5 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \\ -6 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$	14. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$
15. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 7 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$	16. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
17. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 7 & 2 & -7 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$	18. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 8 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$
19. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -8 & 0 & -4 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$	20. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -6 & 7 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
21. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$	22. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$
23. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$	24. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
25. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	26. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
27. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	28. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
29. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -8 & 0 & 4 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$	30. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 7 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Найти нормы интегральных операторов

1. $\int_{-1}^1 \sin(x+t) f(t) dt, x \in [-1, 1]$	2. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \sin t f(t) dt, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
3. $\int_0^1 \cos(x+t) f(t) dt, x \in [0, 1]$	4. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \cos x f(t) dt, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
5. $\int_0^x x^2 t^2 f(t) dt, x \in [0, 1]$	6. $\int_0^x (x^2 - t^2) f(t) dt, x \in [0, 2]$
7. $\int_{-1}^x e^{x-t} f(t) dt, x \in [-1, 1]$	8. $\int_{-1}^x e^{x+t} f(t) dt, x \in [-1, 1]$
9. $\int_0^{\pi/2} \sin(x-t) f(t) dt, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	10. $\int_0^{\pi/2} \cos(x-t) f(t) dt, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
11. $\int_0^{\pi/4} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin^2 t f(t) dt, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$	12. $\int_0^{\pi/4} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \sin^2 x f(t) dt, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
13. $\int_0^2 x e^{-t} f(t) dt, x \in [0, 2]$	14. $\int_0^2 t e^{-x} f(t) dt, x \in [0, 2]$
15. $\int_0^1 (1-x)(1-t) f(t) dt, x \in [0, 1]$	16. $\int_{-1}^0 (1+x)(1+t) f(t) dt, x \in [-1, 0]$
17. $\int_0^x \cos(x+t) f(t) dt, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	18. $\int_0^x \sin(x+t) f(t) dt, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
19. $\int_1^x \frac{f(t)}{x^2 + t^2} dt, x \in [1, \sqrt{3}]$	20. $\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{f(t)}{x^2 - t^2} dt, x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
21. $\int_1^2 x^2 t^2 f(t) dt, x \in [1, 2]$	22. $\int_0^3 (x^2 - t^2) f(t) dt, x \in [0, 3]$
23. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \cos x f(t) dt, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	24. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos t f(t) dt, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

25. $\int_0^x (1-x)(1-t)f(t)dt, x \in [0,1]$	26. $\int_{-1}^x (1+x)(1+t)f(t)dt, x \in [-1,1]$
27. $\int_0^x \frac{\operatorname{ch}t}{\operatorname{ch}x} f(t)dt, x \in [0,1]$	28. $\int_1^x \frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}x} f(t)dt, x \in [1,2]$
29. $\int_0^1 a^{x-t} f(t)dt, x \in [0,1], a > 1$	30. $\int_0^1 a^{x+t} f(t)dt, x \in [0,1], a > 1$

4. Определить, при каких λ оператор будет сжимающим и решить интегральное уравнение методом сжимающих отображений [2, 6, 8, 9]

1. $f(x) = 1 - \lambda \int_0^x (x-t)f(t)dt, f_0(x) \equiv 1$	2. $f(x) = 1 + \lambda \int_0^x (x-t)f(t)dt, f_0(x) \equiv 1$
3. $f(x) = x + 1 - \lambda \int_0^x f(t)dt, f_0(x) = 1 + x$	4. $f(x) = \frac{x^2}{2} + x - \lambda \int_0^x f(t)dt, f_0(x) = \frac{x^2}{2} + x$
5. $f(x) = 2x^2 + x - \lambda \int_0^x xf(t)dt,$ $f_0(x) = 2x^2 + x$	6. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x - \lambda \int_0^x f(t)dt,$ $f_0(x) = \frac{x^3}{3} - 2x$
7. $f(x) = 2x + 2 - \lambda \int_0^x f(t)dt, f_0(x) \equiv 1$	8. $f(x) = x - \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - 1)t^2 f(t)dt, f_0(x) \equiv 0$
9. $f(x) = 2 - \lambda \int_{-1}^1 xf(t)dt, f_0(x) \equiv 2$	10. $f(x) = x + \lambda \int_{-1}^1 (1-x)(1+t)f(t)dt,$ $f_0(x) = x$
11. $f(x) = \lambda \int_0^1 x(1+t)f(t)dt - 5, f_0(x) \equiv 0$	12. $f(x) = 3x + \lambda \int_0^1 x^2(1-t)f(t)dt, f_0(x) = 3x$
13. $f(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1+x)t^2 f(t)dt - x,$ $f_0(x) = -x$	14. $f(x) = \lambda \int_0^1 e^{2x+t} f(t)dt - 3e^x,$ $f_0(x) = -3e^x$

15. $f(x) = \lambda \int_0^1 (1+x)t^2 f(t) dt - x^3$, $f_0(x) = -x^3$	16. $f(x) = \lambda \int_0^1 (1-2x^2)f(t) dt + x - x^3$, $f_0(x) = x - x^3$
17. $f(x) = \lambda \int_{-1}^1 t^{-1/5} f(t) dt + x^2$, $f_0(x) = x^2$	18. $f(x) = x - \lambda \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f(t) dt$, $f_0(x) = x$
19. $f(x) = \lambda \int_0^1 (1+x)t^3 f(t) dt + 3x^2$, $f_0(x) = 3x^2$	20. $f(x) = \lambda \int_0^1 t\sqrt{1+x} f(t) dt + x$, $f_0(x) = x$
21. $f(x) = \lambda \int_0^1 x t f(t) dt + e^x$, $f_0(x) = e^x$	22. $f(x) = \lambda \int_0^\pi \sin x t f(t) dt$, $f_0(x) \equiv 0$
23. $f(x) = \lambda \int_0^\pi \cos x t f(t) dt$, $f_0(x) \equiv 0$	24. $f(x) = \lambda \int_0^1 (x-t) f(t) dt + x$, $f_0(x) = x$
25. $f(x) = \lambda \int_0^\pi \sin x \cos t f(t) dt + 1$, $f_0(x) \equiv 1$	26. $f(x) = -\lambda \int_0^\pi \cos^2 x f(t) dt + 1$, $f_0(x) \equiv 1$
27. $f(x) = -\lambda \int_0^\pi \sin^2 x f(t) dt + 1$, $f_0(x) \equiv 1$	28. $f(x) = \lambda \int_0^x 2^{x-t} f(t) dt + 2^x$, $f_0(x) = 2^x$
29. $f(x) = \lambda \int_0^x t f(t) dt + 1$, $f_0(x) \equiv 1$	30. $f(x) = \lambda \int_0^x x f(t) dt + 1 - x^2$, $f_0(x) = 1 - x^2$

5. Решить интегральное уравнение с помощью резольвенты [2, 6, 8, 9]

1. $f(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x-t) f(t) dt - x$	2. $f(x) = x + \lambda \int_0^{\pi/2} \sin(x-t) f(t) dt$
3. $f(x) = 1 - \lambda \int_{-\pi}^\pi (x + \sin t) f(t) dt$	4. $f(x) = x - \lambda \int_{-1}^1 (x-t)^2 f(t) dt$
5. $f(x) = x^2 - \lambda \int_0^1 x e^t f(t) dt$	6. $f(x) = e^x - \lambda \int_0^1 e^{x+t} f(t) dt$

7. $f(x) = \cos x - \lambda \int_0^{\pi/2} \sin x \cos t f(t) dt$	8. $f(x) = x^2 - \lambda \int_{-1}^1 x^2 t^2 f(t) dt$
9. $f(x) = x^2 - \lambda \int_{-1}^1 x e^t f(t) dt$	10. $f(x) = e^x + \lambda \int_0^x (x-t) f(t) dt$
11. $f(x) = \lambda \int_0^x e^{x-t} f(t) dt + x^3$	12. $f(x) = 1 + \lambda \int_0^x \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{cht}} f(t) dt$
13. $f(x) = \lambda \int_0^x a^{x-t} f(t) dt - x$	14. $f(x) = \lambda \int_0^x (x-t) f(t) dt - x^2$
15. $f(x) = 1 + x^2 + \lambda \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2} f(t) dt$	16. $f(x) = e^{x^2-2x} + \lambda \int_0^x e^{x^2-t^2} f(t) dt$
17. $f(x) = 1 - 2x - \lambda \int_0^x e^{x^2-t^2} f(t) dt$	18. $f(x) = x3^x - \lambda \int_0^x 3^{x-t} t f(t) dt$
19. $f(x) = \lambda \int_0^x e^{x-t} f(t) dt + \sin x$	20. $f(x) = e^x - \lambda \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$
21. $f(x) = \lambda \int_0^{\pi} f(t) dt + \sin x$	22. $f(x) = \lambda \int_0^1 a^{x+t} f(t) dt + x$
23. $f(x) = \lambda \int_0^x e^{x+t} f(t) dt + x$	24. $f(x) = \lambda \int_0^1 x \sin(2\pi t) f(t) dt + \cos(2\pi x)$
25. $f(x) = \lambda \int_0^1 x e^{x+t} f(t) dt + e^{-x}$	26. $f(x) = \lambda \int_0^1 \sin x \cos t f(t) dt + 1$
27. $f(x) = \lambda \int_{-1}^1 x f(t) dt + x^2$	28. $f(x) = \lambda \int_0^1 x^{1/3} t^{2/3} f(t) dt + x^{1/3}$
29. $f(x) = \lambda \int_{-1}^1 x f(t) dt + x$	30. $f(x) = 3^{-x} - \lambda \int_0^x 3^{x+t} f(t) dt$

6. Разложить функцию в тригонометрический ряд Фурье

1. $f(x) = e^{x/4}, x \in [-\pi, \pi]$	2. $f(x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$
3. $f(x) = 2 - x, x \in [0, 2]$ Разложить в ряд по косинусам	4. $f(x) = 2\pi - x, x \in [0, 2\pi]$ Разложить в ряд по синусам
5. $f(x) = e^x, x \in [-2\pi, 2\pi]$	6. $f(x) = x, x \in [-1, 1]$
7. $f(x) = x , x \in [-2, 2]$	8. $f(x) = x x , x \in [-\pi, \pi]$
9. $f(x) = x^2, x \in [0, \pi]$ Разложить в ряд по синусам	10. $f(x) = x, x \in [0, \pi]$ Разложить в ряд по косинусам
11. $f(x) = x - x, x \in [-\pi, \pi]$	12. $f(x) = \operatorname{ch} x, x \in [-\pi, \pi]$
13. $f(x) = x^2 - 4x, x \in [-4, 4]$	14. $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 < x \leq 2 \\ 2 + x, & -2 \leq x < 0 \end{cases}$
15. $f(x) = \cos^2 x, x \in [-\pi, \pi]$	16. $f(x) = \operatorname{sh} x, x \in [-\pi, \pi]$
17. $f(x) = \sin^2 x, x \in [-\pi, \pi]$	18. $f(x) = \cos^2 2x, x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$
19. $f(x) = \sin 3x, x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$	20. $f(x) = \cos 3x, x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$
21. $f(x) \equiv 1, x \in [0, \pi]$ Разложить в ряд по косинусам	22. $f(x) \equiv 1, x \in [0, \pi]$ Разложить в ряд по синусам
23. $f(x) = e^{-x}, x \in [-\pi, \pi]$	24. $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & 0 < x \leq 3 \\ 3 + x, & -3 \leq x < 0 \end{cases}$
25. $f(x) = \cos^2 x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	26. $f(x) = a^x, x \in [-\pi, \pi]$
27. $f(x) = 1 - x , x \in [0, 2]$ Разложить в ряд по синусам	28. $f(x) = 1 - x , x \in [0, 2]$ Разложить в ряд по косинусам
29. $f(x) = x^2 - x x , x \in [-\pi, \pi]$	30. $f(x) = e^{ x }, x \in [-\pi, \pi]$

7. Исследовать на непрерывность функционал $I(y)$, $y(x) \in C^1[0, \pi]$ на кривой $y_0(x)$ в смысле близости нулевого и первого порядков

1. $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1+y'^2} dx, y_0(x) \equiv 0$	2. $I = \int_0^{\pi} (1+2y'^2) dx, y_0(x) \equiv 0$
3. $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+y'^2} dx, y_0(x) = x$	4. $I = \int_0^1 y'^2 dx, y_0(x) \equiv 0$
5. $I = \int_0^{\pi} (y+2y'^2) dx, y_0(x) \equiv 0$	6. $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1+y'^2} dx, y_0(x) = x$
7. $I = \int_0^{\pi} (1+y'^3) dx, y_0(x) \equiv 0$	8. $I = \int_0^1 (y'+y) dx, y_0(x) \equiv 0$
9. $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1+y'^4} dx, y_0(x) \equiv 0$	10. $I = \int_0^{\pi} y \sqrt{1+y'^2} dx, y_0(x) \equiv 0$
11. $I = \int_0^{\pi} x \sqrt{1+y'^2} dx, y_0(x) \equiv 0$	12. $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+y'^2} dx, y_0(x) \equiv 0$
13. $I = \int_0^1 y'^3 \sqrt{1+y'^2} dx, y_0(x) \equiv 0$	14. $I = \int_0^{\pi} x \sqrt{1+y'^4} dx, y_0(x) = x$
15. $I = \int_0^1 y'^3 dx, y_0(x) \equiv 0$	16. $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+y'^3} dx, y_0(x) \equiv 0$
17. $I = \int_0^1 y'^4 dx, y_0(x) \equiv 0$	18. $I = \int_0^1 (y' - y) dx, y_0(x) \equiv 0$
19. $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1-y'^4} dx, y_0(x) \equiv 0$	20. $I = \int_0^{\pi} (1-y'^3) dx, y_0(x) \equiv 0$
21. $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+y'^2} dx, y_0(x) = x^2$	22. $I = \int_0^{\pi} x \sqrt{1+y'^2} dx, y_0(x) = x$
23. $I = \int_0^1 (y' + xy) dx, y_0(x) \equiv 0$	24. $I = \int_0^1 xy'^4 dx, y_0(x) \equiv 0$

25. $I = \int_0^1 x^2 (y' + y) dx, y_0(x) \equiv 0$	26. $I = \int_0^{\pi} y'^2 \sqrt{1 + y'^2} dx, y_0(x) \equiv 0$
27. $I = \int_0^{\pi} y(1 - y'^3) dx, y_0(x) \equiv 0$	28. $I = \int_0^1 (y'^2 + x^2 y^2) dx, y_0(x) \equiv 0$
29. $I = \int_0^{\pi} (y - y'^3) dx, y_0(x) \equiv 0$	30. $I = \int_0^{\pi} x^2 (1 + y'^3) dx, y_0(x) \equiv 0$

8. Найти первую и вторую вариации функционала [1, 10]

1. $I = \int_0^{\pi} y \sqrt{1 + y'^4} dx$	2. $I = \int_0^{\pi} (x^2 + xy' + y'^2) dx$
3. $I = \int_0^{\pi} (x^2 + y'') dx$	4. $I = \int_0^{\pi} (xy + y'z) dx, y = y(x), z = z(x)$
5. $I = \iint_D (xy + z_y'^2 + z_x') dx dy, z = z(x, y)$	6. $I = \int_0^{\pi} y' \sqrt{1 + x^4} dx$
7. $I = \int_0^{\pi} (y + y' + y'') dx$	8. $I = \iint_D (xyz + z_x' + z_y') dx dy, z = z(x, y)$
9. $I = \int_0^{\pi} (y^2 + xy y'^2) dx$	10. $I = \int_0^{\pi} (y + y''^2) dx$
11. $I = \int_0^{\pi} (y + y'' + y^{(4)}) dx$	12. $I = \iint_D (z + z_x'^2 + z_y') dx dy, z = z(x, y)$
13. $I = \int_0^{\pi} y' \sqrt{1 + y'} dx$	14. $I = \int_0^{\pi} (y + y'z + z'w) dx,$ $y = y(x), z = z(x), w = w(x)$
15. $I = \int_0^{\pi} y' \sqrt{1 + y'^2} dx$	16. $I = \iint_D (z + z_x'^2 + z_y'^2) dx dy, z = z(x, y)$

17. $I = \int_0^{\pi} (y + y'' + y''') dx$	18. $I = \int_0^{\pi} (y^2 - y''^2) dx$
19. $I = \int_0^{\pi} y'' \sqrt{1+x^4} dx$	20. $I = \iint_D (z^2 - z_x'^2 - z_y'^2) dx dy, z = z(x, y)$
21. $I = \int_0^{\pi} (w'y + y'z + z'w) dx,$ $y = y(x), z = z(x), w = w(x)$	22. $I = \int_0^{\pi} y'z'w' dx,$ $y = y(x), z = z(x), w = w(x)$
23. $I = \int_0^{\pi} (y - 2y'' + y^{(4)}) dx$	24. $I = \int_0^{\pi} y''' \sqrt{1+x^2} dx$
25. $I = \iint_D (xyz - z'_x z'_y) dx dy, z = z(x, y)$	26. $I = \iint_D xyz'_x z'_y dx dy, z = z(x, y)$
27. $I = \int_0^{\pi} (x - y')^2 dx$	28. $I = \int_0^{\pi} (x - y' + y'')^2 dx$
29. $I = \int_0^{\pi} (w'y - y'z - z'w)^2 dx,$ $y = y(x), z = z(x), w = w(x)$	30. $I = \int_0^{\pi} (w' + y' + z')^3 dx,$ $y = y(x), z = z(x), w = w(x)$

9. Найти экстремали функционалов [1, 10]

1. $\int_0^1 \frac{1}{y^4} dx, y(0)=1, y(1)=2$	2. $\int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2) dx, y(0)=1, y(\pi/2)=1$
3. $\int_{-1}^0 (12xy - y'^2) dx,$ $y(-1)=1, y(0)=0$	4. $\int_0^{\pi/2} (4y \cos x - y^2 + y'^2) dx,$ $y(0)=0, y(\pi/2)=0$
5. $\int_0^1 y''^2 dx, y(0)=y'(0)=y''(0)=0,$ $y(1)=1, y'(1)=4, y''(1)=12$	6. $\int_0^{\pi} (y'''^2 - y''^2) dx, y(0)=y'(0)=y''(0)=0,$ $y(\pi)=\pi, y'(\pi)=2, y''(\pi)=0$

7. $\int_0^1 (y'^2 - y - y^2) e^{2x} dx, y(0)=0, y(1)=e^{-1}$	8. $\int_{-1}^1 (y'^2 - 2xy) dx, y(-1)=-1, y(1)=1$
9. $\int_{-1}^0 (y'^2 + 2xy) dx, y(-1)=0, y(0)=2$	10. $\int_0^1 (x + y'^2) dx, y(0)=1, y(1)=2$
11. $\int_0^1 (y_1' y_2' - y_1 y_2) dx, y_1(0)=y_2(0)=0,$ $y_1(1)=y_2(1)=1$	12. $\int_0^1 \sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2} dx, y_1(0)=1, y_2(0)=2,$ $y_1(1)=2, y_2(1)=1$
13. $\int_0^1 (y'^2 + y^2) dx, y(0)=0, y(1)=1$	14. $\int_0^1 (e^x y' - y'^2) dx, y(0)=1, y(1)=e$
15. $\int_0^2 y'^2 dx, y(0)=y'(0)=0,$ $y(2)=1, y'(2)=2$	16. $\int_0^1 y \sqrt{1 + y'^2} dx,$ $y(0)=0, y(1)=2$
17. $\int_0^1 x y'^2 dx, y(0)=1, y(1)=0$	18. $\int_1^e (x y'^2 + y y') dx, y(1)=0, y(e)=1$
19. $\int_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2) dx, y(0)=1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	20. $\int_1^2 (y'^2 + 2y y' + y^2) dx, y(1)=1, y(2)=0$
21. $\int_0^{4/3} \frac{y}{y'^2} dx, y(0)=1, y\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{9}$	22. $\int_1^2 \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{x} dx, y(1)=0, y(2)=2$
23. $\int_0^1 (12xy + y'^2) dx, y(0)=0, y(1)=1$	24. $\int_1^e x y'^2 dx, y(1)=0, y(e)=1$
25. $\int_0^{\pi/2} (2x y y' + y'^2) dx,$ $y(0)=1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$	26. $\int_0^1 (y'^2 + 2x^4 y' + 4xy) dx,$ $y(0)=0, y(1)=0$
27. $\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx, y(0)=1, y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	28. $\int_{-1}^1 (x y' + y'^2) dx, y(-1)=1, y(1)=0$

29. $\int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y') dx, y(0)=1, y(1)=2$	30. $\int_0^3 (3x - y) y' dx, y(0)=1, y(3)=4,5$
--	---

10. Найти кратчайшее расстояние между кривыми

1. $y=4-x$ и $y=\sqrt{-x}$	2. $1=x^2 + \frac{y^2}{4}$ и $1=(x-3)^2 + (y-3)^2$
3. $1=x^2 + y^2$ и $y=\frac{4}{x}$	4. $1=x^2 + y^2$ и $1=(x-3)^2 + \frac{(y-3)^2}{4}$
5. $1=\frac{(x-3)^2}{4} + (y-3)^2$ и $1=(x+3)^2 + \frac{(y+3)^2}{4}$	6. $y=x^2 + 1$ и $y=\sqrt{x-1}$
7. $1=x^2 - y^2$ и $y=\frac{3}{2}x$	8. $1=\frac{x^2}{4} - y^2$ и $y=x$
9. $1=\frac{x^2}{4} - y^2$ и $1=\frac{y^2}{4} - x^2$	10. $1=x^2 + y^2$ и $36=(x-3)^2 + (y-3)^2$
11. $y=x^2$ и $y=-(x-1)^2$	12. $1=x^2 - y^2$ и $1=(x-3)^2 + y^2$
13. $1=x^2 + \frac{y^2}{4}$ и $y=16-2x$	14. $1=(x-3)^2 + (y-3)^2$ и $y=-x$
15. $4=x^2 + y^2$ и $y=\frac{6}{x^2}$	16. $y=x^2 + 1$ и $x=1+y^2$
17. $y=2x-1$ и $y=4x^2+5$	18. $y=x+1$ и $y=6x^2+2$
19. $1=\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ и $y=16-2x$	20. $1=\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ и $1=(x-6)^2 + (y-6)^2$
21. $1=\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25}$ и $4=(x-6)^2 + (y-6)^2$	22. $1=\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25}$ и $4=x^2 + y^2$
23. $4=x^2 - y$ и $1=x^2 + y^2$	24. $1=-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25}$ и $4=x^2 + y^2$

25. $1 = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$ и $y = 2x$	26. $1 = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$ и $y = x^2$
27. $1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ и $1 = x^2 + y^2$	28. $1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ и $16 = x^2 + y^2$
29. $1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ и $1 = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25}$	30. $1 = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9}$ и $y = \frac{x}{4}$

11. Исследовать на экстремум функционалы [1, 10]

1. $\int_0^1 (y'^2 + y^2) dx, y(0) = -1, y(1) = 1$	2. $\int_0^a (1 - e^{-y^2}) dx, y(0) = 0, y(a) = b, a > 0$
3. $\int_2^3 \frac{x^3}{y^2} dx, y(2) = 4, y(3) = 9$	4. $\int_1^2 (xy'^4 - 2yy'^3) dx, y(1) = 0, y(2) = 1$
5. $\int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2) dx, y_1(0) = y_2(0) = 0,$ $y_1(1) = y_2(1) = 2$	6. $\int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 + 4y_2) dx,$ $y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1(1) = 1, y_2(1) = 0$
7. $\int_{-1}^1 (y'^2 + y'^3) dx, y(-1) = -1, y(1) = 3$	8. $\int_{-1}^2 (x^2 y' + 1) y' dx, y(-1) = 1, y(2) = 4$
9. $\int_0^1 \sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2} dx, y_1(0) = y_2(0) = 0,$ $y_1(1) = 2, y_2(1) = 4$	10. $\int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 - y_2 y_1') dx, y_1(0) = 2,$ $y_2(0) = 1, y_1(1) = e, y_2(1) = 0$
11. $\int_0^2 \frac{1}{y'} dx, y(0) = 0, y(2) = 1$	12. $\int_1^2 \frac{x^2}{y'^3} dx, y(1) = 1, y(2) = 2\sqrt{2}$
13. $\int_0^1 e^y y'^2 dx, y(0) = 0, y(1) = \ln 4$	14. $\int_0^1 e^y \left(\frac{y'^2}{2} + y^2 \right) dx, y(0) = 1, y(1) = e$
15. $\int_0^{\ln 2} (y'^2 + 3y^2) e^{2x} dx,$ $y(0) = 0, y(\ln 2) = \frac{15}{8}$	16. $\int_1^2 x^2 y'^2 dx, y(1) = 1, y(2) = 2$

17. $\int_1^3 (y'^2 + 12xy') dx, y(1)=0, y(3)=26$	18. $\int_0^a \frac{x}{y'^2} dx, y(0)=0, y(a)=b, a, b > 0$
19. $\int_0^{\pi/2} (y^2 - y'^2) dx, y(0)=1, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$	20. $\int_0^1 (1+x)y'^2 dx, y(0)=0, y(1)=1$
21. $\int_0^1 (y'^2 + x^2) dx, y(0)=-1, y(1)=1$	22. $\int_0^1 yy'^2 dx, y(0)=1, y(1)=1$
23. $\int_1^2 (xy'^4 - 2yy'^3) dx, y(1)=0, y(2)=4$	24. $\int_{-1}^2 y'(1+x^2y') dx, y(-1)=1, y(2)=4$
25. $\int_1^2 (12y^2 + x^2y'^2) dx, y(1)=1, y(2)=8$	26. $\int_0^1 (y'^2 - y'^3) dx, y(0)=-1, y(1)=a$
27. $\int_0^{\pi/4} (y^2 - y'^2 + 6y \sin 2x) dx,$ $y(0)=0, y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$	28. $\int_0^{\pi/4} (4y^2 - y'^2 + 8y) dx,$ $y(0)=-1, y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$
29. $\int_0^2 (6y'^2 - y'^4 + yy') dx,$ $y(0)=0, y(2)=3$	30. $\int_0^a \frac{x}{y'} dx, y(0)=0, y(a)=b, a, b > 0$

Приложения. Листинги программ

В данном приложении приведены листинги программ, написанных в пакете символьной математики Maple, которые используются при решении разобранных в пособии задач.

1. Программа к примеру 2.4.1.

```
restart;
with(linalg):
phi:=unapply(cos(x), x);epsilon:=0.01;
plot([phi(x), x], x=0..Pi/2, color=[black, black], linestyle=[1, 1],
symbolsize=10, thickness=[3, 3]);
X[0]:=Pi/4;
norma:=epsilon+1;
for jj from 1 by 1 while norma > epsilon do norma:=0;
X[jj]:=evalf(phi(X[jj-1]));
norma:=abs(X[jj]-X[jj-1]);
end do;
fsolve(cos(x)-x=0);
```

2. Программа к примеру 2.4.2.

```
restart;
with(linalg):
phi:=unapply(arccot(x), x);
phi2:=unapply(cot(x), x);
epsilon:=0.01;
plot([phi(x), x], x=0..Pi, color=[black, black], linestyle=[1, 1],
symbolsize=10, thickness=[3, 3]);
plot([phi2(x), x], x=Pi/8..Pi/2, color=[black, black], linestyle=[1, 1],
symbolsize=10, thickness=[3, 3]);
X[0]:=Pi/4;
norma:=epsilon+1;
for jj from 1 by 1 while norma > epsilon do norma:=0;
X[jj]:=evalf(phi(X[jj-1]));
norma:=abs(X[jj]-X[jj-1]);
end do;
fsolve(arccot(x)-x=0);
```

3. Программа к примеру 2.5.1.

```
restart;
with(linalg):
```

```

A:=Matrix(3, 3, [[10, 1, 1],[2, 10, 1],[2, 2, 10]]);
B:=Vector(3, [12, 13, 14]); epsilon:=0.01;
alpha:=Matrix(3, 3):
beta:=Vector(3, [12, 13, 14]):
for i from 1 by 1 to 3 do
beta[i]:=evalf(B[i]/A[i,i]):
od:
for i from 1 by 1 to 3 do
for j from 1 by 1 to 3 do
if i=j then alpha[i,j]:=0 else alpha[i,j]:=-evalf(A[i,j]/A[i,i]) fi;
od:od:
for i from 1 by 1 to 3 do
x[i][0]:=evalf(beta[i]):
od:
norma:=0:
for i from 1 by 1 to 3 do
y[i]:=0:
for j from 1 by 1 to 3 do
y[i]:=evalf(y[i]+alpha[i,j]*x[j][0]):
od:
x[i][1]:=evalf(beta[i]+y[i]):
norma:=evalf(norma+(x[i][1]-x[i][0])^2):
od:
for jj from 1 by 1 while norma > epsilon^2 do norma:=0:
for i from 1 by 1 to 3 do
y[i]:=0:
for k from 1 by 1 to 3 do
y[i]:=evalf(y[i]+alpha[i,k]*x[k][jj-1]):
od:
x[i][jj]:=evalf(beta[i]+y[i]):
norma:=evalf(norma+(x[i][jj]-x[i][jj-1])^2):
od:
n:=jj:
end do:
X:=Matrix(n+1, 3):
for i from 1 by 1 to n+1 do
for j from 1 by 1 to 3 do
X[i,j]:=x[j][i-1]:
od:od:
for j from 1 by 1 to n do

```

```

sqrt(sum((x[ii][j]-x[ii][j-1])^2, ii=1..3));
od;
print(X);
linsolve(A, B);

```

4. Программа к примеру 2.12.1 (решение уравнения (2.12.7)).

```

restart;
with(linalg):
phi2:=unapply((5-u)*(5*u-1)-(u^2-1)^2, u);
plot([phi(u), u], u=0..3, color=[black, black], linestyle=[1, 1],
symbolsize=10, thickness=[3, 3]);
U[0]:=2.5;
norma:=epsilon+1;
for jj from 1 by 1 while norma > epsilon do norma:=0;
U[jj]:=evalf(phi(U[jj-1]));
x2:=6-U[jj];
norma:=abs(U[jj]-U[jj-1]);
end do;

```

5. Программа к примеру 2.12.1 (решение систем (2.12.1), (2.12.2)).

```

restart;
with(linalg):
evalf(solve({C1*x1+C2=(3/2)*sqrt(4-x1^2), C1*y+C2=-(3/2)*sqrt(4-(5-x2)^2)+5, C1=sqrt(4-x1^2)/x, C1=sqrt(4-(5-x2)^2)/(5-x2), x2<5},
{x1,x2,C1,C2}));

```

Библиографический список

1. *Амосов А.А., Игнатъева Н.У., Перескоков А.В.* Задачи по вариационному исчислению. – М.: Изд-во МЭИ, 2007. – 64 с.
2. *Антоневич А.Б., Мазель М.Х., Радыно Я.В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: Учеб. пособие. – Минск: БГУ, 2011. – 319 с.
3. *Борзых Д.А.* Элементарное введение в функциональный анализ: Теория, примеры и задачи с решениями. Более 200 подробно рассмотренных примеров и задач. – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 288 с.
4. *Вайнберг М.М.* Функциональный анализ: Специальный курс: Учеб. пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1979. – 128 с.
5. *Вулих Б.З.* Введение в функциональный анализ. – М.: Наука, 1967. – 416 с.
6. *Зуева А.Г.* Методы математической физики. Интегральные уравнения. – Иваново: Ивановский гос. хим.-технол. ун-т, 2006. – 32 с.
7. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
8. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения: Введение в теорию: Учебное пособие. – Изд. 3-е. – М.: Комкнига, 2010. – 304 с.
9. *Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И.* Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие. – Изд. 3-е, испр. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 192 с.
10. *Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И.* Вариационное исчисление: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие. – Изд. 2-е, испр. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 176 с.
11. *Петровский И.Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. – Изд. 3-е, испр. – М.: Наука, 1965. – 130 с.
12. *Соболев В.И.* Лекции по дополнительным главам математического анализа. – М.: Наука, 1968. – 286 с.
13. *Шамин Р.В.* Функциональный анализ от нуля до единицы. – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 272 с.
14. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Специальный курс. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 388 с.
15. *Эльсгольц Л.Э.* Вариационное исчисление: Учебник. – Изд. 7-е. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 208 с.

Оглавление

Предисловие	3
Глава 1. Основная теория к решению задач	4
1.1. Метрические и нормированные пространства	4
1.2. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические и банаховы пространства	9
1.3. Сжимающие отображения. Применение принципа сжимающих отображений к решению алгебраических уравнений, систем линейных отображений и интегральных уравнений	12
Решение алгебраических уравнений	14
Решение систем линейных алгебраических уравнений	14
Решение интегральных уравнений	15
1.4. Обратный оператор. Решение интегральных уравнений	16
Решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода	18
Решение интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода	20
1.5. Гильбертовы пространства	20
1.6. Ряды Фурье	23
1.7. Функционалы. Расстояния между функциями. Непрерывность функционалов. Дифференцируемость функционалов. Вариации функционалов	26
1.8. Экстремум функционала с неподвижными границами	31
1.9. Экстремум функционала с подвижными границами	34
Глава 2. Примеры решения задач	38
2.1. Нахождение расстояний между функциями. Вычисление норм функций	38
2.2. Вычисление норм векторов и матриц	39
2.3. Вычисление норм операторов	40
2.4. Решение алгебраических уравнений методом последовательных приближений	43
2.5. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом последовательных приближений	45
2.6. Решение интегральных уравнений методом последовательных приближений	47
2.7. Решение интегральных уравнений с помощью резольвенты	50
2.8. Разложение функций в ряды Фурье	52

2.9. Исследование функционалов на непрерывность	55
2.10. Вычисление вариаций функционалов	57
2.11. Нахождение экстремалей функционалов	58
2.12. Нахождение расстояний между кривыми	61
2.13. Нахождение расстояний между поверхностями	67
2.14. Нахождение максимумов и минимумов функционалов	73
Глава 3. Варианты заданий для расчетных работ	75
Приложения. Листинги программ	90
Библиографический список	93

Тем. план 2026, ч. 1, поз. 16

Вестяк Владимир Анатольевич
Земсков Андрей Владимирович

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ
И ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Редактор *В.В.Родченкова*

Подписано в печать 07.04.2026.

Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 5,58. Уч.-изд. л. 6. Тираж 200 экз.

Заказ 726/1446.

Издательство МАИ

(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва А-80, ГСП-3 125993

Отпечатано с готового оригинал-макета

Типография Издательства МАИ

(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва А-80, ГСП-3 125993

